



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

**Discipline ou spécialité :**

Dynamique des fluides

---

**Présentée et soutenue par :**

Germain BOYER

**le :** lundi 22 octobre 2012

**Titre :**

Étude de stabilité et simulation numérique de l'écoulement  
interne des moteurs à propergol solide simplifiés

---

**Ecole doctorale :**

Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE—ONERA EDyF

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Jean-Luc Estivalèzes (directeur de thèse)

M. Grégoire Casalis (co-directeur de thèse)

**Rapporteurs :**

M. Uwe Ehrenstein professeur à l'IRPHE, Marseille

M. Joseph Majdalani, professeur à l'Univ. Tennessee Space Institute

**Membre(s) du jury :**

M. Christophe Airiau, professeur, IMFT, président du jury

M. François Vuillot, ingénieur de recherches, ONERA

Mme Nathalie Cesco, correspondante CNES

M. Jean-Luc Estivalèzes, professeur, ONERA



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Le VSP dans le problème des Oscillations De Pression</b>	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>État de l’art sur les ODP</b>	<b>19</b>
1.1	Mise en évidence des ODP . . . . .	19
1.2	Données expérimentales pour l’étude des ODP . . . . .	21
1.2.1	Tirs à échelle réduite . . . . .	21
1.2.2	Les montages gaz froid . . . . .	25
1.3	Écoulement moyen des MPS . . . . .	32
1.3.1	Définition d’un état moyen stationnaire . . . . .	32
1.3.2	Écoulement de Taylor-Culick . . . . .	37
1.3.3	Solution numérique . . . . .	39
1.3.4	Comparaison au montage VALDO . . . . .	41
1.4	Acoustique des moteurs à propergol solide . . . . .	43
1.4.1	Solution d’onde plane . . . . .	44
1.4.2	Couche limite acoustique . . . . .	45
1.4.3	Amplitudes . . . . .	46
1.5	Étude de stabilité globale de l’écoulement de Taylor-Culick . . . . .	47
1.5.1	Formulation et résolution du problème . . . . .	48
1.5.2	Lien avec le VSP . . . . .	50
1.5.3	Amplitude comparées du VSP et de l’acoustique . . . . .	52
1.5.4	Pertinence théorique des modes de stabilité de référence . . . . .	53
1.5.5	Utilisation des équations de stabilité adjointes . . . . .	54
1.6	Conclusion : ce qu’on sait sur le mécanisme d’apparition des ODP . . . . .	55
<b>II</b>	<b>Étude de stabilité globale des Moteurs à Propergol Solide</b>	<b>59</b>
<b>2</b>	<b>Introduction à la stabilité globale des MPS simplifiés</b>	<b>61</b>
2.1	Écriture du problème de stabilité . . . . .	61
2.1.1	Équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible . . . . .	62
2.1.2	Équations pour le problème direct . . . . .	63
2.1.3	Problème adjoint . . . . .	64
2.1.4	Formalisme matriciel . . . . .	66
2.2	Discrétisation par collocation spectrale . . . . .	68
2.2.1	Généralités sur la collocation spectrale . . . . .	68
2.2.2	Application à la stabilité globale . . . . .	70
2.2.3	Cas multidomaine . . . . .	73
2.3	Résolution numérique du problème aux valeurs propres linéarisé . . . . .	75
2.3.1	Algorithme d’Arnoldi — calcul des valeurs propres de plus grand module . . . . .	75
2.3.2	Problème aux valeurs propres généralisé — “shift and invert” . . . . .	77
2.3.3	Complexité des différentes étapes du calcul . . . . .	78

2.3.4	Factorisation LU parallèle . . . . .	78
2.3.5	Vue générale de la programmation . . . . .	80
2.4	Modes de stabilité dépendants du maillage . . . . .	82
2.4.1	Comparaison aux modes calculés en variables primitives . . . . .	82
2.4.2	Perspectives pour l'étude de stabilité . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Stability and sensitivity analysis in a simplified Solid Rocket Motor flow</b>	<b>87</b>
3.1	Résumé du chapitre . . . . .	87
3.2	Introduction . . . . .	87
3.3	A convective-diffusive simplified case . . . . .	89
3.3.1	Direct and adjoint equations . . . . .	89
3.3.2	Matched asymptotic developments . . . . .	90
3.4	Numerical resolution . . . . .	92
3.4.1	Comparison with the asymptotic development . . . . .	92
3.4.2	Sensitivity to disturbances . . . . .	93
3.4.3	Discussion . . . . .	95
3.5	Global stability of a simplified Solid Rocket Motor . . . . .	96
3.5.1	Direct and adjoint problems . . . . .	96
3.5.2	Multidomain discretisation . . . . .	98
3.5.3	Description of the eigenmodes . . . . .	99
3.5.4	Influence of the viscosity and the domain extent . . . . .	100
3.6	Sensitivity analysis of the global stability problem . . . . .	103
3.6.1	Sensitivity of the boundary conditions . . . . .	103
3.6.2	Sensitivity to a disturbance on the base state . . . . .	105
3.7	Final discussion . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Stabilité à grand nombre de Reynolds</b>	<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	113
4.2	Problème direct à $Re = 2000$ . . . . .	114
4.2.1	Convergence en maillage des valeurs propres . . . . .	114
4.2.2	Fonctions propres et erreurs numériques . . . . .	116
4.2.3	Points amphidromiques . . . . .	118
4.2.4	Conclusion . . . . .	119
4.3	Problème adjoint à $Re = 2000$ . . . . .	121
4.3.1	Convergence en maillage . . . . .	121
4.3.2	Limites de la précision numérique . . . . .	123
4.4	Effet du nombre de Reynolds . . . . .	125
4.4.1	Spectres et points amphidromiques . . . . .	125
4.4.2	Tailles des couches limites . . . . .	126
4.4.3	Conclusion . . . . .	128
4.5	Influence de la position des limites du domaine . . . . .	129
4.5.1	Difficultés numériques . . . . .	129
4.5.2	Étude paramétrique . . . . .	130
4.6	Conclusion . . . . .	130
<b>III</b>	<b>Simulation numérique directe d'un MPS simplifié</b>	<b>135</b>
<b>5</b>	<b>Mise en place de la simulation numérique directe</b>	<b>137</b>
5.1	Mise en place des simulations numériques . . . . .	137
5.1.1	Définition des maillages . . . . .	137



5.1.2	Discrétisation spatiale sur les cellules internes . . . . .	139
5.1.3	Conditions aux limites . . . . .	141
5.1.4	Intégration en temps . . . . .	144
5.2	Modes hydrodynamiques en configuration lisse . . . . .	145
5.2.1	Comparaison aux modes de stabilité calculés sur le domaine entier . . . . .	145
5.2.2	Problèmes rencontrés en multi-domaine . . . . .	149
<b>6</b>	<b>Mise en évidence intrinsèque du VSP</b> . . . . .	<b>155</b>
6.1	Etude de la réponse impulsionnelle de l'écoulement . . . . .	155
6.1.1	Principe du calcul . . . . .	155
6.1.2	Effet du scotch sur l'écoulement moyen . . . . .	155
6.1.3	Description de la réponse à une perturbation initiale . . . . .	156
6.1.4	Décomposition en somme de modes de stabilité . . . . .	158
6.1.5	Conclusion . . . . .	162
6.2	Réponse de l'écoulement à un forçage acoustique . . . . .	163
6.2.1	Principe du calcul . . . . .	163
6.2.2	Double interaction entre VSP et acoustique . . . . .	163
6.2.3	Analyse HR des signaux de pression et de vitesse radiale . . . . .	164
6.2.4	Conclusion . . . . .	167
<b>7</b>	<b>Vers l'étude de réceptivité du VSP aux ondes de pression</b> . . . . .	<b>169</b>
7.1	Introduction . . . . .	169
7.2	Amplitude de la réponse forcée de l'écoulement des MPS . . . . .	170
7.2.1	Linéarité de la réponse forcée vis-à-vis des ondes de pression . . . . .	170
7.2.2	Influence des paramètres de la rupture de débit . . . . .	172
7.3	Revue des biais entre stabilité linéaire et DNS . . . . .	178
7.3.1	Approximation sur les bornes du domaine . . . . .	179
7.3.2	Influence de la distorsion de l'écoulement moyen . . . . .	181
7.4	Formulation théorique de la réceptivité d'un MPS simplifié . . . . .	184
7.4.1	Séparation des différents termes . . . . .	184
7.4.2	Approche modale . . . . .	186
7.4.3	Description par perturbations optimales . . . . .	187
7.5	Conclusion . . . . .	191
<b>A</b>	<b>Compléments mathématiques</b> . . . . .	<b>197</b>
A.1	Forme faible du problème de stabilité direct . . . . .	197
A.1.1	Rappel des équations de stabilité . . . . .	197
A.1.2	Cadre Mathématique . . . . .	197
A.1.3	Problème de stabilité bien posé . . . . .	199
A.2	Méthodes de traitement du signal . . . . .	201
A.2.1	Analyse de Fourier . . . . .	201
A.2.2	Analyse Haute Résolution . . . . .	204
<b>B</b>	<b>Compléments pour la simulation numérique directe</b> . . . . .	<b>209</b>
B.1	Compléments théoriques sur le code CEDRE . . . . .	209
B.1.1	Equations d'Euler compressibles monodimensionnelles . . . . .	209
B.1.2	Préconditionnement bas-Mach . . . . .	210
B.1.3	Conditions aux limites et réflexions acoustiques . . . . .	211
B.2	Utilisation des conditions aux limites hétérogènes et instationnaires dans CEDRE . . . . .	212
B.2.1	Terminologie utilisée . . . . .	212
B.2.2	Exemple d'une condition hétérogène . . . . .	212

B.2.3 Passage à une condition hétérogène et instationnaire . . . . . 215

# Table des figures

1	Fusée Ariane 5 au décollage . . . . .	14
1.1	Géométrie interne du P230. Le rapport longueur ( $L$ ) sur rayon ( $R$ ) n'est pas représentatif. $R(x)$ représente le rayon du domaine fluide en une abscisse $x$ du moteur comptée en partant du fond avant. La conicité des blocs est largement exagérée. . . . .	20
1.2	Transformée de Fourier à fenêtre glissante de l'enregistrement accélérométrique de l'Étage d'Accélérateur à Poudre numéro 1 (EAP 1) du vol 510 d'Ariane 5 ( $N_f = 8192$ , $N_w = 1024$ , $N_o = 900$ ). D'après Chedevergne [25] . . . . .	22
1.3	Chargement des différents démonstrateurs à configurations tri-segmentée avec tuyère intégrée. . . . .	23
1.4	Enregistrements et traitement de la mesure de pression au fond avant du tir LP6t27. . . . .	24
1.5	Enregistrements et traitement de la mesure de pression au fond avant du tir LP6t27. La courbes de pression stationnaire et la trace des bouffées est très proche de celles du LP6t27 et du P230. . . . .	24
1.6	Enregistrements et traitement de la mesure de pression au fond avant du tir LP9t24. On remarque la disparition de la première chute de pression en fin de tir, la chute de pression beaucoup plus brusque en fin de tir et la troisième bouffée droite contrairement aux tirs précédents. La chute de pression moyenne au milieu du tir, due à l'apparition du chambrage arrière, est elle conservée. . . . .	25
1.7	Chargement des tirs LP9 destinés à mettre en évidence le VSP . . . . .	26
1.8	Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de pression instationnaire de différents tirs LP9 . . . . .	26
1.9	Montages gaz froid de l'ONERA/DEFA. . . . .	27
1.10	Spectre de vitesse fluctuante en $x/h = 22.5$ pour une hauteur de veine $h = 20$ mm, d'après Ugurtas [88]. . . . .	28
1.11	Visualisation par fluorescence induite de l'écoulement dans le montage VECLA, entre $x/h = 13.15$ et $x/h = 29.05$ pour un conduit de hauteur $h = 20$ mm, d'après Ugurtas [88]. Deux vitesses d'injection sont considérées. Les zones rouges correspondent à une forte concentration de traceur. Les images sont réalisées par tranche de 53 mm de large (soit $\delta x/h = 2.65$ ) à différents instants, ce qui explique les discontinuités observées. . . . .	28
1.12	Schéma du montage VALDO — cas à trois éléments . . . . .	29
1.13	Vue des éléments du montage VALDO . . . . .	29
1.14	Densité de spectrale de puissance associée aux signaux de pression et de vitesse instationnaire pour le montage VALDO à trois éléments avec tuyère, exprimée en fonction de la pulsation réduite $\omega$ . La ligne verticale noire donne la fréquence du premier mode acoustique longitudinal du conduit. . . . .	33
1.15	Densité de spectrale de puissance associée aux signaux de vitesse instationnaire pour le montage VALDO à trois éléments sans tuyère, exprimée en fonction de la pulsation réduite $\omega$ . La position des prises de vitesse est donnée en millimètres. La ligne verticale noire donne la fréquence du deuxième mode acoustique longitudinal du conduit. . . . .	34

1.16	Pulsations réduites des instabilités apparaissant dans les spectrogrammes de vitesse et fréquences acoustiques longitudinales. «3e-at» : configuration à trois éléments avec tuyère ; «3e-st» : configuration à trois éléments sans tuyère. . . . .	35
1.17	Reconstitution des moyennes spatiales du rayon (rouge, continu) et de la vitesse d'injection (tirets bleus) au cours du temps pour le tir LP9t24. L'échelle de temps est adimensionnée par le temps de référence du moteur. On remarque l'augmentation caractéristique de la vitesse d'injection à $\tau \approx 46$ qui correspond au découvrément du chambrage arrière. . . . .	36
1.18	Grandeurs de référence pour le montage VALDO et les restitutions des tirs LP9t10 et LP9t24 par le code PERSE à l'instant $\tau = 77.8$ et $\tau = 58.4$ respectivement. . . . .	37
1.19	Schéma d'un MPS simplifié vu comme un conduit cylindrique à parois débitantes. Les grandeurs présentées sont caractéristiques du montage VALDO. . . . .	37
1.20	Profils radiaux de vitesse de l'écoulement de Taylor-Culick. . . . .	40
1.21	Comparaison des lignes de courant d'une solution numérique calculée avec le code CEDRE (valeurs de $r$ positives) et de l'écoulement de Taylor-Culick (valeurs de $r$ négatives) pour un MPS simplifié. Les contours de couleur correspondent à la norme du vecteur vitesse. Vitesse d'injection moyenne de 1.04 m/s. . . . .	41
1.22	Comparaison entre les modules de vitesse $\ \mathbf{U}\ $ de l'écoulement de Taylor-Culick (traits pleins) et les enregistrements de vitesse moyenne dans le montage VALDO à trois éléments avec tuyère et une vitesse d'injection $V_{inj} = 1.16$ m/s. Les vitesses mesurées correspondent à la même campagne d'essais que les spectres présentés en section 1.2.2.4	42
1.23	Profils longitudinaux de vitesse RMS tracés à différentes positions radiales pour le montage VALDO à quatre éléments sans tuyère. Vitesse d'injection $V_{inj} = 1.03$ m/s. . . . .	43
1.24	Densité spectrale de puissance associée aux signaux de vitesse instationnaire pour le montage VALDO à quatre éléments sans tuyère, exprimée en fonction de la pulsation réduite $\omega$ . La vitesse d'injection est de 1.03 m/s. Séries de sondages effectués en différentes abscisses. Par comparaison au cas à trois éléments, les raies spectrales sont autour des pulsations réduites $\omega \approx 58, 62, 66$ et $70$ , avec toutefois une plus grande dispersion. .	44
1.25	Spectre et exemple de fonction propre obtenus par analyse de stabilité BiGlobale pour le cas de calcul $X_{out} = 8$ , $Re = 2100$ . Maillage $N \times M = 50 \times 150$ points. . . . .	50
1.26	Profils radiaux et évolution longitudinale de la fonction propre associée au mode $\omega = 62.91 - 7.57i$ . . . . .	51
1.27	Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de pression instationnaire au fond avant. La pulsation réduite est ramenée au rayon moyen et à la vitesse d'injection moyenne calculés par le code PERSE à chaque instant : $\omega = 2\pi f R / V_{inj}$ . (- - -) : pulsations réduites des modes de stabilité corrigés d'un facteur $C_E = 0.965$ . . . . .	52
1.28	Profils de vitesse $\sqrt{\Re(\hat{u}_x)^2 + \Re(\hat{u}_r)^2}$ calculés pour le mode $\hat{\omega}_r = 64.405$ pour une vitesse d'injection bruitée, $Re = 2000$ et $X_{out} = 10$ , comparés aux mesures VALDO en configuration à trois éléments sans tuyère et vitesse d'injection $V_{inj} = 1.05$ m/s. D'après Chedevergne [25]. . . . .	52
1.29	Spectres du cas de calcul $X_{out} = 10$ , $Re = 3000$ calculés pour différentes discrétisations longitudinales. . . . .	54
1.30	Schéma du scénario d'apparition des ODP dues aux détachements tourbillonnaires pariétaux. . . . .	56
2.1	Domaine de calcul $\Omega$ pour la stabilité linéaire (en vert) et notations relatives aux limites physiques. . . . .	62
2.2	Domaine physique et partitionnement du domaine de calcul en $P \times Q = 4 \times 3$ sous-domaines	73

2.3	Topologie des matrices globales pour une discrétisation sur plusieurs domaines. Les carrés pleins verts représentent les matrices élémentaires $A^*$ et $B$ de taille $3 \times 3$ assemblées sur les diagonales. Après multiplication par les matrices de dérivation radiales liées à un domaine $D_{pq}$ , des termes non-nuls apparaissent dans le carré vert gras; de même, après multiplication par les matrices de dérivation longitudinales du même domaine, des termes non-nuls apparaissent dans le carré rouge gras. Enfin, les zones colorées en vert (resp. rouge) correspondent aux interfaces radiales (resp. longitudinales) entre le domaine $D_{pq}$ et ses voisins. . . . .	76
2.4	Spectres calculés pour $Re = 3000$ , $X_{in} = 0$ et $X_{out} = 10$ , avec une valeur propre-cible $\omega_0 = 60 + 10i$ . Discrétisation : $N \times M = 50 \times 100$ . $\square$ : modes calculés en fonction de courant; $\triangle$ : modes calculés en variables primitives, pression nulle imposée seulement en sortie; $\nabla$ : modes calculés en variables primitives, condition de traction nulle en sortie. Les lignes pointillées tracées à $\hat{\omega}_r = cte$ permettent de voir que les modes calculés des trois manières différentes ont à peu près la même pulsation réduite. . . . .	83
2.5	Spectres calculés pour $Re = 3000$ , $X_{in} = 0$ et $X_{out} = 10$ , en variables primitives avec condition de traction nulle en sortie. Valeur propre-cible : $\omega_0 = 60 + 10i$ . Discrétisation : $N \times M = 50 \times 100$ . $\square$ : $N \times M = 50 \times 100$ ; $\triangle$ : $N \times M = 60 \times 100$ ; $\nabla$ : $N \times M = 100 \times 100$ . . . . .	83
2.6	Spectres calculés pour $X_{in} = 0$ en variables primitives avec condition de traction nulle en sortie. Valeur propre-cible : $\omega_0 = 60 + 10i$ . Discrétisation : $N \times M = 50 \times 100$ . $\square$ : $X_{out} = 8$ , $Re = 3000$ ; $\square$ : $X_{out} = 9$ , $Re = 3000$ ; $\diamond$ : $X_{out} = 10$ , $Re = 500$ ; $\diamond$ : $X_{out} = 10$ , $Re = 1000$ ; $\diamond$ : $X_{out} = 10$ , $Re = 2000$ ; $\bullet$ : $X_{out} = 10$ , $Re = 3000$ . . . . .	84
2.7	Countours de fluctuations de vitesse pour $X_{in} = 0$ , $X_{out} = 10$ et $Re = 3000$ . Modes $\hat{\omega} = 62.04 - 0.51i$ calculé en variables primitives avec condition de traction nulle en sortie (haut) et $\hat{\omega} = 62.52 - 5.12i$ calculé en fonction de courant (miroir). . . . .	84
3.1	Eigenvalues of the $N^{th}$ -order approximation of the direct eigenvalue problem ( $\blacksquare$ ) and level lines of its resolvent norm (- - -) for various Reynolds numbers. The particular line (-) defines the zone where the resolvent norm is lower than the numerical accuracy $\epsilon_M \approx 10^{-14}$ and where no eigenvalue can be computed. (a) : $Re = 200$ — $N = 6$ ; (b) : $Re = 200$ — $N = 10$ ; (c) : $Re = 500$ — $N = 6$ . . . . .	92
3.2	Comparison between the theoretical eigenvalues of the direct problem and the computed direct and adjoint eigenvalues, for various Reynolds numbers. ( $\blacksquare$ ) : analytical solution. $\triangle$ : computed direct eigenvalues; $\nabla$ : computed adjoint eigenvalues — discretisation by spectral collocation method, $N = 200$ points. (a) : $Re = 100$ ; (b) : $Re = 200$ ; (c) : $Re = 500$ . . . . .	93
3.3	Eigenfunctions of the direct and adjoint eigenvalue problems; the direct eigenfunctions are normalized by $\hat{u}(0.97)$ and the adjoint ones are normalized by $\hat{u}(0.03)$ . The approximate direct eigenfunctions, given in Equation. (3.53), are plotted as a comparison. (a) : mode $\hat{\omega} = -i$ , $Re = 200$ ; (b) : mode $\hat{\omega} = -3i$ , $Re = 200$ ; (c) : mode $\hat{\omega} = -3i$ , $Re = 500$ . . . . .	94
3.4	Evolution of the sensitivity function $\nabla_{\hat{u}(0)}$ related to a disturbance on the boundary condition at $x = 0$ for a varying Reynolds number. The first five eigenmodes are considered. The $y$ -axis scale is logarithmic. . . . .	95
3.5	Spatial evolution of the sensitivity function related to base state disturbances $\nabla_U$ for various Reynolds numbers. (a) : mode $\hat{\omega} = -i$ ; (b) : mode $\hat{\omega} = -5i$ ; (c) : mode $\hat{\omega} = -9i$ . The number of oscillations is directly correlated to the order of the considered mode. . . . .	96
3.6	Spectra obtained for the global stability analysis of the Taylor-Culick flow, computed for $Re = 100$ , $X_{in} = 4$ , $X_{out} = 8$ . Direct eigenproblem solved with meshes $MONO_0$ ( $\square$ ), $MULTI_{d,0}^{100}$ ( $\diamond$ ) and $MULTI_{d,1}^{100}$ ( $\circ$ ), and adjoint problem solved with meshes $MONO_0$ ( $\triangle$ ) and $MULTI_{a,0}^{100}$ ( $\nabla$ ). . . . .	100

3.7	Isocontours of the eigenfunctions amplitude in logarithmic scale for the eigenmode $\omega = 56.55 - 27.91i$ , computed for $Re = 100$ , $X_{in} = 4$ , $X_{out} = 8$ . The direct axial ( $a$ ) and radial ( $b$ ) velocities are obtained with $MULTI_{d,0}^{100}$ ; the adjoint axial ( $c$ ) and radial ( $d$ ) velocities are obtained with $MULTI_{a,0}^{100}$ . A normalisation factor $1/u_x(7.5, 0.9)$ is applied. Once again, the direct velocity fluctuations are amplified downstream and the adjoint ones decay away from $x = X_{in}$ . One must notice the existence of particular points where the amplitude tends towards zero, called <i>amphydromic points</i> . . . . .	101
3.8	Axial profile of the radial velocity fluctuation at $r = 0.98$ obtained for various outflow conditions and computed with $MULTI_{d,0}^{100}$ . The considered eigenmode is $\hat{\omega}_r = 56.55 - 27.91i$ . Global shape (left) and different boundary layer behaviours close to the outflow (right). (—) : $\alpha_{out} = 0$ , $\beta_{out} = 0$ ; (- - -) : $\alpha_{out} = 1$ , $\beta_{out} = 0$ ; (. . .) : $\alpha_{out} = 0$ , $\beta_{out} = Re^{-1}$ .	101
3.9	Axial ( $a$ ) and radial ( $b$ ) profiles of the logarithmic amplitude of the direct velocity fluctuations and related approximations $\hat{u}_x(x, r_1) \approx a(r_1)x^{\lambda(r_1)}$ and $\hat{u}_r(x, r_2) \approx b(r_2)x^{\lambda(r_2)}$ , with $r_1 = 0.91$ , $r_2 = 0.66$ , $\lambda(r_1) = \lambda(r_2) = 25$ , as functions of $\log(x)$ . The agreement is correct everywhere but in the neighbourhood of the outflow, where the imposed boundary condition induces a boundary layer in the same way as in the simplified convective-diffusive problem. . . . .	102
3.10	Phase isocontours of the eigenfunctions which amplitude is presented in Figure 3.7. ( $a$ ) : direct axial velocity; ( $b$ ) direct radial velocity; ( $c$ ) : adjoint axial velocity; ( $d$ ) adjoint radial velocity. The amphydromic points where the amplitude decays to zero correspond to the endpoints of the phase break lines here, so that the phase is not defined at these particular locations. . . . .	102
3.11	Phase isocontours of the adjoint radial velocity profile of the eigenmodes computed for $Re = 100$ , $X_{in} = 4$ , $X_{out} = 8$ with $MULTI_{a,0}^{100}$ . ( $a$ ) : mode $\omega = 31 - 27i$ ; ( $b$ ) : $\omega = 40 - 29i$ ; ( $c$ ) : $\omega = 49 - 28i$ ; ( $d$ ) : $\omega = 57 - 28i$ ; ( $e$ ) : $\omega = 63 - 28i$ ; ( $d$ ) : $\omega = 71 - 29i$ . . . . .	103
3.12	Spectra of the adjoint stability problem of the Taylor-Culick flow, computed for $X_{in} = 4$ , $X_{out} = 8$ . ( $\square$ ) with mesh $MULTI_{a,0}^{100}$ : $Re = 100$ ; ( $\nabla$ ) : $Re = 200$ ; ( $\Delta$ ) : $Re = 500$ . . . . .	104
3.13	Adjoint radial velocity for the third eigenmode ( $\hat{\omega}_r \approx 57$ ) computed for $Re = 100$ (solid lines), $Re = 200$ (dotted lines) and $Re = 500$ (dashed lines); $X_{in} = 4$ , $X_{out} = 8$ . ( $a$ ) : level lines of the phase field; ( $b$ ) : profiles at $r = 0.91$ . . . . .	104
3.14	Spectra of the adjoint stability problem of the Taylor-Culick flow, computed for $Re = 100$ and $X_{in} = 4$ . The modes with 0, 1, 3, 6 and 9 amphydromic points are represented. ( $\blacksquare$ ) : $X_{out} = 7$ ; ( $\Delta$ ) : $X_{out} = 7.5$ ; ( $\nabla$ ) : $X_{out} = 8$ ; ( $\triangleright$ ) : $X_{out} = 8.5$ ; ( $\triangleleft$ ) : $X_{out} = 9$ ; ( $\diamond$ ) : $X_{out} = 9.5$ . . . . .	105
3.15	Amplitude of the sentitivity functions of the mode $\omega = 57 - 28i$ obtained for $Re = 100$ , $X_{in} = 4$ , $X_{out} = 8$ . ( $a$ ) : inflow boundary condition; ( $b$ ) : wall boundary condition; ( $c$ ) : outflow boundary condition. Continuous lines : $\nabla_{\hat{u}_x} \hat{\omega}$ ; continuous lines with symbols : $\nabla_{\hat{u}_r} \hat{\omega}$ ; dashed lines : $\nabla_{\partial_x \hat{u}_x} \hat{\omega}$ ; dashed lines with symbols : $\nabla_{\partial_x \hat{u}_r} \hat{\omega}$ . The sensitivity function related to the outflow pressure $\nabla_{\hat{p}} \hat{\omega}$ is not shown in plot ( $c$ ) since it is directly equal to $Re \nabla_{\partial_x \hat{u}_x} \hat{\omega}$ . . . . .	106
3.16	Amplitude of the sensitivity functions to base flow velocity modifications for the direct stability problem. Mode $\omega = 57 - 28i$ obtained for $Re = 100$ , $X_{in} = 4$ , $X_{out} = 8$ . ( $a$ ) : $\nabla_{U_x} \hat{\omega}$ ; ( $b$ ) : $\nabla_{U_r} \hat{\omega}$ ; ( $c$ ) : $\nabla_{\partial_x U_x} \hat{\omega}$ ; ( $d$ ) : $\nabla_{\partial_x U_r} \hat{\omega}$ ; ( $e$ ) : $\nabla_{\partial_r U_x} \hat{\omega}$ ; ( $f$ ) : $\nabla_{\partial_r U_r} \hat{\omega}$ . . . . .	107
4.1	Spectres calculés pour $Re = 2000$ , $X_{in} = 4$ et $X_{out} = 8$ , avec une valeur propre-cible $\omega_0 = 60 + 10i$ . $\square$ : $N \times M = 200 \times 100$ ; $\triangle$ : $N \times M = 300 \times 100$ ; $\nabla$ : $N \times M = 400 \times 100$ ; $\triangleright$ : $N \times M = 500 \times 80$ . . . . .	114

- 4.2 Spectres calculés pour  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$  et  $X_{out} = 8$ .  $\triangleright$  : mono-domaine,  $N \times M = 500 \times 80$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\square$  :  $MULTI_{d,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 100 + 20i$ ;  $\triangle$  :  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\nabla$  :  $MULTI_{d,3}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\triangleright$  :  $MULTI_{d,4}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\diamond$  :  $MULTI_{d,5}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\circ$  :  $MULTI_{d,6}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 80 + 10i$ . . . . . 116
- 4.3 Spectres calculés avec une condition de pression nulle en sortie pour  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$  et  $X_{out} = 8$ . Valeur propre cible :  $\omega_0 = 60 + 10i$ .  $\square$  :  $N \times M = 100 \times 100$ ;  $\triangle$  :  $N \times M = 150 \times 100$ ;  $\nabla$  :  $N \times M = 300 \times 100$ ;  $\triangleright$  :  $N \times M = 400 \times 100$ . Modes calculés en multi-domaine pour comparaison :  $\blacksquare$  :  $MULTI_{d,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 100 + 20i$ ;  $\blacktriangle$  :  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ . . . . . 117
- 4.4 Iso-contours relatifs à  $\log(|\hat{u}_x|)$  et  $\log(|\hat{u}_r|)$ , cas de calcul  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$ . (—) : mode  $\hat{\omega} = 59.38 - 19.05i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; (- - -) : mode  $\hat{\omega} = 59.63 - 18.83i$ , maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$ ; (- · - · -) : mode  $\hat{\omega} = 60.44 - 15.88i$  maillage monodomaine  $N \times M = 400 \times 100$ ; (- · · -) : mode  $\hat{\omega} = 59.49 - 19.18i$  maillage monodomaine  $N \times M = 100 \times 100$ , condition de pression nulle en sortie. Les fonctions propres sont normalisées avec la valeur de  $\hat{u}_x (= 7.5, r = 0.9)$ . . . . . 118
- 4.5 Profils axiaux de fluctuations de vitesse au voisinage de l'entrée du domaine en  $r = 0.964$ . (—), mode  $\hat{\omega} = 59.38 - 19.05i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; (- - -), mode  $\hat{\omega} = 59.63 - 18.83i$ , maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$ . (- · - · -), mode  $\hat{\omega} = 60.44 - 15.88i$  maillage monodomaine  $N \times M = 400 \times 100$ . (- · · -), mode  $\hat{\omega} = 59.49 - 19.18i$  maillage monodomaine  $N \times M = 100 \times 100$ , condition de pression nulle en sortie. . . . . 119
- 4.6 Profils axiaux de la quantité  $\partial_x \hat{u}_r$  en sortie du domaine en  $r = 0.964$ . (—), mode  $\hat{\omega} = 59.38 - 19.05i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; (- - -), mode  $\hat{\omega} = 59.63 - 18.83i$ , maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$ . (- · - · -), mode  $\hat{\omega} = 60.44 - 15.88i$  maillage monodomaine  $N \times M = 400 \times 100$ . (- · · -), mode  $\hat{\omega} = 59.49 - 19.18i$  maillage monodomaine  $N \times M = 100 \times 100$ , condition de pression nulle en sortie. . . . . 119
- 4.7 Profils axiaux de fluctuations de vitesse en  $r = 0.964$ . (—), mode  $\hat{\omega} = 89.41 - 15.13i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; (- - -), mode  $\hat{\omega} = 89.64 - 14.8i$ , maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$ . 120
- 4.8 Iso-contours relatifs à  $\log(|\hat{u}_x|)$  et  $\log(|\hat{u}_r|)$  (traits pointillés et contours de couleur) et lignes de phase  $\phi = k\pi/2$  correspondantes (traits pleins) tracés pour les modes comptant deux à cinq points amphidromiques. Cas de calcul :  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$ . Maillage  $MULTI_2^d$ . Les points amphidromiques sont les points où l'amplitude des fluctuations est nulle et où leur phase n'est pas définie. C'est pourquoi ils apparaissent là où les lignes de phase convergent et où l'amplitude décroît. . . . . 120
- 4.9 Spectres calculés pour  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$  et  $X_{out} = 8$ . Spectres du problème direct :  $\square$  :  $MULTI_{a,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\triangle$  :  $MULTI_{a,2}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 100 + 20i$ ;  $\square$  :  $MULTI_{a,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 100 + 20i$ ;  $\triangle$  :  $MULTI_{a,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\nabla$  :  $MULTI_{a,2}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\triangleright$  :  $MULTI_{a,3}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ . 122
- 4.10 Iso-contours relatifs à  $\log(|\tilde{u}_x|)$  et  $\log(|\tilde{u}_r|)$ , cas de calcul  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$ . (—) : mode  $\tilde{\omega} = 59.83 - 18.53i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{a,1}^{2000}$ ; (- - -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.53 - 19.34i$ , maillage  $MULTI_{a,2}^{2000}$ ; (- · - · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.55 - 18.88i$  maillage  $MULTI_{a,3}^{2000}$ . Valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ . . . . . 123
- 4.11 Profils axiaux de fluctuations de vitesse en  $r = 0.964$ . (—) : mode  $\tilde{\omega} = 59.83 - 18.53i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{a,1}^{2000}$ ; (- · - · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.53 - 19.34i$ , maillage  $MULTI_{a,2}^{2000}$ ; (- · · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.55 - 18.88i$  maillage  $MULTI_{a,3}^{2000}$ . Valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ . . . . . 124
- 4.12 Profils radiaux de fluctuations de vitesse. (—) : mode  $\tilde{\omega} = 59.83 - 18.53i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{a,1}^{2000}$ ; (- · - · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.53 - 19.34i$ , maillage  $MULTI_{a,2}^{2000}$ ; (- · · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.55 - 18.88i$  maillage  $MULTI_{a,3}^{2000}$ . Valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ . 125



4.13	Spectres calculés $X_{\text{in}} = 4$ et $X_{\text{out}} = 8$ et différents nombres de Reynolds, avec une valeur propre-cible $\omega_0 = 60 + 10i$ . Les modes propres sont représentés jusqu'à $n = 12$ points amphidromiques. Les maillages utilisés sont renseignés en table 4.5. $\square$ : Re = 2000; $\triangle$ : Re = 1000; $\nabla$ : Re = 700; $\triangleright$ : Re = 500; $\triangleleft$ : Re = 200; $\circ$ : Re = 100. . . . .	127
4.14	Iso-contours relatifs à $\log( \hat{u}_x )$ et $\log( \hat{u}_r )$ (problème direct). Contours en couleur : mode $\hat{\omega} = 66.07 - 17.68i$ calculé pour Re = 2000, $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ avec le maillage $\text{MULTI}_{d,0}^{2000}$ ; traits pleins noirs : mode $\hat{\omega} = 65.29 - 19.44i$ calculé pour Re = 500, $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ avec le maillage $\text{MULTI}_{d,0}^{500}$ ; traits pointillés noirs : mode $\hat{\omega} = 63.39 - 28.12i$ calculé pour Re = 100, $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ avec le maillage with $\text{MULTI}_{d,0}^{100}$ . Les fonctions propres sont normalisées avec la valeur de $u_x(x = 7.5, r = 0.9)$ . . . . .	127
4.15	Profils de fluctuations de vitesse pour le problème direct, mode correspondant à la valeur propre $\hat{\omega}_3$ . (—) : Re = 100; (- - -) : Re = 500; (- · - · -) : Re = 2000. . . . .	128
4.16	Profils de fluctuations de vitesse pour le problème adjoint, mode correspondant à la valeur propre $\tilde{\omega}_3$ . (—) : Re = 100; (- - -) : Re = 500; (- · - · -) : Re = 2000. . . . .	128
4.17	Spectres calculés pour Re = 100 et $X_{\text{out}} - X_{\text{in}} = 4$ par intégration du problème adjoint. $\square$ : $X_{\text{in}} = 3$ , $X_{\text{out}} = 7$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.22, 0.46, 0.80\}$ ; $\triangle$ : $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.23, 0.49, 0.81\}$ ; $\nabla$ : $X_{\text{in}} = 5$ , $X_{\text{out}} = 9$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.25, 0.51, 0.83\}$ . . . . .	131
4.18	Spectres calculés pour Re = 100 et $X_{\text{in}} = 4$ par intégration du problème adjoint. $\square$ : $X_{\text{out}} = 7$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.26, 0.50, 0.85\}$ ; $\triangle$ : $X_{\text{out}} = 8$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.23, 0.49, 0.81\}$ ; $\nabla$ : $X_{\text{out}} = 9$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.21, 0.44, 0.74\}$ . . . . .	131
4.19	Spectres calculés pour Re = 100 et $X_{\text{out}} = 8$ par intégration du problème adjoint. $\square$ : $X_{\text{in}} = 3$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.20, 0.44, 0.78\}$ ; $\triangle$ : $X_{\text{in}} = 4$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.23, 0.49, 0.81\}$ ; $\nabla$ : $X_{\text{in}} = 5$ ; points amphidromiques de $\tilde{u}_r$ : $\xi_a \in \{0.27, 0.54, 0.85\}$ . . . . .	132
5.1	Cellules internes, cellules limites et faces limites . . . . .	138
5.2	Principe de construction des maillages pour les calculs CEDRE. . . . .	139
5.3	Évolution de la pression en $x = 0$ , $r = R/2 = 0.015$ m (a) et de la vitesse axiale (b) et radiale (c) en $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$ m, $r = 5R/6 = 0.025$ m calculée par DNS (—) pour un MPS simplifié suite à l'introduction du mode de stabilité de valeur propre $\hat{\omega} = 40.8 - 8.14i$ calculé en variables primitives avec $(N \times M) = 50 \times 100$ points, d'amplitude $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.08$ . Rapport d'aspect $X_{\text{out}} = 10$ , rayon $R = 0.03$ m, vitesse d'injection pariétale moyenne $V_{\text{inj}} = 1.02$ m/s et nombre de Reynolds Re = 2000. (- - -) : évolution théorique du mode hydrodynamique introduit en condition initiale. . . . .	146
5.4	Évolution de la vitesse radiale en $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$ , $r = 5R/6 = 0.025$ calculée par DNS (—) pour un MPS simplifié suite à l'introduction du mode de stabilité calculé en variables primitives avec une condition de sortie de type «traction nulle», d'amplitude $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.1$ . Rapport d'aspect $X_{\text{out}} = 10$ , rayon $R = 0.03$ m, vitesse d'injection pariétale moyenne $V_{\text{inj}} = 1.02$ m/s et nombre de Reynolds Re = 2000. (a) : mode $\hat{\omega} = 39.1 - 3.91i$ calculé avec $(N \times M) = 50 \times 100$ ; (b) : mode $\hat{\omega} = 38.9 - 6.38i$ calculé avec $(N \times M) = 100 \times 100$ ; (c) : mode $\hat{\omega} = 42.4 - 6.45i$ calculé avec $(N \times M) = 100 \times 100$ . . . . .	147



5.5	Pulsations réduites théoriques (—) comparées à celles issues de l'analyse HR ( $F_s = 22050$ Hz, $N_w = 128$ points) des signaux de fluctuations de vitesse radiale calculés en $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$ , $r = 5R/6 = 0.025$ par simulation numérique. Amplitude de la condition initiale : $\varepsilon_{\text{lin}} = 0.01$ . Modes propres considérés : $\square$ : mode $\hat{\omega} = 40.8 - 8.14i$ ; $\triangle$ : mode $\hat{\omega} = 44.5 - 7.4i$ ; $\nabla$ : mode $\hat{\omega} = 48.5 - 6.6i$ ; $\triangleright$ : mode $\hat{\omega} = 52.8 - 6.0i$ ; $\triangleleft$ : mode $\hat{\omega} = 57.4 - 5.6i$ ; $\diamond$ : mode $\hat{\omega} = 62.6 - 5.3i$ ; $\circ$ : mode $\hat{\omega} = 68.5 - 5.2i$ ; $\square$ : mode $\hat{\omega} = 75.3 - 5.51i$ . Modes calculés en fonction de courant avec les paramètres $\text{Re} = 2000$ et $X_{\text{out}} = 10$ . Discrétisation $N \times M = 50 \times 150$ . . . . .	148
5.6	Pulsations réduites théoriques (—) comparées à celles issues de l'analyse HR ( $F_s = 22050$ Hz, $N_w = 128$ points) des signaux de fluctuations de vitesse radiale calculés par simulation numérique. Condition initiale : fonction propre du mode $\hat{\omega} = 40.8 - 8.14i$ , amplitude . $\square$ : maillage MAIL <sub>1</sub> <sup>C</sup> ; $\triangle$ : maillage MAIL <sub>2</sub> <sup>C</sup> ; $\nabla$ : maillage MAIL <sub>3</sub> <sup>C</sup> . Modes calculés en fonction de courant avec les paramètres $\text{Re} = 2000$ et $X_{\text{out}} = 10$ . Discrétisation $N \times M = 50 \times 150$ . . . . .	149
5.7	Évolution de la pression en $x = 0$ , $r = R/2 = 0.015$ m (a) et de la vitesse axiale (b) et radiale (c) en $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$ m, $r = 5R/6 = 0.025$ m calculées par DNS (courbes de couleur) pour un MPS simplifié suite à l'introduction du mode propre $\hat{\omega} = 41.1 - 9.82i$ (calcul en variables primitives, $(N \times M) = 50 \times 100$ points, $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.1$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 2200$ , $R = 0.03$ m, $V_{\text{inj}} = 1.02$ m/s). (- - -) : cas $C_1$ ; (- · - · - · -) : cas $C_2$ ; (—) : évolution théorique, somme des fluctuations acoustiques et hydrodynamiques. . . . .	151
5.8	Évolution de la pression en $x = 0$ , $r = R/2 = 0.015$ m (a) et de la vitesse axiale (b) et radiale (c) en $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$ m, $r = 5R/6 = 0.025$ m calculées par DNS (courbes de couleur) pour un MPS simplifié suite à l'introduction du mode propre $\hat{\omega} = 41.1 - 9.82i$ (calcul en variables primitives, $(N \times M) = 50 \times 100$ points, $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.1$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 2200$ , $R = 0.03$ m, $V_{\text{inj}} = 1.02$ m/s). (- · - · - · -) : cas $C_2$ ; (—) : cas $C_3$ ; (- - -) : cas $C_4$ . . . . .	151
5.9	HRogramme du signal de pression au fond avant obtenu pour les simulations $C_2$ à $C_7$ , exprimé dans le plan $(t, \omega)$ , où $\omega$ est la pulsation réduite liée à la fréquence $f$ des exponentielles par $\omega = 2\pi f R / V_{\text{inj}}$ . (- - -) : pulsation des modes acoustiques longitudinaux; (—) : pulsation du mode hydrodynamique introduit à $t = 0$ ; $\square$ : cas $C_2$ ; $\triangle$ : cas $C_3$ ; $\nabla$ : cas $C_4$ ; $\triangleright$ : cas $C_5$ ; $\triangleleft$ : cas $C_6$ ; $\diamond$ : cas $C_7$ , le coeur des symboles représente l'amplitude des exponentielles correspondantes. . . . .	152
6.1	Profil de vitesse d'injection pariétale avec raccord en tangente hyperbolique au fond avant et scotch autour du point $x_s = 0.1202$ m. (—) : scotch sur deux mailles ( $\delta x_s = 0.0006$ m); (- - -) : scotch sur trois mailles ( $\delta x_s = 0.0009$ m); (· · ·) : scotch sur quatre mailles ( $\delta x_s = 0.0012$ m); . . . . .	156
6.2	Différence entre le champ de rotationnel calculé avec un scotch sur deux mailles autour de $x_s = 0.12$ m et celui calculé en configuration lisse. . . . .	157
6.3	Champ de rotationnel des fluctuations de vitesse calculé par Simulation Numérique Directe à différents instants. Une perturbation est introduite à l'instant initial juste en amont du scotch ( $x_s = 0.1202$ m, $\delta x_s = 0.0006$ m). Les structures tourbillonnaires pariétales induites par cette perturbation sont générées par croissance transitoire jusqu'à $t = 0.02$ s et sont ensuite atténuées suivant la décroissance temporelle proche de celle des modes de stabilité calculés sur un demi-domaine. . . . .	157
6.4	Capteurs de vitesse (m/s) et de pression au fond avant (Pa). . . . .	158
6.5	Norme quadratique des fluctuations de vitesse calculées par simulation numérique directe $\ \mathbf{u}'\ _2^2$ . L'amplitude est normalisée par la valeur initiale. . . . .	158

6.6	Effet de la non-normalité sur la croissance transitoire associée à une condition initiale comportant deux modes $\hat{\mathbf{u}}_1$ et $\hat{\mathbf{u}}_2$ quasiment parallèles et de décroissance temporelle très différente ( $-\hat{\omega}_{i,1} \ll -\hat{\omega}_{i,2}$ ). Inspiré de Schmid [77]. Il existe une plage de temps, entre le moment où la composante des fluctuations $\mathbf{u}'$ associée à $\hat{\mathbf{u}}_1$ est négligeable et celle associée à $\hat{\mathbf{u}}_2$ est encore grande, où ces fluctuations sont grandes et presque alignées avec $\hat{\mathbf{u}}_2$ . . . . .	158
6.7	Énergie, résidus et amplitude de la décomposition des champs de fluctuations de vitesse calculés par DNS en somme de modes hydrodynamiques. . . . .	160
6.8	Comparaison entre les champs de fluctuations de vitesse calculés par DNS (champs du haut) et par décomposition sur la base des modes de stabilité (champ miroir en bas). À gauche : vitesse axiale ; à droite : vitesse radiale. . . . .	161
6.9	Fluctuations calculées en $x/R = 6.67$ , $r/R = 0.833$ (—) et reconstruction théorique effectuée à partir des champs de vitesse à $t_1 = 0.02$ s (- - -). . . . .	162
6.10	Norme quadratique des fluctuations de vitesse calculées par simulation numérique directe $\ \mathbf{u}'\ _2^2$ (—) et reconstitution par décomposition en modes hydrodynamiques (—). L'amplitude est normalisée par la norme de la condition initiale. . . . .	162
6.11	Capteurs de pression (Pa) pour les simulations numériques directes effectuées en intégration temporelle explicite (schéma de Runge-Kutta d'ordre 3, $\delta t = 10^{-8}$ , —) et implicite (schéma de Runge-Kutta d'ordre 2, $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ , - - -). . . . .	164
6.12	Capteurs de vitesse radiale (m/s) en proche paroi à l'aval de la rupture de débit. (—) : intégration explicite ; (- - -) : intégration implicite. . . . .	165
6.13	Enveloppes des fluctuations de pression (lignes continues) et de vitesse radiale au point $x/R = 4$ , $r/R = 0.933$ . (—) : intégration explicite ; (—) : intégration implicite. . . . .	165
6.14	Analyse haute résolution de la vitesse radiale en $x/R = 6.67$ , $r/R = 0.833$ et de la pression au fond avant. Fréquence d'échantillonnage : $F_s = 22050$ Hz ; taille de fenêtre : $N_w = 1024$ . (—) : fréquence du mode acoustique fondamental ; (- - -) : fréquence des modes hydrodynamiques calculés par analyse de stabilité linéaire avec $X_{in} = 4$ , $X_{out} = 8$ et $Re = 2000$ . . . . .	166
7.1	Capteurs de pression (Pa) et de vitesse radiale (m/s) pour les simulations numériques directes effectuées avec différentes amplitudes de fluctuations acoustiques initiale $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{AC}$ . (—) : $\alpha_{AC} = 10^{-3}$ ; (- - -) : $\alpha_{AC} = 10^{-4}$ ; (- · -) : $\alpha_{AC} = 10^{-5}$ ; (- · · -) : $\alpha_{AC} = 10^{-5}$ . Paramètres du calcul : $X_{out} = 8$ , $R = 0.03$ m, $V_{inj} = 1.04$ m/s, rupture de débit pariétale en $x/R = 4$ . Intégration temporelle implicite (schéma de Runge-Kutta d'ordre 2, $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ s). . . . .	171
7.2	Analyse haute résolution de la vitesse radiale en $x/R = 6.67$ , $r/R = 0.833$ et de la pression au fond avant. Fréquence d'échantillonnage : $F_s = 22050$ Hz ; taille de fenêtre : $N_w = 1024$ . Acoustique initiale : $\alpha_{AC} = 10^{-3}$ ( $\square$ ) ; $\alpha_{AC} = 10^{-4}$ ( $\triangle$ ) ; $\alpha_{AC} = 10^{-5}$ ( $\triangleright$ ) ; $\alpha_{AC} = 0$ : ( $\nabla$ ) . . . . .	172
7.3	Capteur de pression (Pa) et de vitesse radiale (m/s) pour la simulation numérique directe du cas de calcul $X_{out} = 8$ , $R = 0.03$ m, $V_{inj} = 1.04$ m/s, avec rupture de débit pariétale en $x/R = 4$ . Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2, $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ s). Acoustique initiale : $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{AC} = 10^{-4}$ . Taille du scotch : $\delta x = 6 \cdot 10^{-4}$ m (—) ; $\delta x = 9 \cdot 10^{-4}$ m (- - -) ; $\delta x = 12 \cdot 10^{-4}$ m (- · -) ; $\delta x = 33 \cdot 10^{-4}$ m (- · · -). . . . .	173
7.4	HRogrammes associés aux signaux de pression au fond avant et de vitesse radiale en $x/R = 8.333$ , $r/R = 0.833$ pour la simulation numérique directe du cas de calcul $X_{out} = 8$ , $R = 0.03$ m, $V_{inj} = 1.04$ m/s, avec ruptures de débit pariétales en $x/R = 4$ . Taille du scotch : $\delta x = 6 \cdot 10^{-4}$ m ( $\square$ ) ; $\delta x = 9 \cdot 10^{-4}$ m ( $\triangle$ ) ; $\delta x = 12 \cdot 10^{-4}$ m ( $\nabla$ ) ; $\delta x = 33 \cdot 10^{-4}$ m ( $\triangleright$ ). Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2, $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ s). Acoustique initiale : $\alpha_{AC} = 10^{-4}$ . Paramètres de l'analyse HR : $N_w = 1024$ , $F_s = 22050$ Hz. . . . .	174

7.5	Capteurs de vitesse radiale (m/s) et de pression (Pa) pour la simulation numérique directe du cas de calcul $X_{\text{out}} = 8$ , $R = 0.03$ m, $V_{\text{inj}} = 1.04$ m/s. Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2, $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ s). Acoustique initiale : $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{\text{AC}} = 10^{-3}$ . Scotch sur deux mailles ( $\delta x = 6 \cdot 10^{-4}$ m), situé en $x_s/R = 3$ (—), $x_s/R = 4$ (- - -) et $x_s/R = 5$ (- · -). . . . .	175
7.6	HRogrammes associés aux signaux de vitesse radiale en $x/R = 8.333$ , $r/R = 0.833$ pour la simulation numérique directe du cas de calcul $X_{\text{out}} = 8$ , $R = 0.03$ m, $V_{\text{inj}} = 1.04$ m/s, avec ruptures de débit pariétales en $x/R = 3$ et $x/R = 3$ (deux mailles). Paramètres de l'analyse HR : $N_w = 1024$ , $F_s = 22050$ Hz. . . . .	176
7.7	Champs de vitesse radiale issus de la simulation numérique directe du cas de calcul $X_{\text{out}} = 12$ , $R = 0.03$ m, $V_{\text{inj}} = 1.04$ m/s, avec deux ruptures de débit pariétales en $x/R = 4$ et $x/R = 8$ . Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2, $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ s). Acoustique initiale : $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{\text{AC}} = 10^{-5}$ . . . . .	177
7.8	Capteur de pression (Pa) et de vitesse radiale (m/s) pour la simulation numérique directe du cas de calcul $X_{\text{out}} = 12$ , $R = 0.03$ m, $V_{\text{inj}} = 1.04$ m/s, avec deux ruptures de débit pariétales en $x/R = 4$ et $x/R = 8$ . Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2, $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ s). Acoustique initiale : $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{\text{AC}} = 10^{-5}$ . . . . .	178
7.9	HRogrammes associés aux signaux de pression au fond avant et de vitesse radiale en $x/R = 10.67$ , $r/R = 0.833$ pour la simulation numérique directe du cas de calcul $X_{\text{out}} = 12$ , $R = 0.03$ m, $V_{\text{inj}} = 1.04$ m/s, avec deux ruptures de débit pariétales en $x/R = 4$ et $x/R = 8$ . Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2, $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ s). Acoustique initiale : $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{\text{AC}} = 10^{-5}$ . L'amplitude $a$ des exponentielles modulées est présentée sous forme logarithmique $k(10 \log a + s)$ avec $k = 0.0126$ et $s = 100$ . . . . .	179
7.10	Comparaison entre les pulsations réduites issues de la DNS et les valeurs théoriques données par l'analyse de stabilité linéaire. . . . .	180
7.11	Sensibilités optimales vis-à-vis d'une perturbation sur les composantes axiale et radiale de l'écoulement de base en fonction de l'indice $n$ du mode considéré. (—) : $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 100$ ; (—) : $X_{\text{in}} = 5$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 100$ ; (—) : $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 2000$ ; (—) : $X_{\text{in}} = 5$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 2000$ . . . . .	182
7.12	Distorsions sur l'écoulement de base (à gauche) et sensibilités partielles correspondantes (à droite) pour le mode $\hat{\omega}_n = 71.32 - 18.64i$ — cas $X_{\text{in}} = 4.98$ , $X_{\text{out}} = 7.98$ , $\text{Re} = 2000$ . . . . .	183
7.13	Tracés de la norme de la résolvante pour le cas de calcul $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 100$ . Discrétisation multi-domaine avec $N \times M = 80 \times 50$ points avec raffinement en sortie. . . . .	189
7.14	Tracés de la norme de la résolvante pour le cas de calcul $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 2000$ . Discrétisation multi-domaine avec $N \times M = 80 \times 50$ points avec raffinement en sortie. . . . .	190
7.15	Comparaison entre la perturbation optimale de l'écoulement de Taylor-Culick calculée pour $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ , $\text{Re} = 2000$ pour un forçage de pulsation $\bar{\omega} = 65.5$ (haut), et le champ de vitesse de la réponse forcée calculé par DNS avec un scotch en $x_s/R = 4$ et une vitesse d'injection $V_{\text{inj}} = 1.04$ m/s (intégration explicite, pas de temps $\delta t = 10^{-8}$ ). Coordonnées adimensionnalisées. . . . .	191
A.1	HRogramme du signal de pression au fond avant issu d'une DNS sur MPS simplifié pour lequel les deux premières fréquences acoustiques sont $f_{\text{AC},1} = 360$ Hz et $f_{\text{AC},2} = 1080$ Hz (- - -) et le mode hydrodynamique attendu a pour fréquence $f_{\text{VSP}} = 222$ Hz. Les couleurs traduisent l'amplitude $A_k$ des modes exponentielles modulées. . . . .	206
A.2	Signal de pression instationnaire au fond avant obtenu par DNS (—) et reconstitution par analyse Haute Résolution du même signal rééchantillonné à $F_s = 44100$ Hz (· · ·) et à $F_s = 22050$ Hz (- - -) pour une taille de fenêtre $N_w = 256$ . . . . .	207



# Nomenclature

## Abréviations

ODP	Oscillations De Pression
MPS	Moteur à Propergol Solide
VSA	Vortex Shedding d'Angle
VSO	Vortex Shedding d'Obstacle
VSP	Vortex Shedding Pariétal
AC	Acoustique
RMS	Root mean square, ou valeur efficace
DNS	Simulation numérique directe
LP $n$ tp	$p^{\text{ème}}$ tir expérimental à échelle réduite du démonstrateur $n$

## Paramètres des moteurs à propergol solide

$t_{\text{ref}}$	Echelle de temps de référence pour les boosters, égale à $R_{\text{ref}}/V_{\text{ref}}$
$R_{\text{ref}}$	Rayon hors-tout du booster
$V_{\text{ref}}$	Vitesse de référence égale à 1 m/s
$V_{\text{inj}}$	Vitesse d'injection pariétale moyenne, en m/s
$V_{\text{inj}0}$	Vitesse d'injection pariétale maximale, en m/s
$c_0$	Vitesse du son au fond avant
$\rho_0$	Masse volumique au fond avant
$p_0$	Pression au fond avant
$T_0$	Température au fond avant
$\gamma$	Rapport des chaleurs spécifiques
$\mu_0$	Viscosité cinétique au fond avant
$\nu_0$	Viscosité cinématique au fond avant
$L$	Longueur du booster du fond avant au col de la tuyère ou à la section de sortie libre, en m
$R$	Position moyenne de la surface du propergol, en m
$h$	Hauteur de veine plane, en m (cas du montage VECLA)
$\tau$	Variable de temps longue, adimensionnée par $t_{\text{ref}}$
$t$	Variable de temps pour les phénomènes instationnaires
$f$	Fréquence, en Hz
$nL$	$n^{\text{ème}}$ mode acoustique longitudinal

## Modélisation des moteurs à propergol solide simplifiés

$x$	Coordonnée axiale
$r$	Coordonnée radiale
$\theta$	Coordonnée azimutale
$p$	Pression
$\rho$	Masse volumique
$\mathbf{u} = (u_x, u_r, u_\theta)$	Vitesse
$\varphi$	Fonction de courant

## NOMENCLATURE

---

$Q$	Grandeur stationnaire
$Q_0$	Grandeur stationnaire non-perturbée
$\delta Q$	Distorsion d'une grandeur stationnaire
$q'$	Petite perturbation instationnaire
$\hat{q}$	Fluctuation hydrodynamique, fonction propre du problème direct
$\tilde{q}$	Fluctuation hydrodynamique, fonction propre du problème adjoint
$\bar{q}$	Fluctuation acoustique totale
$\check{q}$	Fluctuation acoustique, onde plane
$\hat{q}$	Fluctuation acoustique, correction rotationnelle
$A_{\text{Ph}}^q$	Amplitude de la fluctuation de la quantité $q$ liée au phénomène Ph
$\omega$	Pulsation adimensionnée
$k$	Nombre d'onde adimensionné
Re	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse d'injection
Re <sub>AC</sub>	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse du son au fond avant
$M_{\text{inj}}$	Nombre de Mach
$X_{\text{out}}$	Facteur d'aspect du conduit ramené à $h$ (cas plan) ou $R$ (cas axisymétrique)
$X_{\text{in}}$	Position de l'entrée du domaine de calcul
$\Omega$	Domaine de calcul considéré sur le conduit cylindrique
$\Gamma_{\text{in}}$	Frontière d'entrée
$\Gamma_{\text{out}}$	Frontière de sortie
$\Gamma_{\text{wall}}$	Frontière pariétale
$\Gamma_{\text{a}}$	Frontière axiale

### Opérateurs différentiels

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$	Vecteurs de base en coordonnées cartésiennes
$\partial_x q$	Dérivée axiale
$\partial_r q$	Dérivée radiale
$\partial_t q$	Dérivée temporelle
$\nabla$	Opérateur gradient
$\nabla \cdot$	Opérateur divergence
$\nabla \wedge$	Opérateur rotationnel
$\Delta$	Opérateur Laplacien
$dq/ds$	Dérivée totale par rapport à la variable $s$
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions de carré intégrable
$\langle , \rangle$	Produit scalaire sur $L^2(\Omega)$
$\  \ $	Norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle$
$[ ]_\Gamma$	Intégrale de bord sur la frontière $\Gamma$

### Stabilité

$\mathcal{A}$	Opérateur spatial pour la stabilité
$\mathcal{B}$	Opérateur temporel pour la stabilité
$\Lambda_\varepsilon(\mathcal{A}, \mathcal{B})$	$\varepsilon$ -pseudospectre associé au problème $(\mathcal{A} - i\omega\mathcal{B})(q) = 0$
$\dagger$	Marque des opérateurs adjoints
$\alpha_{\text{out}}, \beta_{\text{out}}$	Paramètres pour la condition de sortie
$\mathbf{M}, \mathbf{X}$	Tenseurs
$\mathbf{I}_n$	Tenseur identité de taille $n$
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	Matrices du problème de stabilité discrétisé
$\omega_0$	Valeur propre-cible
$\mathbf{A}_{\omega_0}$	$\mathbf{A} - \omega_0\mathbf{B}$
$\tilde{\mathbf{A}}$	$(\mathbf{A} - \omega_0\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$

---

$n_{\text{MAT}}$	Taille de la matrice du problème discrétisé
$N$	Nombre de points de collocation suivant $x$
$M$	Nombre de points de collocation suivant $r$
$P$	Nombre de sous-domaines de collocation suivant $x$
$Q$	Nombre de sous-domaines de collocation suivant $r$
$D_{pq}$	Domaine de collocation de coordonnées $(p, q)$
$N_p$	Nombre de points des domaines $D_{pq}$ suivant $x$
$M_q$	Nombre de points des domaines $D_{pq}$ suivant $r$
$\mathcal{K}$	Sous-espace de Krylov
$p\mathcal{K}$	Taille de $\mathcal{K}$
$\delta$	Tenseur de Dirac
$\text{MULTI}_{da,n}^{\text{Re}}$	Maillage multi-domaine $n$ pour le problème direct ou adjoint pour un nombre de Reynolds $\text{Re}$

#### Simulation numérique directe

$\Delta t$	Temps de calcul physique (s)
$\delta t$	Pas de temps (s)
$\text{MAIL}_n^{\text{C}}$	Maillages pour la DNS
$\delta x$	Taille de maille dans la direction axiale (m)
$\delta r$	Taille de maille dans la direction longitudinale (m)
CFL	Nombre de CFL
$\varepsilon_{\text{lin}}$	Facteur de linéarité pour les fluctuations initiales
$\alpha_{\text{AC}}$	Amplitude des fluctuations de pression initiales par rapport à la pression de référence
$x_s$	Position du scotch (m)
$\delta x_s$	Taille du scotch (m)
$t_{\text{CPU}}$	Temps CPU du calcul

#### Traitement du signal

$N_f$	Nombre de points du signal pour la transformée de Fourier
$N_w$	Nombre de points par fenêtre d'analyse
$N_o$	Nombre de points de chevauchement

#### Notations mathématiques

$i$	Nombre complexe tel que $i^2 = -1$
$\Re(), r$	Partie réelle
$\Im(), r$	Partie imaginaire
$*$	Complexe conjugué
$T$	Matrice transposée
$H$	Matrice trans-conjuguée





# Remerciements

Après trois années de thèse bien remplies, je souhaiterais remercier bien des personnes —j’ai peur d’en oublier!— qui m’ont accompagné dans mes pérégrinations, bien souvent scientifiques, mais pas toujours. . .D’une certaine manière, j’ai eu beaucoup de chance de travailler dans une unité de recherche où les gens parlent de particules, de nappes, de gouttelettes, d’interfaces, de givrage, de combustion. . .alors que de simples petites valeurs propres ont hanté mes journées (voire mes nuits!). Je remercie en premier Jean-Luc Estivalèzes pour avoir encadré mes travaux, et avoir justement apporté un regard extérieur sur un sujet qui ne lui était *a priori* pas familier. Cela m’a permis bien souvent de prendre du recul dans les moments où je bloquais, d’apporter des idées neuves, de m’arrêter quand je me lançais dans des séances de quadrisection capillaire; puis pour son franc-parler, sa bonne humeur, et la démonstration constante du fait qu’on peut faire des choses intéressantes sans se prendre au sérieux! Je remercie de même Philippe Villedieu pour les discussions scientifiques que nous avons eues, ainsi que ses idées, sa culture mathématique et son temps dont il m’a largement fait profiter. Je remercie également Pierre Gajan de m’avoir accueilli dans son unité. Encore une fois, travaillant sur un sujet dont la gestion incombait jusqu’à présent aux aérodynamiciens du DMAE, le fait d’être dans l’unité MH m’a permis de m’ouvrir à d’autres thèmes scientifiques que le mien dont j’ai pu apprécier la richesse. On doit en grande partie à Pierre la chance de faire vivre toutes ces thématiques au sein du DMAE et d’en trouver de nouvelles. J’ai aussi beaucoup apprécié sa gentillesse et sa disponibilité pendant ces trois ans. J’ai aussi une pensée pour Gérard Lavergne, parti à la retraite il y a peu de temps, et dont j’ai bien souvent apprécié la discussion sur le thème des boosters qu’il connaît si bien, et j’ai été très touché de sa confiance pour m’avoir confié des étudiants en projet d’initiation à la recherche, mais aussi de l’aide dont il n’a jamais hésité à me faire profiter.

Je souhaite maintenant descendre d’un étage, et remercier tout particulièrement Grégoire Casalis. J’ai pu apprécier pendant six ans son implication en tant que professeur puis en tant que co-directeur de thèse. Je lui suis vraiment très reconnaissant de m’avoir guidé dans mon parcours en mécanique des fluides, de m’avoir fait profiter de son expérience et de sa gentillesse; d’avoir débloqué des situations parfois un peu tendues. Puis son ouverture, sa capacité à faire profiter les autres de ses connaissances et de son goût pour les sciences m’ont bien souvent fasciné. J’espère que bien d’autres étudiants sauront profiter de son enthousiasme et découvrir à ses côtés la joie de faire de la recherche. Je veux également dire un grand merci à Michel Prévost et à son équipe du Fauga. Michel est intarissable dès qu’on lui parle de ses bébés, à savoir tout ce qui commence par LP et finit par des chiffres. Il m’a offert la chance d’assister à un tir grandeur nature, j’en garde un souvenir impressionné comme ses connaissances sur les moteurs à propergol solide sont impressionnantes! Je suis également reconnaissant à Pierre Millan de m’avoir accueilli dans son département, et de continuer à faire venir des doctorants au DMAE. J’ai pu apprécier la bonne ambiance qui règne ici, que ce soit avec les doctorants ou les permanents, et dont le côté un peu universitaire est très agréable.

Merci aussi à mes camarades de thèse, les anciens dont Nechtan, Cédric (je garde mon as si je veux non mais!), Loïc, Guillaume; les nouveaux embauchés qui se prennent encore pour des thésards, Davide, Pierre, Jean-Matthieu; les «promos 2012» comme moi Jorge, Julien et Farid; puis les petits nouveaux, Violaine et Ysolde, Javier, Henri, Ghislain, Baptiste et Valentin. Je vous souhaite tous bon courage pour la suite, et profitez bien de la thèse! Une petite pensée à Anne et Gianluca, qui

ont supporté mes débarquements intempestifs dans leur bureau quand je bloquais sur quelque chose. Anne, ton côté pince-sans-rire me manquera sans doute un peu une fois parti de l'ONERA. Ha det bra! Je pense aussi à Olivier dit Le Belge et à Lucas pour les très nombreuses discussions éclairées en stabilité et autres. Je suis un peu désolé de vous ne pas vous avoir assez souvent laissé en placer une quand je me mettais à parler de mes petites valeurs propres ou autre. . . Et enfin, Bertrand, je te passe en quelque sorte le flambeau : à toi les boosters, les montages en gaz froid et les ODP!

Je veux enfin remercier les membres du jury. D'abord merci à Uwe Ehrenstein et à Joseph Majdalani qui ont bien accepté de relire et commenter ce manuscrit. J'espère que mes travaux sauront intéresser le premier. Quant au second... A few words to thank a lot Dr Joesph Majdalani to have let me come to his university in Tullahoma last summer. I was really impressed with his scientific enthousiasm. . . and his warm welcome! Merci ensuite à Christophe Airiau de présider mon jury de thèse, je suis sûr qu'il pourra apporter un regard éclairé sur certains aspects de la stabilité qu'il a initiés et dont j'ai pris connaissance pendant ma thèse. Merci également à François Vuillot, avec qui j'ai bien souvent pû discuter pendant ces trois ans, et dont j'ai peu apprécié l'expérience en simulation numérique, sur le thème des ODP, mais aussi en aéroacoustique. À travers lui, je remercie également l'équipe CEDRE et notamment Bernard Courbet, qui a toujours été disponible quand j'ai eu recours à ses lumières pour l'utilisation et le développement de CEDRE. Je pense enfin à Nathalie Cesco, sans qui cette thèse n'aurait pas pu exister. C'est une chance que le CNES permette à des doctorants de travailler sur des sujets théoriques en ayant la tête dans les étoiles tout en gardant les pieds sur terre de par le gros jouet bien réel qu'est le lanceur Ariane 5.

Puis il y a mes parents, mon frère Augustin, et puis il y a Fanny. Mais vous, j'ai tout mon temps pour vous remercier de m'avoir supporté pendant ma thèse, avant aussi, et puis après. . .

# Introduction

Le problème des Oscillations De Pression dans les moteurs à propergol solide s’inscrit dans le cadre plus vaste des instabilités de combustion dont peuvent souffrir les systèmes propulsifs. En effet, tous ces systèmes fermés sont caractérisés à la fois par un grand dégagement d’énergie et la présence d’ondes de pression de fréquences déterminées par les limites de la chambre de combustion. En ce sens, les moteurs à propergol solide utilisés en propulsion spatiale et en balistique n’échappent pas à la règle. Le phénomène d’Oscillations De Pression a d’ailleurs été mis en évidence dès la seconde guerre mondiale, puis largement étudié depuis autant dans le contexte militaire que spatial. Du côté américain, ce problème a été particulièrement critique dans le cas de leurs plus gros moteurs, à savoir le SRMU (Solid Rocket Motor Upgrade) de la fusée Titan IV et le SRB (Solid Rocket Booster) de la navette spatiale. En effet, il a été constaté, lors des tirs de ces boosters, la présence de forts niveaux de fluctuations de poussée corrélées à des fluctuations de pression apparaissant en certains instants sous forme de bouffées dont la fréquence est proche de celle de modes acoustiques longitudinaux du moteur. C’est pourquoi, à la suite de Culick [29], de nombreux travaux ont été menés pour déterminer la stabilité de ces moteurs à partir de bilans d’énergie basés sur le calcul de l’acoustique particulière des boosters. La prédiction initiale erronée de la stabilité du SRMU a été alors suivie d’améliorations sur le calcul de l’acoustique par la prise en compte de l’effet de l’écoulement moyen sur celle-ci (Flandro [36, 37], Majdalani & Flandro [60, 38, 61]). Du côté français, la mise au point des boosters de la lanceur Ariane 5 a nécessité une attention particulière quant à la caractérisation d’éventuelles Oscillations De Pression. En effet, les besoins en poussée définis dans le cahier des charges de ce lanceur et les contraintes industrielles du projet ont conduit à mettre au point des boosters, qui, somme le SRMU et le SRB, sont longs et segmentés. D’où la mise en place dans les années 80 et 90 de divers programmes de recherche (ASSM, POP) conduits par le CNES afin de prédire l’apparition et les niveaux d’amplitude d’Oscillations De Pression, suivant une approche à la fois expérimentale et numérique. Ces études ont d’ailleurs conduit à mettre en place au sein du lanceur un DIspositif ASsouplisseur (DIAS) entre le système propulsif et la charge utile, car la fréquence de ces instabilités de poussée, bien que sans risque pour la structure du lanceur, est dangereuse pour les satellites présents dans la coiffe. Du point de vue économique, les Oscillations De Pression ont donc un effet indirect : les éléments amortisseurs ont une masse qui représente d’autant moins de charge utile.

Dans ce contexte, les différentes études conduites par le CNES et auxquelles l’ONERA a largement participé ont permis d’améliorer largement la compréhension du phénomène. Premièrement, la simulation numérique a permis de caractériser des phénomènes de détachements tourbillonnaires qui se couplent avec l’acoustique du moteur pour générer des ODP (Vuillot [90]; Godfroy *et al.* [49]) : Vortex Shedding<sup>1</sup> d’Angle se formant à l’approche d’une cavité notamment à l’arrière du moteur, Vortex Shedding d’Obstacle créé par les protections thermiques de face entre segments de propergol, et Vortex Shedding Pariétal qui se développe le long des blocs de propergol. Tous ces détachements tourbillonnaires excitent des ondes de pression par réflexion au col de la tuyère : les ODP sont donc issues, comme souvent dans les systèmes propulsifs, du couplage entre acoustique et phénomènes hydrodynamiques, ce qui explique les limites de l’approche de Culick. Ensuite, des tirs en combustion sur des démonstrateurs à échelle réduite (essais sur le montage LP9 au Fauga-Mauzac sous la direction

---

1. Ou «détachement tourbillonnaire», la tradition ayant conservé les termes français ainsi que leurs abréviations.



FIGURE 1 – Fusée Ariane 5 au décollage

de M. Prevost [70]) ont montré qu'en éliminant protections thermiques de face et cavités, les bouffées de fluctuations de pression apparaissent tout de même. Le VSP est donc le principal contributeur au déclenchement d'ODP. La mise au point de montages en gaz froid, où la combustion du propergol est modélisée par une injection de fluide pariétal, a également montré que le VSP n'est pas directement dû à la combustion du propergol au sens d'un dégagement d'énergie, mais plutôt à la forme particulière de l'écoulement moyen à l'intérieur du conduit. On citera à ce titre les travaux de Brown & Dunlap [20, 33] du côté américain, d'Avalon & Lambert [9, 13, 10] à l'ONERA du côté français, et de J. Anthoine au VKI [7].

C'est pourquoi dans un troisième temps, une approche cette fois-ci théorique, reprenant les travaux antérieurs de Varapaev & Yagodkin [89, 95], ont consisté à modéliser le VSP comme une instabilité hydrodynamique intrinsèque de l'écoulement de conduit à parois débitantes. Dans ce contexte, notre thèse se situe dans la lignée de travaux consistant à effectuer l'analyse de stabilité de cet écoulement effectués au DMAE sous l'impulsion de G. Casalis [22]. Citons dans l'ordre : J. Griffond [45], qui s'est penché sur une analyse locale ainsi que sur les problèmes de non-parallélisme de l'écoulement moyen des moteurs à propergol solide et de réceptivité de ces instabilités vis-à-vis de l'acoustique ; Th. Feraille [35], qui a élargi cette analyse à la prise en compte d'une phase dispersée, et a introduit le formalisme de stabilité globale afin de prendre en compte les effets parallèles de l'écoulement de base ; enfin, F. Chedeveigne [25] qui a poursuivi cette étude et montré que les modes propres globaux de l'écoulement sont caractérisés par des fréquences discrètes qui permettent d'expliquer l'apparition des ODP sous forme de bouffées lors du croisement de ces fréquences avec celles des modes acoustiques.

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont précisément comme point de départ le calcul de ces modes de stabilité globaux, et ont pour but de monter la pertinence de cette approche. D'une manière générale, celle-ci soulève deux . D'une part, l'existence de modes discrets à même d'expliquer

---

l'apparition d'ODP à des fréquences bien identifiées doit être confirmée, car les précédents travaux ont conduit à des modes fortement dépendants du maillage axial utilisé. D'autre part, les travaux de stabilité globale effectués en stabilité des couches limites [73, 5] ou plus généralement en stabilité des écoulements ouverts [79] indiquent que la dynamique instationnaire de tels écoulements est modélisée non pas par chaque mode pris séparément, mais par une large somme de modes. Il faut donc se demander si l'écoulement des moteurs à propergol solides possède la même caractéristique, ou si au contraire on retrouve bien dans la réalité la trace des modes discrets obtenus sur le plan théorique. À ce titre, il existe deux différences entre le cas des boosters et celui des écoulements ouverts : d'abord le fait qu'il s'agisse justement d'un système fermé, ensuite l'aspect fortement non-parallèle de l'écoulement de base qui est uniformément accéléré. Tout cela justifie donc le fait que l'on continue de s'intéresser à l'analyse de stabilité globale des moteurs à propergol solide et que l'on recherche des modes propres discrets. À ce titre, l'objectif de cette thèse est d'utiliser les outils issus de l'analyse de stabilité, à savoir les calculs de sensibilité et de réceptivité, afin de mieux comprendre la physique des instabilités hydrodynamiques et leur interaction avec les ondes de pression. L'intérêt de cette approche réside dans sa complémentarité avec les simulations numériques directes que nous avons également mises en oeuvre.

En pratique, notre manuscrit se divise en quatre parties. La première présente une vue d'ensemble des résultats connus sur la physique des ODP du point de vue expérimental (tirs à échelle 1 et à échelle réduite, essais en gaz froid) et théorique (modélisation de l'écoulement de base, de l'acoustique et des instabilités hydrodynamiques). La deuxième partie est consacrée à l'analyse de stabilité des écoulements de conduits à parois débitantes.

Le chapitre 2 porte dans un premier temps sur le détail des équations de stabilité directes et adjointes et les méthodes numériques employées pour les résoudre. En particulier, nous présentons notre méthode de collocation spectrale par découpage de domaines plus ou moins fins destinés à résoudre des phénomènes d'échelles spatiales diverses. Nous présentons également la parallélisation de ces calculs de stabilité globale afin de répondre aux contraintes de temps de calcul et d'espace mémoire inhérents à ces analyses. Le chapitre 3, correspondant à un article soumis au *Journal of Fluid Mechanics*, se concentre sur les aspects théoriques de notre analyse de stabilité. La résolution d'un problème convectif-diffusif simplifié avec état de base uniformément accéléré nous permet de mettre en lumière les difficultés numériques que l'on peut rencontrer dans le cas de l'analyse globale, en particulier le caractère problématique de la condition aux limites imposée au fond avant. Il nous indique également certaines spécificités de notre problème de stabilité par rapport à ceux portant sur des écoulements ouverts moins fortement non-parallèles, notamment l'indépendance des valeurs propres vis-à-vis du nombre de Reynolds. Nous y présentons dans un deuxième temps nos premiers résultats de stabilité, portant sur le calcul des modes propres directs et adjoints sur un domaine dont la limite amont ne coïncide pas avec le fond avant, ce qui nous permet d'obtenir des valeurs propres indépendantes des maillages employés. Nous introduisons également la notion de sensibilité des valeurs propres aux perturbations numériques et aux petites modifications portant sur l'écoulement de base. Le chapitre 4 consiste enfin en une étude paramétrique des modes de stabilité, limitée il est vrai par les contraintes numériques présentées au chapitre 3.

La troisième partie est consacrée à la simulation numérique directe de l'écoulement des moteurs à propergol solides simplifiés. Après un chapitre destiné à montrer les choix que nous avons fait dans l'utilisation du code CEDRE pour bien résoudre tous les phénomènes intervenant dans ces moteurs (chapitre 5), nous nous intéressons au calcul de la réponse impulsionnelle de l'écoulement en l'absence d'acoustique (section 6.1) puis de la réponse à un forçage acoustique (section 6.2). En particulier, nous montrons tout au long du chapitre 6 l'importance de la rupture de débit imposée sur la paroi débitante (ce que nous appelons un «scotch») dans l'apparition du VSP. Nous montrons en quoi les structures tourbillonnaires ainsi calculées peuvent être comparées aux modes propres de stabilité calculés sur un domaine compris entre ce scotch et la sortie du conduit. Enfin, le chapitre 7 vise à caractériser plus particulièrement certains aspects de la réponse forcée de l'écoulement : sa dépendance vis-à-vis de l'acoustique, de la modification (ou distorsion) de l'écoulement moyen due à la rupture de débit

pariétale, et de la position de cette rupture de débit. Pour cela, nous utilisons à la fois la simulation numérique et les outils issus de la stabilité linéaire, à savoir les analyses de sensibilité et de réceptivité.

Première partie

Le VSP dans le problème des Oscillations  
De Pression





# Chapitre 1

## État de l'art sur les ODP

### 1.1 Mise en évidence des ODP

L'abréviation «ODP» désigne le phénomène d'Oscillations De Pression. Ces dernières correspondent à des fluctuations instationnaires de la pression de l'écoulement interne, à ne pas confondre avec les Oscillations De Poussée (ou ODF) qui en sont la traduction dans le bilan propulsif. Ainsi, on peut mesurer le comportement instationnaire de l'écoulement interne des moteurs soit par enregistrement accélérométrique, soit par mesure de la pression interne. Qualitativement, les deux méthodes sont liées dans la mesure où des fluctuations de pression de fréquence donnée induisent des vibrations de même fréquence. En revanche, le calcul du transfert d'énergie entre pression et poussée instationnaires à travers le lanceur est plus délicat. En pratique, les Étages À Poudre (EAP) du lanceur Ariane 5 sont équipés des deux dispositifs, mais les démonstrateurs à échelle réduite testés à l'ONERA sur les bancs d'essais du Fauga-Mauzac ne disposent que de mesures de pression.<sup>1</sup> De toute façon, du point de vue de la mécanique des fluides, nous nous intéressons surtout au calcul et à la mesure des grandeurs thermodynamiques, et par conséquent aux Oscillations De Pression.

Dans cette partie, nous présentons les phénomènes fondamentaux conduisant à l'apparition des ODP. Nous nous basons pour cela sur l'analyse de Fourier des enregistrements de poussée et de pression instationnaires sur certaines configurations expérimentales de référence : booster à l'échelle 1, démonstrateurs à échelle réduite plus ou moins proches de la configuration réelle et montages en gaz froid pour lesquels la combustion de la surface du propergol est représentée par une «simple» injection de fluide en paroi. Pour tous les tirs réels et à échelle réduite, les échelles de temps et de fréquence utilisées dans les diagrammes que nous présentons sont ramenées à un temps de référence  $t_{\text{ref}}$  du booster défini comme le rapport entre le rayon interne de la structure du booster à vide  $R_0$  et une vitesse de référence  $V_{\text{inj}}$  de 1 m/s, qui est en fait l'ordre de grandeur de la vitesse normale du fluide à la paroi d'un booster. On définit en particulier<sup>2</sup>  $\tau$  comme la variable temporelle adimensionnée par  $t_{\text{ref}}$ , et  $\omega = 2\pi f t_{\text{ref}}$  la pulsation réduite associée à une fréquence  $f$ .

Pour des raisons de contraintes industrielles, les EAP d'Ariane 5 (figure 1.1) comportent trois blocs de chargement en propergol légèrement coniques séparés par des protections thermiques de face. Outre ces obstacles, le segment S1 laisse la place à une cavité à l'avant assez tôt au cours du tir, tandis que la partie du segment S3 située au niveau de la tuyère intégré, appelée chambrage arrière, disparaît dès la mi-tir et fait apparaître une cavité arrière. Outre cette géométrie complexe, la composition du propergol<sup>3</sup> induit un écoulement très chaud (3500 K), sous haute pression (60 bars), et multiphasique (production d'une phase gazeuse et de particules d'aluminium par la combustion du propergol, combustion des particules d'aluminium et coalescence des particules d'alumine, transport de particules

---

1. Depuis quelques années, la poussée moyenne est également mesurée.

2. La coordonnée temporelle est notée  $\tau$ , la variable  $t$  étant réservée aux phénomènes instationnaires.

3. On trouvera dans les thèses de N. Cesco [24] et M. Simoes [78] une description détaillée du propergol ainsi que des informations sur la balistique interne des boosters. On pourra aussi se référer à l'ouvrage de Gossant [44].

réactives et inertes de taille différentes, dépôts d'alumine dans la cavité arrière). Ainsi, l'écoulement comporte potentiellement plusieurs sources de perturbations et de détachements tourbillonnaires qui peuvent interagir avec l'acoustique pour former des systèmes couplés instables avec l'acoustique.

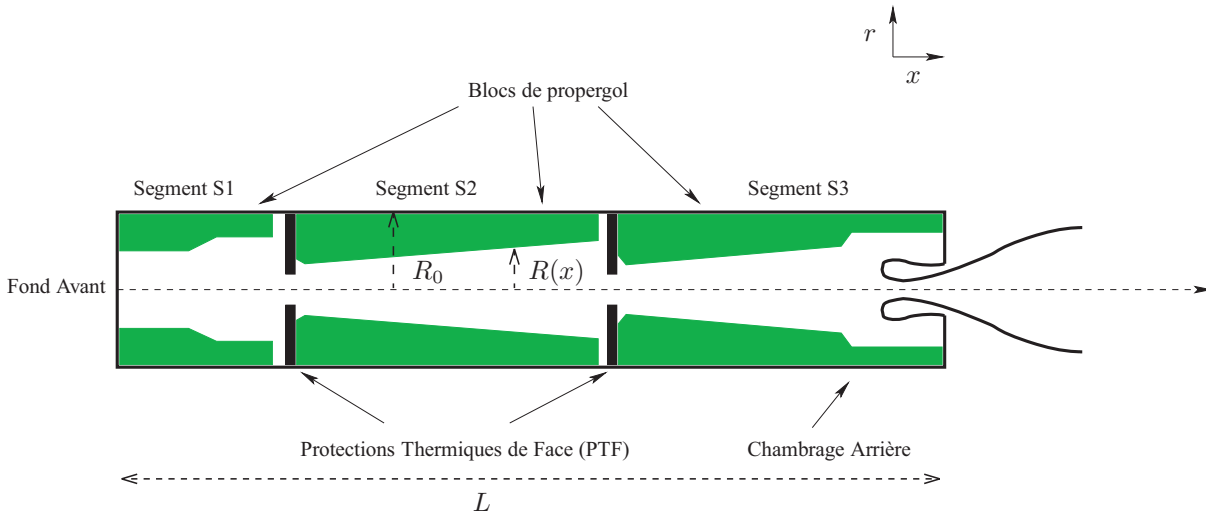


FIGURE 1.1 – Géométrie interne du P230. Le rapport longueur ( $L$ ) sur rayon ( $R$ ) n'est pas représentatif.  $R(x)$  représente le rayon du domaine fluide en une abscisse  $x$  du moteur comptée en partant du fond avant. La conicité des blocs est largement exagérée.

Intéressons-nous à la mesure accélérométrique instationnaire de l'EAP 1 du tir 510 d'Ariane 5, que nous noterons  $s$ . Celle-ci est restituée sur l'ensemble du tir pour une durée d'environ 140 s, à la cadence d'acquisition de 284.1 Hz soit 42596 points d'acquisition. Elle peut être traitée par transformée de Fourier à fenêtre glissante : le signal  $s$  est découpé en fenêtres temporelles de  $N_w$  points se chevauchant entre elles sur  $N_o$  points et interpolé sur une grille de  $N_f$  points sur laquelle une transformée de Fourier locale est effectuée. Ainsi, en chaque instant est calculée la distribution fréquentielle du signal  $s$ . D'où le tracé d'un spectrogramme donnant l'évolution de l'accélération instationnaire dans le plan temps-fréquence tel celui présenté en figure 1.2.

Les phénomènes instationnaires apparaissent d'une part sur une plage temporelle réduite ( $\tau \in [40, 90]$ , soit après le découvrément du chambrage arrière), et d'autre part sur deux plages de fréquence limitées<sup>4</sup> ( $\omega \in [150, 220]$  et  $f \in [330, 420]$  Hz). Par ailleurs, ces phénomènes ne se poursuivent pas de manière continue en temps et en fréquence, mais semblent suivre successivement trois portions de courbes particulières du plan  $(\omega, \tau)$ , de sorte que l'on peut distinguer au cours du temps trois épisodes instables : on parle de "bouffées".<sup>5</sup> Les fréquences moyennes des deux plages d'instabilités sont à rapprocher des fréquences acoustiques longitudinales du moteur vu comme une simple cavité cylindrique de longueur donnée.<sup>6</sup> L'acoustique a longtemps été vue comme le seul facteur déclencheur des ODP comme en témoignent les travaux des équipes américaines de Culick puis Flandro et Madjalani basés sur le calcul de l'acoustique des MPS corrigée par la prise en compte des effets rotationnels

4. Le temps caractéristique à l'échelle 1 est  $t_{\text{ref}} = 1.485$  s. Les premières bouffées apparaissent donc à partir de 70 s de vol à une fréquence d'environ 20 Hz qui est la fréquence du premier mode acoustique longitudinal du moteur.

5. Les trois bouffées sont tellement caractéristiques des tirs d'Ariane 5 qu'on leur a donné les petits noms de « première bouffée », « deuxième bouffée » et « troisième bouffée ». Il y a aussi une quatrième bouffée, plus difficilement observable ici, voire des bouffées « 0 ».

6. En imposant un ventre de pression au fond avant, mais aussi au col de la tuyère, les fréquences acoustiques de cavité longitudinale obtenues sont des multiples de  $f = c_0/2L$  où  $c_0$  est la vitesse du son avant et  $L$  la longueur du moteur. Ces fréquences ne dépendent donc au cours du tir que des propriétés thermodynamiques du fluide. Avec une vitesse du son de l'ordre de 1000 m/s, et un chargement de propergol de longueur  $L = 24$  m environ, on retrouve bien une acoustique fondamentale située vers 20 Hz.

et de l'accroissement temporel de l'énergie des moteurs par une théorie linéarisée. Cependant, cette approche s'est révélée insuffisante à prédire l'instabilité des moteurs de la fusée Titan IV. De plus, le spectrogramme 1.2 montre que les traces fréquentielles des bouffées suivent d'autres courbes que celles de l'acoustique : d'autres phénomènes interviennent nécessairement.

Or, dès les années 70, des études théoriques et expérimentales en gaz froid, où l'émission de fluide à la surface du propergol en combustion est simulée par une injection de fluide à la paroi, ont poussé Varapaev et Yagodkin [89, 95] à supposer l'existence d'une instabilité intrinsèque de l'écoulement se développant le long du moteur et interagissant avec l'acoustique. Dans les années 80, les expériences, toujours en gaz froid, de Brown & Dunlap ont montré expérimentalement que ces instabilités génèrent des détachements tourbillonnaires. De manière analogue, les simulations numériques directes effectuées par F. Vuillot [90] dans le cadre du programme ASSM ont permis de classer les différents types de détachements tourbillonnaires qui apparaissent effectivement au sein des configurations telles que celle d'Ariane 5. On distingue ainsi :

- les détachements tourbillonnaires d'angle (ou VSA pour "Vortex Shedding d'Angle"), dus à la présence d'une marche ou d'une cavité attaquée par l'écoulement interne ;
- les détachements tourbillonnaires d'obstacle (ou VSO), dus notamment à la présence d'une protection thermique de face ;
- les détachements tourbillonnaires pariétaux (ou VSP), qui semblent dus à cette instabilité propre de l'écoulement.

Aujourd'hui, le VSP est pressenti comme le mécanisme prépondérant pour la formation des ODP pour les moteurs similaires aux EAP du lanceur Ariane 5. À l'ONERA, cela a justifié la mise au point à l'unité LP du DMAE d'un démonstrateur gaz chaud très modulable, le montage dit LP9, permettant de tester l'influence des différents éléments de la géométrie sur les ODP, et notamment cette prépondérance du VSP sur des configurations lisses (sans PTF, intersegments ni cavités), en plus des démonstrateurs plus représentatifs de la configuration des EAP. Parallèlement, la démarche de Brown et Dunlap a été poursuivie par G. Avalon (ONERA/DEFA) qui a mis au point des montages gaz froid (VECLA en géométrie plane, VALDO en géométrie cylindrique) permettant une description plus précise des instabilités. Enfin, du point de vue théorique, le VSP est modélisé sous l'angle d'une instabilité linéaire par G. Casalis et ses doctorants successifs à l'ONERA/DMAE. Notre thèse est très largement dédiée à améliorer cette modélisation et à mieux comprendre l'interaction du VSP avec l'acoustique.

## 1.2 Données expérimentales pour l'étude des ODP

Dans cette partie, nous présentons les phénomènes fondamentaux conduisant à l'apparition des ODP. Nous nous basons pour cela sur l'analyse de Fourier des enregistrements de pression instationnaires sur certaines configurations expérimentales de référence en gaz chaud, et sur celle d'enregistrements de pression et de vitesse instationnaires sur des montages gaz froid pour lesquels la combustion de la surface du propergol est représentée par une simple injection de fluide en paroi. Nous reprenons les notations adimensionnelles  $(\tau, \omega)$  pour le temps et la pulsation.

### 1.2.1 Tirs à échelle réduite

Les tirs à échelle réduite effectués par l'ONERA pour l'étude des moteurs à propulsion solide d'Ariane 5 ont été réalisés sur trois montages différents regroupés sous la dénomination «LP». D'abord, le montage LP6, à l'échelle 1/15<sup>e</sup>, vise à tester les configurations réelles des EAP. Si la géométrie interne est assez aisément reproductible à des échelles plus petites, cette taille de démonstrateur permet d'utiliser des propergols représentatifs du propergol réel du point de vue de ses propriétés thermiques et du rapport entre la taille caractéristique des particules et les dimensions du moteur. Abstraction faite de ce dernier paramètre sans dimension, le LP10, montage à l'échelle 1/35<sup>e</sup> portant également sur des configurations de type Ariane 5, peut être utilisé pour des tests similaires, mais moins onéreux.

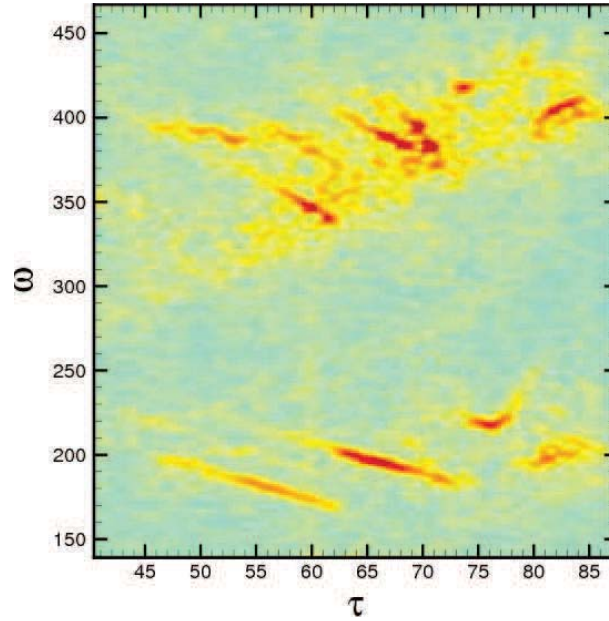


FIGURE 1.2 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante de l'enregistrement accélémétrique de l'Étage d'Accélérateur à Poudre numéro 1 (EAP 1) du vol 510 d'Ariane 5 ( $N_f = 8192$ ,  $N_w = 1024$ ,  $N_o = 900$ ). D'après Chedevergne [25]

Enfin, le LP9 est un montage à visée beaucoup plus théorique, très modulable, et avec des chargements simplifiés non coniques. C'est lui qui, dans le cadre du programme ASSM, a été mis au point pour mettre en évidence le VSP suspecté d'être la source principale des ODP.

À chaque tir est associée une notation du type "LP $n$ t $p$ ", où  $n$  est le numéro du montage et  $p$  celui du tir. Contrairement au P230, la mesure des ODP se fait uniquement par des capteurs de pression au fond avant et au fond arrière près de la tuyère. Dans la grande majorité des cas, les deux mesures présentent les mêmes traces d'ODP dans le plan temps-fréquence. Cependant, le calcul systématique de leur transformée de Fourier à fenêtre glissante introduit par Chedevergne [25] a montré que la mesure au fond avant est plus précise que le signal au fond arrière qui est plus perturbé par la présence de turbulence.

### 1.2.1.1 Reproductibilité des ODP et effet d'échelle

Nous nous intéressons ici à une comparaison entre les instabilités mesurées sur le P230 et sur des tirs de référence effectués sur les trois démonstrateurs précédemment décrits : les LP6t27, LP10t5 et LP9t24, dont les chargements sont exposés en figure 1.3. Les deux premiers ont un chargement très similaire à celui du P230, avec trois segments de propergol coniques, et une tuyère intégrée (d'où la présence d'une cavité arrière). La protection thermique de face entre les segments S2 et S3, dont on peut difficilement reproduire les propriétés d'érosion et d'aéroélasticité à échelle réduite, est remplacée par une résine sur l'amont du bloc S3 pour lui éviter de brûler par le côté. Le LP9t24 ne diffère du LP10t5 que par la disparition du bloc S1 et de l'absence de conicité des blocs de propergol.

On retrouve dans le cas du LP6t27 un spectrogramme très proche de celui du P230, avec deux bouffées «droites» en fréquence et une troisième bouffée incurvée (figure 1.4(b)). L'évolution de la pression moyenne tracée en figure 1.4(a) permet de mieux comprendre la manière dont les différents blocs de propergol débitent : pour un bloc donné, la surface débitante augmente progressivement jusqu'à épuisement, d'où l'alternance de lentes croissances et de brusques chutes de pression à  $\tau = 20$ , puis  $\tau = 45$  et enfin  $t = 85$ , liées respectivement à la disparition du bloc S1, au découvrage de la cavité

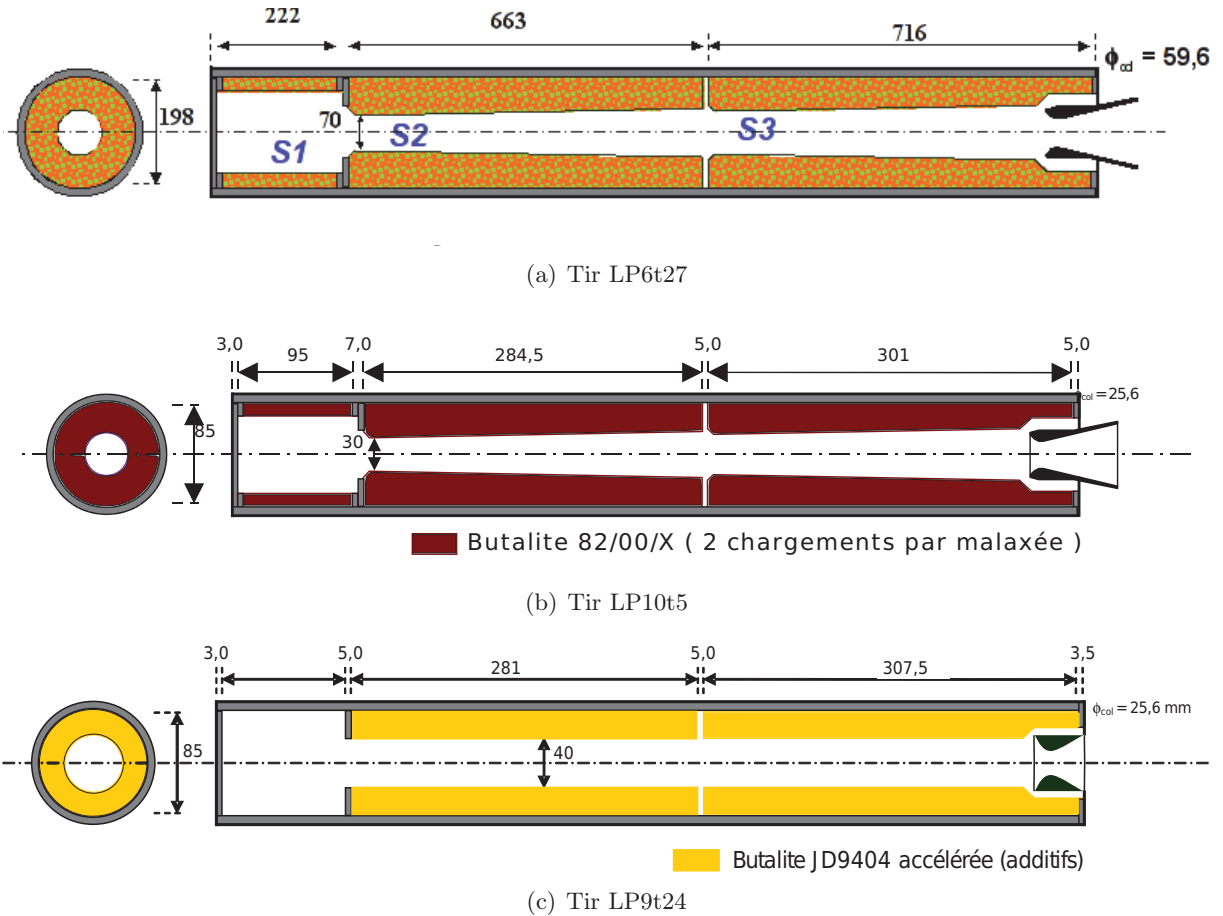
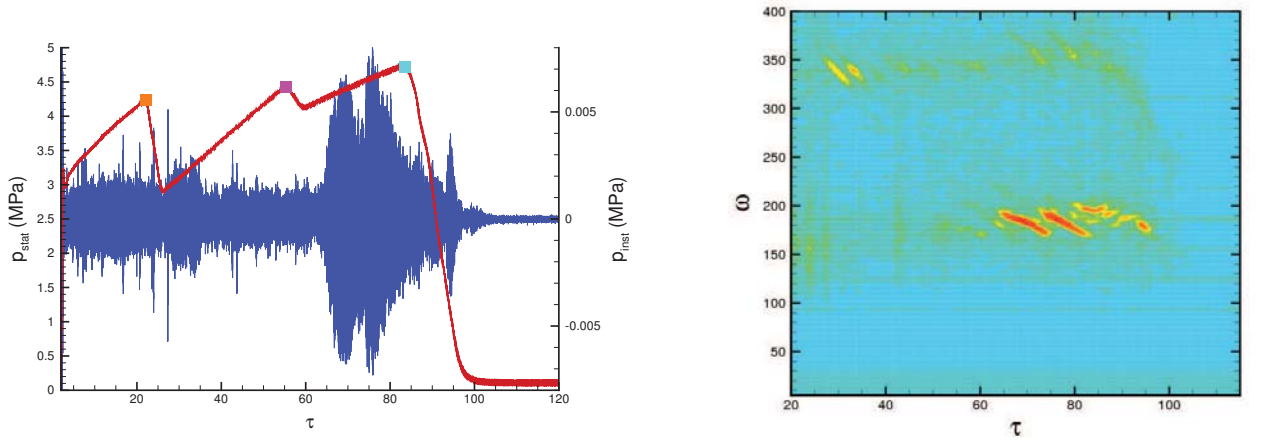


FIGURE 1.3 – Chargement des différents démonstrateurs à configurations tri-segmentée avec tuyère intégrée.

arrière et à la disparition des blocs S2 et S3 en fin de tir. Cela a deux conséquences. D'une part, le segment S1 n'a pas d'influence directe sur les ODP, puisqu'il ne débite plus quand celles-ci apparaissent. Son absence sur le LP9t24 n'est donc pas problématique. D'autre part, la chute de pression en fin de tir a pour effet une augmentation de la vitesse d'injection pariétale. Ce phénomène peut être relié à la forme particulière de la troisième bouffée qui intervient au même moment ( $\tau \in [80, 100]$ ). Enfin, le remplacement de la protection thermique de face entre les segments S2 et S3 par un simple intersegment ne semble pas avoir d'impact sur les fréquences des trois premières bouffées, seule la quatrième semble déplacée dans le plan temps-fréquence.

Passons maintenant aux tirs à l'échelle 1/35<sup>e</sup>. En ce qui concerne le LP10t5, la courbe de pression et le spectrogramme sont sensiblement les mêmes que pour le P230 et le LP6t27, que ce soit du point de vue des amplitudes moyenne et instationnaire, des fréquences réduites et des instants d'apparition des différents phénomènes. En revanche, le LP9t24 diffère par son temps de combustion, beaucoup plus court, la disparition de la première chute de pression moyenne (qui est bien due à l'absence du segment S1) et la chute beaucoup plus brusque de la pression en fin de tir, probablement due au fait que la fin de combustion intervient au même moment sur toute la longueur du moteur, les blocs n'étant plus coniques. Parallèlement, on observe cinq bouffées, dont les deux dernières ne sont plus incurvées mais droites. Cela tend à confirmer le rôle de la queue de combustion dans la remontée de la fréquence de la troisième bouffée en fin de tir, en d'autres termes le fait que la fréquence des bouffées dépend en particulier de l'évolution de la vitesse d'injection pariétale. Au final, le fait de simplifier la géométrie des blocs ne remet pas en cause l'apparition des ODP, mais seulement leur trace fréquentielle. Remarquons

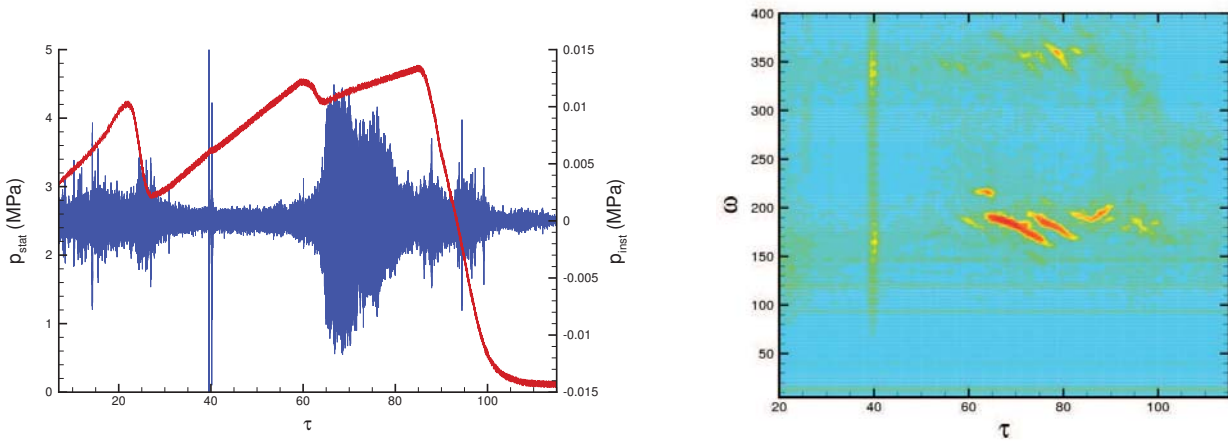
enfin que le rapport des amplitudes de pression instationnaire et stationnaire est de l'ordre de  $10^{-3}$  dans ces trois cas.



(a) Signal de pression stationnaire (—) et instationnaire (—). ■ : fin de la combustion du segment S1; ■ : découverture du chambrage arrière; ■ : début du découverture des segments S2 et S3.

(b) Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de pression instationnaire au fond avant

FIGURE 1.4 – Enregistrements et traitement de la mesure de pression au fond avant du tir LP6t27.



(a) Signal de pression stationnaire (—) et instationnaire (—).

(b) Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de pression instationnaire au fond avant

FIGURE 1.5 – Enregistrements et traitement de la mesure de pression au fond avant du tir LP6t27. La courbes de pression stationnaire et la trace des bouffées est très proche de celles du LP6t27 et du P230.

### 1.2.1.2 Vers une configuration “minimale”

Historiquement, le montage LP9 a été mis au point pour mettre en évidence le rôle prépondérant du VSP sur l'apparition des ODP. Pour cela, sa configuration initiale était composée d'un seul bloc de propergol purement cylindrique et d'une tuyère non intégrée, afin d'éviter toute interférence avec de possibles détachements tourbillonnaires d'angle ou d'obstacle. Or, les dix premiers tirs effectués dans



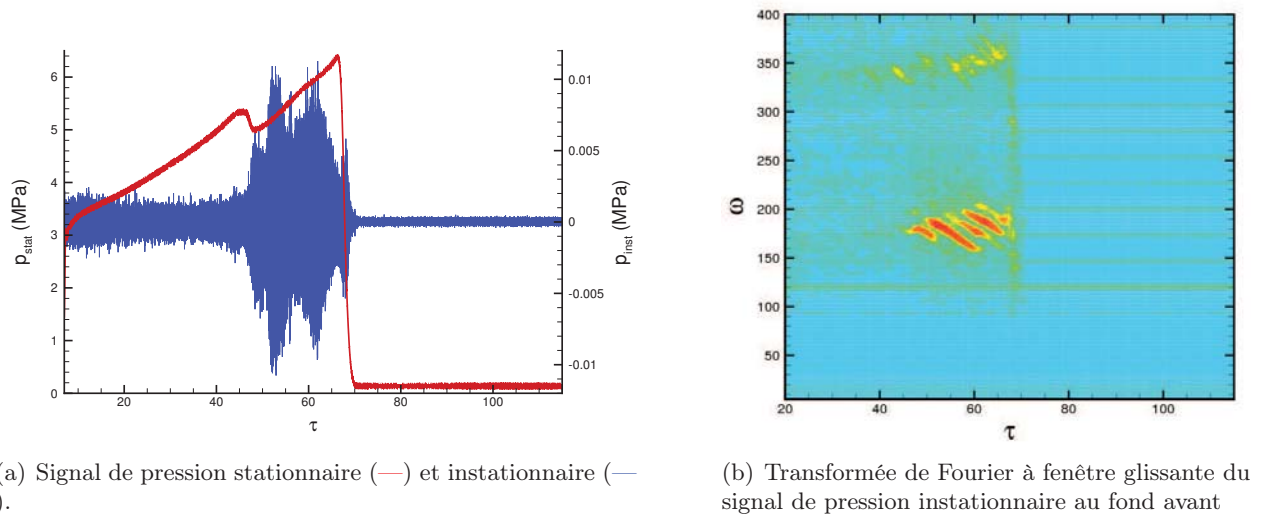


FIGURE 1.6 – Enregistrements et traitement de la mesure de pression au fond avant du tir LP9t24. On remarque la disparition de la première chute de pression en fin de tir, la chute de pression beaucoup plus brusque en fin de tir et la troisième bouffée droite contrairement aux tirs précédents. La chute de pression moyenne au milieu du tir, due à l'apparition du chambrage arrière, est elle conservée.

cette configuration (figure 1.7(a)) ont été surprenants dans la mesure où l'amplitude des oscillations était faible et leurs traces fréquentielles bien moins nettes que sur les tirs effectués sur des configurations réelles (voir le spectrogramme de la figure 1.8(a) pour le LP9t10). C'est pourquoi, après avoir fait varier tous les autres paramètres restants sur cette configuration (diamètre du col de la tuyère, composition du propergol) sans que des bouffées clairement accrochées en fréquence ne soient observées, il a été décidé d'introduire, pour le tir LP9t11, un intersegment sur la configuration du LP9t10 (figure 1.7(b)). C'est ainsi que la trace fréquentielle caractéristique d'une bouffée sur le premier mode acoustique a été enfin retrouvée (figure 1.8(b)), avec cependant des niveaux toujours faibles. Ces tirs en configuration simplifiée montrent le rôle essentiel du VSP dans l'apparition des bouffées (puisque les autres sources d'instabilités ont été écartées) et la nécessité d'une perturbation géométrique (intersegment ou autre) au sein de l'écoulement pour que l'accrochage entre le VSP et l'acoustique se fasse. Par ailleurs, l'ajout d'une cavité avant sur le LP9t15 (figure 1.7(c)) modifie évidemment les fréquences des modes acoustiques longitudinaux du moteur, d'où l'augmentation de la fréquence des bouffées (figure 1.8(c)). De plus, le détachement de bouffées successives est plus manifeste sur ce tir LP9t15 que sur le LP9t11, peut-être à cause de l'interaction entre le VSP et des fluctuations acoustiques différentes.

En conclusion, le démonstrateur LP9 a bien permis de mettre en évidence le rôle fondamental du VSP dans la génération d'oscillations de pression, associé à la présence d'une discontinuité dans le chargement et donc d'une perturbation de l'écoulement. Malheureusement, la configuration monobloc à tuyère externe, pourtant bien plus stable que les autres, n'est pas réalisable industriellement car il est difficile voire impossible de réaliser des blocs de la longueur totale du P230!

### 1.2.2 Les montages gaz froid

L'intérêt des montages gaz froid est de faire abstraction des phénomènes de combustion et d'interaction fluide/particules pour n'étudier que l'aspect aérodynamique des écoulements de conduits à parois débitantes, les instabilités hydrodynamiques et leur interaction avec l'acoustique. Historiquement, les travaux de Varapaev et Yagodkin [89, 95] sont les premiers à avoir mis en évidence la présence d'instabilités hydrodynamiques intrinsèques dans une telle configuration. Plus tard, Brown et Dunlap [20] ont

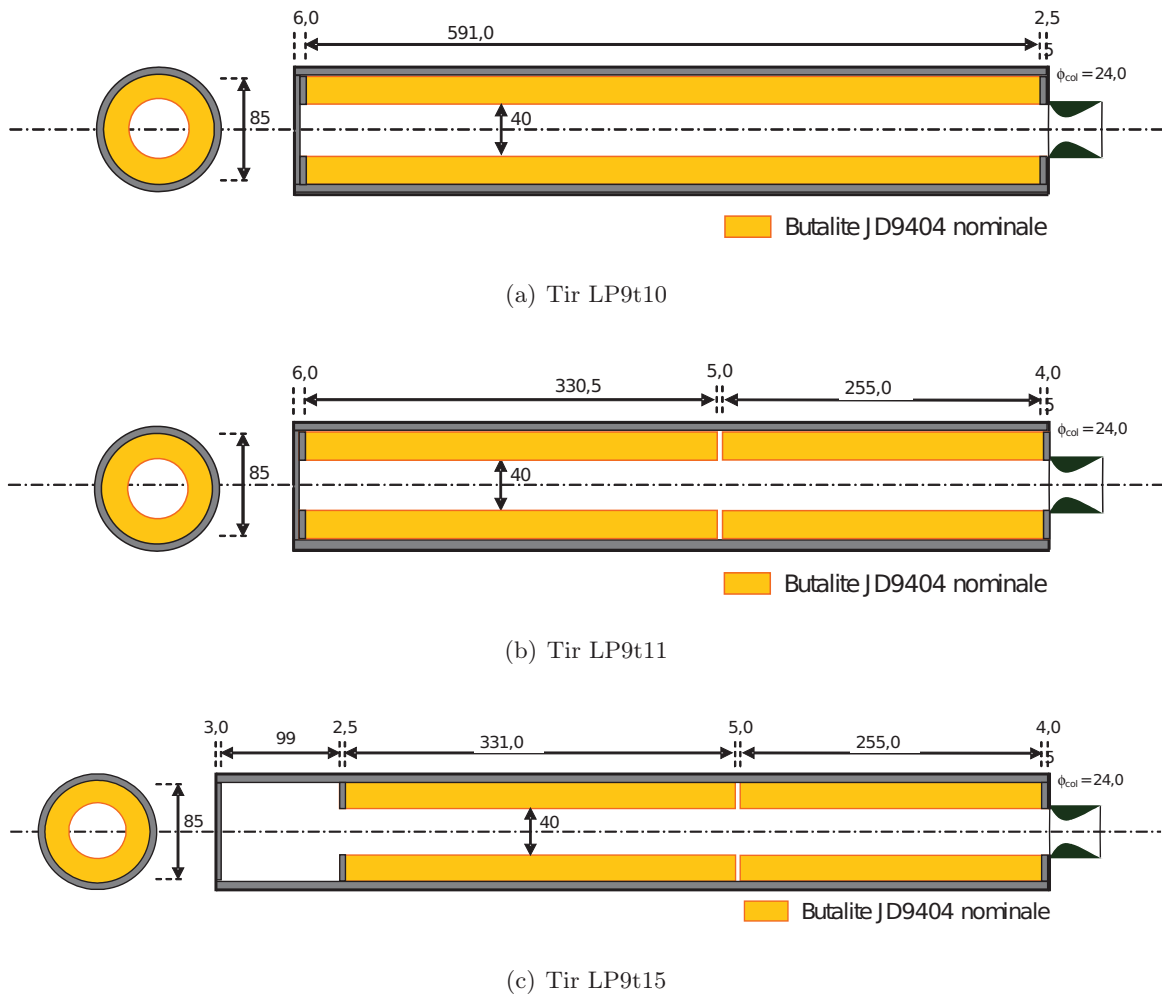


FIGURE 1.7 – Chargement des tirs LP9 destinés à mettre en évidence le VSP

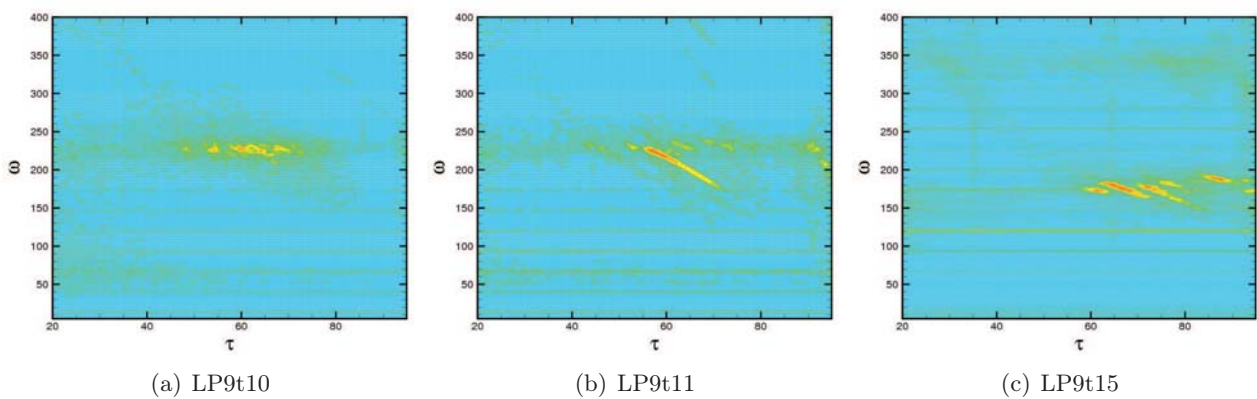
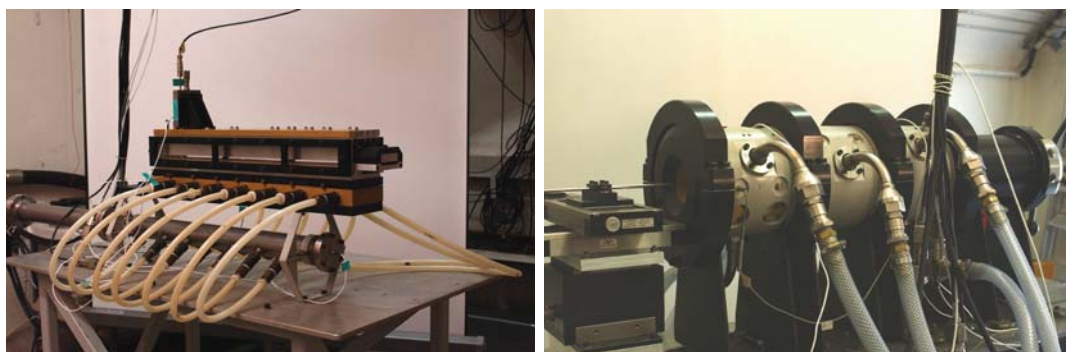


FIGURE 1.8 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de pression instationnaire de différents tirs LP9

émis l'hypothèse d'une interaction entre acoustique et détachements tourbillonnaires sur une maquette représentative de la configuration du SRM de la fusée Titan IV, et ont montré l'importance des pro-



tections thermiques sur cette interaction. Un peu plus tard, ils ont effectué une description complète de l'écoulement dans ses aspects stationnaires et instationnaires afin de montrer le lien entre VSP et transition vers la turbulence [33]. Citons également les travaux de J. Anthoine [7] sur les interactions hydro-acoustiques. Enfin, dans le cadre de l'ONERA, deux montages, VECLA et VALDO, ont été utilisés pour l'étude des ODP sous la direction de G. Avalon. Le montage VECLA (pour *Veine d'Étude de la Couche Limite Acoustique*, figure 1.9(a)) a notamment permis la visualisation des structures tourbillonnaires issues du VSP en géométrie plane, et une première comparaison des fluctuations de vitesse mesurées avec les résultats de stabilité linéaire [9]. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux résultats obtenus sur montage cylindrique VALDO (pour *Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations*, figure 1.9(b)), qui a notamment permis de confirmer la structure modale du VSP. Nous remercions en particulier G. Avalon pour avoir mis à notre disposition sa banque de données portant sur l'ensemble des essais réalisés sous sa direction sur le banc VALDO entre 2000 et 2009.



(a) Montage VECLA [88]

(b) Montage VALDO

FIGURE 1.9 – Montages gaz froid de l'ONERA/DEFA.

### 1.2.2.1 Présentation du montage VECLA et mise en évidence du VSP

Le montage VECLA permet de simuler un écoulement en conduit rectangulaire induit par l'injection de fluide à l'une des deux parois. Le fluide est injecté en deux temps. Le montage est relié à un circuit haute pression *via* un certain nombre de prises d'air (sept visibles sur la figure 1.9(a)) comportant un col et débouchant dans des caissons de tranquillisation. La pression d'alimentation est contrôlée de telle sorte que le débit et la pression soient bloqués et identiques à chaque col. L'écoulement passe ensuite à travers un matériau poreux (ou «poral») à travers lequel un saut de pression est créé, ce qui induit une vitesse d'injection supposée uniforme. Le montage peut être utilisé avec ou sans tuyère ; sa longueur est fixée à  $L = 602$  mm, tandis que la hauteur  $h$  du conduit peut varier de 10 à 30 mm. Le montage comporte un certain nombre de mesures de vitesse fil chaud et de pression, stationnaires et instationnaires. Par ailleurs, il est possible de visualiser l'écoulement à travers les parois latérales du montage par fluorescence induite, qui consiste à observer le rayonnement fluorescent d'un traceur (ici l'acétone) ayant absorbé un rayonnement laser. Pour une description plus complète de ce montage, on se référera notamment à la thèse de B. Ugurtas [88].

Le cas du conduit de hauteur  $h = 20$  mm (ou de rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = 30.1$ ) sans tuyère est particulièrement intéressant pour mettre en évidence le phénomène de VSP. Dans ce cas, les premières fréquences de résonance acoustique sont  $f_{AC,1L} = 142$  Hz et  $f_{AC,2L} = 427$  Hz, l'acoustique ne dépendant que de la vitesse du son et de la longueur du conduit. Or, les spectres du signal de vitesse fluctuante sont caractérisés par des raies fréquentielles bien distinctes qui ne coïncident pas nécessairement avec ces fréquences acoustiques, notamment dans le cas d'une vitesse d'injection  $V_{\text{inj}} = 1.0$  m/s (figure 1.10).

Cette possibilité de raies spectrales indépendantes de l'acoustique infirme donc en partie le rôle premier de celle-ci dans le déclenchement des ODP, et laisse présager de l'existence d'*instabilités intrinsèques*. En outre, J. Griffond [48] a remarqué leur croissance exponentielle jusqu'à une abscisse critique à partir de laquelle un phénomène de saturation apparaît. Enfin, comme indiqué précédemment, le montage VECLA a l'avantage, par rapport aux dispositifs axisymétriques, de permettre la visualisation de l'écoulement. Toujours dans le cas d'une hauteur  $h = 20$  mm, les figures 1.11(a) et 1.11(b) font apparaître, pour un rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = L/h$  supérieur à 20, des fluctuations pariétales cohérentes qui croissent en intensité, sont convectées le long de la veine et finissent par dégénérer en structures tourbillonnaires dans un écoulement plus ou moins turbulent. On visualise ainsi une zone linéaire où les instabilités sont encore de faible amplitude par rapport à l'écoulement moyen, et une zone tourbillonnaire où les instabilités ont atteint un seuil critique et deviennent non-linéaires, voire induisent la transition vers un régime turbulent. Nous reviendrons sur la question de la transition dans le cas du montage VALDO en section 1.3.4. Pour le moment, concentrons-nous sur les caractéristiques du VSP.

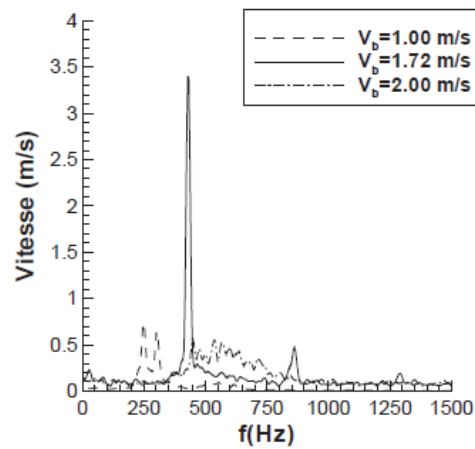


FIGURE 1.10 – Spectre de vitesse fluctuante en  $x/h = 22.5$  pour une hauteur de veine  $h = 20$  mm, d'après Ugurtas [88].



(a)  $V_{\text{inj}} = 1.0$  m/s



(b)  $V_{\text{inj}} = 1.51$  m/s

FIGURE 1.11 – Visualisation par fluorescence induite de l'écoulement dans le montage VECLA, entre  $x/h = 13.15$  et  $x/h = 29.05$  pour un conduit de hauteur  $h = 20$  mm, d'après Ugurtas [88]. Deux vitesses d'injection sont considérées. Les zones rouges correspondent à une forte concentration de traceur. Les images sont réalisées par tranche de 53 mm de large (soit  $\delta x/h = 2.65$ ) à différents instants, ce qui explique les discontinuités observées.

### 1.2.2.2 Présentation du montage VALDO

Le montage VALDO reprend le principe du montage VECLA en géométrie axisymétrique. Il est composé d'un assemblage de plusieurs caissons cylindriques alimentés chacun par trois prises d'air équi-réparties en azimut. Chaque prise est reliée à un réseau haute pression dont le niveau est contrôlé par l'utilisateur, et comporte un col de sorte que le débit et la pression sont supposés maxima et uniformes sur l'ensemble des prises. Chaque caisson renferme un cylindre à paroi poreuse (figure 1.12). Les différentes pièces peuvent être vues chacune en figure 1.13(a). Le poral, (troisième pièce en partant de la droite) est constitué d'un assemblage de grains de cuivre de taille donnée. Comme dans le cas du montage VECLA, la vitesse d'injection est uniquement due à la différence de pression génératrice entre l'amont et l'aval du poral. Le blocage des débits des cols d'injection et l'uniformité du poral ont donc pour but d'imposer une pression d'alimentation et une vitesse d'injection uniformes.

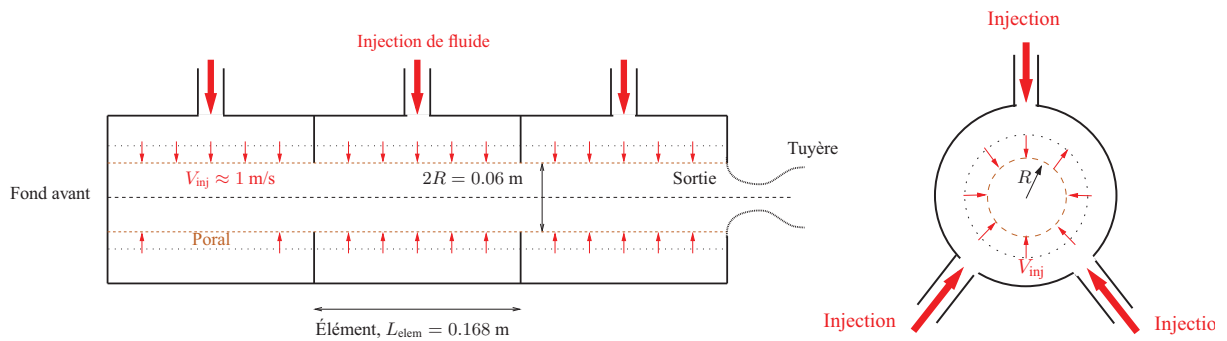


FIGURE 1.12 – Schéma du montage VALDO — cas à trois éléments



(a) Différents composants d'un élément du montage VALDO. D'après [11]. Le poral est la troisième pièce en partant de la droite.



(b) Bout d'un élément du poral. On voit en extrémité la présence d'une couronne brillante non-débitante.

FIGURE 1.13 – Vue des éléments du montage VALDO

Le montage est très modulaire : il peut accueillir de deux à quatre éléments, soit directement assemblés les uns à la suite des autres, soit séparés par un intersergment, une protection thermique de face ou une cavité ; en outre, le dernier segment peut être laissé ouvert, ou bien être complété par une tuyère externe ou interne. Dans ce manuscrit, nous ne nous intéressons qu'à l'apparition du VSP et à l'analyse des instabilités des écoulements de conduits à parois débitantes. Aussi, parmi toutes les campagnes d'essais réalisées à l'ONERA/DEFA, nous ne présentons ici que celles portant sur une

configuration lisse (c'est-à-dire sans obstacles de type protection thermique ou cavité), avec trois ou quatre éléments, avec ou sans tuyère. Dans le cas du fonctionnement sans tuyère, l'utilisateur règle la pression à travers les cols des prises d'alimentation en modulant la pression du circuit haute pression. En présence d'une tuyère, la somme des débits bloqués à travers les cols d'alimentation est égale au débit passant à travers le col de sortie amorcé. Le rapport entre les pressions génératrices amont et aval du poral, de même que la vitesse d'injection, ne dépend donc que du rapport entre la section totale d'injection et la section de sortie. Le fonctionnement du montage consiste alors à imposer la pression d'alimentation pour que tous les cols soient amorcés, et à moduler la position d'une ogive dans la tuyère afin de moduler la section de sortie et faire varier la vitesse d'injection.

Les différents éléments sont assemblés de telle manière à ce que la géométrie interne du conduit soit la plus lisse possible. Cependant, il existe au moins trois biais à cette configuration idéale. Premièrement, plusieurs tailles de grains ont été testés afin d'obtenir l'écoulement moyen laminaire au moins dans une grande partie amont de l'écoulement et minimiser les perturbations parasites sur la vitesse instationnaire. En ce sens, une première campagne d'essais a déterminé la taille optimale des grains (18 microns), mais des matériaux poreux de mêmes caractéristiques ont pu donner des résultats différents, notamment pour ce qui est de la laminarité de l'écoulement. Deuxièmement, de petites ruptures de débit peuvent se produire à la jonction entre deux segments, car l'usinage du poral laisse apparaître une couronne d'environ un millimètre à chaque extrémité qui n'est pas débitante (figure 1.13(b)). Enfin, il peut malgré tout exister des variations de vitesse d'injection pariétale le long du montage, et surtout dans le temps. F. Chedevergne [25] faisait en effet remarquer l'existence d'oscillations de l'ordre de 0.07 m/s pour une fréquence d'environ 8 Hz dans le cas de mesures faites sur le montage à trois éléments sans tuyère. Là encore, de telles variations peuvent avoir une influence non négligeable sur l'état laminaire ou turbulent de l'écoulement. De plus, l'incertitude potentielle sur la vitesse d'injection moyenne  $V_{inj}$  est ennuyeuse dans le cadre d'une étude théorique où la connaissance de ce paramètre est fondamentale.

### 1.2.2.3 Données disponibles et traitement

Le montage est toujours muni de mesures de pression stationnaires et instationnaires au fond avant et au niveau des cols des buses d'injection. Une sonde fil chaud peut être introduite, soit par la sortie du montage le long d'une canne pour effectuer des sondages longitudinaux, soit par des orifices prévus le long du montage pour des sondages radiaux. On mesure ainsi la norme de la vitesse stationnaire et instationnaire. On dispose parfois également d'une sonde de pression au fond arrière.

Les mesures de pression d'alimentation et de pression aux fonds avant et arrière permettent de déterminer la vitesse d'injection moyenne. Celle-ci est reliée au débit total  $D$  passant à travers le poral : en posant  $n_{elem}$  le nombre d'éléments,  $L$  la longueur d'un élément et  $R$  son rayon, on peut écrire  $D = 2n_{elem}\pi RL_{elem}\rho_0 V_{inj}$ , où  $\rho_0$  est la masse volumique de référence au fond avant. Par ailleurs, ce débit total est égal à la somme des débits élémentaires passant à travers le col amorcé de chaque prise d'air de rayon  $R_{alim}$ . Si l'on note  $p_{alim}$  la pression génératrice d'alimentation,  $p_{moy} = (p_{AV} + p_{AV})/2$  la moyenne des pressions aux fonds avant et arrière, et en supposant le fluide stabilisé à une température  $T_0$  connue,<sup>7</sup> la vitesse d'injection moyenne est donnée par

$$V_{inj} = 0.5787 \sqrt{\gamma r T_0} \frac{3R_{alim}^2}{2RL_{elem}} \frac{p_{alim}}{p_{moy}}. \quad (1.1)$$

Typiquement, une pression d'alimentation de 3.8 bar donne, en l'absence de tuyère, une vitesse d'injection de l'ordre de 1.12 m/s.

Les grandeurs instationnaires, elles, sont échantillonnées à la cadence d'acquisition  $F_s = 4000$  Hz sur au moins  $2^{14} = 4096$  échantillons. Nous pouvons donc calculer leur moyenne (notées  $P$  et  $U$  pour

7. La température du fluide est fixée à 20°C à l'alimentation pour tous les essais dans le circuit d'alimentation en pression.

la pression et la vitesse) et leurs parties fluctuantes ( $p'$  et  $u'$ ) exprimées sous la forme d'une moyenne quadratique au cours du temps ( $p'_{\text{RMS}}$  et  $u'_{\text{RMS}}$ ) et d'une densité spectrale de puissance (DSP) sur une plage de fréquence  $f \in [0, 2000]$  Hz ( $\Phi p'$  et  $\Phi u'$ ). Pour cela, nous utilisons la fonction `pwelch` de MATLAB, qui découpe le signal en sous-fenêtres chevauchantes, calcule la DSP sur chacune d'entre elles et en retourne la moyenne. Nous devons en particulier trouver un compromis entre la résolution fréquentielle, qui est plus fine quand le nombre de points par sous-fenêtre augmente, et le lissage des résultats qui augmente avec le nombre de fenêtres considérées. Nous choisissons ainsi une grande zone de chevauchement entre deux fenêtres (75%) et  $N_w = 2^{12} = 1024$  points par fenêtre, soit au minimum 12 fenêtres pour le calcul de la DSP. Notons que pour un signal  $s'$ , on relie sa valeur RMS à sa DSP par

$$s'_{\text{RMS}} = \int_0^{F_s/2} \Phi s'(f) df \quad (1.2)$$

Nous préférons exprimer cette DSP en fonction non pas de la fréquence, mais d'une pulsation réduite ramenée, comme dans le cas des tirs réels, à la vitesse d'injection et au rayon moyen de l'essai considéré, soit

$$\omega = \frac{2\pi f R}{V_{\text{inj}}}. \quad (1.3)$$

Nous le verrons plus loin, cette pulsation réduite pourra être directement comparée aux valeurs propres adimensionnalisées issues de l'étude de stabilité des moteurs à propergol solide. Il pourra être également intéressant d'exprimer la pulsation acoustique réduite  $\omega_{\text{AC}}$  associée à la fréquence acoustique longitudinale du conduit  $f_{\text{AC}}$ .

#### 1.2.2.4 Existence de modes discrets

Du point de vue du rapport d'aspect, la configuration du montage VALDO la plus proche de celle des tirs réels aux instants d'apparition des ODP est celle comportant trois éléments ( $L/R = 16.2$  pour VALDO à comparer avec  $L/R$  entre 15 et 20 pour les essais en gaz chaud). Nous nous intéressons d'abord au cas où la tuyère est montée, qui se rapproche bien de la configuration des tirs LP9t10 et LP9t11. Dans ces conditions, la fréquence acoustique longitudinale fondamentale du montage est  $f_{\text{AC},1L} = 347$  Hz. Les positions de l'ogive considérées sont, dans l'ordre, 174 mm, 230 mm et 280 mm, ce qui, compte tenu de la pression d'alimentation de 8 bar, conduit à des vitesses d'injection de  $V_{\text{inj}} = 0.91$  m/s,  $V_{\text{inj}} = 1.05$  m/s et  $V_{\text{inj}} = 1.19$  m/s respectivement. Intéressons-nous d'abord, comme dans le cas des tirs réels, à la densité spectrale de puissance associée à la pression instationnaire mesurée au fond avant pour le cas  $V_{\text{inj}} = 1.05$  m/s (figure 1.14(a)). Comme pour le montage VECLA, nous constatons la présence d'au moins cinq raies fréquentielles bien séparées, et surtout distinctes de la fréquence acoustique la plus proche. Il y a donc coexistence d'instabilités caractérisées par des fréquences propres. On fait le même constat sur le spectrogramme de vitesse correspondant (figure 1.14(c)). En outre, l'amplitude générale des pics décroît de la paroi vers l'axe pour une abscisse donnée, et croît le long du montage tout en gardant les mêmes fréquences. Lorsque l'on considère les essais effectués avec une autre vitesse d'injection (spectrogrammes 1.14(b) et 1.14(d)), nous remarquons que la pulsation réduite des raies ne change pas de manière significative.<sup>8</sup> Les valeurs des maxima sont reportés dans le tableau 1.16.

Pour le cas sans tuyère, quatre pressions d'alimentation sont utilisées (2.8, 3.5, 3.8 et 5 bar) pour des vitesses d'injection<sup>9</sup> de 0.84, 1.05, 1.16 et 1.46 m/s. Les deux premières fréquences acoustiques longitudinales sont cette-fois  $f_{\text{AC},1L} = 172$  Hz et  $f_{\text{AC},2L} = 516$  Hz. Les pulsations réduites correspondantes

8. Les écarts  $\Delta\omega$  de l'ordre de l'unité peuvent être notamment reliés à l'imprécision de la vitesse d'injection qui est caractérisée par des oscillations de l'ordre du centimètre par seconde à une fréquence de 8 Hz.

9. Contrairement aux essais présentés par F. Chedevergne sur la même configuration, la vitesse d'injection ne présente pas d'oscillations basse fréquence ici. C'est donc peut-être la qualité du poral qui faisait défaut lors d'essais précédents. Ceux de la configuration avec tuyère présentés plus haut datent de 2003. Ceux de la configuration sans tuyère présentés ici datent de 2009.



sont données dans le tableau 1.16. Là encore, les pics de DSP apparaissent à des pulsations identiques d'un essai à l'autre dans cette configuration (spectrogrammes en figure 1.15, pulsations reportées en table 1.16). De plus, celles-ci sont très proches de celles obtenues en configuration avec tuyère. Enfin, cette deuxième série d'essais, pour laquelle davantage d'abscisses ont été testées, met bien en évidence la croissance des niveaux de DSP le long du montage.

Or, sur l'ensemble de ces cas, deux paramètres changent : le nombre de Reynolds, qui augmente avec la vitesse d'injection mais aussi avec le doublement de la masse volumique lorsque la tuyère est montée ; et l'acoustique longitudinale, dont les pulsations réduites sont très proches de celles des instabilités dans la première configuration, mais qui en sont beaucoup plus éloignées en l'absence de tuyère. D'ailleurs, cette absence de croisement fréquentiel n'empêche pas les amplitudes mesurées d'être beaucoup plus grandes qu'en présence d'une tuyère. En conclusion, le montage VALDO met donc en évidence l'existence d'instabilités propres aux écoulements de cavité à parois débitantes se développant surtout près de la paroi le long de l'écoulement. Au vu du cas sans tuyère, nous pourrions même penser qu'il s'agit d'instabilités intrinsèques qui émergent en l'absence d'apport d'énergie extérieure. Or, le montage émet au moins deux sources d'excitation externes à l'écoulement proprement dit : le bruit d'injection de fluide à travers le poral, et les petites discontinuités de débit à chaque intersegment. En fait, nous parlerons plutôt d'instabilités «extrinsèques», qui sont caractérisées par des fréquences propres mais qui n'émergent que grâce à une source d'excitation externe.

## 1.3 Écoulement moyen des MPS

### 1.3.1 Définition d'un état moyen stationnaire

#### 1.3.1.1 Echelles de temps

Nous présentons ici une modélisation simplifiée de l'état moyen stationnaire des Moteurs à Propulsion Solide. Remarquons qu'il est traditionnel de séparer deux échelles de temps : une échelle longue  $\tau$  corrélée à la combustion du propergol au cours du tir qui induit des variations lentes de la géométrie et de la pression moyenne du moteur ainsi que de la vitesse d'injection du fluide à la surface du propergol ; une échelle  $t$  «très petite» devant  $\tau$  qui traduit la présence de phénomènes instationnaires telles que les instabilités hydrodynamiques, les fluctuations turbulentes ou encore l'acoustique. Ces deux échelles de temps sont supposées indépendantes et les phénomènes instationnaires dépendants d'une configuration stationnaire figée. Ainsi, par «état moyen stationnaire», nous désignons l'état du moteur à un instant  $\tau$  moyenné sur l'échelle courte  $t$ , ou, du point de vue numérique, la solution stationnaire d'une configuration donnée représentative d'un moteur à l'instant  $\tau$ . Les paramètres caractéristiques (vitesse d'injection  $V_{inj}$ , rayon et longueur moyens, grandeurs thermodynamiques de référence, nombres sans dimension caractéristiques) sont alors fixés et notés sous la forme  $P(\tau)$ . Les variables  $q$  du problème, elles, sont décomposées sous la forme

$$q(\tau, t; \mathbf{x}) = Q(\tau; \mathbf{x}) + q'(t; \mathbf{x}) \quad (1.4)$$

où  $Q(\tau, \mathbf{x})$  désigne leur état moyen à l'instant  $\tau$  et au point  $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$  du moteur auquel on a associé un repère cylindrique, et  $q'(t; \mathbf{x})$  leur fluctuation instationnaire. Par la suite, les paramètres seront notés simplement  $P$  et les états moyens  $Q(\mathbf{x})$  si la mention de l'instant  $\tau$  n'est pas nécessaire.

#### 1.3.1.2 Moteur à Propulsion Solide Simplifié

Il existe deux solutions pour obtenir l'état de base  $Q$ . D'une part, on peut choisir de calculer directement une solution stationnaire de l'écoulement dans cette configuration figée à l'instant  $\tau$ . Il faut alors prendre le mieux possible en compte sa géométrie (présence de cavités et de protections thermiques, co-nicité des blocs), les propriétés thermodynamiques et les aspects multiphasiques du fluide, imposer une vitesse d'injection de matière à la paroi qui tienne compte de la pression locale, etc... Cette approche

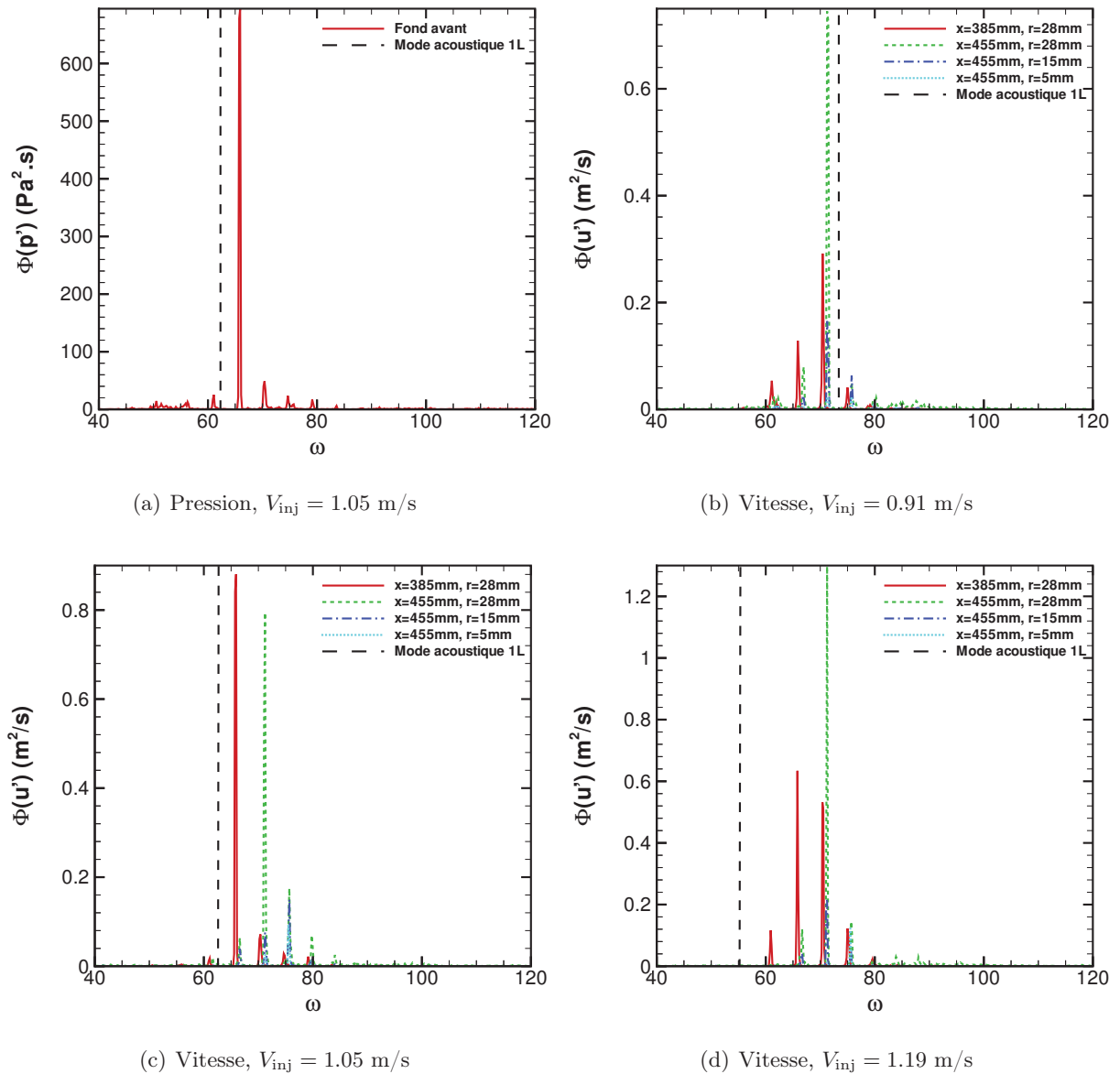


FIGURE 1.14 – Densité de spectrale de puissance associée aux signaux de pression et de vitesse instationnaire pour le montage VALDO à trois éléments avec tuyère, exprimée en fonction de la pulsation réduite  $\omega$ . La ligne verticale noire donne la fréquence du premier mode acoustique longitudinal du conduit.

est largement employée aujourd'hui dans le cadre industriel. D'autre part, pour des études théoriques, le but est au contraire de se ramener au calcul d'un écoulement de conduit cylindrique à paroi débitante comme celui du montage VALDO, que nous nommons «Moteur à Propulsion Solide Simplifié» (MPSS). Le fluide est vu comme un gaz équivalent faisant abstraction des phénomènes multiphasiques (présence de particules inertes et en combustion) caractérisé par des grandeurs thermodynamiques de référence prises usuellement au fond avant, notées  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $c_0$  et  $\mu_0$  pour la pression, la masse volumique, la température, la vitesse du son et la viscosité. Il est par ailleurs nécessaire de calculer un rayon  $\langle R \rangle$  et une vitesse d'injection  $\langle V_{inj} \rangle$  moyennés sur toute la longueur  $L$  du moteur. Dans le cas des montages gaz froid comme VALDO, les grandeurs thermodynamiques sont soit fixées par l'expérimentateur (température, vitesse du son, viscosité), soit mesurées (pression dont on déduit la masse volumique). La

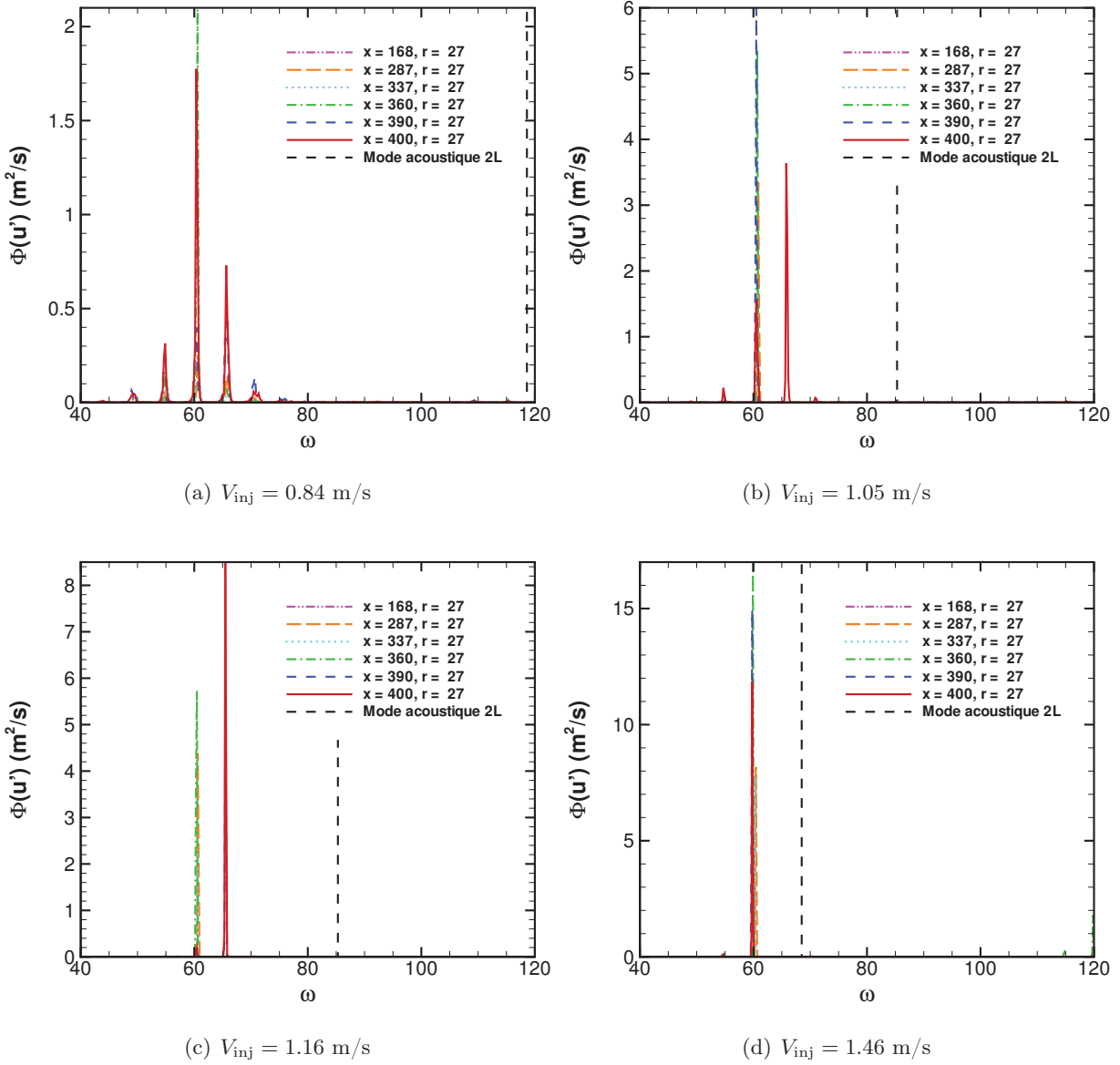


FIGURE 1.15 – Densité de spectrale de puissance associée aux signaux de vitesse instationnaire pour le montage VALDO à trois éléments sans tuyère, exprimée en fonction de la pulsation réduite  $\omega$ . La position des prises de vitesse est donnée en millimètres. La ligne verticale noire donne la fréquence du deuxième mode acoustique longitudinal du conduit.

donnée du rayon est évidente dans la mesure où nous étudions des configurations quasiment lisses, et celle de la vitesse d'injection est directement liée au rapport entre pression d'alimentation et pression au fond avant (équation (1.1)). Dans le cas de tirs réels, les chercheurs américains (Culick [29], Brown et Dunlap [20, 33], Majdalani et Flandro [39, 38]) se ramènent aussi à une configuration simplifiée pour un certain nombre de boosters de référence pour lesquels ces grandeurs sont bien documentées. Dans le cas du P230 et des démonstrateurs LP6, LP10 et LP9, il est possible de reconstituer ces paramètres grâce à un code de calcul monodimensionnel de régression de surface appelé PERSE (Programme d'Évaluation de Régression de Surface et d'Écoulement) calculant l'écoulement moyen et la régression du propergol dans chaque section du moteur. Nous présentons rapidement son fonctionnement et la



Cas	Instabilités					Acoustique	
3e-at, $V_{inj} = 0.91$ m/s	[60.9, 61.1]	[65.8,66.9]	[70.4;71.3]	75.0	71.9 (1L)		
3e-at, $V_{inj} = 1.05$ m/s	[61.0, 61.6]	[65.9,66.5]	[70.3;71.2]	[74.6;75.6]	62.3 (1L)		
3e-at, $V_{inj} = 1.19$ m/s	60.9	[65.8,66.7]	[70.4;71.3]	[74.9;75.6]	54.9 (1L)		
3e-st, $V_{inj} = 0.84$ m/s	54.8	60.6	65.6	70.7	75.0	38.6 (1L)	115.8 (2L)
3e-st, $V_{inj} = 1.05$ m/s	54.7	60.5	65.8	70.9		30.9 (1L)	92.6 (2L)
3e-st, $V_{inj} = 1.16$ m/s		60.5	65.5			27.9 (1L)	83.8 (2L)
3e-st, $V_{inj} = 1.46$ m/s	[59.9, 60.4]					22.2 (1L)	66.6 (2L)

FIGURE 1.16 – Pulsations réduites des instabilités apparaissant dans les spectrogrammes de vitesse et fréquences acoustiques longitudinales. «3e-at» : configuration à trois éléments avec tuyère ; «3e-st» : configuration à trois éléments sans tuyère.

manière avec laquelle sont définis ces paramètres.

### 1.3.1.3 Calcul du rayon et de la vitesse d'injection moyens pour les tirs réels

Le code PERSE a été développé au sein de l'unité LP du DMAE à l'ONERA par J. C. Godon, ancien membre de l'équipe de M. Prevost. Nous nous référons à la description qu'en fait F. Chedevigne dans [25]. Plus de détails sont disponibles dans [42]. Ce programme consiste à calculer de manière itérative un certain nombre de grandeurs moyennes par section le long du moteur en chaque instant du tir : rayon de la section fluide, pression, débit, vitesse moyenne, nombre de Mach moyen, vitesse de combustion pariétale, vitesse d'injection, masse volumique moyenne, et nombre de Reynolds. À chaque instant sont également indiquées la masse restante des différents segments et la masse totale de propergol brûlée. L'hypothèse fondamentale utilisée pour le calcul de la régression porte sur la vitesse de combustion du propergol  $V_c(x)$  qui est reliée à la pression moyenne locale  $P(x)$  par une relation du type  $V_c(x) = aP(x)^n$  où  $a$  et  $n$  sont des paramètres caractéristiques du propergol.

À partir de ces données, on récupère très facilement les grandeurs thermodynamiques de référence au fond avant. En revanche, il existe plusieurs manières de définir un rayon et une vitesse d'injection moyens globaux. La difficulté majeure réside dans la définition de la zone sur laquelle calculer cette moyenne : moteur entier, ou seulement zones débitantes, en faisant notamment abstraction du segment S1 dont tout le propergol a disparu quand les ODP apparaissent à partir du milieu du tir. Comme les instabilités hydrodynamiques sont essentiellement dues à la présence d'un écoulement moyen, c'est la seconde solution que l'on choisit. On définit donc le rayon moyen  $\langle R \rangle$  par

$$\langle R \rangle = \frac{1}{x_{out} - x_{in}} \int_{x_{in}}^{x_{out}} R(x) dx \quad (1.5)$$

où  $x_{in}$  est l'abscisse de l'intersegment S1/S2 («i» pour «intersegment», mais aussi pour «inflow») et  $x_{out}$  l'abscisse de sortie (pour «outflow»), en pratique égale à la longueur  $L$  du moteur entre le fond avant et la section critique de la tuyère. Pour la vitesse d'injection, on peut se baser sur trois manières différentes d'écrire la conservation de la masse de fluide dans le moteur : moyenne des vitesses d'injection pariétales, débit au col de la tuyère ou vitesses moyennes à travers chaque section. La troisième solution est retenue, car c'est elle qui traduit le mieux l'accélération uniforme de la vitesse moyenne au sein du moteur. En effet, si  $U(x)$  désigne la vitesse moyenne à travers la section  $S_x$  d'abscisse  $x$  du MPS simplifié équivalent, l'égalité entre le débit pariétal moyen entre  $x_{in}$  et  $x$  et le débit passant à travers  $S_x$  permet de relier la vitesse d'injection moyenne entre  $x_{in}$  et  $x$  par  $2(x - x_{in})\langle V_{inj} \rangle = \langle R \rangle U(x)$ . On pose alors que la vitesse moyenne à travers la section d'abscisse  $x$  calculée par le code PERSE,  $U_{PERSE}(x)$ ,

est égale à celle du MPS simplifié, d'où la relation

$$\langle V_{\text{inj}} \rangle(x) = \frac{U_{\text{PERSE}}(x) \langle R \rangle}{2(x - x_{\text{in}})} \quad (1.6)$$

Cette relation montre que la vitesse d'injection est proportionnelle à la pente  $U_{\text{PERSE}}(x)/(x - x_{\text{in}})$  qui traduit l'accroissement linéaire de la vitesse du fluide le long du moteur. Les résultats du code PERSE montrent que cette pente est au moins constante suivant  $x$  par segment. Quand une différence existe entre les segments S2 et S3, on prend la moyenne des pentes. Nous verrons que cette accélération uniforme de la vitesse joue un rôle fondamental dans l'apparition des instabilités hydrodynamiques et l'apparition des bouffées. À titre d'exemple, nous présentons la reconstitution de la vitesse d'injection et du rayon pour le tir LP9t24 en figure 1.17.

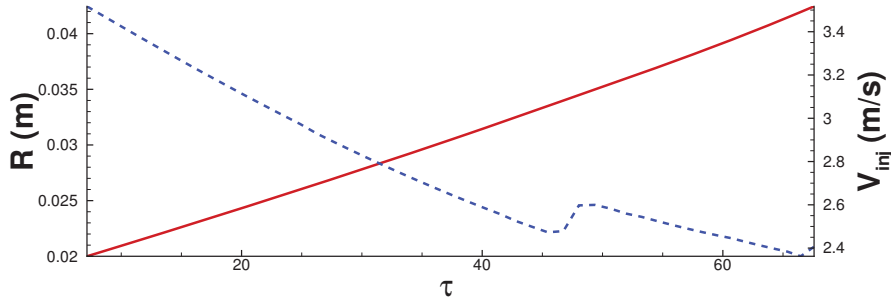


FIGURE 1.17 – Reconstitution des moyennes spatiales du rayon (rouge, continu) et de la vitesse d'injection (tiret bleus) au cours du temps pour le tir LP9t24. L'échelle de temps est adimensionnée par le temps de référence du moteur. On remarque l'augmentation caractéristique de la vitesse d'injection à  $\tau \approx 46$  qui correspond au découverture du chambrage arrière.

Dans tout ce qui suit, nous noterons  $R$  et  $V_{\text{inj}}$  les rayon et vitesse d'injection moyens, sans faire appel à la notation utilisée pour la moyenne.

#### 1.3.1.4 Grandeurs adimensionnées

Les grandeurs de référence introduites précédemment nous permettent d'écrire les équations du problème sous forme adimensionnée. Pour les distances, la longueur de référence est le rayon moyen  $R$  (on omet les crochets de moyenne), d'où les coordonnées cylindriques sans dimension  $x := x/R$ ,  $r := r/R$ . Dans ces conditions, le rayon du conduit devient unitaire, et on note  $X_{\text{out}}$  le rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = L/R$ . Les composantes de vitesse  $\mathbf{u} = (u_x, u_r, u_\theta)$  sont rendues sans dimension par la vitesse d'injection, d'où  $\mathbf{u} := \mathbf{u}/V_{\text{inj}}$ . De même, la pression adimensionalisée s'écrit  $p := p/\rho_0 V_{\text{inj}}^2$ . Ainsi, les effets visqueux sont caractérisés par le nombre de Reynolds d'injection

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 V_{\text{inj}} R}{\mu_0} \quad (1.7)$$

Pour les effets de compressibilité, on définit la vitesse du son au fond avant  $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ , où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques du fluide. On définit alors le nombre de Mach d'injection

$$M_{\text{inj}} = \frac{V_{\text{inj}}}{c_0}. \quad (1.8)$$

On peut également choisir d'exprimer les effets visqueux par un nombre de Reynolds acoustique<sup>10</sup> basé non pas sur la vitesse d'injection mais sur la vitesse du son. On note ainsi

$$\text{Re}_{\text{AC}} = \frac{\rho_0 c_0 R}{\mu_0} = \frac{\text{Re}}{M_{\text{inj}}} \quad (1.9)$$

Ces différentes grandeurs sont rassemblées dans le tableau 1.18 pour trois essais caractéristiques : le montage gaz froid VALDO à trois éléments avec une pression d'alimentation de 3.8 bar, le tir LP9t10 reconstitué à l'instant  $\tau = 3.31$  s et le tir LP9t24 reconstitué à l'instant  $\tau = 2.48$  s. Il est intéressant de remarquer que le montage VALDO à trois éléments est assez représentatif d'un essai gaz chaud en fin de tir du point de vue du rapport d'aspect et des effets de compressibilité. De plus, nous verrons que l'influence d'une variation de la viscosité sur l'écoulement de base, quand le nombre de Reynolds est supérieur à 1000, est très faible. De ce point de vue, les essais gaz froid sont au moins représentatifs du MPS simplifié associé à un tir réel. En revanche, la représentativité du MPS simplifié par rapport à la configuration réelle doit être vérifiée *a posteriori* suivant deux critères : la forme de l'écoulement moyen et, si des différences existent, l'impact de celles-ci sur la stabilité du moteur.

	$R$ (m)	$L$ (m)	$V_{\text{inj}}$ (m/s)	$p_0$ (bar)	$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	$T_0$ (K)	$c_0$ (m/s)	$X_{\text{out}}$	Re	$M_{\text{inj}}$
VALDO 3 éléments [12]	0.03	0.504	1.14	1.038	1.234	293	343	16.8	2860	$3.3 \cdot 10^{-3}$
Tir LP9t10 [25]	0.0379	0.591	1.846	46.37	5.693	2080	1005	18.2	6070	$1.8 \cdot 10^{-3}$
Tir LP9t24 [25]	0.0384	0.642	2.47	55.18	6.222	2266	1049	16.7	8363	$2.4 \cdot 10^{-3}$

FIGURE 1.18 – Grandeurs de référence pour le montage VALDO et les restitutions des tirs LP9t10 et LP9t24 par le code PERSE à l'instant  $\tau = 77.8$  et  $\tau = 58.4$  respectivement.

En conclusion, l'écoulement interne des MPS à un instant  $\tau$  donné peut être ramené, en première approximation, à celui d'un moteur simplifié représenté par un conduit cylindrique à parois débitantes comme celui de la figure 1.19, dont les grandeurs caractéristiques, énumérées en table 1.18, sont prises égales aux grandeurs moyennes du moteur réel. Le paragraphe suivant présente une solution analytique approchée de l'état de base largement utilisée dans l'étude de la stabilité des MPS, dite solution de Taylor-Culick.

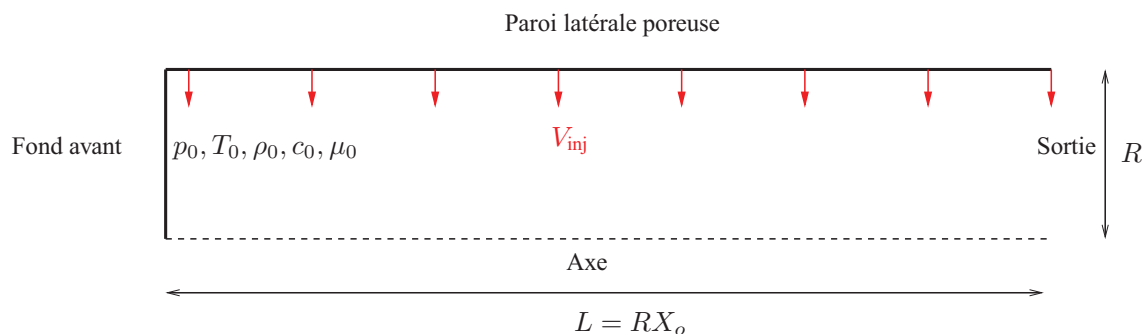


FIGURE 1.19 – Schéma d'un MPS simplifié vu comme un conduit cylindrique à parois débitantes. Les grandeurs présentées sont caractéristiques du montage VALDO.

10. C'est notamment le choix de Majdalani et Flandro [38] pour qui l'étude de stabilité part de l'étude de l'acoustique des MPS.

### 1.3.2 Écoulement de Taylor-Culick

#### 1.3.2.1 Équations de Navier-Stokes incompressibles

Étant donné un MPS de rayon  $R$  et de vitesse d'injection  $V_{\text{inj}}$  moyens (on omet les crochets de moyenne), nous devons calculer une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes pour le MPS simplifié équivalent. Remarquons d'abord que, vu la valeur du nombre de Mach d'injection  $M_{\text{inj}}$ , les effets de la compressibilité du gaz doivent être très faibles sur une grande partie du moteur et n'intervenir qu'au voisinage de la tuyère. En particulier, dans le cas d'une configuration de type «VALDO sans tuyère», on peut les négliger. En ce qui concerne la viscosité, les valeurs usuelles du nombre de Reynolds, de l'ordre de  $10^3$ , nous permettent de supposer deux types d'effets. Au fond avant, l'écoulement est très lent et des zones de recirculation ou des décollements peuvent intervenir. Plus problématique est la question de la transition du régime laminaire au régime turbulent. À la paroi, la complexité du processus de combustion du propergol chargé en particules laisse présager de la présence de turbulence ; cependant, il est possible que le flux se relaminarise immédiatement au-dessus de la paroi vu les faibles vitesses dans cette zone. Il n'est donc pas absurde de chercher une solution laminaire, du moins jusqu'à une certaine abscisse du moteur, tant que la vitesse moyenne du fluide et le cisaillement en proche paroi n'ont pas trop augmenté.

En résumé, nous cherchons en première approximation une solution stationnaire, incompressible, visqueuse et laminaire des équations de Navier-Stokes. Sous forme adimensionalisée, celles-ci s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.10a)$$

$$-\frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \nabla P = 0. \quad (1.10b)$$

Dans cette expression, nous ne nous intéressons qu'aux états stationnaires moyens (écrits en majuscule) suivant la décomposition définie par l'équation (1.4). De plus, nous supposons la symétrie de révolution du problème, ce qui implique l'indépendance azimuthale (coordonnée  $\theta$ ) de toutes les variables et l'annulation de la composante azimuthale de vitesse. Quant aux conditions aux limites, deux d'entre elles s'imposent physiquement : la condition de non-glissement au fond avant  $\mathbf{U}(x=0, r) = 0$ , et la condition d'injection de fluide à la paroi  $\mathbf{U}(x, r=1) = -\mathbf{e}_r$ . Sur l'axe, la symétrie de révolution de la solution cherchée impose d'écrire les conditions  $\partial_r P(x, r=0) = \partial_r U_x(x, r=0) = U_r(x, r=0) = 0$ , comme expliqué dans [52]. Enfin, rien n'est *a priori* imposé en sortie, si ce n'est une valeur moyenne de la pression qui n'est connue qu'à une constante près puisque seul son gradient apparaît dans l'équation (1.10). Notons que l'incompressibilité de fluide et l'hypothèse d'écoulement axisymétrique permettent en outre d'introduire une fonction de courant  $\Phi$  telle que

$$U_x = \frac{\partial_r \Phi}{r} \quad \text{et} \quad U_r = -\frac{\partial_x \Phi}{r} \quad (1.11)$$

On définit également le rotationnel de la vitesse par  $\Omega = \partial_r U_x - \partial_x U_r$ , qu'on relie à la fonction de courant par

$$\Omega = \partial_x^2 \Phi + \partial_r^2 \Phi - \frac{1}{r} \partial_r \Phi \quad (1.12)$$

#### 1.3.2.2 Solutions analytiques

Il existe plusieurs tentatives de résoudre ce problème analytiquement. L'une d'entre elles est à mettre au crédit de Berman [15] qui recherche une solution de similitude pour la fonction de courant écrite sous la forme  $\Phi(x, r) = xF(r)$ . Il obtient l'équation différentielle ordinaire

$$\text{Re}^{-1} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \right) \right] + \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} F \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.13)$$

avec les conditions  $d(dF/rdr)/d(0) = 0$ ,  $(F/r)(0) = 0$ ,  $dF/dr(1) = 0$  et  $F(1) = 1$ , qu'il résout<sup>11</sup> par développement asymptotique portant sur le nombre de Reynolds vu comme très grand devant 1. Cependant, cette solution de similitude ne peut pas vérifier la condition de non-glissement de la vitesse au fond avant.

Pour lever ce problème et obtenir une solution consistante, on peut choisir de négliger les effets visqueux quitte à ce que la solution ne soit pas physique au fond avant et dans son voisinage immédiat. Une résolution des équations d'Euler écrites pour un fluide incompressible associées aux conditions aux limites  $U_x(0, r) = 0$  et  $U_r(x, 1) = -1$  et aux conditions de symétrie sur l'axe décrites plus haut a ainsi été proposée par Taylor [80] et redécouverte par Culick [29] dans le cadre des premiers travaux sur la stabilité des boosters. En particulier, Culick reprend l'hypothèse de Berman d'une fonction de courant écrite sous la forme  $\Phi(x, r) = xF(r)$ . Ainsi, la condition aux limites au fond avant est automatiquement vérifiée; à la paroi et sur l'axe, on doit avoir  $F(1) = 1$  et  $(F/r)(0) = 0$ . Or, cette fois-ci, il est possible de relier d'une seconde manière le rotationnel de la vitesse et la fonction de courant en plus de l'équation (1.14). Le calcul du rotationnel de l'équation de quantité de mouvement implique que  $\partial_x \Phi \partial_r \Omega / r - \partial_r \Phi \partial_x \Omega / r = 0$ . La vorticité s'écrit donc sous la forme

$$\Omega = rf(\Phi) \quad (1.14)$$

Or, la manipulation des conditions aux limites fait apparaître que la fonction de courant est égale à  $x$  sur la paroi débitante; on montre également par l'équation (1.14) que  $\Omega(x, 1) = x(F''(1) - F'(1))$ ; enfin, sur chaque ligne de courant, il existe une constante  $K$  telle que  $\Omega(x, r) = Kr\Phi(x, r)$ , et cette constante est nécessairement égale à  $(F''(1) - F'(1))$ . La vorticité  $\Omega$  est donc proportionnelle à  $r\Phi$  sur tout le domaine. L'équation à résoudre pour la fonction de courant s'écrit finalement

$$\partial_x^2 \Phi + \partial_r^2 \Phi - \frac{1}{r} \partial_r \Phi + Kr^2 \Phi = 0 \quad (1.15)$$

L'utilisation des conditions aux limites permet de montrer qu'en fait on a  $K = \pi^2$ . Cela conduit au résultat

$$\Phi(x, r) = x \sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \quad (1.16a)$$

$$U_x(x, r) = \pi x \cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \quad (1.16b)$$

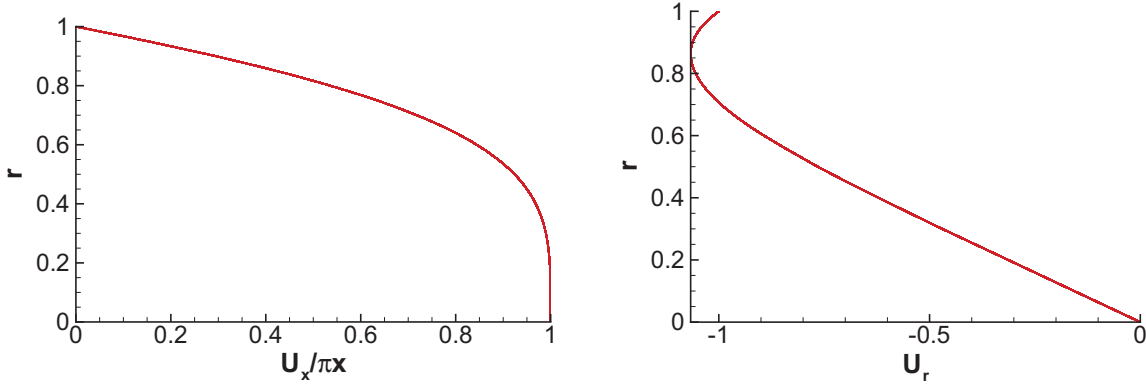
$$U_r(x, r) = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \quad (1.16c)$$

$$P(x, r) = P(0, 0) - \frac{\pi^2 x^2}{2} - \frac{1}{2r^2} \sin^2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \quad (1.16d)$$

On retrouve bien dans cette solution la croissance uniforme de la vitesse longitudinale de l'écoulement. Cette dépendance vis-à-vis de  $x$  ramène d'ailleurs à la relation (1.6), puisque la moyenne par section mais aussi les profils de vitesse longitudinale sont proportionnels à  $x$ . La vitesse radiale, elle, atteint une amplitude maximale non pas à la paroi, mais pour des valeurs de  $r$  légèrement plus faibles. Comme il s'agit d'une solution de similitude, les profils de vitesse longitudinale sont tous semblables à un facteur  $x$  près, et les profils de vitesse radiale sont identiques (figure 1.20). Enfin, les lignes de courant partent toutes de la paroi, et la ligne partant d'une abscisse  $x_p$ , dont l'équation s'écrit  $x = x_p / \sin(\pi r^2/2)$ , n'atteint jamais l'axe mais s'échappe à l'infini aval. Cela implique qu'une perturbation quelconque (instabilités, turbulence) créée près de la paroi et convectée par l'écoulement n'atteint jamais l'axe.

11. Pour ce qui est de l'unicité de l'équation de Berman, on trouvera dans la thèse de J. Griffond [45] une revue bibliographique indiquant que, au moins pour de grands nombres de Reynolds positifs (correspondant bien    une injection de fluide), il n'existe qu'une seule branche de solutions.

Par exemple, une particule passant par le point  $(x = 8, r = 0.5)$  est émise à  $x_p = 0.44$ , et une particule passant en  $(x = 8, r = 0.1)$  est émise en  $x_p = 0.002$ ! On se reportera à la figure 1.21(a) pour le tracé de quelques lignes de courant.



(a) Profils de vitesse axiale ramenés à leur abscisse.

(b) Profil de vitesse radiale.

FIGURE 1.20 – Profils radiaux de vitesse de l'écoulement de Taylor-Culick.

### 1.3.3 Solution numérique

La résolution analytique approchée des équations de Navier-Stokes étant délicate notamment pour modéliser le comportement de l'écoulement au fond avant, il est intéressant d'en calculer une solution numérique. Pour cela, nous utilisons le code CEDRE (Code pour les Écoulements Diphasiques Réactifs pour l'Énergétique) de l'ONERA. La recherche d'un état stationnaire passe par l'utilisation d'un pas de temps long et d'un schéma d'intégration temporelle robuste dont la stabilité ne dépend pas d'une condition CFL. Rappelons que le nombre CFL (pour Courant, Friedrich et Levy) est défini comme le rapport  $CFL = u\delta t/\delta l$  où  $\delta t$  est le pas de temps du calcul,  $\delta l$  une taille caractéristique de la discrétisation spatiale (longueur de maille par exemple), et  $u$  une vitesse caractéristique. Pour qu'un schéma temporel explicite soit stable, les nombres CFL dits convectif (basé sur la vitesse du fluide dans la maille) et acoustique (basé sur la vitesse du son) doivent être inférieurs à 1. En revanche, un schéma implicite n'a pas cette contrainte même si en pratique le pas de temps doit être limité pour les calculs instationnaires, surtout avec un schéma d'ordre 2 ou 3 (de type Runge-Kutta implicite). Par ailleurs, il est également préférable que le CFL acoustique soit proche de 1 si l'on veut que l'acoustique soit correctement calculée.

Cependant, ces problèmes n'interviennent pas ici puisque nous utilisons un schéma temporel implicite d'ordre 1 (« $\theta$ -schéma un pas une-étape» dans CEDRE) avec un pas de temps long (typiquement  $\delta t = 0.5$  précisément pour faire abstraction des phénomènes instationnaires). Dans ce cas, aucun phénomène ondulatoire n'est supposé apparaître : on doit seulement veiller à ce que le raffinement du maillage soit suffisamment fin pour capter la couche limite au fond avant et les zones de forte courbure des lignes de courant près de la paroi et de l'axe. La sortie est légèrement raffinée également. L'autre problème qui se pose est l'existence du point singulier  $(x = 0, r = 1)$  si l'on s'en tient à un profil uniforme de vitesse d'injection pariétale, auquel cas la vitesse radiale  $u_r$  vaut  $-V_{inj}$  du point de vue de la paroi débitante et 0 du point de vue de la paroi au fond avant. Nous faisons donc tendre vers zéro la vitesse d'injection sur une courte zone au voisinage du fond avant. Son expression devient

$$V_{inj}(x) = V_{inj0} \tanh\left(\frac{4x}{x_r}\right), \quad \text{avec} \quad V_{inj}(x_r) = 0.9993 V_{inj0} \quad (1.17)$$

La vitesse d'injection de référence est alors donnée, comme pour les tirs gaz chaud, par l'accroissement du débit moyen sur chaque section. D'autres aspects de ces simulations numériques, telles que l'utilisation de schémas de flux bas-Mach pour le calcul des zones quasi-incompressibles ou la condition de sortie utilisée, seront développés au chapitre 5 en même temps que les choix posés pour les simulations instationnaires.

La solution obtenue est très proche de l'écoulement de Taylor-Culick (figure 1.21(a)) dès  $x = R$ . Seule la zone du fond avant est notablement différente de par la présence d'une couche limite décollée (figure 1.21(b)). La solution de Taylor-Culick est donc une très bonne approximation pour l'écoulement de conduits à parois débitantes, ce qui justifie qu'elle soit largement utilisée dans les différentes études théoriques.

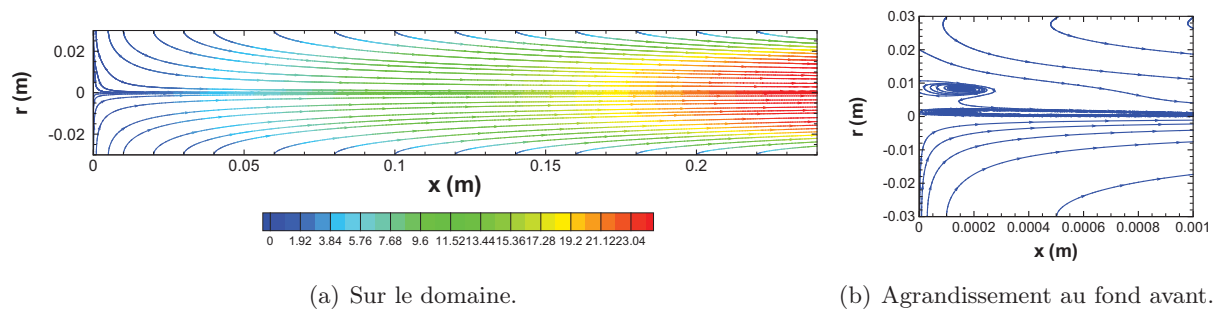


FIGURE 1.21 – Comparaison des lignes de courant d'une solution numérique calculée avec le code CEDRE (valeurs de  $r$  positives) et de l'écoulement de Taylor-Culick (valeurs de  $r$  négatives) pour un MPS simplifié. Les contours de couleur correspondent à la norme du vecteur vitesse. Vitesse d'injection moyenne de 1.04 m/s.

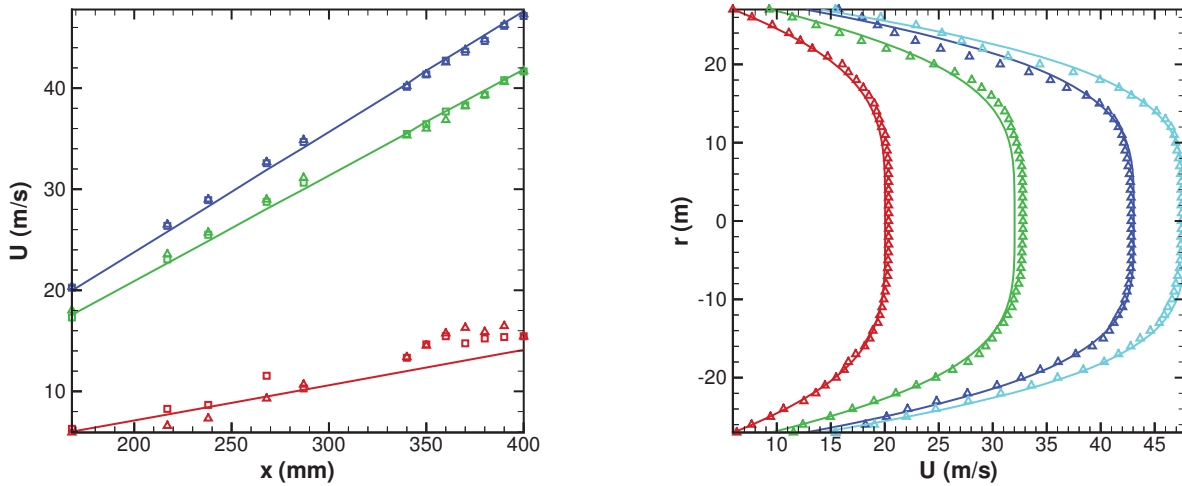
### 1.3.4 Comparaison au montage VALDO

#### 1.3.4.1 Partie laminaire

Si la simulation numérique a montré que l'écoulement de Taylor-Culick est bien représentatif d'une solution laminaire des équations de Navier-Stokes, il faut se demander dans quelle mesure la recherche d'une solution laminaire est justifiée. Pour cela, nous analysons les profils de vitesse moyenne mesurés sur le montage VALDO lors de différentes campagnes d'essais. Le principal problème rencontré alors est la reproductibilité des résultats : de grands écarts peuvent être mesurés d'un essai à l'autre effectué dans les mêmes conditions avec un poral de caractéristiques identiques.<sup>12</sup> Cependant, si l'on reprend les essais dont nous avons tracé les spectres de vitesse fluctuante (figure 1.15), les profils de vitesse moyenne mesurés s'accordent assez bien à la solution de Taylor-Culick comme on peut le voir par exemple pour la vitesse d'injection  $V_{inj} = 1.05$  m/s en figure 1.22. On remarque seulement une légère dissymétrie entre le haut et le bas du montage, ainsi qu'un écart entre théorie et mesures qui augmente près de la paroi le long du conduit. La solution de Taylor-Culick est donc bien représentative des écoulements gaz froid jusqu'à un rapport d'aspect d'environ 12 ; plus loin, les vitesses moyennes semblent augmenter en proche paroi et très légèrement diminuer sur l'axe. On peut bien sûr se demander si cette caractéristique n'est pas due à un début de transition vers un régime turbulent.

12. Du moins en théorie. Il arrive notamment que, d'un essai à l'autre, le poral utilisé vienne de constructeurs différents.





(a) Profils longitudinaux au-dessus (carrés) et en-dessous de l'axe (triangles), en  $r = 27$  mm (rouge),  $r = 17$  mm (vert) et  $r = 7$  mm (bleu) soit respectivement  $r/R = 0.9, 0.567$  et  $0.233$ .

(b) Profils radiaux en  $x = 168$  mm (rouge),  $x = 268$  mm (vert),  $x = 360$  mm (bleu) et  $x = 400$  mm (cyan), soit  $x/R = 5.6, 8.93, 12$  et  $13.33$ .

FIGURE 1.22 – Comparaison entre les modules de vitesse  $\|\mathbf{U}\|$  de l'écoulement de Taylor-Culick (traits pleins) et les enregistrements de vitesse moyenne dans le montage VALDO à trois éléments avec tuyère et une vitesse d'injection  $V_{inj} = 1.16$  m/s. Les vitesses mesurées correspondent à la même campagne d'essais que les spectres présentés en section 1.2.2.4

### 1.3.4.2 Question de la turbulence

La question de la turbulence est tout aussi fondamentale dans l'étude des ODP que la connaissance de l'acoustique ou des instabilités intrinsèques du moteur. En effet, nous avons vu qu'aucune instabilité n'apparaît jusqu'à la mi-tir dans le cas du P230 et des essais à échelle réduite. Cela est attribué au fait que le facteur d'aspect du moteur est alors supérieur 20 : dans ces conditions, l'écoulement au voisinage de la sortie est supposé être en grande partie turbulent et les structures tourbillonnaires générées en amont être suffisamment dissipées pour ne pas créer d'onde de pression réfléchie lors de l'impact du col de la tuyère. De même, l'existence d'un écoulement en partie laminaire et en partie turbulent est problématique en simulation numérique. Aujourd'hui, le comportement instationnaire du moteur à un instant  $\tau$  est recherché soit en écoulement entièrement laminaire, soit en écoulement entièrement turbulent suivant une approche RANS (voir par exemple Gallier & *et al.* [40]). Dans le premier cas, l'amplitude des ODP est surestimée par rapport à l'expérience car les structures tourbillonnaires ne sont pas du tout atténuées par un écoulement probablement transitionnel ; dans le second, cette amplitude est très largement sous-estimée car les structures simulées sont anormalement dissipées.

Des travaux de thèse menés par B. Gazanion sont en cours sur le sujet, notamment pour ce qui est de la simulation du comportement instationnaire des MPS en écoulement transitionnel. Nous souhaitons juste ici présenter rapidement les résultats de référence sur la question. Jusqu'à présent, les travaux portant sur des montages gaz froid de Varapaev et Yagodkin [89, 95] puis de Brown et Dunlap [20] ont montré que la transition de l'écoulement débute à partir du rapport d'aspect  $x/R = 12$ . Plus précisément, Brown et Dunlap [33] étudient en détail les amplitudes et les spectres de vitesse instationnaires ainsi que sur le cisaillement turbulent. Ils constatent alors que les détachements tourbillonnaires cohérents dus au développement des instabilités pariétales dégénèrent en turbulence en proche paroi à partir de  $x/R = 12$  en laissant 80% de la section fluide laminaire. Plus loin, entre  $x/R = 16$  et  $x/R = 26$ , toute la section est turbulente, avec toutefois des intensités de cisaillement



turbulent bien plus faibles que dans le cas d'un écoulement de conduit sans parois débitantes ayant la même vitesse au milieu du conduit.

Dans le cas du montage VALDO, nous ne pouvons nous appuyer que sur les amplitudes et les spectres de vitesse instationnaire. Les profils longitudinaux d'amplitude tracés en figure 1.23 semblent suivre une évolution en deux temps : croissance de type exponentiel<sup>13</sup> des instabilités à partir de  $x/R = 9$  d'amplitude plus élevée en proche paroi, puis saturation de cette croissance progressive depuis la paroi vers le centre. De plus, les spectres de vitesse fluctuante (figure 1.24) font apparaître les raies modales caractéristiques du VSP sur l'ensemble de la section jusqu'au point de mesure  $x/R = 12.8$  : les instabilités pariétales restent donc cohérentes au moins jusqu'à cette abscisse. Le début de la transition en proche paroi semble avoir lieu entre  $x/R = 13$  et  $x/R = 15$ , puisque ces raies s'accompagnent d'un bruit qui devient dominant en  $r = 2$  mm à partir de  $X = 18.7$ . Cependant, l'écoulement semble rester laminaire dès qu'on s'éloigne de la paroi, et ce jusqu'à la fin de conduit ( $x/R = 20.7$ ). Le phénomène de palier observé sur les profils de vitesse fluctuante est sans doute lié à la saturation non-linéaire des instabilités mais n'est donc pas représentatif du passage à un état turbulent.

Au final, les essais effectués sur le montage VALDO traduisent qualitativement les mêmes phénomènes que ceux effectués par Dunlap et Brown, mais il semble que la transition est plus tardive et concerne plus particulièrement la région de proche paroi dans le cas VALDO. Encore une fois, la qualité du poral entre sans doute en jeu dans le développement de la turbulence de par une injection de turbulence à la paroi plus ou moins grande, de même que celle des jonctions entre segments qui peuvent générer des détachements tourbillonnaires ou forcer la transition. Pour notre application, l'important est de noter que les phénomènes non-linéaires (que ce soit la transition ou une réponse non-linéaire des instabilités pariétales) interviennent à partir de  $X = 12$ , seuil au-delà duquel les analyses théoriques se basant sur une hypothèse de linéarité doivent être interprétées avec beaucoup de précaution.

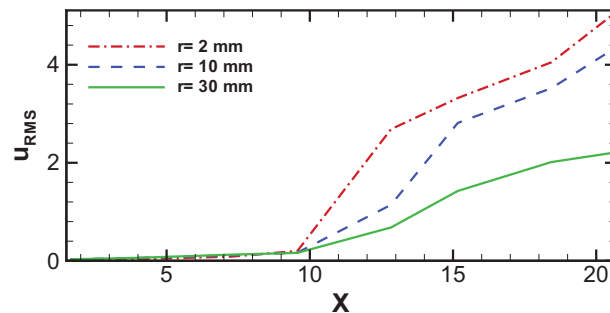


FIGURE 1.23 – Profils longitudinaux de vitesse RMS tracés à différentes positions radiales pour le montage VALDO à quatre éléments sans tuyère. Vitesse d'injection  $V_{inj} = 1.03$  m/s.

## 1.4 Acoustique des moteurs à propergol solide

Le calcul de l'acoustique spécifique des conduits à parois débitantes a été introduit par J. Majdalani et G. A. Flandro [37, 60] afin d'améliorer la méthode de bilan acoustique développée par Culick [29] qui ne prenait en compte que des modes en onde plane. De par ces hypothèses trop restrictives, l'instabilité des moteurs longs tels que le SRM de la fusée Titan IV ou le P230 d'Ariane 5 était mal prédite, d'où la nécessité de prendre en compte, dans le bilan acoustique, les composantes rotationnelles de l'écoulement de base et des fluctuations de vitesse. Flandro et Majdalani montrent alors que les termes additionnels ainsi introduits indiquent une stabilité moindre de ces moteurs sans toutefois rendre compte de la

13. Par comparaison avec les résultats de stabilité linéaire, des mesures plus resserrées le long du moteur ont été associées par J. Griffond [45] à la croissance en  $x^\lambda$  de l'amplitude des instabilités hydrodynamiques.

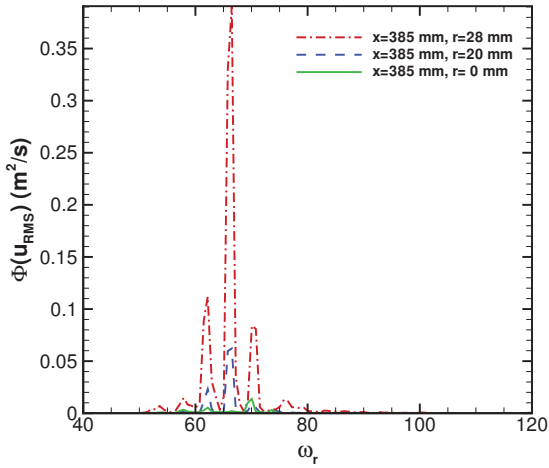
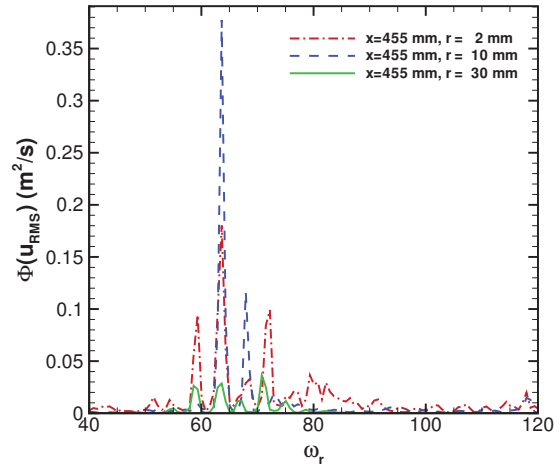
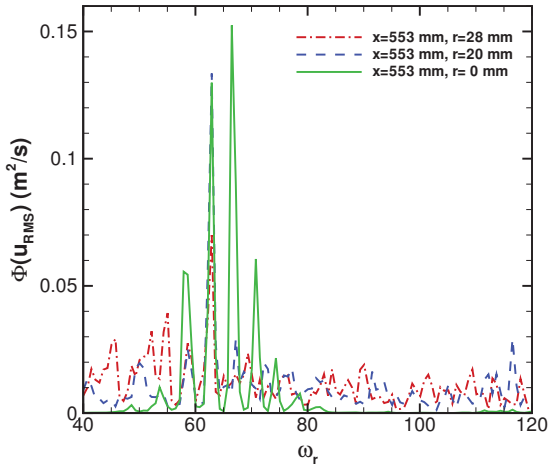
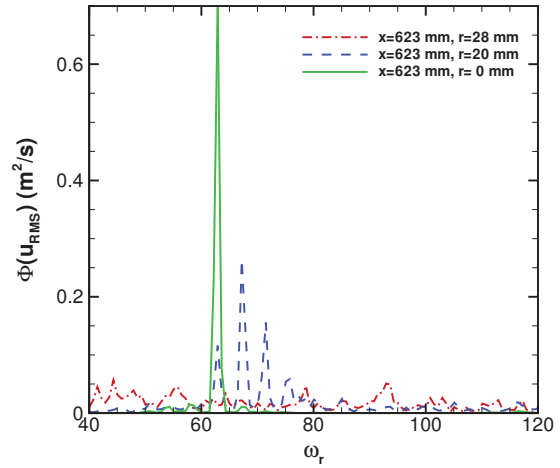

 (a)  $x = 385 \text{ mm}$ ,  $x/R = 12.8$ 

 (b)  $x = 455 \text{ mm}$ ,  $x/R = 15.2$ 

 (c)  $x = 553 \text{ mm}$ ,  $x/R = 18.4$ 

 (d)  $x = 623 \text{ mm}$ ,  $x/R = 20.7$ 

FIGURE 1.24 – Densité spectrale de puissance associée aux signaux de vitesse instationnaire pour le montage VALDO à quatre éléments sans tuyère, exprimée en fonction de la pulsation réduite  $\omega$ . La vitesse d'injection est de 1.03 m/s. Séries de sondages effectués en différentes abscisses. Par comparaison au cas à trois éléments, les raies spectrales sont autour des pulsations réduites  $\omega \approx 58, 62, 66$  et  $70$ , avec toutefois une plus grande dispersion.

présence d'ODP [38]. Notons bien que pour les auteurs, la solution de couche limite acoustique ne palie pas l'absence du VSP dans leur modélisation, ce qui explique leurs résultats. Au contraire, ils prônent la prise en compte du VSP dans le bilan d'énergie acoustique. Cette idée a d'ailleurs été reprise dans le cadre des travaux de M2R menés par S. Didorally à l'ONERA/DEFA [31].

De notre point de vue, il est important de calculer l'acoustique des MPS afin de mieux cerner son interaction avec le VSP. Nous procédons en deux temps : d'abord par le calcul de l'acoustique mono-dimensionnelle qui permet de fixer les fréquences des modes en onde plane, ensuite par la présentation des corrections apportées par Madjalani et Flandro.

### 1.4.1 Solution d'onde plane

La méthode de base pour les calculs d'acoustique consiste à résoudre les équations d'Euler linéarisées en écoulement de fluide parfait écrites pour un gaz compressible isentropique de rapport de chaleurs spécifiques  $\gamma$ . Leur solution est décomposée en parties stationnaire et instationnaire (équation (1.4)), les fluctuations étant supposées de faible amplitude par rapport à la partie stationnaire. Dans le cas des conduits sans écoulement, on ne s'intéresse qu'à leur comportement longitudinal. En reprenant les grandeurs thermodynamiques de référence au fond avant précédentes,<sup>14</sup> nous choisissons comme grandeurs d'adimensionnement la vitesse du son  $c_0$ ,  $\rho_0$  pour la masse volumique,  $\rho_0 c_0^2$  pour la pression,  $R$  pour les distances et  $R/c_0$  pour le temps. Les décompositions en grandeurs stationnaires et instationnaires s'écrivent ainsi

$$p(x, t) = \gamma + p'(x, t), \quad \rho(x, t) = 1 + \rho'(x, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(x, t) = u'_x(x, t)\mathbf{e}_x \quad (1.18)$$

La linéarisation des équations d'Euler conduit à une équation de type Helmholtz pour la pression :

$$\partial_t^2 p' - \partial_x^2 p' = 0 \quad (1.19)$$

Par ailleurs, les fluctuations de pression et de vitesse sont reliées par  $\partial_t p' = -\partial_x u'_x$ . Pour les conditions aux limites, on impose au fond avant la nullité de la fluctuation de vitesse, ce qui revient à écrire  $\partial_x p'(x = 0, t) = 0$ . En sortie, deux cas sont à prendre en compte : en l'absence de tuyère, la pression totale est imposée, la partie fluctuante est donc nulle ( $p'(x = L/R, t) = 0$ ) ; en présence d'une tuyère, c'est la fluctuation de vitesse qui est nulle, d'où  $\partial_x p'(x = L/R, t) = 0$ . En recherchant les solutions sous forme de mode normaux ( $p', u'$ )( $x, t$ ) =  $\Re((p_1, u_1)e^{i(k_x x - k_t t)})$ , nous obtenons la relation de dispersion  $k_t = k_x = k_m$  et la sélection fréquentielle

$$k_m = \frac{m\pi R}{L} \quad \text{avec tuyère et} \quad k_m = \frac{(2m+1)\pi R}{2L} \quad \text{sans tuyère} \quad (1.20)$$

où  $m$  est un entier positif. Ainsi, les fluctuations de pression et de vitesse longitudinale s'écrivent

$$p'(x, t) = p_0 e^{-ik_m t} \cos(k_m x) \quad (1.21)$$

$$u'_x(x, t) = u_0 e^{-ik_m t} \sin(k_m x) \quad (1.22)$$

où les amplitudes adimensionnelles  $u_0$  et  $p_0$  sont égales.

En revenant aux grandeurs dimensionnelles, les fréquences acoustiques  $f = kc_0/2\pi R$  s'écrivent

$$f_m = \frac{mc_0}{2L} \quad \text{avec tuyère et} \quad f_m = \frac{(2m+1)Rc_0}{4L} \quad \text{sans tuyère} \quad (1.23)$$

On retrouve ainsi notamment les valeurs des fréquences acoustiques annoncées pour les montages VECLA et VALDO en section 1.2.2.4.

### 1.4.2 Couche limite acoustique

La théorie de la couche limite acoustique a été introduite par Flandro [37] et améliorée par Majdalani et Van Moorhem [60, 58] dans le but de calculer l'acoustique des MPS vue comme le facteur déterminant de l'étude de leur stabilité [38, 59, 61]. Il s'agit en fait d'une extension de la méthode perturbative précédente qui vise à prendre en compte les effets de l'écoulement moyen, de la viscosité et de la dépendance radiale potentielle de l'acoustique par l'ajout de termes rotationnels correctifs aux

14. Ces grandeurs sont uniformes dans le conduit tant qu'on suppose l'absence d'écoulement, mais cela n'est bien sûr pas le cas en pratique.

fluctuations calculées plus haut. Les variables sont d'abord décomposées, compte tenu des grandeurs de référence, sous la forme

$$\begin{cases} p(x, r, t) &= M_{\text{inj}}^2 P(x, r) + p'(x, r, t), \\ \rho(x, r, t) &= 1 + \rho'(x, r, t), \\ \mathbf{u}(x, r, t) &= M_{\text{inj}} \mathbf{U}(x, r) + \mathbf{u}'(x, r, t) \end{cases} \quad (1.24)$$

où  $P$  et  $\mathbf{U}$  sont les expressions adimensionnelles de la pression et de la vitesse de l'écoulement de Taylor-Culick (3.22). Majdalani et Van Moorhem utilisent une méthode asymptotique qui suppose que le nombre de Mach d'injection  $M_{\text{inj}}$ , le paramètre  $\delta = 1/\sqrt{\text{Re}_0}$  et l'ensemble des fluctuations précédentes sont petites devant les grandeurs moyennes. Ils résolvent alors les équations de Navier-Stokes compressibles linéarisées qui s'écrivent

$$\partial_t \rho' + \nabla \cdot \mathbf{u}' = -M_{\text{inj}} \mathbf{U} \cdot \nabla \rho' \quad (1.25)$$

$$\partial_t \mathbf{u}' + \nabla p' = \begin{cases} M_{\text{inj}} [-\nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \wedge (\nabla \wedge \mathbf{U}) + \mathbf{U} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}')] + \\ \frac{1}{\text{Re}_0} \left[ \frac{4}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}' - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{u}' \right] \end{cases} \quad (1.26)$$

Les fluctuations de pression et de vitesse sont ensuite divisées en une partie irrotationnelle et compressible (qui doit reprendre les termes calculés en l'absence d'écoulement) et une partie rotationnelle incompressible :

$$p'(x, r, t) = \widehat{p}(x, r, t) + \check{p}(x, r, t), \quad \rho(x, r, t) = \widehat{p}(x, r, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}'(x, r, t) = \widehat{\mathbf{u}}(x, r, t) + \check{\mathbf{u}}(x, r, t), \quad (1.27)$$

où les symboles  $(\widehat{\quad})$  représentent les parties compressibles irrotationnelles et les  $(\check{\quad})$  les parties rotationnelles incompressibles. Cette fois-ci, la dépendance radiale n'est pas négligée, la fluctuation de vitesse transverse est *a priori* non-nulle et la prise en compte des effets visqueux implique que les fluctuations de vitesse sont nulles aux parois (fond avant et paroi débitante). Toutes ces fluctuations sont recherchées sous forme de modes normaux en temps et dont la partie spatiale est développée asymptotiquement suivant  $M_{\text{inj}}$ . Madjalani et Van Moorhem montrent que les fréquences acoustiques  $k_m$  calculées en l'absence d'écoulement sont conservées, et obtiennent les fluctuations suivantes :

$$\widehat{p}(x, r, t) = p_0 e^{-ik_m t} \cos(k_m x) + \mathcal{O}(M_{\text{inj}}) \quad (1.28)$$

$$\check{p}(x, r, t) = i p_0 M_{\text{inj}} e^{-ik_m t} \frac{\pi x}{2} \sin(2\eta) e^{\phi+i\psi} \sin(\sin(\eta) k_m x) + \mathcal{O}(M_{\text{inj}}^2) \quad (1.29)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}(x, r, t) = i u_0 e^{-ik_m t} \sin(k_m x) \mathbf{e}_x + \mathcal{O}(M_{\text{inj}}) \quad (1.30)$$

$$\check{\mathbf{u}}(x, r, t) = -i u_0 e^{-ik_m t} \sin(\eta) e^{\phi+i\psi} \sin[\sin(\eta(r)) k_m x] \mathbf{e}_x + \mathcal{O}(M_{\text{inj}}) \quad (1.31)$$

avec

$$\eta = \frac{\pi r^2}{2} \quad (1.32)$$

$$\phi = \frac{k_m^2}{\pi^2 M_{\text{inj}}^3 \text{Re}_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sin(\eta)} - \eta \frac{\cos(\eta)}{\sin^2(\eta)} + I(\eta) - I(\pi/2) \right] \quad (1.33)$$

$$\psi = -\frac{k_m \ln(\tan(\frac{\eta}{2}))}{\pi M_{\text{inj}}} \quad (1.34)$$

$$I(\eta) = \eta + \frac{\eta^3}{18} + \frac{7\eta^5}{1800} + \frac{31\eta^7}{105840} + \dots \quad (1.35)$$

Si l'on s'en tient aux termes en  $\mathcal{O}(1)$ , la solution en onde plane pour la pression est inchangée, tandis que la fluctuation de vitesse longitudinale d'onde plane est corrigée d'un terme rotationnel qui permet notamment de satisfaire la condition d'attachement à la paroi. La fluctuation transverse, elle, est au plus d'ordre  $\mathcal{O}(M_{\text{inj}})$ .

### 1.4.3 Amplitudes

La théorie de la couche limite acoustique étant linéaire par essence, elle ne nous apprend rien sur l'amplitude de l'acoustique des MPS. Il nous faut pour cela revenir aux différents essais. Notons que d'une manière générale, la présence ou non d'une tuyère ne modifie pas seulement les fréquences (1.23), elle change également le comportement global de l'acoustique. Dans le cas d'une veine à paroi débitante sans tuyère de sortie comme le montage VALDO, il est difficile d'affirmer que la condition de pression de sortie imposée (ou de fluctuation de pression acoustique nulle) s'applique réellement. Du point de vue numérique, la modélisation de base consiste à faire en sorte que les ondes acoustiques soient réfléchies sur les faces de sortie. Les DNS effectuées dans [25] montrent alors que l'acoustique théorique est retrouvée avec une amplitude de quelques centaines de Pascals au fond avant pour un MPS simplifié de rapport d'aspect  $L/R = 8$ . Cependant, il est également possible d'imposer aux ondes de pression de sortir du domaine sans être réfléchies, auquel cas la situation doit mieux se rapprocher de la situation physique. En revanche, dans le cas de base des MPS comportant une tuyère, les fluctuations de vitesse sont nécessairement nulles au col de la tuyère et au fond avant. Les ondes de pression se réfléchissent donc aux deux extrémités du moteur et sont entretenues. Cependant, la modélisation des réflexions acoustiques au col de la tuyère est difficile et la quantification de l'amplitude de l'onde réfléchi par rapport à l'onde incidente n'est pas aisée. Dans les deux cas, ces incertitudes rendent difficile le calcul rigoureux de l'amplitude des fluctuations acoustiques.

Typiquement, le rapport de l'amplitude de pression instationnaire  $A_{AC}^p$  sur la pression moyenne au fond avant  $p_0$  est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-3}$ . Or, compte tenu des grandeurs de référence utilisées en acoustique, l'amplitude de vitesse instationnaire  $A_{AC}^u$  est reliée à celle de pression par la relation  $A_{AC}^p = \rho_0 c_0 A_{AC}^u$ . On ne parle ici que de vitesse axiale, la composante radiale étant plus petite d'un facteur  $M_{inj} \ll 1$ . Cette amplitude peut être comparée à la vitesse de l'écoulement maximale en sortie du moteur —prenons par exemple celle donnée par la solution de Taylor-Culick. On obtient ainsi

$$\frac{A_{AC}^u}{\|\mathbf{U}\|_\infty} = \frac{1}{\gamma \pi X_{out} M_{inj}} \frac{A_{AC}^p}{p_0} \quad (1.36)$$

avec  $\|\mathbf{U}\|_\infty$  de l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne sur l'axe. Par exemple, pour un LP9 au moment d'apparition des ODP, nous avons  $X_{out} = 16.7$  et  $M_{inj} = 2.4 \cdot 10^{-3}$ , soit un rapport d'amplitude de 0.011. Vues ainsi, les fluctuations de pression et de vitesse acoustique semblent donc dans les limites d'une modélisation linéaire. Cependant, il est possible que l'on sorte localement de la linéarité, notamment en proche paroi où la vitesse moyenne locale est beaucoup plus faible.

## 1.5 Étude de stabilité globale de l'écoulement de Taylor-Culick

L'insuffisance de la théorie de couche limite acoustique pour la prévision de la stabilité des MPS encourage à envisager l'existence d'instabilités propres de l'écoulement qui soient à même d'expliquer l'apparition des détachements tourbillonnaires pariétaux mesurés sur les montages LP9 et caractérisés sur les montages gaz froid et en simulation numérique (Vuillot et Lupoglazoff [90]). Pour cela, la théorie de la stabilité linéaire a été mise en oeuvre de plusieurs manières.

Le principe de la stabilité linéaire consiste à calculer l'évolution de petites perturbations ajoutées à un état de base connu, le plus souvent stationnaire. L'approche locale introduite en stabilité des couches limites (la fameuse équation d'Orr-Sommerfeld permettant de calculer les non moins fameux modes de Tollmien-Schlichting) a été mise en oeuvre dans le cas des écoulements de conduits à paroi débitante en premier lieu par Yagodkin [89] dans les années 60, puis a été reprise par Casalis et Griffond [48] au début des années 2000. Les variables fluctuantes  $q'$  sont alors exprimées sous la forme d'une fonction de la coordonnée transverse ( $y$  ou  $r$ ) multipliée par un mode normal :  $q'(x, y; t) = \Re(\hat{q}(y) e^{i(\hat{k}x - \hat{\omega}t)})$ . Ce qu'on modélise donc ici, c'est la propagation d'ondes le long de la veine et leur possible amplification.

Le problème à résoudre s'écrit formellement

$$\mathcal{D}(x_0, \hat{\omega}_0, \hat{k})\hat{q} = 0 \quad (1.37)$$

où  $x_0$  est l'abscisse de la veine considérée,  $\hat{\omega}_0$  une pulsation réelle fixée,  $\hat{k}$  un nombre d'onde complexe à rechercher et  $\mathcal{D}$  une fonction implicite de ces variables. Il s'agit en pratique d'un problème aux valeurs propres dont seul le mode le plus instable est retenu. Griffond [48] a ainsi montré que pour une pulsation réduite  $\hat{\omega}$  et un nombre de Reynolds donnés, il existe une abscisse critique  $x^*$  à partir de laquelle ce mode devient amplifié spatialement. Ses fluctuations associées sont maximales près de la paroi, ce qui permet de le qualifier d'instabilité pariétale. De plus, le calcul de la valeur propre de ce mode pour  $x_0 > x^*$  permet de reconstituer l'évolution spatiale de son amplitude  $A(x)$  qui est écrite sous la forme

$$A(x) = A_0 \exp\left(\int_{x^*}^{x_0} -\Im(\hat{k})(\xi) d\xi\right) \quad (1.38)$$

Griffond a notamment remarqué que  $A$  évolue suivant une loi pseudo-polynomiale en  $x^\lambda$  le long du conduit. Enfin, l'identification de ce mode avec le VSP mesuré par Brown & Dunlap [33] et sur le montage VECLA est justifiée pour trois raisons. Premièrement, les fonctions propres calculées pour la pulsation correspondant à la densité maximale de puissance des spectres expérimentaux coïncident bien avec les mesures de vitesse RMS. Deuxièmement, les instabilités mesurées comportent également une plage de croissance pseudo-polynomiale suivant  $x$  au sens défini précédemment ; troisièmement, l'analyse de stabilité permet de prédire correctement l'instabilité maximale du VSP mesurée en fonction de la fréquence.

La théorie de stabilité linéaire locale a donc permis d'associer le VSP à une instabilité hydrodynamique pariétale intrinsèque de l'écoulement de Taylor-Culick. Cependant, elle néglige complètement le fait que l'écoulement de base des MPS est fortement *non-parallèle*, i.e. qui n'est pas constant suivant  $x$  mais au contraire uniformément accéléré. Elle ne permet pas non plus de modéliser la *sélection fréquentielle* des bouffées, dans la mesure où pour toute fréquence il existe *a priori* une instabilité associée à un mode propre local de nombre d'onde  $\hat{k}$  qui peut se propager le long du MPS. Or, par analogie avec l'acoustique, la prise en compte de conditions imposées au fond avant et en sortie semble à même d'expliquer la sélection d'instabilités de fréquence discrètes. D'où le passage, avec les travaux de Feraille [35] puis Chedevert [25, 23, 27], à la modélisation de ces instabilités suivant la théorie *globale* (ou *BiGlobale* selon la terminologie adoptée par Theofilis [81], ou encore *stabilité non-parallèle*) pour laquelle seule la dépendance en temps des perturbations est supposée s'exprimer sous forme de mode normal. Cette modélisation vise donc à prendre en compte l'aspect non-parallèle de l'écoulement de base et à calculer le taux de croissance et la fréquence d'instabilités intrinsèques de la solution de Taylor-Culick.

### 1.5.1 Formulation et résolution du problème

Considérons l'état stationnaire d'un MPS simplifié (voir figure 1.19) caractérisé par une vitesse d'injection et un rayon moyens  $V_{inj}$  et  $R$  et par un écoulement de Taylor-Culick équivalent  $(P, \mathbf{U})$ . Les petites perturbations incompressibles visqueuses superposées à cet état de base sont recherchées sous forme de mode normal temporel  $(p', \mathbf{u}')(\mathbf{x}, t) = \Re((\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})(\mathbf{x}, r) e^{-i\hat{\omega}t})$  avec  $\hat{p}$  et  $\hat{\mathbf{u}}$  fonctions propres complexes et  $\hat{\omega}$  valeur propre complexe. Contrairement à l'approche locale de stabilité, aucune hypothèse forte n'est posée quant à l'évolution longitudinale des perturbations. Les équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées autour de l'ETC comme état de base sont écrites sous forme adimensionnelle, avec, comme grandeurs de référence, le rayon  $R$  et la vitesse d'injection  $V_{inj}$  du MPS équivalent, et la masse volumique au fond avant  $\rho_0$ . Les adimensionnements se font comme suit :  $\mathbf{x} := \mathbf{x}/R$  avec  $\mathbf{x}$  coordonnées cylindriques  $(x, r)$ ,  $t := tV_{inj}/R$ ,  $\hat{\mathbf{u}} := \hat{\mathbf{u}}/V_{inj}$  et  $\hat{p} := \hat{p}/\rho_0 V_{inj}^2$ . Les valeurs propres sont



reliées à des fréquences et des taux d'amplification physiques par les relations

$$f = \frac{\hat{\omega}_r V_{\text{inj}}}{2\pi R} \quad (1.39)$$

$$\nu = \frac{\hat{\omega}_i V_{\text{inj}}}{R} \quad (1.40)$$

où les indices «  $r$  » et «  $i$  » désignent les parties réelle et imaginaire. Ainsi, un mode est temporellement stable si la partie imaginaire de sa valeur propre est négative. Enfin, le nombre de Reynolds d'injection  $Re$  est l'un des paramètres du problème avec le facteur de forme  $X_{\text{out}} = L/R$ .

Les équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées prennent alors la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé  $\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) - i\hat{\omega}\mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = 0$  fermé par des conditions aux limites homogènes (nullité des perturbations de vitesse au fond avant et à la paroi débitante, conditions de symétrie sur l'axe, et une condition de fermeture *ad hoc* en sortie).

Compte tenu de l'incompressibilité et de l'axisymétrie des perturbations, il existe une fonction de courant  $\hat{\varphi}$  telle que

$$\hat{u}_x = \frac{\partial_r \hat{\varphi}}{r} \quad \text{et} \quad \hat{u}_r = -\frac{\partial_x \hat{\varphi}}{r}. \quad (1.41)$$

En introduisant l'opérateur  $\mathcal{L}(\hat{\varphi}) = \partial_x^2 \hat{\varphi} + \partial_r^2 \hat{\varphi} - r^{-1} \partial_r \hat{\varphi}$ , le problème aux valeurs propres généralisé peut se réécrire sous la forme  $\mathcal{A}(\hat{\varphi}) - i\hat{\omega}\mathcal{B}(\hat{\varphi}) = 0$ , avec

$$\mathcal{A}(\hat{\varphi}) = -\frac{1}{r \text{Re}} \mathcal{L} \circ \mathcal{L}(\hat{\varphi}) + r \left[ (\nabla \Phi) \wedge \nabla \left( \frac{\mathcal{L}(\hat{\varphi})}{r} \right) + (\nabla \hat{\varphi}) \wedge \nabla \left( \frac{\mathcal{L}(\Phi)}{r} \right) \right], \quad (1.42)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{B}(\hat{\varphi}) = -\frac{1}{r} \mathcal{L}(\hat{\varphi}) \quad (1.43)$$

Les conditions aux limites associées à cette formulation sont  $\hat{\varphi} = 0$  et  $\partial_n \hat{\varphi} = 0$  à la paroi, au fond avant et sur l'axe, où  $\partial_n \hat{\varphi}$  désigne la dérivée partielle de la fonction  $\hat{\varphi}$  par rapport à la normale sortante  $\mathbf{n}$  à la limite considérée. Parmi les différentes possibilités envisagées en sortie, une condition d'extrapolation linéaire sur les trois derniers points du maillage a été utilisée. D'autres relations, comme celle due à Gaster [41] de type  $\partial_x \hat{\varphi} = i\hat{k}\hat{\varphi}$  avec  $\hat{k}$  nombre d'onde obtenu pour un calcul de stabilité locale effectué en sortie pour une pulsation  $\hat{\omega}$  donnée, peuvent être envisagées, mais les résultats peuvent alors dépendre du paramètre  $\hat{k}$  notamment si les fonctions propres sont très amplifiées vers la sortie. C'est la relation d'extrapolation qui est retenue dans les travaux de F. Chedevigne. Cependant, nous reviendrons plus loin sur cette question en nous demandant quelle est la condition de sortie qui permet au problème de stabilité d'être *bien posé*.

Le problème aux valeurs propres généralisé  $\mathcal{A}(\hat{\varphi}) - i\hat{\omega}\mathcal{B}(\hat{\varphi}) = 0$  est ensuite discrétisé par collocation spectrale [21] : une double grille (longitudinale et radiale) de points de collocation dits de «Gauss-Lobatto» de taille  $N \times M$ ,  $(x_i, r_j)_{i=1\dots N, j=1\dots M}$  est introduite. La fonction de courant est interpolée aux points de cette grille sur la base des polynômes de Tchébychev, de telle sorte que les variables du problème discrétisé sont les  $N \times M$  nombres complexes  $\hat{\varphi}_{i,j} = \hat{\varphi}(x_i, r_j)$  rassemblés en un vecteur  $\hat{\mathbf{X}}$ . L'utilisation des polynômes de Tchébychev permet alors d'exprimer linéairement les dérivées longitudinales et radiales  $\partial_x^n \hat{\varphi}$  et  $\partial_r^m \hat{\varphi}$  ainsi que les dérivées croisées en un point  $(x_k, r_l)$  en fonction des variables  $(\hat{\varphi}_{i,j})_{i=1\dots N, j=1\dots M}$ , *via* des matrices de dérivation notées de manière générique  $\mathbf{D}^{x,n}$  et  $\mathbf{D}^{r,m}$ . On obtient ainsi un problème aux valeurs propres généralisé matriciel

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - i\hat{\omega}\mathbf{B}\hat{\mathbf{X}} = 0 \quad (1.44)$$

Ce problème est résolu par la mise en oeuvre de l'algorithme d'Arnoldi [8], qui consiste à calculer un nombre restreint de valeurs propres et de vecteurs propres au voisinage d'une cible  $\omega_0$ . Algorithmiquement, cette méthode suppose le calcul de l'inverse de la matrice  $\mathbf{A} - i\omega_0\mathbf{B}$  et de multiplications matrice-vecteur  $\mathbf{X} := (\mathbf{A} - i\omega_0\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}$ . Parmi ces deux étapes, c'est la première qui est la plus coûteuse, ce qui explique le choix de la formulation du problème en fonction de courant et non en variables

primitives, qui aurait conduit à l'inversion d'une matrice trois fois plus grande, c'est-à-dire contenant neuf fois plus de termes.

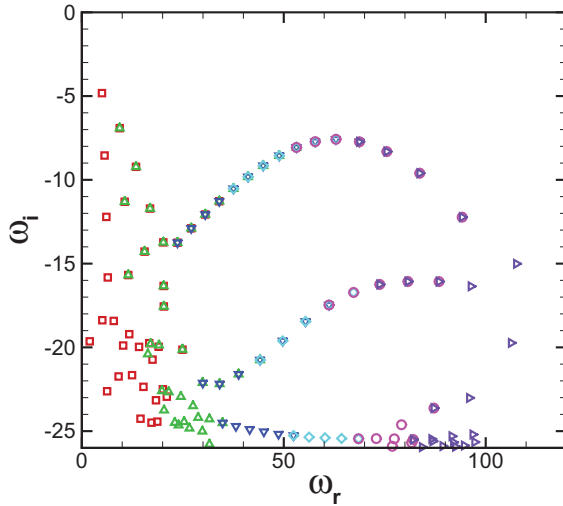
Les spectres de référence obtenus par F. Chedevergne (figure 1.25(a)) sont calculés pour une discrétisation longitudinale particulière  $N = 50$ . Ils montrent l'existence de modes propres tous temporellement stables. Ils se répartissent en un certain nombre de modes basse fréquence ( $\hat{\omega}_r < 30$ ) qui sont également atténués le long du conduit, et en deux ou trois branches paraboliques haute fréquence ( $\hat{\omega}_r > 30$ ) dont seule la plus instable nous intéresse. Cette répartition des modes est systématique dès que le nombre de Reynolds est suffisamment grand (quelques milliers, ici  $Re = 2100$ ) et le domaine suffisamment étendu ( $X_{\text{out}} = 5$ ). Les modes de la branche haute fréquence la plus instable sont ceux qui nous intéressent le plus. Leurs fluctuations de vitesse atteignent leur maximum près de la paroi (exemple de fonctions propres globales en figures 1.25(b) et 1.25(c), et profils radiaux en figure 1.26(a)). Quant à leur amplification axiale, elle rejoint en partie la croissance pseudo-polynomiale en  $(x/X_{\text{out}})^\lambda$  des modes de stabilité locale, comme on peut le voir sur le tracé en échelle logarithmique de la valeur absolue des deux composantes de vitesse (figure 1.26(b)) : on constate en effet l'existence d'une zone de pente constante avec  $\lambda \approx 28$  sur  $\ln(x/X_{\text{out}}) \in [-0.4, 0]$ , soit  $x \in [5.6, 8]$ . Ces modes temporellement stables mais amplifiés spatialement sont qualifiés d'instabilités «extrinsèques», car celles-ci se développent à une fréquence qui leur est propre mais ont besoin d'une source d'énergie pour émerger.

Par ailleurs, une étude paramétrique a montré la dépendance négligeable des parties réelles des valeurs propres à une variation du nombre de Reynolds  $Re$  tant qu'il demeure de l'ordre de quelques milliers et du rapport d'aspect  $X_{\text{out}}$  du domaine fluide tant qu'il reste inférieur à l'abscisse limite de linéarité des instabilités observée sur le montage VALDO ( $X_{\text{out}} = 12$ ). Lorsque l'écoulement de base n'est plus la solution de Taylor-Culick mais une solution DNS avec couche limite au fond avant, les modes basse fréquence disparaissent mais les modes haute fréquence ne sont pas modifiés. Ces instabilités sont donc principalement dues à l'accroissement axial de la vitesse dans le moteur et à la forme très incurvée des lignes de courant. Enfin, F. Chedevergne [25] a montré que les modes globaux sont cohérents avec l'approche de stabilité locale : pour un mode de pulsation  $\hat{\omega}$  donné, le profil en une abscisse  $x_0$  des fluctuations de vitesse coïncide avec celui calculé par la stabilité locale au même point à la même pulsation à condition que  $x_0$  soit suffisamment grand, à savoir  $x_0 > 7$ .

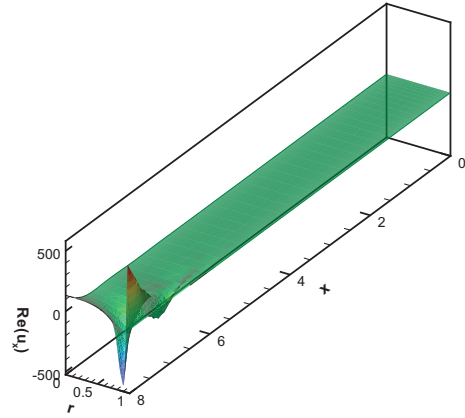
### 1.5.2 Lien avec le VSP

Comme on le pressent, les instabilités hydrodynamiques globales doivent être liées au VSP mis en évidence sur le montage VALDO et le montage LP9 et à l'origine des ODP mesurées sur l'ensemble des tirs réels, de même que les modes locaux étaient en accord avec le VSP mesuré sur le montage VECLA. En revanche, la nouveauté consiste à pouvoir comparer les fréquences discrètes des instabilités mesurées à celles des modes globaux décrits en figure 1.25(a). Dans le cas des tirs gaz chaud, la pulsation réduite utilisée en ordonnée dans les spectres présentés en section 1.2.1 peut être réexprimée en fonction de la restitution au cours du temps de la vitesse d'injection et du rayon moyens du moteur calculés par le code PERSE. Par exemple, la restitution présentée en figure 1.17 pour le LP9t24 conduit au spectre 1.27. Dans ce cas comme pour le montage VALDO, le VSP apparaît systématiquement à des pulsations réduites indépendantes de la vitesse d'injection ou de la géométrie moyenne du moteur suivant des raies spectrales espacées d'environ  $\Delta\omega \approx 4$ . Or, cette distribution fréquentielle des instabilités est très semblable à celle des modes propres de l'écoulement. De plus, il est possible de faire coïncider les fréquences des bouffées avec les modes de stabilité en les corrigeant d'un facteur  $C_E$  correspondant à une erreur d'au maximum 5 % [25]. Par exemple, dans le cas du LP9t24, on a pris  $C_E = 0.965$  dans pour la reconstitution présentée en figure 1.27. Pour le montage VALDO, et notamment la configuration à trois éléments sans tuyère, F. Chedevergne a calculé les modes propres pour un écoulement de base de vitesse d'injection bruitée qui représente mieux la situation réelle du montage VALDO (cas  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $Re = 2000$ ). Les valeurs propres obtenues  $\hat{\omega}_r = \{54.4, 59.1, 63.7, 70.0\}$  sont alors très proches de celles récapitulées en table 1.16. De plus, en considérant un cas expérimental où l'une

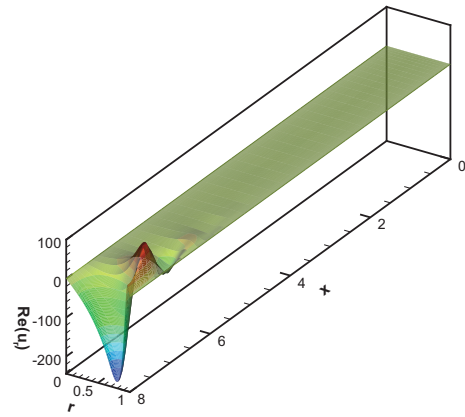




(a) Spectre. Les modes propres sont tous temporellement stables. Les cibles utilisées sont  $\omega_{0,r} \in \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ ,  $\omega_{0,i} = 1$ . Chaque couleur correspond à une cible différente.



(b) Fluctuation de vitesse longitudinale pour le mode  $\omega = 62.91 - 7.571i$ .



(c) Fluctuation de vitesse radiale pour le mode  $\omega = 62.91 - 7.571i$ .

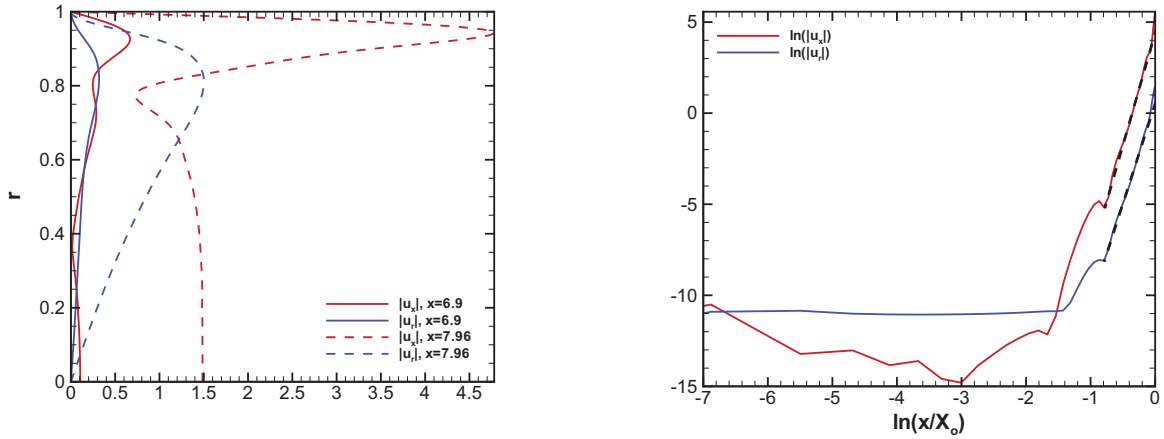
FIGURE 1.25 – Spectre et exemple de fonction propre obtenus par analyse de stabilité BiGlobale pour le cas de calcul  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $Re = 2100$ . Maillage  $N \times M = 50 \times 150$  points.

des raies est prédominante, il est pertinent de comparer les vitesses RMS mesurées aux profils de vitesse longitudinaux et radiaux du mode de stabilité correspondant. Comme dans le cas du montage VECLA, l'amplitude de la vitesse prédite par la stabilité globale, maximale en proche paroi et croissante exponentiellement le long de la veine pour  $x/R < 12$ , est en bon accord avec les relevés expérimentaux (figure 1.28).

La théorie de la stabilité globale appliquée à l'écoulement de Taylor-Culick permet donc de rendre compte non seulement de la présence du VSP dans les moteurs à propulsion solide, mais elle propose également une modélisation pertinente de la distribution fréquentielle des bouffées qui apparaissent au croisement d'un mode acoustique et d'un mode hydrodynamique global. En revanche, en tant que théorie linéaire, elle ne donne aucune information sur l'interaction entre les deux phénomènes ni sur l'amplitude de ces instabilités : elle indique seulement le développement potentiel d'une instabilité au sein de l'écoulement dans la mesure où celle-ci est excitée par une source d'énergie.

### 1.5.3 Amplitude comparées du VSP et de l'acoustique

Tentons maintenant de comparer l'amplitude du VSP et de l'acoustique dans un MPS, simplifié ou non. Physiquement, deux cas sont à considérer. En l'absence de tuyère, nous avons supposé que l'acoustique était physiquement très peu présente. Les modes hydrodynamiques sont alors sans doute



(a) Profils de fluctuations de vitesse longitudinale et radiale à différentes abscisses.

(b) Tracé de  $\ln(|\hat{u}_x|)$  et  $\ln(|\hat{u}_r|)$  en fonction de  $\log(x/X_{out})$ , pour  $r = 0.99$ . Les lignes noires représentent des segments de pente  $\lambda = 28$ .

FIGURE 1.26 – Profils radiaux et évolution longitudinale de la fonction propre associée au mode  $\omega = 62.91 - 7.57i$ .

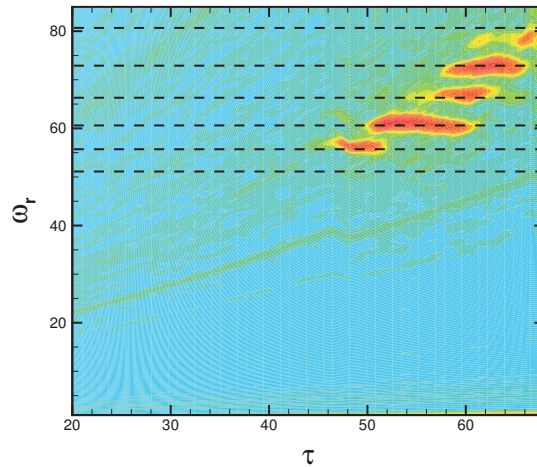


FIGURE 1.27 – Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de pression instationnaire au fond avant. La pulsation réduite est ramenée au rayon moyen et à la vitesse d'injection moyenne calculés par le code PERSE à chaque instant :  $\omega = 2\pi fR/V_{inj}$ . (- -) : pulsations réduites des modes de stabilité corrigés d'un facteur  $C_E = 0.965$ .

reliés à une source d'excitation dont l'intensité est difficilement mesurable (bruit d'injection, ruptures de débit...), de sorte que nous n'avons *a priori* aucune information sur leur amplitude. En revanche, dans le cas d'une configuration avec tuyère, les niveaux acoustiques sont naturellement élevés. En effet, la présence d'un col en sortie implique que les fluctuations de vitesse longitudinales y sont nulles, et le passage de fluctuations de vitesse au col induit des ondes de pression réfléchies qui tendent à entretenir de fortes amplitudes acoustiques. Enfin, dans le cas d'une simulation numérique directe en sortie libre, l'imposition d'une condition de sortie classique à une pression donnée peut aussi induire une forte acoustique, qui à défaut d'être physique, doit être prise en compte.

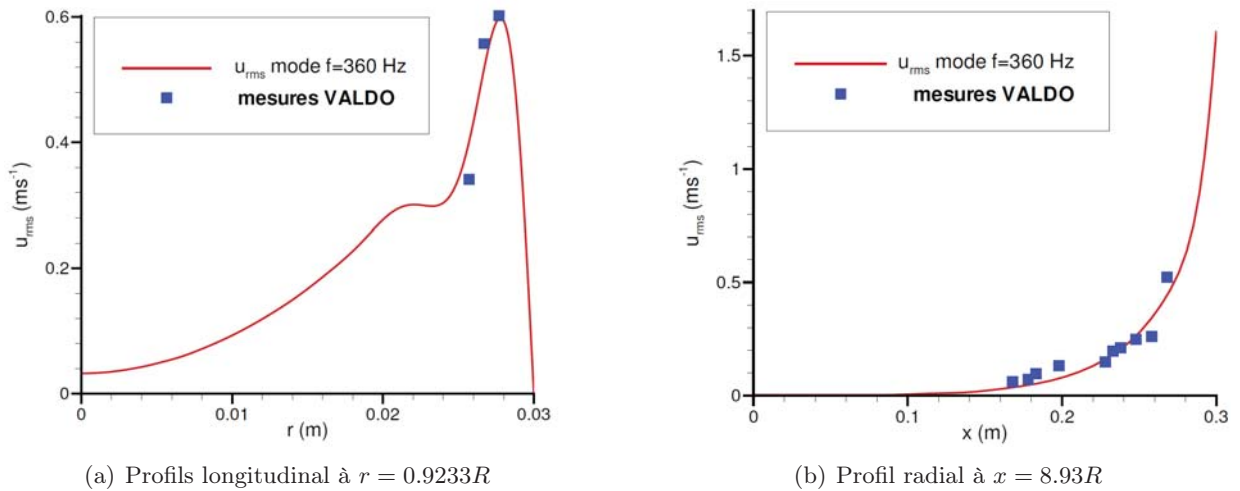


FIGURE 1.28 – Profils de vitesse  $\sqrt{\Re(\hat{u}_x)^2 + \Re(\hat{u}_r)^2}$  calculés pour le mode  $\hat{\omega}_r = 64.405$  pour une vitesse d'injection bruitée,  $\text{Re} = 2000$  et  $X_{\text{out}} = 10$ , comparés aux mesures VALDO en configuration à trois éléments sans tuyère et vitesse d'injection  $V_{\text{inj}} = 1.05$  m/s. D'après Chedevergne [25].

Cependant, il est possible de distinguer les fluctuations hydrodynamiques des fluctuations acoustiques. D'une part, la vitesse radiale associée à la couche limite acoustique est en  $\mathcal{O}(M_{\text{inj}})$  par rapport à la composante axiale. On peut donc raisonnablement penser que les fluctuations de vitesse radiale traduisent principalement la présence de VSP. D'autre part, compte tenu des grandeurs de référence utilisées en stabilité, les fluctuations de pression hydrodynamiques correspondant à une amplitude de VSP linéaire, telle que  $A_{\text{VSP}}^{u_x} / \|\mathbf{U}\|_{\infty} = 0.1$  dans la zone laminaire, sont de l'ordre de la dizaine de Pascals tout au plus. Cela conduit à l'hypothèse, à vérifier *a posteriori*, que la pression hydrodynamique est négligeable devant la pression acoustique. Enfin, si ces hypothèses sont vérifiées, la vitesse axiale est alors composite. En résumé, on s'attend à ce que la fluctuation de vitesse radiale permette de mesurer le VSP, que celle de pression mesure l'acoustique, et que celle de vitesse axiale soit contenue la somme des deux phénomènes.

#### 1.5.4 Pertinence théorique des modes de stabilité de référence

Les modes propres de référence présentés plus haut sont très paradoxaux : ils sont cohérents avec la physique des MPS, mais leur existence théorique en tant que modes de stabilité discrets des équations de Navier-Stokes linéarisées n'est pas assurée. En effet, si le nombre de points utilisés pour la discrétisation longitudinale augmente, le nombre de valeurs propres sur un intervalle de fréquence donné augmente également (figures 1.29(b) et 1.29(c)), jusqu'à ce que les calculs effectués avec des cibles différentes ne coïncident plus (figure 1.29(d)). Un autre problème à soulever concerne la croissance exponentielle des fonctions propres : celle-ci n'a lieu qu'à partir d'une certaine abscisse (de l'ordre de  $x = 2$  pour la vitesse radiale si l'on considère une croissance exponentielle par morceaux, et  $x = 5.6$  pour le tronçon d'exposant  $\lambda = 28$ ). Plus vers l'amont, l'amplitude des fonctions propres cesse de décroître. Or, si la croissance exponentielle des fonctions propres était vérifiée sur tout le domaine avec  $\lambda = 28$ , le rapport entre les fluctuations au voisinage de  $x = 0$  et celles calculées en sortie serait de l'ordre de  $10^{10}$ , soit une valeur assez proche de l'inverse de la précision machine ( $10^{-13}$ ). En pratique, pour des raisons sans doute d'erreurs numériques, le rapport  $\varepsilon$  entre les amplitudes les plus faibles et les plus élevées n'est pas égal à la précision machine mais est supérieur, et il dépend sans doute de la discrétisation utilisée. D'où l'existence de cette zone tampon au voisinage du fond avant où les fonctions propres valent indistinctement  $\varepsilon$ . De fait, la condition aux limites imposée en  $x = 0$  n'est pas rigoureusement

vérifiée.

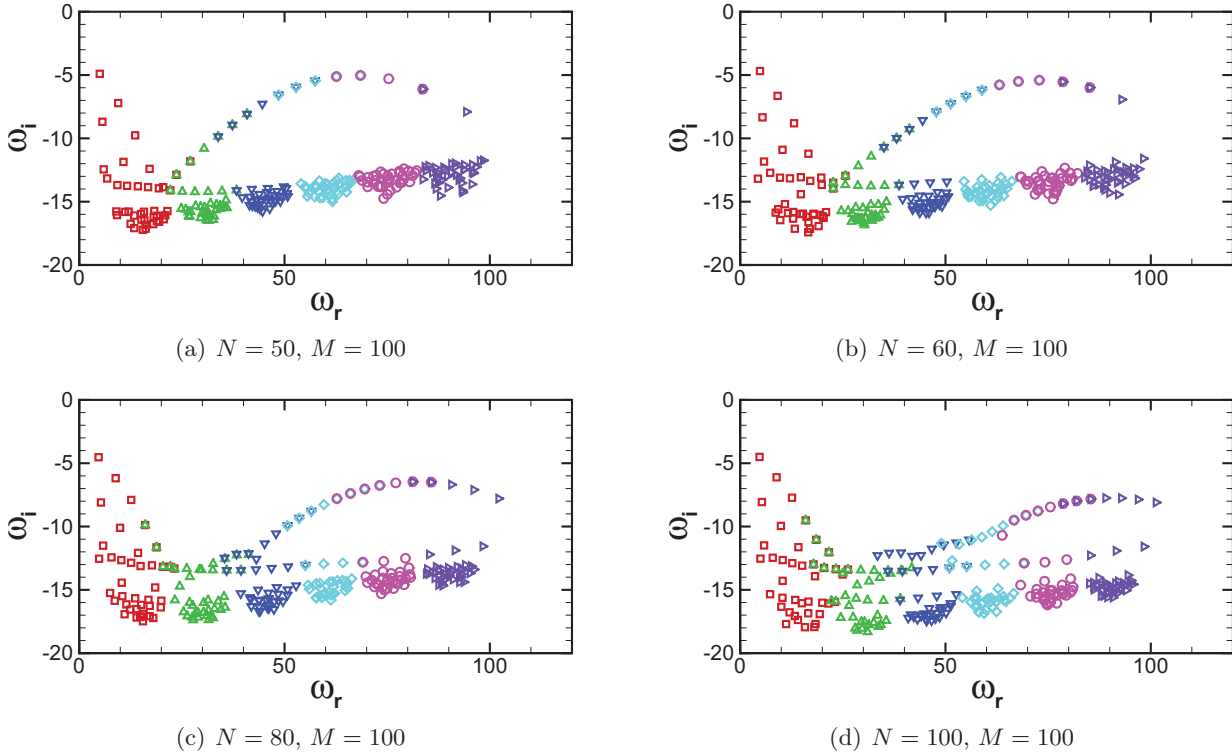


FIGURE 1.29 – Spectres du cas de calcul  $X_{\text{out}} = 10$ ,  $\text{Re} = 3000$  calculés pour différentes discrétisations longitudinales.

Ce problème est à mettre en relation avec celui, très classique, de la non-normalité de l'opérateur des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées, largement évoquée dans l'article fondateur de Trefethen [86]. Lorsqu'un opérateur est normal (analogue d'une matrice symétrique en théorie des opérateurs), ses valeurs propres ont la propriété d'être robustes aux perturbations : si on lui applique une perturbation d'ordre  $\varepsilon$ , ses valeurs propres bougent d'au plus  $\varepsilon$ . Au contraire, les valeurs propres d'un opérateur non-normal peuvent être très sensibles aux perturbations appliquées à celui-ci. L'illustration la plus simple de la non-normalité, évoquée dans [85], est donnée par la résolution du problème aux valeurs propres  $-\text{Re}^{-1}\hat{u}'' + \hat{u}' - i\hat{\omega}\hat{u} = 0$  pris comme modèle simplifié des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées. Lorsqu'une seule condition aux limites homogène est appliquée en  $x = 0$ , ce problème a une infinité continue de valeurs propres dans le plan complexe. Lorsqu'on ajoute une condition en un point  $x = a$  par exemple, l'opérateur n'admet qu'une série de valeurs propres discrètes correspondant à des modes atténués temporellement, mais qui se rapprochent les uns des autres quand le nombre de Reynolds  $\text{Re}$  devient très grand ou quand l'on augmente la valeur de la borne  $a$ . De plus, il existe une parabole délimitant une zone du plan complexe au sein de laquelle toute valeur est valeur propre approchée du problème à une précision donnée, par exemple une précision machine. Moralité : on suppose généralement que dans le cas des opérateurs non-normaux, les modes propres discrets temporellement stables n'ont pas de signification propre, ou sont carrément des pseudo-modes propres. C'est pourquoi l'approche *optimale*, largement utilisée dans l'équipe de D. Sipp (voir par exemple [79]), est parfois préférée dans ce genre de problèmes. Un des enjeux majeurs de cette thèse est donc de montrer que l'approche modale, bien que mal adaptée au calcul des modes propres de l'écoulement de Taylor-Culick, peut tout de même permettre de modéliser les instabilités hydrodynamiques conduisant à l'apparition d'Oscillations De Pression sous forme de bouffées de fréquences discrètes.

### 1.5.5 Utilisation des équations de stabilité adjointes

À supposer qu'il existe un ensemble de modes propres qui soient valides à la fois du point de vue théorique et physique, l'utilisation des outils de stabilité linéaire peut être étendue par la prise en compte de l'opérateur adjoint. D'une manière générale, considérons un problème aux valeurs propres généralisé de la forme  $\mathcal{A}(\hat{u}) - i\hat{\omega}\mathcal{B}(\hat{u}) = 0$ , où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ces opérateurs admettent des opérateurs adjoints  $\mathcal{A}^\dagger$  et  $\mathcal{B}^\dagger$  définis par une relation du type

$$\forall \hat{u}, \tilde{u}, \quad \langle \tilde{u}, \mathcal{A}(\hat{u}) \rangle = \langle \mathcal{A}^\dagger(\tilde{u}), \hat{u} \rangle \quad (1.45)$$

On appelle  $\tilde{u}$  la variable adjointe et le problème de stabilité  $\mathcal{A}^\dagger(\tilde{u}) - i\tilde{\omega}\mathcal{B}^\dagger(\tilde{u}) = 0$  le problème de stabilité adjoint. Les modes propres direct et adjoint ont alors des valeurs propres identiques ( $\tilde{\omega} = \hat{\omega}$ ), mais leurs fonctions propres n'ont aucune raison de coïncider (sauf si l'opérateur est *auto-adjoint*). Cependant, l'utilisation des fonctions propres adjointes ouvre la base à plusieurs applications introduites par Hill [50] pour l'étude des couches limites en stabilité locale. Toutes partent de la possibilité de former à partir des fonctions propres directes et adjointes une base biorthogonale : on montre qu'un ensemble  $(\hat{\omega}_n, \hat{u}_n, \tilde{u}_n)$  de modes propres a la propriété suivante :

$$\langle \tilde{u}_n, \hat{u}_m \rangle = \delta_{nm} \quad (1.46)$$

où  $\delta$  désigne le tenseur de Dirac. Une première application de cette propriété, mise au crédit de Tumin [87], est appelée *décomposition multimodale*. Considérons maintenant un écoulement présentant une partie instationnaire  $q'$  supposée associée aux modes propres directs  $\hat{u}_n$ . Tumin montre alors que l'on accède à la part d'amplitude de  $q'$  associée à chaque mode  $\hat{u}_n$  par une relation de la forme<sup>15</sup>

$$q' = \sum_n \langle q', \tilde{u}_n \rangle \hat{u}_n \quad (1.47)$$

Une deuxième application vise à calculer la réponse de l'écoulement à un forçage optimal. Elle a été introduite par Hill [50] dans le cas de la couche limite et reprise plus généralement dans les travaux d'Airiau [1] et de Bottaro [2] dans une optique de contrôle optimal. Supposons donc l'existence d'un forçage harmonique volumique dans l'écoulement d'amplitude  $q$  et de pulsation  $\omega$ . Il s'agit désormais de résoudre le problème non-homogène  $\mathcal{A}(u') - i\omega\mathcal{B}(u') = q$  dont la solution  $u'$  suit la pulsation du forçage harmonique. En recherchant l'amplitude sous la forme d'une décomposition de modes  $\hat{u} = \sum_n \hat{u}_n$ , l'utilisation de la base biorthogonale (1.48) permet d'écrire

$$u' = \sum_n \frac{\langle q, \tilde{u}_n \rangle \hat{u}_n}{i(\omega - \hat{\omega}_n)} \quad (1.48)$$

En soi, ce résultat est déjà très important pour l'étude de l'interaction entre acoustique et modes hydrodynamiques. En effet, à supposer que le forçage soit représenté par l'acoustique, l'écoulement des MPS «produit» du VSP : 1°) si la pulsation  $\omega$  du forçage est proche de celle des modes hydrodynamiques ; 2°) si les modes propres adjoints sont en quelque sorte colinéaires avec le forçage acoustique. Enfin, une dernière application des équations adjointes consiste à calculer la sensibilité des valeurs propres aux perturbations. On peut citer un exemple dû à Bottaro [17] dont le but est de calculer la perturbation sur l'écoulement de base qui maximise le déplacement du mode de Tollmien-Schlichting. Du point de vue théorique, cette méthode permet de localiser les termes des opérateurs de stabilité les plus sensibles à une perturbation numérique. Sur le plan physique, on pourra notamment déterminer les zones où une perturbation sur l'écoulement de base déstabilise le plus les modes propres de l'écoulement. En résumé, ces trois méthodes donnent accès aux amplitudes des modes propres et à la quantification des transferts d'énergie entre l'acoustique ou les perturbations de l'écoulement vers le VSP.

15. On peut rapprocher l'utilisation des bases biorthogonales à celle des coordonnées covariantes et contravariantes utilisées pour des problèmes de dimension finie en mécanique des milieux continus.

## 1.6 Conclusion : ce qu'on sait sur le mécanisme d'apparition des ODP

Dans tout ce chapitre, nous avons présenté l'état de l'art sur la modélisation séparée des différents phénomènes qui interviennent dans les moteurs à propulsion solide : état moyen stationnaire dont la solution de Taylor-Culick est une bonne approximation, modes acoustiques spécifiques à cet écoulement, et instabilités hydrodynamiques globales identifiées au Vortex Shedding Pariétal là où l'hypothèse de linéarité est valide. Cependant, la théorie de la couche limite acoustique comme celle de la stabilité BiGlobale de l'écoulement de Taylor-Culick ne font que donner les fréquences et les formes spatiales des phénomènes qu'elles modélisent. Elles permettent au mieux —et c'est déjà beaucoup!— de prédire l'apparition possible d'ODP lorsque ces fréquences se croisent, prévision d'ailleurs cohérente avec l'ensemble des données expérimentales.

Cependant, *quid* des mécanismes d'interaction entre acoustique et hydrodynamique? La génération des ODP est interprétée de la manière suivante en une boucle à quatre étapes schématisées en figure 1.30. (1) Excitées par une source d'énergie *a priori* quelconque (acoustique, bruit de combustion?), des instabilités hydrodynamiques pariétales se développent le long du moteur à des fréquences  $f_{VSP}$  bien caractérisées qui peuvent éventuellement être prédites par une analyse de stabilité linéaire globale de l'écoulement. (2) À partir d'une certaine amplitude, les fluctuations ainsi engendrées sortent du domaine linéaire et saturent. On observe alors les structures tourbillonnaires caractéristiques du VSP. (3a). Le rapport d'aspect du domaine fluide étant très long (comme c'est le cas au début du tir), l'écoulement du MPS devient turbulent et ces structures sont dissipées; ou bien (3b) les structures tourbillonnaires, bien que partiellement turbulentes, atteignent le col de la tuyère toujours avec une fréquence bien cohérente et génèrent une onde de pression réfléchie. (4) Cette onde de pression excite l'acoustique longitudinale du moteur dans la mesure où sa fréquence est proche de celle d'un mode acoustique. Puis on revient au mécanisme initial.

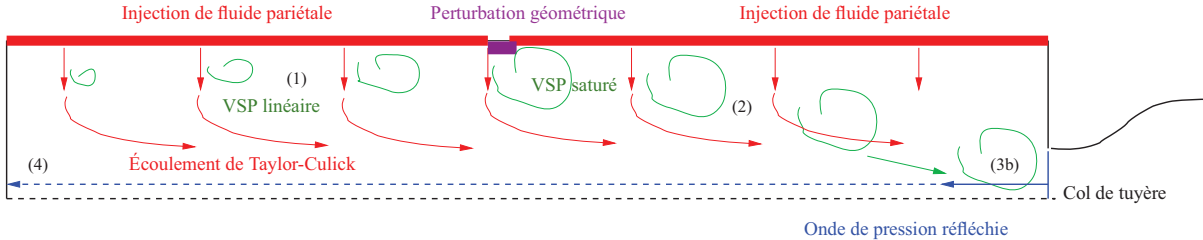


FIGURE 1.30 – Schéma du scénario d'apparition des ODP dues aux détachements tourbillonnaires pariétaux.

Partant de ce scénario, l'objectif de cette thèse est de mieux comprendre un certain nombre de ces étapes. D'abord, il conviendra de nous assurer de la pertinence de l'analyse de stabilité globale pour la modélisation du VSP dans la partie linéaire en tentant notamment de calculer des modes de stabilité indépendants du maillage utilisé. Cela passera d'abord par une analyse plus poussée de l'opérateur des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées, notamment de sa sensibilité à des perturbations et du rôle de l'accroissement linéaire de la vitesse de l'écoulement de base. Ensuite, les résultats expérimentaux suggèrent que l'accrochage entre le VSP et l'acoustique n'intervient que lorsque l'écoulement est légèrement perturbé par la présence, par exemple, d'une rupture de débit (voir le cas du LP9t11). Il faudra donc confirmer cette hypothèse, notamment à l'aide de la simulation numérique directe, puis quantifier l'influence d'une telle perturbation *via* des études de sensibilité basées sur l'utilisation des équations de stabilité adjointes. Enfin, le transfert entre l'acoustique et le VSP pourra être mis en évidence par des études de réceptivité à la fois par l'utilisation des équations adjointes et de la simulation numérique directe.

Notons que nous ne traiterons bien évidemment pas de cas géométriquement complexes, mais plutôt



des cas d'école supposés isoler un certain nombre de phénomènes. Nous ne visons pas à obtenir des comparaisons quantitatives entre les instabilités mesurées expérimentalement et nos résultats théoriques, mais plutôt de pousser plus loin la compréhension des phénomènes évoqués plus haut.

*Ce tour d'horizon sur l'ensemble des données expérimentales, théoriques et numériques a permis de situer notre étude dans le contexte général des Oscillations De Pression. D'abord, le Vortex Shedding Pariétal joue un rôle fondamental dans le déclenchement des ODP. Son apparition est liée à la présence d'instabilités intrinsèques de l'écoulement moyen des moteurs à propergol solide qui se développent le long des blocs de propergol en combustion. Comme le montrent les essais en gaz froid, ces instabilités sont purement hydrodynamiques, ce qui justifie un étude théorique portant sur des conduits cylindriques à parois débitantes. Modélisées par analyse de stabilité linéaire globale de l'écoulement de Taylor-Culick, ces instabilités sont atténuées en temps, ce qui indique la nécessité d'une source d'excitation. Ces travaux poursuivent donc deux buts : d'une part, montrer par l'analyse de stabilité linéaire globale et la simulation numérique dans quelles conditions des instabilités hydrodynamiques peuvent apparaître avec des fréquences discrètes ; d'autre part, modéliser l'interaction entre ces instabilités et les sources d'excitation présentes dans les moteurs, notamment les ondes de pression.*





Deuxième partie

Étude de stabilité globale des Moteurs à  
Propergol Solide



## Chapitre 2

# Introduction à la stabilité globale des MPS simplifiés

### 2.1 Écriture du problème de stabilité

Nous présentons ici le cadre théorique du calcul des modes de stabilité de l'écoulement interne d'un MPS simplifié. Comme expliqué en section 1.3.1.2, celui-ci est modélisé par un cylindre à paroi débitante fermé au fond avant de rayon  $R$ , de longueur  $L$ , l'injection de fluide pariétale étant caractérisée par la vitesse d'injection  $V_{\text{inj}}$ . La sortie du conduit est supposée libre, c'est-à-dire dépourvue de tuyère au col de laquelle on imposerait une vitesse sonique. Le problème est exprimé en coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$ . Reprenant les travaux présentés en section 1.5, nous cherchons à calculer les instabilités *incompressibles* et *visqueuses* de l'écoulement de Taylor-Culick supposé représentatif de l'écoulement interne des MPS. En pratique, il s'agit de calculer l'évolution de petites perturbations ajoutées à l'écoulement de base en tant que solution des équations de Navier-Stokes linéarisées écrites pour un écoulement incompressible. Dans le cadre de la théorie linéaire *globale*, aucune hypothèse n'est faite sur la dépendance spatiale de ces perturbations (si ce n'est, dans notre cas, leur indépendance vis-à-vis de la coordonnée azimutale); seule leur dépendance temporelle est imposée sous forme de mode normal.

L'une des contraintes que nous ajoutons par rapport aux travaux précédents consiste à ne plus considérer que le domaine d'intégration, noté  $\Omega$ , part nécessairement du fond avant et se termine à une abscisse arbitrairement grande.<sup>1</sup> En effet, nous avons remarqué le rôle des perturbations spatiales, en l'occurrence de petits intersegments ou ruptures de débit (section 1.2.1.2), dans le mécanisme de création d'instabilités. Nous faisons donc l'hypothèse que les instabilités calculées par la théorie de la stabilité linéaire sont générées au voisinage d'une telle perturbation. En amont de celle-ci, nous supposons qu'aucune instabilité n'émerge, ce qui revient à supposer leur amplitude nulle. C'est pourquoi nous nous permettons désormais de calculer les modes de stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick sur un domaine restreint  $\Omega$  compris entre l'endroit où est imposée une petite perturbation géométrique et la sortie du conduit.

À ce titre, nous introduisons en figure 2.1 les notations relatives aux limites de ce domaine *utilisé pour le calcul de stabilité*, à savoir  $\Gamma_{\text{in}}$  pour l'entrée (ou «in» pour «inflow»),  $\Gamma_{\text{out}}$  pour la sortie (ou «out» pour «outflow»),  $\Gamma_{\text{wall}}$  pour la paroi débitante et enfin  $\Gamma_{\text{a}}$  pour l'axe.<sup>2</sup> En particulier, la limite  $\Gamma_{\text{in}}$  pourra éventuellement coïncider avec le fond avant pour une comparaison rapide de nos résultats avec ceux acquis en variables primitives (section 1.5); mais cette possibilité sera très vite abandonnée pour un cas de calcul portant sur un demi-domaine, correspondant à des instabilités pariétales générées

1. En fait limitée par la représentativité de la solution de Taylor-Culick du point de vue de la laminarité de l'écoulement moyen

2. Ces indices quelque peu anglo-saxons sont utilisés pour garder une cohérence vis-à-vis de l'article écrit en anglais introduit dans ce manuscrit.

par une perturbation spatiale placée au milieu du conduit.

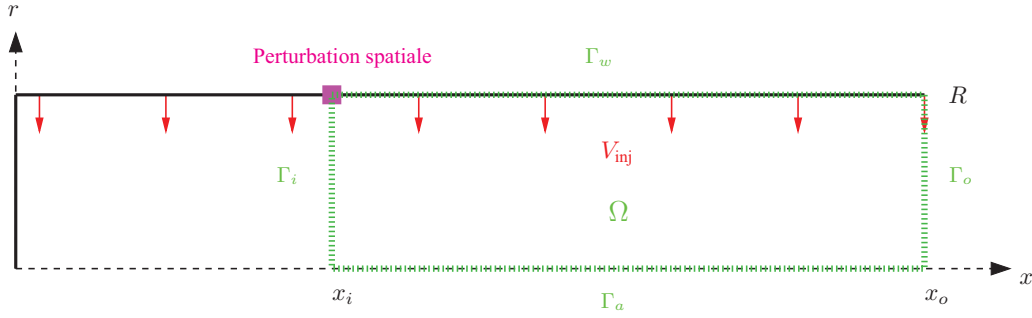


FIGURE 2.1 – Domaine de calcul  $\Omega$  pour la stabilité linéaire (en vert) et notations relatives aux limites physiques.

### 2.1.1 Équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible

Nous exprimons les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible portant sur les variables de pression  $p$  et de vitesse  $\mathbf{u} = (u_x, u_r, u_\theta)$ . Nous recherchons les solutions correspondant à un écoulement de révolution, ce qui conduit à négliger la dépendance vis-à-vis de la coordonnée azimutale  $\theta$  et la troisième composante de vitesse  $u_\theta$ . Comme en section 1.3 où nous avons introduit le calcul de l'écoulement de Taylor-Culick, nous utilisons comme longueur et vitesse de référence le rayon  $R$  du moteur et la vitesse d'injection pariétale  $V_{\text{inj}}$ . Les grandeurs thermodynamiques de référence (masse volumique  $\rho_0$ , pression  $p_0$ , température  $T_0$ , viscosité cinétique  $\mu_0$ ) sont prises au fond avant. Dans ces conditions, les variables du problème sont remplacées par leur forme adimensionnée de la manière suivante :

$$(x, r) \leftarrow (x/R, r/R); (u_x, u_r) \leftarrow (u_x/V_{\text{inj}}, u_r/V_{\text{inj}}); p \leftarrow p/\rho_0 V_{\text{inj}}^2 \quad (2.1)$$

Les abscisses adimensionnées des frontières  $\Gamma_{\text{in}}$  et  $\Gamma_{\text{out}}$  du domaine  $\Omega = [X_{\text{in}}, X_{\text{out}}] \times [0, 1]$  sont notées  $X_{\text{in}} = x_i/R$  et  $X_{\text{out}} = x_o/R$ . Les équations de Navier-Stokes incompressibles s'écrivent alors

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.2b)$$

où l'on a introduit le nombre de Reynolds  $\text{Re} = \rho_0 V_{\text{inj}} R / \mu_0$  basé sur le rayon du MPS, la vitesse d'injection pariétale, la masse volumique et la viscosité cinétique de référence. Nous rappelons (voir table 1.18) que pour une vitesse d'injection de l'ordre de 1 m/s, un rayon de 0.03 m (configuration VALDO) et les valeurs classiques de la viscosité en gaz froid, le nombre de Reynolds est de l'ordre de  $10^3$ . Dans le cas des moteurs réels (à échelle réduite ou à échelle 1), le nombre de Reynolds est de l'ordre de  $10^4$ .

Passons maintenant aux conditions aux limites. Les conditions sur l'axe doivent permettre à la pression et à la vitesse d'être continues et bornées quand  $r$  tend vers 0, ce qui se traduit en toute généralité par [52]

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.3)$$

Compte tenu de la symétrie de révolution de l'écoulement, ces conditions induisent

$$\partial_r p(x, 0) = \partial_r u_x(x, 0) = 0, \quad u_r(x, 0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \quad (2.4)$$

Les autres conditions aux limites doivent être compatibles avec les équations écrites sur le domaine. Une manière d'imposer cette compatibilité est de rechercher les conditions qui conduisent à l'écriture

d'une *forme faible* correcte du problème (2.2). Pironneau [68] indique en particulier deux conditions que l'on peut qualifier d'«entrante» et de «sortante», la première consistant à imposer une valeur de vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ , la seconde à annuler la contrainte normale à la limite considérée, à savoir

$$-\frac{1}{\text{Re}}(\nabla \mathbf{u} + \alpha_{\text{out}} \nabla \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} + (p - p_{\text{lim}}) \mathbf{n} = 0 \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante au domaine et  $p_{\text{lim}}$  la valeur de la pression imposée en sortie;  $\alpha_{\text{out}}$  est un nombre réel qui peut valoir 0 ou 1 selon que l'écriture choisie prend en compte ou pas la propriété  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Il est alors naturel d'imposer une condition entrante à la paroi ( $\mathbf{u} = -V_{\text{inj}} \mathbf{e}_r$ ) et en entrée du domaine, en particulier  $\mathbf{u} = 0$  si cette entrée coïncide avec le fond avant. En sortie, la condition de traction nulle (2.5) permet notamment fixer la valeur de la pression qui n'intervient que sous forme de gradient dans les équations écrites pour le domaine.

Remarquons que la solution de Taylor-Culick est bien une solution stationnaire approchée des équations de Navier-Stokes incompressibles avec ces conditions aux limites, dans la mesure où le nombre de Reynolds est supposé infini, la condition au fond avant est remplacée par une condition de glissement  $u_x = 0$ , et la condition de sortie est vérifiée en moyenne pour fixer la valeur de la pression. Nous avons remarqué que cette approximation était en fait très proche d'une solution calculée par DNS (section 1.3.3), notamment en-dehors du voisinage du fond avant où nous allons effectuer notre analyse de stabilité. Nous noterons  $(P, \mathbf{U})$  les champs de pression et de vitesse de la solution de Taylor-Culick.

### 2.1.2 Équations pour le problème direct

L'analyse de stabilité globale du MPS simplifié consiste à chercher l'évolution des petites perturbations  $(p', \mathbf{u}')$  ajoutées à cet état de base stationnaire  $(P, \mathbf{U})$ . La solution des équations de Navier-Stokes incompressibles est alors écrite sous la forme

$$(p, \mathbf{u})(x, r, t) = (P, \mathbf{U}) + (\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})(x, r) e^{-i\hat{\omega}t} \quad (2.6)$$

où  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) \ll (P, \mathbf{U})$  sont les amplitudes spatiales des perturbations  $(p', \mathbf{u}')$  qui prennent une forme de mode normal temporel.  $\hat{\omega}$  est un nombre complexe : sa partie réelle  $\hat{\omega}_r$  donne la pulsation du mode, et sa partie imaginaire  $\hat{\omega}_i$  son amplification temporelle ; ainsi, un mode est temporellement stable lorsque  $\hat{\omega}_i$  est négatif. L'expression (2.6) est alors réinjectée dans les équations (2.2) qui sont linéarisées autour de l'état de base. On peut écrire formellement le résultat sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé

$$\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = i\hat{\omega} \mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) \quad (2.7)$$

où l'on a introduit les opérateurs

$$\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \left( \begin{array}{c} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \\ \mathcal{M}(\hat{\mathbf{u}}) + \nabla \hat{p} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \hat{\mathbf{u}} \end{array} \right) \quad (2.8)$$

avec

$$\mathcal{M}(\hat{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (2.9)$$

Les conditions aux limites de ce problème sont inspirées de celles évoquées plus haut et doivent nécessairement être homogènes. On choisit donc, pour les conditions écrites en entrée du domaine et à la paroi, d'imposer des fluctuations de vitesse nulles ( $\hat{\mathbf{u}} = 0$ ). Sur l'axe, les conditions de symétrie (2.4) sont appliquées aux fluctuations de pression et de vitesse. Quant à la sortie, nous imposons une condition de traction nulle généralisée. En résumé, nous posons

$$\hat{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{wall}} \cup \Gamma_{\text{in}} \quad (2.10)$$

$$\partial_r \hat{p} = \partial_r \hat{u}_x = \hat{u}_r = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{a}} \quad (2.11)$$

$$-\frac{1}{\text{Re}}(\nabla \hat{\mathbf{u}} + \alpha_{\text{out}} \nabla \hat{\mathbf{u}}^T) \cdot \mathbf{n} + \beta_{\text{out}}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{u}} + \hat{p} \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{out}} \quad (2.12)$$

où  $\alpha_{\text{out}}$  est un réel qui vaut 0 ou 1, et  $\beta_{\text{out}}$  est compris entre 0 et 1/2.<sup>3</sup>

Ces conditions sont compatibles avec les équations de Navier-Stokes incompressibles de deux manières. D'une part, nous montrons en annexe A.1 que celles-ci conduisent à une forme faible du problème (2.6) *bien posée* dans le sens où il n'existe, pour une fonction  $f$  et un complexe  $\omega_0$  donnés, qu'une seule solution au problème  $\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) - i\omega_0\mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = f$ . D'autre part, ces conditions permettent de définir un *problème adjoint* au problème (2.6) dit *problème direct*. Notons que les conditions de fluctuations de vitesse nulles à la paroi et en entrée sont relativement naturelles et se comprennent aisément du point de vue de la physique du problème. En revanche, on n'impose cette condition de sortie que pour des raisons mathématiques (problème bien posé et définition de l'adjoint). Physiquement, pour des écoulements à grand nombre de Reynolds, il est plus naturel d'imposer seulement une valeur pour la pression qui est définie à une constante près, soit  $\hat{p} = 0$ .<sup>4</sup> Cela revient en fait à négliger les termes visqueux dans la condition de traction nulle avec  $\alpha_{\text{out}} = \beta_{\text{out}} = 0$ , et plus particulièrement la condition de cisaillement de vitesse radiale  $\partial_x \tilde{u}_r = 0$  qui n'est plus prise en compte.

### 2.1.3 Problème adjoint

Nous introduisons ici le jeu d'équations adjointes aux équations de stabilité écrites sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé (2.7) avec les conditions aux limites (2.10)-(2.12). Pour cela, définissons d'abord le produit scalaire usuel  $\langle ; \rangle$  sur l'espace  $L^2(\Omega)$  des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  :

$$\forall \hat{q}, \tilde{q} \in L^2(\Omega), \quad \langle \tilde{q}; \hat{q} \rangle = \int_{\Omega} \tilde{q}^* \hat{q} \, d\Omega = \int_{X_{\text{in}}}^{X_{\text{out}}} \int_0^1 \tilde{q}^*(x, r) \hat{q}(x, r) \, dx \, r \, dr \quad (2.13)$$

où l'exposant  $*$  désigne la fonction complexe conjuguée. Par extension, nous posons, pour deux jeux de fluctuations de pression et de vitesse  $(\hat{p}, \hat{u}_x, \hat{u}_r)$  et  $(\tilde{p}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_r)$ , supposées de carré intégrable,

$$\langle \tilde{p}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_r; \hat{p}, \hat{u}_x, \hat{u}_r \rangle = \langle \tilde{p}, \hat{p} \rangle + \langle \tilde{u}_x, \hat{u}_x \rangle + \langle \tilde{u}_r, \hat{u}_r \rangle \quad (2.14)$$

Une autre notation intéressante est celle de l'intégrale d'une fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  sur une frontière :

$$[\mathbf{f}]_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (2.15)$$

Dans ces conditions, l'opérateur adjoint  $\mathcal{L}^{\dagger}$  d'un opérateur direct  $\mathcal{L}$  est défini par la relation

$$\forall \hat{q}, \tilde{q} \in L^2(\Omega), \quad \langle \tilde{q}; \mathcal{L}(\hat{q}) \rangle = \langle \mathcal{L}^{\dagger}(\tilde{q}); \hat{q} \rangle \quad (2.16)$$

Dans notre cas, l'obtention du problème adjoint consiste à multiplier scalairement les *fluctuations adjointes*  $(\tilde{p}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_r)$  et l'image des fluctuations directes  $(\hat{p}, \hat{u}_x, \hat{u}_r)$  par l'opérateur  $\mathcal{A} - i\hat{\omega}\mathcal{B}$  (équation (2.7)). Deux intégrations par parties successives conduisent à l'*identité de Lagrange* suivante :

$$\langle \tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}; (\mathcal{A} - i\hat{\omega}\mathcal{B})(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle - \langle (\mathcal{A}^{\dagger} - i\tilde{\omega}\mathcal{B}^{\dagger})(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}); \hat{p}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = i(\tilde{\omega}^* - \hat{\omega})\langle \tilde{\mathbf{u}}^H \cdot \hat{\mathbf{u}} \rangle + [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\sigma}^{\dagger H}(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}]_{\Gamma} \quad (2.17)$$

où l'exposant  $H$  désigne le vecteur trans-conjugué,  $\hat{\omega}$  est la valeur propre directe associée aux fonctions propres directes,  $\tilde{\omega}$  un nombre complexe pour l'instant quelconque et les opérateurs adjoints  $\mathcal{A}^{\dagger}$  et  $\mathcal{B}^{\dagger}$  sont définis par

$$\mathcal{A}^{\dagger}(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = \left( \begin{array}{c} -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{U}^T \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \tilde{p} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}^{\dagger}(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{array} \right) \quad (2.18)$$

3. Les deux possibilités proposés pour  $\alpha_{\text{out}}$  dérivent en fait de l'incompressibilité des perturbations de vitesse, ce qui permet de négliger le tenseur gradient transposé dans la définition du tenseur des contraintes. Pour  $\beta_{\text{out}}$ , les calculs présentés en appendice A.1 montrent qu'il est possible d'imputer le terme convectif proportionnel à  $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$  au problème direct au problème adjoint.

4. C'est d'ailleurs ce qui est fait en pratique dans CEDRE, voir chapitre 5.



On note enfin  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^\dagger$  les tenseurs des contraintes associés aux opérateurs direct et adjoint :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) &= -\frac{1}{\text{Re}} (\nabla \hat{\mathbf{u}} + \alpha_{\text{out}} \nabla \hat{\mathbf{u}}^T) + \beta_{\text{out}} \hat{\mathbf{u}} \mathbf{U}^T + \hat{p} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\sigma}^\dagger(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \alpha_{\text{out}} \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T) + (1 - \beta_{\text{out}}) \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{U}^T + \tilde{p} \boldsymbol{\delta} \end{cases} \quad (2.19)$$

où  $\boldsymbol{\delta}$  désigne le tenseur identité. Ainsi, selon la définition (2.16),  $\mathcal{A}^\dagger$  et  $\mathcal{B}^\dagger$  sont les opérateurs adjoints des opérateurs directs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  à condition que le second membre de l'équation (2.17) soit nul. Cela induit les contraintes suivantes :

- les termes de bord en  $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  et  $-\boldsymbol{\sigma}^{\dagger H}(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}$  doivent s'annuler. Le premier terme s'annule automatiquement du fait de la définition des conditions aux limites du problème direct (équations (2.10)-(2.12)). Les conditions aux limites du problème adjoint doivent permettre d'annuler le second, ce qui conduit à poser :

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{wall}} \cup \Gamma_{\text{in}} \quad (2.20)$$

$$\partial_r \tilde{p} = \partial_r \tilde{u}_x = \tilde{u}_r = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \alpha_{\text{out}} \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T) \cdot \mathbf{n} + (1 - \beta_{\text{out}}) (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{p} \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{out}} \quad (2.22)$$

- le nombre complexe  $\tilde{\omega}$  est égal à l'opposé du complexe conjugué de la valeur propre directe  $\hat{\omega}$ . Dans ce cas, on peut appeler  $\tilde{\omega}$  *valeur propre adjointe* associée aux *fonctions propres adjointes*  $(\tilde{p}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_r)$ . Comme le spectre du problème direct est symétrique par rapport à l'axe imaginaire (équations réelles), le spectre direct et le spectre adjoint coïncident. Cependant, nous garderons parfois les notations différenciées  $\hat{\omega}$  et  $\tilde{\omega}$  car il est possible que cette coïncidence ne soit pas exacte numériquement.

L'introduction du problème de stabilité adjoint et de l'identité de Lagrange est d'un intérêt tout particulier dans le cas d'opérateurs *non-normaux* qui sont l'équivalent «continu» des matrices non-symétriques en algèbre linéaire. En effet, de même que les matrices symétriques réelles ont la propriété intéressante d'être diagonalisables en base orthonormée, les opérateurs normaux, qui commutent avec leur adjoint, ont des vecteurs propres orthogonaux deux à deux. Au contraire, les opérateurs non-normaux ont des vecteurs propres qui peuvent être très «proches» les uns des autres au sens du produit scalaire utilisé. L'utilisation des vecteurs propres adjoints permet de s'affranchir en partie de ce problème : si  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})_{\hat{\omega}}$  et  $(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}})_{\tilde{\omega}}$  sont les vecteurs propres direct et adjoint associés respectivement aux valeurs propres  $\hat{\omega}$  et  $\tilde{\omega}$ , deux cas de figure se présentent :

- si  $\tilde{\omega} \neq \hat{\omega}^*$ , alors on déduit de l'identité de Lagrange (2.17) que  $\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0$ ; les vecteurs propres direct et adjoints forment donc un *ensemble biorthogonal* de l'espace  $(\mathcal{L}^2(\Omega))^3$ .
- si  $\tilde{\omega} = \hat{\omega}^*$ , on définit le *coefficient de non-normalité*  $\zeta$  suivant :

$$\zeta = \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}\| \|\hat{\mathbf{u}}\|}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle} \quad (2.23)$$

Plus  $\zeta$  est proche de 1, moins l'opérateur est non-normal ; au contraire, plus  $\zeta$  est grand, plus les effets de la non-normalité sont grands. Par exemple, l'effet le plus connu consiste en l'amplification dans des directions opposées des fonctions propres directes et adjointes [79]. On appelle cela la *non-normalité convective*.

En conclusion, nous pourrions parler de *modes propres*, sans nécessairement indiquer qu'il s'agit de modes propres directs ou adjoints, associés à une valeur propre  $\omega = \hat{\omega} = -\tilde{\omega}^*$  et à des fonctions propres directes et adjointes  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  et  $(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}})$ . Notons que du fait de la forme particulière des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées et de l'identité de Lagrange (2.17), la biorthogonalité des fonctions propres ne porte que sur les fluctuations de vitesse.

### 2.1.4 Formalisme matriciel

Au final, on nomme *opérateur Global de Navier-Stokes Incompressible Linéarisé* le couple d'opérateurs  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  définis en (2.8) accompagné des conditions aux limites (2.10)-(2.12).

Nous récapitulons maintenant les équations de stabilité directes et adjointes sous un formalisme qui soit compatible avec le mode de discrétisation que nous avons employé, à savoir la *collocation spectrale*. Celle-ci a pour propriété intéressante de transformer les dérivations axiales et radiales par des multiplications matricielles. Le formalisme que nous introduisons ici consiste à regrouper tous les termes relatifs à une dérivée de direction et d'ordre donnés en une même matrice. Plus précisément, en posant  $\mathbf{Y} = (p, u_x, u_r)$ , nous écrivons localement les équations directes et adjointes (sur le domaine ou aux limites) sous la forme générique

$$\mathbf{A}^{x,2} \partial_x^2 \mathbf{Y} + \mathbf{A}^{r,2} \partial_r^2 \mathbf{Y} + \mathbf{A}^{x,1} \partial_x \mathbf{Y} + \mathbf{A}^{r,1} \partial_r \mathbf{Y} + \mathbf{A}^0 \mathbf{Y} - i\omega \mathbf{B}^0 \mathbf{Y} = 0 \quad (2.24)$$

où les matrices  $\mathbf{A}^\bullet$  sont de taille  $3 \times 3$ . On ajoutera au vecteur  $\mathbf{Y}$ , à la valeur propre  $\omega$  et aux matrices  $\mathbf{A}^\bullet$  un chapeau ou un tilde selon qu'on s'intéresse aux équations directes ou adjointes.

#### 2.1.4.1 Problème direct

Sur le domaine, les opérateurs (2.8) s'écrivent sous la forme matricielle (2.24) avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}^{x,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{A}}^{r,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{A}}^{x,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & U_x & 0 \\ 0 & U_x & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{A}}^{r,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\text{Re}^{-1} r^{-1} & U_r \\ 1 & 0 & U_r - \text{Re}^{-1} r^{-1} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{A}}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & \partial_x U_x & \partial_r U_x \\ 0 & \partial_x U_r & \partial_r U_r + \text{Re}^{-1} r^{-2} \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\mathbf{B}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

D'autre part, les blocs matriciels correspondant aux conditions aux limites en entrée de domaine, en paroi et en sortie comportent les deux équations imposées (relations (2.10) et (2.12)) et doivent donc être complétés par une équation supplémentaire pour être consistents avec la taille du problème. Seules les conditions sur l'axe sont imposées sur les trois équations.

- En entrée, l'équation supplémentaire est la version simplifiée de l'équation de quantité de mouvement suivant  $x$ . Les matrices correspondantes s'écrivent :

$$\hat{\mathbf{A}}^{x,2} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}^{x,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

et  $\hat{\mathbf{A}}^{r,2} = \hat{\mathbf{A}}^{r,1} = \hat{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{0}$ ;

- de même, à la paroi, on complète avec l'équation de quantité de mouvement radiale, d'où

$$\hat{\mathbf{A}}^{r,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}^{r,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

et  $\hat{\mathbf{A}}^{x,2} = \hat{\mathbf{A}}^{x,1} = \hat{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{0}$ ;

- sur l'axe, seules  $\hat{\mathbf{A}}^{r,1}$  et  $\hat{\mathbf{A}}^0$  sont non-nulles :

$$\hat{\mathbf{A}}^{r,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

– enfin, en sortie, on complète avec l'équation de continuité :

$$\hat{\mathbf{A}}^{x,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1 + \alpha_{\text{out}}}{\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}^{r,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{\text{out}}}{\text{Re}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\hat{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^{-1} \\ 1 & \beta_{\text{out}} U_x & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\text{out}} U_x \end{pmatrix}$$

– si la condition de traction nulle généralisée est remplacée par la condition de pression nulle, celle-ci remplace l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement sont conservées. Les matrices modifiées par rapport à celles donnant les équations sur le domaine (2.25) sont :

$$\hat{\mathbf{A}}^{x,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & U_x & 0 \\ 0 & U_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}}^{r,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Re}^{-1} r^{-1} & U_r \\ 1 & 0 & U_r - \text{Re}^{-1} r^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x U_x & \partial_r U_x \\ 0 & \partial_x U_r & \partial_r U_r + \text{Re}^{-1} r^{-2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{B}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

### 2.1.4.2 Problème adjoint

Dans le cas des équations adjointes, on obtient sur le domaine :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{x,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^{r,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{x,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -U_x & 0 \\ 0 & -U_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^{r,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\text{Re}^{-1} r^{-1} & -U_r \\ 1 & 0 & -U_r - \text{Re}^{-1} r^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r^{-1} \\ 0 & \partial_x U_x & \partial_r U_x \\ 0 & \partial_x U_r & \partial_r U_r + \text{Re}^{-1} r^{-2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{B}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Les matrices exprimant les conditions aux limites (2.20)-(2.22) s'écrivent, en ajoutant les mêmes équations manquantes que pour le problème direct :

– En entrée :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{x,2} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^{x,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

et  $\tilde{\mathbf{A}}^{r,2} = \tilde{\mathbf{A}}^{r,1} = \tilde{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{0}$ ;

– à la paroi, on obtient de même

$$\tilde{\mathbf{A}}^{r,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^{r,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

et  $\tilde{\mathbf{A}}^{x,2} = \tilde{\mathbf{A}}^{x,1} = \tilde{\mathbf{B}}^0 = \mathbf{0}$ ;

– sur l’axe, les équations sont les mêmes que pour le problème direct :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{r,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

– Enfin, en sortie :

$$\tilde{\mathbf{A}}^{x,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1 + \alpha_{\text{out}}}{\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^{r,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{\text{out}}}{\text{Re}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r^{-1} \\ 1 & (1 - \beta_{\text{out}})U_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Discrétisation par collocation spectrale

Durant notre thèse, nous avons fait le choix de discrétiser notre problème de stabilité par collocation spectrale dans la continuité des travaux précédents menés en stabilité au DMAE [35, 25]. Cette méthode a l’avantage de la précision puisqu’elle induit une rapide convergence en maillage dite “spectrale” [66], mais souffre de trois principaux inconvénients. En premier lieu, elle ne peut être mise en oeuvre facilement que pour des configurations simples, selon des droites dans chaque direction de discrétisation, ce qui n’est pas pénalisant pour une configuration cylindrique comme la nôtre, mais peut être problématique pour des géométries complexes (cônicité, présence d’intersegments...). Ensuite, les matrices de dérivation qu’elle induit sont pleines, portant l’espace mémoire nécessaire au stockage du problème discrétisé à des niveaux très élevés. Ce problème sera résolu en ayant recours à un stockage et à un calcul du problème de stabilité sur plusieurs processeurs, comme cela sera montré en section suivante. Enfin, la collocation spectrale, si elle permet de raffiner la discrétisation près des bords, ne permet d’augmenter le nombre de points du domaine que de manière homogène sur le domaine. Deux méthodes sont traditionnellement employées pour raffiner la précision dans une zone : l’utilisation d’un changement de variables entre la variable spectrale et la variable physique, et la discrétisation multidomaine (notamment mise en oeuvre dans [64]). En fait, la première solution n’est pas adaptée au calcul de zones de couches limites extrêmement fines, c’est pourquoi nous présentons et mettons en oeuvre la seconde.

### 2.2.1 Généralités sur la collocation spectrale

#### 2.2.1.1 Décomposition spectrale et collocation

Les méthodes dites “spectrales” consistent à décomposer les fonctions à discrétiser sur une base hilbertienne. Dans notre cas, pour des fonctions définies sur  $[-1, 1]$ , nous utilisons les polynômes de Tchébychev, définis, pour  $k \in \mathbb{N}$ , par

$$\forall \xi \in [-1, 1], \quad T_k(\xi) = \cos(k \arccos(\xi)). \quad (2.36)$$

Ces polynômes forment une base hilbertienne orthonormée pour le produit scalaire pondéré

$$\langle u, v \rangle_w = \int_{-1}^1 u(\xi)v(\xi)w(\xi)d\xi \quad (2.37)$$

avec  $w(\xi) = 1/\sqrt{1-\xi^2}$ . Ils ont leurs extrema aux points  $\{\xi_p = \cos(p\pi/k), p \in [0, k]\}$ . Ainsi, pour une décomposition spectrale d'ordre  $N$  de la forme

$$u(\xi) \approx \sum_{k=1}^N \check{u}_k T_k(\xi) \quad (2.38)$$

il est possible de capturer des phénomènes d'épaisseur en  $\mathcal{O}(1/N)$  au centre du domaine et en  $\mathcal{O}(1/N^2)$  aux bords. Toutefois, ce n'est pas la décomposition (2.45) que l'on utilise habituellement Soient

$$\xi_i = \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N-1}\right), \quad (2.39)$$

les points dits de Gauss-Lobatto, auxquels s'annule le polynôme  $(1-\xi^2)T'_{N-1}(\xi)$ , et

$$\lambda_i(\xi) = \frac{(-1)^i (1-\xi^2) T'_{N-1}(\xi)}{(\xi - \xi_i) d_i (N-1)^2} \quad (2.40)$$

les polynômes interpolateurs de Lagrange tels que  $\lambda_i(\xi_j) = \delta_{ij}$  pour  $i, j \in [1, N]$ . Dans cette relation, on a introduit les coefficients  $d_1 = d_N = 2$ , et  $d_2 = \dots = d_{N-1} = 1$ . On pose alors la décomposition suivante :

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^N u_i \lambda_i(\xi), \quad (2.41)$$

qui vérifie  $u(\xi_i) = u_i$  pour tout  $i$ . Cette écriture est plus naturelle dans la mesure où elle donne directement la valeur de  $u$  aux points de collocation. En outre, on passe de la décomposition spectrale (2.38) à la décomposition par collocation (2.45) en écrivant :

$$u_i = \sum_{k=1}^N \check{u}_k T_{k-1}(\xi_i) = \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{(k-1)(i-1)\pi}{N-1}\right) \check{u}_k \quad (2.42)$$

Réciproquement, on obtient :

$$\check{u}_k = \frac{2}{d_k(N-1)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i} \cos\left(\frac{(k-1)(i-1)\pi}{N-1}\right) u_i \quad (2.43)$$

On notera ainsi  $M_S^{\text{GL}}$  la matrice de passage entre des coefficients d'interpolation aux coefficients spectraux ( $\check{u}_k = M_{S,ki}^{\text{GL}} u_i$ ) et  $M_{\text{GL}}^{\text{S}}$  son inverse (telle que  $u_i = M_{\text{GL},ik}^{\text{S}} \check{u}_k$ ).

### 2.2.1.2 Vitesse de convergence

En ce qui concerne la convergence de ces décompositions, citons principalement deux résultats. D'une part, pour la décomposition spectrale, on montre [71] que pour  $u$  dans l'espace de Sobolev  $H^{m,w}([-1, 1])$ ,<sup>5</sup> les coefficients  $\check{u}_k$  obéissent à une majoration en  $\mathcal{O}(1/k^m)$ . D'autre part, introduisons la norme  $\| \cdot \|_{H^{m,w}([-1,1])}$  définie par

$$\|u\|_{H^{m,w}([-1,1])}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{-1}^1 |D^{|\alpha|} u(\xi)|^2 w(\xi) d\xi \quad (2.44)$$

5. On rappelle qu'il s'agit de l'espace des fonctions de carré intégrables et de dérivées d'ordre 1 à  $m$  intégrables au sens d'une norme induite par un produit scalaire. Ici, le  $w$  en exposant indique que le produit scalaire en question est pondéré par la fonction  $w$  évoquée plus haut.

où  $\alpha$  une combinaison de dérivées partielles d'ordre  $m = |\alpha|$ ,  $\partial x_1 \dots \partial x_m$ . Alors on montre [21] la majoration suivante :

$$\|u - \sum_{i=1}^N u_i \lambda_i\|_{H^{p,w}([-1,1])} \leq C N^{2p-m} \|u\|_{H^{m,w}([-1,1])} \quad (2.45)$$

Ces deux relations montrent donc que la convergence de la discrétisation (i.e. la décroissance des coefficients  $\check{u}_k$  et l'erreur sur la décomposition spectrale) est d'autant meilleure que la fonction  $u$  est plus régulière, en d'autres termes appartenant à un espace de Sobolev d'ordre  $m$  élevé. La collocation spectrale est donc très bien adaptée à la résolution de problèmes dont les solutions n'exhibent pas de variations brusques (forts cisaillements, chocs, ruptures d'impédance en écoulements compressibles...), ce qui est *a priori* le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées autour de l'écoulement de Taylor-Culick.

### 2.2.1.3 Matrices de dérivation

La méthode de collocation spectrale permet d'écrire explicitement la dérivation d'une fonction connue sur les points de Gauss-Lobatto. Si l'on reprend la représentation (2.45), on montre que l'on peut écrire

$$\forall i \in [1, N], \quad u'(\xi_i) = \sum_{k=1}^N D_{i,j}^{\xi,1} u_j \quad (2.46)$$

avec

$$\begin{aligned} D_{i,j}^1 &= \frac{d_i (-1)^{i+j}}{d_j (\xi_i - \xi_j)} && \text{si } i \neq j \\ D_{i,j}^1 &= -\frac{\xi_i}{2(1 - \xi_i^2)} && \text{si } i = j \neq 1, N \\ D_{i,j}^1 &= \frac{2(N-1)^2 + 1}{6} && \text{si } i = j = 1 \\ D_{i,j}^1 &= -\frac{2(N-1)^2 + 1}{6} && \text{si } i = j = N \end{aligned} \quad (2.47)$$

On peut bien sûr passer par des multiplications matricielles pour obtenir des dérivées d'ordre supérieur. Or, numériquement, la précision sur les différences  $\xi_i - \xi_j$  se détériore quand  $N$  augmente : c'est pourquoi nous utilisons l'algorithme de Weidmann [92] qui consiste à calculer les matrices de dérivation d'ordre  $n$   $D^{\xi,n}$  par récurrence et en transformant les différences  $\xi_i - \xi_j$  par les formules de différences de cosinus. À titre d'exemple, nous donnons en table 2.1 les erreurs relatives obtenues pour le calcul de les dérivées de la fonction  $f(x) = \cos(2\pi x)$ . L'utilisation des matrices de Weidman permet d'augmenter sensiblement la précision par rapport aux matrices de dérivation classiques, mais remarquons que celle-ci se dégrade tout de même très rapidement à partir de 50 points et finit par se stabiliser vers 400 points. En particulier, l'erreur numérique sur les dérivées secondes sera usuellement de l'ordre de  $10^{-9}$ .

## 2.2.2 Application à la stabilité globale

### 2.2.2.1 Cas monodomaine

Il s'agit de décomposer les variables primitives directes ou adjointes  $(p, u_x, u_r)$  sur la base des polynômes interpolateurs définis en (2.40). Pour cela, soient  $N$  et  $M$  deux entiers,  $(\xi_i, \eta_j)_{i=1\dots N, j=1\dots M}$  l'ensemble de points de  $[0, 1]^2$  définis par

$$\xi_i = \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right], \quad \eta_j = \cos \left[ \frac{(j-1)\pi}{M-1} \right] \quad (2.48)$$

$N$	$\frac{\ f' - f'_D\ }{\ f'\ }$	$\frac{\ f'' - f''_D\ }{\ f''\ }$	$\frac{\ f' - f'_W\ }{\ f'\ }$	$\frac{\ f'' - f''_W\ }{\ f''\ }$
20	$2.132583367 \cdot 10^{-13}$	$8.197678693 \cdot 10^{-12}$	$1.354836373 \cdot 10^{-13}$	$4.547404128 \cdot 10^{-12}$
50	$4.523675091 \cdot 10^{-13}$	$1.172707192 \cdot 10^{-10}$	$7.862914986 \cdot 10^{-15}$	$1.937002935 \cdot 10^{-12}$
100	$2.953770196 \cdot 10^{-11}$	$2.933967006 \cdot 10^{-8}$	$1.362037944 \cdot 10^{-14}$	$3.380049319 \cdot 10^{-11}$
200	$1.563720398 \cdot 10^{-10}$	$6.881454363 \cdot 10^{-7}$	$1.563720398 \cdot 10^{-13}$	$6.881454363 \cdot 10^{-10}$
300	$7.345399739 \cdot 10^{-10}$	$6.175742524 \cdot 10^{-6}$	$4.675296176 \cdot 10^{-13}$	$1.842395685 \cdot 10^{-9}$
400	$2.021914309 \cdot 10^{-9}$	$3.499770774 \cdot 10^{-5}$	$7.979539625 \cdot 10^{-13}$	$3.319929365 \cdot 10^{-9}$
500	$3.393508708 \cdot 10^{-9}$	$7.888368677 \cdot 10^{-5}$	$3.197240082 \cdot 10^{-12}$	$6.900475333 \cdot 10^{-9}$

TABLE 2.1 – Erreurs relatives sur les dérivées premières et secondes de la fonction  $f(x) = \cos(2\pi x)$  définie sur  $[0, 1]$ , calculées avec les matrices de dérivation classiques (indice  $D$ ) et les matrices de Weidman (indice  $W$ ) pour un nombre de points croissant.

et  $(\lambda_i, \mu_j)_{i=1\dots N, j=1\dots M}$  la famille de polynômes interpolateurs de Tchébychev (2.40) tels que pour  $(i, k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$  et  $(j, l) \in \llbracket 1, M \rrbracket^2$ , on vérifie  $\lambda_i(\xi_k) = \delta_{ik}$  et  $\mu_j(\eta_l) = \delta_{jl}$ . On passe des variables de collocation  $\xi, \eta$  aux variables physiques  $(x, r) \in [X_{\text{in}}, X_{\text{out}}] \times [0, 1]$  par les changements de variable linéaires suivants :

$$x = \frac{X_{\text{out}} + X_{\text{in}}}{2} - \xi \frac{X_{\text{out}} - X_{\text{in}}}{2}, \quad r = \frac{\eta + 1}{2} \quad (2.49)$$

On cherche alors les variables primitives sous la forme générique

$$q(x, r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M q_{ij} \lambda_i(\xi(x)) \mu_j(\eta(x)) \quad (2.50)$$

où l'on aura noté les changements de variable réciproques  $\xi(x) = (X_{\text{out}} + X_{\text{in}} - 2x)/(X_{\text{out}} - X_{\text{in}})$  et  $\eta(r) = 2r - 1$ . Pour le calcul des dérivées partielles exprimées aux points  $(x_i, r_j)$ , on obtient donc :

$$\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i, r_j) = \sum_{k=1}^N D_{i,k}^{x,n} q_{kj} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^m q}{\partial r^m}(x_i, r_j) = \sum_{l=1}^M D_{j,l}^{r,m} q_{il} \quad (2.51)$$

où  $D^{x,n}$  et  $D^{r,m}$  sont les matrices de dérivation relatives aux variables physiques, telles que

$$D^{x,n} = \left( \frac{-2}{X_{\text{out}} - X_{\text{in}}} \right)^n D^{\xi,n} \quad \text{et} \quad D^{r,m} = 2^m D^{\eta,m} \quad (2.52)$$

En pratique, il est commode d'introduire l'écriture matricielle globale suivante : soit  $\hat{Z}$  le vecteur colonne de taille  $3NM$  tel que

$$\begin{cases} p_{ij} &= Z_{3(M(i-1)+j-1)+1} \\ u_{x,ij} &= Z_{3(M(i-1)+j-1)+2} \\ u_{r,ij} &= Z_{3(M(i-1)+j-1)+3} \end{cases}, \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket, j \in \llbracket 1, M \rrbracket \quad (2.53)$$

C'est cette écriture qui est directement utilisée dans notre code de stabilité. Par ailleurs, en s'appuyant sur les matrices de dérivation longitudinale et radiale (2.52), les dérivées partielles composées exprimées au point  $(x_i, r_j)$  sont directement obtenues par multiplications matricielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial^{n+m} p}{\partial x^n \partial r^m}(x_i, r_j) &= Z_{3(M(i-1)+j-1)+1}^{nm} \\ \frac{\partial^{n+m} u_x}{\partial x^n \partial r^m}(x_i, r_j) &= Z_{3(M(i-1)+j-1)+2}^{nm} \\ \frac{\partial^{n+m} u_r}{\partial x^n \partial r^m}(x_i, r_j) &= Z_{3(M(i-1)+j-1)+3}^{nm} \end{cases}, \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket, j \in \llbracket 1, M \rrbracket \quad (2.54)$$





des matrices globales est alors donné par l'élément  $(i_{VP}, j_{VP})$  des matrices locales  $A^*$  et  $B$  correspondantes définies en (2.25).

- Pour les conditions aux limites, on assemble de la même manière les lignes définies par les indices (2.59) des matrices globales pour  $(i_{VP}, j_{VP}) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$  et :
  - $(i = 1, j = 1 \dots M)$  au fond avant ou en entrée ( $x = X_{in}$ );
  - $(i = N, j = 1 \dots M)$  en sortie ( $x = X_{out}$ );
  - $(i = 1 \dots N, j = 1)$  à la paroi débitante ( $r = 1$ );
  - $(i = 1 \dots N, j = M)$  sur l'axe ( $r = 0$ ).

Une nouvelle fois, des matrices locales de taille  $3 \times 3$  traduisent les conditions aux limites (2.10). Par ce procédé, nous obtenons bien un problème aux valeurs propres généralisé matriciel de la forme

$$AZ - i\omega BZ = 0 \quad (2.60)$$

avec  $A$  et  $B$  deux matrices de taille notée  $n_{MAT} = 3NM$ , et dont nous détaillerons la résolution en section 2.3.

### 2.2.3 Cas multidomaine

Comme dit plus haut, si l'avantage de la collocation spectrale est sa très rapide convergence pour le calcul de solutions régulières, cette méthode perd de sa précision lorsque des comportements singuliers ou de brusques variations doivent être calculés. Pour remédier à cela, plusieurs méthodes peuvent être mises en oeuvre : l'utilisation de changements de variable entre les variables de Gauss-Lobatto et les variables physiques qui, contrairement aux relations (2.49), ne sont pas linéaires et permettent donc de concentrer plus de points dans une zone donnée du domaine. En fait, cette méthode donne de bons résultats quand les fonctions propres ne varient notablement que dans une région limitée du domaine,<sup>6</sup> comme ce peut être le cas pour le calcul de modes de surface dans les conduits à parois absorbantes [18]. Cependant, s'il existe de grandes zones du domaine de calcul sur lesquelles les fluctuations des fonctions propres sont de très faible amplitude, celles-ci ne sont pas nulles et doivent être calculées avec la même précision de partout (i.e. avec un nombre de points relativement uniforme). Par ailleurs, il existe effectivement des zones de fluctuations dont la taille caractéristique est très largement inférieure à celle des autres phénomènes présents dans le calcul des fonctions propres. Il est donc préférable d'associer à ces zones un maillage propre de quelques dizaines de points, d'où l'idée d'une méthode multidomaine.

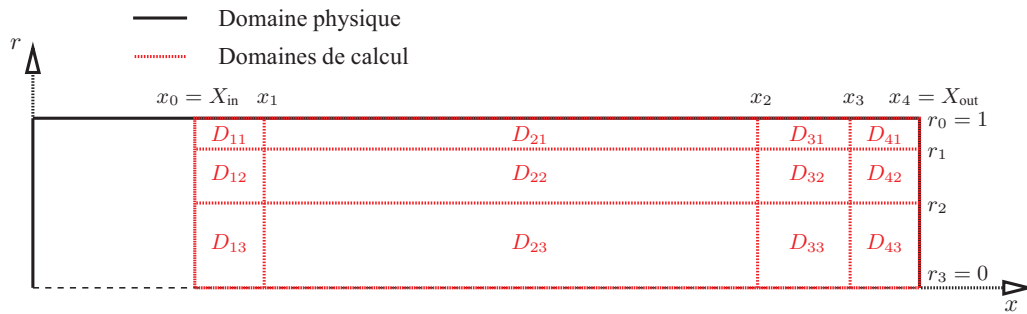


FIGURE 2.2 – Domaine physique et partitionnement du domaine de calcul en  $P \times Q = 4 \times 3$  sous-domaines

On découpe donc le domaine de calcul  $\Omega = [X_{in}, X_{out}] \times [0, 1]$  en  $P \times Q$  sous-domaines notés  $D_{11}, \dots, D_{P1}, \dots, D_{PQ}$ . Les points de séparation longitudinaux et radiaux sont notés respectivement

6. Pour les modes hydrodynamiques de surface dans les canaux à parois absorbante, les fonctions propres issues des calculs de stabilité locale peuvent être nulles sur 90% du domaine, les fluctuations de vitesse et de pression se concentrant dans les 10% restants près de la paroi. On peut donc se permettre "d'habiller" les 10% en "déshabillant" les 90%.

$x_1, \dots, x_{P-1}$  et  $r_2, \dots, r_{Q-1}$ . À chaque domaine  $D_{pq}$  est associée une discrétisation de  $N_p \times M_q$  points en incluant les points de bord, d'où des nombres de points longitudinal et radial valant

$$N = \sum_{p=1}^P N_p - P + 1, \quad \text{et} \quad M = \sum_{q=1}^Q M_q - Q + 1 \quad (2.61)$$

On peut ainsi définir un vecteur-colonne  $\hat{Z}^{pq}$  de taille  $3N_p M_q$  tel que

$$\begin{cases} p_{ij} = Z_{3(M(i-1)+j-1)+1}^{pq} \\ u_{x,ij} = Z_{3(M(i-1)+j-1)+2}^{pq} \\ u_{r,ij} = Z_{3(M(i-1)+j-1)+3}^{pq} \end{cases} \quad i \in [[1, N_p]], j \in [[1, M_q]] \quad (2.62)$$

Soient également  $D_{pq}^{x,n}$  et  $D_{pq}^{r,m}$  les matrices de dérivation longitudinales et radiales locales, strictement analogues aux matrices  $D_G^{x,n}$  et  $D_G^{r,m}$  liées à une discrétisation globale  $N \times M$ , telles que

$$\begin{cases} \frac{\partial^{n+m} p}{\partial x^n \partial r^m}(x_i, r_j) = Z_{pq;3(M(i-1)+j-1)+1}^{nm} \\ \frac{\partial^{n+m} u_x}{\partial x^n \partial r^m}(x_i, r_j) = Z_{pq;3(M(i-1)+j-1)+2}^{nm} \\ \frac{\partial^{n+m} u_r}{\partial x^n \partial r^m}(x_i, r_j) = Z_{pq;3(M(i-1)+j-1)+3}^{nm} \end{cases}, \quad i \in [[1, N_p]], j \in [[1, M_q]] \quad (2.63)$$

avec

$$\hat{Z}_{pq}^{nm} = D_{pq}^{x,n} D_{pq}^{r,m} \hat{Z} \quad (2.64)$$

Parallèlement à cette écriture des variables primitives et de leurs dérivées, relative à un sous-domaine, il est toujours possible de définir une écriture globale qui tienne compte de la taille totale  $N \times M$  de la discrétisation, en reprenant le vecteur  $\hat{Z}$  défini en (2.53). On repasse alors aux indices  $(i, j) \in [[1, N]] \times [[1, M]]$  à partir des indices locaux  $(i_L, j_L)$  du domaine  $D_{pq}$  par :

$$i = i_L + \sum_{p'=1}^{p-1} N_{p'} - p + 1, \quad \text{et} \quad j = j_L + \sum_{q'=1}^{q-1} M_{q'} - q + 1 \quad (2.65)$$

Cette écriture assure en particulier la continuité des fonctions propres aux interfaces entre deux domaines longitudinaux et radiaux. Pour obtenir des fonctions propres de dérivées premières continues, il suffit d'écrire les relations

$$\forall p \in [[1, P-1]], \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_p \\ x \leq x_p}} \frac{\partial \bullet}{\partial x}(x, r) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_p \\ x \geq x_p}} \frac{\partial \bullet}{\partial x}(x, r) \quad (2.66)$$

$$\forall q \in [[1, Q-1]], \quad \lim_{\substack{r \rightarrow r_q \\ r \leq r_q}} \frac{\partial \bullet}{\partial r}(x, r) = \lim_{\substack{r \rightarrow r_q \\ r \geq r_q}} \frac{\partial \bullet}{\partial r}(x, r) \quad (2.67)$$

avec  $\bullet = \hat{p}, \hat{u}_x, \hat{u}_r$ . Pour un domaine donné, on peut donc définir des conditions de raccord aux interfaces "Nord", "Sud", "Ouest" et "Est" qui remplacent si nécessaire les conditions aux limites du domaine global. On choisit alors d'écrire les matrices locales correspondantes apparaissant dans la relation (2.58) comme suit :

- $A^{x,1} = I_3$  pour une condition "Nord" ;
- $A^{x,1} = -I_3$  pour une condition "Sud" ;
- $A^{r,1} = I_3$  pour une condition "Ouest" ;
- $A^{r,1} = -I_3$  pour une condition "Est".

Le remplissage des matrices globales  $\mathbf{A}_G$  et  $\mathbf{B}_G$  définissant le problème aux valeurs propres généralisé matriciel (2.70) se fait donc en deux étapes.

1. On considère les matrices  $\mathbf{A}_{pq}^*$  et  $\mathbf{B}_{pq}$  définissant le problème aux valeurs propres généralisé local au domaine  $D_{pq}$  :

$$\left( \mathbf{A}_{pq}^{x,2} \mathbf{D}_{pq}^{x,2} + \mathbf{A}_{pq}^{r,2} \mathbf{D}_{pq}^{r,2} + \mathbf{A}_{pq}^{x,1} \mathbf{D}_{pq}^{x,1} + \mathbf{A}_{pq}^{r,1} \mathbf{D}_{pq}^{r,m} + \mathbf{A}_{pq}^0 - i\omega \mathbf{B}_{pq}^0 \right) \mathbf{Z} = 0. \quad (2.68)$$

Ces matrices s'assemblent exactement de la même manière que le problème global sur un seul domaine, à la seule nuance près que certaines conditions aux limites sont remplacées par les conditions de raccordement si la frontière du domaine est interne. On obtient donc un problème aux valeurs propres local de la forme  $\mathbf{A}_{pq} - i\omega \mathbf{B}_{pq} = 0$ .

2. Les termes d'indices  $(i_L, j_L)$  des matrices  $\mathbf{A}_{pq}$  et  $\mathbf{B}_{pq}$  sont distribués sur des sous-matrices globales  $\mathbf{A}_{G,pq}$  et  $\mathbf{B}_{G,pq}$  aux indices  $(i, j)$  vérifiant la relation (2.65). Les matrices globales complètes sont alors la somme

$$\mathbf{A}_G - i\omega \mathbf{B}_G = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q (\mathbf{A}_{G,pq} - i\omega \mathbf{B}_{G,pq}) \quad (2.69)$$

Ces matrices globales ont une topologie qui peut être schématiquement représentée par la figure 2.3. On se ramène une nouvelle fois au calcul d'un problème aux valeurs propres généralisé de la forme (2.70).

## 2.3 Résolution numérique du problème aux valeurs propres linéarisé

Nous nous intéressons maintenant à la résolution d'un problème aux valeurs propres généralisé

$$\mathbf{A} \mathbf{Z} = i\omega \mathbf{B} \mathbf{Z} \quad (2.70)$$

avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux matrices complexes de taille  $n_{\text{MAT}} = 3NM$  et  $\mathbf{Z}$  vecteur-colonne de taille  $n_{\text{MAT}}$  (nous avons enlevé les chapeaux sur les  $\mathbf{Z}$ ). Historiquement, les calculs de stabilité locale traités au DMAE, impliquant des matrices de taille raisonnable, ont été résolus par un calcul de spectre complet de matrices à l'aide des routines de la bibliothèque LAPACK [6] (pour Linear Algebra PACKage) basées sur les décompositions QR/QZ [6]. Le passage à la stabilité globale a induit un accroissement en taille trop important pour que cette solution soit viable. C'est pourquoi on s'est tourné vers des méthodes de calcul de spectre partiel [74]. A ce niveau, diverses méthodes existent, toutes basées sur le calcul du spectre d'un sous-espace itéré d'une matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Dans le cas des matrices pleines et non-hermitiennes, c'est l'algorithme d'Arnoldi [8], connu depuis les années 50 et implémenté dans la bibliothèque ARPACK [54], qui a été choisi.

Or, après une brève présentation, nous montrons que cette méthode suppose une pré-transformation de l'expression (2.70), qui elle-même nécessite l'inversion de la matrice  $\mathbf{A}_{\omega_0} = \mathbf{A} - i\omega_0 \mathbf{B}$  pour un complexe  $\omega_0$  donné. Dans le cas d'un calcul de stabilité, cette inversion doit être la plus précise possible ; et portant sur une matrice pleine, les méthodes itératives du type GMRES sont écartées d'emblée. Il a donc été choisi de calculer la factorisation LU de  $\mathbf{A}_{\omega_0}$ .

Cependant, contrairement aux thèses précédentes [35, 25], notre problème est écrit en variable primitives, ce qui augmente sensiblement la taille mémoire nécessaire au stockage de  $\mathbf{A}_{\omega_0}$  et à sa factorisation. C'est pourquoi nous avons mis en place une factorisation parallèle de  $\mathbf{A}_{\omega_0}$ . Dans ce qui suit, nous présentons ces différents aspects de la résolution du problème (2.70)

### 2.3.1 Algorithme d'Arnoldi — calcul des valeurs propres de plus grand module

L'algorithme d'Arnoldi vise à calculer itérativement les valeurs propres de plus grand module d'une matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Nous évoquons ici les principes de cet algorithme, décrits en détail dans [54] et [91].

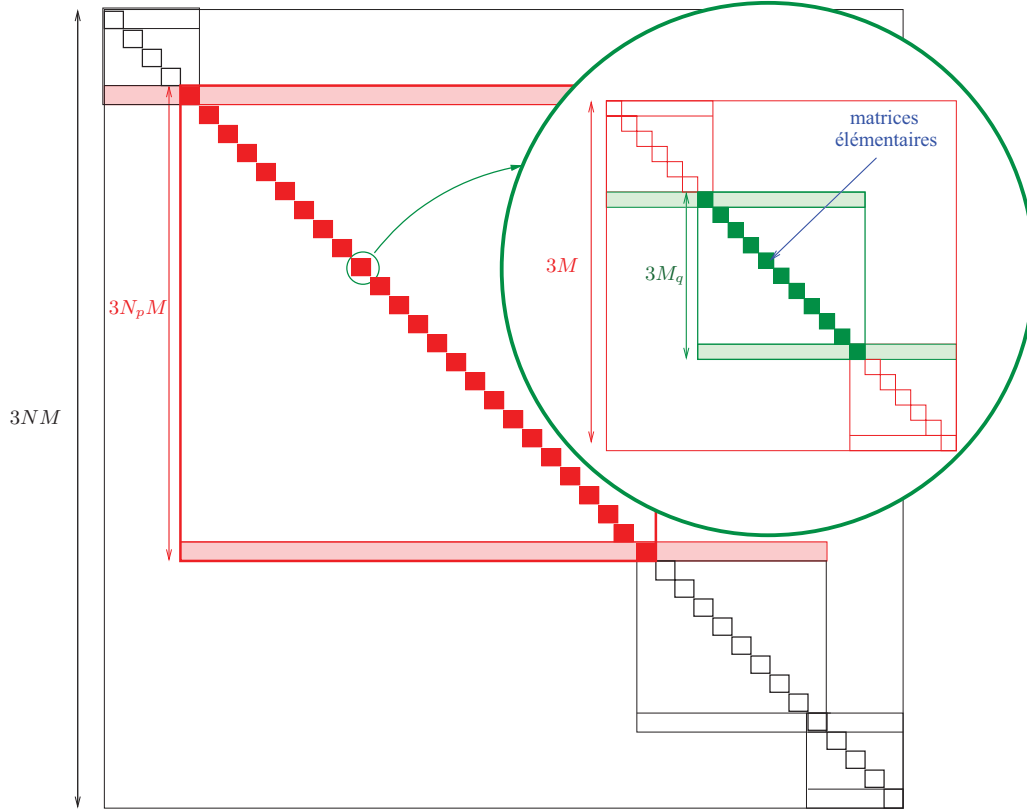


FIGURE 2.3 – Topologie des matrices globales pour une discrétisation sur plusieurs domaines. Les carrés pleins verts représentent les matrices élémentaires  $\mathbf{A}^*$  et  $\mathbf{B}$  de taille  $3 \times 3$  assemblées sur les diagonales. Après multiplication par les matrices de dérivation radiales liées à un domaine  $D_{pq}$ , des termes non-nuls apparaissent dans le carré vert gras ; de même, après multiplication par les matrices de dérivation longitudinales du même domaine, des termes non-nuls apparaissent dans le carré rouge gras. Enfin, les zones colorées en vert (resp. rouge) correspondent aux interfaces radiales (resp. longitudinales) entre le domaine  $D_{pq}$  et ses voisins.

Étant donné un vecteur initial  $\mathbf{Z}_0$ , l'algorithme d'Arnoldi consiste à construire pas à pas un sous-espace dit de Krylov de taille  $p_{\mathcal{K}} \ll n_{\text{MAT}}$  de la forme

$$\mathcal{K}_{p_{\mathcal{K}}} = \text{Vect} \left( \mathbf{Z}_0, \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Z}_0, \dots, \tilde{\mathbf{A}}^{p_{\mathcal{K}}-1}\mathbf{Z}_0 \right) \quad (2.71)$$

En réalité, ce n'est pas directement ce sous-espace itéré que l'on construit, mais à chaque multiplication par  $\tilde{\mathbf{A}}$  pour obtenir un vecteur supplémentaire, on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt au nouveau vecteur calculé, ce qui conduit à la relation

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q}_{p_{\mathcal{K}}} = \mathbf{Q}_{p_{\mathcal{K}}}\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}} + \mathbf{r}_{p_{\mathcal{K}}}^T \mathbf{e}_{p_{\mathcal{K}}} \quad (2.72)$$

où  $\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}}$  est une matrice de Hessenberg supérieure de taille  $p_{\mathcal{K}} \times p_{\mathcal{K}}$ ,  $\mathbf{r}_{p_{\mathcal{K}}}$  un vecteur-colonne résiduel de taille  $p_{\mathcal{K}}$ .

Or, on montre [91] que si  $\|\mathbf{r}_{p_{\mathcal{K}}}\|_2 = 0$ , les valeurs propres de  $\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}}$  sont les  $p$  valeurs propres de plus grand module de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . De même, si pour  $p_{\text{vp}} < p_{\mathcal{K}}$ , les  $p_{\text{vp}}$  premiers éléments de  $\mathbf{r}_{p_{\mathcal{K}}}$  sont inférieurs à une tolérance  $\varepsilon_A$ , les  $p_{\text{vp}}$  valeurs propres de  $\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}}$  sont une approximation à  $\varepsilon_A$  près des  $p_{\text{vp}}$  valeurs propres de plus grand module de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Le but de l'algorithme est alors de trouver le vecteur  $\mathbf{Z}_0$  engendrant  $\mathcal{K}_{p_{\mathcal{K}}}$  qui minimise  $\|\mathbf{r}_{p_{\mathcal{K}}}\|_2$ .

Deux boucles imbriquées sont donc mises en place : la boucle interne qui consiste à calculer le sous-espace  $\mathcal{K}_{p_{\mathcal{K}}}$  pour un vecteur  $\mathbf{Z}_0$  donné, et la boucle externe qui consiste à trouver  $\mathbf{Z}_0$  pour minimiser le résidu dans l'expression (2.72). Or, il est possible d'accélérer la convergence du résidu en choisissant régulièrement un nouveau  $\mathbf{Z}_0$  à partir de l'information déjà connue dans  $\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}}$  en “cachant” par projection la partie du spectre de  $\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}}$  qui ne correspond pas aux  $p_{\text{vp}}$  valeurs propres recherchées et en choisissant  $\mathbf{Z}_0$  égal au premier vecteur propre de la matrice  $\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}}$  ainsi filtrée [91].

Une fois les résidus  $\mathbf{r}_{p_{\mathcal{K}}}$  portés à une valeur suffisamment faible, il suffit de calculer les valeurs propres de  $\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}}$  à l'aide des routines de la librairie LAPACK.

Cette procédure a donc deux avantages :

- La rapidité. Quelle que soit la taille de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ , on travaille sur un sous-espace de taille arbitrairement petit : en pratique, pour une matrice de taille  $n_{\text{MAT}} = 30000$ , on peut choisir  $p_{\mathcal{K}} = 100$  pour obtenir  $p_{\text{vp}} = 10$  valeurs propres convergées à  $\varepsilon = 10^{-8}$  près.
- La précision. Le procédé d'orthonormalisation dans le calcul du sous-espace de Krylov permet d'écarter en permanence les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{H}_{p_{\mathcal{K}}}$ , et ainsi faciliter le calcul de ses valeurs propres.

Les deux étapes de cet algorithme (calcul du sous-espace de Krylov et calcul de ses valeurs propres et vecteurs propres) est mis en oeuvre dans deux sous-routines de la librairie ARPACK : `znaupd` et `zneupd`. Comme la première ne prend en argument qu'un vecteur  $\mathbf{Z}$  et son image  $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Z}$  par multiplication matrice-vecteur, la procédure est globalement indépendante de la manière dont on effectue cette opération.

### 2.3.2 Problème aux valeurs propres généralisé — “shift and invert”

Dans notre cas, nous cherchons les valeurs propres placées à un endroit donné du spectre du problème généralisé (2.70). Pour se ramener au calcul des valeurs propres de plus grand module d'une matrice, il est nécessaire de transformer l'expression (2.70) par “décalage et inversion” (ou “shift and invert” en anglais et pour le reste du monde) : soit  $\omega_0$  un complexe *a priori* hors du spectre ; on écrit

$$(\mathbf{A} - i\omega_0\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Z} = \frac{i}{\omega - \omega_0}\mathbf{Z}. \quad (2.73)$$

Étant donné une cible  $\omega_0$ , il est donc possible d'appliquer l'algorithme d'Arnoldi à la matrice  $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - i\omega_0\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$ . Puisque les valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{A}}$  de plus grand module, notées  $\lambda$ , sont ainsi calculées, nous obtenons les valeurs propres  $\omega = \omega_0 + i/\lambda$  les plus proches de la cible. Il faut donc inverser la matrice  $\mathbf{A}_{\omega_0} = \mathbf{A} - i\omega_0\mathbf{B}$ .

Notons que dans notre cas, nous choisissons la cible  $\omega_0$  selon deux critères :

- sa partie réelle nous donne la zone en fréquence des modes VSP que nous recherchons ;
- sa partie imaginaire est choisie de telle sorte que la forme bilinéaire associée à l'opérateur GNSIL  $\tilde{\mathbf{a}}_{\omega_0}$ , définie en A.1 (équation (A.7)) soit coercive, afin que les propriétés d'inversibilité de  $\mathbf{A}_{\omega_0}$  soient bien conditionnées par celles de l'opérateur discret — en d'autres termes que  $\mathbf{A}_{\omega_0}$  ait un bon nombre de conditionnement.

En pratique, cette inversion est effectuée par factorisation LU de la matrice  $\mathbf{A}_{\omega_0} = \mathbf{L}\mathbf{U}$  où  $\mathbf{L}$  est triangulaire inférieure et  $\mathbf{U}$  triangulaire supérieure. Plus précisément, si l'on revient à l'algorithme d'Arnoldi, en particulier à la construction du sous-espace de Krylov (2.72), on doit calculer, pour un vecteur  $\mathbf{Z}$  donné, le produit  $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Z}$  avec  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\omega_0}^{-1}\mathbf{B}$ . Il n'est donc pas nécessaire de calculer entièrement  $\mathbf{A}_{\omega_0}^{-1}$ , mais de stocker la factorisation LU de  $\mathbf{A}_{\omega_0}$  et d'effectuer successivement les opérations

$$\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{B}\mathbf{Z} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{Y} \leftarrow \text{solution de } \mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{Z} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{Z} \leftarrow \text{solution de } \mathbf{U}\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \quad (2.76)$$

sachant que la résolution des systèmes triangulaires (2.75) et (2.76) est beaucoup plus rapide que le fait de calculer en toute généralité  $\mathbf{A}_{\omega_0}^{-1}$  puis les multiplications matrice-vecteur correspondantes.

### 2.3.3 Complexité des différentes étapes du calcul

Jusqu'à présent, la taille mémoire nécessaire à un calcul de stabilité en fonction de courant [25] n'était pas contraignante : en effet, on perdait l'inversibilité de  $A_{\omega_0}$  avant d'avoir atteint les limites en mémoire des calculateurs séquentiels de l'ONERA. Or, comme nous travaillons en variables primitives et que nous pensons pouvoir augmenter la discrétisation longitudinale tout en contrôlant cette inversibilité *via*  $\omega_{0,i}$ , nous avons besoin d'un espace mémoire accru, et corrélativement d'un calcul de valeurs propres raisonnablement rapide. Pour cela, il est nécessaire de rendre parallèle ce calcul. Par exemple, une matrice pleine  $A$  issue d'une discrétisation  $N \times M = 150 \times 100$  de l'opérateur GNSIL représente un espace mémoire de 16 Go en double précision, soit l'ordre de grandeur de l'espace mémoire maximal disponible par processeur sur les machines de l'ONERA.

Par ailleurs, nous pouvons rapidement comparer les complexités temporelles respectives de la factorisation LU de  $A_{\omega_0}$ , et de l'algorithme d'Arnoldi compte tenu de la résolution (2.74) :

- la factorisation LU nécessite  $2n_{\text{MAT}}^3/3$  opérations arithmétiques [43] ;
- comme la matrice  $B$  est en pratique diagonale, l'étape (2.74) ne nécessite que  $n_{\text{MAT}}$  opérations ; et les systèmes (2.75) et (2.76)  $n_{\text{MAT}}(n_{\text{MAT}} + 1)/2$  opérations ;
- la construction du sous-espace de Krylov (2.72) nécessite  $p_{\mathcal{K}}$  multiplications matrice-vecteur, soit  $p_{\mathcal{K}}(n_{\text{MAT}} + 2)n_{\text{MAT}}$  opérations, et  $(p_{\mathcal{K}} + 1)(p_{\mathcal{K}} + 2)n_{\text{MAT}} + 2p_{\mathcal{K}}$  opérations au total pour l'ensemble des étapes d'orthonormalisation ; en résumé, une itération d'Arnoldi est en  $\mathcal{O}(p_{\mathcal{K}}n_{\text{MAT}}^2)$ .

Le rapport de complexité entre la décomposition LU et une itération d'Arnoldi est donc proportionnel à  $p_{\mathcal{K}}/n_{\text{MAT}}$ . Si nous reprenons la discrétisation précédente, nous avons  $n_{\text{MAT}} = 45000$ , et le sous-espace de Krylov usuellement calculé est de taille  $p_{\mathcal{K}} = 100$  : le temps de calcul d'une itération est donc réellement très faible devant celui de la décomposition LU. C'est donc celle-ci qu'il faut traiter en priorité par un calcul parallèle.

### 2.3.4 Factorisation LU parallèle

Jusqu'à présent, la factorisation LU et les inversions (2.75) et (2.76) étaient respectivement effectuées par l'appel aux sous-routines séquentielles `zgetrf` et `zgetrs` de la bibliothèque LAPACK (Linear Algebra PACKage). Il se trouve que ces opérations sont parallélisables, car elles peuvent se définir "par bloc". Si l'on se donne  $p_B \leq n_{\text{MAT}}$  blocs, on peut découper une matrice  $M$  comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \dots & m_{0,n_B-1} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & \ddots & m_{1,n_B-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n_B-1,0} & \dots & m_{n_B-1,n_B-2} & m_{n_B-1,n_B-1} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

où les blocs  $m_{i,j}$  sont de taille  $p_B = n_{\text{MAT}}/n_B$ . La factorisation LU s'effectue alors de la manière suivante pour la première ligne et la première colonne de blocs :

1. factorisation de  $m_{0,0} = l_{0,0}u_{0,0}$  ;
2. calcul des blocs à droite  $u_{0,j} = l_{0,0}^{-1}m_{0,j}$  pour  $j = 1 \dots n_B - 1$  ;
3. calcul des blocs en bas  $l_{i,0} = m_{i,0}u_{0,0}^{-1}$  pour  $i = 1 \dots n_B - 1$  ;
4. en notant

$$M' = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n_B-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n_B-1,1} & \dots & m_{n_B-1,n_B-1} \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

$L' = (l_{0,1} \dots l_{0,n_B-1})$  et  $U' = (u_{1,0} \dots u_{n_B-1,0})^T$ , on recommence le procédé sur les blocs restants de la matrice  $M' - L'U'$ .



Voyons maintenant comment cet algorithme peut se répartir sur plusieurs processeurs. Introduisons d'abord une grille bidimensionnelle de  $(n_p \times n_p)$  processeurs de la forme <sup>7</sup>

$0 = (0, 0)$	$1 = (0, 1)$	$\dots$	$n_p - 1 = (0, n_p - 1)$
$n_p = (1, 0)$	$n_p + 1 = (1, 1)$	$\ddots$	$2n_p - 1 = (1, n_p - 1)$
$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$n_p^2 - n_p = (n_p - 1, 0)$	$\dots$	$n_p^2 - 2 =$ $(n_p - 1, n_p - 2)$	$n_p^2 - 1 =$ $(n_p - 1, n_p - 1)$

Naïvement, associons dans un premier temps un bloc de la matrice  $M$  à un processeur (on suppose alors  $n_p = n_B$ ). A l'étape 1, le processeur  $(0, 0)$  effectue la factorisation LU de son bloc et envoie la sous-matrice  $l_{0,0}$  à tous les processeurs de la première colonne et la sous-matrice  $u_{0,0}$  à tous les processeurs de la première ligne ; aux étapes 2 et 3 les processeurs  $(i, 0), i = 1 \dots n_p - 1$  et  $(0, j), j = 1 \dots n_p - 1$  effectuent leurs inversions respectives et envoient les résultats  $L' = (l_{0,1} \dots l_{0,n_B-1})$  et  $U' = (u_{1,0} \dots u_{n_B-1,0})^T$  aux processeurs concernés ; à l'étape 4, les processeurs qui n'ont pas encore travaillé calculent la nouvelle valeur de la sous-matrice.

Cette solution permet une répartition de mémoire et une répartition de charge de travail. Cependant, elle est loin d'être optimale car on continue d'effectuer séquentiellement les étapes 1 puis 2 et 3 et enfin 4 sur des processeurs différents. Pour équilibrer la charge de travail et faire en sorte qu'un maximum de processus soit actif à chaque phase, on montre qu'une bonne solution consiste à effectuer une *distribution cyclique* des blocs : on prend cette fois-ci  $n_B < n_p$ , et on associe successivement, par ligne et par colonne, un bloc à un processeur. Prenons par exemple une grille à  $2 \times 2 = 4$  processeurs identifiés par une couleur :

$0 = (0, 0)$	$1 = (0, 1)$
$2 = (1, 0)$	$3 = (1, 1)$

Une matrice  $M$  comprenant  $p_B = 5$  blocs en ligne et autant en colonne verra ses éléments répartis comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & m_{0,2} & m_{0,3} & m_{0,4} \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,0} & m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,0} & m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ m_{4,0} & m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Les avantages à chaque étape par rapport à la solution "naïve" sont les suivants :

- Pour la décomposition LU du bloc diagonal, un seul processus est actif, mais les communications des matrices triangulaires supérieures et inférieures aux lignes et aux colonnes sont limitées par le fait que certaines d'entre elles sont déjà dans le "bon" processeur ;
- Pour les inversions des étapes 2 et 3, tous les processeurs sont actifs, ainsi que pour les multiplications matrice-vecteur de l'étape 4. Et encore une fois, certains blocs n'ont pas à être transférés.

Cependant, la taille des blocs ne doit pas devenir trop petite, auquel cas le temps de transfert de nombreux petits paquets deviendrait prohibitif.

7. Cette distribution "ligne par ligne" des processeurs est appelée "par ligne dominante". C'est celle que nous utilisons dans notre programmation, mais nous aurions pu utiliser indifféremment celle par "colonne dominante".

En pratique, la mise en oeuvre de cet algorithme fait appel à une version parallèle de la bibliothèque LAPACK, appelée ScaLAPACK (pour Scalable LAPACK). On y retrouve des sous-routines parallèles de factorisation LU et d'inversion de systèmes linéaires, `pzgetrf` et `pzgetrs`, utilisables en “boîte noire”. ScaLAPACK est en effet basée sur le système MPI (ou “Message Passing Interface”, Interface de transfert de message), qui permet la définition d'un environnement de communication, puis l'échange de données et la réalisation d'opérations arithmétiques simples entre processeurs. Or, dans le cas des matrices pleines, nous avons vu que les communications et les opérations sur une ligne ou une colonne de processeurs sont très souvent utilisées. Dans cette optique, ScaLAPACK utilise la bibliothèque BLACS (pour Basic Linear Algebra Communication Subprograms) qui permet de définir directement une grille de processeurs bidimensionnelle et d'effectuer plus simplement ces tâches. Pour ce qui est du coeur de la bibliothèque ScaLAPACK, les opérations arithmétique de haut niveau sont assurées par la bibliothèque PBLAS, basée elle-même sur BLACS pour les communications, de même que LAPACK est basée sur sa version séquentielle BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms).

### 2.3.5 Vue générale de la programmation

Voyons maintenant comment l'appel aux sous-routines `pzgetrf` et `pzgetrs` s'insère globalement dans notre code de stabilité et dans le déroulement de l'algorithme d'Arnoldi. En séquentiel, la première tâche consistait à construire les matrices de stabilité  $A$  et  $B$  du problème discrétisé (2.70). En parallèle, il faut avant cela :

- définir un communicateur BLACS<sup>8</sup>  $C_{\text{BLACS}}$  et une grille, carrée dans notre cas, de  $n_p \times n_p$  processeurs ; à partir de là, nous pouvons raisonner sur un processeur courant  $P_p$  placé en  $(i_p, j_p)$  dans la grille, qui peut échanger des informations avec tous les autres processeurs de la grille ;
- donner la taille des blocs  $p_B$  suivant laquelle les matrices sont découpée ; si leur taille  $n_{\text{MAT}}$  est de l'ordre de  $10^4$ , on peut prendre comme valeur de base  $p_B = 128$ .
- calculer le nombre d'éléments  $n_p^{\text{elem}}$  et  $m_p^{\text{elem}}$  stockés en ligne et en colonne par le processeur  $P_p$ , via la sous-routine `NUMROC` de ScaLAPACK qui prend en argument  $n_{\text{MAT}}$ ,  $p_B$ , et  $i_p$  (ou  $j_p$ ) ;

Toutes les données de tailles relatives à la distribution cyclique par bloc (notamment  $C_{\text{BLACS}}$ ,  $n_{\text{MAT}}$ ,  $p_B$ ,  $n_p^{\text{elem}}$  et  $m_p^{\text{elem}}$ ) sont regroupées dans un descripteur<sup>9</sup> `descMAT`. Une fois cette étape franchie, le stockage des  $n_p^{\text{elem}} \times m_p^{\text{elem}}$  éléments de  $A$  et  $B$  dans le processeur  $P_p$  peut être effectué dans des matrices rectangulaires notées  $A_p$  et  $B_p$ . Pour chaque élément  $(i, j) \in \llbracket 1, n_{\text{MAT}} \rrbracket^2$  pris au sens global, nous déterminons s'il doit être stocké dans  $P_p$ . Si oui, nous calculons le couple d'indices  $(i_p^{\text{elem}}, j_p^{\text{elem}}) \in \llbracket 1, n_p^{\text{elem}} \rrbracket \times \llbracket 1, m_p^{\text{elem}} \rrbracket$  auquel il doit être placé. Attention : les matrices locales ainsi obtenues ne sont pas des sous-matrices à proprement parler, mais des matrices de stockage, qu'on peut à la rigueur additionner, mais qui doivent être passées en argument des routines de PBLAS et ScaLAPACK pour toute autre opération arithmétique.

Le coeur de notre programme réside alors dans une sous-routine appelée parallèlement par tous les processeurs et chargée de calculer  $p_{\text{vp}}$  valeurs propres et vecteurs propres par la méthode d'Arnoldi. Elle prend comme principaux arguments le communicateur  $C_{\text{BLACS}}$ , les matrices de stockage  $A_p$  et  $B_p$ , leur descripteur `descMAT`, la cible  $\omega_0$ . Schématiquement elle procède comme suit :

1. **Appel à la sous-routine `pzgetrf`** pour la factorisation LU parallèle de la matrice  $AAAs$  répartie sur les processeurs dans les matrices  $A_{\omega_0, p} = A_p - i\omega_0 B_p$ .
2. Soit  $n_{\text{AR}}$  le nombre maximum d'itérations dans la procédure d'Arnoldi.  
**Si  $P_p = 0$  :**
  - **Appel à la sous-routine `znaupd`** pour initialiser un premier vecteur  $Z$  de taille pour la construction du sous-espace de Krylov ;
  - **Envoi** de  $Z$  à tous les autres processeurs ;

8. En fait un entier

9. En fait un tableau d'entiers

**Sinon**, réception de  $Z$  depuis le processeur 0

3. **Tant que**  $i_{AR} \leq n_{AR}$  :

- (a) **Multiplication matrice-vecteur**<sup>10</sup>  $Y \leftarrow BZ$ . Résultat : vecteur de stockage  $Y_p$
- (b) **Appel à la sousroutine pzgetrs** pour effectuer  $Y \leftarrow A_{\omega_0}^{-1}Y$ . Résultat : vecteur de stockage  $Y_p$
- (c) **Recomposition** sur chaque processeur du vecteur global  $Y$  à partir des vecteurs de stockage  $Y_p$  (et communications sous-jacentes)
- (d) **Si**  $P_p = 0$  :
  - **Appel à la sousroutine znaupd** pour calculer le résidu  $\varepsilon_{AR}$  sur le sous-espace itéré — arguments principaux :  $Z$  et  $Y$  ;
  - **Si**  $\varepsilon_{AR}$  est inférieur à la tolérance admise, on sort (et on le fait savoir aux autres processeurs) ;
  - **Sinon** on incrémente  $i_{AR}$
  - **Sinon** on incrémente  $i_{AR}$

4. **Appel à la sousroutine zneupd** pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres convergés.

Cet algorithme diffère très peu de sa version séquentielle : il est en lui-même séquentiel, mais l'étape la plus coûteuse en temps (1) ainsi que les inversions (3.b) sont parallélisées et leur temps de calcul par conséquent fortement diminué. On pourra en revanche remarquer les complications dues aux allers-retours entre les vecteurs stockés et le vecteur global : à l'étape (3.c) pour reconstituer un vecteur global à partir du résultat de la multiplication par  $\tilde{A}$  stocké sur plusieurs processeurs (en fait ceux de la première colonne de la grille), et, implicitement, à l'étape (3.a), où la routine de multiplication matrice-vecteur employée effectue la conversion inverse. Cependant, comme ces opérations ne portent que sur  $n_{MAT}$  éléments au plus, elles restent négligeables en temps.

Quelques ordre de grandeur du temps de calcul : pour une discrétisation  $n \times M = 50 \times 100$  ( $n_{MAT} = 15000$ ), la décomposition LU séquentielle dure à elle seule 12'40" ; en parallèle, avec la taille de bloc  $p_B = 128$ , on obtient, pour le calcul complet, 4'58" sur 4 processeurs, 3'59" sur 9 processeurs, 2'39" sur 16 processeurs et 1'40" sur 64 processeurs. Par ailleurs, différentes valeurs de la taille de bloc  $p_B = \{8, 16, 32, 64, 128, 256\}$  ont été testées pour  $n_p^2 = 64$  processeurs, pour cette discrétisation et la discrétisation  $n \times M = 100 \times 100$  ( $n_{MAT} = 30000$ ). Les temps de calcul sont donnés en tables 2.2 et 2.3. L'optimum ne semble pas atteint au même endroit dans les deux cas : en effet, comme dit plus haut, si la taille de bloc est plus petite, il y a plus de décompositions LU de plus petite taille à effectuer sur plus de processeurs, mais les paquets de données à transférer entre processus, de plus petite taille également, deviennent plus nombreux et bloquent le processus parallèle. On sent donc que si cela n'est pas gênant pour  $p_B = 16$  avec des matrices de taille  $n_{MAT} = 10000$ ,

$p_B$	8	16	32	64	128	256
$n_B$	1976	938	470	235	118	59
$t_{CPU}$ (min)	1'10	0'58	1'18	1'39	1'40	1'39

TABLE 2.2 – Temps CPU pour le calcul d'un problème aux valeurs propres de discrétisation  $n \times M = 50 \times 100$  sur 64 processeurs

10. Cette opération prend en argument, sur chaque processeur, le vecteur global  $Z$  et la matrice de stockage locale  $B_p$ , et renvoie un vecteur de stockage  $Y_p$

$p_B$	8	16	32	64	128	256
$n_B$	3750	1876	938	470	235	118
$t_{\text{CPU}}$ (min)	8'59	8'06	7'54	12'59	12'18	11'06

TABLE 2.3 – Temps CPU pour le calcul d’un problème aux valeurs propres de discrétisation  $n \times M = 100 \times 100$  sur 64 processeurs

## 2.4 Modes de stabilité dépendants du maillage

### 2.4.1 Comparaison aux modes calculés en variables primitives

Regardons dans un premier temps l’allure des spectres calculés sur le domaine ( $X_{\text{in}} = 0, X_{\text{out}} = 10$ ) à  $\text{Re} = 3000$ , par comparaison avec ceux calculés en variables primitives et présentés en introduction. Pour une discrétisation donnée —ici  $N \times M = 50 \times 100$ —, l’allure des spectres ne change guère que l’on utilise la condition de sortie définissant un problème de stabilité bien posée (composante normale du tenseur des contraintes nulle) ou la condition de pression nulle. Il apparaît, comme dans le cas des calculs effectués en fonction de courant, une branche basse fréquence qui est indépendante de la condition de sortie et une branche haute fréquence constituée de valeurs propres dont la partie réelle est à peu près identique dans les trois cas de calcul considérés. De plus, les valeurs propres calculées en fonction de courant et en variables primitives avec pression nulle en sortie se superposent pratiquement, tandis que celles calculées avec la condition de sortie bien posée sont translatées vers les  $\hat{\omega}_i$  positifs, au point même que les modes les plus instables traversent l’axe réel. En outre, comme en fonction de courant, ces spectres dépendent fortement de la discrétisation axiale (figure 2.5). Par ailleurs, les fonctions propres calculées en variables primitives avec traction nulle en sortie connaissent une amplification axiale moins forte qu’en fonction de courant, mais toujours les mêmes oscillations et le même type de structures tourbillonnaires pariétales bien caractéristiques du VSP (figure 2.7). Cette modification est sans doute reliée à des valeurs moins négatives des parties imaginaires des fonctions propres associées. Enfin, nous retrouvons la même évolution des valeurs propres en fonction des paramètres du problème que dans [25], à savoir leur destabilisation marginale quand le nombre de Reynolds augmente et leur destabilisation plus prononcée quand la taille du domaine augmente (figure 2.6).

### 2.4.2 Perspectives pour l’étude de stabilité

L’utilisation des variables primitives ne permet donc pas d’améliorer la pertinence de l’analyse de stabilité de l’écoulement de Taylor-Culick. Au contraire, l’existence de trois jeux de valeurs propres de parties réelles similaires et de parties imaginaires variables laisse perplexe : s’il faut éliminer l’un d’entre eux, lequel ? Il avait été montré dans [25] que les modes calculés en fonction de courant peuvent être retrouvés par DNS : nous appliquerons donc au chapitre 5 la même méthodologie aux modes calculés en variables primitives avec condition de traction nulle en sortie.

À ce stade, il est intéressant de dresser la comparaison avec d’autres écoulements dont la stabilité globale a été étudiée par la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées —couche limite sur plaque plane [5, 73], zone de recirculation [4]—. Généralement, ces problèmes conduisent au calcul de spectres qui convergent assez facilement en maillage, mais dont les valeurs propres, toutes stables, dépendent très fortement de la longueur du domaine de calcul. Or, l’opérateur associé aux équations de stabilité est non-normal : dans ce cas, les valeurs propres peuvent être en fait très facilement destabilisées, par exemple par une petite modification de l’écoulement de base [86]. De plus, la recherche de perturbations optimales à partir des résultats de stabilité modale tendent à montrer que les modes propres pris séparément n’ont pas de pertinence physique. En revanche, leur

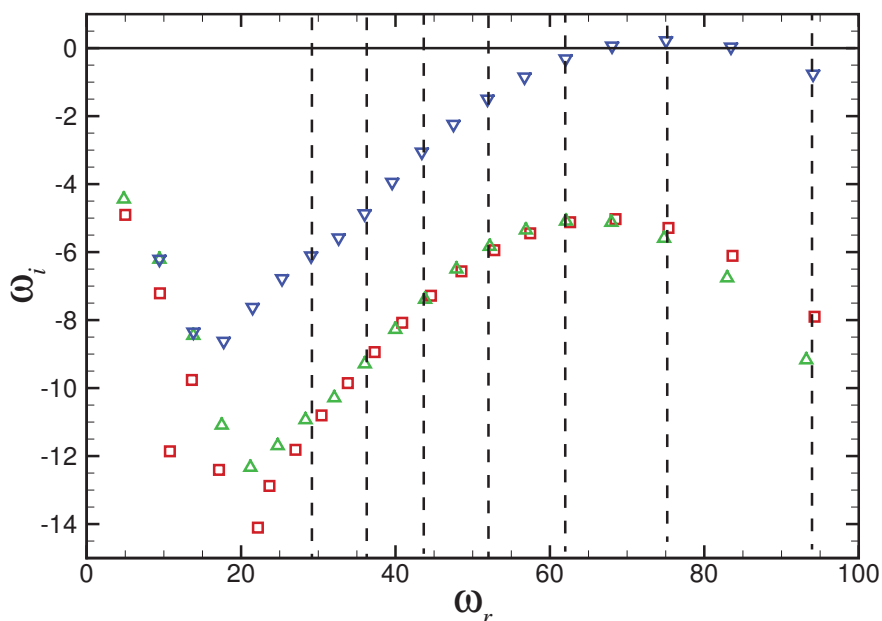


FIGURE 2.4 – Spectres calculés pour  $\text{Re} = 3000$ ,  $X_{\text{in}} = 0$  et  $X_{\text{out}} = 10$ , avec une valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ . Discrétisation :  $N \times M = 50 \times 100$ .  $\square$  : modes calculés en fonction de courant;  $\triangle$  : modes calculés en variables primitives, pression nulle imposée seulement en sortie;  $\nabla$  : modes calculés en variables primitives, condition de traction nulle en sortie. Les lignes pointillées tracées à  $\hat{\omega}_r = \text{cte}$  permettent de voir que les modes calculés des trois manières différentes ont à peu près la même pulsation réduite.

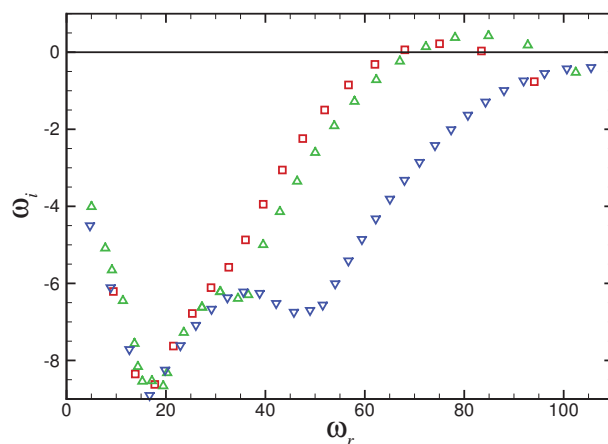


FIGURE 2.5 – Spectres calculés pour  $\text{Re} = 3000$ ,  $X_{\text{in}} = 0$  et  $X_{\text{out}} = 10$ , en variables primitives avec condition de traction nulle en sortie. Valeur propre-cible :  $\omega_0 = 60 + 10i$ . Discrétisation :  $N \times M = 50 \times 100$ .  $\square$  :  $N \times M = 50 \times 100$ ;  $\triangle$  :  $N \times M = 60 \times 100$ ;  $\nabla$  :  $N \times M = 100 \times 100$ .

superposition permet de décrire la physique du problème [77, 79]. C'est pourquoi ce sont de plus en plus les forçages optimaux conduisant à la plus forte excitation du système qui sont étudiés, plutôt que la stabilité modale de ceux-ci [4, 63, 19].

Pour illustrer le fait que la dynamique des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées ne sont pas gouvernées par leur *réponse modale*, mais plutôt par leur *réponse impulsionnelle* ou leur

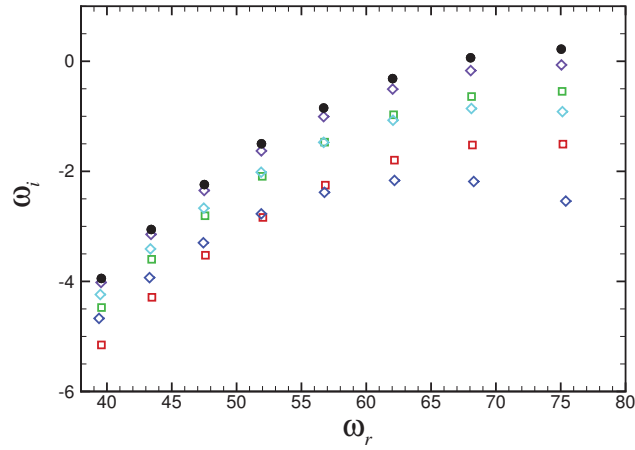
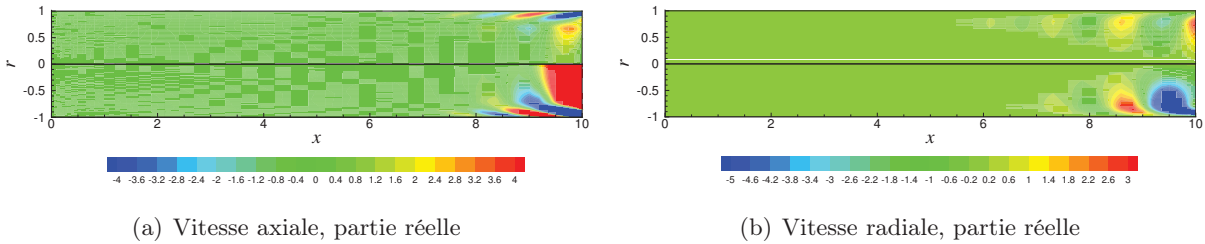


FIGURE 2.6 – Spectres calculés pour  $X_{\text{in}} = 0$  en variables primitives avec condition de traction nulle en sortie. Valeur propre-cible :  $\omega_0 = 60 + 10i$ . Discrétisation :  $N \times M = 50 \times 100$ .  $\square$  :  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 3000$ ;  $\square$  :  $X_{\text{out}} = 9$ ,  $\text{Re} = 3000$ ;  $\diamond$  :  $X_{\text{out}} = 10$ ,  $\text{Re} = 500$ ;  $\diamond$  :  $X_{\text{out}} = 10$ ,  $\text{Re} = 1000$ ;  $\diamond$  :  $X_{\text{out}} = 10$ ,  $\text{Re} = 2000$ ;  $\bullet$  :  $X_{\text{out}} = 10$ ,  $\text{Re} = 3000$ .



(a) Vitesse axiale, partie réelle

(b) Vitesse radiale, partie réelle

FIGURE 2.7 – Countours de fluctuations de vitesse pour  $X_{\text{in}} = 0$ ,  $X_{\text{out}} = 10$  et  $\text{Re} = 3000$ . Modes  $\hat{\omega} = 62.04 - 0.51i$  calculé en variables primitives avec condition de traction nulle en sortie (haut) et  $\hat{\omega} = 62.52 - 5.12i$  calculé en fonction de courant (miroir).

*réponse forcée*, Trefethen prend comme exemple un problème de stabilité d'advection-diffusion monodimensionnel simplifié, avec deux conditions aux limites, et dont le terme convectif est constant [85]. Il montre alors que le spectre de ce problème traduit la présence d'une branche de modes qui apparaissent comme discrets mais qui se rapprochent au point de former une branche continue quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Ce comportement est d'ailleurs très similaire à celui observé dans le cas de la stabilité globale de couche limite sur plaque plane [5, 73]. Or, l'écoulement de Taylor-Culick est tout sauf uniforme, ni même quasi-parallèle comme celui d'une couche limite ! C'est pourquoi, au chapitre suivant, nous repartons de l'analyse de Trefethen d'un problème monodimensionnel simplifié, mais en prenant cette fois-ci en compte un terme convectif uniformément accéléré comme l'est l'écoulement de base des MPS.

*Ce chapitre a permis de mettre en place les outils mathématiques et numériques utilisés pour l'analyse de stabilité linéaire globale des moteurs à propergol solide simplifiés. On s'est attaché à définir les problèmes de stabilité direct et adjoint bien posés, notamment en annulant en sortie la composante normale du tenseur des contraintes. La discrétisation se fait par collocation spectrale sur plusieurs domaines permettant de calculer des solutions continues et de dérivées partielles continues. Le solveur effectuant le calcul du problème aux valeurs propres discrétisé est parallélisé, afin de gagner en temps de calcul et d'augmenter le nombre de points de collocation utilisés. Des calculs préliminaires ont montré que ce solveur permettait de retrouver des modes de même fréquence que ceux obtenus par F. Chedevergne [25] et identifiés au VSP. Cependant, ces modes sont également caractérisés par une forte dépendance vis-à-vis de la discrétisation axiale. Il est donc légitime de se demander dans quelle mesure ces modes ne sont pas en réalité des pseudo-modes, et comment des instabilités peuvent se propager à des fréquences propres. Le chapitre suivant tente de répondre à ces questions du point de vue théorique.*





## Chapitre 3

# Stability and sensitivity analysis in a simplified Solid Rocket Motor flow

### 3.1 Résumé du chapitre

Ce chapitre est la transcription d'un article en cours de soumission, et porte sur les développements théoriques sous-jacents à l'analyse de stabilité globale des Moteurs à Propergol Solides simplifiés. Il montre en effet dans quelle mesure la non-normalité des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées pose des problèmes numériques pour le calcul des modes de stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick, en particulier à travers la question de la *robustesse des valeurs propres* et leur *pertinence physique*.

À ce titre, le rôle particulier de l'accélération uniforme de l'écoulement de base est étudié sur un problème de stabilité convectif-diffusif monodimensionnel. Cet exemple nous permet de cerner les difficultés numériques dues à la croissance polynomiale des fonctions propres imposée par l'accélération uniforme de l'état de base, à savoir la forte sensibilité des valeurs propres à une erreur numérique sur la condition aux limites d'entrée et l'existence de zones de non-convergence numérique pour les valeurs propres. De plus, nous montrons que celles-ci sont, contrairement au cas d'un état de base uniforme, indépendantes du nombre de Reynolds et de la taille du domaine d'intégration.

Fortes de ces résultats, nous abordons donc la stabilité globale de l'écoulement de Taylor-Culick sur un domaine tronqué en aval du fond avant, afin de nous affranchir des difficultés numériques observées en  $x = 0$  sur le problème simplifié. Contrairement au cas d'une analyse de stabilité portant sur le domaine entier, nous parvenons bien à obtenir des valeurs propres *discrètes et indépendantes du maillage employé*. Chaque mode de la branche la plus stable est identifié par un nombre de points singuliers où l'amplitude des fluctuations est nulle apparaissant sur ses fonctions propres, appelés *points amphidromiques*. L'identification intrinsèque de ces modes semble donc indiquer que chacun d'entre eux possède une signification physique, contrairement par exemple aux modes discrets de stabilité de couche limite dont l'existence est induite par l'imposition de limites arbitraires au domaine de calcul.

Enfin, une étude de sensibilité est menée sur ces modes globaux : sont étudiés l'influence d'une perturbation numérique sur les conditions aux limites, ainsi que celle d'un petit changement sur l'écoulement de base. Là encore, nous montrons que les zones de plus grande sensibilité sont situées près de l'entrée du domaine de calcul.

### 3.2 Introduction

In the past decade, the stability analysis of the incompressible Navier-Stokes equations has played a major role in the comprehension of the internal Pressure Oscillations occurring in large segmented Solid Rocket Motors (SRM) such as those of the European Ariane 5 launcher and the American Titan IV.

Earlier on, the Pressure Oscillations have been mostly related to the excitation of the specific acoustics of SRM as modelled by the acoustic balance methodology introduced by Culick [29] and enhanced by Flandro [37], Majdalani and Van Moorhem [60], and Majdalani *et al.* [38, 59, 61]. However, according to the experimental observations of Varapaev and Yagodkin [89] and Brown *et al.* [20], and the numerical simulations of Vuillot [90], several vortex shedding-driven instabilities were assumed to generate such pressure oscillations. Amongst them, the so-called “Parietal Vortex Shedding” (referred to as PVS) has appeared as a sparking factor in the generation of pressure oscillations at specific frequencies. Later on, the observed PVS has then been interpreted as the induced flow of an intrinsic hydrodynamic instability of the SRM internal flow, whose laminar part is well described by the analytical Taylor-Culick solution (Taylor [80], Culick [29]). A local approach, first introduced by Varapaev and Yagodkin [89] and reused by Griffond *et al.* [47] did show the existence of convectively amplified modes which shape was similar to the experimental PVS in the laminar zone of the motor. However, since this framework did not explain the frequency selection, BiGlobal stability modes were tentatively pursued by Chedevergne *et al.* [23] according to the general pioneering works of Theofilis [81]. Thanks to the imposed conditions at the front wall and the downstream boundary of the computational domain, a discrete branch of temporally stable modes appeared in the computed spectrum. The spatial features of the related eigenfunctions, namely the axial amplification and the radial profile of the velocity fluctuations, were consistent with experimental data, direct numerical simulations and results derived from the local approach. The frequencies obtained for a particular mesh showed a good agreement with those of the pressure oscillations observed on both real firings and cold-gas setups. However, the questionable dependence on the axial discretisation was never settled.

From a theoretical point of view, the classification of the Taylor-Culick flow in the categories introduced by Huerre [51] is not straightforward. On the one hand, the exhibited local convective instabilities and global temporally stable eigenmodes excited by external energy sources (mainly combustion noise and acoustic waves) are the main features of noise amplifiers. The encountered numerical issues are thus coherent with the usual effects of the non-normality of the linearised incompressible Navier-Stokes operator, namely the sensitivity to numerical errors of the eigenvalues and the non-orthogonality of the eigenvectors, as explained by Trefethen [86]. On the other hand, the Fourier analysis of the experimental instabilities exhibits several peaks of power spectral density that are close, but not equal, to the frequency of the axial acoustic modes (see Chedevergne *et al.* [26, 25]). This indicates that the pressure oscillations are associated to intrinsic frequencies as in oscillators flows. However, Chedevergne [25] rather describes the associated stability modes as *extrinsic instabilities*, since they are temporally damped and only appear thanks to an excitation source.

This paper aims at more precisely describing the dynamics of the internal flows of the solid rocket motors. As mentioned above, these ones can be compared first to noise amplifiers, which typical examples are the viscous boundary layer. In this respect, the works of Alizard *et al.* [5] and Åkervik *et al.* [73] indicate that the previously evoked non-normality implies that the system dynamics is driven by transient responses to an initial condition and pseudo-resonance to a global forcing. Correlatively, each isolated global eigenvalue does not have any physical significance because it noticeably depends on the size of the computational domain and it is very sensible to external disturbances. Conversely, a large superimposition of modes succeeds in recovering the global response obtained by computing the amplitude of the resolvent norm of the linearised incompressible Navier-Stokes operator—in other words its pseudospectrum—. That is why the stability analysis of noise amplifiers has been studied by the computation of optimal response to harmonic forcings in recent years (local analysis by Corbett and Bottaro [28], global analysis by Sipp *et al.* [79], and Monokrousos *et al.* [65], Brandt *et al.* [19]). From a theoretical point of view, the lack of physical relevance of the eigenvalues of the asymptotically stable flows driven by a convective-diffusive operator has been highlighted by Trefethen & Embree [85] on a simplified axial problem with constant convection velocity. If a sole inflow boundary condition is imposed, a continuous set of temporally stable eigenvalues appears in the spectrum, corresponding to orthogonal eigenfunctions. On the contrary, an additional outflow condition implies that discrete

non-orthogonal modes appear, which eigenvalues come closer when the viscosity vanishes or the computational domain is extended. In addition, these eigenvalues are proven to be very sensitive to external perturbations. However, the particular dynamics of the solid rocket motors flows might be due to a convective velocity that is not constant, but uniformly accelerated along the cylindrical duct. This linear dependence with respect to the axial coordinate comes from the uniform wall injection and appears explicitly in the analytical Taylor-Culick solution. Mathematically, temporally stable modes are still expected in spite of such a stronger convection, but their behaviour with respect to the viscosity or the extension of the computational domain must be further investigated, so as to conclude on the possible physical relevance of the modal approach.

In addition, special attention is paid on the correct computation of direct and adjoint eigenmodes, which eigenvalues shall coincide and which eigenvectors have opposite spatial amplification. Indeed, as developed in the pioneering article of Hill [50] and further used by Tumin [87], the direct and adjoint eigenvectors form a biorthogonal basis that is helpful to quantify the sensitivity to disturbances. In particular, such an analysis has been carried out by Bottaro *et al.* [17] to calculate the perturbation to the Couette flow that brings the largest destabilizing effect on the eigenvalues. In the present case, the effect of numerical errors applied to the boundary conditions and small disturbances added to the base flow are investigated so as to describe where the effects of non-normality hold.

The paper proceeds hereafter as follows. First (§2), a simplified convective-diffusive operator with uniformly accelerated convection velocity is studied : approximate eigenmodes and  $\varepsilon$ -pseudospectra subsets are analytically calculated, and then compared with numerical integration results. The sensitivity to disturbances is also presented so as to illustrate the effects of non-normality (§3). Then (§4), the global stability of the Taylor-Culick flow is performed, and the influence of the Reynolds number and the extent of the computational domain is investigated. Finally (§5), the boundary conditions and base flow sensitivities of the global eigenvalues are calculated.

### 3.3 A convective-diffusive simplified case

#### 3.3.1 Direct and adjoint equations

Let  $\mathcal{L}^2([0, 1])$  be the set of the complex functions of bounded square integral on the interval  $[0, 1]$ , and

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u^*(x)v(x)dx \quad (3.1)$$

be the hermitian inner product for each  $u, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ; here superscript (\*) stands for the complex conjugate. Let also  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  be the related quadratic norm of the function  $u$ . For any operator  $\mathcal{A}$  mapping  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  into itself, its induced norm is defined as

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|\mathcal{A}u\|}{\|u\|}. \quad (3.2)$$

Its adjoint operator  $\mathcal{A}^\dagger$  is defined by the relation (3.3)

$$\forall \hat{u}, \tilde{u}, \quad \langle \tilde{u}, \mathcal{A}\hat{u} \rangle = \langle \mathcal{A}^\dagger \tilde{u}, \hat{u} \rangle \quad (3.3)$$

where  $\hat{u}$  and  $\tilde{u}$  denote the direct and adjoint eigenfunctions respectively.

Now we consider the convective-diffusive eigenvalue problem

$$\mathcal{A}\hat{u} - i\omega\hat{u} = 0 \quad \text{with} \quad \mathcal{A}\hat{u} = -\frac{1}{\text{Re}}\hat{u}'' + x\hat{u}' \quad (3.4)$$

and the homogeneous boundary conditions

$$\hat{u}(0) = 0, \quad \hat{u}'(1) = 0 \quad (3.5)$$

Here the superscript ' stands for the derivative with respect to  $x$ . In expression (3.4),  $\text{Re}$  stands for a Reynolds number by analogy with the viscous term of the linearised incompressible Navier-Stokes equations. The first derivative term  $x\hat{u}'$  represents the convection of the eigenfunctions by a uniformly accelerated velocity as in solid propellant rocket motors. In the same way, boundary conditions in Equation (3.5) are called "inlet" ( $x = 0$ ) and "outlet" ( $x = 1$ ) conditions since they are analogous to the boundary conditions which will be used in the global stability problem in section 3.5. Note that this problem might have been defined for  $x \in [0, X_{\text{out}}]$  with  $X_{\text{out}} > 0$ . The current definition would have been recovered by changing  $x$  into  $x/X_{\text{out}}$  and  $\text{Re}$  into  $\text{Re}X_{\text{out}}^2$ .

Then, if  $\hat{u}$  and  $\tilde{u}$  are a couple of direct and adjoint eigenfunctions related to the eigenvalues  $\hat{\omega}$  and  $\tilde{\omega}$ , then the *Lagrange Identity* can be derived by integration by parts as introduced by Hill [50] :

$$\langle \tilde{u}, (\mathcal{A} - i\hat{\omega})\hat{u} \rangle - \langle (\mathcal{A}^\dagger - i\tilde{\omega})\tilde{u}, \hat{u} \rangle = - [\text{Re}^{-1}\hat{u}'\tilde{u}^*]_0^1 + [\text{Re}^{-1}\hat{u}\tilde{u}'^*]_0^1 + [\hat{u}\tilde{u}^*]_0^1 - i(\tilde{\omega}^* + \hat{\omega})\langle \tilde{u}, \hat{u} \rangle \quad (3.6)$$

where

$$\mathcal{A}^\dagger\tilde{u} = -\frac{1}{\text{Re}}\tilde{u}'' - x\tilde{u}' - \tilde{u}' \quad (3.7)$$

Accounting for the boundary conditions of the direct problem, the operator  $\mathcal{A}^\dagger$  defines the adjoint problem  $\mathcal{A}^\dagger\tilde{u} - i\tilde{\omega}\tilde{u} = 0$  if it is associated to the boundary conditions

$$\tilde{u}(0) = 0, \quad \frac{1}{\text{Re}}\tilde{u}'(1) + \tilde{u}(1) = 0 \quad (3.8)$$

and if  $\tilde{\omega} = -\hat{\omega}^*$ . As shown in section 3.7, the direct eigenvalues read  $\hat{\omega} = i\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ . Conversely, for a couple of direct and adjoint eigenvectors  $\hat{u}_{\hat{\omega}}$  and  $\tilde{u}_{\tilde{\omega}}$ , verifying the conditions (3.5) and (3.8) respectively, and related to distinct eigenvalues such as  $\hat{\omega} \neq \tilde{\omega}^*$ , the Lagrange identity implies that  $\langle \tilde{u}_{\tilde{\omega}}, \hat{u}_{\hat{\omega}} \rangle = 0$ . As a consequence, the direct and adjoint eigenvectors form a biorthogonal set of  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ . In addition, its non-normality can be quantified by the ratio  $\zeta = \|\tilde{u}\| \|\hat{u}\| / \langle \tilde{u}, \hat{u} \rangle$  (Sipp *et al.* [79]). The closer to 1, the less non-normal the operator; on the contrary,  $\zeta$  is typically much larger than 1 when the direct and adjoint eigenfunctions are strongly amplified in opposite directions. This is called the *convective non-normality*.

### 3.3.2 Matched asymptotic developments

The eigenvalue problem (3.4) is very similar to one of those analysed by Trefethen [85], pp. 175-180, to illustrate the effects of non-normality. The main difference is the shape of the convective term, constant in his example but uniformly accelerated in the present paper. Even if this problem cannot be directly solved, an approximate solution is sought for as a matched asymptotic expansion for large Reynolds numbers in the present paper. Firstly, one can show that the eigenvalues all must be located on the negative part of the imaginary axis (see section 3.7). Then, the viscous effects are expected to be negligible on a large part  $[0, a], a > 0$  of the domain and the eigenfunctions  $\hat{u}$  to be similar to the solutions  $u(x) = x^{i\omega}, \Im(\omega) < 0$  of the non-viscous problem  $\{xu' - i\omega u = 0; u(0) = 0\}$ . Therefore  $\hat{u}$  can be approximated by the  $N^{\text{th}}$ -order expansion  $\hat{u}(x) \approx U_N(x) = u_0(x) + \text{Re}^{-1}u_1(x) + \dots + \text{Re}^{-N}u_N(x)$  with respect to the small parameter  $\text{Re}^{-1}$ . As shown in section 3.7, a set of  $N$  approximate eigenvalues denoted as  $\Lambda_N(\mathcal{A}) = \{-(2m+1)i, m = 0 \dots N\}$  is obtained together with the  $N$  following eigenfunctions

$$\left\{ U_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(2m+1)!}{(2(m-n)+1)! n! (-2\text{Re})^n} x^{2(m-n)+1} \right\}_{m=0, \dots, N} \quad (3.9)$$

that exactly verify equation (3.4) and  $\hat{u}_m(0) = 0$ . The above eigenvalues are all located on the negative part of the imaginary axis, as shown in section 3.7, and the related eigenfunctions are growing polynomially with  $x$ . They are called *external solutions* by analogy with the external part of a boundary layer where the viscous effects are neglected. Note that each of these solutions can be interpreted

as a sum of solutions of the non-viscous problem, but the viscosity plays a role in the selection of the eigenmodes. Finally, the viscous effects also modify the eigenfunctions close to  $x = 1$  where the outflow boundary condition must be satisfied. Therefore, an *internal solution* is calculated thanks to the variable change  $\hat{v}(X = \text{Re}(1 - x)) = \hat{u}(x)$  which aims at precisely modelling the sharp variations of the eigenfunctions close to  $x = 1$ . Once again  $\hat{v}$  is expanded up to a given order  $K$  as  $\hat{v}(X) \approx U_K(X) = v_0(X) + \text{Re}^{-1}v_1(X) + \dots + \text{Re}^{-K}v_K(X)$ . One shows in section 3.7 that  $V_K$  is separated into two terms denoted as  $V_{K,1}$  and  $V_{K,2}$ .  $V_{K,1}$  is a polynomial function of  $X$  and  $\text{Re}$  and is identified to the  $m^{\text{th}}$  internal eigenfunction  $U_m$  if  $K = 2m + 1$ , and therefore verifies Equation (3.4) and the inflow boundary condition.  $V_{K,2}$ , that exactly satisfies Equation (3.4) and the outflow boundary condition, can be expressed as

$$\hat{v}_{K,2}(X) = \left( \sum_{k=0}^K Q_k(X) \right) e^{-X}. \quad (3.10)$$

where each  $Q_k$  denotes a set of polynomial functions of degree  $2k - 2$ . As a conclusion, since the above asymptotic expansions are valid whatever is chosen the order  $N$  of the external solution, a complete set of approximate eigenvalues  $\Lambda(\mathcal{A}) = \{-(2m + 1)i, m \in \mathbb{N}\}$  related to the eigenfunctions

$$\left\{ \hat{u}_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(2n + 1)! x^{2(m-n)+1}}{n! (-2\text{Re})^n} + \left( \sum_{k=0}^{2m+1} Q_k(\text{Re}(1 - x)) \right) e^{\text{Re}(x-1)} \right\}_{m \in \mathbb{N}} \quad (3.11)$$

is obtained. The latter ones are exact solutions of the eigenvalue problem (3.4) on the domain, they fit to the imposed outflow boundary condition, but they add an exponentially small error of order  $e^{-\text{Re}}$  to the inflow boundary condition. Contrary to Trefethen's example where the eigenvalues close up when the viscosity vanishes, the above eigenmodes remain well separated whatever the Reynolds number and do not depend on the outflow boundary condition. From a mathematical standpoint, this is a consequence of the uniform acceleration of the convective term that allows to calculate a non-trivial external expansion with the boundary condition  $\hat{u}(0) = 0$ .

Further comparison may be drawn about the robustness of the obtained eigenvalues, since the eigenmodes of non-normal operators are well known to be very sensitive to small disturbances. In order to quantify this lack of robustness, the  $\varepsilon$ -pseudospectrum of the considered eigenvalue problem  $(\mathcal{A} - i\hat{\omega})\hat{u} = 0$ , denoted as  $\Lambda_\varepsilon(\mathcal{A})$  can be introduced. According to Trefethen [85], the following definitions

$$\Lambda_\varepsilon(\mathcal{A}) = \{ \hat{\omega} \in \mathbb{C} \text{ such as } \hat{\omega} \in \Lambda(\mathcal{A} + \mathcal{E}), \|\mathcal{E}\| \leq \varepsilon \} \quad (3.12)$$

$$= \left\{ \hat{\omega} \in \mathbb{C} \text{ such as } \frac{\|(\mathcal{A} - i\hat{\omega})u\|}{\|u\|} \leq \varepsilon \text{ for some } u \right\} \quad (3.13)$$

are equivalent. In particular, definition (3.12) indicates that if a disturbance of order  $\varepsilon$  is added to the operator  $\mathcal{A}$ , its eigenvalues are likely to be disturbed of at least  $\varepsilon$ , since the inclusion  $\{ \hat{\omega} \in D(\hat{\omega}_0, \varepsilon), \hat{\omega}_0 \in \Lambda(\mathcal{A}) \} \subset \Lambda_\varepsilon(\mathcal{A})$ , where  $D(\hat{\omega}, \varepsilon)$  is the open disk of centre  $\hat{\omega}$  and radius  $\varepsilon$ , is always true. The current example aims at showing that the reciprocal inclusion property is false for non-normal operators. For this purpose, definition (3.12) is rather used. Let us then consider the external asymptotic expansion  $U_N$  calculated for a fixed order  $N$  and  $\hat{\omega} \notin \Lambda(\mathcal{A})_N$ . If  $-\Im(\hat{\omega}) > 2N + 3/2$ , then the norm of the residual function  $r_N(\hat{\omega}) = (\mathcal{A} - i\hat{\omega})U_N$  expressed in Equation (3.42) can be evaluated and  $U_N$  verifies the inflow boundary condition. In particular, one obtains

$$\frac{\|r_N(\hat{\omega})\|}{\|U_N\|} = \frac{2c_{N+2}(\hat{\omega})}{(2\text{Re})^{N+1} N! \|U_N\|} \int_0^1 x^{-2\Re(\hat{\omega})-4N-4} dx \quad (3.14)$$

Therefore, for a given  $\varepsilon$ , the subset

$$\Lambda'_\varepsilon(\mathcal{A}) = \left\{ \hat{\omega} \in \mathbb{C} / \frac{\|r_N(\hat{\omega})\|}{\|U_N\|} \leq \varepsilon, \Im(\hat{\omega}) < -(2N + 3/2) \right\} \quad (3.15)$$

of the  $\varepsilon$ -pseudospectrum  $\Lambda_\varepsilon(\mathcal{A})$  can be calculated. In particular, the subset  $\Lambda'_{\varepsilon_M}(\mathcal{A})$  where  $\varepsilon_M$  is the machine accuracy is a zone of the complex plane where no discrete eigenvalue can be calculated. As shown in Figure 3.1, such a zone appears for a given Reynolds number if the approximation order is large enough (say  $N = 10$  for  $\text{Re} = 200$ ), and at a given order if the Reynolds number is large enough ( $\text{Re} = 500$  for  $N = 6$  for instance). In other words, there is a zone of the complex plane where no discrete eigenvalue is expected to be found numerically; this zone moves towards the real axis when the Reynolds number increases.

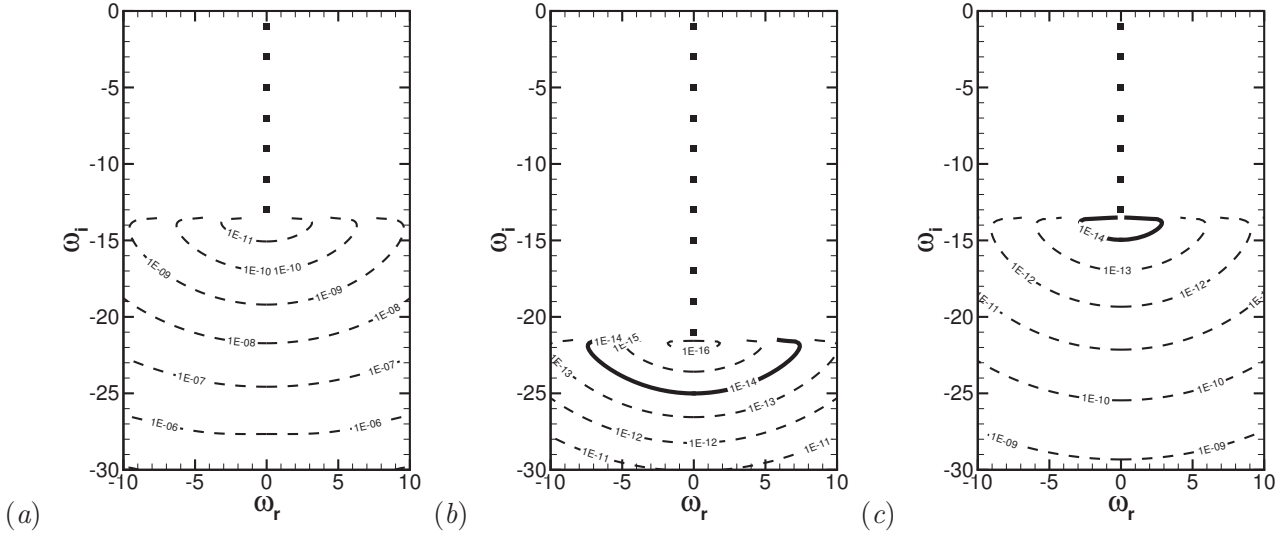


FIGURE 3.1 – Eigenvalues of the  $N^{\text{th}}$ -order approximation of the direct eigenvalue problem ( $\blacksquare$ ) and level lines of its resolvent norm (---) for various Reynolds numbers. The particular line (—) defines the zone where the resolvent norm is lower than the numerical accuracy  $\varepsilon_M \approx 10^{-14}$  and where no eigenvalue can be computed. (a) :  $\text{Re} = 200$  —  $N = 6$ ; (b) :  $\text{Re} = 200$  —  $N = 10$ ; (c) :  $\text{Re} = 500$  —  $N = 6$

## 3.4 Numerical resolution

### 3.4.1 Comparison with the asymptotic development

The initial direct and adjoint eigenvalue problems (3.4)-(3.5) and (3.7)-(3.8) are solved numerically using a spectral collocation method [21]. The obtained generalized matrix eigenvalue problems are solved using the QZ algorithm implemented in the MATLAB function `eig`.

Some results expected through the study of the approximate solution of the direct eigenvalue problem are firstly confirmed. The computed eigenvalues generally match more closely to those analytically predicted in (3.9) when the Reynolds number is increased. Note that the ten closest eigenvalues from the real axis match almost perfectly as soon as the Reynolds number is larger than 100 (Figure 3.2). Conversely, non-convergence zones for  $\Im(\hat{\omega}) < -20$  at  $\text{Re} = 200$  and  $\Im(\hat{\omega}) < -13$  at  $\text{Re} = 500$  also appear as predicted in Figure 3.1, since the computed eigenvalues are not pure complex negative in this zone though they should. Then, the comparison between the computed solution, the external expansion (3.9) and the full analytic solution (3.11) is depicted in Figure 3.3. The external asymptotic development matches the numerical solution on most of the domain but a thin zone near  $x = 1$  that is narrower when the Reynolds number increases. If the outflow correction (3.9) is added, the numerical solution is recovered by the full analytical solution (3.11). Finally, the adjoint eigenfunctions appear to be of negligible amplitude on a large zone near  $x = 1$  —even more negligible than the direct ei-



genfunctions in the neighbourhood of  $x = 0$  that are dominated by a polynomial evolution. In the vicinity of  $x = 0$ , the larger order  $m$  of the mode, the more narrow oscillations on a constant distance. In addition, the width of this oscillation zone decreases for a larger Reynolds number.

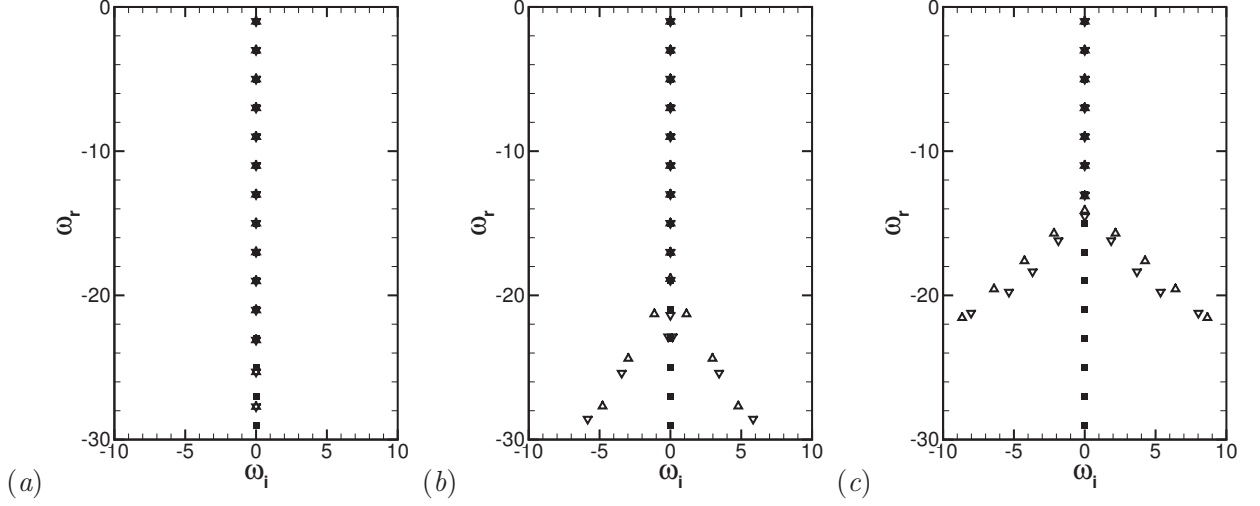


FIGURE 3.2 – Comparison between the theoretical eigenvalues of the direct problem and the computed direct and adjoint eigenvalues, for various Reynolds numbers. ( $\blacksquare$ ) : analytical solution.  $\blacktriangle$  : computed direct eigenvalues ;  $\blacktriangledown$  : computed adjoint eigenvalues — discretisation by spectral collocation method,  $N = 200$  points. (a) :  $\text{Re} = 100$  ; (b) :  $\text{Re} = 200$  ; (c) :  $\text{Re} = 500$

### 3.4.2 Sensitivity to disturbances

Here the influence of small disturbances of amplitude  $\varepsilon \ll 1$  is investigated. If  $(\hat{\omega}, \hat{u})$  is an exact direct eigenpair,  $(\tilde{\omega}, \tilde{u})$  its related adjoint solution such as  $\tilde{\omega} = -\hat{\omega}^*$ , then let  $(\hat{\omega} + \varepsilon\delta\hat{\omega}, \hat{u} + \varepsilon\delta\hat{u})$  be the solution to the disturbed direct problem

$$[\mathcal{A} + \varepsilon\delta\mathcal{A} - i(\hat{\omega} + \varepsilon\delta\hat{\omega})](\hat{u} + \varepsilon\delta\hat{u}) = 0 \quad (3.16)$$

with boundary conditions that are also possibly disturbed :  $\hat{u}(0) + \varepsilon\delta\hat{u}(0) = \varepsilon u_0$  and  $\hat{u}'(1) + \varepsilon\delta\hat{u}'(1) = \varepsilon u_1$ . Note that in the definitions above, the disturbances applied upon the operator can be of both numerical or physical origin. On the contrary, the boundary conditions are only expected to be disturbed numerically, particularly if the condition  $\hat{u}(0) = 0$  is imposed, so that the machine accuracy  $\varepsilon_M = 10^{-14}$  must necessarily be taken into account. The Lagrange Identity (3.6), linearised with respect to  $\varepsilon$ , yields the following relation between the disturbed eigenvalue and each separate disturbance :

$$\delta\hat{\omega} = i \left( -\frac{\int_0^1 \delta\mathcal{A}\hat{u}\tilde{u}^*(x)dx}{\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle} + \frac{(\delta\hat{u}(0)\tilde{u}'^*(0) - \delta\hat{u}'(1)\tilde{u}^*(1))}{\text{Re} \langle \tilde{u}, \hat{u} \rangle} \right). \quad (3.17)$$

This relation can be formally rewritten as  $\delta\hat{\omega} = \sum(\nabla_{f_i}, \delta f_i)$  where the  $\nabla_{f_i}$  are the sensitivity functions with respect to the parameters  $f_i$ .

In particular, the sensitivity functions related to disturbances on the boundary conditions read directly

$$\nabla_{\hat{u}(0)}(x) = -i\text{Re}^{-1}\tilde{u}'^*(0)\delta_D(x)/(\tilde{u}, \hat{u}), \quad (3.18)$$

$$\nabla_{\hat{u}'(1)}(x) = -i\text{Re}^{-1}\tilde{u}^*(1)\delta_D(x-1)/(\tilde{u}, \hat{u}). \quad (3.19)$$

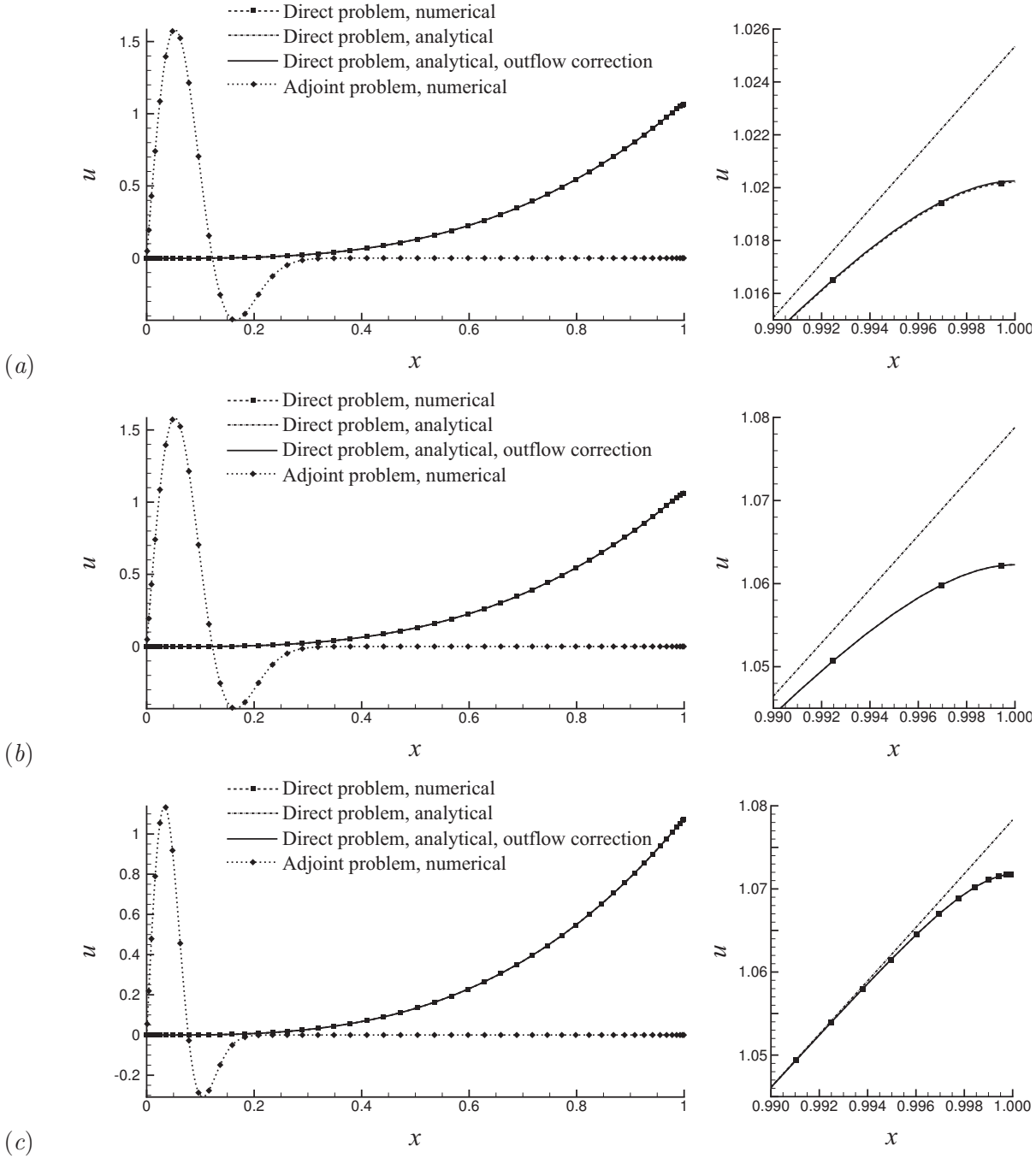


FIGURE 3.3 – Eigenfunctions of the direct and adjoint eigenvalue problems; the direct eigenfunctions are normalized by  $\hat{u}(0.97)$  and the adjoint ones are normalized by  $\hat{u}(0.03)$ . The approximate direct eigenfunctions, given in Equation. (3.53), are plotted as a comparison. (a) : mode  $\hat{\omega} = -i$ ,  $\text{Re} = 200$ ; (b) : mode  $\hat{\omega} = -3i$ ,  $\text{Re} = 200$ ; (c) : mode  $\hat{\omega} = -3i$ ,  $\text{Re} = 500$ .

where  $\delta_D$  is the Dirac function. Note that the convective non-normality plays a large part in the amplitude of the sensitivity functions that are proportional to  $1/\langle \tilde{u}, \hat{u} \rangle$ . Indeed, as depicted in Figure 3.3, the direct and adjoint eigenfunctions reach their maximum amplitude in opposite zones of the domain, so that  $\langle \tilde{u}, \hat{u} \rangle / \|\tilde{u}\| \|\hat{u}\|$  is small. More particularly, the large sensitivity of the inflow boundary condition is mostly due to the variations of the adjoint eigenfunctions near  $x = 0$ . As depicted on Figure 3.4, it increases with the Reynolds number and the order of the considered eigenmode, and possibly reaches

the inverse of the machine accuracy even for the first eigenmodes. This result can be related to the existence of non-convergence zones for the spectrum and large areas of the complex plane nested into the  $\varepsilon$ -pseudospectra : as an example, for a given disturbance of magnitude, say,  $\varepsilon = 10^{-10}$ , the eigenvalue related to the mode  $\hat{\omega} = -9i$  can undergo an amplitude shift  $\varepsilon\delta\hat{\omega} = 1$ . On the contrary, the sensitivity function of the outflow boundary condition is proportional to  $\tilde{u}^*(1)$  that is exponentially small because of the upstream growth of the adjoint eigenfunctions. Numerically,  $\delta\hat{\omega}$  has been computed in this case and is of the order of the machine accuracy as soon as  $Re = 50$ . This is coherent with the fact that the approximate analytical solutions actually do not depend on this outflow condition.

In addition, small disturbances on the Reynolds number and the base state can be considered. The related sensitivity functions read

$$\nabla_{Re}(x) = -i \frac{\hat{u}''(x)\tilde{u}(x)}{Re(\tilde{u}, \hat{u})} = i \frac{x(\hat{u}'(x) - i\omega\hat{u}'(x))\tilde{u}(x)}{(\tilde{u}, \hat{u})} \quad (3.20)$$

$$\nabla_U(x) = i \frac{\tilde{u}'(x)\hat{u}(x)}{(\tilde{u}, \hat{u})} \quad (3.21)$$

On the one hand, the influence of Reynolds number variations is expected to be very small for the considered viscosities. Indeed, the adjoint eigenfunction  $\tilde{u}$  is exponentially decreasing when  $x$  tends towards 1, and, according to the approximate solution exhibited in the absence of outflow condition for high Reynolds numbers, the term  $\hat{u}'(x) - i\omega\hat{u}'(x)$  is expected to be negligible everywhere but close to  $x = 1$ . Numerically, this sensitivity is larger for higher order modes, but remains negligible so long as the eigenmodes are not in the non-convergence zone. On the other hand, the influence of perturbations on the base state are expected to be larger near the inflow boundary condition, where the product  $\tilde{u}'(x)\hat{u}(x)$  is expected not to be negligible. Besides, Figure 3.5 shows that zones of noticeable sensitivity are located near  $x = 0$  and become thinner when the Reynolds number increases, with a larger maximum peak that gets closer to zero. However, the amplitude of these sensitivity functions are not exponentially large as in the case of a disturbed inflow boundary condition.

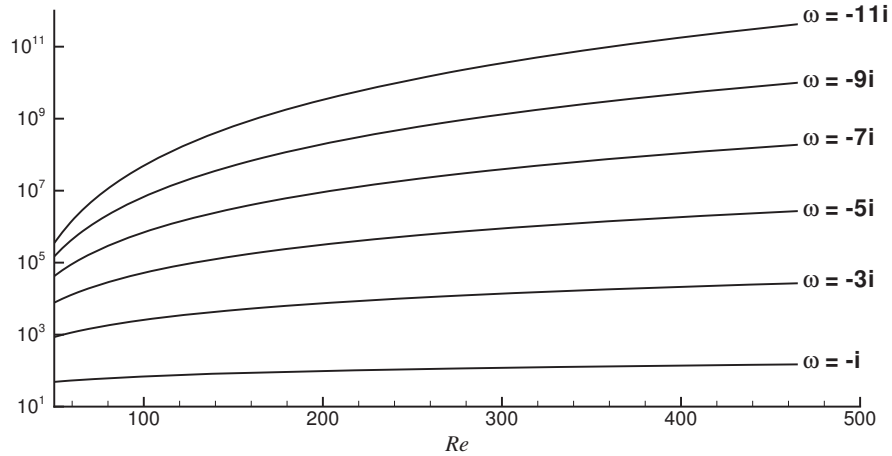


FIGURE 3.4 – Evolution of the sensitivity function  $\nabla_{\hat{u}(0)}$  related to a disturbance on the boundary condition at  $x = 0$  for a varying Reynolds number. The first five eigenmodes are considered. The  $y$ -axis scale is logarithmic.

### 3.4.3 Discussion

The study of this convective-diffusive eigenvalue problem with accelerated convection reveals two numerical issues due to its non-normality and one fundamental result. First, the direct (respectively

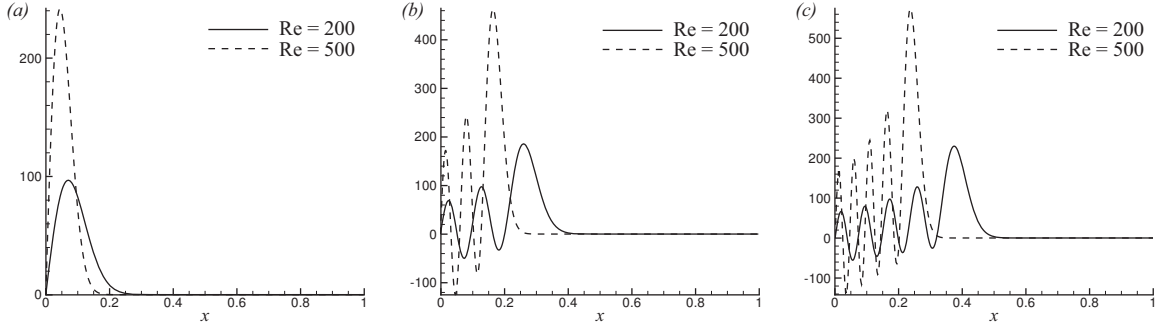


FIGURE 3.5 – Spatial evolution of the sensitivity function related to base state disturbances  $\nabla_U$  for various Reynolds numbers. (a) : mode  $\hat{\omega} = -i$ ; (b) : mode  $\hat{\omega} = -5i$ ; (c) : mode  $\hat{\omega} = -9i$ . The number of oscillations is directly correlated to the order of the considered mode.

adjoint) eigenfunctions are hugely amplified in the downstream (respectively upstream) direction. This leads to narrow zones of large variations with extension that is typically proportional to the inverse of the Reynolds number. Therefore, the outflow area must be carefully discretised for a numerical integration of the direct problem, and even more the inflow zone for the adjoint problem. Secondly, the existence of large  $\varepsilon$ -pseudospectra areas around the eigenvalues and non-convergence zones appears to be almost exclusively tied up with the sensitivity on the inflow boundary condition for the direct problem. Yet, two parameters are involved here : the axial decay along  $x$  of the adjoint eigen functions (the higher order mode, the faster decay) and their variations close to  $x = 0$  that are sharper when the Reynolds numbers is larger. Therefore, the solution presented in the following section consists in computing the full global eigenmodes of the linearised incompressible Navier-Stokes equations on a sub-domain  $[X_{in}, X_{out}]$ , with  $X_{in} > 0$  so as to reduce the domain length, avoid the potential singularity of the eigenfunctions at  $x = 0$  and restrict the sensitivity to the inflow boundary layer.

Finally, this study provides a result of particular interest : the independence of the eigenvalues with respect to the Reynolds number —and correlatively to the domain length. This is completely different from the case provided by Trefethen & Embree [85], where the eigenvalues tend to be closer when the Reynolds number increases, so that the infinite-Reynolds limit would be a continuous branch of eigenvalues that is coherent with the resolution of the inviscid problem. In the present case, the singular behaviour of the inviscid problem at  $x = 0$  partly allows the calculation of the proposed asymptotic expansion, and the existence of eigenvalues that theoretically remain well separated whatever the Reynolds number is. The global stability problem is therefore expected to exhibit discrete modes that are supposed to explain the modal physics of the measured pressure oscillations in large solid rocket motors.

## 3.5 Global stability of a simplified Solid Rocket Motor

### 3.5.1 Direct and adjoint problems

In this section, the hydrodynamic instabilities that occur in simplified Solid Rocket Motors (SRM) with cold-gas normal wall injection are investigated. We consider a cylindrical duct of unitary radius  $R = 1$  and length-to-radius aspect ratio  $X_f$ . The non-dimensional axial and radial coordinates are denoted as  $x$  and  $r$ ; the mean and the unsteady components of the flow are supposed to be axisymmetric, so that the azimuthal coordinate  $\theta$  will not be used. The fluid domain is a part of this duct delimited by the inflow and outflow reduced abscissae  $X_{in}$  and  $X_{out}$ , so that  $(x, r)$  belong to  $[X_{in}, X_{out}] \times [0, 1]$ . The parietal fluid injection induces a constant and uniform wall velocity  $V_{inj}$  that is the reference velocity used for non-dimensionalisation. The reference pressure, density and kinetic viscosity  $p_0, \rho_0$

and  $\mu_0$  are those evaluated at the head-end  $x = 0$ . In this respect, the parietal Reynolds number  $\text{Re} = \rho_0 V_{\text{inj}} R / \mu_0$  is again introduced to characterize the viscosity effects. Let also  $\mathbf{U} = (U_x, U_r)$  be the laminar Taylor-Culick steady base velocity that usually approximates the internal SRM flows, and that reads

$$U_x(x, r) = \pi x \cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \quad \text{and} \quad U_r(x, r) = -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \quad (3.22)$$

Note that, as in the previous simplified case, the average flow is uniformly accelerated. The small unsteady perturbations  $(p', \mathbf{u}')$  to this base state are sought for as  $(p', \mathbf{u}') = (\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})e^{-i\hat{\omega}t}$ , with  $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_x, \hat{u}_r)$  for axisymmetric disturbances and  $\hat{\omega}$  the complex circular frequency of the normal-mode disturbances. In these conditions, the non-dimensional linearised incompressible Navier-Stokes equations are written as

$$\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = i\hat{\omega}\mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}), \quad (3.23)$$

where  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are the spatial and temporal operators

$$\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \\ -\frac{1}{\text{Re}}\Delta\hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \nabla\hat{p} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

The boundary conditions shall ensure that the weak form of the above system is well posed : the velocity fluctuations are set equal to zero at the inlet and the wall, simple symmetry conditions are imposed on the axis, and the normal component of the tensor  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\text{Re}}(\nabla\hat{\mathbf{u}} + \alpha_{\text{out}}\nabla\hat{\mathbf{u}}^T) + \beta_{\text{out}}\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U}^T + \hat{p}\boldsymbol{\delta} \quad (3.25)$$

is set equal to zero at the outflow. In the above expression, superscript  $T$  denotes the transpose matrix, and  $\alpha_{\text{out}}$  and  $\beta_{\text{out}}$  are additional parameters. Since the flow is incompressible, the whole definition of the viscous stress tensor can be written ( $\alpha_{\text{out}} = 1$ ) or can be simplified by canceling the transpose velocity gradient. Furthermore, a fraction of the convective term  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U}^T$  can be added by choosing parameter  $\beta_{\text{out}}$  between 0 and 1/2 without loss of wellposedness. To sum up, one obtains

$$\begin{aligned} \partial_r \hat{p}(x, 0) = \partial_r \hat{u}_x(x, 0) = \hat{u}_r(x, 0) &= 0 \quad \forall x \in [X_{\text{in}}, X_{\text{out}}] \\ \hat{\mathbf{u}}(X_{\text{in}}, r) &= 0 \quad \forall r \in [0, 1] \\ \hat{\mathbf{u}}(x, 1) &= 0 \quad \forall x \in [X_{\text{in}}, X_{\text{out}}] \\ \boldsymbol{\sigma}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_x(X_{\text{out}}, r) &= 0 \quad \forall r \in [0, 1] \end{aligned} \quad (3.26)$$

where  $\mathbf{e}_x$  is the unitary normal vector in the axial direction.

Once again, the relation between the direct and adjoint problems is given by the Lagrange identity. Let  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denote the hermitian dot product on  $(\mathcal{L}^2(\Omega))^3$ ,  $[\cdot]_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  the integral on the domain boundary, and superscript  $H$  the tensors trans-conjugate. Then Green's theorem yields

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}; (\mathcal{A} - i\hat{\omega}\mathcal{B})(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle - \langle (\mathcal{A}^\dagger - i\tilde{\omega}\mathcal{B}^\dagger)(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}); \hat{p}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \\ -i(\tilde{\omega}^* + \hat{\omega})\langle \tilde{\mathbf{u}}^H \cdot \hat{\mathbf{u}} \rangle + [\tilde{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) - \boldsymbol{\sigma}^{\dagger H}(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{u}}]_{\Gamma} \end{aligned} \quad (3.27)$$

where  $(\tilde{p}; \tilde{\mathbf{u}})$  are the adjoint pressure and velocity fluctuations,  $\tilde{\omega}$  the adjoint complex circular frequency,  $\mathcal{A}^\dagger$  and  $\mathcal{B}^\dagger = \mathcal{B}$  the adjoint spatial and temporal operators defined on the domain  $\Omega$  by

$$\mathcal{A}^\dagger(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ -\frac{1}{\text{Re}}\Delta\tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{U} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\mathbf{U}^T \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \nabla\tilde{p} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}^\dagger(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

and associated to the boundary conditions

$$\begin{aligned}
 \partial_r \tilde{p}(x, 0) = \partial_r \tilde{u}_x(x, 0) = \tilde{u}_r(x, 0) &= 0 \quad \forall x \in [X_{\text{in}}, X_{\text{out}}] \\
 \tilde{\mathbf{u}}(X_{\text{in}}, r) &= 0 \quad \forall r \in [0, 1] \\
 \tilde{\mathbf{u}}(x, 1) &= 0 \quad \forall x \in [X_{\text{in}}, X_{\text{out}}] \\
 \boldsymbol{\sigma}^\dagger(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_x(X_{\text{out}}, r) &= 0 \quad \forall r \in [0, 1].
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

In addition,  $\boldsymbol{\sigma}^\dagger$  is the adjoint stress tensor

$$\boldsymbol{\sigma}^\dagger(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + \alpha_{\text{out}} \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T) + (1 - \beta_{\text{out}}) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U}^T + \tilde{p} \boldsymbol{\delta} \tag{3.30}$$

### 3.5.2 Multidomain discretisation

Among the various discretisation methods employed in linear stability, the spectral collocation technique based on Chebychev interpolation is particularly well suited to regular solutions. Indeed, as explained by Canuto *et al.* [21], if  $u$  is a given function such as its  $p^{\text{th}}$  derivative is continuous, and  $u_N$  its  $N$ -point Chebychev interpolation, then the error  $u - u_N$  satisfies a relation that schematically reads as

$$\|u - u_N\|_{\Omega, w} \leq CN^{-p} \|u^{(p)}\|_{\Omega, w} \tag{3.31}$$

where  $\|\cdot\|_{\Omega, w}$  is a quadratic norm on the domain  $\Omega$  where  $u$  is defined, pondered by a positive function  $w$ —typically  $w(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$  when  $\Omega = [-1, 1]$ . Yet the current stability problems are elliptic but non-normal : their solutions are actually regular, but they are expected to exhibit strong variations in thin zones near the domain boundaries, so that, even if the term  $N^{-p}$  is small in the previous convergence relation, the norm of the  $p^{\text{th}}$  order derivative is large. Nevertheless, if a particular discretisation is employed on such a thin zone, say  $\Omega' \subset \Omega$ , the relation (3.31) still holds with the pondered norm defined on  $\Omega'$ , so that  $\|u^{(p)}\|_{\Omega', w'}$  is expected to be smaller and enhance the convergence.

In practice, the integration domain  $\Omega = [X_{\text{in}}, X_{\text{out}}] \times [0, 1]$  is divided into  $P \times Q$  sub-domains denoted as  $D_{11}, \dots, D_{P1}, \dots, D_{PQ}$ , delimited by the axial and radial coordinates  $x_0 = X_{\text{in}}, x_1, \dots, x_{P-1}, x_P = X_{\text{out}}$  and  $r_0 = 1, r_1, \dots, r_{Q-1}, r_Q = 1$ . On each domain  $D_{pq}$  delimited by the points  $(x_{p-1}, x_p)$  and  $(r_{q-1}, r_q)$ , a local double Gauss-Lobatto grid  $(\xi_i, \eta_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, N_p \rrbracket \times \llbracket 1, M_q \rrbracket}$  of size  $(N_p, M_q)$  is set up and the Gauss-Lobatto variables are mapped to the physical variables  $(x_i, r_j)$  by the variable changes  $x_i = (x_p - x_{p-1})(1 - \xi_i)/2 + x_{p-1}$  and  $r_j = (r_q - r_{q-1})(1 - \eta_j)/2 + r_{q-1}$ . The spectral collocation technique allows us to express at any point  $(x_k, r_l)$  the  $n^{\text{th}}$  axial derivatives and  $m^{\text{th}}$  radial derivatives of each variable  $u$  as a linear combination of the elements  $u(x_i, r_j)$ ,  $(i, j) \in \llbracket 1, N_p \rrbracket \times \llbracket 1, M_q \rrbracket$  thanks to local derivation matrices denoted as  $\mathbf{D}_{pq}^{x,n}$  and  $\mathbf{D}_{pq}^{r,m}$ . These ones are computed thanks to the algorithm introduced by Don & Solomonoff [32], that is more accurate than the initial method presented by Canuto *et al.* [21]. Note that the above discretisation ensures that the computed solutions are continuous ; the continuity of the first axial and radial derivatives is imposed by adding interface conditions. To sum up, let  $\mathbf{X}$  be a global vector containing the variables expressed at each point of the multidomain bidimensional grid. The global discretised eigenvalue problem  $\mathbf{A}\mathbf{X} - i\omega\mathbf{B}\mathbf{X} = 0$  is assembled on each domain in two steps : firstly, the operators (3.24) or (3.28) are discretised thanks to the derivation matrices on the internal points ; and secondly, boundary conditions (3.26)-(3.29) or interface conditions are imposed on the external points.

Finally, the obtained matrix eigenvalue problem is solved by the Krylov-subspace iteration technique of Arnoldi [8], according to the methodology introduced by Rodriguez & Theofilis [75]. An eigenvalue target  $\omega_0$  with positive imaginary part is first chosen. Then, a cyclic-block decomposition of the matrix  $\mathbf{A}_{\omega_0} = \mathbf{A} - i\omega\mathbf{B}$  is dispatched on a square grid of  $n_{\text{proc}} \times n_{\text{proc}}$  processors and its Lower-Upper (LU) factorisation is computed by calling the driver routines of the ScaLAPACK library [16]. Therefore, the

	$x_0$	$N_1$	$x_1$	$N_2$	$x_2$	$N_3$	$x_3$
MONO <sub>0</sub> <sup>100</sup>	4	300	8				
MULTI <sub>d,0</sub> <sup>100</sup>	4	151	7.96	31	7.998	20	8
MULTI <sub>d,1</sub> <sup>100</sup>	4	161	7.96	41	7.998	30	8
MULTI <sub>a,0</sub> <sup>100</sup>	4	21	4.0004	31	4.04	150	8

TABLE 3.1 – Axial discretisation for the meshes used for global stability computations

Arnoldi algorithm allows to compute a small set, say 20, of largest eigenvalues of the matrix  $A_{\omega_0}^{-1}B$  —in other words the closest eigenvalues to the target— and the related eigenvectors.

### 3.5.3 Description of the eigenmodes

In this section, we present the obtained direct and adjoint stability modes, the analogies with the simplified previous convective-diffusive case, and the necessary mesh refinements carried out for growing Reynolds numbers. We first consider a computation performed for  $Re = 100$  on the domain  $[X_{in} = 4, X_{out} = 8]$ . The parameters  $\alpha_{out}$  and  $\beta_{out}$  used for the outflow boundary condition are initially equal to 1 and 0 respectively. Three single-domain and multi-domain meshes, denoted as MONO<sub>0</sub> (for mono-domain), MULTI<sub>d,0</sub><sup>100</sup>, MULTI<sub>d,1</sub><sup>100</sup> and MULTI<sub>a,0</sub><sup>100</sup> (for multi-domain), were used here. Their features are reported in Table 3.1. The meshes MULTI<sub>d,0</sub><sup>100</sup> and MULTI<sub>a,0</sub><sup>100</sup> allow to catch the respective outflow and inflow boundary layers of the direct and adjoint problems with more accuracy than with the initial mesh MONO<sub>0</sub><sup>100</sup>. MULTI<sub>d,1</sub><sup>100</sup> is introduced to study the mesh convergence of the direct problem.

Let us describe the spectra, computed by Arnoldi inverse iteration, plotted in Figure 3.6. The generated Krylov subspace is of size 200, so as to obtain 20 converged eigenvalues. Basically, two branches of discrete temporally damped modes are obtained. The upper one begins from the eigenvalue  $\omega = 31.37 - 26.62i$ ; its modes are of minimal temporal decay in the neighbourhood of the least stable one  $\omega = 56.55 - 27.91i$ , and then are more and more stable at higher frequency. If the direct spectrum computed with MONO<sub>0</sub> is left aside, these modes neither depend on the used mesh nor the solved problem and may be therefore of physical significance. To this respect, it is not necessary to compute further eigenvalues in the area of high-frequency and large temporal decay, for they would be rapidly damped and no instability corresponding to such large  $\omega_r$  values have ever been measured experimentally, see Chedevergne *et al.* [23]. In the same way, the lower branch contains much more stable eigenvalues that much depend on the computed problem and the used mesh, so that such modes might not emerge. On the other hand, as shown on the amplitude fields depicted in Figure 3.7 for the mode  $\omega = 56.55 - 27.91i$ , these temporally stable modes are related to spatially amplified direct eigenfunctions and decaying adjoint eigenfunctions. Both direct and adjoint velocity profiles reach their maximum amplitude in the vicinity of the blowing wall —for instance  $r \approx 0.95$  for the axial fluctuations. The shape of the direct eigenfunctions are very similar to those obtained by Chedevergne *et al.* [23] and those compared to the “Parietal Vortex Shedding” structures evidenced in cold-gas experiments by Griffond *et al.* [47]. As a consequence, these modes will be subsequently referred to as “PVS instabilities”. Moreover, the logarithmic scale used in Figure 3.7 allows to quantify their growth. The constant step between each level denotes an exponential amplification, that is tentatively sought for as  $\hat{u}_x(x, r_0), \hat{u}_r(x, r_0) \approx a(r_0)x^{\lambda(r_0)}$  on each line of constant  $r$ . Indeed, the global operator is driven by a uniformly accelerated base flow exactly as in the simplified convective-diffusive problem which shows such a typical behaviour.

Note that the sought approximation does not take account for the inflow abscissa  $X_{in}$ . Provided that the selected lines of constant  $r$  are far from particular points where the amplitude rapidly decays



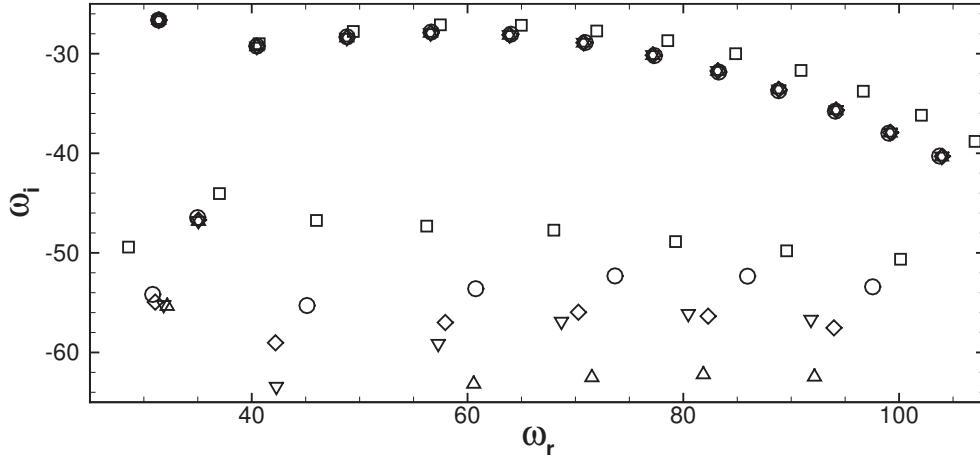


FIGURE 3.6 – Spectra obtained for the global stability analysis of the Taylor-Culick flow, computed for  $Re = 100$ ,  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$ . Direct eigenproblem solved with meshes  $MONO_0$  ( $\square$ ),  $MULTI_{d,0}^{100}$  ( $\diamond$ ) and  $MULTI_{d,1}^{100}$  ( $\circ$ ), and adjoint problem solved with meshes  $MONO_0$  ( $\triangle$ ) and  $MULTI_{a,0}^{100}$  ( $\nabla$ )

highlighted in Figure 3.7, a good agreement is found for both axial and radial direct velocity fluctuations with  $\lambda(r) \approx 25$ , as described in Figure 3.9. The similarity with the eigenfunctions of the simplified stability problem also arises in the rough variations nearby the outflow boundary condition for the direct velocity fluctuations (Figure 3.9).

In addition to the initial set of outflow boundary condition parameters, the choices  $\alpha_{out} = 0$ ,  $\beta_{out} = 0$  and  $\alpha_{out} = 0$ ,  $\beta_{out} = Re^{-1}$  have also been tested. The obtained eigenvalues are exactly similar to those depicted in Figure 3.6. Correlatively, the eigenfunctions are only impacted at the outflow on a thin layer  $x \in [(1 - \varepsilon)X_{out}, X_{out}]$  with  $\varepsilon \approx 0.01$ . This remarkable independence on the outflow parameters is much similar to the one observed in the simplified problem (section 3.3). This tend to prove that these eigenmodes basically depend on the imposed outflow pressure, but not on the viscous or convective terms included in the outflow voundary condition. In the further computations,  $\alpha_{out}$  and  $\beta_{out}$  will be set equal to zero.

Finally, a special attention must be paid on the remarkable points where all the velocity amplitudes presented in Figure 3.7 decay down to zero. Correlatively, the phase fields depicted in Figure 3.10 exhibit phase break lines that start from the wall and stop at these points, which means that the phase cannot be defined in these singular locations. They are therefore called *amphydromic points* by analogy with the tide phenomenon. The number of such occurring points seems to define each mode of the upper branch : for instance, the radial adjoint velocity phase exhibits one more amphydromic point for each next mode of larger frequency, as presented for the first six eigenmodes in Figure 3.11.

To conclude with, two main factors give evidence of the above eigenmodes as physically relevant instabilities. On the one hand, various computations of both direct and adjoint problems with distinct meshes have led to the same eigenvalues ; on the other hand, it appears that each mode is characterized by a given number of singular (called ‘‘amphydromic’’) points where the velocity phase is not defined and the amplitude is equal to zero. These general statements are of great interest with respect to the existence of modal instabilities in Solid Propellant Motors.

### 3.5.4 Influence of the viscosity and the domain extent

Starting from the previous case  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$ ,  $Re = 100$ , the influence of the variations on the outflow position and the Reynolds number is studied. In this section, identical spectra are obtained by solving the direct or adjoint stability equations, but fewer points are required to find converged adjoint

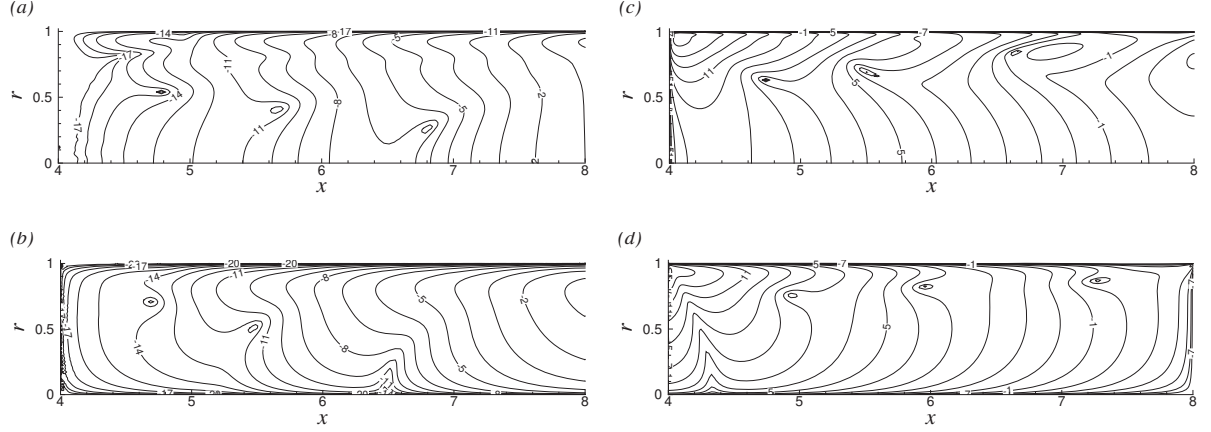


FIGURE 3.7 – Isocontours of the eigenfunctions amplitude in logarithmic scale for the eigenmode  $\omega = 56.55 - 27.91i$ , computed for  $\text{Re} = 100$ ,  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ . The direct axial (a) and radial (b) velocities are obtained with  $\text{MULTI}_{d,0}^{100}$ ; the adjoint axial (c) and radial (d) velocities are obtained with  $\text{MULTI}_{a,0}^{100}$ . A normalisation factor  $1/u_x(7.5, 0.9)$  is applied. Once again, the direct velocity fluctuations are amplified downstream and the adjoint ones decay away from  $x = X_{\text{in}}$ . One must notice the existence of particular points where the amplitude tends towards zero, called *amphidromic points*.

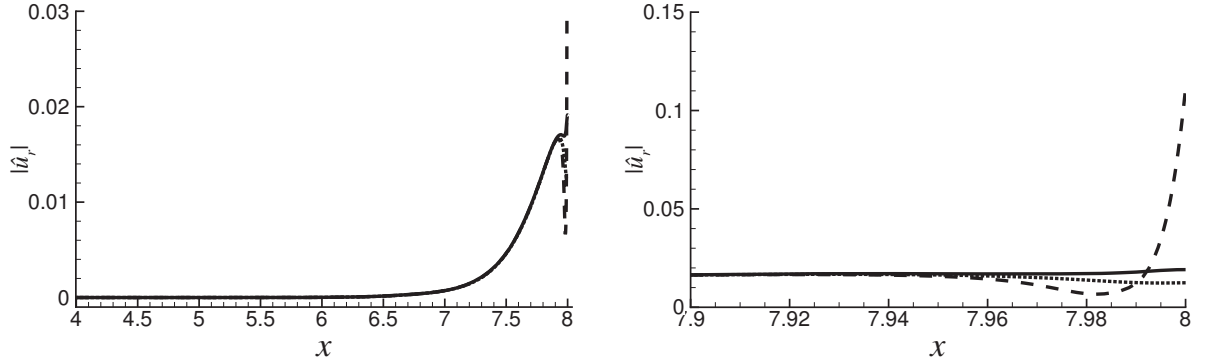


FIGURE 3.8 – Axial profile of the radial velocity fluctuation at  $r = 0.98$  obtained for various outflow conditions and computed with  $\text{MULTI}_{d,0}^{100}$ . The considered eigenmode is  $\hat{\omega}_r = 56.55 - 27.91i$ . Global shape (left) and different boundary layer behaviours close to the outflow (right). (—) :  $\alpha_{\text{out}} = 0$ ,  $\beta_{\text{out}} = 0$ ; (- -) :  $\alpha_{\text{out}} = 1$ ,  $\beta_{\text{out}} = 0$ ; (...) :  $\alpha_{\text{out}} = 0$ ,  $\beta_{\text{out}} = \text{Re}^{-1}$ .

eigenvalues. In this section, the sole adjoint spectra are exhibited. The employed meshes include again three axial partitions with boundaries that are the same as those of  $\text{MULTI}_{a,0}^{100}$ , but the number of points of the third partition is increased to reach mesh convergence.

The Reynolds number has first been increased, stating from 100 up to 500. As depicted in Figure 3.12, a decreasing viscosity has a destabilizing effect on the eigenmodes, but the reduced frequencies are marginally impacted. More interestingly, the location of the amphidromic points that define each mode is exactly the same for the three considered Reynolds numbers (see Figure 3.13 for the phase fields). The only visible difference lies in the the profile of the radial velocity near  $x = X_{\text{in}}$  : as in the simplified convective-diffusive problem, the upstream amplification of the eigenfunctions and the imposed inflow no-slip condition induces rough variations there. The profiles depicted in Figure 3.13

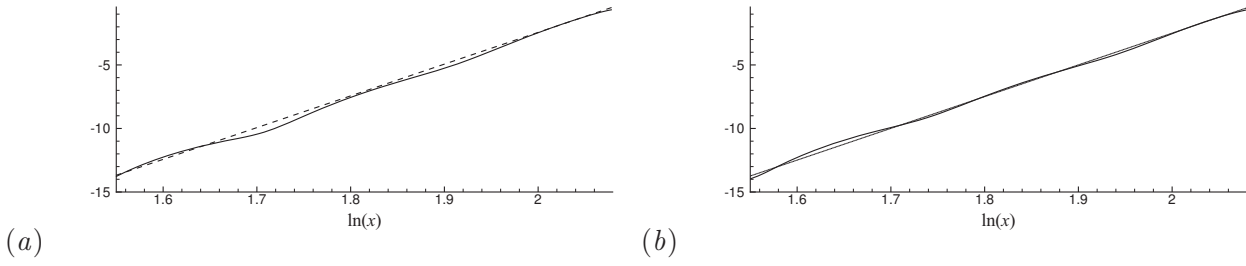


FIGURE 3.9 – Axial (a) and radial (b) profiles of the logarithmic amplitude of the direct velocity fluctuations and related approximations  $\hat{u}_x(x, r_1) \approx a(r_1)x^{\lambda(r_1)}$  and  $\hat{u}_r(x, r_2) \approx b(r_2)x^{\lambda(r_2)}$ , with  $r_1 = 0.91$ ,  $r_2 = 0.66$ ,  $\lambda(r_1) = \lambda(r_2) = 25$ , as functions of  $\log(x)$ . The agreement is correct everywhere but in the neighbourhood of the outflow, where the imposed boundary condition induces a boundary layer in the same way as in the simplified convective-diffusive problem.

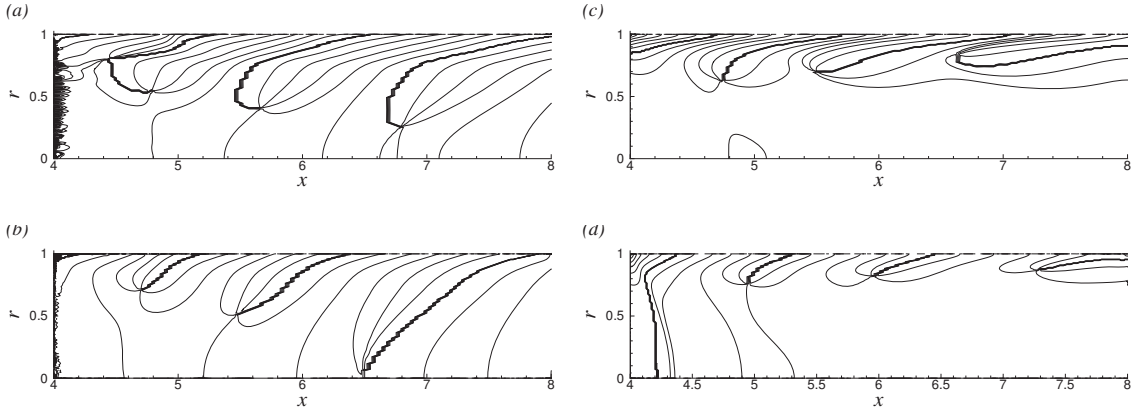


FIGURE 3.10 – Phase isocontours of the eigenfunctions which amplitude is presented in Figure 3.7. (a) : direct axial velocity; (b) direct radial velocity; (c) : adjoint axial velocity; (d) adjoint radial velocity. The amphydromic points where the amplitude decays to zero correspond to the endpoints of the phase break lines here, so that the phase is not defined at these particular locations.

show in particular that this decay of the radial velocity when  $x$  tends to  $X_{in}$  is more abrupt when the viscosity decreases.

The variations from 7 to 9.5 of the outflow abscissa have been considered then. Once again, each mode is defined by a given number of amphydromic points appearing in the fields of the velocity fluctuations. The increased length of the spatial domain, as the decreased viscosity, has a destabilizing effect on the eigenmodes, but it also induces a lower reduced frequency (Figure 3.14). However, contrary to the stability modes of the Blasius boundary layer (see Alizard *et al.* [5]), the current eigenmodes seem to converge towards fixed values : this appears clearly for the modes  $\omega \approx 31 - 26i$  (without amphydromic points) and  $\omega \approx 39 - 30i$  (with a single amphydromic point); for the modes of higher rank, their evolution in the complex plane slows down with an increasing  $X_{out}$  as well.

When the Reynolds number or the domain extension are even larger, all the computed direct and adjoint eigenmodes, except the first one of the branch, appear to be slightly dependant on the used mesh and therefore hardly coincide in the complex plane. More precisely, the amphydromic points remain visible in the eigenfunctions, but their location move when the discretisation is changed. As in the simplified stability problem, the limit of the machine accuracy seems to be attained. In the next

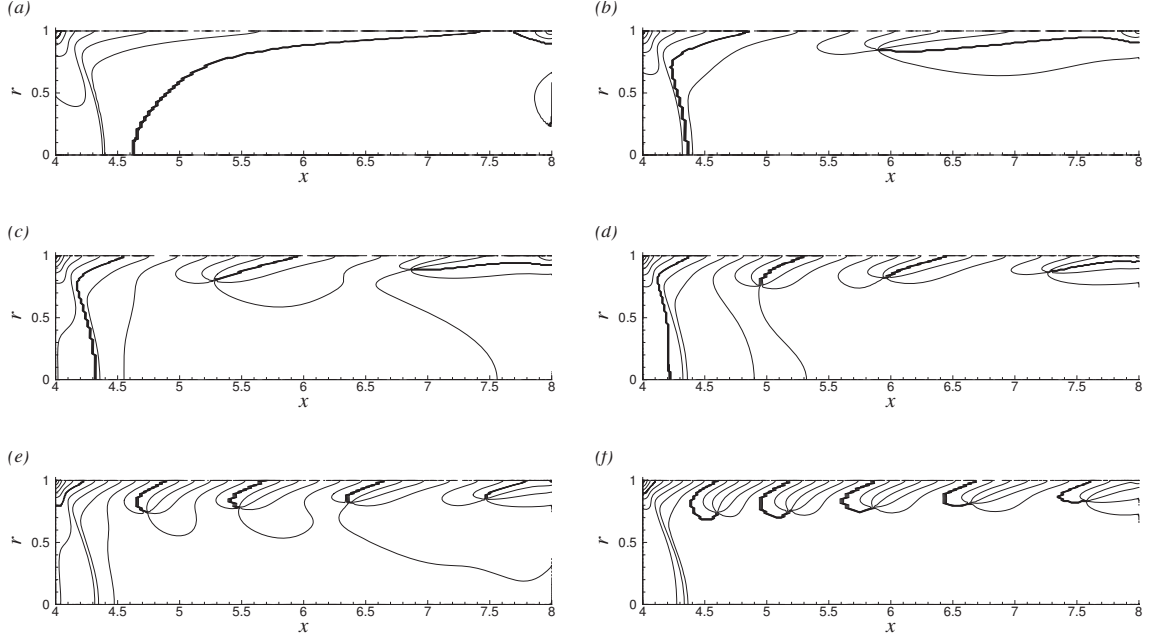


FIGURE 3.11 – Phase isocontours of the adjoint radial velocity profile of the eigenmodes computed for  $\text{Re} = 100$ ,  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$  with  $\text{MULTI}_{a,0}^{100}$ . (a) : mode  $\omega = 31 - 27i$ ; (b) :  $\omega = 40 - 29i$ ; (c) :  $\omega = 49 - 28i$ ; (d) :  $\omega = 57 - 28i$ ; (e) :  $\omega = 63 - 28i$ ; (f) :  $\omega = 71 - 29i$ .

section, a sensibility analysis of these modes is carried out, and some critical elements of the numerical integration are exhibited.

### 3.6 Sensitivity analysis of the global stability problem

In this section, the effect of small disturbances on the global linearised Navier-Stokes operator is investigated. In the same way as for the simplified convective-diffusive problem, the shift  $\varepsilon\delta\hat{\omega}$ , due to perturbations on the boundary conditions or a small variation of the base data of amplitude  $\varepsilon$ , is obtained thanks to the Lagrange identity (3.27) that is linearised with respect to  $\varepsilon$ . To this respect, the counterpart of Equation (3.17) reads

$$\delta\hat{\omega} = -\frac{i}{(\tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}})} \left[ \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}(\delta\hat{p}, \delta\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} - (\boldsymbol{\sigma}^{\dagger H}(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta\hat{\mathbf{u}}) d\sigma + \int_{\Omega} (\tilde{p}^*, \tilde{\mathbf{u}}^*; \delta\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})) d\Omega \right], \quad (3.32)$$

where  $(\delta\hat{p}, \delta\hat{\mathbf{u}})$  are the disturbances on the boundary direct pressure and velocity fluctuations, and  $\delta\mathcal{A}$  a disturbance to the direct spatial operator. This expression will be derived to calculate the sensitivity function  $\nabla_f\hat{\omega}$  of each parameter  $f$ , so that the contribution of  $f$  to the eigenvalue variation is  $\nabla_f\hat{\omega} = \langle \nabla_f\hat{\omega}; f \rangle_E$ , where  $\langle ; \rangle_E$  denotes the hermitian dot product on the whole domain ( $E = \Omega$ ) or on the boundary faces ( $E$  is a subset of  $\partial\Omega$ , namely the inflow section  $\Gamma_i$ , the outflow section  $\Gamma_o$  and the parietal boundary  $\Gamma_p$ ).

#### 3.6.1 Sensitivity of the boundary conditions

Expanding the first term of Equation (3.32) allows to distinguish several sensitivity functions. At the wall and on the inflow cross-section, the direct velocity is imposed. Therefore, the eigenvalues

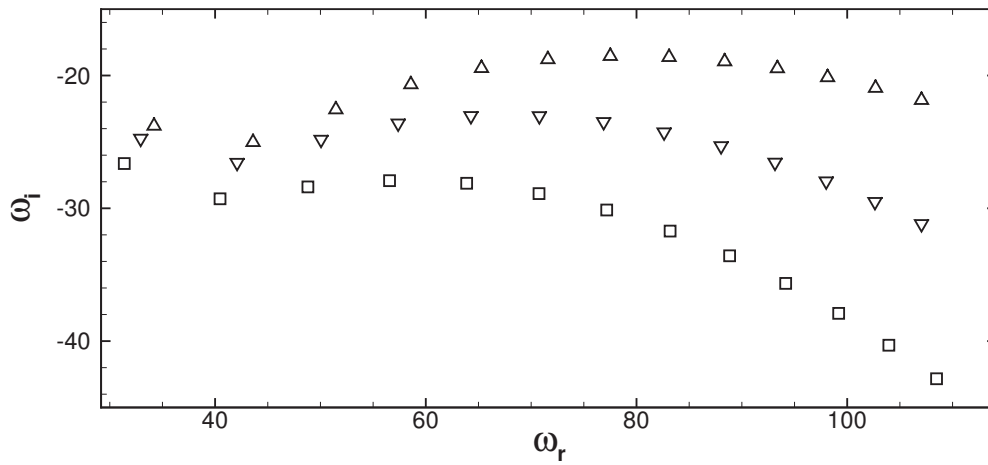


FIGURE 3.12 – Spectra of the adjoint stability problem of the Taylor-Culick flow, computed for  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ . ( $\square$ ) with mesh  $\text{MULTI}_{a,0}^{100}$  :  $\text{Re} = 100$ ; ( $\nabla$ ) :  $\text{Re} = 200$ ; ( $\Delta$ ) :  $\text{Re} = 500$ .

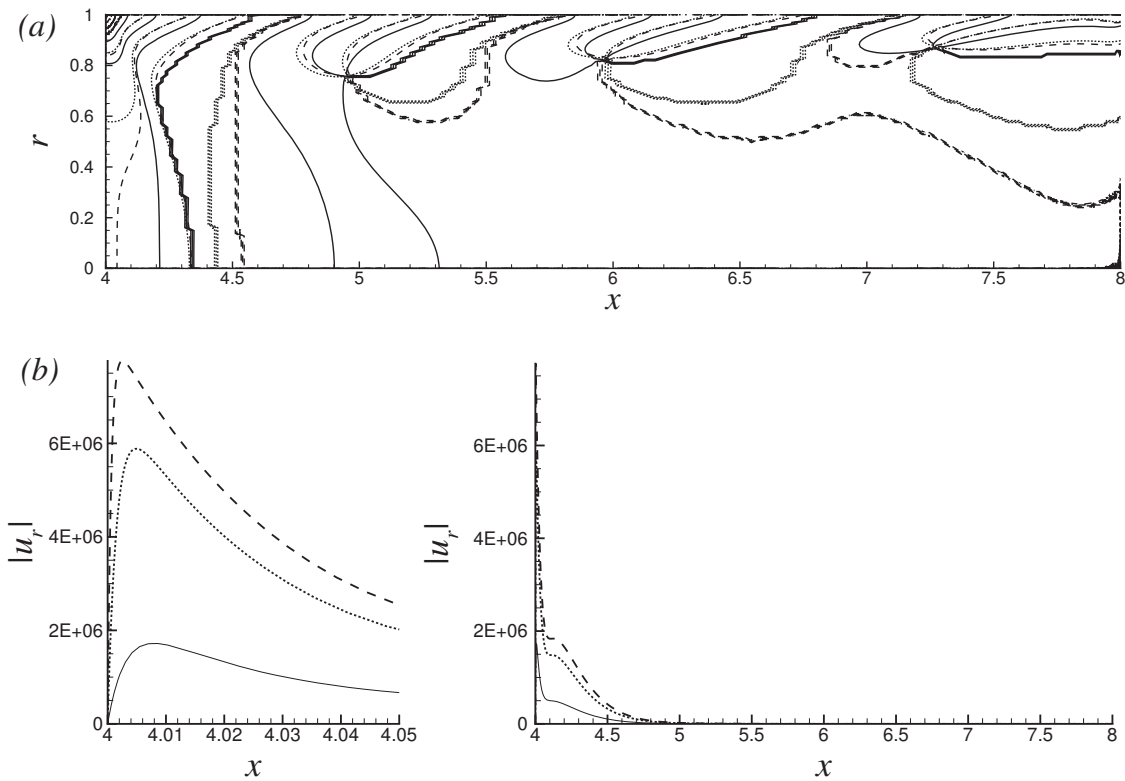


FIGURE 3.13 – Adjoint radial velocity for the third eigenmode ( $\hat{\omega}_r \approx 57$ ) computed for  $\text{Re} = 100$  (solid lines),  $\text{Re} = 200$  (dotted lines) and  $\text{Re} = 500$  (dashed lines);  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ . (a) : level lines of the phase field; (b) : profiles at  $r = 0.91$ .

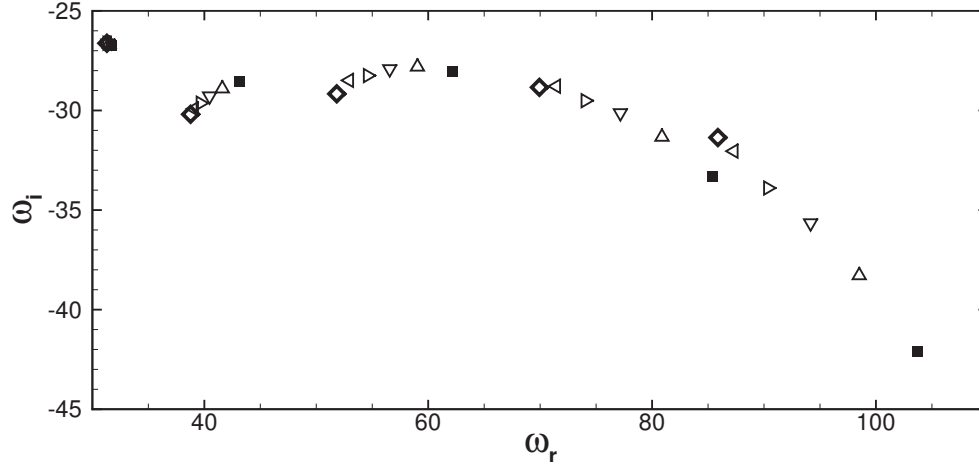


FIGURE 3.14 – Spectra of the adjoint stability problem of the Taylor-Culick flow, computed for  $\text{Re} = 100$  and  $X_{\text{in}} = 4$ . The modes with 0, 1, 3, 6 and 9 amphidromic points are represented. (■) :  $X_{\text{out}} = 7$ ; ( $\Delta$ ) :  $X_{\text{out}} = 7.5$ ; ( $\nabla$ ) :  $X_{\text{out}} = 8$ ; ( $\triangleright$ ) :  $X_{\text{out}} = 8.5$ ; ( $\triangleleft$ ) :  $X_{\text{out}} = 9$ ; ( $\diamond$ ) :  $X_{\text{out}} = 9.5$ .

are only sensible to errors  $\delta \hat{\mathbf{u}}$  on the imposed velocity. More precisely, taking account for the adjoint boundary conditions, the following sensitivity functions are obtained :

$$\nabla_{\hat{u}_x}^i \hat{\omega} = i \frac{\tilde{p}^*}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle}, \quad \nabla_{\hat{u}_r}^i \hat{\omega} = i \frac{\text{Re}^{-1} \partial_x \tilde{u}_r^*}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle} \quad (3.33)$$

$$\nabla_{\hat{u}_x}^p \hat{\omega} = i \frac{\text{Re}^{-1} \partial_r \tilde{u}_x^*}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle}, \quad \nabla_{\hat{u}_r}^p \hat{\omega} = i \frac{\tilde{p}^*}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle}. \quad (3.34)$$

On the contrary, the imposed outflow normal stress leads to gradients related to errors on the axial derivative of the velocity and on the pressure :

$$\nabla_{\partial_x \hat{u}_x}^o \hat{\omega} = i \frac{\text{Re}^{-1} \tilde{u}_x^*}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle}, \quad \nabla_{\partial_x \hat{u}_r}^o \hat{\omega} = i \frac{\text{Re}^{-1} \tilde{u}_r^*}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle} \quad \text{and} \quad \nabla_{\hat{p}}^o \hat{\omega} = -i \frac{\tilde{u}_x^*}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle} \quad (3.35)$$

The results obtained are similar to those presented in section 3.4.2, insofar as the sensitivity functions are much larger for the inflow than for the outflow boundary condition (where they remain in  $\mathcal{O}(1)$ ) and rapidly decrease away from  $x = X_{\text{in}}$  at the wall (Figure 3.15). More precisely, the obtained sensitivity functions shall be compared to the machine accuracy  $\varepsilon_M$  that may be employed as the linearisation factor in the Lagrange Identity to obtain the eigenvalue sensitivity (3.32). To this respect, a disturbance of order  $\varepsilon_M$  (say  $10^{-14}$ ) on the imposed axial derivative of the velocity fluctuations induces a shift on the eigenvalue that remains of order  $\varepsilon_M$ . On the contrary, a disturbance of amplitude  $\varepsilon_M$  applied to the velocity fluctuations at the wall close to  $x = X_{\text{in}}$ , or at the inflow boundary, may have the eigenvalue be displaced of about  $\varepsilon_M \delta \hat{\omega} = 10^{-5}$  according to the plotted sensitivity functions. Such an uncertainty is large indeed, but not critical contrary to the simplified convection-diffusion problem, where the eigenvalue displacement  $\varepsilon_M \delta \hat{\omega}$  could be as large as the eigenvalue itself.

### 3.6.2 Sensitivity to a disturbance on the base state

The present section aims at evaluating the sensitivity of the eigenvalues to small variations of the base state. This point is of great significance for physical purposes, since pressure oscillations are largely furthered by the existence of small geometric perturbations —e. g. a separation between two propellant grains, an emerging thermal protection, or even irregularities on the propegol surface—.

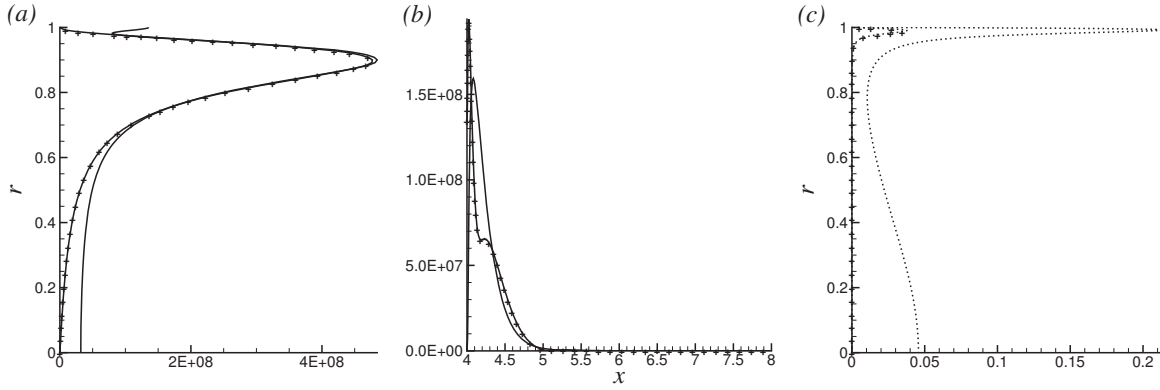


FIGURE 3.15 – Amplitude of the sensitivity functions of the mode  $\omega = 57 - 28i$  obtained for  $\text{Re} = 100$ ,  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ . (a) : inflow boundary condition; (b) : wall boundary condition; (c) : outflow boundary condition. Continuous lines :  $\nabla_{\hat{u}_x} \hat{\omega}$ ; continuous lines with symbols :  $\nabla_{\hat{u}_r} \hat{\omega}$ ; dashed lines :  $\nabla_{\partial_x \hat{u}_x} \hat{\omega}$ ; dashed lines with symbols :  $\nabla_{\partial_x \hat{u}_r} \hat{\omega}$ . The sensitivity function related to the outflow pressure  $\nabla_{\hat{p}} \hat{\omega}$  is not shown in plot (c) since it is directly equal to  $\text{Re} \nabla_{\partial_x \hat{u}_x} \hat{\omega}$

These perturbations may induce slight modifications to the Taylor-Culick solution as steady state of the internal flow, whose influence can be quantified thanks to the above relation (3.32). More precisely, if a small disturbance  $\delta \mathbf{U}$  is added to the base state, let  $\delta \mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = (\delta \mathbf{U} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \delta \mathbf{U}$  be the induced disturbance on the direct operator. Two sensitivity functions, related to the base flow velocity ( $\nabla_{\mathbf{U}} \hat{\omega}$ ) and its gradient ( $\nabla_{\nabla \mathbf{U}} \hat{\omega}$ ) respectively, are thus obtained :

$$\nabla_{\mathbf{U}} \hat{\omega} = -\frac{i \nabla \hat{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}}^*}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle} \quad \text{and} \quad \nabla_{\nabla \mathbf{U}} \hat{\omega} = -\frac{i \tilde{\mathbf{u}}^* \otimes \hat{\mathbf{u}}}{\langle \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle} \quad (3.36)$$

These sensitivities shall be associated to the non-normality rooted in the convective terms of the linearised incompressible Navier-Stokes equations. The global non-normality is quantified by the ratio  $\zeta = \|\tilde{\mathbf{u}}\| \|\hat{\mathbf{u}}\| / (\tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}})$ , necessarily larger than 1. Then, contrary to the simplified stability problem of section 3.3, two sources of non-normality can be identified [63]. The first one is related to the convection of the velocity fluctuations by the base state, and implies that the direct and adjoint eigenfunctions are amplified in opposite directions. The second one causes the direct and adjoint eigenfunctions to reach their maximum amplitude in a different velocity component, and is associated to the transposition of the base flow velocity gradient between the direct and the adjoint problems. It is quantified by the ratio  $\eta = \langle \|\tilde{\mathbf{u}}\|, \|\hat{\mathbf{u}}\| \rangle / \|\tilde{\mathbf{u}}\| \|\hat{\mathbf{u}}\|$ , where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes here the dot product between two scalar fields defined on the domain  $\Omega$ . Therefore, splitting up  $\zeta$  as  $\zeta = \eta \zeta + (1 - \eta) \zeta$  allows to quantify the respective effect of each source of non-normality. In addition, one obtains easily that  $\eta \zeta = \|\nabla_{\nabla \mathbf{U}} \hat{\omega}\|$ , in other words that the component-type non-normality can be quantified by the sensitivity functions related to the velocity gradient.

Once again, the mode  $\omega = 57 - 28i$  obtained with parameters  $\text{Re} = 100$ ,  $X_{\text{in}} = 4$  and  $X_{\text{out}} = 8$  is analysed. As depicted in Figure 3.16, the higher base flow sensitivity zones are located in a thin band close to the wall, and rather upstream. This indicates that small disturbances on the main velocity field, such as those usually caused by thermal protections or intersegments in real configurations, may have a severe influence on the eigenmodes if they occur in the head end zone; on the contrary, if the base flow slightly differs from the Taylor-Culick solution, which is physically relevant in longer cylinders ( $X_{\text{out}} > 12$ ) with partly turbulent zones [89, 20, 10], then the eigenvalues are not expected to be noticeably impacted. In addition, the sensitivity functions related to the sole base flow convection  $\mathbf{U}$  are markedly larger than the other ones. The non-normality is thus dominated by the convective effects, which may be verified in the shape of the eigenfunctions depicted in Figure 3.7 : the counterpart of the



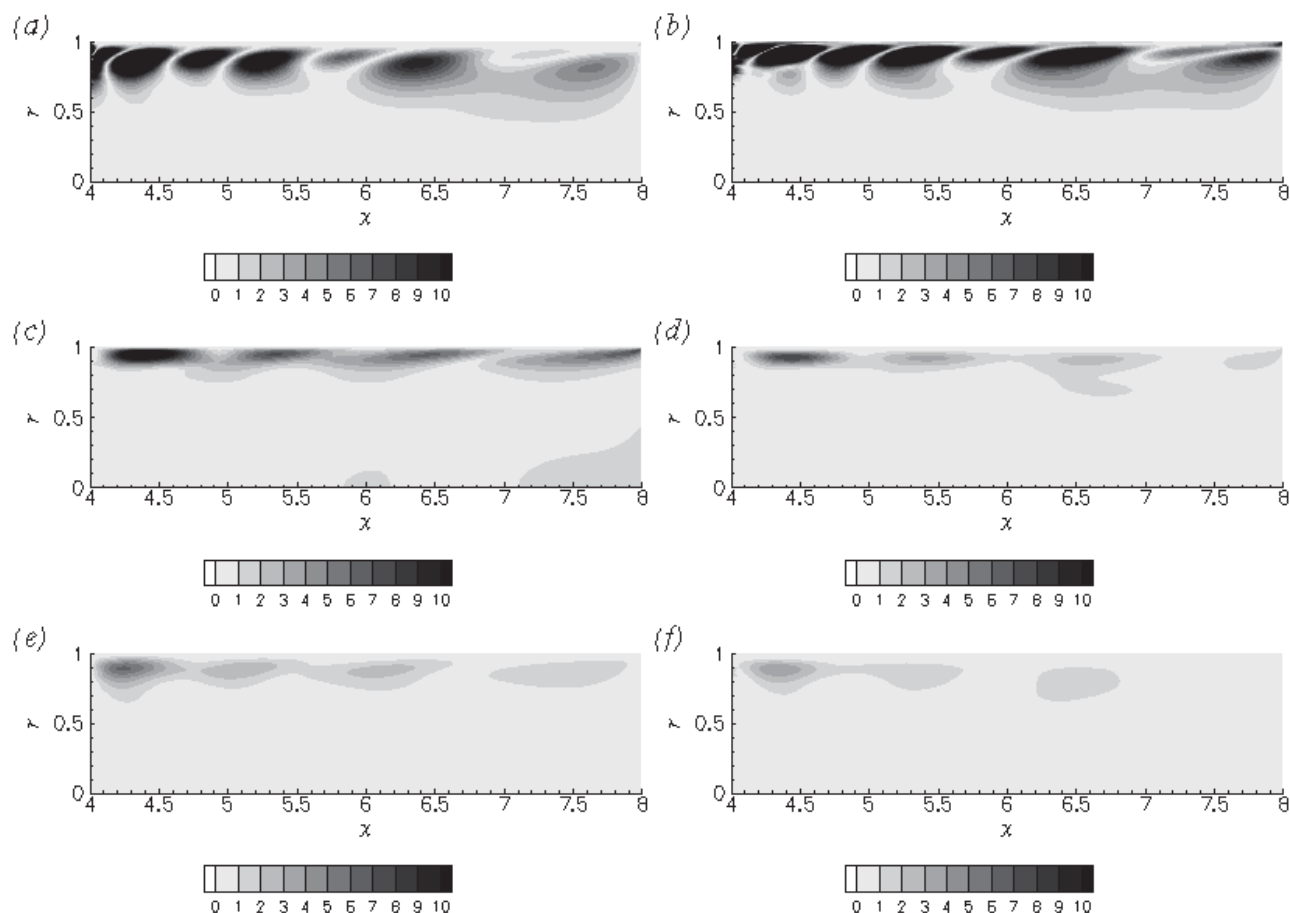


FIGURE 3.16 – Amplitude of the sensitivity functions to base flow velocity modifications for the direct stability problem. Mode  $\omega = 57 - 28i$  obtained for  $\text{Re} = 100$ ,  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ . (a) :  $\nabla_{U_x} \hat{\omega}$ ; (b) :  $\nabla_{U_r} \hat{\omega}$ ; (c) :  $\nabla_{\partial_x U_x} \hat{\omega}$ ; (d) :  $\nabla_{\partial_x U_r} \hat{\omega}$ ; (e) :  $\nabla_{\partial_r U_x} \hat{\omega}$ ; (f) :  $\nabla_{\partial_r U_r} \hat{\omega}$ .

large downstream growth of the direct velocity fluctuations is the even larger upstream amplification of the adjoint ones, whereas both axial and radial components are of equal amplitude. This convective sensibility can be further analysed by evaluating an optimal base flow disturbance that maximises the perturbation on the eigenvalues. The method introduced by Bottaro *et al.* [17] can be easily carried out thanks to the assumption of infinitesimal disturbances. In that case, the optimal velocity perturbation  $\delta U_x$  (or  $\delta U_r$ ) is colinear to the sensitivity function  $\nabla_{U_x} \hat{\omega}$  (or  $\nabla_{U_r} \hat{\omega}$ ), and the modulus of the eigenvalue variation is directly  $|\delta \hat{\omega}| = \|\nabla_{U_x} \hat{\omega}\| \|\delta U_x\|$  (or  $|\delta \hat{\omega}| = \|\nabla_{U_r} \hat{\omega}\| \|\delta U_r\|$ ). For the eigenmode  $\omega = 57 - 28i$ , the resulting norm of the optimal sensitivities are  $\|\nabla_{U_x} \hat{\omega}\| \approx 10$  and  $\|\nabla_{U_r} \hat{\omega}\| \approx 15$  for the optimal axial and radial base flow disturbances. These values remain lower than 175 for all the considered eigenmodes of the cases ( $\text{Re} = 100, X_{\text{in}} = 4, X_{\text{out}} = 8$ ), ( $\text{Re} = 500, X_{\text{in}} = 4, X_{\text{out}} = 8$ ) and are even lower for the case ( $\text{Re} = 100, X_{\text{in}} = 4, X_{\text{out}} = 7$ ). Therefore, these values ensure that the direct stability problem is robust to numerical errors or small uncertainties on the base flow if their norm is smaller than, say,  $10^{-3}$ , so that  $\delta \hat{\omega}$  remains much smaller than 1.

### 3.7 Final discussion

In this work, the eigenmodes of a simplified convective-diffusive operator and the Navier-Stokes equations linearised around the analytical Taylor-Culick solution, are studied. In both cases, the convec-

tion velocity is uniformly accelerated along the axial coordinate, which is a fundamental feature of the internal flows in solid rocket motors. The obtained eigenmodes are temporally stable and spatially amplified, with a downstream growth proportional to  $x^\lambda$ . Unlike instability problems driven by a low velocity convection, such as the boundary layers or the simplified eigenvalue problem introduced by Trefethen & Embree [85], the full set of the obtained modes might not be considered as the numerical representation of a continuous branch due to the fact that the computational domain is necessarily bounded. On the contrary, an analytical solution of the simplified problem has shown the independence of the eigenvalues when the extension of the spatial domain or the Reynolds number is increased. The global stability problem exhibits distinct eigenmodes that are clearly characterized by a fixed number of points where the amplitude of the velocity fluctuations cancel. These modes are only temporally destabilised, but their frequency is hardly modified, when the Reynolds number is increased ; and some of them reach a fixed position when the outflow boundary is set farther. Therefore, the main effect of the uniformly accelerated convection might be a clear separation between the eigenmodes. Physically, these ones possibly explain the modal behaviour of the PVS instabilities observed in the solid rocket motors and the equivalent experimental setups, either in cold gas or with combustion.

However, the well-known issues encountered in the eigenvalue computation of non-normal operators remain problematic. The study of the simplified problem shows the existence of zones of the complex plane where no eigenvalues can be computed, because they contain a continuous set of approximate eigenmodes whose resolvent norm is lower than the machine accuracy. Further analysis of the sensitivity of these eigenmodes is then carried out under the assumption of infinitesimal disturbances, and thanks to the introduction of a direct/adjoint biorthogonal set of eigenfunctions. Disturbances on the boundary conditions and the convective velocity are applied. It appears that the inflow boundary condition is critical with respect to the numerical machine accuracy  $\varepsilon_M$ . Indeed, an applied disturbance of order  $\varepsilon_M$  can induce a variation of order  $\mathcal{O}(1)$  on the computed eigenvalue for several modes if the Reynolds number is large enough. In other words, the no-slip condition applied at the inflow boundary is numerically equivalent to setting the velocity equal to  $\varepsilon_M$ , and the effects of the non-normality may amplify this uncertainty so that the computed eigenvalues move dramatically.

The global stability problem shows similar features : the mesh convergence is difficult to obtain when the computational domain or the Reynolds number are too large, the direct and adjoint eigenfunctions are strongly amplified in opposite directions because of the convective non-normality, and the sensitivity of the inflow boundary condition is critical. However, the mesh independence of the direct and adjoint eigenvalues is eventually obtained on a case ( $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 100$ ) that is more precisely investigated and that shows the same features as another tested configurations, namely a finite set of separated modes defined by their number of amphidromic points. In addition, a sensitivity analysis carried out on this particular case shows that the influence of small disturbances applied to the inflow boundary condition may be large, but not critical as in the simplified problem. This indicates that setting the inflow boundary condition downstream to the head-end allows to obtain more robust eigenvalues. Correlatively, the maximum sensitivity to baseflow modifications is reached near the blowing wall and rather close to the inflow.

To conclude with, the present paper confirms the existence of global stability modes of the Taylor-Culick flow presented by Chedevergne *et al.* [23]. Thus, the relevance of the modal approach, justified by the existence of instabilities that occur at separate frequencies, is shown to be relevant. To this respect, further improvements, such as a better control of the numerical accuracy in the computation of the matrix derivations, or the choice for another discretisation method, should be found. Therefore, the range of the Reynolds number and the domain outflow position might be widened to larger values than those used here.

## Acknowledgments

This study has been performed with the financial support of the French Centre National d'Études Spatiales (CNES) and the participation of the ONERA. The authors would like to thank in particular N. Cesco, Ph. Suppie and E. Robert (CNES), M. Prevost (ONERA Fauga) and G. Avalon (ONERA Palaiseau) for their technical implication. They are also very grateful to Ph. Villedieu (ONERA Toulouse) for fruitful discussions.

## Appendix : theoretical details on the convective-diffusive simplified case

### Location of the eigenvalues

The eigenvalues of the problem  $\mathcal{A}(\hat{u}) - i\hat{\omega}\hat{u} = 0$  defined by the operator (3.4) and the boundary conditions (3.5) are necessarily located on the negative part of the imaginary axis. Indeed, let  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  be the weighted inner product defined on  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  by

$$\langle \hat{u}, \tilde{u} \rangle_w = \int_0^1 \hat{u}^*(x) \tilde{u}(x) w(x) dx, \quad (3.37)$$

where  $w$  is a real positive function of  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ . As explained in [85], p. 118,  $w$  can be characterized so as the operator  $\mathcal{A}$  is self-adjoint with respect to the weighted inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  : for any  $w$  and  $\hat{u}, \tilde{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ,

$$\langle \mathcal{A}(\hat{u}), \tilde{u} \rangle_w - \langle \hat{u}, \mathcal{A}(\tilde{u}) \rangle_w = \int_0^1 \left( \frac{1}{\text{Re}} w'(x) + xw(x) \right) (\hat{u}'(x)\tilde{u}(x) - \tilde{u}'(x)\hat{u}(x)) dx. \quad (3.38)$$

Therefore,  $\mathcal{A}$  (and the identity operator as well) is self-adjoint with respect to  $(\cdot, \cdot)_w$  if  $\text{Re}^{-1}w'(x) + xw(x) = 0$ , which leads to  $w(x) = \exp(-\text{Re}x^2/2)$ . Then, replacing  $\tilde{u}$  by  $\mathcal{A}(\hat{u})$  in equation (3.38) reads  $\|\mathcal{A}(\hat{u})\|_w^2 = -\hat{\omega}^2 \|\hat{u}\|_w^2 \geq 0$  :  $\hat{\omega}$  necessarily reads as  $\hat{\omega} = i\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### External development

The solution of the eigenproblem (3.4) is sought for as an asymptotic expansion  $U_N(x) = u_0(x) + \text{Re}^{-1}u_1(x) + \dots + \text{Re}^{-N}u_N(x)$  with respect to the small parameter  $\text{Re}^{-1}$  on a sub-domain  $[0, a]$  where  $a$  is arbitrarily close to 1.  $U_N$  is thus supposed to take the inflow boundary condition  $U_N(0) = 0$ , but no condition is imposed at  $x = a$ . In the above development, the functions  $u_n$  are assumed to remain bounded on the whole domain, i.e.  $u_n = \mathcal{O}(1)$ . Therefore,  $(\mathcal{A} - i\hat{\omega})U_N$  can be re-expressed into separate terms related to the growing powers of  $\text{Re}^{-1}$ . If each order is set equal to zero, then the recursive system of ordinary differential equations with initial conditions

$$xu'_0 - i\hat{\omega}u_0 = 0; \quad u_0(0) = 0 \quad (3.39)$$

$$xu'_n - i\hat{\omega}u_n = u''_{n-1}; \quad u_n(0) = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N. \quad (3.40)$$

is obtained. The following generic term is obtained by recursive integration :

$$u_n(x) = \frac{c_n(\hat{\omega})}{n!(-2^2)^n} x^{i(\hat{\omega}-2n)}, \quad (3.41)$$

where  $c_0(\hat{\omega}) = 1$ ,  $c_n(\hat{\omega}) = (i\hat{\omega})(i\hat{\omega} - 1) \dots (i\hat{\omega} - 2n + 1)$  for  $n = 1, \dots, N$ . In addition,  $U_N$  exactly verifies (3.4) if the residual

$$r_N(\hat{\omega}) = ((\mathcal{A} - i\hat{\omega})U_N)(x) = \frac{c_{N+1}(\hat{\omega})}{\text{Re}^{N+1} N! (-2)^N} x^{i\hat{\omega}-2N} \quad (3.42)$$

is nullified, which implies that  $i\hat{\omega} \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ . Among these values of  $i\hat{\omega}$ , only the odd ones allow the initial condition  $U_N(0) = 0$  to be satisfied. As a conclusion,  $N$  eigenpairs are obtained by calculating the above  $N^{\text{th}}$ -order expansion. For the  $m^{\text{th}}$  solution that corresponds to the eigenvalue  $\hat{\omega}_m = -(2m - 1)i$  with  $m = 1, \dots, N$ , the coefficients  $c_n$  cancel for  $n > m$  and the expansion is reduced to a sum of  $m$  terms. The eigenpairs eventually read

$$\left\{ \hat{\omega}_m = -(2m + 1)i, \quad U_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(2m + 1)!}{(2(m - n) + 1)! n!} \frac{x^{2(m-n)+1}}{(-2\text{Re})^n} \right\}_{m=0, \dots, N}. \quad (3.43)$$

### Internal developpment and matching conditions

The above eigenfunctions do not account for the outflow boundary condition. Therefore, the variable change  $\hat{v}(X = \text{Re}(1 - x)) = \hat{u}(x)$  is introduced so as to calculate the particular shape of the eigenfunctions in the neighbourhood of  $x = 1$ . The eigenvalue problem is thus re-expressed as

$$(\hat{v}'' + \hat{v}') - \frac{1}{\text{Re}} (\hat{v}' - i\hat{\omega}\hat{v}) = 0 \quad (3.44)$$

As earlier,  $\hat{v}$  is approximated as a  $K^{\text{th}}$ -order asymptotic expansion  $\hat{v}(X) \approx U_K(X) = v_0(X) + \text{Re}^{-1}v_1(X) + \dots + \text{Re}^{-K}v_K(X)$ , where  $K$  is not necessarily equal to  $N$  and  $v_k = \mathcal{O}(1)$  for all  $k$ . Introducing this expression in (3.44) leads to the recursive system

$$v_0'' + v_0' = 0 \quad (3.45)$$

$$v_{k+1}'' + v_{k+1}' = Xv_k' - i\omega v_k \quad \forall k = 1, \dots, K. \quad (3.46)$$

The recursive integration of each generic term  $v_k$  shows that

$$v_k(X) = P_k(X) + Q_k(X)e^{-X} \quad (3.47)$$

where  $P_k$  and  $Q_k$  are polynomial functions of degree  $k$  and  $2k - 2$  respectively, verifying the recurrence relations

$$P_{k+1}'' + P_{k+1}' = XP_k' - i\hat{\omega}P_k \quad (3.48)$$

$$Q_{k+1}'' - Q_{k+1}' = X(Q_k' - Q_k) - i\hat{\omega}Q_k \quad (3.49)$$

Moreover, the boundary condition  $V_K'(0) = 0$  implies that

$$P_k'(0) + Q_k'(0) - Q_k(0) = 0. \quad (3.50)$$

Therefore, the global solution can be expressed as a sum of two independent solutions  $V_K(X) = V_{K,1}(X) + V_{K,2}(X)$  such as

$$V_{K,1}(X) = \sum_{k=0}^K \text{Re}^{-k} P_k(X) \quad \text{and} \quad V_{K,2}(X) = \left( \sum_{k=0}^K Q_k(X) \right) e^{-X}. \quad (3.51)$$

On the one hand, if the set of polynomials  $P_k$  is of size  $K = 2m + 1$ , then  $V_{K,1}(X)$  can be identified with the external part of the  $m^{\text{th}}$  eigenfunction  $\hat{u}_m$  of the set (3.43), expressed as  $\hat{v}_m(X) = \hat{u}_m(x = 1 - X/\text{Re})$ . Indeed,  $V_{K,1}$  does not depend on the outflow condition for the  $P_k$  polynomials appear with a first-order derivative in Equation (3.50); it satisfies the same differential equation as  $\hat{u}_m$  apart from the variable change  $X = \text{Re}(1 - x)$  and admits the same polynomial form. On the other hand,  $V_{K,2}(X)$  is exponentially small as soon as  $X \gg 1$ , i. e. when  $1 - x \gg 1/\text{Re}$ , so that the global solution is hardly disturbed in the external zone, but fits to the imposed boundary condition at  $x = 1$  and behaves like a boundary layer.

Practically,  $P_k$  and  $Q_k$  may be written as

$$P_k(X) = \sum_{p=0}^K a_{kp} X^p \quad \text{and} \quad Q_k(X) = \sum_{p=0}^{2K-2} b_{kp} X^p \quad (3.52)$$

The  $a_{kp}$  are directly obtained by the identification with the coefficients of the external solution. Then, the  $b_{kp}$  are obtained by the recurrence relation for  $p \geq 1$ , and by the expression of the outflow condition (3.50) for  $p = 0$  that reads  $a_{k1} + b_{k1} - b_{k0} = 0$ . In particular, for the two first eigenmodes  $\hat{\omega}_0 = -i$  and  $\hat{\omega}_1 = -3i$ , one obtains the following re-expressed external solutions :

$$\begin{aligned} \hat{v}_0(X) &= \hat{u}_0(x = 1 - \text{Re}^{-1}X) = 1 - \text{Re}^{-1}X \\ \hat{v}_1(X) &= \hat{u}_1(x = 1 - \text{Re}^{-1}X) = 1 - 3\text{Re}^{-1}X + 3\text{Re}^{-2}X^2 - \text{Re}^{-3}X^3. \end{aligned}$$

This induces the following  $Q_k$  polynomials :

$$Q_0 = 0 \quad \text{and} \quad Q_1 = -1 \quad \text{for } \hat{u}_0$$

and

$$\begin{aligned} Q_0 &= 0, \\ Q_1 &= -3 \\ Q_2 &= -(3X^2/2 + 12X + 9) \\ \text{and } Q_3 &= -(3X^4/8 + 15X^3/2 + 111X^2/2 + 139X + 139) \quad \text{for } \hat{u}_1. \end{aligned}$$

Therefore, the total eigenfunctions including the viscous outflow correction read

$$\hat{u}_0(x) = x - \frac{e^{\text{Re}(x-1)}}{\text{Re}} \quad (3.53)$$

$$\hat{u}_1(x) = x^3 - \frac{3x}{\text{Re}} - \left( \frac{3\text{Re}(1-x)^4}{8} + \frac{15(1-x)^3 + 3(1-x)^2}{2} + \right. \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{(111(1-x)^2 + 24(1-x) + 6)}{2\text{Re}} + \frac{(139(1-x) + 9)}{\text{Re}^2} + \frac{139}{\text{Re}^3} \right) e^{\text{Re}(x-1)} \quad (3.55)$$

As a conclusion, eigenfunctions approximated as a full matched asymptotic expansion can be decomposed into a first part that only depends on the inflow boundary condition and the order of its related eigenvalue, and a second part that is merely a correction added to capture the outflow boundary condition, but that has no influence on the eigenvalues.

*Cet article a fourni une nouvelle interprétation de la non-convergence en maillage des modes propres calculés lors de l'analyse de stabilité globale des moteurs à propergol solide simplifiés. L'étude d'un problème-modèle d'advection-diffusion monodimensionnel, dont le terme convectif est uniformément accéléré comme l'écoulement de Taylor-Culick, a permis d'interpréter ce phénomène en terme de pseudo-modes. Ceux-ci sont définis comme des solutions approchées vérifiant les équations de stabilité à une précision arbitrairement grande. Ils apparaissent notamment quand le nombre de Reynolds augmente trop, ce qui empêche toute résolution numérique de permettre le calcul des valeurs propres exactes. L'existence de ces pseudo-modes est corrélée à une sensibilité extrême des valeurs propres aux perturbations appliquées à la condition d'entrée, et à la croissance polynomiale des fonctions propres induite par l'accélération uniforme de l'état de base. Cette étude théorique laisse donc supposer que les modes du problème de stabilité global calculés jusqu'à présent sont également des pseudo-modes qui peuvent en réalité se propager suivant un jeu de fréquences continu. En revanche, l'étude de stabilité globale effectuée sur un sous-domaine dont la borne amont est située bien à l'aval du fond avant exhibe une branche de valeurs propres bien convergées en maillage, et dont la sensibilité aux perturbations est relativement faible par rapport à celle du problème-modèle. Ces modes sont clairement discrets, et bien définis par un nombre particulier de singularités apparaissant sur leurs champs de fluctuations de vitesse, appelées points amphidromiques. En partant du premier mode de la branche, un point amphidromique est ajouté à chaque mode. Cette étude a en outre montré la pertinence de la discrétisation par collocation spectrale multi-domaines, dans la mesure où, comme pressenti lors de l'étude du problème modèle, les fonctions propres directes et adjointes exhibent des couches limites aux extrémités du domaine de calcul.*

# Chapitre 4

## Stabilité à grand nombre de Reynolds

### 4.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons notamment montré qu'il était possible d'obtenir des modes de stabilité des équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'écoulement de Taylor-Culick qui soient indépendants du maillage utilisé, à condition de résoudre le problème aux valeurs propres sur un domaine réduit dont l'entrée est très éloignée du fond avant. Nous avons également vu l'importance du raffinement des maillages aux extrémités du domaine, plus particulièrement au fond avant pour le problème adjoint et en sortie pour le problème direct, puisque c'est là que se concentrent les effets de la viscosité sous forme de couches limites. Or, par analogie avec le problème d'advection-diffusion monodimensionnel, il est très probable que la taille de ces couches limites diminue avec le nombre de Reynolds. Le passage de  $Re = 100$  à des nombres de Reynolds représentatifs des configurations expérimentales n'est donc *a priori* pas facile. Rappelons que les valeurs usuelles du nombre de Reynolds sont de l'ordre de  $10^3$  pour les montages gaz froid et  $10^4$  pour les tirs réels, contre des cas de calcul effectués avec  $Re$  variant de 100 à 500 jusqu'à présent. Par ailleurs, l'abscisse de la limite d'entrée du domaine de calcul était restée fixée à  $X_{in} = 4$ , tandis que l'abscisse de sortie  $X_{out}$  ne variait que de 7 à 9. Or, nous supposons que l'émergence du VSP est due en particulier à une perturbation géométrique de type intersegment. Par exemple, en considérant le montage VALDO à trois éléments, il faudrait effectuer un calcul avec  $X_{in} = 5.6, X_{out} = 16.8$  en supposant que les structures tourbillonnaires sont issues de la première rupture de débit, et avec  $X_{in} = 11.2, X_{out} = 16.8$  en supposant qu'elles émergent du second. Toujours par analogie avec le problème d'advection-diffusion simplifié, décaler les abscisses du domaine vers l'aval revient à augmenter la vitesse axiale et donc le nombre de Reynolds vu par la discrétisation longitudinale, et donc encore une fois à rendre plus fines les couches limites aux extrémités.

Ce chapitre vise à compléter l'étude paramétrique vis-à-vis du nombre de Reynolds et des abscisses du domaine commencée au chapitre précédent, avec comme objectif d'utiliser des valeurs un peu plus représentatives des cas expérimentaux. Nous allons procéder en deux temps. D'abord, en reprenant le cas du domaine délimité par les abscisses réduites  $X_{in} = 4$  et  $X_{out} = 8$ , nous allons voir dans quelle mesure il est possible d'obtenir des modes de stabilité convergés et des spectres direct et adjoints qui coïncident avec un nombre de Reynolds de l'ordre du millier. Dans un deuxième temps, nous montrerons l'influence de la taille du domaine sur les modes de stabilité calculés pour  $Re = 100$  afin de se donner une idée de la difficulté du passage à un domaine pour lequel  $X_{in}$  et  $X_{out}$  sont grands. Nous concluerons avec une tentative de calcul de modes sur le cas VALDO à trois éléments, en prenant en compte les différentes possibilités d'apparition du VSP au niveau des deux ruptures de débit présents dans le montage.



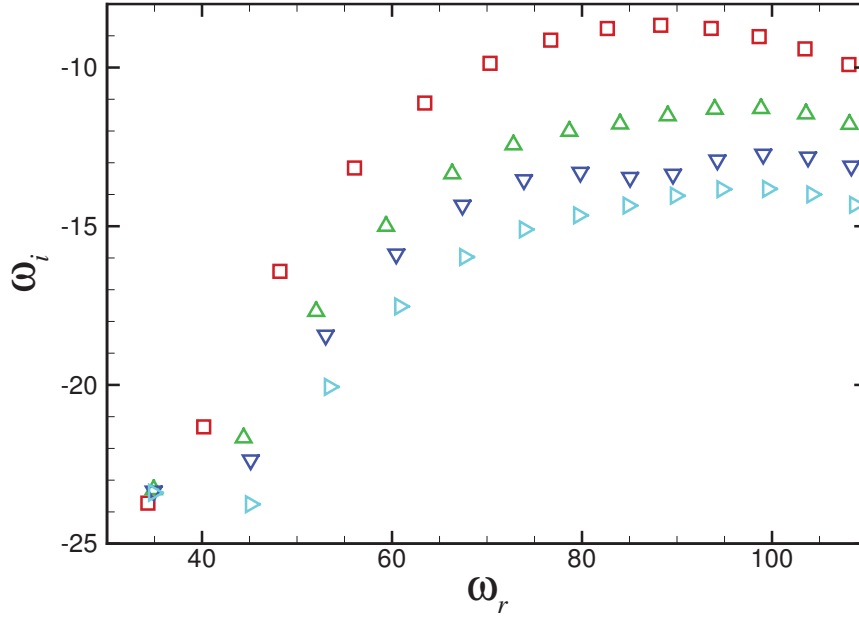


FIGURE 4.1 – Spectres calculés pour  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$  et  $X_{out} = 8$ , avec une valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ .  $\square$  :  $N \times M = 200 \times 100$ ;  $\triangle$  :  $N \times M = 300 \times 100$ ;  $\nabla$  :  $N \times M = 400 \times 100$ ;  $\blacktriangleright$  :  $N \times M = 500 \times 80$ .

## 4.2 Problème direct à $Re = 2000$

Nous reprenons ici le cas de l'étude de stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick sur le domaine compris entre  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$  avec cette fois-ci un nombre de Reynolds égal à 2000 correspondant à la vitesse d'injection de 1 m/s classiquement utilisée dans le montage VALDO. La condition de sortie (2.12) est écrite dans sa version la plus simple avec  $\alpha_{out} = \beta_{out} = 0$ . Nous allons mettre en évidence les difficultés numériques posées par un tel cas, notamment dans la définition des maillages et la correcte résolution de la couche limite de sortie qui apparaît sur les fonctions propres du problème direct.

### 4.2.1 Convergence en maillage des valeurs propres

Comme pour le cas  $Re = 100$ , nous sommes partis d'une discrétisation d'un seul bloc pour le calcul du problème de stabilité direct. En figure 4.1 sont tracés les spectres obtenus pour des maillages contenant de 200 à 500 points dans la direction axiale.<sup>1</sup> Seule la branche des valeurs propres les plus proches de l'axe réel est représentée, car celles-ci correspondent aux modes les moins stables temporellement et les plus à même d'induire des détachements tourbillonnaires pariétaux. Nous parlerons donc par la suite de «branche VSP». Comme dans le cas de calcul à  $Re = 100$ , et contrairement aux analyses de stabilité sur un domaine entier ( $X_{in} = 0$ ), les spectres présentés ici comportent toujours un même nombre de valeurs propres sur une plage de pulsations réduites  $\delta\hat{\omega}$  donnée. La première valeur propre de la branche finit par se stabiliser en  $\hat{\omega} = 35.2 - 23.4i$ , tandis que les autres valeurs propres gardent une partie réelle relativement stable et que leur partie imaginaire décroît. Cependant, nous ne parvenons pas à toutes les stabiliser.

C'est pourquoi, au regard de l'étude du problème de stabilité monodimensionnel simplifié (sec-

1. Aller plus loin aurait signifié effectuer une décomposition LU parallèle sur 441 processeurs et plus de 15 heures, soit la limite imposée par les queues du calculateur STELVIO.

	$x_0$	$N_1$	$x_1$	$N_2$	$x_2$	$N_3$	$x_3$	$N_4$	$x_4$
$MULTI_{d,1}^{2000}$	4	151	7.96	41	7.998	20	8		
$MULTI_{d,2}^{2000}$	4	151	7.96	21	7.996	20	7.9996	20	8
$MULTI_{d,3}^{2000}$	4	251	7.96	31	7.998	20	8		
$MULTI_{d,4}^{2000}$	4	31	0.01	221	7.96	31	7.998	20	8
$MULTI_{d,5}^{2000}$	4	151	7.96	51	7.998	40	8		
$MULTI_{d,6}^{2000}$	4	181	7.96	50	7.9996	40	8		

TABLE 4.1 – Discrétisations axiales utilisées pour le calcul des modes propres du problème direct à  $Re = 2000$ .

	$r_0$	$M_1$	$r_1$	$M_2$	$r_2$	$M_3$	$r_3$
$MULTI_{d,1}^{2000}$ , $MULTI_{d,5}^{2000}$ et $MULTI_{d,6}^{2000}$	0	100	1				
$MULTI_{d,2}^{2000}$ , $MULTI_{d,3}^{2000}$ et $MULTI_{d,4}^{2000}$	0	81	0.9	21	0.998	20	1

TABLE 4.2 – Discrétisations radiales utilisées pour le calcul des modes propres du problème direct à  $Re = 2000$ .

tion 3.3), des maillages multi-domaines sont ensuite introduits pour augmenter le nombre de points près de la sortie et bien résoudre de possibles couches limites en sortie. Notés  $MULTI_{d,*}^{2000}$ , ils sont divisés en trois parties longitudinalement, les deux derniers sous-domaines permettant d'accroître la précision en sortie. Certains d'entre eux sont également divisés en trois parties dans la direction radiale afin de voir si les structures tourbillonnaires sont bien résolues près de la paroi. Les paramètres précis utilisés sont donnés en tables 4.1 et 4.2. Dans le détail, à partir d'un premier maillage  $MULTI_{d,1}^{2000}$  de même topologie que ceux utilisés pour les analyses de stabilité à  $Re = 100$ , nous étudions l'effet d'une augmentation du raffinement en sortie (ajout d'un sous-domaine supplémentaire,  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; augmentation du nombre de points sur les deux derniers domaines,  $MULTI_{d,5}^{2000}$ ; dernier domaine plus étroit,  $MULTI_{d,6}^{2000}$ ), celui de l'augmentation du nombre de points sur le domaine principal ( $MULTI_{d,3}^{2000}$ ) et celui de l'ajout d'un domaine en entrée ( $MULTI_{d,4}^{2000}$ ). Par ailleurs, les maillages  $MULTI_{d,1}^{2000}$ ,  $MULTI_{d,5}^{2000}$  et  $MULTI_{d,6}^{2000}$  ont une discrétisation radiale d'un bloc, tandis que les maillages  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ,  $MULTI_{d,3}^{2000}$  et  $MULTI_{d,4}^{2000}$  comportent trois domaines suivant  $r$  afin d'augmenter le nombre de points près de la paroi débitante.

Les branches VSP des spectres ainsi calculés sont tracés en figure 4.2. À titre de comparaison, le spectre calculé avec le maillage mono-domaine  $N \times M = 500 \times 80$  est également reporté. Qualitativement, les valeurs propres ainsi obtenues se répartissent de nouveau sur une même branche parabolique à partir du mode  $\hat{\omega} = 35.2 - 23.4i$ , mais cette fois-ci, leurs parties réelles et surtout leurs parties imaginaires se stabilisent, ces dernières à des valeurs légèrement inférieures à celles des modes les plus proches calculés en mono-domaine. Plus précisément, les valeurs propres calculées avec les quatre premiers maillages  $MULTI_{d,1-4}^{2000}$  correspondant à un même mode se retrouvent dans un disque de rayon ne dépassant pas 0.3, pour des modes distants deux à deux de  $|\delta\hat{\omega}| = 5$  en moyenne. En ce sens, nous obtenons ainsi des modes indépendants de la discrétisation employée tant que celle-ci est suffisamment fine en sortie et possède une centaine de points sur le premier domaine. En outre, trop augmenter le

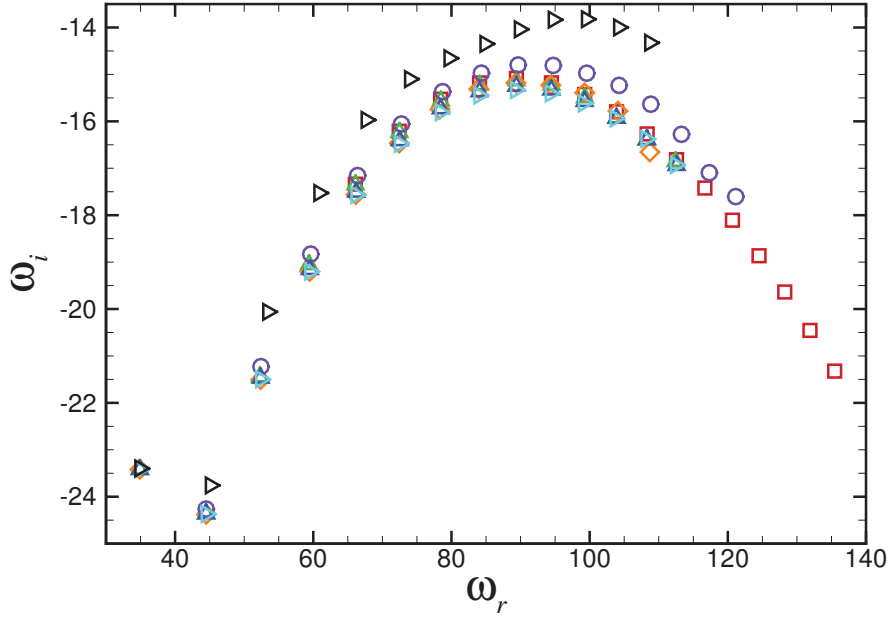


FIGURE 4.2 – Spectres calculés pour  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$  et  $X_{out} = 8$ .  $\triangleright$  : mono-domaine,  $N \times M = 500 \times 80$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\square$  :  $MULTI_{d,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 100 + 20i$ ;  $\triangle$  :  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\nabla$  :  $MULTI_{d,3}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\triangleright$  :  $MULTI_{d,4}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\diamond$  :  $MULTI_{d,5}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\circ$  :  $MULTI_{d,6}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 80 + 10i$ .

nombre de points sur les deux derniers domaines semble peu pertinent au regard du spectre obtenu avec le maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$  dont la valeur propre de plus haute fréquence «sort» légèrement de la branche VSP. Le cas du maillage  $MULTI_{d,6}^{2000}$  est encore plus dégradé, la taille du dernier domaine étant sans doute trop petite par rapport à celle de la couche limite de sortie.

Voyons enfin ce qui se passe lorsque l'on remplace la condition de sortie de traction nulle généralisée par le simple fait d'y imposer des fluctuations de pression nulles. Les discrétisations axiales sont de nouveau d'un seul bloc comportant de 100 à 400 points dans la direction axiale, et 100 points dans la direction radiale. Les spectres ainsi calculés sont décrits en figure 4.3. Étonnamment, les valeurs propres calculées avec 100 ou 150 points sont quasiment identiques, et surtout extrêmement proches des valeurs propres «convergées» calculées en multi-domaine avec la condition de sortie de traction nulle! En revanche, l'augmentation du nombre de points éloigne dramatiquement les valeurs propres de leur position de référence, le maillage avec  $N = 400$  points conduisant à des résultats absurdes. On peut supposer que ce comportement paradoxal vient du fait que la collocation spectrale gomme en partie le fait qu'il manque une condition aux limites tant que le nombre de points est faible.

#### 4.2.2 Fonctions propres et erreurs numériques

Voyons maintenant quelle est l'allure des fonctions propres et les différences observées entre les différents maillages employés, et plus particulièrement : la discrétisation mono-domaine  $N \times M = 400 \times 100$ , les maillages multi-domaines  $MULTI_{d,2}^{2000}$  et  $MULTI_{d,5}^{2000}$ , et la discrétisation mono-domaine  $N \times M = 100 \times 100$  pour le calcul avec condition de pression nulle en sortie. Dans un premier temps, les lignes de niveau des champs logarithmiques de vitesse axiale et radiale sont tracés en figure 4.4.

Dans tous les cas, nous retrouvons certaines caractéristiques des champs calculés à  $Re = 100$ , à savoir la forte amplification axiale des fluctuations de vitesse (nous avons montré que celle-ci était polynomiale), l'emplacement des maxima de vitesse radiale et surtout axiale en proche paroi, et surtout la présence de points où l'amplitude des fluctuations s'annule, appelés *points amphidromiques*. En

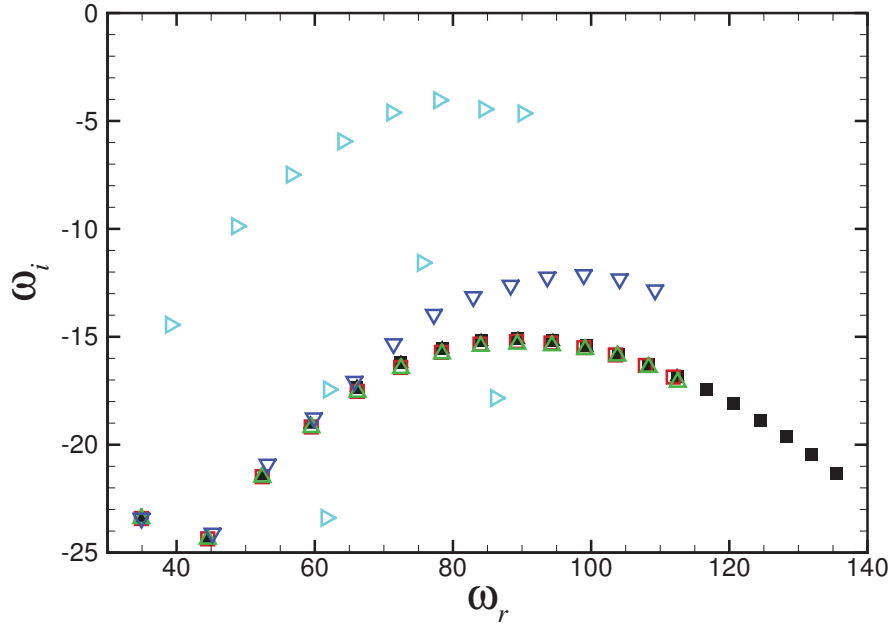


FIGURE 4.3 – Spectres calculés avec une condition de pression nulle en sortie pour  $\text{Re} = 2000$ ,  $X_{\text{in}} = 4$  et  $X_{\text{out}} = 8$ . Valeur propre cible :  $\omega_0 = 60 + 10i$ .  $\square$  :  $N \times M = 100 \times 100$ ;  $\triangle$  :  $N \times M = 150 \times 100$ ;  $\nabla$  :  $N \times M = 300 \times 100$ ;  $\triangleright$  :  $N \times M = 400 \times 100$ . Modes calculés en multi-domaine pour comparaison :  $\blacksquare$  :  $\text{MULTI}_{d,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 100 + 20i$ ;  $\blacktriangle$  :  $\text{MULTI}_{d,2}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ .

revanche, il existe près de l'entrée du domaine un bruit qui n'était pas apparu sur les fonctions propres calculées  $\text{Re} = 100$ . Pour des fonctions propres normalisées de telle sorte que la valeur des fluctuations de vitesse soit de l'ordre de l'unité en sortie, ce bruit prend la forme d'oscillations d'amplitude de l'ordre de  $10^{-6}$  en mono-domaine ( $N = 400$ ) et de  $10^{-9}$  dans tous les autres cas (cas du mode  $\hat{\omega} \approx 59 - 19i$  décrit en figure 4.5). Celles-ci sont purement numériques car elles apparaissent tous les deux points du maillage longitudinal. Elles diminuent radicalement d'intensité quand le maillage utilisé permet de capturer la couche limite de sortie sur la vitesse radiale mise en évidence sur la fluctuation de vitesse radiale en section 3.5, induite par la condition  $\partial_x \hat{u}_r = 0$ . En effet, les fonctions propres calculées avec les maillages  $\text{MULTI}_{d,2}^{2000}$  et  $\text{MULTI}_{d,5}^{2000}$  ne sont que très marginalement bruitées, tandis que la dérivée  $\partial_x \hat{u}_r$  tend effectivement vers 0 en sortie, contrairement aux fonctions propres calculées en mono-domaine (figure 4.6). Le cas de la condition de pression nulle est à part : aucune contrainte numérique n'est imposée sur  $\partial_x \hat{u}_r$  qui ne tend effectivement pas vers zéro, mais cela semble sans conséquence sur les fonctions propres qui ne contiennent pratiquement pas d'oscillations «un point sur deux».

L'augmentation du nombre de points près de la sortie dans le cas des maillages multi-domaines permet donc de diminuer ce bruit numérique. Cependant, si cela vaut pour le mode  $\hat{\omega} = 59.38 - 19.05i$  (maillage  $\text{MULTI}_{d,2}^{2000}$ ), c'est le contraire qui se passe pour les modes de plus haute fréquence (cas du mode  $\hat{\omega} = 89.41 - 15.13i$ , figure 4.7), pour lequel la vitesse radiale est plus perturbée au fond avant avec le maillage  $\text{MULTI}_{d,5}^{2000}$  qu'avec le maillage  $\text{MULTI}_{d,2}^{2000}$ . Il faut donc faire attention au fait que la collocation spectrale peut perdre en précision si l'on concentre trop de points sur une zone trop petite. Rappelons par exemple que le nombre optimal de points de collocation pour le calcul d'une dérivée seconde est autour de  $N = 30$  (table 2.1). Cela explique pourquoi le mode  $\hat{\omega} = 109.5 - 16.7i$  sort légèrement de la branche parabolique sur laquelle se situent les valeurs propres les plus instables.

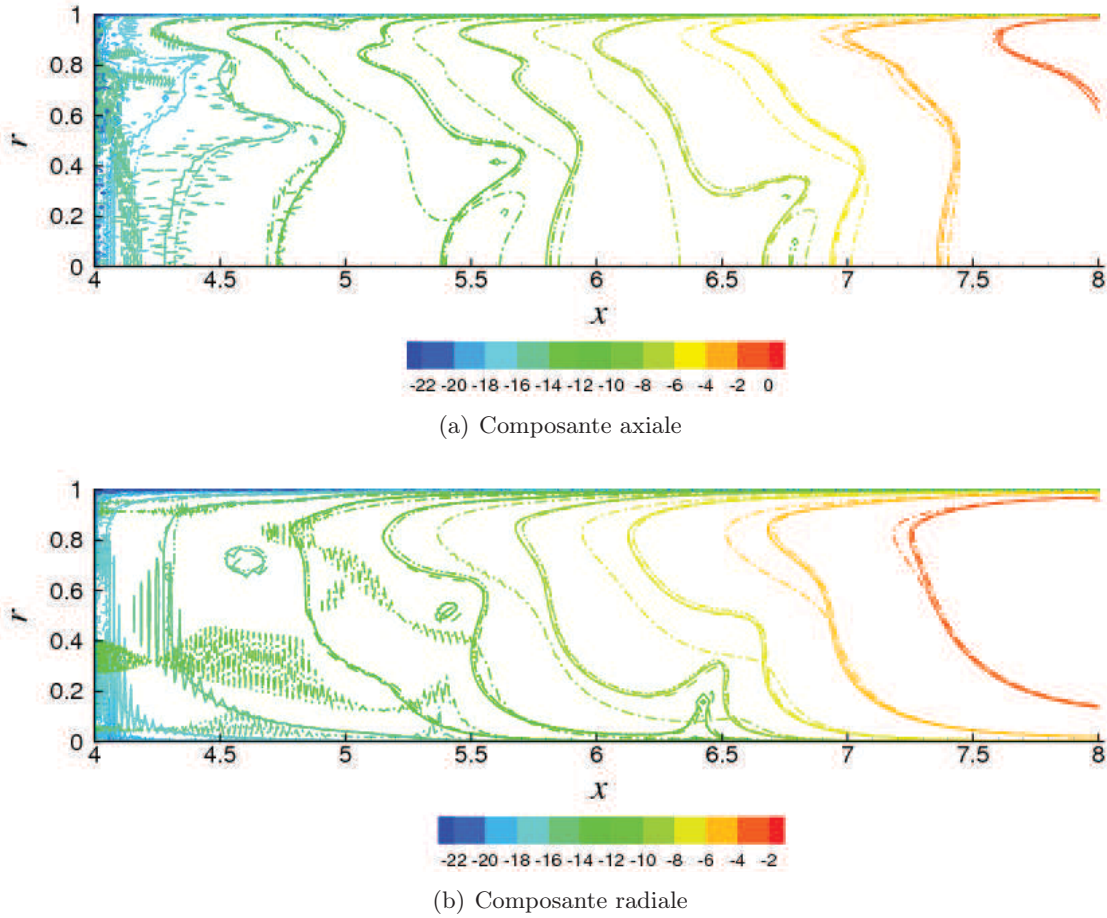


FIGURE 4.4 – Iso-contours relatifs à  $\log(|\hat{u}_x|)$  et  $\log(|\hat{u}_r|)$ , cas de calcul  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$ . (—) : mode  $\hat{\omega} = 59.38 - 19.05i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; (- - -) : mode  $\hat{\omega} = 59.63 - 18.83i$ , maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$ ; (- · - · -) : mode  $\hat{\omega} = 60.44 - 15.88i$  maillage monodomaine  $N \times M = 400 \times 100$ ; (- · · -) : mode  $\hat{\omega} = 59.49 - 19.018i$  maillage monodomaine  $N \times M = 100 \times 100$ , condition de pression nulle en sortie. Les fonctions propres sont normalisées avec la valeur de  $\hat{u}_x (= 7.5, r = 0.9)$ .

### 4.2.3 Points amphidromiques

Il existe donc un lien étroit entre l'existence de ce bruit numérique, la vérification de la condition de sortie sur la vitesse radiale et le fait que les valeurs propres n'aient pas atteint leur emplacement de référence obtenu avec les maillages  $MULTI_{d,1-4}^{2000}$  ou la condition de pression nulle. La superposition des fonctions propres calculées avec des maillages différents (figure 4.4) indique également que ce manque de précision a une influence sur l'emplacement des points amphidromiques. Ceux-ci sont stabilisés avec les maillages multi-domaines ou l'emploi de la condition de pression nulle. En revanche, dans le cas du maillage mono-domaine avec condition de traction nulle, pour lequel le bruit est le plus fort, ces points apparaissent dans la même région mais à un emplacement visiblement distinct, notamment en ce qui concerne la vitesse axiale. Par ailleurs, comme dans le cas  $Re = 100$ , le nombre de points amphidromiques que contient une fonction propre permet de définir le mode auquel celle-ci correspond. Partant du premier mode de la branche VSP  $\hat{\omega} = 35.2 - 23.7i$ , chaque champ de vitesse contient un point amphidromique de plus à mesure que l'on avance sur la branche VSP (voir figure 4.8 pour les modes contenant de 2 à 5 points amphidromiques). Par exemple, le troisième mode de la branche en contient deux, le quatrième trois, et ainsi de suite. Désormais, nous pourrions donc identifier chaque mode par l'indice correspondant au nombre de points amphidromiques qu'il contient — par exemple,

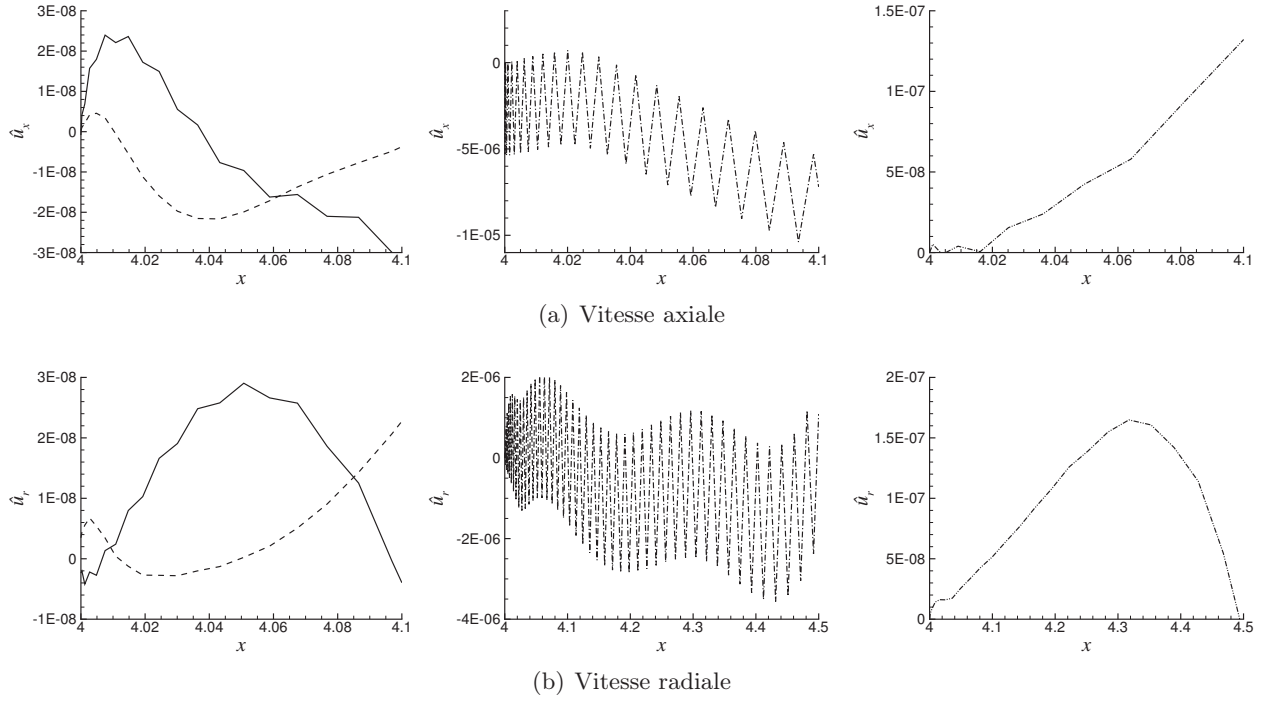


FIGURE 4.5 – Profils axiaux de fluctuations de vitesse au voisinage de l’entrée du domaine en  $r = 0.964$ . (—), mode  $\hat{\omega} = 59.38 - 19.05i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; (- - -), mode  $\hat{\omega} = 59.63 - 18.83i$ , maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$ . (- · - · -), mode  $\hat{\omega} = 60.44 - 15.88i$  maillage monodomaine  $N \times M = 400 \times 100$ . (- · · -), mode  $\hat{\omega} = 59.49 - 19.18i$  maillage monodomaine  $N \times M = 100 \times 100$ , condition de pression nulle en sortie.

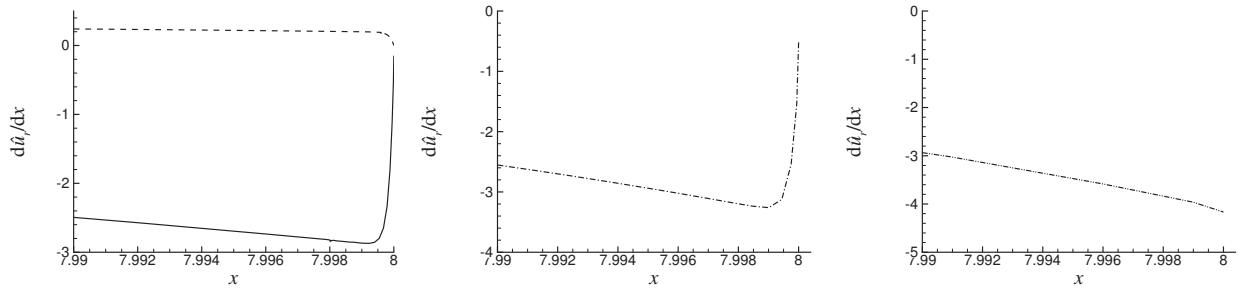


FIGURE 4.6 – Profils axiaux de la quantité  $\partial_x \hat{u}_r$  en sortie du domaine en  $r = 0.964$ . (—), mode  $\hat{\omega} = 59.38 - 19.05i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; (- - -), mode  $\hat{\omega} = 59.63 - 18.83i$ , maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$ . (- · - · -), mode  $\hat{\omega} = 60.44 - 15.88i$  maillage monodomaine  $N \times M = 400 \times 100$ . (- · · -), mode  $\hat{\omega} = 59.49 - 19.18i$  maillage monodomaine  $N \times M = 100 \times 100$ , condition de pression nulle en sortie.

on posera  $\hat{\omega}_3 \approx 59 - 19i$ .

#### 4.2.4 Conclusion

Malgré les difficultés numériques rencontrées dans le calcul de stabilité de l’écoulement de Taylor-Culick pour un nombre de Reynolds égal à 2000, il apparaît qu’il existe bel et bien une branche de modes discrets définis chacun de manière relativement robuste, dans le sens où l’on ne peut pas les confondre entre eux ni supposer qu’ils appartiennent à une branche continue. En effet, nous sommes parvenus à calculer des spectres dont la branche des modes des plus instables dépend peu de la discrét-



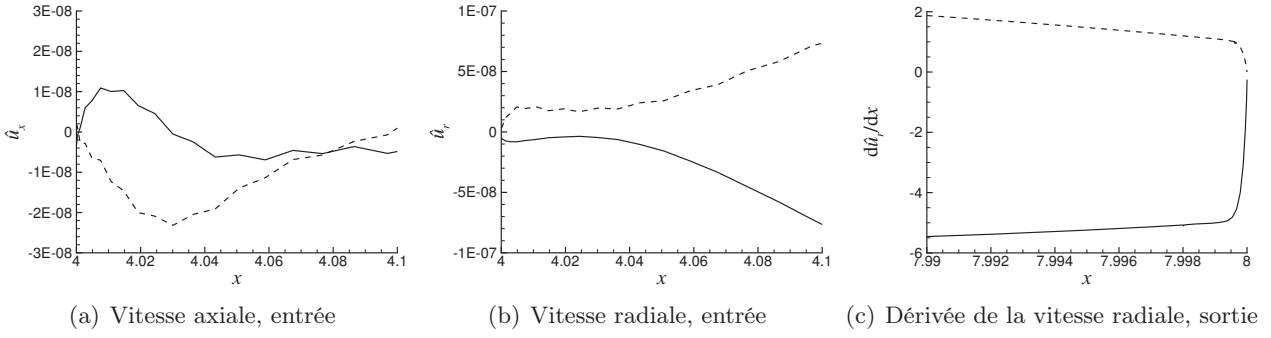


FIGURE 4.7 – Profils axiaux de fluctuations de vitesse en  $r = 0.964$ . (—), mode  $\hat{\omega} = 89.41 - 15.13i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{d,2}^{2000}$ ; (- - -), mode  $\hat{\omega} = 89.64 - 14.8i$ , maillage  $MULTI_{d,5}^{2000}$ .

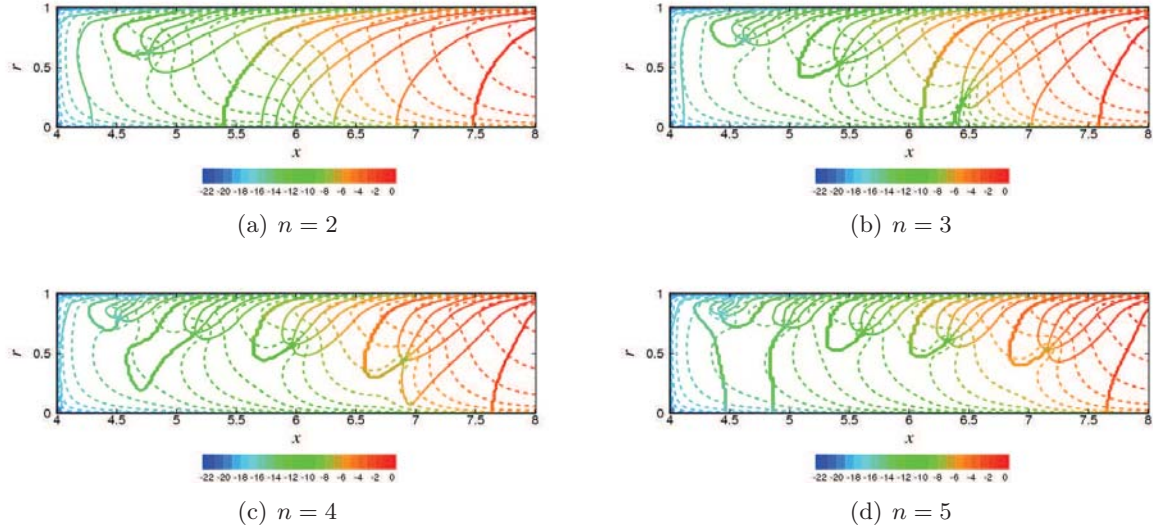


FIGURE 4.8 – Iso-contours relatifs à  $\log(|\hat{u}_x|)$  et  $\log(|\hat{u}_r|)$  (traits pointillés et contours de couleur) et lignes de phase  $\phi = k\pi/2$  correspondantes (traits pleins) tracés pour les modes comptant deux à cinq points amphidromiques. Cas de calcul :  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$ . Maillage  $MULTI_{d,2}^d$ . Les points amphidromiques sont les points où l’amplitude des fluctuations est nulle et où leur phase n’est pas définie. C’est pourquoi ils apparaissent là où les lignes de phase convergent et où l’amplitude décroît.

tisation employée, tandis que chaque mode de cette branche est défini par un nombre précis de points amphidromiques apparaissant dans le champ de ses fluctuations de vitesse.

Plus généralement, deux indices semblent indiquer que ces modes ont une existence physique. D’une part, nous trouvons des valeurs propres dont la partie réelle souffre finalement assez peu d’un manque de raffinement du maillage près de la sortie et des erreurs numériques qui s’en suivent. D’autre part, nous obtenons strictement les mêmes valeurs propres dans le cas du problème bien posé (dans le sens où sa condition de sortie permet à l’opérateur des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées d’être inversible) et bien résolu que dans le cas où seule la pression est imposée en sortie et qu’il manque une condition aux limites. Ce résultat semble donc indiquer encore une fois que les effets visqueux qui conduisent à l’apparition d’une couche limite en sortie n’ont pas d’influence sur les modes eux-mêmes, dans la mesure où c’est l’imposition de la pression en sortie et des fluctuations de vitesse en entrée qui fixe le caractère discret de la branche de modes VSP. En revanche, il est important de prendre



en compte ces effets visqueux du point de vue mathématique —pour la définition d’un problème bien posé— et numérique —pour obtenir un problème matriciel inversible.

## 4.3 Problème adjoint à Re = 2000

### 4.3.1 Convergence en maillage

Si la convergence en maillage des valeurs propres du problème direct pose des difficultés, il n’y a aucune raison pour qu’il en soit autrement pour le problème adjoint. Nous rappelons que la définition du problème adjoint effectuée en section 2.1.3 conduit à deux conditions sous lesquelles son spectre est correctement calculé.

- La coïncidence des valeurs propres : si  $\hat{\omega}$  et  $\tilde{\omega}$  sont les valeurs propres directes et adjointes, alors  $\hat{\omega} = -\tilde{\omega}^* = \tilde{\omega}$  car le spectre de ces deux problèmes est symétrique par rapport à l’axe imaginaire.
- Le critère de bi-orthogonalité : pour  $\hat{\mathbf{u}}_n$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_m$  deux champs de vitesse direct et adjoints associés à deux modes propres (de valeurs propres pas nécessairement identiques), l’identité de Lagrange (2.17) implique que  $\langle \hat{\mathbf{u}}_n; \tilde{\mathbf{u}}_m \rangle$  est de la forme  $\alpha_n \delta_{nm}$  où  $\delta$  est le tenseur de Krönercker et  $\alpha_n$  un nombre complexe. Il faut noter que la non-normalité de l’opérateur des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées peut conduire à un coefficient de non-normalité  $\gamma_n = \|\hat{\mathbf{u}}_n\| \|\tilde{\mathbf{u}}_n\| / \langle \hat{\mathbf{u}}_n; \tilde{\mathbf{u}}_n \rangle$  qui soit très grand devant 1, du fait justement que le produit scalaire entre fonctions propres directe et adjointe associées à un même mode est très petit devant 1. Du coup, il est plus probable que, numériquement, des jeux de fonctions propres directes et adjointes vérifient une relation de biorthogonalité approchée de la forme

$$\langle \hat{\mathbf{u}}_n; \tilde{\mathbf{u}}_m \rangle = \alpha_{nm} \quad \text{avec } |\alpha_{nn}| \ll \alpha_{nm} \text{ pour } n \neq m \quad (4.1)$$

Le critère de biorthogonalité consiste à dire que les valeurs propres directes et adjointes sont suffisamment cohérentes entre elles si la matrice de coefficients  $\alpha_{nm}$  a des termes diagonaux suffisamment grands devant les autres, disons au moins un ordre de grandeur.

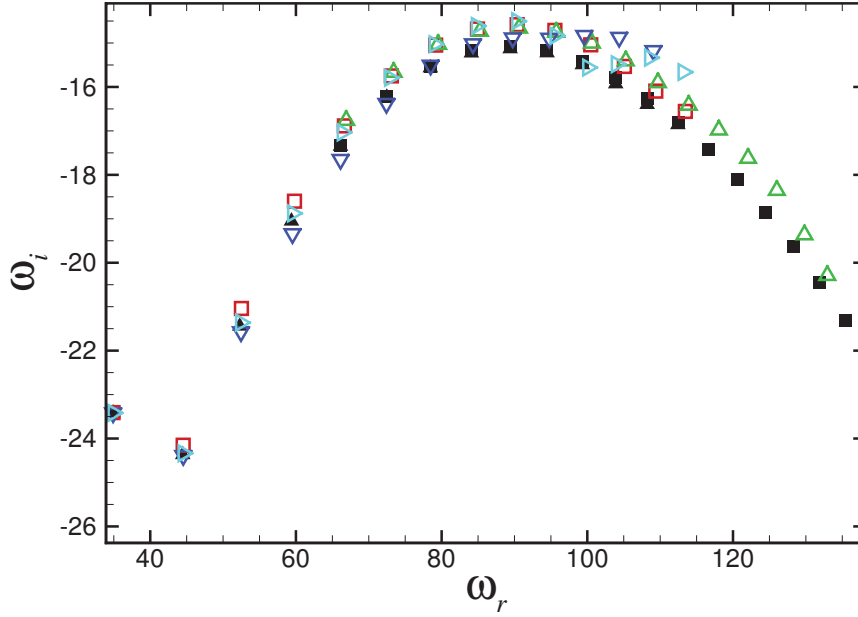
Nous avons vu au chapitre précédent que, pour un nombre de Reynolds égal à 100, le calcul des valeurs propres adjointes avec un maillage monobloc contenant  $N \times M = 200 \times 100$  points conduisait au même résultat qu’un maillage multi-domaine raffinée près de la condition d’entrée, alors que le calcul des valeurs propres directes nécessitait forcément l’utilisation d’un maillage multi-domaines. Ici, à Re = 2000, c’est le contraire qui se passe : l’intégration du problème direct est relativement aisée, alors que nous ne sommes pas parvenus à calculer deux spectres adjoints qui coïncident parfaitement entre eux ni avec le spectre direct de référence que nous définissons comme celui calculé avec les maillages  $\text{MULTI}_{d,1}^{2000}$  et  $\text{MULTI}_{d,2}^{2000}$ . En tables 4.3 et 4.4, nous présentons les trois maillages qui conduisent aux résultats les plus probants, reportés en figure 4.9.

	$x_0$	$N_1$	$x_1$	$N_2$	$x_2$	$N_3$	$x_3$
$\text{MULTI}_{a,1}^{2000}$	4	31	4.0008	41	4.02	160	8
$\text{MULTI}_{a,2}^{2000}$	4	61	4.0008	41	4.08	201	8
$\text{MULTI}_{a,3}^{2000}$	4	61	4.0008	41	4.08	231	8

TABLE 4.3 – Discrétisations axiales utilisées pour le calcul des modes propres du problème adjoint à Re = 2000.

Les maillages utilisés ont des caractéristiques très proches en ce qui concerne la définition des limites entre sous-domaines : en particulier, la limite du premier domaine à  $x = 4.0008$  semble être le meilleur

	$r_0$	$M_1$	$r_1$	$M_2$	$r_2$	$M_3$	$r_3$
$\text{MULTI}_{a,1}^{2000}$	0	50	0.9	31	0.9995	30	1
$\text{MULTI}_{a,2}^{2000}, \text{MULTI}_{a,3}^{2000}$	0	50	0.97	51	0.999	21	1

 TABLE 4.4 – Discrétisations radiales utilisées pour le calcul des modes propres du problème direct à  $\text{Re} = 2000$ .

 FIGURE 4.9 – Spectres calculés pour  $\text{Re} = 2000$ ,  $X_{\text{in}} = 4$  et  $X_{\text{out}} = 8$ . Spectres du problème direct :  $\square$  :  $\text{MULTI}_{d,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\Delta$  :  $\text{MULTI}_{d,2}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 100 + 20i$ ;  $\square$  :  $\text{MULTI}_{a,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 100 + 20i$ ;  $\Delta$  :  $\text{MULTI}_{a,1}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\nabla$  :  $\text{MULTI}_{a,2}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ ;  $\triangleright$  :  $\text{MULTI}_{a,3}^{2000}$ ,  $\omega_0 = 60 + 10i$ .

choix possible. De même, il nous a été impossible d'obtenir des valeurs propres adjointes proches des valeurs propres directes sans renforcer la discrétisation près de la paroi. Dans tous les cas, nous obtenons soit un spectre situé légèrement au-dessus du spectre direct (maillages  $\text{MULTI}_{a,1}^{2000}$  et  $\text{MULTI}_{a,3}^{2000}$ ), soit des valeurs propres tantôt au-dessus, tantôt en-dessous (maillages  $\text{MULTI}_{a,2}^{2000}$ ). En outre, le maillage le plus fin ( $\text{MULTI}_{a,2}^{2000}$ ) permet certes d'obtenir les valeurs propres les plus satisfaisantes aux basses fréquences, mais il est aussi celui qui conduit à des modes «hors branche VSP» aux hautes fréquences.

Il semble donc difficile de trouver un maillage optimal qui permette de calculer un spectre coïncidant avec le spectre direct. C'est pourquoi, pour former une base biorthogonale à partir des fonctions propres directes calculées avec les maillages  $\text{MULTI}_{d,1-2}^{2000}$ , et des fonctions propres adjointes calculées avec les maillages  $\text{MULTI}_{a,1-4}^{2000}$ , nous choisissons systématiquement, pour un mode donné, celles dont les valeurs propres sont les plus proches deux à deux. Cela nous permet d'obtenir une matrice de biorthogonalité dont les termes diagonaux sont au moins dix fois plus grands que ceux de leur ligne et de leur colonne pour les modes d'indice 0 à 11, et au moins cinq fois plus grands pour les deux modes restants. Par comparaison, on obtenait des termes diagonaux dominants d'un facteur 20 au moins dans le cas  $\Re = 100$  en utilisant les fonctions propres directes et adjointes calculées respectivement avec le même maillage.

### 4.3.2 Limites de la précision numérique

Voyons maintenant comment cet écart récurrent aux valeurs propres de référence se traduit dans l'allure des fonctions propres. En figure 4.10 sont tracées les lignes de niveau des fluctuations de vitesse en échelle logarithmique. Nous retrouvons la croissance vers l'entrée du domaine et vers la paroi de ces fonctions propres, la présence de points amphidromiques, mais aussi malheureusement de bruit numérique près de la sortie, là où l'amplitude des fluctuations est faible.

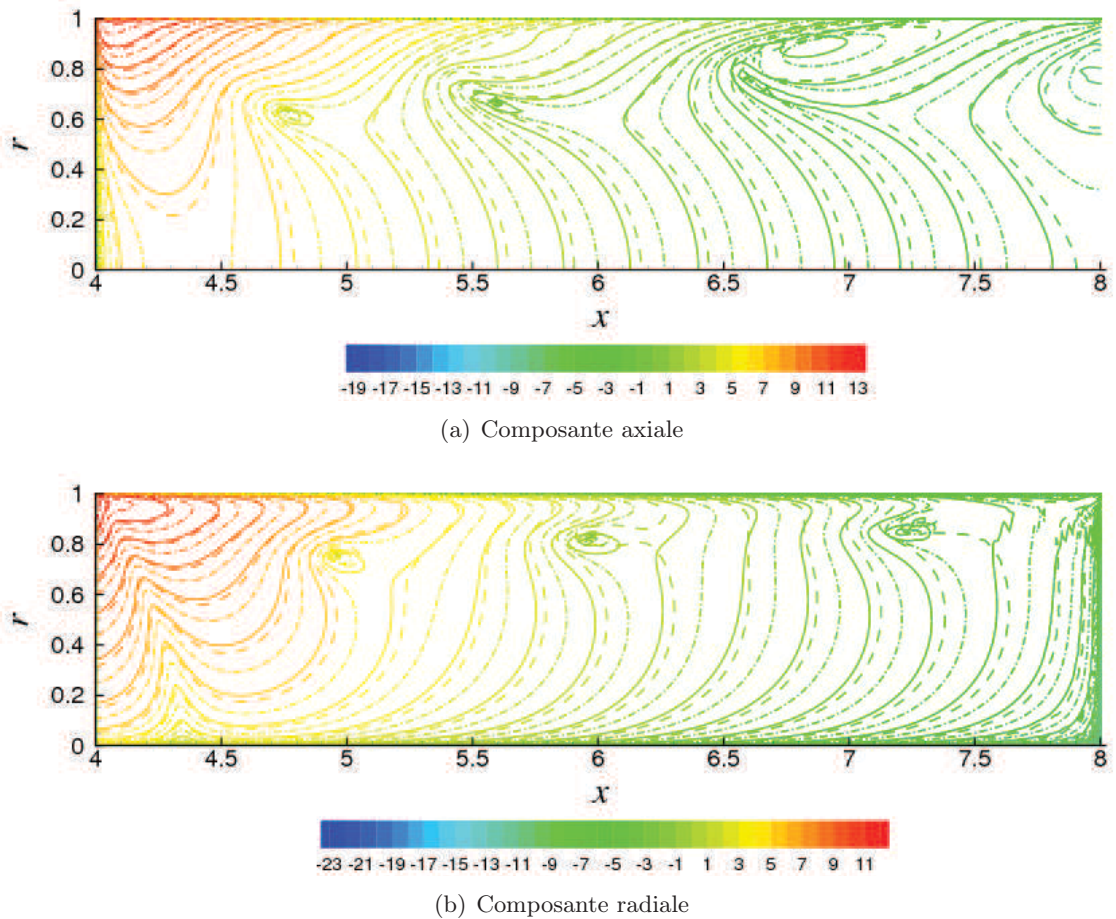


FIGURE 4.10 – Iso-contours relatifs à  $\log(|\tilde{u}_x|)$  et  $\log(|\tilde{u}_r|)$ , cas de calcul  $Re = 2000$ ,  $X_{in} = 4$ ,  $X_{out} = 8$ . (—) : mode  $\tilde{\omega} = 59.83 - 18.53i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{a,1}^{2000}$ ; (- - -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.53 - 19.34i$ , maillage  $MULTI_{a,2}^{2000}$ ; (- · - · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.55 - 18.88i$  maillage  $MULTI_{a,3}^{2000}$ . Valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ .

Une vue plus détaillée de ces fonctions propres est donnée sur le tracé de leurs profils axiaux et radiaux en figures 4.11 et 4.12. Premièrement, la croissance vers l'entrée des fluctuations de vitesse est au moins aussi forte que celle vers la sortie des fonctions propres directes (figures 4.11(a) et 4.11(b)). Corrélativement, cela induit un phénomène de couche limite sur la vitesse radiale particulièrement violent (figure 4.11(e)). Dans la direction radiale, si les fonctions propres directes ne contenaient pas de difficultés numériques, il en va autrement notamment de la vitesse axiale qui possède une couche limite au voisinage de  $r = 1$  sur toute la longueur du domaine (figures 4.12(b) et 4.12(d)). À  $Re = 100$ , ce problème n'avait pas semblé déterminant dans le dimensionnement du maillage ; ici, ce phénomène explique pourquoi les valeurs propres calculées avec des maillages en un seul bloc suivant  $r$  ne permettent pas d'approcher les valeurs propres directes. Comme dans le cas du problème direct, on trouve des oscillations numériques sur les fluctuations de vitesse radiale en sortie, mais cette fois suivant  $x$

(figure 4.11(e)) et suivant  $r$  (figure 4.12(f)). Cela tend à prouver qu'une condition aux limites induisant une couche limite dans une direction donnée induit des oscillations «un point sur deux» si celle-ci est imparfaitement résolue. De plus, la faible taille de ces zones visqueuses (ici de l'ordre de  $\Delta x = 10^{-4}$ ) peut devenir problématique vis-à-vis de la collocation spectrale : certes, il est toujours possible de définir des sous-domaines de plus en plus petits, mais il ne faut pas oublier que les conditions de raccord entre domaines, portant sur la dérivée première des fonctions propres, laissent les erreurs numériques se propager sur le domaine de calcul entier. Cela explique pourquoi il est impossible, par exemple, d'obtenir de meilleurs résultats avec un premier sous-domaine longitudinal plus petit, même si cela semble nécessaire vis-à-vis de la taille de la couche limite sur la vitesse radiale.

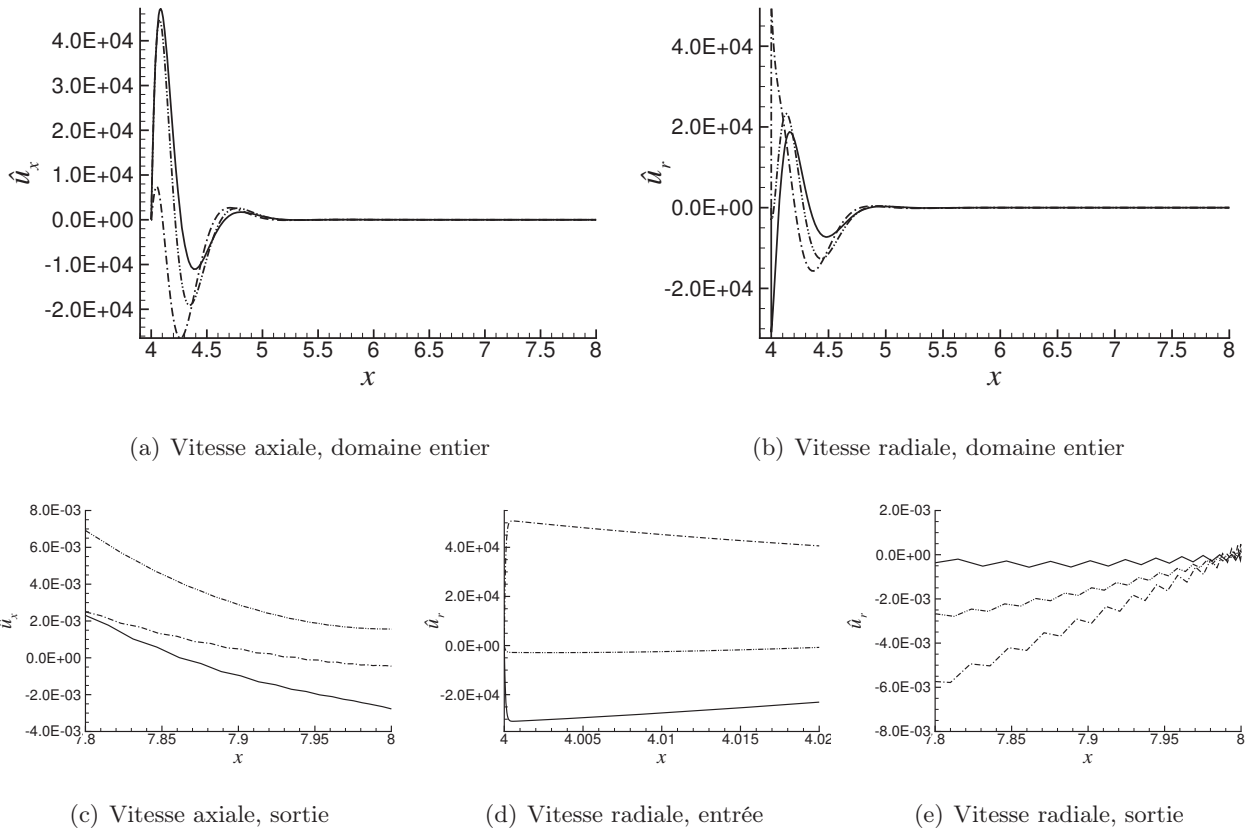


FIGURE 4.11 – Profils axiaux de fluctuations de vitesse en  $r = 0.964$ . (—) : mode  $\tilde{\omega} = 59.83 - 18.53i$  calculé avec le maillage  $MULTI_{a,1}^{2000}$  ; (- · - · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.53 - 19.34i$ , maillage  $MULTI_{a,2}^{2000}$  ; (- · · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.55 - 18.88i$  maillage  $MULTI_{a,3}^{2000}$ . Valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ .

En conclusion, les couches limites apparaissant sur les fonctions propres adjointes semblent encore plus fines à  $Re = 2000$  qu'à  $Re = 100$ . Pour bien les résoudre, il est nécessaire d'utiliser des discrétisations multi-domaines extrêmement fines. Du point de vue numérique, il semble que les limites de la collocation spectrale soient atteintes, pour deux raisons : d'une part, cette méthode induit des erreurs numériques lorsque l'on utilise trop de points ou l'on définit des sous-domaines trop resserrés ; d'autre part, le problème adjoint semble encore plus sensible que le problème direct aux erreurs numériques, ce qui nous empêche de calculer des valeurs propres complètement convergées et des fonctions propres qui ne soient pas bruitées. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas tenté d'effectuer une analyse de stabilité à un nombre de Reynolds supérieur, ne serait-ce qu'égal à 3000 —ne parlons pas des valeurs usuelles atteintes dans les moteurs réels, dix fois plus grandes ! Voyons donc maintenant quel est l'effet du nombre de Reynolds sur les valeurs propres et l'allure des fonctions propres.

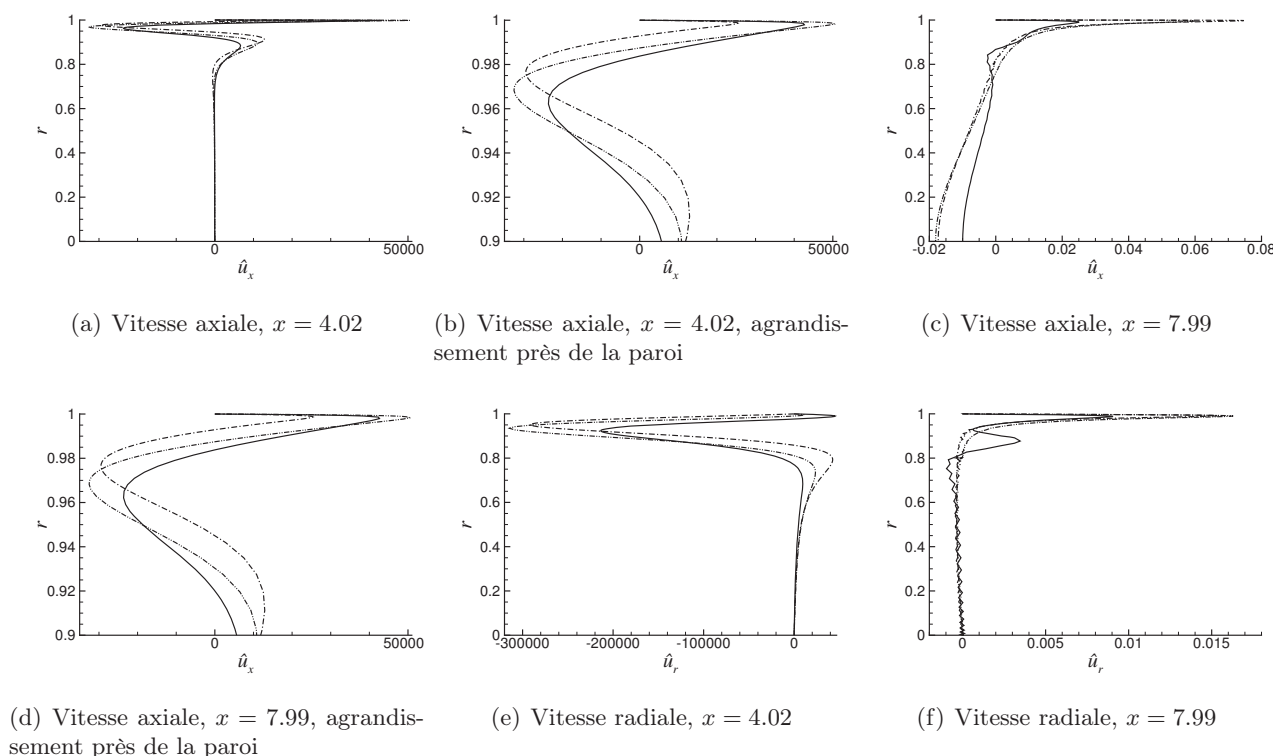


FIGURE 4.12 – Profils radiaux de fluctuations de vitesse. (—) : mode  $\tilde{\omega} = 59.83 - 18.53i$  calculé avec le maillage  $\text{MULTI}_{a,1}^{2000}$  ; (---) : mode  $\tilde{\omega} = 59.53 - 19.34i$ , maillage  $\text{MULTI}_{a,2}^{2000}$  ; (- · - · -) : mode  $\tilde{\omega} = 59.55 - 18.88i$  maillage  $\text{MULTI}_{a,3}^{2000}$ . Valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ .

## 4.4 Effet du nombre de Reynolds

Nous nous intéressons ici à l'influence du nombre de Reynolds (variant entre 100 et 2000) sur les modes de stabilité, tant du problème direct que du problème adjoint. À chaque cas présenté ici, nous nous sommes assurés de trouver des maillages pour ces deux problèmes permettant de calculer le même spectre. Les maillages en question sont présentés dans les tables 4.5, 4.7 et 4.6.

### 4.4.1 Spectres et points amphidromiques

Intéressons-nous aux modes d'indice 0 à 12 de la branche la plus proche de l'axe réel, tracée pour les nombres de Reynolds  $\text{Re} \in \{100, 200, 500, 700, 1000, 2000\}$  en figure 4.13. Quel que soit le nombre de Reynolds, ceux-ci répartissent toujours sur une branche en forme de serpe qui, partant du mode

	$x_0$	$N_1$	$x_1$	$N_2$	$x_2$	$N_3$	$x_3$
Re = 2000	4	151	7.96	31	7.998	20	8
Re = 1000, Re = 700	4	151	7.96	41	7.996	20	8
Re = 500, Re = 200, Re = 100	4	151	7.96	30	7.996	20	8

TABLE 4.5 – Discrétisations axiales utilisées pour le calcul des modes propres du problème direct. Les discrétisations radiales sont d'un seul bloc avec  $M = 100$  points.

	$x_0$	$N_1$	$x_1$	$N_2$	$x_2$	$N_3$	$x_3$
Re = 2000, Re = 1000	4	31	4.0008	41	4.02	160	8
Re = 700, Re = 500, Re = 200, Re = 100	4	21	4.0004	31	4.04	150	8

TABLE 4.6 – Discrétisations axiales utilisées pour le calcul des modes propres du problème adjoint.

	$r_0$	$M_1$	$r_1$	$M_2$	$r_2$	$M_3$	$r_3$
Re = 2000, Re = 1000,	0	50	0.9	31	0.9995	30	1
Re = 700, Re = 500, Re = 200, Re = 100	0	100	1				

TABLE 4.7 – Discrétisations radiales utilisées pour le calcul des modes propres du problème adjoint.

$\omega_0$ , pivôte vers l'axe réel quand le nombre de Reynolds augmente. Notons que cette variation se fait de plus en plus lente à mesure que le nombre de Reynolds augmente, de telle sorte que les spectres calculés pour Re = 1000 et Re = 2000 sont par exemple très proches. De plus, à partir de Re = 500, ce sont surtout les parties imaginaires des valeurs propres qui varient et deviennent moins négatives, les parties réelles étant pratiquement constantes.

De même, le tracé des fonctions propres directes pour Re = 100, Re = 500 et Re = 2000 (figure 4.14) montre que la viscosité a une influence minimale sur les champs de fluctuations de vitesse. En particulier, la position des points amphidromiques ne change quasiment pas suivant le cas considéré. La différence est même à peine visible entre Re = 500 et Re = 2000, ce qui laisse présager de différences encore plus minimes pour des nombres de Reynolds encore supérieurs.<sup>2</sup> On peut donc supposer que seules les limites du domaine ont une influence sur la position des valeurs propres dans le plan complexe et l'allure des détachements tourbillonnaires, au moins dans zone où l'amplitude du VSP reste linéaire. De ce point de vue, un essai gaz froid et un tir réel de même géométrie —en prenant en compte la position d'éventuels intersegments— devraient donner lieu à des instabilités de même fréquence.

#### 4.4.2 Tailles des couches limites

Nous avons vu précédemment qu'il est nécessaire de bien résoudre un certain nombre de couches limites apparaissant sur les fonctions propres afin de limiter la quantité de bruit numérique et d'obtenir les bonnes valeurs propres. Ce problème était à peine apparu à Re = 100, mais était devenu très important à Re = 2000. Pour ce qui est du problème direct, nous confirmons que le nombre de Reynolds n'a pas d'influence sur les profils radiaux de fluctuations de vitesse axiale et radiale (figures 4.15(a) et 4.15(b)) qui ont systématiquement la même forme (premier extrémum en  $r = 0.95$  pour  $\hat{u}_x$  et en  $r = 0.85$  pour  $\hat{u}_r$ ). Il est d'ailleurs intéressant de noter que les mêmes profils apparaissaient lors des calculs de stabilité effectués sur le domaine entier (section 2.4). En revanche, nous confirmons que le point critique du calcul des fonctions propres directes est bien la résolution de la couche limite au fond avant, dont la taille diminue fortement avec l'augmentation du nombre de Reynolds (figure 4.15(c)) : la quantité  $\partial_x \hat{u}_r$  atteint zéro en approximativement<sup>3</sup>  $\Delta x = 0.02$  à Re = 100,  $\Delta x = 0.003$  à Re = 500

2. Le même phénomène est observé pour les fonctions propres adjointes

3. Il n'est pas aisé de définir ici une taille de couche limite. La quantité  $\partial_x \hat{u}_r$  semble ici se comporter comme si la contrainte  $\partial_x \hat{u}_r$  n'existait pas, exactement comme dans le cas de la condition de pression nulle en sortie, puis décroît brusquement vers 0. Nous définissons à vue de nez la taille de couche limite en sortie comme la distance à la sortie à partir de laquelle  $\partial_x \hat{u}_r$  «sort de sa trajectoire».



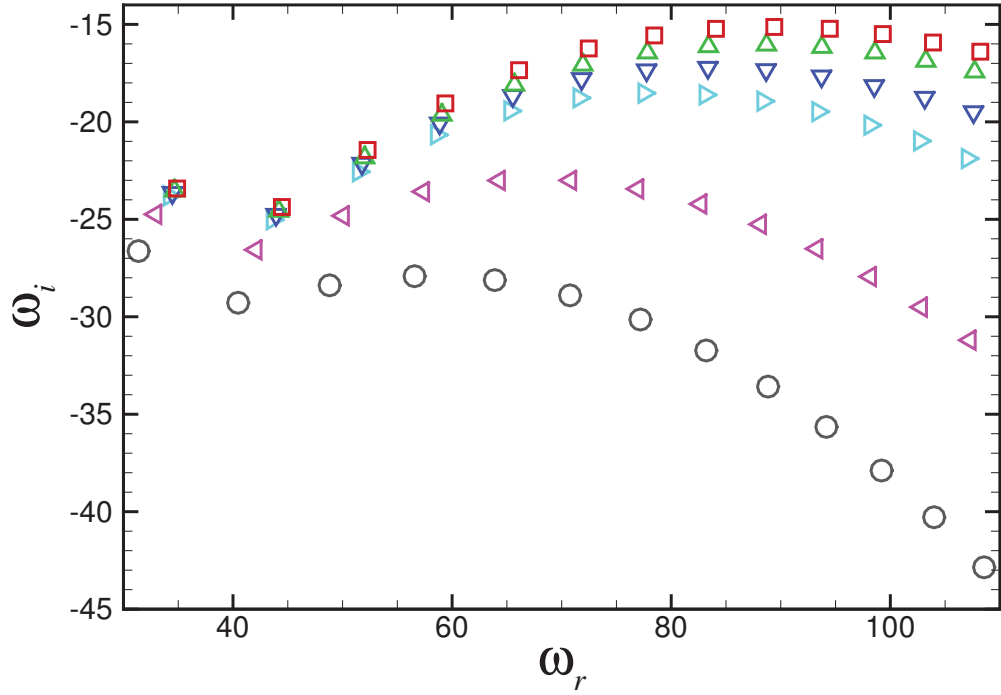


FIGURE 4.13 – Spectres calculés  $X_{\text{in}} = 4$  et  $X_{\text{out}} = 8$  et différents nombres de Reynolds, avec une valeur propre-cible  $\omega_0 = 60 + 10i$ . Les modes propres sont représentés jusqu'à  $n = 12$  points amphidromiques. Les maillages utilisés sont renseignés en table 4.5.  $\square$  :  $\text{Re} = 2000$ ;  $\triangle$  :  $\text{Re} = 1000$ ;  $\nabla$  :  $\text{Re} = 700$ ;  $\triangleright$  :  $\text{Re} = 500$ ;  $\triangleleft$  :  $\text{Re} = 200$ ;  $\circ$  :  $\text{Re} = 100$ .

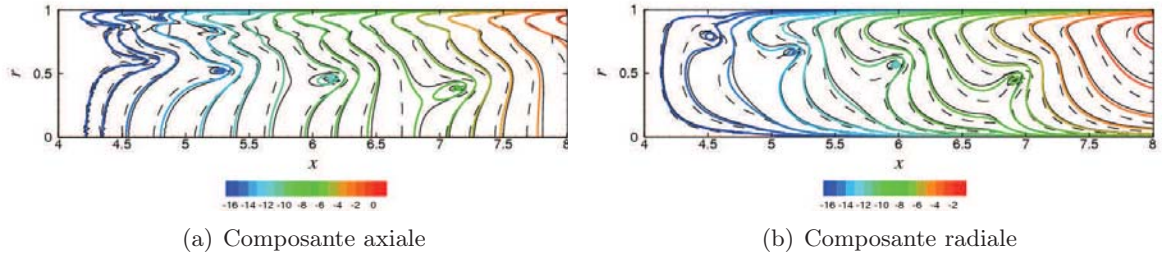


FIGURE 4.14 – Iso-contours relatifs à  $\log(|\hat{u}_x|)$  et  $\log(|\hat{u}_r|)$  (problème direct). Contours en couleur : mode  $\hat{\omega} = 66.07 - 17.68i$  calculé pour  $\text{Re} = 2000$ ,  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$  avec le maillage  $\text{MULTI}_{d,0}^{2000}$ ; traits pleins noirs : mode  $\hat{\omega} = 65.29 - 19.44i$  calculé pour  $\text{Re} = 500$ ,  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$  avec le maillage  $\text{MULTI}_{d,0}^{500}$ ; traits pointillés noirs : mode  $\hat{\omega} = 63.39 - 28.12i$  calculé pour  $\text{Re} = 100$ ,  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$  avec le maillage with  $\text{MULTI}_{d,0}^{100}$ . Les fonctions propres sont normalisées avec la valeur de  $u_x(x = 7.5, r = 0.9)$ .

et  $\Delta x = 0.0005$  à  $\text{Re} = 2000$ . Cette évolution ressemble fortement à celle en  $\Delta x = k/\text{Re}$  rencontrée dans le cas du problème de stabilité monodimensionnel simplifié, où nous avons mis en évidence la présence d'une couche limite dont le terme dominant était en  $e^{\text{Re}(x-1)}$ .

Pour ce qui concerne le problème adjoint, il est peu probable que la vitesse axiale connaisse une évolution brusque près de l'entrée, de même que la vitesse radiale en proche paroi. En effet, les fluctuations de vitesse sont nulles sur ces deux limites, mais l'équation de continuité implique également



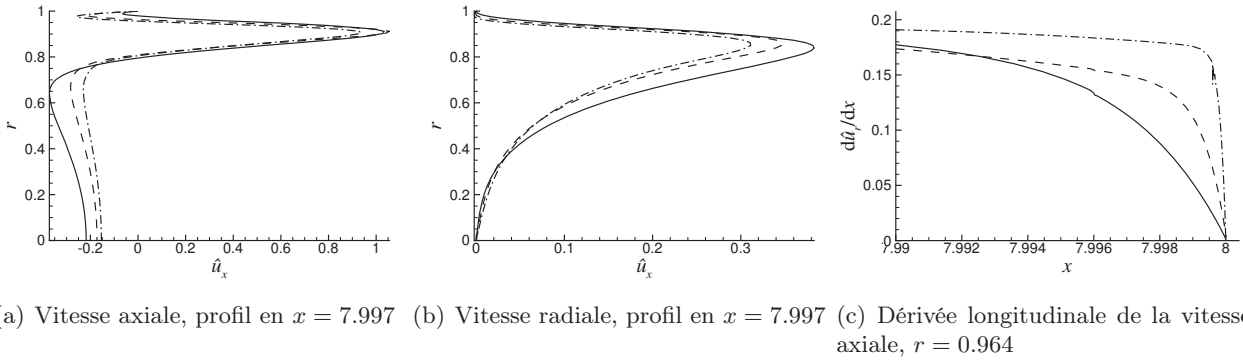


FIGURE 4.15 – Profils de fluctuations de vitesse pour le problème direct, mode correspondant à la valeur propre  $\hat{\omega}_3$ . (—) :  $Re = 100$ ; (- - -) :  $Re = 500$ ; (- · - · -) :  $Re = 2000$ .

que  $\partial_x \tilde{u}_x = 0$  en entrée et  $\partial_r \tilde{u}_r = 0$  à la paroi, ce qui lisse l'évolution de ces deux quantités. Par contre, le terme de cisaillement  $\partial_x \tilde{u}_r$  n'a aucune raison d'être nul en entrée. Or, quel que soit le nombre de Reynolds, les fonctions propres adjointes sont très fortement croissantes vers l'entrée du domaine, en particulier la vitesse radiale (figure 4.16(a)), qui semble rattrapper sur une très courte distance la condition d'attachement en entrée. La figure 4.16(b) montre en outre que cette couche limite est plus fine à mesure que le nombre de Reynolds augmente —  $\Delta x = 0.022$  à  $Re = 100$ ,  $\Delta x = 0.014$  à  $Re = 500$  et  $\Delta x = 0.001$  à  $Re = 2000$ , ce qui dénote une évolution plus rapide que l'évolution linéaire de celle apparaissant en sortie pour le problème direct. Par ailleurs, si l'on reprend l'idée de l'annulation ou non des termes de cisaillement aux limites, l'évolution de la vitesse axiale doit également être brusque au voisinage de la paroi débitante. Le profil 4.16(c) montre en effet que la distance à la paroi du premier maximum atteint par  $\tilde{u}_x$  diminue avec le nombre de Reynolds, ce qui nous pousse à également qualifier ce phénomène de couche limite.

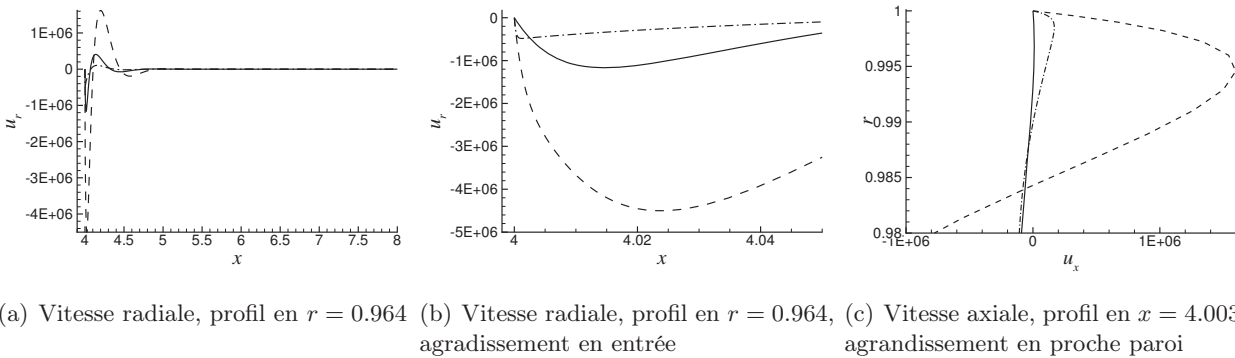


FIGURE 4.16 – Profils de fluctuations de vitesse pour le problème adjoint, mode correspondant à la valeur propre  $\tilde{\omega}_3$ . (—) :  $Re = 100$ ; (- - -) :  $Re = 500$ ; (- · - · -) :  $Re = 2000$ .

### 4.4.3 Conclusion

Pour conclure, les variations du nombre de Reynolds n'ont *a priori* que peu d'influence sur les modes propres, au moins en ce qui concerne la sélection fréquentielle des modes et l'allure générale des fonctions propres directes et adjointes (croissance, forme des structures tourbillonnaires pariétales, position des points amphidromiques). En revanche, les effets visqueux se concentrent au niveau de couches limites apparaissant sur certaines frontières du domaine de calcul, et dont la taille dépend

explicitement du nombre de Reynolds. À ce titre, les couches limites des fonctions propres adjointes voient leur taille décroître encore plus vite que celles du problème direct quand la viscosité diminue, ce qui explique que le calcul des premières soit plus ardu que celle des secondes à  $Re = 2000$  par exemple.

Il serait un peu rapide d'affirmer que la présence de ces couches limites n'a pas de réalité physique. Nous avons certes vu que celle qui apparaît en sortie pour le problème direct est due à l'imposition d'une condition ( $\partial_x \hat{u}_r = 0$ ) qui n'est imposée que pour des raisons mathématiques, à savoir la définition d'un problème bien posé ; en outre, il semble possible de se passer de cette condition<sup>4</sup> et calculer les bonnes valeurs propres avec un nombre de points bien inférieur à celui employé pour la résolution du problème bien posé. De plus, plusieurs conditions de sortie conduisant au calcul des mêmes valeurs propres avec des formes de couches limites de formes différentes ont été testées. Admettons donc que cette couche limite de sortie est sans importance.

En revanche, nous avons vu au chapitre précédent que les couches limites apparaissant dans les fonctions propres adjointes interviennent explicitement dans l'étude de sensibilité des modes de stabilité. Par exemple, la sensibilité des valeurs propres directes à une erreur numérique sur la vitesse radiale en entrée est directement proportionnelle à la quantité  $\partial_x \tilde{u}_r$  qui est justement très grande du fait de la présence d'une couche limite à cet endroit. De même, cette quantité intervient dans la sensibilité à une perturbation sur l'écoulement de base. Par conséquent, les valeurs propres peuvent par exemple être d'autant plus facilement modifiées par la présence d'un petit cisaillement —typiquement celui engendré par la présence d'un intersegment— que le nombre de Reynolds est grand. C'est pourquoi nous reviendrons plus en détail sur l'influence du nombre de Reynolds sur la *sensibilité* des valeurs propres au chapitre suivant.

## 4.5 Influence de la position des limites du domaine

### 4.5.1 Difficultés numériques

Nous étudions ici l'influence de la position des limites du domaine en prenant un nombre de Reynolds égal à 100, afin d'éviter les problèmes numériques rencontrés à  $Re = 2000$  et les questions parfois complexes de convergence en maillage. Nous faisons varier la position d'entrée et de sortie de trois manières différentes : à longueur de domaine constante égale à 4, nous considérons les domaines  $[X_{\text{in}} = 3, X_{\text{out}} = 7]$ ,  $[X_{\text{in}} = 4, X_{\text{out}} = 8]$  et  $[X_{\text{in}} = 5, X_{\text{out}} = 9]$  ; à position d'entrée constante  $X_{\text{in}} = 4$ , nous faisons varier la sortie  $X_{\text{out}}$  entre 7 et 9 ; enfin, à position de sortie constante  $X_{\text{out}} = 8$ , nous faisons varier celle d'entrée  $X_{\text{in}}$  entre 3 et 5.

Dans toutes les configurations étudiées, nous calculons à la fois les spectres directs et adjoints : lorsque tout va bien, les valeurs propres coïncident et il est inutile de multiplier les calculs avec des maillages différents pour s'assurer de leur convergence. Ce scénario idéal intervient dans le cas où les domaines de calcul sont petits : il suffit de reprendre la répartition de points utilisée dans le cas  $[X_{\text{in}} = 4, X_{\text{out}} = 8]$ . Pour les cas  $[X_{\text{in}} = 5, X_{\text{out}} = 9]$ , en revanche, le problème direct devient plus difficile à résoudre : il est nécessaire de raffiner la zone de la couche limite de sortie, et l'on parvient mal à éviter l'apparition d'oscillations numériques en entrée. De même, pour les domaines les plus longs —cas  $[X_{\text{in}} = 3, X_{\text{out}} = 8]$  et  $[X_{\text{in}} = 4, X_{\text{out}} = 9]$ —, l'intégration du problème adjoint devient également plus ardue. Il y a donc un «effet Reynolds» associé à l'emplacement des limites du domaines, à mettre en relation avec ce qui se passe dans le cas du problème monodimensionnel simplifié (section 3.3), où multiplier d'un facteur  $a$  la longueur du domaine revient à multiplier d'un facteur  $a^2$  le nombre de Reynolds. Ici, le problème dépend de deux nombres de Reynolds différents : celui qui, basé sur la vitesse d'injection et le rayon, prévaut dans la direction radiale, et un nombre de Reynolds longitudinal qui dépend de la «tranche» de l'écoulement de Taylor-Culick sur lequel l'analyse de stabilité est menée. Il est alors probable que la taille des couches limites apparaissant suivant  $x$  dépendent de ce nombre de

4. Nous ne sommes pas si affirmatifs, car la résolution de ce problème mal posé «déraille» dès que l'on utilise trop de points de collocation.

Reynolds axial. Il devient donc difficile de poursuivre cette étude paramétrique pour des parties plus aval de l'écoulement.

### 4.5.2 Étude paramétrique

Rappelons que pour le problème de stabilité monodimensionnel simplifié étudié en section 3.3, les valeurs propres sont très vite indépendantes de la taille du domaine d'intégration une fois que celui-ci est suffisamment grand. Ici, il faut prendre en compte non seulement la longueur du domaine, mais aussi sa position par rapport à l'écoulement de Taylor-Culick. Dans tout ce qui suit, nous étudions d'une part la position des valeurs propres dans le plan complexe, et d'autre part la position des points amphidromiques, par exemple ceux apparaissant sur les fluctuations de vitesse radiale adjointes du mode qui en possède trois. Nous exprimerons en particulier leur position axiale sous la forme  $\xi_a = (x_a - X_{in}) / (X_{out} - X_{in})$ , où  $x_a$  est leur position réelle et  $\xi_a$  une position réduite indépendante

Regardons dans un premier temps ce qui se passe quand on en fixe la longueur à 4 et qu'on le translate vers l'aval pour  $X_{in}$  allant de 3 à 5. La branche VSP en serpe se décale alors vers les  $\omega_i$  négatifs et légèrement vers les plus hautes fréquences, tandis que les valeurs propres sont plus espacées les unes des autres (figure 4.17). Corrélativement, les points amphidromiques se déplacent légèrement vers la sortie, sans qu'il soit possible de voir si leur position se stabilise. Dans le cas où l'on fixe l'entrée en  $X_{in} = 4$  et l'on augmente la taille du domaine (figure 4.18), la serpe est cette fois-ci presque immobile et ce sont les valeurs propres qui glissent vers celle du premier mode de la branche. Enfin, lorsque c'est la position de l'entrée du domaine qui est décalée vers l'amont à position de sortie fixée (figure 4.19), la branche VSP est décalée vers les  $\omega_i$  positifs et les modes se rapprochent. Cependant, il est difficile d'imposer l'entrée du domaine en amont de  $X_{in} = 3$ , toujours du fait de la difficulté de l'intégration numérique.

En résumé, la comparaison de ces trois spectres entre eux permet de discerner quelques «règles» de la dépendance de ces valeurs propres en fonction de  $X_{in}$  et  $X_{out}$ . D'abord, le premier mode de la branche (celui qui forme le «manche de la serpe» et ne contient aucun point amphidromique) est presque exclusivement fixé par la donnée de la position d'entrée. Ensuite, une fois  $X_{in}$  fixé, les valeurs propres ne semblent pas se décaler de manière nette dans une direction précise, mais plutôt glisser le long de la branche et se rapprocher entre elles quand  $X_{out}$  augmente. Enfin, il semble que ce rapprochement se ralentisse pour  $X_{out}$  grand. Contrairement au nombre de Reynolds, les limites du domaine ont donc une réelle influence sur la position des valeurs propres dans le plan complexe, ce sont même elles qui sont en grande partie responsables du caractère discret du spectre issu de la résolution du problème de stabilité.

## 4.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons élargi l'étude de stabilité linéaire des MPS simplifiés, initiée au chapitre 3 pour un nombre de Reynolds faible, au cas  $Re = 2000$  qui est plus représentatif de conditions expérimentales, telles que celles du montage VALDO. Nous sommes parvenus à résoudre correctement le problème direct, mais aussi le problème adjoint, tout en faisant état de limitations numériques liées à la correcte résolution des diverses couches limites qui apparaissent sur les fonctions propres. En ce sens, l'utilisation de maillages multi-domaines est très utile pour capturer ces phénomènes intervenant sur des distances très restreintes par rapport à la taille des structures tourbillonnaires pariétales, la prise en compte de nombre de Reynolds plus élevés ou de domaines de calcul beaucoup plus longs semble extrêmement ardue avec les outils dont nous disposons actuellement.

Sur le plan physique, effectuer une analyse de stabilité sur un domaine qui ne remonte pas jusqu'au fond avant permet bien d'obtenir une branche de modes qui ont la même allure spatiale que ceux calculés sur le domaine entier, et que l'on peut donc identifier au VSP mesuré expérimentalement. Leurs valeurs propres associées parfaitement discrètes, tandis que leurs fonctions propres sont caractérisées

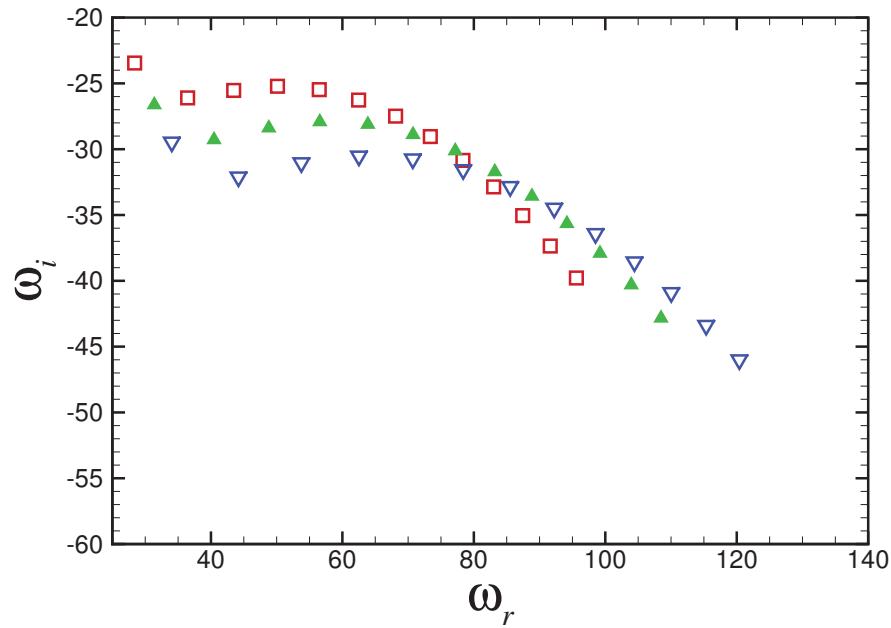


FIGURE 4.17 – Spectres calculés pour  $\text{Re} = 100$  et  $X_{\text{out}} - X_{\text{in}} = 4$  par intégration du problème adjoint.  
 $\square$  :  $X_{\text{in}} = 3, X_{\text{out}} = 7$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.22, 0.46, 0.80\}$  ;  
 $\blacktriangle$  :  $X_{\text{in}} = 4, X_{\text{out}} = 8$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.23, 0.49, 0.81\}$  ;  
 $\nabla$  :  $X_{\text{in}} = 5, X_{\text{out}} = 9$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.25, 0.51, 0.83\}$ .

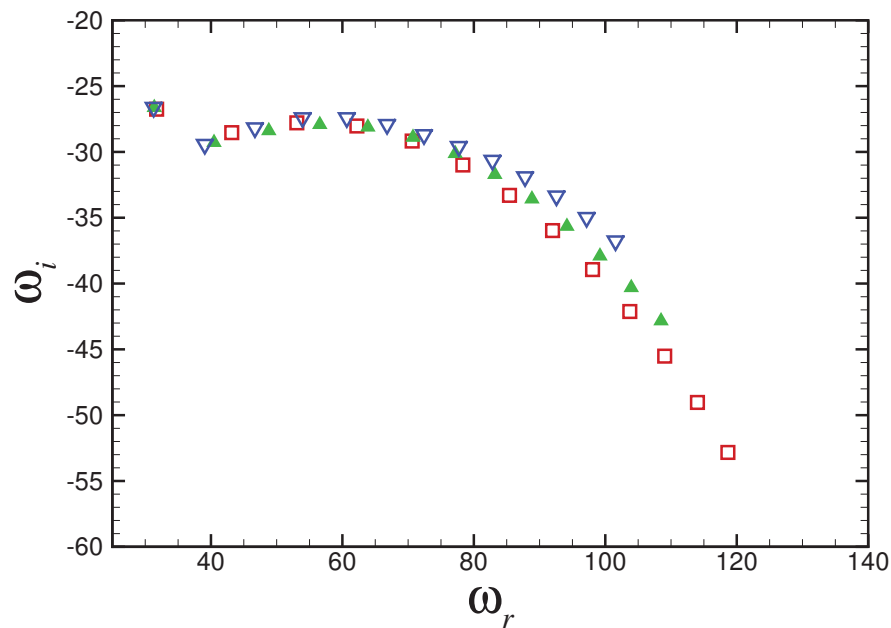


FIGURE 4.18 – Spectres calculés pour  $\text{Re} = 100$  et  $X_{\text{in}} = 4$  par intégration du problème adjoint.  
 $\square$  :  $X_{\text{out}} = 7$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.26, 0.50, 0.85\}$  ;  
 $\blacktriangle$  :  $X_{\text{out}} = 8$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.23, 0.49, 0.81\}$  ;  
 $\nabla$  :  $X_{\text{out}} = 9$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.21, 0.44, 0.74\}$ .

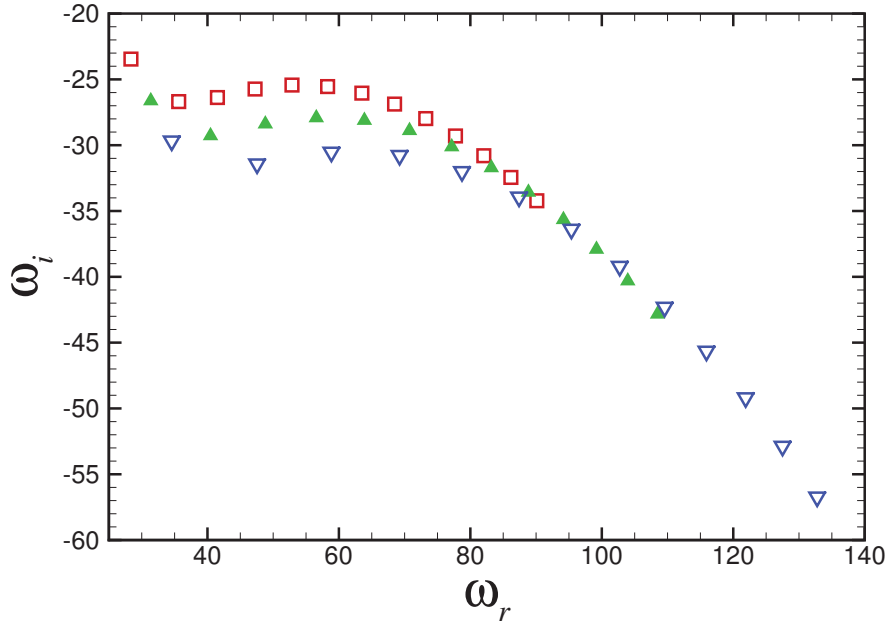


FIGURE 4.19 – Spectres calculés pour  $Re = 100$  et  $X_{\text{out}} = 8$  par intégration du problème adjoint.

- :  $X_{\text{in}} = 3$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.20, 0.44, 0.78\}$ ;
- ▲ :  $X_{\text{in}} = 4$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.23, 0.49, 0.81\}$ ;
- ▽ :  $X_{\text{in}} = 5$ ; points amphidromiques de  $\tilde{u}_r$  :  $\xi_a \in \{0.27, 0.54, 0.85\}$ .

par un nombre fini de points où l'amplitude des fluctuations de vitesse s'annule, appelés points amphidromiques, dont le nombre croît d'une unité pour chaque mode de pulsation réduite croissante pris sur la branche VSP. À domaine de calcul donné, ces modes propres ne dépendent pratiquement plus du nombre de Reynolds dès que celui-ci est de l'ordre du millier. En revanche, les valeurs propres sont très sensibles aux variations des bornes du domaine : l'abscisse d'entrée fixe la position du premier mode de la branche et les valeurs propres suivantes glissent en se rapprochant les unes des autres autour d'une même courbe quand on augmente la taille du domaine. Il est malheureusement difficile de dire si ces modes finissent par ne plus bouger quand la taille du domaine est beaucoup plus grande que celle utilisée dans cette étude.

En pratique, ces résultats ont trois conséquences. Premièrement, l'obtention de modes propres discrets est intimement liée à la prise en compte d'une abscisse de début de domaine non-nulle, autrement dit, sans doute à l'existence d'une irrégularité géométrique des MPS qui fixe le point d'apparition des détachements tourbillonnaires pariétaux. Deuxièmement, ces modes propres ne dépendent que très peu du nombre de Reynolds dès que celui-ci est de l'ordre du millier. C'est donc la géométrie interne de l'écoulement qui fixe les fréquences auxquelles le VSP apparaît. Troisièmement, les fréquences des modes hydrodynamiques semblent fixées d'une part par la position de l'entrée du domaine du calcul, et d'autre part par l'imposition d'une valeur de la pression en sortie, comme en témoignent les calculs effectués avec la seule condition  $\hat{p}(X_{\text{out}}, r) = 0$ . Le premier paramètre est fondamental, car il détermine la fréquence du premier mode de la branche VSP.

Remarquons enfin que le calcul du problème adjoint n'a montré dans ce chapitre que la moitié de son utilité en tant que moyen de validation des valeurs propres directes. Nous avons pu voir au chapitre précédent son rôle dans l'analyse de sensibilité des modes propres directs. Nous montrerons également son utilité pour formuler le problème de la réceptivité du VSP à un forçage dans un chapitre ultérieur.

*Ce chapitre a permis de confirmer, dans le cas d'un nombre de Reynolds représentatif d'essais en montage gaz froid, les résultats entrevus précédemment dans le cas d'une analyse de stabilité effectuée sur un sous-domaine à un nombre de Reynolds plus faible. L'accent est plus particulièrement mis sur les difficultés numériques rencontrées en raffinant les zones de couches limites, notamment l'introduction d'oscillations qui peuvent dégrader la précision avec laquelle sont calculées les valeurs propres. Ce problème apparaît également lorsque les bornes du domaine de calcul sont déplacées vers l'aval.*

*L'influence des différents paramètres sans dimension du problème a également été mise en évidence. Aux grands nombres de Reynolds, l'effet de la viscosité décroissante est marginal tant sur les fréquences des modes que sur la position des points amphidromiques, les modes propres étant très légèrement déstabilisés. En revanche, les valeurs propres dépendent fortement de la position des bornes du domaine : la branche des modes VSP est rendue plus stable dans son ensemble quand l'entrée du domaine est décalée vers l'aval, tandis que les valeurs propres couissent sur cette branche en se rapprochant quand, à entrée fixée, la sortie est décalée vers l'amont.*





## Troisième partie

# Simulation numérique directe d'un MPS simplifié



## Chapitre 5

# Mise en place de la simulation numérique directe

### 5.1 Mise en place des simulations numériques

Le code CEDRE (Calcul des Écoulements Diphasiques Réactifs pour l'Énergétique) de l'ONERA est un code multisolveurs permettant la simulation de phases continues à plusieurs espèces, de phases dispersées en modélisation eulérienne ou lagangienne, de films liquides, de transferts thermiques au sein de matériaux et de rayonnement. Pour chacun de ces phénomènes est dédié un solveur particulier qui interagit avec les autres dans le cas d'une modélisation multiphysique. En particulier, le solveur CHARME, dédié au calcul des phases gazeuses continues, est basé sur la résolution des équations de Navier-Stokes. Il peut prendre en compte la présence de plusieurs espèces chimiques éventuellement réactives et supposer la modélisation à diverses échelles de la turbulence (modélisation complète pour une approche RANS ou prise en compte de modèles de sous-maille pour la LES). Or, notre modélisation des Moteurs à Propergol Solide simplifiés correspond à des conditions à la fois très restrictives vis-à-vis des possibilités de CHARME (pas d'espèces réactives ni de turbulence) et pourtant contraignantes (quasi-incompressibilité de l'écoulement, nécessité de calculer avec précision les instabilités hydrodynamiques et l'acoustique, limitation des perturbations numériques pour éliminer des sources d'énergie parasites). Nous allons donc présenter dans cette section les modèles implémentés dans CHARME que nous avons utilisés afin de satisfaire à ces exigences. Pour les aspects les plus théoriques, nous nous concentrerons plutôt sur une description simplifiée en renvoyant à la documentation CEDRE [34] pour plus de détails sur leur mise en oeuvre et leur implémentation dans le code. Nous procéderons en revanche à une description détaillée de l'utilisation des conditions aux limites hétérogènes instationnaires que nous avons implémentées.

#### 5.1.1 Définition des maillages

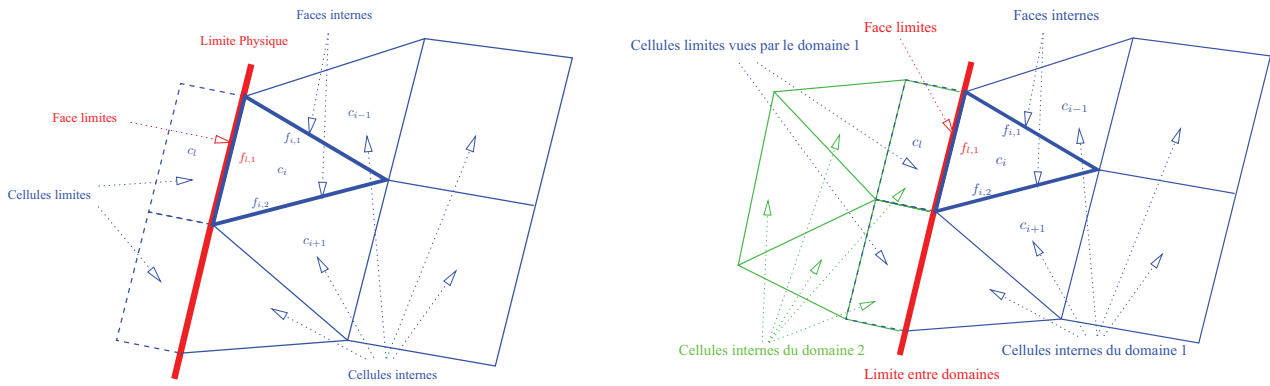
##### 5.1.1.1 Terminologie

Introduisons d'abord la terminologie spécifique aux maillages utilisés par CHARME et par l'ensemble des solveurs continus de CEDRE. Il s'agit de maillages non-structurés définis en trois étapes à partir d'un nuage de points :<sup>1</sup>

1. une première connectivité donne un ensemble d'arrêtes à partir de couples de points ;
2. une deuxième connectivité entre arrêtes conduit à la définition de faces  $f_j$  de surface  $A_j$  ;
3. une troisième connectivité permet de déduire des faces un ensemble de cellules notées  $c_i$ , de volume  $\mathcal{V}_i$  et de centre  $\mathbf{x}_i$ .

---

1. C'est exactement la manière dont sont définis les maillages dans les fichiers `maillage.dat` et `maillage.n` pour les calculs en multidomaine.



(a) Cas d'une condition physique. On donne volontairement un volume aux cellules limites qui n'en ont pas en réalité.

(b) Cas d'un raccord

FIGURE 5.1 – Cellules internes, cellules limites et faces limites

Il faut alors noter une spécificité de CEDRE pour la prise en compte des limites. D'une part, le code intègre à sa discrétisation des cellules supplémentaires appelées *cellules limites* que nous noterons  $c_l$ . Dans le cas de conditions aux limites physiques, il s'agit de cellules dégénérées de volume nul dont on définit tout de même un centre  $\mathbf{x}_l$ . Dans le cas de conditions de raccordement entre domaines, elles correspondent aux cellules adjacentes aux cellules du domaine jouxtant la limite considérée. Il existe également des *faces limites*, qui sont simplement les faces d'une cellule appartenant à une limite physique ou à l'interface avec un autre domaine. Dans le cas de conditions aux limites physiques, les cellules limites coïncident géométriquement avec les faces limites mais il s'agit en réalité d'objets mathématiques différents. Ce deux cas sont présentés schématiquement en figure 5.1.

Remarquons que les maillages se définissent dans CEDRE, depuis sa version 4, en deux temps : d'abord par la création par l'utilisateur de maillages non-structurés en plusieurs parties correspondant chacune à un *domaine utilisateur* (appelés «maillage.dat»); ensuite par la génération de fichiers de maillages lisibles par le code et éventuellement partitionnés pour une utilisation parallèle, grâce au préprocesseur *epinette*. Dans ces fichiers appelés «maillage.n» sont écrites les connectivités entre domaines utilisateurs et entre domaines partitionnés. L'utilisateur a besoin de spécifier des conditions de raccordement entre domaines utilisateurs, alors que les celles entre domaines partitionnés sont implicites.

### 5.1.1.2 Maillage utilisé pour les MPS simplifiés

Dans notre cas, le maillage est défini en un seul domaine (appelé platement *cylindre*) éventuellement divisé en plusieurs partitions. Comme évoqué en section 1.3.3, la première contrainte qui intervient dans le calcul d'un écoulement de conduit à paroi débitante est la résolution d'une couche limite se développant le long de la paroi du fond avant rigide où l'on impose une condition de non-glissement. À celle-ci il faut ajouter une taille de maille suffisamment petite pour résoudre correctement les oscillations spatiales dues à l'acoustique ou aux modes hydrodynamiques. La figure 5.2 détaille la manière dont sont construits nos maillages : dans les zones foncées la taille de maille a une croissance géométrique du bord vers l'intérieur, tandis que le maillage est uniforme dans la zone centrale claire. La croissance géométrique est ajustée pour qu'il n'y ait pas de discontinuité de taille à l'interface entre les zones. Quelle que soit la longueur  $L$  du cylindre, nous posons  $x_1 = 0.02$  m,  $x_2 = 0.23$  m. Pour un rayon  $R = 0.03$  m, nous utilisons par ailleurs  $r_1 = 0.006$  m et  $r_2 = 0.024$  m.

À partir de ce canevas nous avons testé notamment trois répartitions de mailles  $\text{MAIL}_1^C$ ,  $\text{MAIL}_2^C$  et  $\text{MAIL}_3^C$  qui permettent d'obtenir indifféremment la solution stationnaire présentée en figure 1.21(a) et

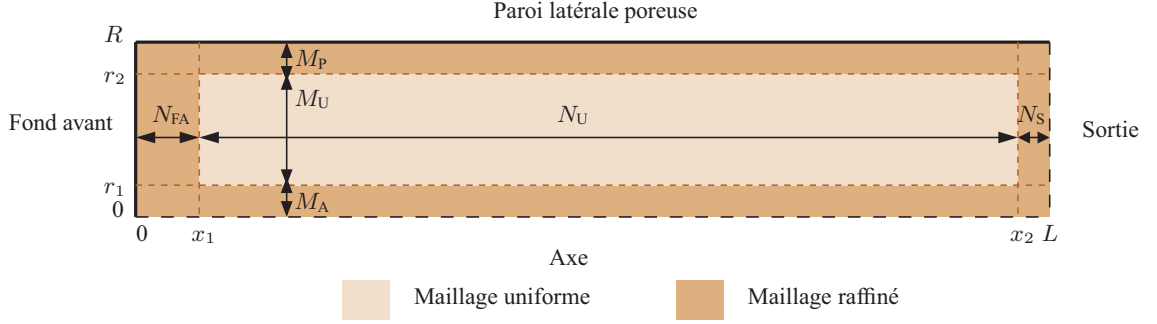


FIGURE 5.2 – Principe de construction des maillages pour les calculs CEDRE.

de résoudre correctement la couche limite au fond avant (figure 1.21(b)). Leurs tailles minimales et maximales de maille sont reportées dans le tableau 5.1. Nous sommes passés des maillages MAIL<sub>1</sub><sup>C</sup> à MAIL<sub>2</sub><sup>C</sup> à cause d'un excès de mailles au fond avant, à la paroi et sur l'axe, tandis que le nombre de points suivant  $x$  dans le domaine central était trop faible. Le maillage MAIL<sub>1</sub><sup>C</sup> à MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup> sert à tester l'indépendance des instabilités hydrodynamiques vis-à-vis du nombre de mailles suivant  $x$ .

Le passage du premier au second maillage s'explique par un excès de raffinement du fond avant, de l'axe et de la paroi dans le premier cas ; le passage du second au troisième correspond à un doublement du nombre de points suivant  $x$  pour le maillage. Nous verrons qu'imposer ce raffinement est fondamental pour calculer correctement les modes hydrodynamiques de fréquence élevée.

	$\delta x_{\min}$	$\delta x_{\max}$	$\delta r_{\min}$	$\delta r_{\max}$	$N_{FA}$	$N_U$	$N_S$	$M_A, M_P$	$M_U$
MAIL <sub>1</sub> <sup>C</sup>	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$5.17 \cdot 10^{-6}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	81	311	31	40	36
MAIL <sub>2</sub> <sup>C</sup>	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	81	311	31	40	36
MAIL <sub>3</sub> <sup>C</sup>	$8.2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	121	700	51	40	40

TABLE 5.1 – Taille de mailles extrémales (m) et répartition de points pour les maillages utilisés en simulation numérique directe.

## 5.1.2 Discrétisation spatiale sur les cellules internes

### 5.1.2.1 Formulation générale

Le solveur CHARME permet de calculer des écoulements présentant un certain nombre d'espèces dont on note  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n_e})$  les  $n_e$  fractions massiques. Il peut être également nécessaire d'introduire un ensemble de  $n_s$  scalaires dits passifs  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n_s})$  qui seront dans l'ordre des grandeurs turbulentes puis des traceurs. On peut alors définir les vecteurs  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{V}$  des variables conservatives et primitives qui rassemblent les variables continues suivantes :

$$\mathbf{Q} = (\rho\mathbf{y}, \rho\mathbf{v}, \rho e, \rho\mathbf{z})^T \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = (p, T, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z})^T \quad (5.1)$$

de tailles respectivement  $n_{\mathbf{Q}} = 4 + S + P$  et  $n_{\mathbf{V}} = 5 + L + P$ , où  $S$  représente le nombre de scalaires du problème (grandeurs turbulentes, scalaires passifs...) et  $P$  le nombre d'espèces du problème.

L'écriture conservative des équations de Navier-Stokes demande d'introduire, du moins formellement, la matrice  $\mathbf{F}$  contenant les flux de masse associés à chaque espèce, de quantité de mouvement

et d'énergie. On le décompose généralement en une partie correspondant aux équations d'Euler ( $\mathbf{f}$ ) à laquelle on ajoute un terme  $\phi$  permettant la prise en compte des effets dissipatifs. En particulier, la matrice de flux d'Euler s'écrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{y} \mathbf{v}^T \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v}^T \\ (\rho e + p) \mathbf{v}^T \\ \rho \mathbf{z} \mathbf{v}^T \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Il s'agit alors de résoudre un problème de la forme

$$\partial_t \mathbf{Q} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{V}, \nabla \mathbf{V}) = \sigma \quad (5.3)$$

où  $\sigma$  est un ensemble de termes-sources issus par exemple du couplage avec d'autres solveurs. Si l'on considère le volume de contrôle  $\mathcal{V}_i$  de centre  $\mathbf{x}_i$  associé à la cellule interne  $c_i$ , et en notant  $q_i$  et  $u_i$  la valeur moyenne des variables conservatives et primitives sur  $c_i$ , on déduit de (5.3) la formulation suivante :

$$\mathcal{V}_i \partial_t \mathbf{Q}_i + \sum_{f_j \in c_i} F_{i,j}(\mathbf{V}_k) = \mathcal{V}_i \sigma_i \quad (5.4)$$

où  $F_{i,j}$  désigne la valeur du flux sortant de la cellule  $c_i$  par la face  $f_j$ , dépendant *a priori* de l'ensemble des états ( $\mathbf{V}_k$ ) des autres cellules et de leurs gradients ( $\nabla \mathbf{V}_k$ ), écrits en variables primitives par exemple. Pour deux cellules adjacentes notées formellement  $c_i$  et  $c_{i+1}$ , il est traditionnel de noter  $\mathcal{F}_{i+1/2}^*(\mathbf{V}_{i+1/2}^G, \mathbf{V}_{i+1/2}^D)$  l'approximation numérique du flux passant à travers l'interface entre les cellules  $c_i$  à la  $c_{i+1}$  dépendant d'états sur les faces «gauche» ( $\mathbf{V}_{i+1/2}^G$ ) et droite ( $\mathbf{V}_{i+1/2}^D$ ) de l'interface. Nous présentons ici rapidement les méthodes que nous utilisons pour l'approximation des flux des équations d'Euler, la modélisation de la partie dissipative ne nécessitant aucun choix particulier puisque nous restons dans le cadre d'écoulements laminares.

### 5.1.2.2 Reconstitution des états gauche et droit

Il faut d'abord calculer les états  $\mathbf{V}_{i+1/2}^G$  et  $\mathbf{V}_{i+1/2}^D$  en fonction des états dans les cellules adjacentes de manière à obtenir l'ordre du schéma voulu. Pour une approximation d'ordre 1, il suffit de prendre directement  $\mathbf{V}_{i+1/2}^G = \mathbf{V}_i$  et  $\mathbf{V}_{i+1/2}^D = \mathbf{V}_{i+1}$ . Nous utilisons ici la méthode MUSCL pour le passage à l'ordre 2, qui consiste en une interpolation linéaire des états dans les cellules  $c_i$  et  $c_{i-1}$  (respectivement  $c_{i+1}$  et  $c_{i+2}$ ) pour obtenir les états gauche et droit à l'interface. Cette méthode est toujours associée à un limiteur de pente, ici celui de Van Leer, afin de limiter les oscillations numériques dues à des variations trop brutales dans l'écoulement.

### 5.1.2.3 Schémas de flux

Ensuite, il existe plusieurs schémas donnant le flux Euler numérique  $\mathcal{F}_{\text{Euler},i+1/2}^*$  en fonction des états gauche et droit indépendamment de la manière dont ceux-ci sont reconstitués. L'une des contraintes relatives à notre choix porte sur la résolution de phénomènes de basses vitesses notamment au fond avant. En effet, les équations d'Euler sont hyperboliques dans le sens où elles admettent des solutions sous forme d'ondes caractéristiques se déplaçant à aux vitesses  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c$ , où  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  est la vitesse du fluide normale à l'interface considérée et  $c$  la vitesse du son. Nous donnons une illustration de ce problème en appendice B.1.1 dans le cas des équations d'Euler monodimensionnelles. Or, aux faibles nombres de Mach  $M = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}/c$ , ces ondes se déplacent et transportent les erreurs numériques à des vitesses très différentes, et rendent donc le problème mal conditionné. Le solveur CHARME propose alors un certain nombre de choix pour remédier à cela.

La première solution consiste à pré-conditionner le système d'équations à résoudre en faisant en sorte que ses valeurs propres soient toutes du même ordre de grandeur, à savoir celle de la vitesse de l'écoulement. On trouvera une description détaillée de cette méthode, appelée *préconditionnement bas-Mach*, dans [53], et dont nous donnons une description simplifiée dans le cas des équations d'Euler monodimensionnelles en appendice B.1.2. Elle est presque exclusivement appliquée aux schémas de type «FDS» (pour «Flux Difference Splitting») qui s'écrivent sous la forme

$$\mathcal{F}_{\text{Euler},i+1/2}^*(\mathbf{V}_{i+1/2}^G, \mathbf{V}_{i+1/2}^D) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{V}_{i+1/2}^G) + \mathbf{F}(\mathbf{V}_{i+1/2}^D)}{2} - \mathcal{D}(\mathbf{V}_{\text{moy}}, \mathbf{V}_{i+1/2}^G, \mathbf{V}_{i+1/2}^D) \quad (5.5)$$

où  $\mathcal{D}$  est un opérateur dit de décentrement. Celui-ci fait apparaître explicitement le calcul de la jacobienne  $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$  du vecteur-flux par rapport au vecteur des variables conservatives calculée en un état moyen<sup>2</sup>  $\mathbf{V}_{\text{moy}}$ . C'est cette jacobienne qui est diagonalisable et de valeurs propres réelles  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c$ . Le pré-conditionnement bas-Mach se fait donc en deux étapes : premièrement, la matrice de masse du système, correspondant au premier terme de l'équation (5.4), est multipliée à gauche par une matrice de temps caractéristique destinée à rapprocher entre elles les valeurs propres du système ; deuxièmement, ce pré-conditionnement est également appliqué au terme de décentrement dans le calcul des flux numériques, car c'est lui qui regroupe formellement les informations sur la propagation des ondes de vitesses caractéristiques  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c$ . La solution ainsi calculée n'est donc plus consistante en temps, et que cette méthode ne peut être utilisée que pour la recherche d'une solution stationnaire.

C'est pourquoi nous nous sommes tournés, pour nos applications instationnaires, vers les schémas de flux de type «FVS» (pour «Flux Vector Splitting») de la famille AUSM (Advection Upstream Splitting Method) de Liou et Steffen [56], et plus particulièrement de la version AUSM+up [55] améliorée pour le calcul d'écoulements dans divers régimes de nombre de Mach. Ces schémas consistent à décomposer le flux Euler numérique  $\mathcal{F}_{\text{Euler},i+1/2}^*$  en une composante convective écrite sous la forme  $m_{i+1/2}^* \Phi_{i+1/2}^*$  et une composante de pression  $\mathbf{P}_{i+1/2}^*$ , afin de séparer les effets de compressibilité des effets convectifs. En particulier, la version AUSM+up conduit à une expression de flux numérique quasi-indépendante du nombre de Mach quand celui-ci tend vers 0.

### 5.1.3 Conditions aux limites

#### 5.1.3.1 Principe

Le système des équations de Navier-Stokes écrites conservative sous la forme (5.4) sur chaque cellule interne est fermé par un jeu de conditions aux limites bien posées. Cette fermeture s'effectue en trois parties :

1. sur les faces limites, certaines grandeurs sont imposées (notées  $\mathbf{V}_{\text{imp}}$ ) et d'autres sont inconnues ( $\mathbf{V}_l$ ); la notation utilisée ici correspond à une formulation en variables primitives, mais il existe également une formulation en quantités conservatives ;
2. les états aux centres des cellules limites, notés  $\tilde{\mathbf{V}}_l$ , sont calculés par une extrapolation des valeurs  $\mathbf{V}_i$  au centre des cellules internes adjacentes de la forme

$$\tilde{\mathbf{V}}_l = \mathbf{V}_i + \alpha \nabla \mathbf{V}_i \cdot (\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_i) \quad (5.6)$$

3. enfin, les variables conservatives associées aux cellules limites sont relaxées soit vers une valeur correspondant aux variables primitives imposées  $\mathbf{V}_{\text{imp}}$ , soit vers la valeur des variables primitives imposées  $\tilde{\mathbf{V}}_l$ . Ces deux cas sont regroupés sous une relation générique qui s'écrit

$$T_l \partial_t \mathbf{Q}_l = \mathcal{L}(\mathbf{V}_l, \tilde{\mathbf{V}}_l, \mathbf{V}_{\text{imp}}) \quad (5.7)$$

---

2. Plusieurs définitions de l'état moyen peuvent être utilisées dans CEDRE. Dans le cas d'un écoulement subsonique, on peut indifféremment utiliser la moyenne arithmétique ou la moyenne de Roe, l'intérêt de cette dernière résidant dans la résolution des écoulements présentant des discontinuités de type choc.



Dans ces trois étapes, deux paramètres sont définis par l'utilisateur : le fait de poser des extrapolations entre cellules internes et cellules limites d'ordre 1 ( $\alpha = 0$  dans l'équation (5.6)) ou d'ordre 2 ( $\alpha = 1$ ) ; et la valeur des paramètres de relaxation  $T_l$  dans la relation (5.7).

Au final, CHARME stocke indifféremment les variables conservatives et primitives écrites aux centre des cellules internes et limites. Les équations à résoudre correspondantes sont la relation (5.4) écrite au centre de chaque cellule  $c_i$  et l'équation aux limites (5.7) écrite pour les cellules limites  $c_l$ . Ces deux jeux d'équations peuvent donc être regroupés sous un même formalisme. Outre cet aspect pratique, le fait d'imposer des conditions aux limites relaxées (équation (5.7)) présente aussi l'avantage de ne pas rendre la prise en compte des conditions aux limites trop contraignantes du point de vue de la robustesse. Du point de vue de la précision, prendre les temps caractéristiques  $T_l$  de l'ordre de grandeur du pas de temps global du calcul  $\delta t$  n'est pas pénalisant en général puisque  $\delta t$  est normalement bien plus petit que le plus petit temps caractéristique de la physique étudiée. Cependant, nous verrons qu'il existe des précautions à prendre, en particulier pour les conditions de raccordement entre domaines. Enfin, le jeu des états imposés  $\mathbf{V}_{\text{imp}}$  est défini en fonction des conditions aux limites considérées. Voici en particulier les types que nous utilisons.

- Conditions «type 2». Ce type est utilisé pour le raccordement entre domaines utilisateurs et/ou partitionnés. Attention : ce n'est pas parce le partitionnement est transparent pour l'utilisateur que celui-ci ne doit pas veiller à ajuster l'ordre d'interpolation (équation (5.6)) et le paramètre de relaxation (équation (5.7)).
- Conditions «type 4». Il s'agit pour nous, soit du cas d'une entrée subsonique pour modéliser la paroi poreuse, où l'on impose la température, la vitesse normale, les fractions massiques et éventuellement les scalaires turbulents, soit du cas d'une sortie à pression imposée.
- Conditions «type 5». Cette condition est analogue au type 4 à la nuance près qu'elle évite la réflexion d'ondes acoustiques sur les limites considérées. Elle est utilisée pour comparaison avec le type 4 pour la condition de sortie.
- Conditions «type 9». Elle est utilisée sur l'axe comme condition de symétrie ou de glissement.
- Conditions «type 10». Elle impose le non-glissement au fond avant.

Nous allons donner des détails sur certaines d'entre elles qui nécessitent un traitement particulier.

### 5.1.3.2 Condition de sortie

D'une manière générale, une condition de sortie subsonique nécessite d'imposer une valeur de pression pour les flux d'Euler ainsi que trois autres contraintes portant sur les flux visqueux pour que le problème soit bien posé [69]. Dans notre cas, il n'est pas judicieux d'imposer une valeur uniforme de la pression sur toute la sortie : nous préférons, comme CHARME le permet, d'imposer une valeur moyenne telle que

$$P_o = \frac{2}{R^2} \int_0^R p(L, r) r dr. \quad (5.8)$$

L'interprétation physique d'une condition de sortie subsonique pour un écoulement interne pose par ailleurs quelques problèmes, notamment vis-à-vis des possibles ondes acoustiques longitudinales entretenues dans le moteur. En effet, dans le cas d'une sortie avec col amorcé en présence d'une tuyère, la vitesse moyenne est égale à la vitesse du son et ses fluctuations sont nécessairement nulles, ce qui fixe les réflexions des ondes acoustiques et la possible création d'ondes de pression remontant l'écoulement au passage d'une structure tourbillonnaire. En revanche, dans le cas d'une sortie subsonique libre, l'écoulement induit par l'injection pariétale débouche directement à l'air libre sous forme d'un jet pouvant induire des instabilités de cisaillement. Par ailleurs, on peut supposer que la brusque augmentation de la surface fluide vue par l'écoulement revienne à imposer une forme d'impédance de sortie qui induise également des ondes de pression réfléchies au passage d'une instabilité hydrodynamique.

Numériquement, la solution la plus proche de la physique réelle consisterait à adjoindre, en sortie du cylindre à parois poreuses, un domaine externe au maillage de plus en plus relâché vers l'aval.

Or, notre but n'est pas tant de savoir comment réagit le VSP avec l'extérieur que de le caractériser intrinsèquement ou vis-à-vis d'un forçage le plus proche de l'acoustique. De ce point de vue, deux solutions s'offrent à nous.

- Le choix le plus simple consiste à utiliser une condition de sortie classique à pression imposée (type 4). À ce moment-là, toute perturbation de vitesse axiale (ondes acoustiques ou structures tourbillonnaires) atteignant la section de sortie produit une onde de pression réfléchie qui remonte l'écoulement. Ce mécanisme de réflexions, encore basé sur la forme diagonalisée des équations d'Euler, est détaillé en appendice B.1.3.
- Le solveur CHARME propose également l'imposition d'une condition *non-réfléchissantes* (type 5) introduite par Thompson [82]. Au lieu de se donner simplement une valeur de la pression de sortie, la condition consiste à atténuer l'onde caractéristique entrante qui se déplace dans l'écoulement à la vitesse  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c$ . On trouvera plus de détails sur cette écriture dans le cas d'un écoulement monodimensionnel en en appendice B.1.3, ainsi que sa formulation générale dans le cas d'écoulements tridimensionnels dans [57].

La condition classique (type 4) permet donc de simuler sur un cas simplifié les interactions entre acoustique et VSP, dans la mesure où des ondes de pression et des ondes acoustiques<sup>3</sup> peuvent être entretenues dans le moteur et forcer l'émergence du VSP, et où le VSP peut créer des ondes de pression lors de leur passage au niveau de la section de sortie. La condition de type 5 permet au contraire de s'affranchir des ondes de pression et donc de calculer la réponse propre du système en termes d'instabilités hydrodynamiques, sans forçage ni génération d'acoustique induite. Notons qu'aucune de ces solutions n'est parfaitement valide du point de vue de la physique : les mesures effectuées sur le montage VALDO à trois éléments sans tuyère indiquent qu'il existe bel et bien des ondes de pression au sein du moteur, mais avec une amplitude bien plus faible que celle qui serait obtenue avec des réflexions parfaites telles que celles prévues par la théorie des caractéristiques. L'utilisation de la condition de type 4 permet donc d'étudier qualitativement l'interaction entre acoustique et VSP, mais il faut bien être conscient que l'amplitude des ondes de pression simulée est largement surestimée.

### 5.1.3.3 Spécificités de la condition de paroi

En présentation de l'écoulement stationnaire calculé pour comparaison avec l'ETC, nous avons parlé de la nécessité de faire tendre la vitesse d'injection pariétale vers zéro au voisinage du fond avant afin d'éviter un comportement singulier au point  $(x = 0, r = R)$ , le raccord que nous avons choisi étant

$$V_{\text{inj}}(x) = V_{\text{inj}0} \tanh\left(\frac{4x}{x_r}\right), \quad \text{avec} \quad V_{\text{inj}}(x_r) = 0.9993 V_{\text{inj}0} \quad (5.9)$$

et  $x_r = 0.02$  m. Notons qu'il est possible de définir une vitesse d'injection moyenne égale à  $V_{\text{inj}0}$  qui soit cohérente avec la définition (1.6), à condition de modifier la valeur de l'origine fictive du conduit. Cela revient en fait à faire un calcul sur un conduit très légèrement plus court.

Or, en pratique, les valeurs imposées aux conditions aux limites dans CEDRE sont *a priori* uniformes sur toute la limite considérée. Jusqu'à la version 3, il était possible de se donner un profil non-uniforme par un système de «fichiers utilisateur», mais le formalisme adopté depuis la version 4 a rendu cette solution caduque. C'est pourquoi il a été décidé d'implémenter la prise en compte de conditions aux limites non-uniformes en espace et en temps *via* la lecture de fichiers écrits dans un format interprétable par une bibliothèque (BIBCEDRE) du code. Ayant implémenté cette solution dans le cas des conditions de type 4, mais conscient qu'elle n'est pas d'une utilisation intuitive, nous renvoyons le lecteur désireux de cette fonctionnalité à l'appendice B.2 pour plus d'explications. Disons simplement ici que la prise en compte de conditions instationnaires et/ou hétérogènes pour la limite LIMITE

3. Le terme d'«onde de pression» désigne une onde se déplaçant à l'une des vitesses caractéristiques  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \pm c$ , comme c'est le cas pour une onde créée par le passage d'une structure tourbillonnaire en sortie du domaine. Une «onde acoustique» a la même propriété, mais elle est de plus caractérisée par une fréquence acoustique imposée par les conditions aux limites du problème (voir section 1.4.1).

du domaine utilisateur `domaine` passe par la lecture d'un fichier nommé `psl_domaine_LIMITE.0` dans lequel CEDRE lit un ensemble d'instants, une grille de points de l'espace et les valeurs des limites imposées en ces instants et ces points. Cette lecture se fait lors de la construction des données du calcul et peut être réactualisée à chaque cycle si nécessaire dans le cas d'un calcul instationnaire.

#### 5.1.4 Intégration en temps

Compte tenu de l'écriture des équations sur le domaine et des conditions aux limites, l'intégration temporelle est ramenée à un problème qui s'exprime en chaque cellule interne  $c_i$  ou limite  $c_l$  sous la forme

$$\partial_t \mathbf{Q}_j + \mathcal{L}(\mathbf{Q}(\mathbf{V}_j)) = \mathcal{V}_j \sigma_j \quad (5.10)$$

où  $j = i$  ou  $l$ . Dans le cas de schémas explicites, la variation  $\delta \mathbf{Q}_j$  des quantités conservées pendant le pas de temps  $\delta t$  entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  est exprimée en fonction des flux et des termes sources exprimés à l'instant  $t_n$  ce qui permet une intégration directe. En implicite, les termes sources sont exprimés à l'instant  $t_{n+1}$ , ce qui nécessite de calculer une approximation des flux et des termes sources à partir de leurs valeurs, connues, à l'instant  $t_n$ . Cela passe notamment par le calcul approché du jacobien de la matrice de flux par rapport aux quantités conservées. L'intérêt des méthodes implicites, *a priori* moins précises que les méthodes explicites, est l'absence de condition de stabilité sur le pas de temps. En effet, les schémas explicites sont sensibles à une condition sur le nombre de CFL (pour Courant, Friedrich et Lévy) qui traduit le rapport entre le temps de transfert d'information à travers une maille et le pas de temps utilisé. Dans le cas de nos calculs bidimensionnels, on peut le définir par

$$\text{CFL} = \max(\text{CFL}_x \text{CFL}_r) \quad \text{avec} \quad \text{CFL}_x = \frac{(|\mathbf{u}_x| + c)\delta t}{\delta x} \quad \text{et} \quad \text{CFL}_r = \frac{(|\mathbf{u}_r| + c)\delta t}{\delta r} \quad (5.11)$$

comme celui présentant la contrainte maximale par rapport à des nombres de CFL définis dans chaque direction. L'étude de stabilité des schémas temporels explicites sur des équations simples de type advection-diffusion conduit à des imposer un nombre de CFL inférieur à un réel de l'ordre de l'unité, alors qu'il n'est le plus souvent pas nécessaire d'en faire autant dans le cas de schémas implicites.

Ainsi, lorsqu'un état stationnaire est recherché, nous utilisons le  $\theta$ -schéma implicite d'ordre 1 avec  $\theta = 1$  avec un pas de temps grand devant le temps caractéristique des phénomènes instationnaires, typiquement  $\delta t = 0.5$  s. Un système de sous-itérations local imposant un pas de temps tel que le CFL soit inférieur à 10 permet d'éviter que le calcul ne soit affecté par des variations trop brusques en début de calcul lorsqu'on part d'une condition initiale uniforme par exemple. Le pas de temps est diminué à  $\delta t = 0.01$  s lorsque le pré-conditionnement bas-Mach est activé.<sup>4</sup>

Lorsque nous calculons une solution instationnaire, nous utilisons des schémas consistents avec la discrétisation spatiale d'ordre 2, c'est-à-dire les schémas explicites et implicites de type Runge-Kutta. Avec les maillages que nous utilisons, le nombre de CFL est maximal dans notre cas près de la paroi et conduit à un pas de temps maximal de l'ordre de  $10^{-7}$  s. En pratique, le schéma Runge-Kutta d'ordre 2 ne devient stable que pour  $\delta t = 5 \cdot 10^{-9}$ , et celui d'ordre 3 pour  $\delta t = 10^{-8}$ , ce qui conduit à des temps de calcul longs si l'on vise à faire une étude paramétrique par exemple (14 heures de calcul sur 64 processeurs en moyenne pour un temps physique simulé de 0.02 s, soit  $2 \cdot 10^6$  cycles avec le schéma d'ordre 3, et un temps par cycle de 0.025 s).

Or, les schémas implicites ont un temps par cycle plus élevé dû à l'approximation de l'état au pas de calcul suivant, mais leur stabilité permet de diminuer largement le pas de temps jusqu'à ce qu'il soit juste assez petit par rapport aux phénomènes instationnaires à calculer. Dans notre cas, tout dépend du nombre de modes acoustiques que nous souhaitons résoudre, mais disons qu'un pas de temps  $\delta t = 10^{-6}$  s conduit à une fréquence de coupure théorique de  $5 \cdot 10^5$  Hz, ce qui correspond au 140<sup>e</sup> mode acoustique longitudinal pour la géométrie présentée plus haut. En réalité, les schémas implicites étant

4. La diminution du pas de temps vise dans ce cas à éviter des oscillations numériques dans les zones à basses vitesses.

plus dispersifs, nous verrons que prendre un tel pas de temps conduit à mal calculer l'acoustique du MPS simplifié et notamment la fréquence du mode fondamental. On doit donc imposer malgré tout un nombre de CFL proche de 1. En outre, le fait que les conditions aux limites, et notamment les conditions de raccordement entre domaines, soient écrites sous forme relaxée semble amplifier l'effet d'un nombre de CFL trop grand sur ce glissement en fréquence. À ce titre, Bertier [46] préconise d'utiliser un temps caractéristique de relaxation  $T_l$  qui soit non pas égal au pas de temps, mais tel que  $T_l/\delta t = 0.366025$ , dans le cas du schéma de Runge-Kutta d'ordre 2.

Notons que l'utilisation de schémas implicites ou explicites peut également avoir une influence, dans le cas où l'on impose une condition de sortie classique (type 4), sur l'amplitude et le déphasage des ondes réfléchies dues au passage de perturbations de vitesse. En effet, dans le cas des discrétisations temporelles implicites, le second membre des équations de relaxation (5.7) est évalué de manière approchée à l'instant  $t_{n+1}$ , ce qui peut introduire des modifications par rapport au cas d'un schéma explicite. Physiquement, nous avons vu que les conditions classiques pour une sortie subsonique ont une pertinence discutable. Les différences observées entre schémas explicites et implicites peuvent donc revenir à imposer une impédance différente, conduisant à des réflexions pures dans le premier cas et à des réflexions altérées dans le second.

Au final, le choix du schéma temporel pour les calculs instationnaires est surtout un compromis entre le temps de calcul par cycle et la précision recherchée. Nous présenterons sur un cas de validation le choix qui nous paraît optimal.

## 5.2 Modes hydrodynamiques en configuration lisse

### 5.2.1 Comparaison aux modes de stabilité calculés sur le domaine entier

La première application de la simulation numérique directe consiste à tester la validité des modes hydrodynamiques calculés par la théorie de la stabilité linéaire. Ayant obtenu une solution stationnaire  $Q(x, r)$  (très proche en réalité de l'écoulement de Taylor-Culick, comme présenté en section 1.3.3), il s'agit de calculer une solution instationnaire à partir d'une condition initiale de la forme

$$q(x, r, t = 0) = Q(x, r) + \varepsilon \Re(\hat{q}(x, r)), \quad (5.12)$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre<sup>5</sup> permettant de fixer l'amplitude de la fonction propre du mode hydrodynamique à tester  $\Re(\hat{q}(x, r))$ , celui-ci étant calculé pour un écoulement de Taylor-Culick équivalent à la solution DNS du point de vue du rayon et de la vitesse d'injection. On le choisit toujours le paramètre  $\varepsilon$  de tel sorte à introduire des perturbations linéaires pour lesquelles le rapport entre les vitesses perturbative et moyenne

$$\varepsilon_{\text{lin}} = \varepsilon \frac{\|\hat{\mathbf{u}}\|_{\infty}}{\|\mathbf{U}\|_{\infty}} \quad (5.13)$$

est petit devant — typiquement  $\varepsilon_{\text{lin}} < 0.1$ . Ce type de calcul doit normalement traduire la présence d'une instabilité hydrodynamique de pulsation et d'amortissement cohérents avec la valeur propre  $\hat{\omega}$  du mode introduit. Cette méthode, exposée dans [25], est reprise ici dans deux optiques différentes : d'une part, se donner des cas de calcul connus pour nous assurer de la bonne résolution des phénomènes hydrodynamiques mais aussi acoustiques ; d'autre part, confirmer les limites du calcul de modes hydrodynamiques dans une configuration strictement lisse, à savoir l'impossibilité de leur apparition spontanée dans ce cas et la question de leur existence intrinsèque.<sup>6</sup>

5. Implicitement, ce paramètre est dimensionnel. Il est en fait le produit de la vitesse d'injection  $V_{\text{inj}}$  et d'un nombre dans dimension qui permet de fixer réellement l'amplitude du mode.

6. Nous considérons les modes propres calculés en configuration lisse de différentes manières (en fonction de courant ou en variables primitives) et avec différentes discrétisations axiales. Si tous ces modes «passent» le crible de la DNS, alors il n'y a probablement pas de sélection fréquentielle dans cette configuration.

### 5.2.1.1 Cas du mode $\hat{\omega} = 40.8 - 8.14i$ calculé en fonction de courant

Nous nous intéressons dans un premier temps aux modes calculés en fonction de courant avec la discrétisation longitudinale dite «de référence»  $N = 50$  points dans le cas d'un rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = 10$ , le rayon de référence étant le même que celui du montage VALDO ( $R = 0.03$  m). Compte tenu du raccord en tangente hyperbolique au fond avant de l'injection de fluide à la paroi, la vitesse d'injection moyenne  $V_{\text{inj}}$  au sens de la conservation du débit (équation (1.6)) est de 1.02 m/s, ce qui correspond à un nombre de Reynolds  $Re = 2000$  à la température de 300 K choisie pour le calcul. Le mode hydrodynamique considéré a pour valeur propre  $\hat{\omega} = 40.8 - 8.14i$ . L'amplitude des champs de vitesse correspondants ajoutés à la solution stationnaire sont tels que  $\varepsilon_{\text{lin}} = 0.08$ . Ce calcul est effectué avec le maillage noté MAIL<sub>1</sub><sup>C</sup> (voir table 5.1). On choisit dans un premier temps d'utiliser le schéma de Roe pour la discrétisation spatiale. L'intégration temporelle se fait avec le schéma de Runge-Kutta implicite, le pas de temps étant  $\delta t = 10^{-6}$  s, ce qui assure normalement la bonne résolution des phénomènes hydrodynamiques. L'excitation et l'entretien de modes acoustiques longitudinaux est limitée par l'imposition d'une condition non-réfléchissante en sortie. Le calcul est enfin mené sur un seul processeur sur 20 000 cycles, soit un temps de calcul physique de 0.02 s.

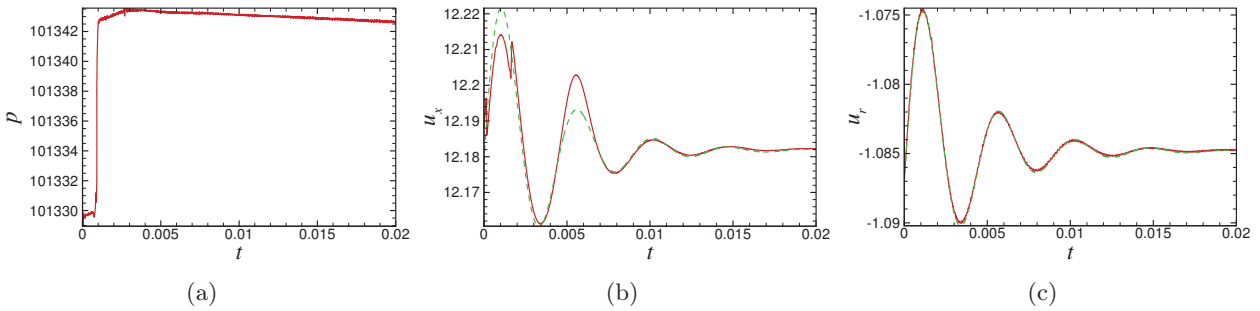


FIGURE 5.3 – Évolution de la pression en  $x = 0$ ,  $r = R/2 = 0.015$  m (a) et de la vitesse axiale (b) et radiale (c) en  $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$  m,  $r = 5R/6 = 0.025$  m calculée par DNS (—) pour un MPS simplifié suite à l'introduction du mode de stabilité de valeur propre  $\hat{\omega} = 40.8 - 8.14i$  calculé en variables primitives avec  $(N \times M) = 50 \times 100$  points, d'amplitude  $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.08$ . Rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = 10$ , rayon  $R = 0.03$  m, vitesse d'injection pariétale moyenne  $V_{\text{inj}} = 1.02$  m/s et nombre de Reynolds  $Re = 2000$ . (- - -) : évolution théorique du mode hydrodynamique introduit en condition initiale.

Divers signaux de pression et de vitesse sont tracés en figure 5.3. Si l'on s'en tient à celui de la vitesse radiale près de la sortie (figure 5.3(c)) nous voyons que l'évolution modale théorique est parfaitement retrouvée par la DNS. La vitesse axiale calculée au même point ne retrouve en revanche cet accord qu'à partir de  $t \approx 0.007$  s (figure 5.3(b)). L'explication de cette différence se trouve dans le signal de pression au fond avant (figure 5.3(a)) : on voit, vers  $t = 0.0009$  s, un saut de quelques dizaines de Pascals entre la valeur imposée à l'état initial et le palier qui reste quasi-constant jusqu'à la fin du calcul. Il s'agit en fait de la trace d'un déséquilibre de pression en sortie qui crée une onde se propageant vers l'amont, se réfléchit au fond avant puis finit par sortir du domaine. Ce déséquilibre est sans doute dû au passage de la condition de sortie réfléchissante utilisée pour le calcul de l'écoulement moyen à la condition non-réfléchissante utilisée pour le calcul instationnaire. Cette onde de pression force alors une réponse résiduelle sur le signal de vitesse axiale qui met quelques périodes à s'amortir. Cependant, cela ne remet pas en cause le fait que le mode hydrodynamique introduit en condition initiale est bien calculé par la DNS. Voyons maintenant ce qu'il en est pour des modes calculés dans des conditions différentes.

### 5.2.1.2 Modes de pulsation similaires calculés en variables primitives

Intéressons-nous à un mode hydrodynamique calculé avec la même discrétisation, mais cette fois-ci en variables primitives avec la condition de sortie de type «traction nulle». Dans le cas de la discrétisation longitudinale de référence ( $N = 50$ ), le spectre obtenu contient le même nombre de modes que celui calculé en fonction de courant, et on retrouve en particulier une valeur propre  $\hat{\omega} = 39.1 - 3.91i$  dont la partie réelle est proche de celle du mode précédent. Le signal alors calculé par DNS indique une instabilité légèrement plus atténuée dans le temps que prévu (figure 5.4(a)). Or, il faut remarquer que l'atténuation théorique est moins grande que pour le mode précédent, tandis que les schémas utilisés en DNS sont de toute façon plus dissipatifs que la collocation spectrale. Il est donc plausible que la simulation directe atténue plus les modes dont la valeur propre est située plus près de l'axe. Considérons également les modes calculés avec une discrétisation différente, par exemple  $N = 100$  points. Les valeurs propres dont les parties réelles sont les plus proches sont  $\hat{\omega} = 38.9 - 6.38i$  et  $\hat{\omega} = 42.4 - 6.45i$ . Nous constatons alors en figures 5.4(a) et 5.4(c) que l'évolution théorique est de nouveau parfaitement retrouvée.

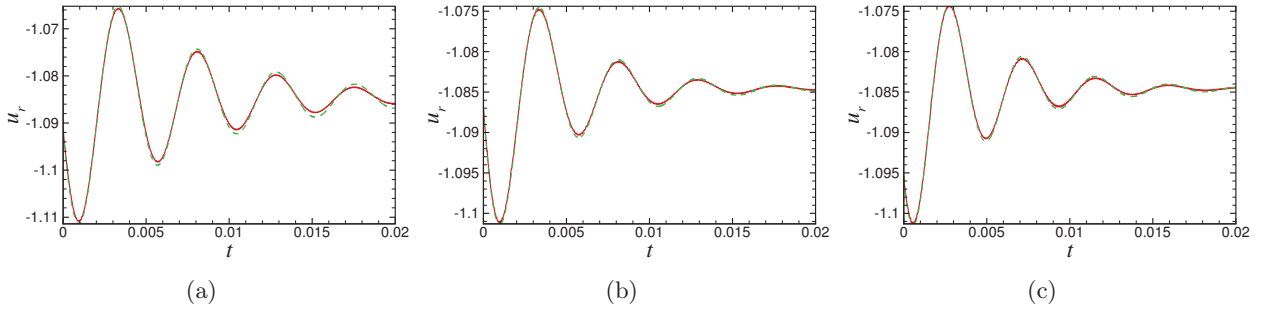


FIGURE 5.4 – Évolution de la vitesse radiale en  $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$ ,  $r = 5R/6 = 0.025$  calculée par DNS (—) pour un MPS simplifié suite à l'introduction du mode de stabilité calculé en variables primitives avec une condition de sortie de type «traction nulle», d'amplitude  $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.1$ . Rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = 10$ , rayon  $R = 0.03$  m, vitesse d'injection pariétale moyenne  $V_{\text{inj}} = 1.02$  m/s et nombre de Reynolds  $\text{Re} = 2000$ . (a) : mode  $\hat{\omega} = 39.1 - 3.91i$  calculé avec  $(N \times M) = 50 \times 100$ ; (b) : mode  $\hat{\omega} = 38.9 - 6.38i$  calculé avec  $(N \times M) = 100 \times 100$ ; (c) : mode  $\hat{\omega} = 42.4 - 6.45i$  calculé avec  $(N \times M) = 100 \times 100$ .

### 5.2.1.3 Cas des modes haute fréquence

De telles simulations ont été également menées avec le maillage  $\text{MAIL}_1^C$  pour les autres modes calculés en fonction de courant avec  $\text{Re} = 2000$  et  $X_{\text{out}} = 10$ . Au lieu de tracer systématiquement la comparaison entre les fluctuations de vitesse radiale calculées et théoriques au cours du temps, nous effectuons une analyse *Haute Résolution* de ce signal (abrégée en «analyse HR»), dont le principe est décrit en appendice A.2.2. En résumé, cette méthode consiste à calculer l'approximation locale  $v_w$  d'un signal  $v$  sur une fenêtre contenant  $N_w$  échantillons sous la forme d'une somme de  $K$  exponentielles complexes de fréquence  $f_k$ , de taux de croissance  $\delta_k$  et d'amplitude  $A_k$  inconnues :

$$v_w(t) = \sum_{k=0}^{K-1} A_k e^{i(2\pi f_k + \delta_k)t} \quad (5.14)$$

Le signal  $v$  est supposé contenir  $N$  échantillons acquis à une fréquence  $F_s$ , ce qui permet de calculer ces approximations en plusieurs instants dépendant de la taille de la fenêtre  $N_w$ , de la taille totale du signal  $N$  et du recouvrement entre fenêtres pris égal à  $7N_w/8$ . La représentation des fréquences  $f_k$  obtenues aux



instants d'analyse est appelée HRogramme. Les points ainsi représentés dans le plan temps-fréquence peuvent prendre une coloration qui dénote l'amplitude  $A_k$  des exponentielles de la même manière que dans les périodigrammes des signaux de pression expérimentaux donnent l'indication d'une amplitude dans le plan temps-fréquence. Par ailleurs, nous avons montré en annexe A.2.2 qu'il est nécessaire de prendre une taille de fenêtre et une fréquence d'échantillonnage tels que l'intervalle  $T_w = N_w/F_s$  soit au moins égal à quatre périodes de l'onde de fréquence la plus basse supposée apparaître dans le signal, afin que des fréquences proches puissent être distinguées. Dans notre cas, nous choisissons  $F_s = 22050$  Hz et  $N_w = 128$ .

Le résultat de l'analyse HR portant sur les signaux de fluctuations de vitesse radiale en  $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$ ,  $r = 5R/6 = 0.025$  correspondant aux modes initiaux

$$\hat{\omega} \in \{33.8-9.88i, 37.3-8.9i, 40.8-8.1i, 44.5-7.4i, 48.5-6.6i, 52.8-6.0i, 57.4-5.6i, 62.6-5.3i, 68.5-5.2i, 75.3-5.5i\} \quad (5.15)$$

est tracée en figure 5.5. Pour les modes basse fréquence, et notamment le mode  $\hat{\omega} = 40.8 - 8.1i$ , on retrouve un très bon accord entre la simulation numérique et les fréquences théoriques données par l'analyse de stabilité. En revanche, pour les modes suivants, la fréquence issue de l'analyse HR, initialement cohérente avec la théorie, décroît au cours du temps et diverge par rapport à sa valeur initiale. Pour les quatre modes de plus haute fréquence, même cette pulsation réduite initiale est en-dessous de sa valeur théorique, au point de devenir inférieure au mode précédent de la branche VSP. On rejoint là une constatation effectuée par F. Chedevergne, qui avait alors mis en avant de possibles interactions non-linéaires entre différents modes propres.

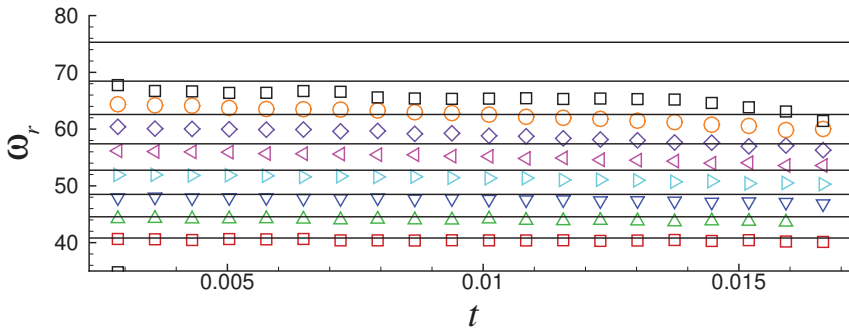


FIGURE 5.5 – Pulsations réduites théoriques (—) comparées à celles issues de l'analyse HR ( $F_s = 22050$  Hz,  $N_w = 128$  points) des signaux de fluctuations de vitesse radiale calculés en  $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$ ,  $r = 5R/6 = 0.025$  par simulation numérique. Amplitude de la condition initiale :  $\varepsilon_{\text{lin}} = 0.01$ . Modes propres considérés :  $\square$  : mode  $\hat{\omega} = 40.8 - 8.14i$ ;  $\triangle$  : mode  $\hat{\omega} = 44.5 - 7.4i$ ;  $\nabla$  : mode  $\hat{\omega} = 48.5 - 6.6i$ ;  $\blacktriangleright$  : mode  $\hat{\omega} = 52.8 - 6.0i$ ;  $\blacktriangleleft$  : mode  $\hat{\omega} = 57.4 - 5.6i$ ;  $\diamond$  : mode  $\hat{\omega} = 62.6 - 5.3i$ ;  $\circ$  : mode  $\hat{\omega} = 68.5 - 5.2i$ ;  $\square$  : mode  $\hat{\omega} = 75.3 - 5.51i$ . Modes calculés en fonction de courant avec les paramètres  $\text{Re} = 2000$  et  $X_{\text{out}} = 10$ . Discrétisation  $N \times M = 50 \times 150$ .

Or, les calculs précédents suggèrent qu'il n'est pas pertinent de considérer une branche de modes discrets calculés sur le domaine de calcul entier, et permettent donc d'éliminer l'hypothèse de l'interaction entre deux modes. Comme dans le cas de la stabilité, nous nous demandons plutôt si le nombre de points contenus par le maillage CEDRE est suffisant pour rendre compte d'oscillations spatiales de petite taille caractéristiques des modes propres de plus haute fréquence. C'est pourquoi des simulations similaires sont menées avec les maillages  $\text{MAIL}_2^C$  et  $\text{MAIL}_3^C$  contenant respectivement environ deux fois et quatre fois plus de points suivant  $x$  sur le domaine principal. Cette fois-ci, la fréquence calculée par DNS est légèrement sur-estimée, mais toujours décroissante au cours du temps. Cependant, l'hypothèse d'un manque de finesse dans la discrétisation peut cette fois-ci être écartée puisque les deux maillages conduisent exactement au même résultat. C'est peut-être la pertence de la fonction propre introduite



dans la définition de la condition initiale qui est discutable en tant que fonction propre associée à la valeur propre  $\hat{\omega} = 75.3 - 5.5i$  qui est discutable.

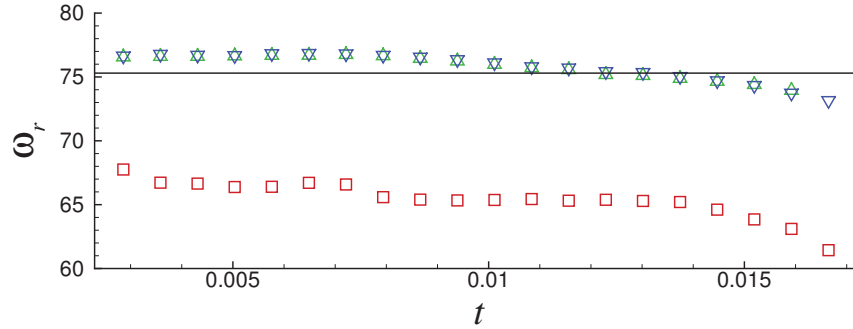


FIGURE 5.6 – Pulsations réduites théoriques (—) comparées à celles issues de l’analyse HR ( $F_s = 22050$  Hz,  $N_w = 128$  points) des signaux de fluctuations de vitesse radiale calculés par simulation numérique. Condition initiale : fonction propre du mode  $\hat{\omega} = 40.8 - 8.14i$ , amplitude .  $\square$  : maillage MAIL<sub>1</sub><sup>C</sup>;  $\triangle$  : maillage MAIL<sub>2</sub><sup>C</sup>;  $\nabla$  : maillage MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup>. Modes calculés en fonction de courant avec les paramètres  $Re = 2000$  et  $X_{out} = 10$ . Discrétisation  $N \times M = 50 \times 150$ .

De toute façon, l’intérêt de ces calculs était moins de tenter de valider certains modes propres issus des analyses de stabilité que de déterminer les maillages permettant la résolution correcte de tous les phénomènes pouvant apparaître dans nos simulations numériques. Ici, nous voyons que le maillage MAIL<sub>2</sub><sup>C</sup> semble suffisant pour capturer les oscillations spatiales associées au mode  $\hat{\omega} = 75.3 - 5.5i$ , de l’ordre de 0.02 m entre deux extréma locaux sur une ligne  $r = cte$  pour les fluctuations de vitesse. De telles oscillations sont résolues avec une quinzaine de points dans le cas du maillage MAIL<sub>1</sub><sup>C</sup>, une trentaine avec MAIL<sub>2</sub><sup>C</sup> et une soixantaine avec MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup>. Il semble donc qu’il soit nécessaire de mettre entre une vingtaine et une trentaine de points par oscillation pour que le calcul des structures VSP soit correct à l’ordre 2. Par la suite, nous utiliserons donc le maillage MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup> afin de capturer des modes plus rapides.

### 5.2.2 Problèmes rencontrés en multi-domaine

Jusqu’à présent, nous n’avons présenté que des calculs effectués sur un seul processeur, alors qu’il est largement possible de gagner du temps de calcul en répartissant la charge sur plusieurs d’entre eux. Or, la parallélisation présente deux limites. Premièrement, si le fait d’augmenter le nombre de processeurs diminue le nombre de points par sous-domaines et par conséquent le temps de calcul par itération, le temps de transfert des données entre processus peut devenir dominant et annuler le gain en temps dû à une plus grande parallélisation — on parle de limite de scalabilité. Deuxièmement, il faut veiller à ce que la présence de conditions de raccordement relaxées entre domaines n’augmente pas la dispersion numérique du calcul et conduise à des modes hydrodynamiques ou acoustiques mal résolus. Cela risque plus particulièrement de survenir dans le cas des schémas temporels implicites, qui introduisent un temps de retard égal au pas de temps sur ces conditions et sont donc plus dispersifs que leurs homologues explicites.

Pour vérifier cela, nous avons traité un cas de calcul portant sur un MPS simplifié plus court —  $X_{out} = 8$ , rayon toujours égal à 0.03 m. Nous nous mettons ainsi dans les conditions des calculs ultérieurs qui sont comparés avec les analyses de stabilité sur effectuées sur cette longueur. Pour le moment, nous considérons une solution stationnaire obtenue pour une vitesse d’injection moyenne de 1.02 m/s ( $Re = 2000$ ) en prenant en compte le raccord (5.9) au fond avant. Nous lui ajoutons le mode de valeur propre  $\hat{\omega} = 41.1 - 9.82i$  obtenu pour un écoulement de Taylor-Culick équivalent à la solution stationnaire précédente, avec une discrétisation  $(N \times M) = 50 \times 150$  en fonction de courant. L’amplitude

initiale est telle que  $\varepsilon_{\text{lin}} = 0.1$ . Nous utilisons désormais, pour la simulation instationnaire, le schéma spatial AUSM+up destiné à éviter l'accumulation d'erreurs numériques dans la zone à basse vitesse du fond avant. De même, nous choisissons directement le maillage MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup> (voir tableau 5.1), contenant pour cette configuration  $870 \times 120$  points, que nous utiliserons dans les calculs ultérieurs afin de ne pas être limité par une trop faible résolution pour le calcul des modes hydrodynamiques. Nous imposons cette fois-ci une condition de sortie classique ou réfléchissante afin de vérifier la validité des modes acoustiques, un cas avec condition non-réfléchissante étant toutefois présenté pour comparaison. Quant à la discrétisation temporelle et au nombre de processeurs utilisés, les différents jeux de paramètres utilisés sont résumés en table 5.2.

Cas	Schéma spatial	Schéma temporel	$\delta t$ (s)	Condition de sortie	$N_P$	$T_e/\delta t$ (raccords)
$C_1$	AUSM+up	RKI2	$10^{-6}$	Non-réfléchissante	1	
$C_2$	AUSM+up	RKI2	$10^{-6}$	Réfléchissante	1	
$C_3$	AUSM+up	RKI2	$10^{-6}$	Réfléchissante	64	1
$C_4$	AUSM+up	RKI2	$10^{-6}$	Réfléchissante	64	0.366025
$C_5$	AUSM+up	RKI2	$10^{-7}$	Réfléchissante	64	0.366025
$C_6$	AUSM+up	RKI2	$5 \cdot 10^{-8}$	Réfléchissante	64	0.366025
$C_7$	AUSM+up	RK2	$10^{-8}$	Réfléchissante	64	1

TABLE 5.2 – Cas de calcul pour un MPS simplifié.

Intéressons-nous d'abord aux cas  $C_1$  et  $C_2$ , dont les signaux de pression au fond avant et de vitesse en proche paroi près de la sortie sont présentés en figure 5.7. Comme dans les calculs précédents, le VSP est parfaitement résolu (vitesse radiale décrite en figure 5.7(c)), et la prise en compte d'une condition réfléchissante n'à la-dessus aucun impact. En revanche, le signal de pression au fond avant indique très clairement dans ce dernier cas l'entretien d'ondes acoustiques (figure 5.7(a)), de sorte qu'on ne retrouve plus uniquement la présence du VSP sur le signal de vitesse axiale. Nous proposons donc la méthode suivante pour reconstituer la présence de l'acoustique (non-imposée) dans la simulation  $C_2$  :

- La période transitoire pour l'acoustique semblant s'étendre jusqu'à  $t_1 = 0.01$  s, nous récupérons le champ de vitesse axiale à cet instant et nous tentons une approximation de la forme :

$$u_x(x, r, t_1) = \left( \sum_{n=1}^N \lambda_n u_{x,n}^{\text{AC}}(x, r) \right) + \mu \hat{u}_x(x, t) \quad (5.16)$$

où les coefficients complexes  $\lambda_n$  sont inconnus et  $\mu$  est en fait l'amplitude du mode hydrodynamique introduit à  $t = 0$ . Les fonctions  $u_{x,n}^{\text{AC}}$  sont les fluctuations acoustiques totales comprenant la solution d'onde plane et la correction rotationnelle en  $\mathcal{O}(1)$ .

- Les coefficients obtenus permettent de calculer la composante d'onde plane dominante dans le signal de pression.

Nous voyons alors en particulier que la pression au fond avant calculée par DNS présente le même profil de fluctuations que celui obtenu par reconstitution théorique, mais avec une dérive de la fréquence. L'utilisation d'un schéma temporel implicite avec un pas de temps tel que le nombre de CFL acoustique soit largement supérieur à 1 permet bien de résoudre les instabilités hydrodynamiques mais présente une dispersion trop grande pour le calcul de l'acoustique, ce qui est potentiellement ennuyeux, car un tel glissement en fréquence est bien plus grand que l'écart entre deux modes hydrodynamiques.

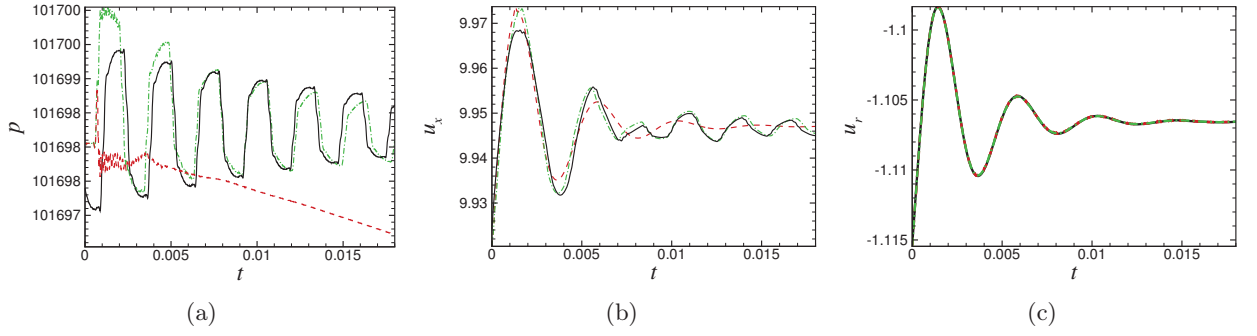


FIGURE 5.7 – Évolution de la pression en  $x = 0$ ,  $r = R/2 = 0.015$  m (a) et de la vitesse axiale (b) et radiale (c) en  $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$  m,  $r = 5R/6 = 0.025$  m calculées par DNS (courbes de couleur) pour un MPS simplifié suite à l'introduction du mode propre  $\hat{\omega} = 41.1 - 9.82i$  (calcul en variables primitives,  $(N \times M) = 50 \times 100$  points,  $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.1$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 2200$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.02$  m/s). (---) : cas  $C_1$ ; (- · - · -) : cas  $C_2$ ; (—) : évolution théorique, somme des fluctuations acoustiques et hydrodynamiques.

Pour bien se convaincre qu'un pas de temps trop petit en schéma implicite peut avoir des conséquences désastreuses, passons aux cas  $C_3$  et  $C_4$  qui sont effectués avec les mêmes schémas et pas de temps, mais sur 64 processeurs (signaux en figure 5.8). Dans le cas de la simulation  $C_3$ , le signal de pression finit par être noyé dans un bruit qui traduit bien la mauvaise résolution de l'acoustique par excès de dispersion numérique (figure 5.8(a)). Remarquons que le signal de vitesse radiale est corrélativement plus bruité que celui de vitesse longitudinale (figures 5.8(c) et 5.8(b)), à cause de l'excitation de perturbations sur l'acoustique radiale alors que celle-ci est normalement négligeable. Ce phénomène est à mettre en relation avec une propriété des schémas de type Runge-Kutta implicite pour lesquels il existe un optimum du temps de relaxation  $T_e$  pour les conditions de raccord entre domaines [46]. En particulier, dans le cas du calcul  $C_4$ , nous avons pris l'optimum  $T_e/\delta t = 0.366025$  préconisé, ce qui permet de s'affranchir l'explosion du bruit numérique sur le signal de pression disparaît. Dans le même temps, nous retrouvons des signaux de vitesse présentant le même profil que pour un calcul sur un seul processeur. Encore une fois, le calcul du mode hydrodynamique n'est pas modifié, mais la dérive fréquentielle observée dans le cas  $C_2$  semble encore plus grande.

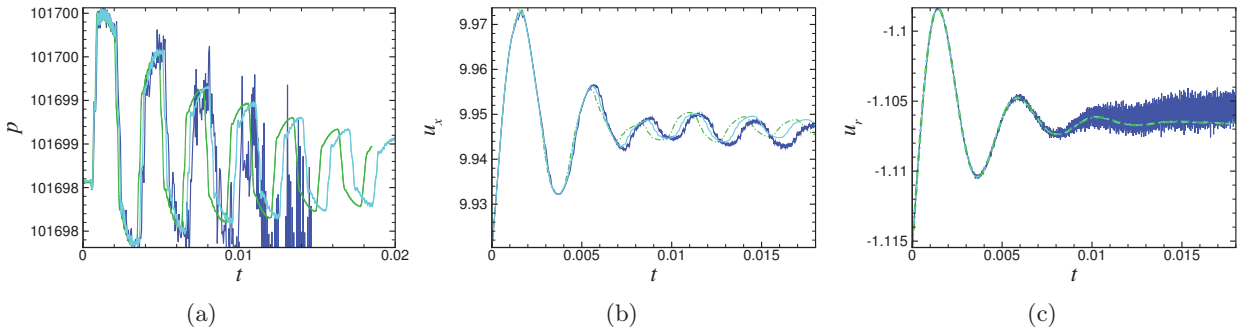


FIGURE 5.8 – Évolution de la pression en  $x = 0$ ,  $r = R/2 = 0.015$  m (a) et de la vitesse axiale (b) et radiale (c) en  $x = 5X_{\text{out}}/6 = 0.25$  m,  $r = 5R/6 = 0.025$  m calculées par DNS (courbes de couleur) pour un MPS simplifié suite à l'introduction du mode propre  $\hat{\omega} = 41.1 - 9.82i$  (calcul en variables primitives,  $(N \times M) = 50 \times 100$  points,  $\varepsilon_{\text{lin}} \approx 0.1$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 2200$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.02$  m/s). (- · - · -) : cas  $C_2$ ; (—) : cas  $C_3$ ; (---) : cas  $C_4$ .

Nous choisissons donc de diminuer le pas de temps jusqu'à ce que la fréquence des premiers modes

acoustiques se stabilise. Parallèlement, une simulation utilisant le schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 3 est menée pour avoir un cas de référence où la dispersion due à l'intégration temporelle est censée moins jouer. Nous pouvons directement comparer les fréquences des deux premiers modes acoustiques obtenues sur l'enregistrement de pression au fond avant en effectuant encore une fois l'analyse HR de ce signal, avec les paramètres<sup>7</sup>  $F_s = 22050$  Hz et  $N_w = 256$ .

Les HRogrammes obtenus dans les cas  $C_2$  à  $C_7$  sont superposés en figure 5.9 sur une plage de fréquence englobant les deux premiers modes acoustiques et le mode hydrodynamique. Nous remarquons en premier lieu que la fréquence des modes acoustiques est réellement sous-estimée par les calculs en implicite de pas de temps  $\delta t = 10^{-6}$  s et ne parvient à la fréquence théorique qu'à partir de  $\delta t = 10^{-7}$  s. Nous retrouvons de ce point de vue la nécessité d'effectuer un calcul avec un CFL acoustique inférieur à 1. Plus intéressante est la présence, dans ce signal de pression obtenu pour les cas  $C_6$  et  $C_7$ , de la fréquence du premier mode hydrodynamique avec une amplitude initialement aussi forte que celle du premier mode acoustique, puis décroissante. Cela semble indiquer qu'il existe deux types d'ondes de pression générées par la réflexion en sortie, dès l'instant initial, du VSP introduit à  $t = 0$ . Celles du premier type sont purement acoustiques, dans la mesure où leur fréquence est directement imposée par les conditions aux limites au fond avant et en sortie. Celles d'un second type gardent la fréquence du VSP et ne peuvent donc être entretenues car leur nombre d'onde est mal ajusté vis-à-vis des conditions aux limites. Or, la fréquence du VSP n'apparaît pas dans les simulations menées avec un schéma implicite de pas de temps inférieur à  $\delta t = 10^{-7}$  s, même si la réflexion du VSP initial *a nécessairement lieu*. Ces discrétisations temporelles ne permettent donc pas de calculer correctement les réflexions des fluctuations de vitesse axiale en sortie.

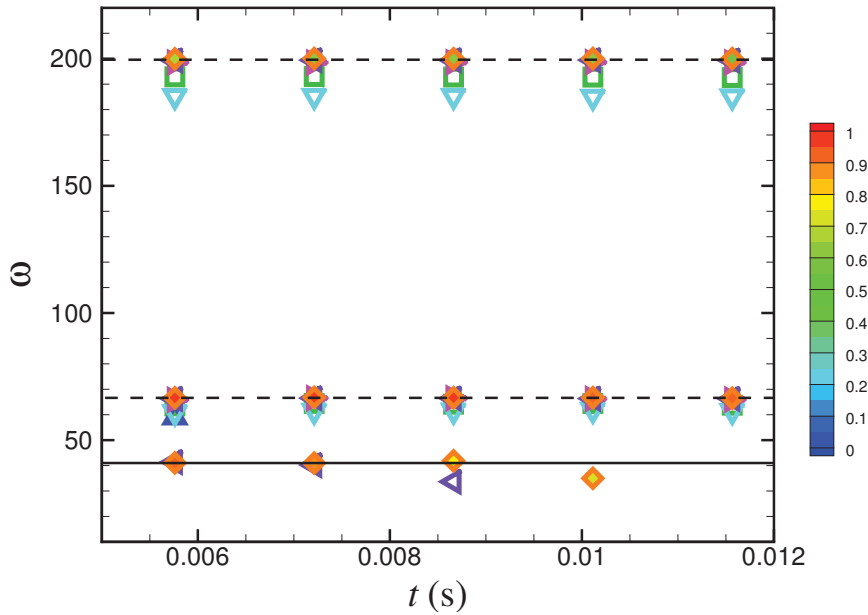


FIGURE 5.9 – HRogramme du signal de pression au fond avant obtenu pour les simulations  $C_2$  à  $C_7$ , exprimé dans le plan  $(t, \omega)$ , où  $\omega$  est la pulsation réduite liée à la fréquence  $f$  des exponentielles par  $\omega = 2\pi f R / V_{inj}$ . (- - -) : pulsation des modes acoustiques longitudinaux; (—) : pulsation du mode hydrodynamique introduit à  $t = 0$ ;  $\square$  : cas  $C_2$ ;  $\triangle$  : cas  $C_3$ ;  $\nabla$  : cas  $C_4$ ;  $\blacktriangleright$  : cas  $C_5$ ;  $\blacktriangleleft$  : cas  $C_6$ ;  $\diamond$  : cas  $C_7$ , le coeur des symboles représente l'amplitude des exponentielles correspondantes.

7. Nous avons montré en annexe A.2.2 que lorsqu'il existe des modes assez rapprochés les uns des autres, il est nécessaire de choisir une taille de fenêtre et une fréquence d'échantillonnage tels que l'intervalle de temps d'une fenêtre  $T_w = N_w / F_s$  soit suffisamment grand, en fait au moins égal à quatre périodes de l'onde de fréquence la plus basse supposée apparaître dans le signal. D'où les paramètres utilisés ici.

D'un point de vue numérique, l'intégration explicite est le meilleur choix, mais elle est coûteuse en temps de calcul. Pour une simulation portant sur un temps physique  $\Delta t = 0.02$  s, le pas de temps employé du fait de la limite de stabilité du schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 demande  $2 \cdot 10^6$  itérations d'un temps moyen de 0.023 s sur 64 processeurs, soit plus de 12 h de calcul. Toujours sur 64 processeurs, le schéma Runge-Kutta implicite d'ordre 2 est caractérisé par un pas de temps par itération de 0.061 s. Pour un pas de temps de  $5 \cdot 10^{-8}$  s, le temps total de la simulation est d'environ 7 h, ce qui est appréciable. Nous avons également tenté de passer au schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 2, dont la limite de stabilité correspond à un pas de temps de  $5 \cdot 10^{-9}$  s. Il s'avère que sur 64 processeurs, le temps minimal par itération est certes diminué par rapport à celui du schéma d'ordre 3, mais le temps par itération moyen passe lui à 0.038 s, soit quasiment le double! Le même phénomène est d'ailleurs observé lorsque l'on effectue un calcul explicite à l'ordre 3 sur 128 processeurs. Cela signifie sans doute qu'un temps par itération minimal de 0.02 s devient trop petit devant le temps de transfert de données entre processeurs et que la limite de scalabilité est atteinte. Par la suite, nous effectuerons donc des calculs sur 64 processeurs pour le maillage MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup> mis au point pour un rapport d'aspect du conduit  $X_{\text{out}} = 8$ . Nous utiliserons soit le schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 3 avec un pas de temps de  $10^{-8}$  s, soit le schéma de Runge-Kutta implicite d'ordre 2 avec un pas de temps de  $5 \cdot 10^{-8}$  s, ce dernier choix étant plutôt réservé à des études paramétriques «rapides».

Outre ces considérations techniques, la simulation d'ondes de pression générées par le VSP atteignant la sortie du domaine nous donne une indication sur le mécanisme de création d'instabilités hydrodynamiques. En effet, ces ondes ne semblent forcer en aucun cas une réponse de l'écoulement en termes d'instabilités hydrodynamiques qui suivent parfaitement leur décroissance temporelle théorique. Par conséquent, le VSP ne peut pas émerger dans une configuration parfaitement lisse, même en présence d'acoustique. Or, nous avons déjà évoqué une idée d'élément déclencheur pour le VSP lorsque nous avons évoqué les tirs à échelle réduite LP9t10 et LP9t11 : la présence d'un intersegment, ou plus généralement d'une *perturbation spatiale* dans le domaine fluide, associée à l'abscisse de début de domaine de calcul des analyses de stabilité. C'est pourquoi nous allons introduire une rupture de débit pariétale, plus communément appelée «scotch», dans les calculs présentés au chapitre suivant.

*Ce chapitre vise à bien définir les paramètres à utiliser dans le code CEDRE pour effectuer des simulations numériques où les modes hydrodynamiques et l'acoustique soient correctement résolus. L'accent a été mis sur la nécessaire forte résolution du maillage associés nécessairement à de petits pas de temps, que ce soit en intégration explicite ( $\delta t = 10^{-8}$ ) ou implicite ( $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ ). Dans ce dernier cas, le temps de relaxation entre domaines doit également être ajusté lorsque le calcul est effectué sur plusieurs processeurs après découpage du domaine de calcul. Pour ce qui est de la condition de sortie, une première solution consiste à y imposer une valeur de la pression. Dans ce cas, on montre que toute fluctuation de vitesse axiale se réfléchit complètement en une onde de pression qui remonte l'écoulement. On peut choisir au contraire d'imposer une condition de pression non-réfléchissante qui permet d'annuler ce type d'ondes de pression induites.*

*Les premiers calculs effectués ici portent sur le test de modes de stabilité calculés au chapitre 2. À l'état initial, leur fonctions propres sont ajoutées à un état de base convergé avec une amplitude linéaire. Toutes ces simulations montrent un bon accord avec l'évolution temporelle théorique de ces modes, quelle que soit la discrétisation avec laquelle ceux-ci ont été calculés. Il est donc probable qu'un continuum de modes puisse se propager, plutôt qu'un jeu de modes discrets. Cela confirme que les modes globaux calculés depuis le fond avant doivent être interprétés en termes de pseudo-modes.*



# Chapitre 6

## Mise en évidence intrinsèque du VSP

### 6.1 Etude de la réponse impulsionnelle de l'écoulement

#### 6.1.1 Principe du calcul

Nous reprenons les paramètres de calcul optimaux déterminés au chapitre précédent (section 5.2.2), à savoir :

- Pour la discrétisation et l'intégration spatiale, nous prenons le maillage le plus raffiné (type MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup>) comprenant  $870 \times 120$  points pour un conduit cylindrique de rayon  $R = 0.03$  m et de facteur d'aspect  $X_{\text{out}} = 8$ . Nous utilisons le schéma de Roe avec éventuellement un préconditionnement bas-Mach pour le calcul d'un état stationnaire, et le schéma AUSM+up en instationnaire. Le domaine est découpé en 64 partitions.
- L'obtention d'un état stationnaire se fait toujours avec le schéma implicite d'ordre 1 en deux temps ( $\delta t = 0.5$  s sans préconditionnement puis  $\delta t = 0.01$  s avec correction bas-Mach pour achever la convergence des zones à basse vitesse). L'intégration instationnaire passe par l'utilisation du schéma Runge-Kutta implicite d'ordre 2, avec un pas de temps  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s et des conditions de raccordement entre domaines relaxées avec un pas de temps  $T_e = 0.366025\delta t$ . Exceptionnellement, les résultats obtenus seront comparés à une intégration explicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 3,  $\delta t = 10^{-8}$  s,  $T_e = \delta t$ ).

Les paramètres physiques du calcul sont de nouveau une vitesse d'injection moyenne  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s, dont le profil axial comprend toujours un raccord en tangente hyperbolique au fond avant. Cependant, une rupture de débit est cette fois-ci imposée au milieu du domaine ( $x/R = 4$ ) afin de permettre l'émergence intrinsèque de structures pariétales. Cette technique est à la fois bien connue des numériciens du monde des ODP, et vise à simuler la présence effective, dans les chargements des boosters, de petits intersegments. Nous cherchons dans un premier temps à calculer la *réponse impulsionnelle* de l'écoulement vis-à-vis d'une perturbation initiale. Le champ introduit à  $t = 0$  prend donc la forme

$$q(x, r, t = 0) = Q_{\text{base}}(x, r) + \varepsilon \mathfrak{R}(q'(x, r)), \quad (6.1)$$

où  $Q_{\text{base}}$  est le champ de base calculé avec un pas de temps long et  $q'$  une perturbation sur la vitesse axiale localisée juste en amont du scotch. Comme pour l'introduction de modes VSP, le paramètre  $\varepsilon$  est choisi de telle sorte que  $\varepsilon \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\infty} / \|\mathbf{U}\|_{\infty}$  soit inférieur à  $10^{-2}$ . Afin d'éviter toute réponse du fluide autre que sa réponse intrinsèque, la condition imposée en sortie est non-réfléchissante afin de s'affranchir de la présence d'acoustique et d'ondes de pression parasites, et par conséquent d'une possible réponse forcée de l'écoulement.

#### 6.1.2 Effet du scotch sur l'écoulement moyen

Dans tout ce qui suit, nous désignons par le terme de «scotch» la présence d'une très petite rupture de débit en un point de la paroi. La présence d'un scotch est prise en compte par l'annulation du



débit sur un certain nombre de mailles sur une distance  $\delta x_s$  situées autour d'un sommet d'abscisse  $x_s$ . Pour décrire précisément l'effet réel d'une telle annulation, il faut rappeler que les valeurs de vitesse entrante imposées au solveur CHARME par les fichiers de conditions aux limites hétérogènes (`ps1_cylindre_PAROI.0` par exemple pour notre cas) sont écrites sur une grille de points qui coïncident avec des sommets du maillage, et que ces valeurs sont interpolées linéairement au centre des cellules-limites de la limite physique considérée. Pour être certain que la vitesse d'injection est nulle sur au moins une face limite, il faut donc l'annuler sur les deux sommets les plus proches. En pratique, les profils de vitesse d'injection (tracés en figure 6.1(a)) contiennent un débit bloqué sur au deux mailles ou plus (agrandissement près du scotch en figure 6.1(b)).

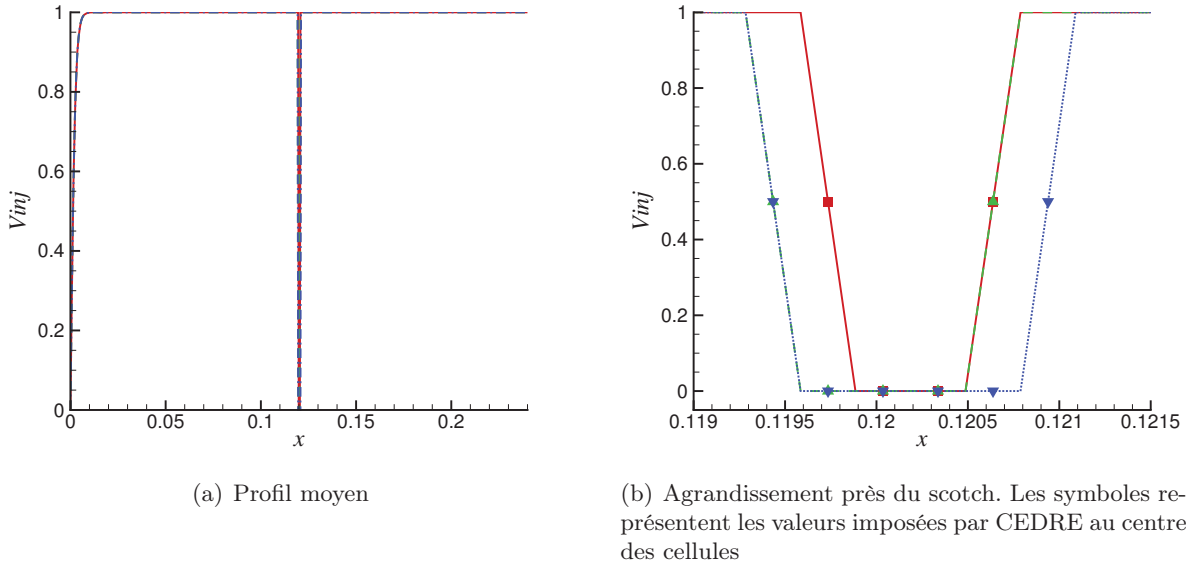


FIGURE 6.1 – Profil de vitesse d'injection pariétale avec raccord en tangente hyperbolique au fond avant et scotch autour du point  $x_s = 0.1202$  m. (—) : scotch sur deux mailles ( $\delta x_s = 0.0006$  m); (- - -) : scotch sur trois mailles ( $\delta x_s = 0.0009$  m); ( $\cdot \cdot \cdot$ ) : scotch sur quatre mailles ( $\delta x_s = 0.0012$  m);

Dans cette partie, nous présenterons les simulations effectuées avec un scotch de taille  $\delta x_s = 0.0006$  m (deux mailles) situé autour du point  $x_s = 0.1202$  m, qui annule donc le débit pariétal sur deux centres de cellules. L'effet de cette perturbation est décrit en figure 6.2, où est reportée la différence entre les champs de rotationnel  $\delta(\nabla \wedge \mathbf{u})$  obtenus et ceux calculés en configuration lisse. L'ajout du scotch a pour conséquence principale d'introduire un petit cisaillement près de la paroi, qui semble à même de destabiliser l'écoulement en aval et de générer des structures tourbillonnaires.

### 6.1.3 Description de la réponse à une perturbation initiale

Nous calculons ici la réponse à une perturbation initiale dont le rotationnel est décrit en figure 6.3(a). La simulation est menée pendant un temps physique de 0.04 s. La séquence des figures 6.3(b) à 6.3(d), correspondant aux champs de fluctuations de rotationnel obtenus tous les 0.01 s, montre bien que des structures tourbillonnaires pariétales émergent de la rupture d'injection. Celles-ci sont dans un premier temps convectées et amplifiées vers l'aval, puis commencent à décroître d'intensité. Corrélativement, nous avons tracé en figures 6.4(a) et 6.4(b) les fluctuations de vitesse en proche paroi près de la sortie ( $x/R = 6.67$ ,  $r/R = 0.833$ ). Celles-ci suivent approximativement la même évolution : pendant une première phase, les fluctuations sont nulles, le temps que les structures tourbillonnaires créées près de la rupture de débit soient convectées jusqu'au capteur. Ensuite, les fluctuations atteignent leur

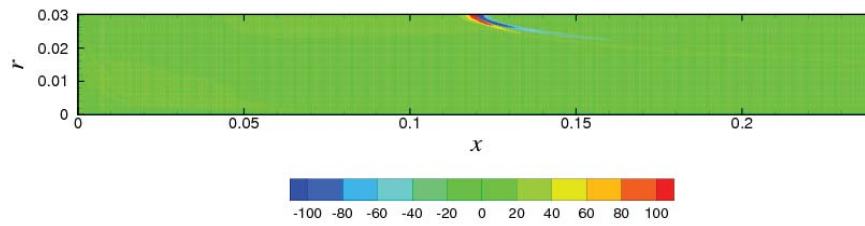


FIGURE 6.2 – Différence entre le champ de rotationnel calculé avec un scotch sur deux mailles autour de  $x_s = 0.12$  m et celui calculé en configuration lisse.

amplitude maximale par un phénomène de croissance transitoire ; enfin, les fluctuations décroissent sur une période de 0.02 s. Notons par ailleurs que la condition de sortie non-réfléchissante joue parfaitement son rôle (figure 6.4(c)) : en-dehors du saut initial, probablement dû au déséquilibre causé par le champ de pression introduit à  $t = 0$  calculé en condition de sortie classique, les fluctuations de pression sont d'amplitude tout-à-fait négligeable.

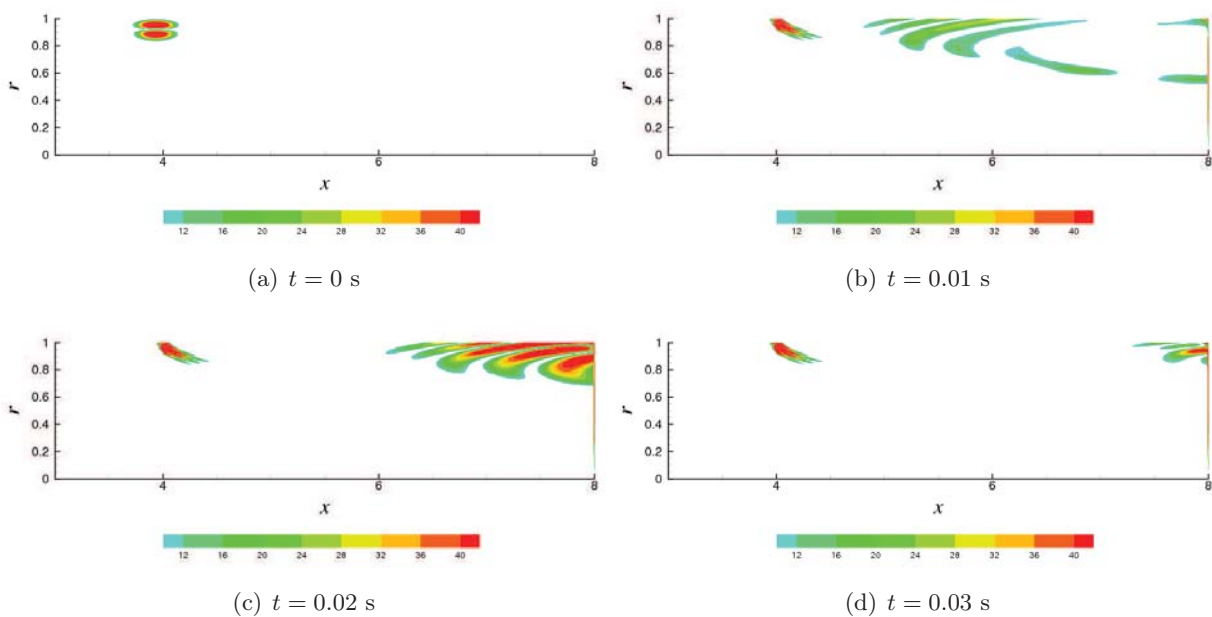


FIGURE 6.3 – Champ de rotationnel des fluctuations de vitesse calculé par Simulation Numérique Directe à différents instants. Une perturbation est introduite à l'instant initial juste en amont du scotch ( $x_s = 0.1202$  m,  $\delta x_s = 0.0006$  m). Les structures tourbillonnaires pariétales induites par cette perturbation sont générées par croissance transitoire jusqu'à  $t = 0.02$  s et sont ensuite atténuées suivant la décroissance temporelle proche de celle des modes de stabilité calculés sur un demi-domaine.

Pour mieux cerner l'amplitude totale de ces structures tourbillonnaires, la norme des fluctuations de vitesse  $\|\mathbf{u}'\|$  est tracée en figure 6.5. Les deux phases décrites précédemment sont clairement visibles avec une croissance initiale au-dessus de la norme de la perturbation introduite à  $t = 0$ , et une décroissance à partir de  $t = 0.02$  s. Notons que la norme maximale des fluctuations est 1.7 fois supérieure à celle de la perturbation initiale. Ceci est une caractéristique très connue des croissances transitoires mises en évidence par Trefethen [85] ou encore Schmid [77] : une condition initiale contenant en particulier deux fonctions propres quasiment parallèles  $\hat{\mathbf{u}}_1$  et  $\hat{\mathbf{u}}_2$ , mais dont les taux de décroissance temporelle

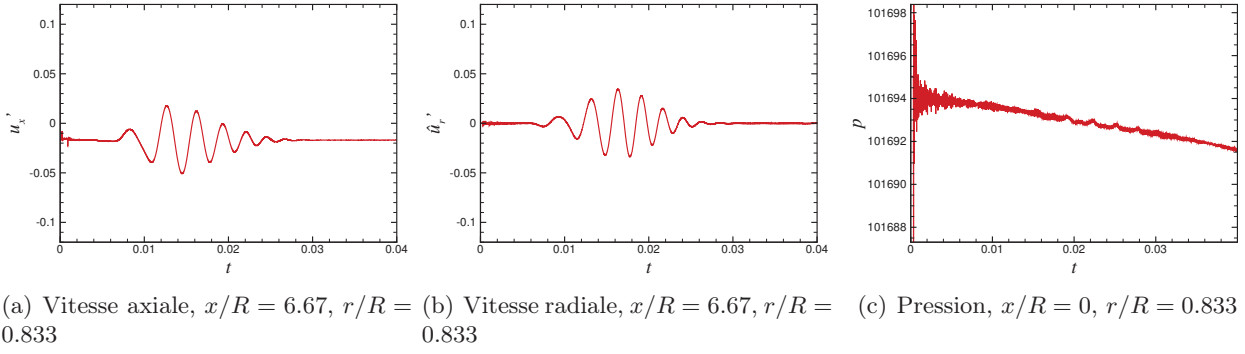
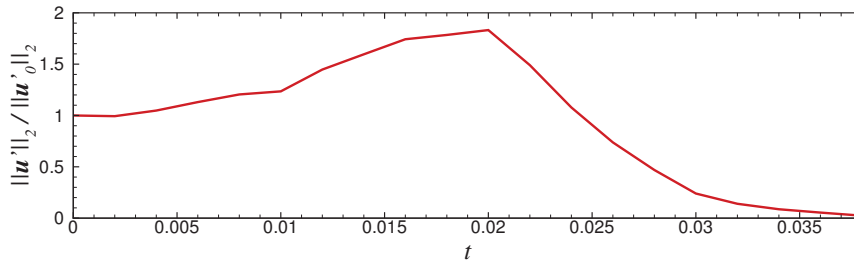


FIGURE 6.4 – Capteurs de vitesse (m/s) et de pression au fond avant (Pa).


 FIGURE 6.5 – Norme quadratique des fluctuations de vitesse calculées par simulation numérique directe  $\|\mathbf{u}'\|_2^2$ . L'amplitude est normalisée par la valeur initiale.

sont très différents ( $-\hat{\omega}_{i,1} \ll -\hat{\omega}_{i,2}$ ), peut conduire à fluctuations d'amplitude importante aux instants où l'amplitude associée à  $\hat{\mathbf{u}}_1$  a fortement décréu, mais pas celle de  $\hat{\mathbf{u}}_2$  (voir schéma figure 6.6).

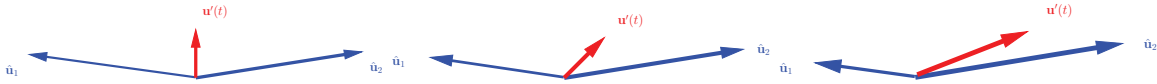


FIGURE 6.6 – Effet de la non-normalité sur la croissance transitoire associée à une condition initiale comportant deux modes  $\hat{\mathbf{u}}_1$  et  $\hat{\mathbf{u}}_2$  quasiment parallèles et de décroissance temporelle très différente ( $-\hat{\omega}_{i,1} \ll -\hat{\omega}_{i,2}$ ). Inspiré de Schmid [77]. Il existe une plage de temps, entre le moment où la composante des fluctuations  $\mathbf{u}'$  associée à  $\hat{\mathbf{u}}_1$  est négligeable et celle associée à  $\hat{\mathbf{u}}_2$  est encore grande, où ces fluctuations sont grandes et presque alignées avec  $\hat{\mathbf{u}}_2$ .

## 6.1.4 Décomposition en somme de modes de stabilité

### 6.1.4.1 Principe

En toute généralité, il est possible de décomposer les fluctuations de vitesse incompressibles calculées par DNS en somme de modes propres issus de la stabilité linéaire,<sup>1</sup> sous la forme

$$\mathbf{u}'_{\text{DNS}}(x, r, t) = \sum_{\hat{\omega}_n \in \text{sp}(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \lambda_n \hat{\mathbf{u}}_n(x, r) \quad (6.2)$$

1. Cette décomposition ne fait pas apparaître de partie réelle : il faut noter que le spectre calculé par la stabilité linéaire est symétrique, et la somme en question contient donc des fonctions propres complexes conjuguées deux à deux, dont la contribution est nécessairement réelle. Quand nous parlerons de «branche VSP», nous désignerons implicitement les modes présentés au chapitre précédent auxquels on ajoute leur complexes conjugués.

où  $\text{sp}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  désigne le spectre du problème aux valeurs propres généralisé associé aux opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Cette somme porte *a priori* sur l'ensemble des modes de stabilité, et pas seulement la branche la plus instable des modes VSP qui est la seule que nous calculons avec précision. Elle est valable pour tout  $t$ , en particulier à l'instant initial : il est donc possible, au moins de manière théorique, de calculer l'évolution temporelle des fluctuations de vitesse uniquement à partir de la condition initiale, et ainsi distinguer les trois phases de la réponse impulsionnelle décrites plus haut [85], à savoir la croissance initiale des perturbations, quantifiée par la quantité  $(d(\|\mathbf{u}\|)/dt)(t=0)$ , leur croissance transitoire et enfin la réponse de l'écoulement quand  $t$  tend vers l'infini.

Or, cela supposerait que nous disposions du spectre entier, et pas seulement des modes VSP les plus instables, ce qui n'est pas notre cas. Nous devons donc nous contenter de calculer l'évolution théorique des fluctuations de vitesses décomposées non pas à partir de la condition initiale, mais des champs de vitesse à un instant  $t_1$  où l'on suppose les effets transitoires terminés et les composantes des fluctuations de vitesse reliées aux modes autres que ceux de la branche VSP négligeables. Au vu de la norme des fluctuations de vitesse (figure 6.5), nous pouvons prendre  $t = t_1 = 0.02$  s. Notons qu'à partir de cet instant, les modes situés en-dessous de la branche VSP ayant un taux de croissance sans dimension  $\hat{\omega}_i$  inférieur à -20, leur contribution est égale au plus à  $10^{-6}$  fois leur contribution initiale.

#### 6.1.4.2 Orthonormalisation du jeu de fonctions propres

Nous cherchons à calculer par la méthode des moindres carrés la décomposition (6.2) à  $t = t_1 = 0.02$  s en prenant en compte un certain nombre  $N_{\text{VSP}}$  de modes de la branche VSP. On définit ainsi le résidu  $\zeta$  de cette décomposition comme suit :<sup>2</sup>

$$\zeta(\boldsymbol{\lambda}) = \left\| \mathbf{u}'_{t_1} - \sum_{n=0}^N \lambda_n \hat{\mathbf{u}}_n \right\|_2^2 \quad (6.3)$$

Dans cette expression,  $\mathbf{u}'_{t_1}$  désigne le champ des fluctuations de vitesses calculé par DNS à l'instant  $t_1$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  est le vecteur des coefficients complexes  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{N_{\text{VSP}}})$  donnant l'amplitude de chaque mode. Le but de la méthode des moindres carrés est alors de calculer le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  qui minimise le résidu  $\mathcal{R}$ . Cependant, au lieu de minimiser directement cette expression, nous préférons calculer une base orthonormalisée de fonctions propres  $(\hat{\mathbf{v}}_n)_n$  à partir des fonctions propres  $(\hat{\mathbf{u}}_n)_n$  et effectuer la décomposition des champs issus de la DNS sur cette base  $(\hat{\mathbf{v}}_n)_n$ . Celle-ci, obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, est liée à la base initiale par la relation

$$\forall 0 \leq n \leq N_{\text{VSP}}, \quad \hat{\mathbf{u}}_n = \sum_{m=0}^n M_{nm} \hat{\mathbf{v}}_m, \quad \text{avec} \quad M_{nm} = \frac{\langle \hat{\mathbf{u}}_n, \hat{\mathbf{v}}_m \rangle}{\|\hat{\mathbf{v}}_n\|_2}, \quad m = 1 \dots n-1, \quad \text{et} \quad M_{nn} = \|\hat{\mathbf{v}}_n\|_2 \quad (6.4)$$

Une fois cette étape d'orthonormalisation effectuée, c'est la fonction

$$\zeta'_N(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{\left\| \mathbf{u}'_{t_1} - \sum_{n=0}^N \gamma_n \hat{\mathbf{v}}_n \right\|_2^2}{\left\| \mathbf{u}'_{t_1} \right\|_2^2} \quad (6.5)$$

dont on cherche le minimum, où  $N$  est le nombre de modes utilisés dans la décomposition, pas nécessairement égal au nombre  $N_{\text{VSP}}$  dont nous disposons. On obtient directement, grâce à l'orthonormalité des fonctions propres,

$$\gamma_m = \langle \mathbf{u}'_{t_1}, \hat{\mathbf{v}}_m \rangle \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\lambda}^T = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{M}^T \quad (6.6)$$

Nous disposons de  $N_{\text{VSP}} = 23$  modes hydrodynamiques pour cette décomposition, dont les pulsations réduites vont de  $\hat{\omega}_r = 34.9$  à  $\hat{\omega}_r = 135$ . Or, nous avons vu que l'un des facteurs limitants à la

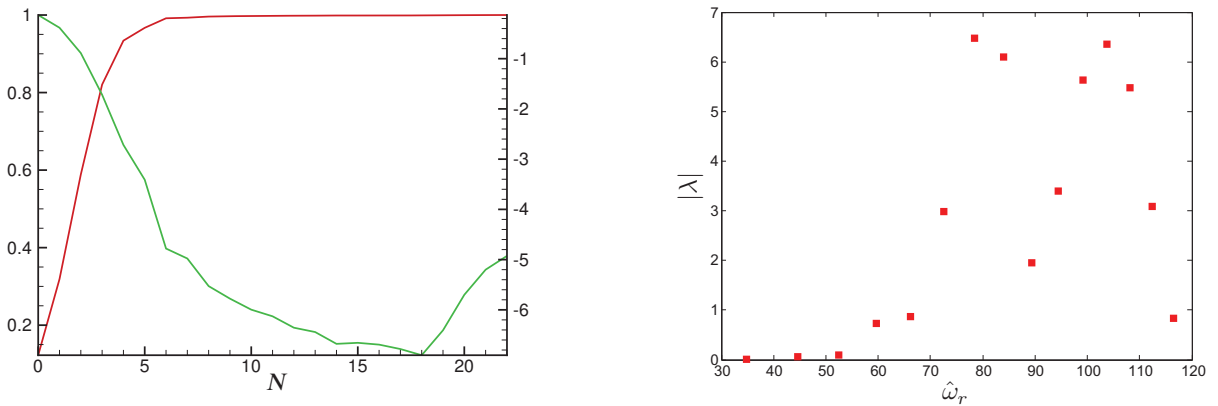
2. Bien noter que la décomposition part de zéro, en cohérence avec la notation des modes hydrodynamiques en fonction de leur nombre de points amphidromiques —le premier mode de la branche VSP n'en contient pas

résolution de modes hydrodynamiques par simulation numérique directe est le nombre de points du maillage CEDRE par oscillations spatiales (et notamment longitudinales). Avec le maillage que nous utilisons dans cette simulation (MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup>), la limitation d'au moins une vingtaine de points par oscillation évoquée en section 5.2.1.3 est atteinte au voisinage du mode  $\hat{\omega}_{14} = 116.5 - 17.5i$  (qui comporte environ 25 points par structure). Nous noterons  $n_c$  l'indice du «mode de coupure». Cela signifie que si les modes d'ordre plus élevé sont présents dans la décomposition (6.2) calculée à l'instant  $t = t_1$ , leurs contributions sont alors purement numériques : celles-ci se compensent certes à  $t = t_1$ , mais peuvent générer des oscillations additionnelles aux instants ultérieurs toujours par effet de croissance transitoire.

L'utilisation d'une base de fonctions propres orthonormalisée permet alors de contrôler, partant du premier de la branche VSP, le nombre  $N_{VSP}$  de modes apportant une contribution physique à la décomposition (6.2). En effet, tant que le nombre de modes  $N$  utilisé est inférieur à l'indice de coupure  $n_c$ , chaque mode apporte de l'information, et la fonction-résidu  $\zeta'_N$  décroît avec le nombre de modes. L'énergie de la décomposition en  $N$  modes, égale à

$$\eta_N = \left\| \sum_{n=0}^N \gamma_n \hat{\mathbf{v}}_n \right\|_2^2 = \sqrt{\sum_{n=0}^N |\gamma_n|^2}, \quad (6.7)$$

elle croît en fonction de  $N$ , même lorsqu'on ajoute des modes non-physiques. L'illustration de la présence de tels modes est donnée en figure 6.7(a) : le résidu décroît en effet jusqu'à  $N = 14$ , atteint un palier entre  $N = 14$  et  $N = 18$ , puis augmente, tandis que l'énergie de la décomposition atteint exactement 1 avec 23 modes. Comme indiqué par le critère de raffinement de maillage, il est donc raisonnable de prendre  $n_c = 14$  comme indice du mode de coupure. Cependant, cette précaution ne semble pas nous prémunir de la présence de modes non-physiques. En effet, l'allure des enregistrements de vitesse au cours du temps est caractérisée par une période d'environ 0.0026 s, soit la pulsation réduite  $\omega_r \approx 72$ . Or, les amplitudes  $\lambda$  associées à chaque mode (figure 6.7(b)) atteignent un premier maximum pour le mode  $\hat{\omega}_6 = 78.4 - 15.76i$ , ce qui est semble cohérent, mais atteignent un second maximum pour le mode  $\hat{\omega}_6 = 103.8 - 15.9i$ , ce qui ne semble pas physique. En fait, la contribution de ces modes haute fréquence peut s'annuler, toujours du fait que ceux-ci sont très parallèles entre eux.



(a) Énergie relative  $\eta$  (—) et logarithme de l'erreur relative correspondante  $\ln(\zeta'_N)$  (—) en fonction du nombre de modes  $N$  utilisé.

(b) Amplitude  $|\lambda|$  associée à chaque mode donné par sa pulsation réduite

FIGURE 6.7 – Énergie, résidus et amplitude de la décomposition des champs de fluctuations de vitesse calculés par DNS en somme de modes hydrodynamiques.

### 6.1.4.3 Comparaison

Comparons maintenant les fluctuations de vitesse reconstituées avec  $N + 1 = n_c + 1 = 15$  modes hydrodynamiques à partir des champs de vitesse calculés par DNS à  $t = t_1 = 0.02$  s, et les fluctuations issues de la DNS elles-mêmes (figure 6.9). Notons d'abord que qualitativement, la reconstitution présente bien la même allure que l'original, non seulement à  $t = t_1$ , mais aussi aux instants ultérieurs (figure 6.9). En particulier, l'alternance de fluctuations de vitesse positives et négatives est bien reconstruite, sans que la présence dans cette décomposition de modes haute fréquence n'introduise d'oscillations rapides de grande amplitude. Deux légères différences se font toutefois jour. En sortie, les structures tourbillonnaires calculées par DNS semblent être légèrement modifiées par rapport à l'allure théorique des fonctions propres des modes hydrodynamiques. La seule cause à ce phénomène que nous ayons trouvé est l'utilisation de la condition de sortie non-réfléchissante, car la condition classique ne semble pas induire une telle modification des champs de vitesse fluctuantes au voisinage de la sortie. L'autre légère différence de la reconstitution par rapport au champ original concerne la composante axiale de la vitesse, qui, sur la DNS, possède des oscillations radiales de très faible amplitude, qui sont en fait la trace de la couche limite acoustique générée par le saut initial de pression visible sur le tracé du capteur 6.4(c). Bien entendu, il n'y a aucune raison pour que ce phénomène soit pris en compte dans la décomposition en modes hydrodynamiques dominants.

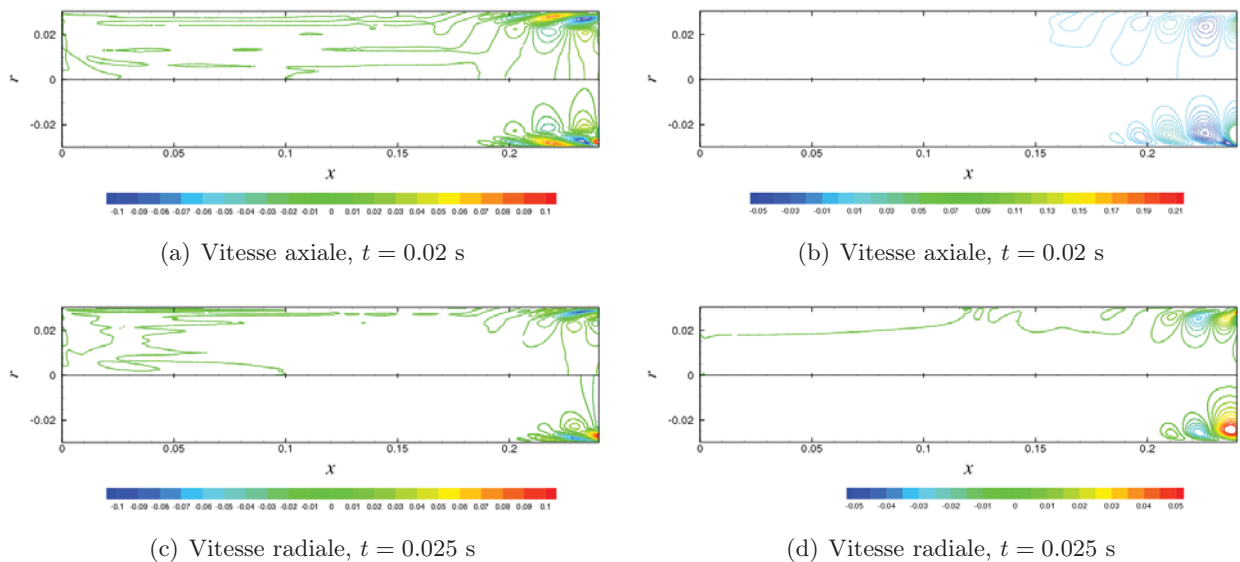


FIGURE 6.8 – Comparaison entre les champs de fluctuations de vitesse calculés par DNS (champs du haut) et par décomposition sur la base des modes de stabilité (champ miroir en bas). À gauche : vitesse axiale ; à droite : vitesse radiale.

Sur le plan quantitatif, les enregistrements de vitesse axiale et radiale au point  $x/R = 6.67$ ,  $r/R = 8.33$  peuvent être comparés à l'évolution de la reconstitution. La figure 6.9 indique que l'accord entre les deux est très bon sur les deux composantes. Le très léger décalage sur la vitesse axiale provient sans doute de la présence dans ce signal d'une trace de couche limite acoustique dont le temps de dissipation semble quasiment aussi long que celui de décroissance des modes hydrodynamiques. L'autre comparaison quantitative que nous pouvons effectuer porte sur la norme des fluctuations de vitesse (figure 6.10). Là encore, l'évolution calculée par DNS est bien cohérente avec celle donnée par la somme des modes propres. Seules des oscillations rapides par rapport à l'allure globale de courbe correspondant à la norme reconstituée traduit la présence des modes haute fréquence de la seconde «bosse de chameau» de la figure 6.7(b). Notons que leur amplitude est négligeable quand bien même les coefficients  $\lambda_n$  associés aux modes haute fréquence qui les induisent ne sont du même ordre de

grandeur que les autres.

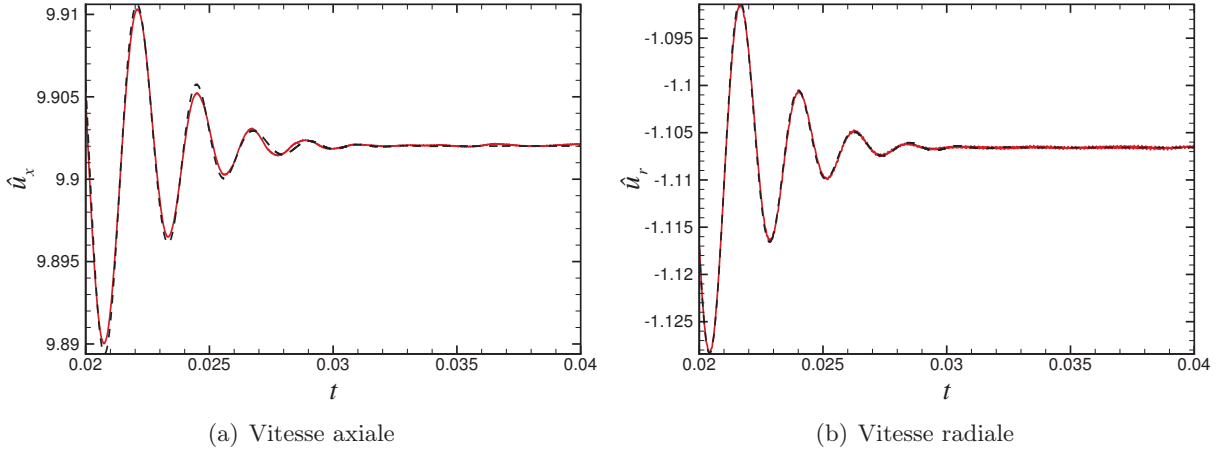


FIGURE 6.9 – Fluctuations calculées en  $x/R = 6.67$ ,  $r/R = 0.833$  (—) et reconstruction théorique effectuée à partir des champs de vitesse à  $t_1 = 0.02$  s (- -).

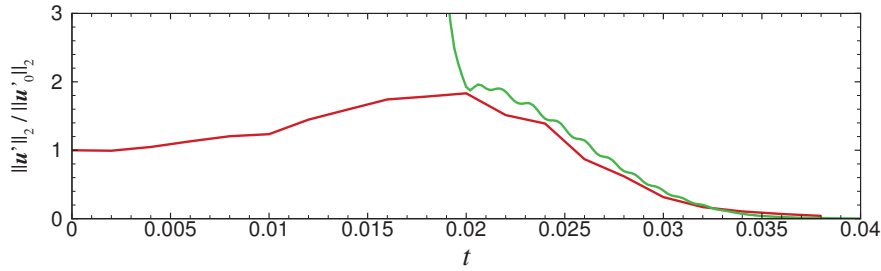


FIGURE 6.10 – Norme quadratique des fluctuations de vitesse calculées par simulation numérique directe  $\|\mathbf{u}'\|_2^2$  (—) et reconstitution par décomposition en modes hydrodynamiques (—). L'amplitude est normalisée par la norme de la condition initiale.

### 6.1.5 Conclusion

La comparaison entre la réponse impulsionnelle calculée par simulation numérique directe et sa décomposition en somme de modes hydrodynamiques de la branche VSP montre la validité de ces derniers dans la mesure où ils permettent de bien représenter la génération de structures tourbillonnaires au voisinage d'une rupture de débit pariétale, du fait de l'introduction d'une perturbation initiale. Non seulement les champs de fluctuations de vitesse obtenus par DNS ont une allure sensiblement identique à celle des fonctions propres des modes VSP, mais l'évolution temporelle de la reconstitution est très proche de celle de la simulation.

À ce stade, on peut objecter qu'il est possible de calculer une décomposition sur la base des modes hydrodynamique autre que la nôtre, et qui conduise au même résultat. En effet, la méthode des moindres carrés directe (sans passer par une base orthonormée) avec le même nombre de modes conduit à une reconstitution temporelle qu'on ne saurait distinguer sur un graphe de celle tracée en figure 6.9, avec toutefois des amplitudes sur chaque mode  $\lambda_n$  différentes de celles que nous avons obtenues. Il en va de même en prenant en compte les modes d'indices supérieurs à 15. Il s'agit là encore de l'effet de la non-normalité de ces fonctions propres. Il n'est donc pas possible à ce stade de déterminer si des



instabilités hydrodynamiques peuvent émerger dans une DNS aux fréquences prédites par la théorie de la stabilité linéaire.

## 6.2 Réponse de l'écoulement à un forçage acoustique

### 6.2.1 Principe du calcul

Par rapport au calcul de la réponse impulsionnelle de l'écoulement, deux paramètres changent ici.

- La condition initiale. On introduit à  $t = 0$  la somme de la solution stationnaire calculée par CEDRE et des fluctuations de pression et de vitesse axiale du mode acoustique fondamental de fréquence  $f_{AC} = 362$  Hz, en incluant la partie compressible irrotationnelle ( $\hat{q}$ ) et la correction rotationnelle incompressible ( $\check{q}$ ) :

$$q(x, r, t = 0) = Q_{\text{base}}(x, r) + \varepsilon \Re(\hat{q}(x, r) + \check{q}(x, r)), \quad (6.8)$$

L'intensité de l'acoustique initiale est telle que, au fond avant, l'amplitude des fluctuations de pression est égale à  $\alpha_{AC} p_0$  où  $p_0$  est la pression de référence et  $\alpha_{AC}$  l'amplitude relative initiale des fluctuations de pression, prise ici égale à 0.001.

- La condition de sortie, qui est désormais de type 4 (réfléchissante). Cela conduit à considérer deux phénomènes additionnels par rapport au cas précédent : l'entretien des ondes de pression dans le MPS simplifié, et la réflexion des fluctuations hydrodynamiques en ondes de pression remontant l'écoulement. Ce cas de calcul permet donc de simuler non seulement la *réponse forcée* du VSP aux ondes de pression, mais également la création d'ondes de pression par réflexion des structures tourbillonnaires en sortie qui s'ajoutent à l'acoustique initiale.

Les paramètres du maillage, des schémas de flux et de rupture de débit sont identiques à ceux utilisés dans la section précédente. Pour ce qui est de l'intégration temporelle, nous comparons ici les résultats obtenus avec le pas de temps  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s avec le schéma Runge-Kutta implicite d'ordre 2 et le pas de temps  $\delta t = 10^{-8}$  s avec le schéma Runge-Kutta explicite d'ordre 3. Dans les deux cas, l'intégration est poursuivie jusqu'à un temps physique de 0.06 s.

### 6.2.2 Double interaction entre VSP et acoustique

Du fait de l'imposition d'une condition de sortie réfléchissante, trois types de fluctuations stationnaires peuvent apparaître au cours de la simulation : les structures hydrodynamiques, les ondes de pression purement acoustiques dans le sens où celles-ci vérifient une équation de type Helmholtz avec ses conditions aux limites (voir section 1.4), et les ondes de pression issues de la réflexion des structures hydrodynamiques en sortie du MPS simplifié. La fréquence de ces dernières est *a priori* inconnue : soit elles tendent vers la fréquence acoustique la plus proche, soit elles gardent la fréquence propre du VSP dont elles sont issues.

Comme dans le cas de tirs expérimentaux, la mesure de la pression au fond avant est la plus pertinente pour la description des ODP. Celle-ci est tracée en figure 6.11(a). Les simulations effectuées en intégration implicite et explicite donnent des résultats similaires jusqu'à  $t = 0.022$  s, intervalle de temps pendant lequel l'amplitude des ondes de pression diminue progressivement par dissipation visqueuse. À partir de  $t = 0.022$  s, cette amplitude augmente, avec cependant une intensité plus forte en explicite qu'en implicite. Cette description vaut également pour le capteur de pression situé au milieu du domaine (figure 6.11(b)). En sortie, la pression moyenne est fixée sur la limite entière (et non uniformément en tout point), il existe de petites fluctuations qui sont calculées différemment suivant la méthode d'intégration, y compris aux premiers instants de la simulation. En particulier, le signal calculé en implicite est déphasé et d'amplitude légèrement plus forte que celui obtenu en explicite. Cela traduit le fait que les deux méthodes, qui ont une influence sur la prise en compte des conditions aux

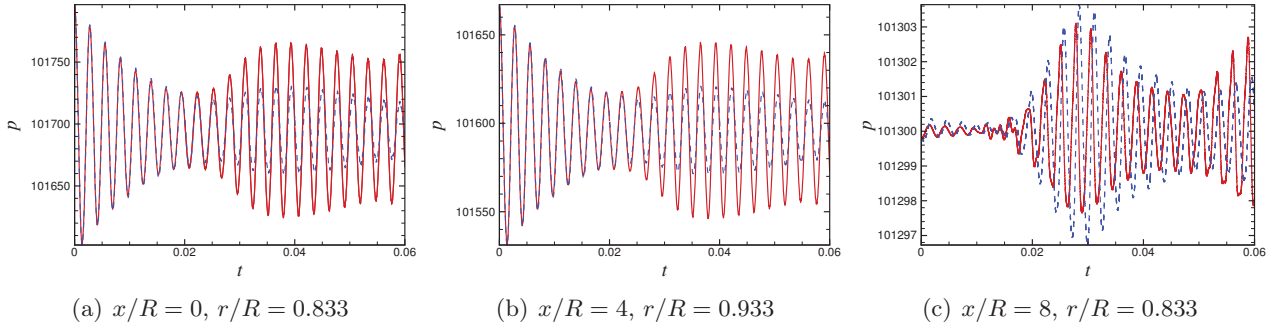


FIGURE 6.11 – Capteurs de pression (Pa) pour les simulations numériques directes effectuées en intégration temporelle explicite (schéma de Runge-Kutta d’ordre 3,  $\delta t = 10^{-8}$ , —) et implicite (schéma de Runge-Kutta d’ordre 2,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$ , - - -).

limites, ne calculent pas exactement de la même manière les réflexions de fluctuations de vitesse axiale en sortie.

Les signaux de vitesse radiale, qui traduisent uniquement la présence de structures tourbillonnaires, sont eux présentés en figure 6.12. Ils présentent tous une évolution en quatre étapes : une première phase plus ou moins longue pendant laquelle les tourbillons créés au voisinage de la rupture de débit sont convectés jusqu’au niveau du capteur considéré, une croissance transitoire, une décroissance similaire à celle observée dans lors du calcul d’une réponse impulsionnelle, puis une nouvelle croissance. Lors de cette dernière étape, l’amplitude des fluctuations de vitesse radiale est d’ailleurs généralement moins élevée en implicite qu’en explicite, ce qui est à mettre en relation avec l’évolution similaire de la pression. Seule la sortie connaît le phénomène inverse : les fluctuations de vitesse radiale qui apparaissent à partir de  $t = 0.02$  s sont plus grandes en implicite, de même que les fluctuations de pression calculées au même point.

Ondes de pression (acoustiques ou pas) et fluctuations hydrodynamiques sont donc liées, mais il convient de distinguer deux modes d’interaction. D’une part, les fluctuations de pression se comportent comme un forçage pour le système qui génère, au niveau du cisaillement de vitesse engendré par la rupture de débit pariétale, des structures tourbillonnaires. En ce sens, le tracé des enveloppes des signaux de pression et de vitesse radiale au voisinage du scotch ( $x/R = 4$ ,  $r/R = 0.933$ , figure 6.13) montre que l’amplitude du VSP suit avec un léger retard celle des ondes de compressibilité. En particulier, l’évolution en deux temps du signal de pression (décroissance visqueuse puis remontée de l’amplitude) se retrouve à l’identique dans celui de vitesse. Cela nous pousse à émettre l’hypothèse, à vérifier, que *le forçage du VSP par des fluctuations de pression est linéaire*. D’autre part, il faut rechercher la raison pour laquelle les niveaux de pression remontent à partir de  $t = 0.024$  s environ au milieu du domaine et au fond avant. La réponse se trouve en sortie : la remontée de ces fluctuations n’intervient que lorsque le VSP atteint la sortie du domaine —comparer les capteurs de pression et de vitesse radiale 6.11(c) et 6.12(d). Ainsi, chaque structure tourbillonnaire qui croise la face de sortie (les premières d’entre elles interviennent à  $t = 0.015$  s environ) génère une onde de pression réfléchie qui remonte l’écoulement et dont on observe la trace un peu plus tard sur les capteurs situés en amont. Reste maintenant à déterminer une propriété importante de ces ondes de pression réfléchies qui forcent en retour la génération de VSP : leur fréquence.

### 6.2.3 Analyse HR des signaux de pression et de vitesse radiale

Pour cela, nous effectuons l’analyse haute Résolution des signaux de pression au fond avant et de vitesse radiale en  $x/R = 6.67$ ,  $r/R = 0.833$ , avec une fréquence d’échantillonnage  $F_s = 22050$  Hz et un nombre de points par fenêtre  $N_w = 1024$ . Les HRogrammes, reportés en figure 6.14, sont tracés

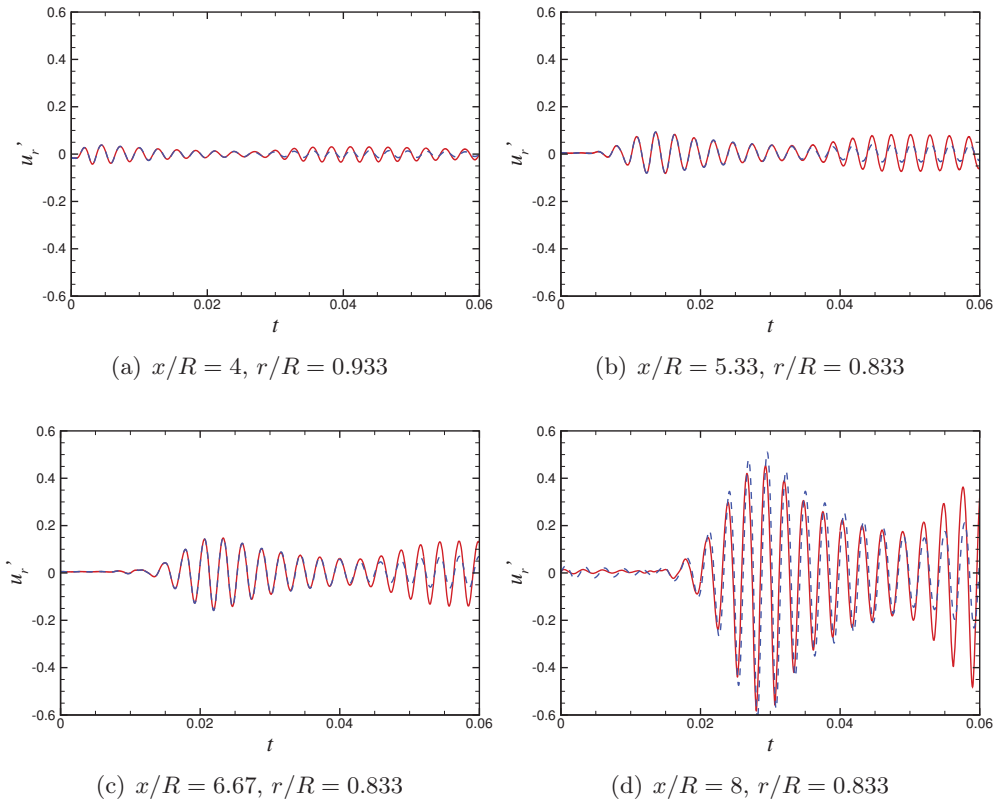


FIGURE 6.12 – Capteurs de vitesse radiale (m/s) en proche paroi à l'aval de la rupture de débit. (—) : intégration explicite; (- - -) : intégration implicite.

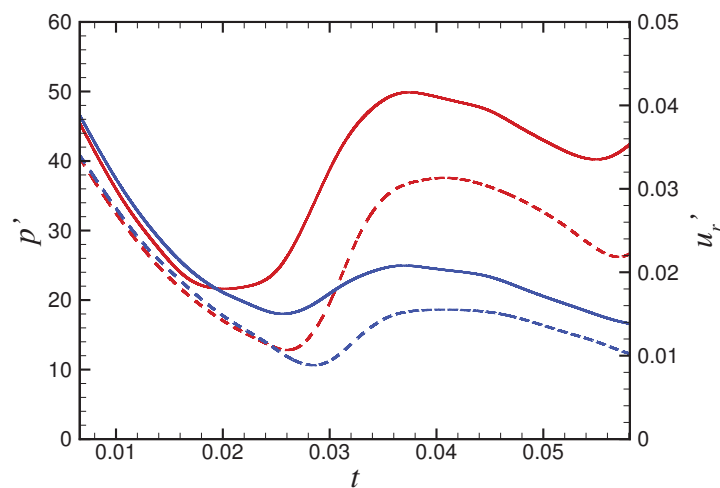


FIGURE 6.13 – Envelopes des fluctuations de pression (lignes continues) et de vitesse radiale au point  $x/R = 4, r/R = 0.933$ . (—) : intégration explicite; (- - -) : intégration implicite.

en fonction du temps dimensionnel  $t$  et de la pulsation réduite normalisée par le facteur  $V_{inj}/R$ , et notée comme précédemment  $\omega$ . D’abord, les fluctuations de vitesse radiale contiennent des fréquences discrètes situées autour de celle du mode acoustique fondamental introduit initialement. Ensuite, ces fréquences sont très proches de celles des modes hydrodynamiques calculés sur le domaine situé entre la rupture d’injection pariétale et la sortie. Ce résultat est donc très important car il valide l’approche modale pour l’analyse de stabilité des MPS. Notons que le léger écart entre les fréquences issues de la DNS et les fréquences théoriques peuvent être le fruit de plusieurs hypothèses simplificatrices utilisées dans les calculs de stabilité : écoulement de Taylor-Culick comme écoulement de base et non écoulement avec scotch, léger décalage des débits le long du moteur dû au raccord en tangente hyperbolique au fond avant et à la présence du scotch, incertitude sur la position exacte d’émergence des structures tourbillonnaires. L’influence de tous ces facteurs sera plus largement discutée au prochain chapitre, mais elle semble d’ampleur limitée vu le bon accord entre simulation numérique et théorie.

Pour ce qui est des signaux de pression, ceux-ci contiennent également ces fréquences hydrodynamiques. Cependant, le cas de calcul est en quelque sorte mal choisi, puisque la fréquence du mode  $\hat{\omega} = 66.18 - 17.56i$  est très proche de celle du mode acoustique fondamental, de sorte qu’il est très difficile de juger si la fréquence issue de l’analyse HR située entre  $\omega = 65$  et  $\omega = 66$  correspond à l’acoustique ou au VSP. Cependant, la décroissance rapide de l’acoustique initiale (figure 6.11(a)) ainsi que la présence d’autres modes acoustique suggèrent qu’il s’agit bien d’un mode hydrodynamique. Nous supposons donc qu’il n’y a plus de propagation d’ondes acoustiques au sens strict, mais seulement d’ondes de pression *induites par le VSP* dans la mesure où elles sont issues de la réflexion de structures tourbillonnaires en sortie et gardent vraisemblablement la fréquence de celles-ci. Cette hypothèse a un corollaire : le VSP forcé par l’acoustique initiale est sans doute déjà caractérisé par ses fréquences propres. Si ce n’était pas le cas, les ondes de pression induites garderaient la fréquence des modes acoustiques, et nous n’observerions pas de fréquences autres que celles-ci dans les signaux de pression.

#### 6.2.4 Conclusion

La simulation numérique directe d’un MPS simplifié avec condition de sortie réfléchissante a permis d’une part de valider notre approche modale de la stabilité et d’autre part de mieux cerner les modalités de l’interaction entre acoustique et VSP. Pour ce qui est de la stabilité linéaire, il semble pertinent de chercher des modes propres globaux dont l’amplitude est fixée à zéro là où se trouve une perturbation spatiale qui «fixe» le point d’apparition des structures tourbillonnaires. En effet, l’analyse des signaux de vitesse radiale montre bien la présence de fréquences non seulement discrètes et distinctes de celle de l’acoustique du conduit, mais encore qui sont en accord avec celles prédites par la théorie de stabilité linéaire. Rappelons qu’un tel résultat n’avait pas pu être mis en évidence lors de l’étude d’une réponse impulsionnelle de l’écoulement. Pour ce qui est de l’interaction hydro-acoustique, le schéma de boucle de rétroaction entre acoustique et VSP évoqué en introduction est quelque peu précisé. D’une part, on ne peut expliquer la présence dans le système de fréquences différentes de celle de l’acoustique initiale que par le fait que la réponse du VSP à une fluctuation de pression quelconque se fait à ses fréquences propres. Il semble que ce forçage soit linéaire, dans la mesure où l’amplitude des fluctuations hydrodynamiques suit celle des fluctuations de pression. Nous confirmerons plus loin cette hypothèse. D’autre part, les ondes de pression qui forcent l’apparition du VSP sont en réalité des ondes de pression induites par la réflexion en sortie des structures tourbillonnaires elles-mêmes.

Du point de vue numérique, l’amplitude de ces ondes de pression induites semble dépendre de la méthode d’intégration employée. Plus généralement, il faut se souvenir que l’imposition d’une condition de sortie est censée simuler ici la sortie de l’écoulement de Taylor-Culick et des structures tourbillonnaires dans une atmosphère libre. Une solution plus convenable pour la simulation serait de faire en sorte que la condition de sortie prenne en compte une impédance de sortie au lieu d’imposer des réflexions parfaites. Une telle modélisation, qui a une grande importance dans l’étude quantitative de l’interaction entre VSP et ondes de pression, a déjà été effectuée dans le cas de vrais MPS munis d’une tuyère [90]. À

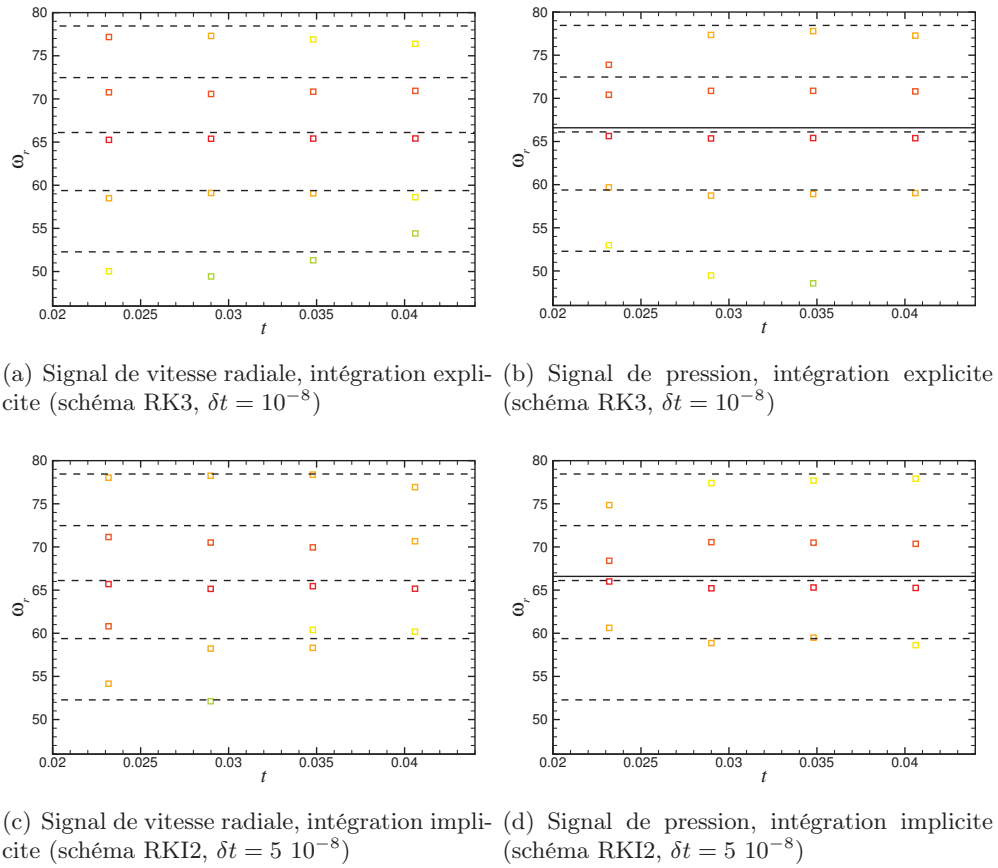


FIGURE 6.14 – Analyse haute résolution de la vitesse radiale en  $x/R = 6.67$ ,  $r/R = 0.833$  et de la pression au fond avant. Fréquence d'échantillonnage :  $F_s = 22050$  Hz ; taille de fenêtre :  $N_w = 1024$ . (—) : fréquence du mode acoustique fondamental ; (- - -) : fréquence des modes hydrodynamiques calculés par analyse de stabilité linéaire avec  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$  et  $\text{Re} = 2000$ .

cet égard, l'autre paramètre à prendre en compte est la réponse du VSP à des fluctuations de pression, que nous décrirons plus loin en termes de *réceptivité*.

*La simulation numérique directe a permis de mettre en évidence l'existence d'instabilités hydrodynamiques similaires à celles calculées par analyse de stabilité linéaire globale au chapitre 4 lorsqu'une rupture de débit pariétale est introduite à la paroi. D'abord, l'identification entre la position de cette perturbation  $X_s$  et l'abscisse du début de calcul  $X_{in}$  a été démontrée dans la mesure où les structures tourbillonnaires observées s'échappent bien de ce «scotch». Ensuite, la réponse de l'écoulement à une perturbation initiale localisée a été calculée en imposant une condition non-réfléchissante en sortie. Les fluctuations de vitesse qui s'échappent alors de la rupture de débit pariétale peuvent être décomposées en une somme de modes hydrodynamiques à l'issue d'une croissance transitoire. Enfin, le calcul de la réponse de l'écoulement à des ondes de pression entretenues par une condition de sortie réfléchissante a été simulé. Des tourbillons sont générés au niveau du scotch avec une amplitude proportionnelle à celle des ondes de pression et aux mêmes fréquences. Ces dernières sont d'ailleurs très proches de celles des modes hydrodynamiques obtenus par la théorie.*

## Chapitre 7

# Vers l'étude de réceptivité du VSP aux ondes de pression

### 7.1 Introduction

Ce chapitre vise à donner quelques pistes supplémentaires quant à la compréhension des mécanismes conduisant à l'apparition de VSP à des fréquences discrètes différentes de celles de l'acoustique naturelle du conduit à parois débitantes. Jusqu'à présent, nous avons montré qu'il était possible de calculer une branche de modes propres discrets de l'écoulement de Taylor-Culick identifiés au VSP. Ces modes dépendent principalement de l'emplacement des conditions aux limites qui ont une signification physique : point d'accrochage des tourbillons pour la limite amont et sortie du conduit à pression imposée pour la limite aval. D'autre part, la pertinence de cette approche modale semble confirmée par la possibilité de décrire la réponse impulsionnelle de l'écoulement à l'aide de ces modes propres une fois une période transitoire achevée, ainsi que l'obtention de fréquences discrètes cohérentes avec celles de la stabilité lors du calcul de sa réponse forcée par la présence d'acoustique.

Cependant, cette cohérence est mise en défaut de deux manières. Premièrement, nous avons vu que la comparaison entre réponse impulsionnelle simulée et décomposition en modes propres ne vaut qu'une fois que la phase transitoire est achevée. Deuxièmement, nous ne sommes pas parvenus à décomposer les champs de vitesse issus de la réponse forcée simulée en somme de modes de la branche VSP, ces derniers ayant notamment une amplification spatiale bien plus grande que celle observée dans les DNS. Ces deux problèmes nous ramènent à une question plus générale sur notre analyse de stabilité : nous avons certes calculé les modes les plus instables, mais *quid ?* des autres modes ? Car en réalité, tout champ de fluctuations de vitesse issu de la DNS est certes décomposable sur la base des modes propres de l'opérateur de Navier-Stokes incompressible linéarisé, mais à condition de tous les prendre. Nous rejoignons donc une remarque commune en stabilité des écoulements ouverts [73, 5, 79] : seule la prise en compte d'un grand nombre de modes permet de décrire la dynamique de l'écoulement.

Nous sommes donc devant une situation paradoxale. La physique des moteurs à propergol solide est très clairement modale car on y observe des instabilités caractérisées par une fréquence différente de celle du forçage naturel de ces moteurs représenté par l'acoustique. De plus il existe des modes propres discrets de leur écoulement de fréquence cohérente avec celle des instabilités observées. Cependant, ces modes ne décrivent que partiellement la dynamique de ces moteurs.

Le but de ce chapitre est donc de donner des pistes de réflexion pour tenter de comprendre comment l'écoulement sélectionne des fréquences différentes de celle de son forçage naturel. Pour cela, nous approfondissons dans un premier temps les résultats issus de la DNS, notamment pour caractériser la linéarité du VSP vis-à-vis de l'amplitude des fluctuations acoustiques et l'influence de la rupture de débit sur les instabilités hydrodynamiques. Nous repartons ensuite des équations de Navier-Stokes elles-mêmes dont nous considérons une solution comme superposition de l'écoulement de Taylor-Culick, de



sa modification due au scotch et des fluctuations acoustiques et hydrodynamiques. Cela nous permet alors de montrer qu'il existe bien une réponse de l'écoulement en termes de VSP forcée par l'effet conjugué de l'acoustique et de la rupture de débit. Nous tentons enfin de caractériser cette réponse de deux manières : d'abord à l'aide des outils introduits en stabilité linéaire tels que les fonctions propres adjointes, ensuite à l'aide de la notion de perturbations et de forçages optimaux.

## 7.2 Amplitude de la réponse forcée de l'écoulement des MPS

### 7.2.1 Linéarité de la réponse forcée vis-à-vis des ondes de pression

Nous reprenons les paramètres du calcul de la réponse forcée à l'acoustique présentée en section 6.2. En particulier, une rupture de débit pariétale de deux mailles<sup>1</sup> est imposée autour du point ( $x/R = 4, r/R = 1$ ). Pour des raisons de vitesse de calcul, nous choisissons d'utiliser le schéma Runge-Kutta implicite d'ordre 2 avec un pas de temps  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s. Dans cette partie, seule l'amplitude des fluctuations de pression introduites dans la condition initiale est modifiée : celle-ci valait au fond avant  $p'(x = 0, r) = \alpha_{AC} p_0$  avec  $\alpha_{AC} = 10^{-3}$  (pour le cas noté  $C_0$ ), nous considérons ici les cas  $\alpha_{AC} = 10^{-4}$  (cas  $C_1$ ),  $\alpha_{AC} = 10^{-5}$  (cas  $C_2$ ) et  $\alpha_{AC} = 0$  (cas  $C_3$ ). Nous rappelons que  $p_0$  désigne la valeur de la pression au fond avant. Pour chaque cas de calcul, l'intégration est poursuivie pendant un temps physique de  $\Delta t = 0.08$  s, soit 1 600 000 itérations. Le cas  $C_1$  est poursuivi plus longtemps, jusqu'à  $\Delta t = 0.016$  s.

Nous cherchons comme d'habitude à isoler l'évolution du VSP de celle de l'acoustique. C'est pourquoi nous nous intéressons dans un premier temps aux signaux de pression au fond avant et de vitesse radiale en proche paroi et en aval de la rupture de débit ( $x/R = 6.67, r/R = 0.833$ ). Ces deux signaux, tracés en figure 7.1, sont ramenés à leur valeur moyenne, et normalisés par respectivement  $\alpha_{AC} p_0$  et  $\alpha_{AC} c_0 / \gamma$ . Pour le cas  $C_3$ , l'amplitude des fluctuations initiale est nulle. Nous décidons donc de le comparer au cas  $C_2$  et de prendre  $\alpha_{AC} = 10^{-5}$  dans les facteurs de normalisation.

Une réponse linéaire du VSP vis-à-vis de l'acoustique initiale se traduit donc par la superposition de ces signaux normalisés. À ce titre, il s'avère que cette réponse est bien linéaire pour  $\alpha_{AC}$  compris entre  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ . D'autres calculs effectués avec un pas de temps plus rapide laissent supposer que cette plage de linéarité s'étend au moins entre  $5 \cdot 10^{-3}$  et  $5 \cdot 10^{-5}$ . Pour une amplitude initiale supérieure à  $5 \cdot 10^{-3}$ , nous avons remarqué que le calcul cesse car la solution devient non-physique. Au contraire, pour  $\alpha_{AC} = 10^{-5}$  (cas  $C_2$ ), la réponse initiale du VSP est proportionnellement plus forte, jusqu'à  $t \approx 0.028$  s où elle «recolle» à la réponse linéaire obtenue pour les cas  $C_0$  et  $C_1$ , puis diverge à nouveau à partir de  $t = 0.04$  s. Plus étonnant, en l'absence d'acoustique initiale, la réponse du VSP, loin d'être nulle, est celle dont l'amplitude est proportionnellement la plus élevée de tous les cas de calcul. Certes, les fluctuations de pression n'apparaissent qu'à partir de  $t = 0.015$  s, soit le laps de temps nécessaire aux premiers tourbillons pour atteindre la sortie et générer des ondes de pression induites. L'apparition du VSP est donc due dans ce cas à des perturbations numériques malgré tout introduites dans la condition initiale. Le surcroît d'amplitude de la réponse forcée dans le cas  $C_2$  semble par ailleurs indiquer que ces perturbations sont de l'ordre de  $\alpha_{AC} = 10^{-5}$ .

En ce qui concerne les fréquences associées à ces signaux, les HRogrammes correspondants, calculés avec les mêmes paramètres qu'au chapitre précédent, sont présentés en figure 7.2. Pour les deux cas linéaires ( $C_0$  et  $C_1$ ), les pulsations réduites obtenues à chaque instant d'analyse se superposent bien, notamment celles qui restent autour des valeurs  $\omega_r = 65.3$  et  $\omega_r = 70.5$ . Pour le cas  $C_1$ , dont l'intégration est poursuivie jusqu'à  $\Delta t = 0.016$  s, ces pulsations réduites et dans une moindre mesure celle valant  $\omega_r = 77.7$ , apparaissent également aux instants d'analyse ultérieurs. Les autres fréquences, moins constantes au cours du temps, sont vraisemblablement associées à des amplitudes plus faibles et finissent par être complètement atténuées. Pour les cas  $C_2$  et  $C_3$ , les fréquences obtenues sont moins constantes suivant les instants d'analyse considérés, sans doute du fait des petites perturbations qui

1. Le maillage utilisé est toujours MAIL<sub>3</sub><sup>C</sup>.

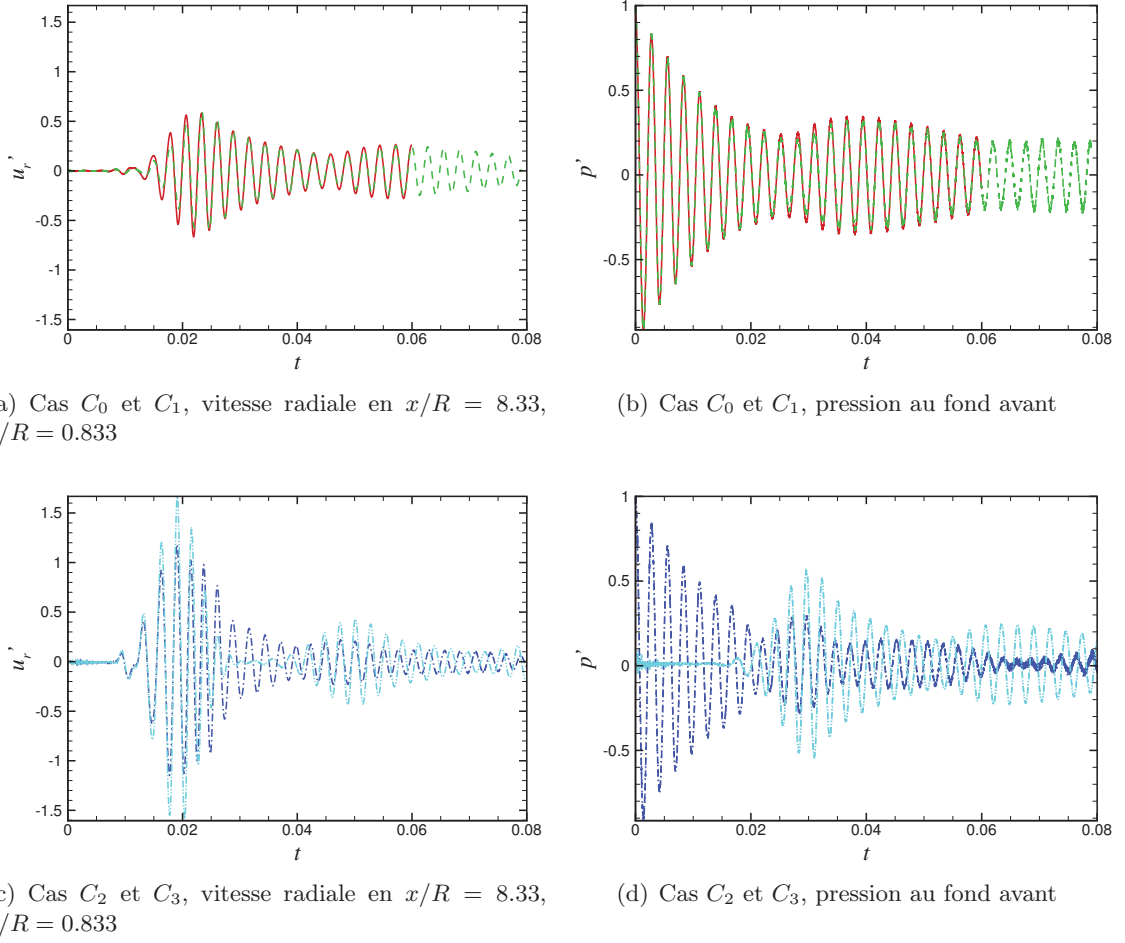


FIGURE 7.1 – Capteurs de pression (Pa) et de vitesse radiale (m/s) pour les simulations numériques directes effectuées avec différentes amplitudes de fluctuations initiale  $p'(t=0, x=0)/p_0 = \alpha_{AC}$ . (—) :  $\alpha_{AC} = 10^{-3}$ ; (- - -) :  $\alpha_{AC} = 10^{-4}$ ; (- · -) :  $\alpha_{AC} = 10^{-5}$ ; (- · · -) :  $\alpha_{AC} = 10^{-5}$ . Paramètres du calcul :  $X_{out} = 8$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{inj} = 1.04$  m/s, rupture de débit pariétale en  $x/R = 4$ . Intégration temporelle implicite (schéma de Runge-Kutta d'ordre 2,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s).

forcent de manière désordonnée l'apparition de VSP aux premiers instants du calcul. Aux deux derniers instants d'analyse ( $t = 0.0463$  s et  $t = 0.0522$  s), les trois fréquences  $\omega_r = 65.3$ ,  $\omega_r = 70.5$  et  $\omega_r = 77.7$  semblent toutefois se détacher clairement.

Par ailleurs, en-dehors de la fenêtre restreinte autour du premier mode acoustique, deux fréquences supplémentaires apparaissent. Dans les cas  $C_0$  et  $C_1$ , on retrouve une pulsation réduite  $\omega_r \approx 200$  dans le signal de pression au fond avant (figure 7.2(b)) qui traduit la présence du second mode acoustique qui est tout de même excité même s'il n'est pas introduit à l'instant initial. Son amplitude finit d'ailleurs par être négligeable aux temps longs dans le cas  $C_1$ . Plus intéressante est la présence, uniquement dans le cas  $c_0$ , de pulsations réduites  $\omega_r \approx 128$  et  $\omega_r \approx 138$ , soit deux fois la valeur de celle des modes VSP excités autour du premier mode acoustique. Il s'agit probablement d'un phénomène de *saturation non-linéaire*, et ce pour trois raisons. Premièrement, ces fréquences n'apparaissent que pour l'amplitude acoustique initiale la plus forte, dans le cas où le rapport entre les fluctuations de vitesse radiale et la vitesse radiale moyenne en sortie excède 10%. Deuxièmement, aucun autre phénomène (acoustique ou autre) dont la fréquence se situe autour de celle de ces modes ne semble identifié. Troisièmement, ces fréquences sont très proches du double de celles des deux modes hydrodynamiques  $\omega_r = 65.3$  et

$\omega_r = 70.5$  qui semblent être dominantes.<sup>2</sup>

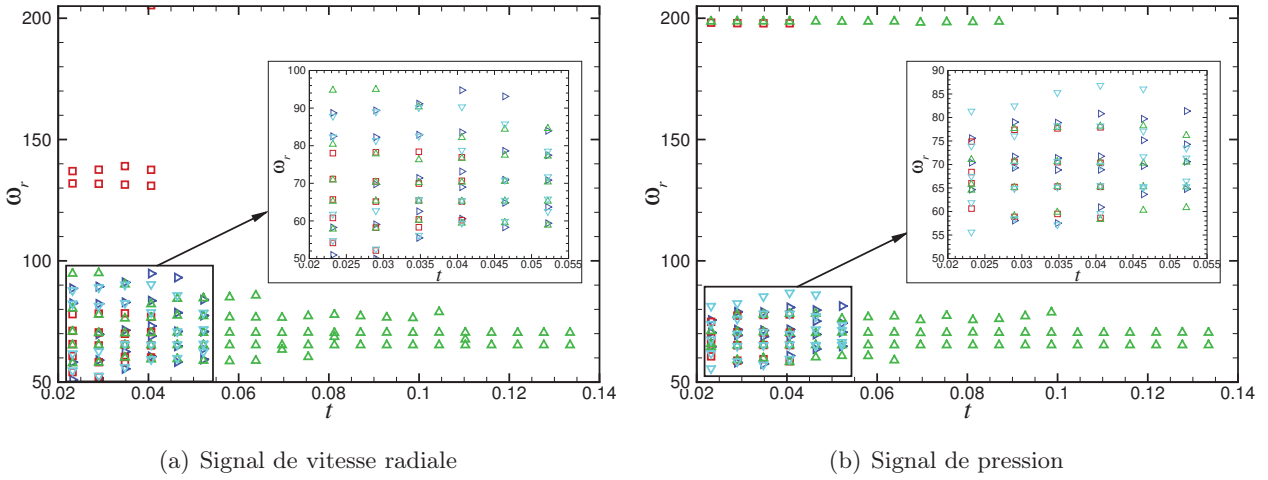


FIGURE 7.2 – Analyse haute résolution de la vitesse radiale en  $x/R = 6.67$ ,  $r/R = 0.833$  et de la pression au fond avant. Fréquence d'échantillonnage :  $F_s = 22050$  Hz ; taille de fenêtre :  $N_w = 1024$ . Acoustique initiale :  $\alpha_{AC} = 10^{-3}$  ( $\square$ ) ;  $\alpha_{AC} = 10^{-4}$  ( $\triangle$ ) ;  $\alpha_{AC} = 10^{-5}$  ( $\triangleright$ ) ;  $\alpha_{AC} = 0$  ( $\nabla$ )

Au final, ces calculs tendent à montrer que le mécanisme de forçage du VSP par l'acoustique est principalement linéaire. Lorsque l'amplitude des structures hydrodynamiques est trop forte, il peut certes apparaître un phénomène d'interaction non-linéaire entre modes, mais celui-ci ne remet pas en cause la valeur des fréquences bien distinctes des différents modes hydrodynamiques. Notons que ces non-linéarités ont été observées expérimentalement dans le montage VALDO —on se référera aux spectrogrammes 1.14 par exemple qui font état de pics de vitesse aux fréquences doubles de la fréquence des modes hydrodynamiques principaux aux points de mesure les plus à l'aval du montage.

Il est également intéressant de remarquer que le VSP peut apparaître du fait de très petites perturbations qui prennent sans doute ici la forme de bruit numérique dans le cas  $C_3$ . Là encore, on se souvient qu'expérimentalement, le montage VALDO à trois éléments sans tuyère fait état de VSP à des fréquences très éloignées de celles correspondant à l'acoustique naturelle du moteur.

## 7.2.2 Influence des paramètres de la rupture de débit

### 7.2.2.1 Effet de taille

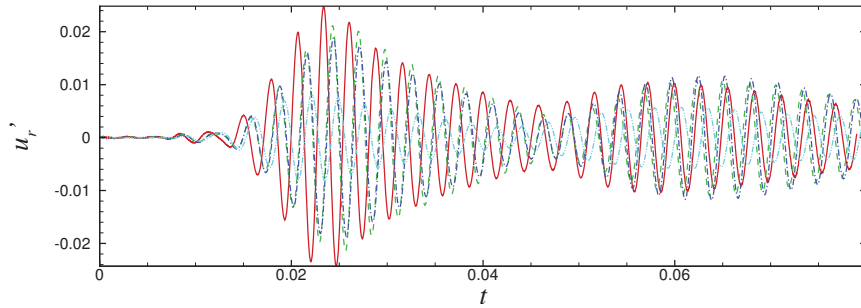
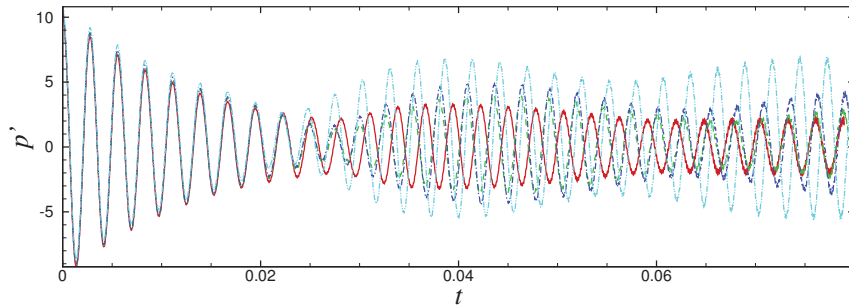
Nous calculons cette fois-ci la réponse forcée de l'écoulement avec différentes tailles de ruptures de débit. Nous partons du cas de référence d'un scotch à deux mailles, et nous passons à trois, quatre et onze mailles.<sup>3</sup> L'acoustique initiale est d'amplitude relative  $\alpha_{AC} = 10^{-4}$ . Les calculs sont effectués avec le schéma de Runge-Kutta implicite d'ordre 2 avec un pas de temps  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s sur 1 600 000 itérations.

Les fluctuations de pression au fond avant et de vitesse radiale en proche sortie sont tracées en figure 7.3 pour ces quatre cas. Contrairement au paragraphe précédent, la relation entre la taille de la rupture de débit et l'amplitude de la réponse forcée n'est visiblement pas linéaire : les signaux de vitesse radiale normalisés par la taille du scotch présentés en figure 7.3(a)) sont d'amplitude plus faible quand la taille du scotch augmente. L'effet d'une telle rupture de débit ne peut donc pas être considérée

2. On parle d'interaction non-linéaire, car lorsque les fluctuations de vitesse ne sont plus négligeables devant l'écoulement de base, le terme  $\nabla \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'$  systématiquement négligé en théorie de la stabilité linéaire devient relativement grand. Lorsque deux modes de pulsations  $\hat{\omega}_1$  et  $\hat{\omega}_2$  sont présents dans l'écoulement, ce terme est proportionnel à  $e^{-i(\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2)t}$ .

3. Dans le cas du maillage de type  $\text{MAIL}_3^C$ , une cellule pariétale au milieu du domaine a pour taille  $\delta x = 3 \cdot 10^{-4}$  m

comme «petit», ou d'ordre 1 par rapport à l'écoulement de base. Le fait que la réponse forcée soit relativement plus faible pour de plus grandes ruptures de débit se retrouve également sur le signal de pression : la décroissance de l'acoustique initiale est à chaque fois identique, mais les premières ondes de pression induites par le VSP ne sont pas proportionnelles à la taille du scotch. Par ailleurs, tous ces signaux, bien que similaires, sont très vite déphasés, ce qui laisse supposer la présence de fréquences différentes d'un cas de calcul à l'autre. Cela est confirmé sur les HRogrammes tracés en figure 7.4 : des écarts de  $\delta\omega_r = 4$  existent typiquement d'un cas à l'autre, sans que l'on puisse d'ailleurs discerner une évolution monotone en fonction de la taille du scotch. Ces écarts de fréquence, qui sont de l'ordre de la distance entre deux modes hydrodynamiques calculés par la théorie de la stabilité, montrent donc que l'influence, sur les modes de stabilité, de la modification de l'écoulement de base par la présence d'une rupture de débit, aussi petite soit-elle, n'est absolument pas négligeable. Il existe d'ailleurs un indice supplémentaire quant à la non-linéarité de la dépendance de la réponse forcée à la taille du scotch : la présence de pulsations réduites autour de  $\omega_r = 130$ , soit encore une fois près du double des pulsations réduites linéaires apparaissant autour de  $\omega_r = 65$ .

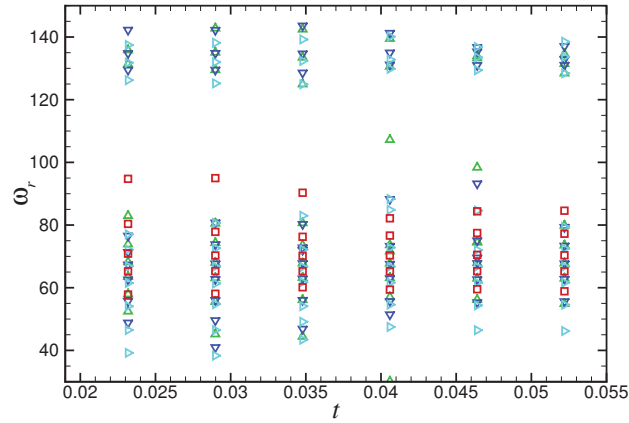
(a) Vitesse radiale, signal en  $x/R = 8.333$ ,  $r/R = 0.833$ 

(b) Pression au fond avant, signal

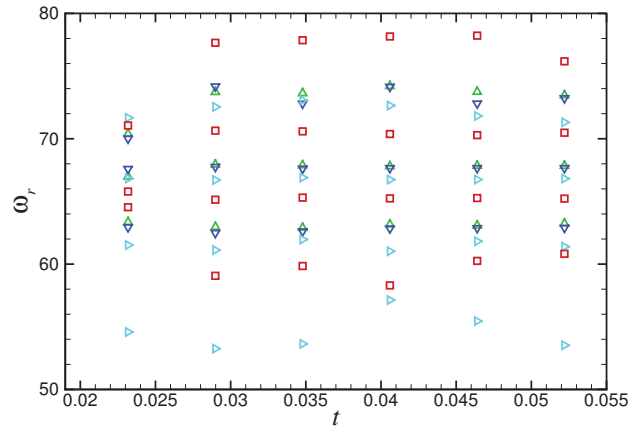
FIGURE 7.3 – Capteur de pression (Pa) et de vitesse radiale (m/s) pour la simulation numérique directe du cas de calcul  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s, avec rupture de débit pariétale en  $x/R = 4$ . Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s). Acoustique initiale :  $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{\text{AC}} = 10^{-4}$ . Taille du scotch :  $\delta x = 6 \cdot 10^{-4}$  m (—);  $\delta x = 9 \cdot 10^{-4}$  m (- - -);  $\delta x = 12 \cdot 10^{-4}$  m (- · -);  $\delta x = 33 \cdot 10^{-4}$  m (- · · -).

### 7.2.2.2 Effet de position — calcul à $X_{\text{out}} = 8$

Deux calculs supplémentaires sont effectués en faisant varier la position de la rupture de débit, placée en  $x_s/R = 3$  puis  $x_s/R = 5$ , et contenant deux mailles. L'acoustique initiale est d'amplitude relative  $\alpha_{\text{AC}} = 10^{-3}$ . Considérons la comparaison des signaux de vitesse en ( $x/R = 8.333$ ,  $r/R = 0.833$ ) et de pression au fond avant (figures 7.5(a) et 7.5(b)) : l'amplitude des fluctuations hydrodynamiques ainsi que des ondes de pression induites par le VSP semble montrer que l'amplitude des instabilités



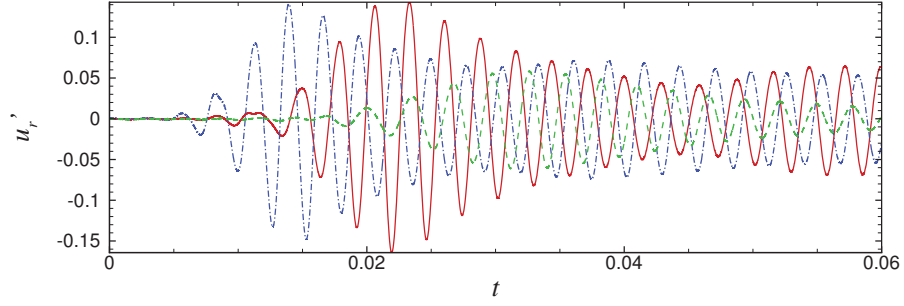
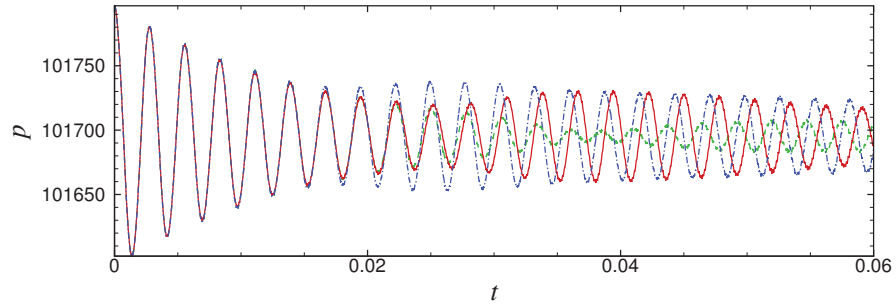
(a) Vitesse radiale



(b) Pression

FIGURE 7.4 – HRogrammes associés aux signaux de pression au fond avant et de vitesse radiale en  $x/R = 8.333$ ,  $r/R = 0.833$  pour la simulation numérique directe du cas de calcul  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s, avec ruptures de débit pariétales en  $x/R = 4$ . Taille du scotch :  $\delta x = 6 \cdot 10^{-4}$  m ( $\square$ );  $\delta x = 9 \cdot 10^{-4}$  m ( $\triangle$ );  $\delta x = 12 \cdot 10^{-4}$  m ( $\nabla$ );  $\delta x = 33 \cdot 10^{-4}$  m ( $\blacktriangleright$ ). Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s). Acoustique initiale :  $\alpha_{\text{AC}} = 10^{-4}$ . Paramètres de l'analyse HR :  $N_w = 1024$ ,  $F_s = 22050$  Hz.

augmente lorsque le scotch est placé le plus en aval. En particulier, l'amplitude des fluctuations calculées pour  $x_s/R = 3$  est sensiblement plus faible que pour les deux autres cas. Nous avons également tracé les fluctuations de vitesse radiale au voisinage de la rupture de débit ( $x = x_s$ ,  $r/R = 0.833$ , figure 7.5(c)), ce qui nous donne une indication sur l'amplitude du VSP avant qu'il ne soit amplifié polynomialement lors de sa convection vers l'aval. Nous voyons alors qu'initialement le VSP est du même ordre de grandeur au voisinage du scotch quelle que soit la taille de celui-ci : l'amplification totale des fluctuations hydrodynamiques le long du moteur est donc moins élevée pour  $x_s/R = 3$  que pour des positions plus aval de la rupture de débit.

(a) Vitesse radiale, signal en  $x/R = 8.333$ ,  $r/R = 0.833$ 

(b) Pression au fond avant, signal

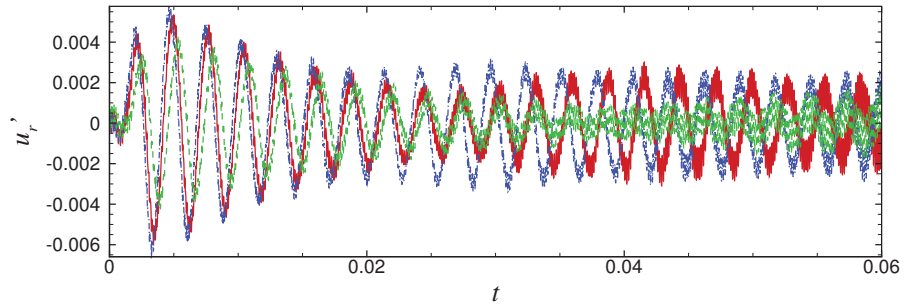
(c) Vitesse radiale,  $x = x_s$ ,  $r/R = 0.833$ 

FIGURE 7.5 – Capteurs de vitesse radiale (m/s) et de pression (Pa) pour la simulation numérique directe du cas de calcul  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s. Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s). Acoustique initiale :  $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{\text{AC}} = 10^{-3}$ . Scotch sur deux mailles ( $\delta x = 6 \cdot 10^{-4}$  m), situé en  $x_s/R = 3$  (—),  $x_s/R = 4$  (- - -) et  $x_s/R = 5$  (- · -).

Cela peut être interprété, qualitativement du moins, au regard de l'étude paramétrique effectuée en stabilité linéaire en section 4.5. Nous avons alors remarqué que la position dans le plan complexe de la branche des modes VSP était déterminée par l'emplacement de la condition amont : quand celle-ci est déplacée vers l'aval, toute la branche VSP est décalée vers les plus hautes fréquences et vers les

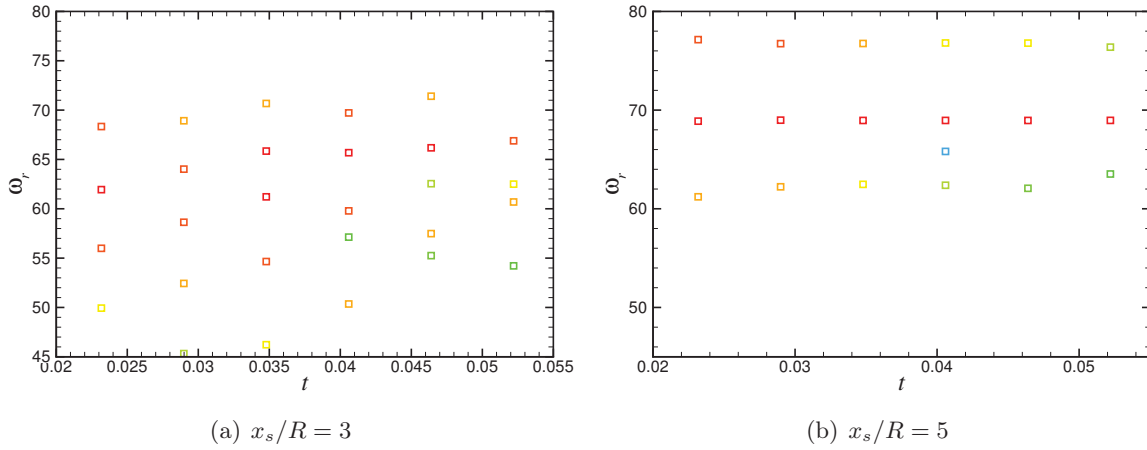


FIGURE 7.6 – HRogrammes associés aux signaux de vitesse radiale en  $x/R = 8.333$ ,  $r/R = 0.833$  pour la simulation numérique directe du cas de calcul  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s, avec ruptures de débit pariétales en  $x/R = 3$  et  $x/R = 3$  (deux mailles). Paramètres de l'analyse HR :  $N_w = 1024$ ,  $F_s = 22050$  Hz.

taux d'atténuation plus grands. Si l'on se réfère alors aux résultats de stabilité locale ainsi qu'aux propriétés du problème monodimensionnel simplifié (section 7.5(c)), un plus grand taux d'atténuation temporelle est généralement associé à une plus grande croissance axiale, et la longueur d'onde des structures hydrodynamiques croît avec leur fréquence. Ici, les fluctuations générées depuis la rupture de débit placée en  $x_s/R = 3$  ont visiblement une amplification spatiale moindre que celle des autres cas. Or, les modes propres apparaissant dans cette configuration sont théoriquement moins stables que pour  $x_s/R = 4$  et  $x_s/R = 5$  par exemple, et doivent en effet être associés à des fonctions propres moins amplifiées suivant  $x$ .

Le lien entre les résultats issus de la stabilité linéaire et ces calculs DNS est également illustré par l'analyse des fréquences présentes dans le signal de vitesse radiale en proche sortie (figure 7.6). Comme dans le cas  $x_s/R = 4$ , nous retrouvons bien la présence de pulsations réduites discrètes. De plus, la fréquence du premier mode hydrodynamique qui semble apparaître dans ces signaux est plus élevée pour  $x_s/R = 5$  que pour  $x_s/R = 3$ . Cela rappelle le fait qu'en analyse de stabilité, la position du scotch détermine la pulsation réduite du premier mode de la branche VSP qui est plus proche de l'axe imaginaire quand  $x_s/R$  est plus petit.

### 7.2.2.3 Effet de position — calcul à deux scotchs et $X_{\text{out}} = 12$

Considérons maintenant un cas de calcul portant sur un conduit de rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = 12$ , toujours avec  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s, la répartition de maille  $\text{MAIL}_3^C$ , une condition de sortie classique et une intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2, pas de temps  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s). Cette fois-ci, deux ruptures de débit pariétales sont imposées, en  $x/R = 4$  et  $x/R = 8$ . Cette configuration se rapproche en fait de celle du montage VALDO à trois éléments sans tuyère. Nous imposons à l'instant initial l'état stationnaire convergé auquel sont ajoutées des fluctuations acoustiques avec une amplitude relative par rapport à la pression au fond avant  $\alpha_{\text{AC}} = 10^{-5}$ . Nous avons vu en section 7.2.1 que cette acoustique initiale s'ajoute à des bruits numériques du même ordre de grandeur. La simulation est poursuivie pendant un temps physique  $\Delta t = 0.12$  s, afin de tenter d'obtenir des fluctuations hydrodynamiques de fréquence stabilisée. Nous cherchons également à déterminer quelle est la rupture de débit qui «produit» le plus de VSP.

Nous avons représenté en figure 7.7 les champs de fluctuation de vitesse radiale en différents instants. Malgré la faiblesse du forçage acoustique initial, les deux ruptures de débit produisent tout de même



des structures tourbillonnaires dont l'amplitude devient non-négligeable — de l'ordre de 0.01 m/s — dès  $t \approx 0.01$  s. Leurs caractéristiques peuvent être facilement distinguées : celles issues du premier scotch ont une longueur d'onde plus grande que celles issues du second, ainsi qu'une amplification axiale moindre, ce qui fait que les petites structures issues du scotch aval dominant pendant les premiers instants du calcul. Cette remarque renvoie une fois encore à l'étude de l'influence de la position des conditions aux limites sur les valeurs propres des modes hydrodynamiques : les structures issues du premier scotch correspondent théoriquement à des modes moins atténués temporellement et de plus faible fréquence que celles générées par la seconde rupture de débit ; comme prévu, elles sont donc moins amplifiées spatialement et de plus grande taille que ces dernières.

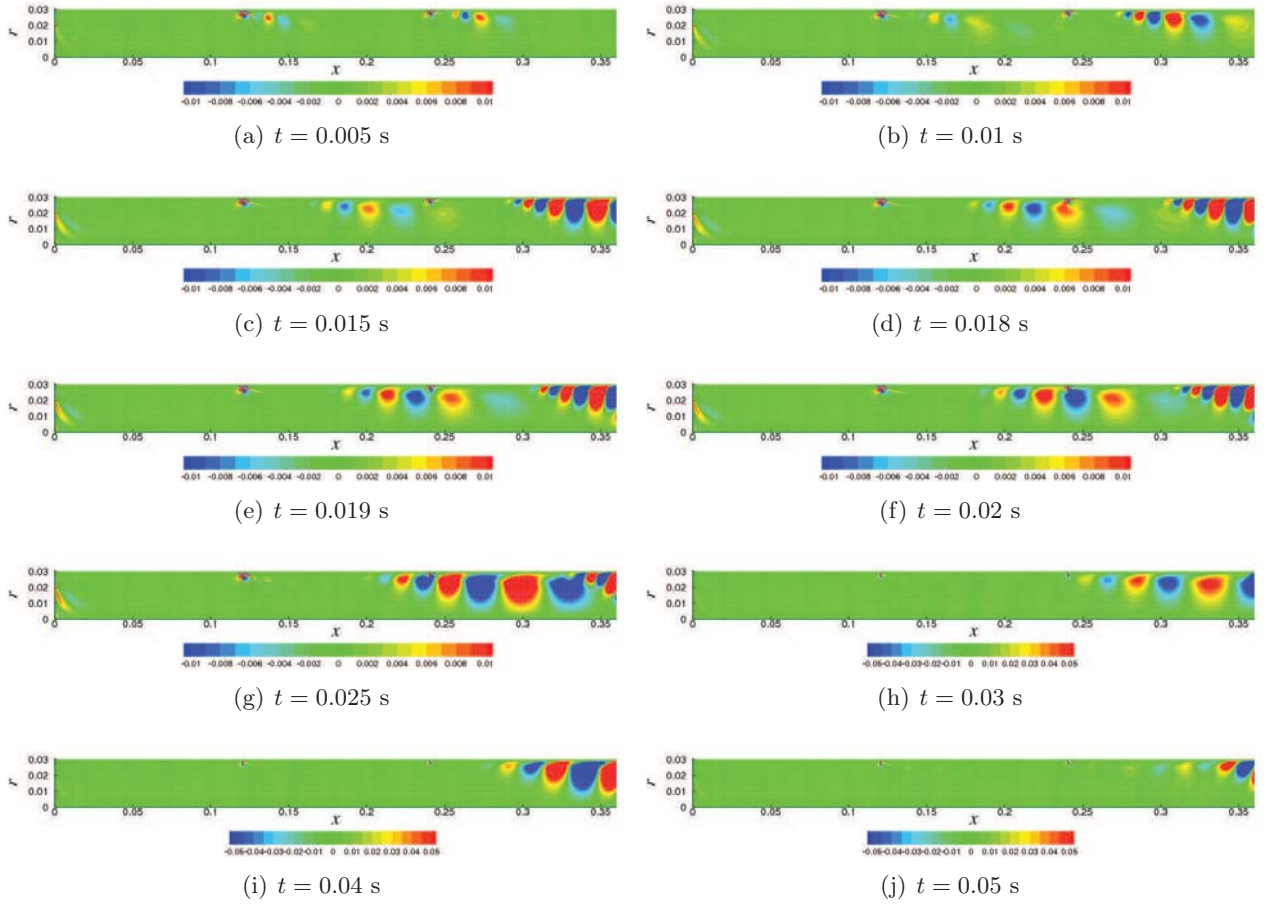
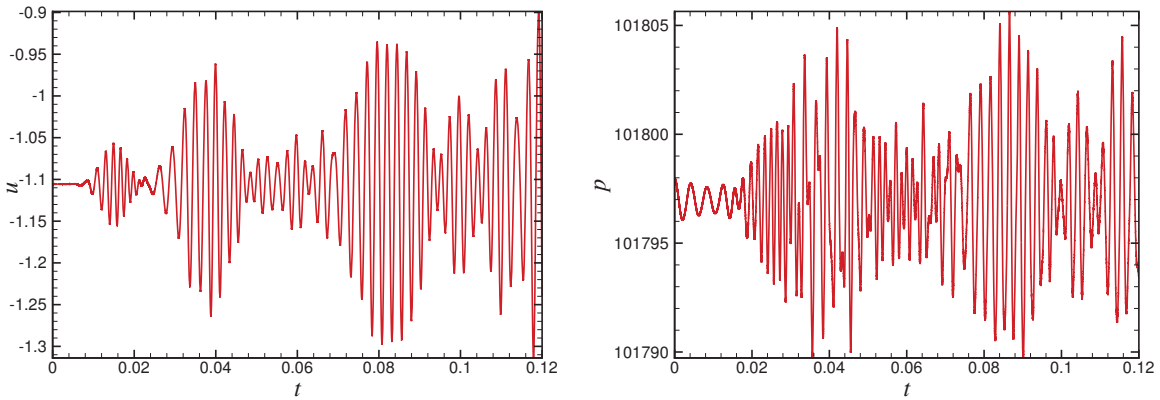


FIGURE 7.7 – Champs de vitesse radiale issus de la simulation numérique directe du cas de calcul  $X_{\text{out}} = 12$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s, avec deux ruptures de débit pariétales en  $x/R = 4$  et  $x/R = 8$ . Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s). Acoustique initiale :  $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{\text{AC}} = 10^{-5}$ .

Notons aussi que ces deux types de tourbillons semblent cohabiter sans interagir : on peut observer en un même instant de « petites » et de « grosses » structures qui se superposent (exemple de champ en  $t = 0.025$  s). De plus, un tourbillon issu de la première rupture de débit peut passer au voisinage de la seconde sans être perturbé par celle-ci (exemple aux instants  $t = 0.018$  s,  $t = 0.019$  s et  $t = 0.02$  s). Le VSP ne semble donc principalement généré que par un forçage acoustique conjugué à la présence d'un cisaillement dans l'écoulement de base, et non avec d'autres structures tourbillonnaires. À ce titre, des indices supplémentaires sur la possibilité d'effets non-linéaires entre modes hydrodynamiques sont donnés par l'analyse des fluctuations de vitesse radiale en  $x/R = 10.67$ ,  $r/R = 0.833$ , où le VSP est pleinement développé (tracé des fluctuations en figure 7.8(a), analyse haute résolution en

figure 7.9(a)). D'abord, malgré la faiblesse de l'amplitude acoustique initiale, le seuil de 10 % de la vitesse radiale de l'écoulement de base est très vite atteint par les fluctuations hydrodynamiques. Cela est d'autant plus remarquable que la pulsation réduite des modes acoustiques est ici très éloignée de celle des modes hydrodynamiques qui sont présents dans le signal ( $\omega_r = 45$  et  $\omega_r = 135$  contre quatre modes hydrodynamiques situés autour de  $\omega_r = 75$ ). Cela est bien sûr dû à la plus grande amplification axiale du VSP, soit à cause de la distance plus grande sur laquelle celui-ci croît dans le cas du premier scotch, soit à cause de son plus fort taux d'amplification axiale dans le cas du second.

Corrélativement, comme dans le cas d'un cylindre de rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = 8$  et d'une acoustique initiale d'amplitude relative  $\alpha_{AC} = 10^{-3}$ , on observe alors la présence de pulsations réduites égales environ au double de celle des modes hydrodynamiques les plus forts, ici autour de  $\omega_r \approx 155$ . Notons que dans le cas présent, l'amplitude de ce terme dans le signal de vitesse radiale est très faible devant celui des modes linéaires —au moins mille fois plus petit, compte tenu du tracé des amplitudes de la figure 7.9.



(a) Vitesse radiale, signal en  $x/R = 10.67$ ,  $r/R = 0.833$

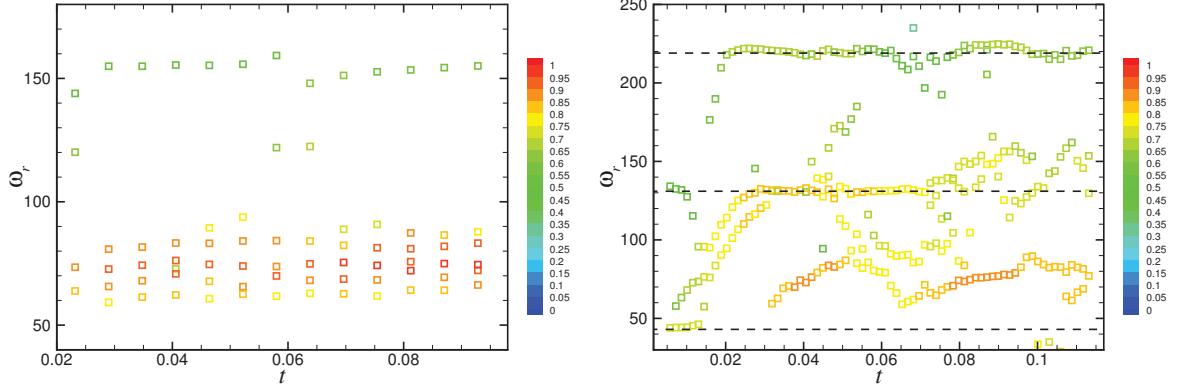
(b) Pression au fond avant, signal

FIGURE 7.8 – Capteur de pression (Pa) et de vitesse radiale (m/s) pour la simulation numérique directe du cas de calcul  $X_{\text{out}} = 12$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s, avec deux ruptures de débit pariétales en  $x/R = 4$  et  $x/R = 8$ . Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s). Acoustique initiale :  $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{AC} = 10^{-5}$ .

Remarquons encore le comportement erratique des fluctuations de vitesse et surtout de pression. Cela dénote le fait que les fréquences hydrodynamiques ne sont pas stabilisées dans ce calcul, comme on peut le voir sur le HRogramme de vitesse (figure 7.9(a)). Le cas de la pression au fond avant est encore plus problématique puisqu'il nous a fallu diminuer la taille de la fenêtre pour reconstituer correctement le signal sous forme d'exponentielles modulées (figure 7.9(b)). Nous voyons en outre que le signal de pression possède à la fois des fréquences acoustiques (premier mode initialement, puis deuxième et troisième mode) et des fréquences hydrodynamiques non-stabilisées. Cela montre encore une fois que le système répond bien avec ses fréquences propres et non avec celles de l'acoustique. Il serait donc intéressant de poursuivre ce calcul, malgré la présence de légères non-linéarités et de fluctuations hydrodynamiques un peu fortes, afin de voir si ces fréquences se stabilisent. Cela permettrait également d'obtenir une analyse de Fourier suffisamment fine à comparer avec l'analyse haute résolution.

### 7.3 Revue des biais entre stabilité linéaire et DNS

Toutes les simulations numériques directes qui précèdent voient la propagation d'instabilités hydrodynamiques caractérisées par des fréquences discrètes. Nous avons, vu dans le cas de base d'un conduit de rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = 8$  avec rupture de débit pariétale de deux mailles en  $x_s/R = 4$ , que les pul-



(a) Vitesse radiale — paramètres  $N_w = 1024$ ,  $F_s = 22050$  Hz. (b) Pression — paramètres  $N_w = 256$ ,  $F_s = 22050$  Hz.

FIGURE 7.9 – HRogrammes associés aux signaux de pression au fond avant et de vitesse radiale en  $x/R = 10.67$ ,  $r/R = 0.833$  pour la simulation numérique directe du cas de calcul  $X_{\text{out}} = 12$ ,  $R = 0.03$  m,  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s, avec deux ruptures de débit pariétales en  $x/R = 4$  et  $x/R = 8$ . Intégration implicite (schéma Runge-Kutta d'ordre 2,  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s). Acoustique initiale :  $p'(t = 0, x = 0)/p_0 = \alpha_{\text{AC}} = 10^{-5}$ . L'amplitude  $a$  des exponentielles modulées est présentée sous forme logarithmique  $k(10 \log a + s)$  avec  $k = 0.0126$  et  $s = 100$ .

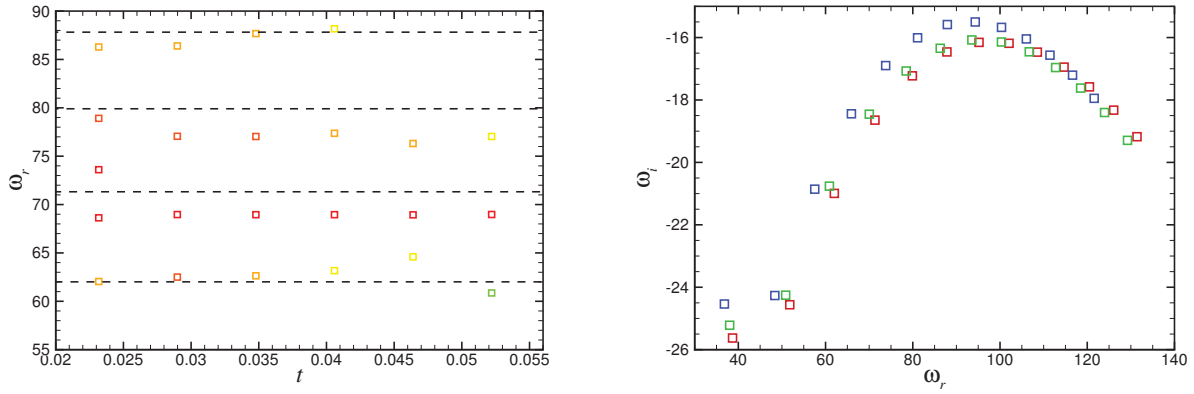
sations réduites de ces instabilités étaient proches de celles des modes hydrodynamiques sans toutefois coïncider avec elles. L'augmentation de la taille du scotch a d'ailleurs fait apparaître des fréquences hydrodynamiques encore légèrement différentes. Le cas où le scotch est imposé en  $x_s/R = 5$  (avec deux mailles) est encore plus problématique, puisque les deux des quatre pulsations réduites issues de l'analyse HR du signal de vitesse radiale en proche sortie sont très éloignées de celles prédites par la stabilité (figure 7.10(a)). Ce type d'écart nous renvoie à deux difficultés : d'une part, la définition précise des limites du domaine de calcul employé en stabilité, notamment pour ce qui est de savoir où le VSP commence réellement à être excité ; d'autre part, l'influence de la modification de l'écoulement de base sur les modes de stabilité. Nous passons ici en revue les différents biais entre stabilité linéaire et DNS qui peuvent expliquer ces différences constatées sur les fréquences.

### 7.3.1 Approximation sur les bornes du domaine

Toutes nos simulations numériques ont un profil de vitesse d'injection contenant une rupture de débit pariétale de deux mailles ou plus centrée en un point  $x_s$ , ainsi qu'un raccord tendant vers zéro au fond avant. Nous avons comparé jusqu'à présent les structures tourbillonnaires ainsi calculées avec les modes de stabilité supposés de fluctuations de vitesse nulles pour tout  $x < x_s$ . Or, supposons que les structures tourbillonnaires sont effectivement d'amplitude nulle à l'aval de la dernière maille du scotch. En faisant abstraction de la modification de l'écoulement de base induite par le scotch, le calcul de stabilité doit tout de même porter sur un écoulement de Taylor-Culick équivalent à l'écoulement moyen de la DNS du point de vue du débit passant à travers chaque section du conduit comprise entre l'aval du scotch et la sortie. Nous définissons alors en toute rigueur les bornes du calcul comme suit :

$$X_{\text{in}} = \frac{1}{V_{\text{inj}0} R} \int_0^{x_s + n\delta_x/2} V_{\text{inj}}(x) dx, \quad X_{\text{out}} = X_{\text{in}} + \frac{L - x_s + n\delta_x/2}{R} \quad (7.1)$$

où  $n$  est le nombre de mailles du scotch et  $\delta x$  la taille d'une maille. Dans ces expressions, nous faisons bien attention au jonglage entre les grandeurs dimensionnelles ( $x_s, \delta x, R, L$ ) et les bornes du calcul, adimensionnelles. Cette approche est très similaire à celle employée pour la définition d'une vitesse



(a) HRogramme du signal de vitesse radiale en sortie ( $x/R = 8, r/R = 0.833$ ) issu de la DNS effectuée avec une rupture de débit de deux mailles imposée en  $x_s/R = 5$ . (- -) : parties réelles des valeurs propres calculées pour  $X_{in} = 5, X_{out} = 8, Re = 2000$ .

(b) Spectres calculés pour  $Re = 2000$ ;  $\square$  :  $X_{in} = 5, X_{out} = 8$ ;  $\square$  :  $X_{in} = 4.8, X_{out} = 7.8$ ;  $\square$  :  $X_{in} = 4.5, X_{out} = 7.8$ .

FIGURE 7.10 – Comparaison entre les pulsations réduites issues de la DNS et les valeurs théoriques données par l'analyse de stabilité linéaire.

d'injection moyenne pour un tir réel (section 1.3.1.3), à ceci près que ce n'est pas la vitesse moyenne sur l'ensemble du conduit qui est considérée, mais bien la vitesse d'injection  $V_{inj0}$  sur le segment où se développe le VSP. Typiquement, pour un scotch de deux mailles, cela revient à décaler de  $(\delta X)_{deb} = 0.038$  les bornes du calcul par rapport aux valeurs utilisées en première approche. Pour un scotch de onze mailles, on atteint  $\delta X = 0.10$ . Or, la modification des valeurs propres due à un décalage des bornes du calcul, évoquée en section 4.5 pour des analyses de stabilité effectuées à  $Re = 100$ , est loin d'être négligeable pour des valeurs de  $\delta X$  de l'ordre de 1.

Une deuxième source d'incertitude concernant les limites du domaine à imposer pour les calculs de stabilité concerne l'évaluation du point d'où les fluctuations de vitesse s'échappent. Nous savons seulement que dans toutes nos simulations, un capteur situé en  $x - x_s = 8 \cdot 10^{-4}$  m mesure bien des fluctuations, ce qui correspondrait encore à un écart  $(\delta X_{in})_{fluct} = 0.026$  sur la position de la condition d'entrée. Par ailleurs, la présence du scotch se fait sentir sur l'écoulement de base sur des distances de l'ordre de  $(\delta X_{in})_{fluct} = 0.15$ , en considérant la solution de Taylor-Culick non-perturbée sur le domaine de bornes corrigées comme précédemment.

TABLE 7.1 – Corrections sur les parties réelles de quelques valeurs propres par unité de distance :  $(\delta \hat{\omega}_r / \delta X)_{deb}$  : effet de la modification du débit de l'écoulement de base due à la présence du scotch ;  $(\delta \hat{\omega}_r / \delta X_{in})_{fluct}$  : incertitude sur l'origine des fluctuations hydrodynamiques.

	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_5$
$(\delta \hat{\omega}_r / \delta X)_{deb}$	-5.70	-6.45	-7.11	-7.65
$(\delta \hat{\omega}_r / \delta X_{in})_{fluct}$	-11.2	-13.7	-15.6	-17.3

Pour donner un ordre de grandeur des variations que peuvent atteindre les valeurs propres compte tenu de ces incertitudes, nous avons comparé trois calculs de stabilité : le premier, correspondant aux valeurs classiques de  $X_{in}$  et  $X_{out}$ , à savoir  $X_{in} = 5$  et  $X_{out} = 8$ , a été utilisé précédemment pour

comparaison avec les pulsations obtenues par DNS. Le second, effectué entre  $X_{\text{in}} = 4.8$  et  $X_{\text{out}} = 7.8$ , nous donne les variations  $(\delta\hat{\omega}/\delta X)_{\text{deb}}$  dues à la prise en compte du défaut de débit consécutif à l'imposition du scotch. Le troisième, effectué entre  $X_{\text{in}} = 4.5$  et  $X_{\text{out}} = 7.98$ , donne une évaluation large de la correction par unité de distance  $(\delta\hat{\omega}/\delta X_{\text{in}})_{\text{fluct}}$  à apporter sur les valeurs propres si en réalité les fluctuations hydrodynamiques naissent bien plus en amont que prévu. La figure 7.10(b) nous donne le tracé des spectres correspondants ; le tableau 7.1 donne les valeurs de  $(\delta\hat{\omega}/\delta X)_{\text{deb}}$  et  $(\delta\hat{\omega}/\delta X_{\text{in}})_{\text{fluct}}$  interpolées à partir de ces spectres.

Numériquement, l'écart  $(\delta X)_{\text{deb}} = 0.038$  dû à la prise en compte du défaut de débit conduit à des variations sur la pulsation réduite des modes hydrodynamiques inférieures à  $\delta\hat{\omega}_r = 0.3$  ; de même, une erreur  $(\delta X_{\text{in}})_{\text{fluct}} = 0.026$  conduit à des modifications de l'ordre de  $\delta\hat{\omega}_r = 0.4$  : toutes ces variations sont bien inférieures à la différence constatée entre modes hydrodynamiques et fréquences calculées par DNS. Par ailleurs, notons que ces évolutions sont monotones, dans le sens où les pulsations réduites diminuent systématiquement quand on déplace vers l'amont les deux bornes ou la borne d'entrée du domaine de calcul. Ces variations ne permettent donc pas d'expliquer le fait que les deuxième et troisième modes hydrodynamiques apparaissent sur la DNS à des fréquences différentes des valeurs théoriques correspondantes, mais pas le deuxième ni le quatrième.

### 7.3.2 Influence de la distorsion de l'écoulement moyen

En-dehors des considérations géométriques précédentes, on peut se demander si la modification de l'écoulement de base induite par l'introduction d'une rupture de débit a une influence non-négligeable sur les modes propres de stabilité. Pour tenter d'y répondre, deux possibilités s'offrent à nous : ou bien calculer directement les modes de stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick modifié, ou bien utiliser les outils de sensibilité introduits au chapitre 3. La première solution, bien qu'apparemment plus simple, est en réalité délicate à mettre en oeuvre. Elle suppose en effet une résolution fine des fonctions propres près de l'entrée du domaine, précisément là où se concentrent déjà des perturbations numériques comme les oscillations apparaissant un point sur deux. En fait, ajouter par exemple un domaine fin près de  $x = X_{\text{in}}$  amplifie ces oscillations, de sorte qu'il est impossible d'obtenir des valeurs propres convergées en maillage. C'est pourquoi nous préférons utiliser les sensibilités partielles définies en section 3.6.2.

Rappelons que l'effet d'une perturbation  $\delta\mathbf{U}$  ou  $\delta\nabla\mathbf{U}$  sur l'écoulement de base ou son gradient peut s'écrire, pour chaque valeur propre  $\hat{\omega}_n$ , sous la forme

$$\delta\hat{\omega}_n = \langle \nabla_{\mathbf{U}}\hat{\omega}_n \cdot \delta\mathbf{U} \rangle + \langle \nabla_{\nabla\mathbf{U}}\hat{\omega}_n \cdot \delta\nabla\mathbf{U} \rangle \quad (7.2)$$

où l'on a introduit les tenseurs des sensibilités partielles

$$\nabla_{\mathbf{U}}\hat{\omega}_n = -\frac{i}{\langle \tilde{\mathbf{u}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n \rangle} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{x,n}^* \partial_x \hat{u}_{x,n} + \tilde{u}_{r,n}^* \partial_x \hat{u}_{r,n} \\ \tilde{u}_{x,n}^* \partial_r \hat{u}_{x,n} + \tilde{u}_{r,n}^* \partial_r \hat{u}_{r,n} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

et

$$\nabla_{\nabla\mathbf{U}}\hat{\omega}_n = -\frac{i}{\langle \tilde{\mathbf{u}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n \rangle} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{x,n}^* \hat{u}_{x,n} & \tilde{u}_{r,n}^* \hat{u}_{x,n} \\ \tilde{u}_{x,n}^* \hat{u}_{r,n} & \tilde{u}_{r,n}^* \hat{u}_{r,n} \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Nous avons également montré que les *perturbations optimales* de l'écoulement de base sur les valeurs propres notées  $\delta_{U_x}\hat{\omega}_{n,\text{opt}}$  et  $\delta_{U_r}\hat{\omega}_{n,\text{opt}}$  sont atteintes lorsque les perturbations en question sont colinéaires à leur sensibilité partielle correspondante. Dans ce cas,

$$|\delta_{U_x}\hat{\omega}_{n,\text{opt}}| = \|\nabla_{U_x}\hat{\omega}_n\| \|\delta U_x\| \quad \text{et} \quad |\delta_{U_r}\hat{\omega}_{n,\text{opt}}| = \|\nabla_{U_r}\hat{\omega}_n\| \|\delta U_r\| \quad (7.5)$$

La variation optimale des valeurs propres vis-à-vis d'une composante est donc égale au produit de la norme de la fonction de sensibilité et de la perturbation optimale correspondante. Par ailleurs, les

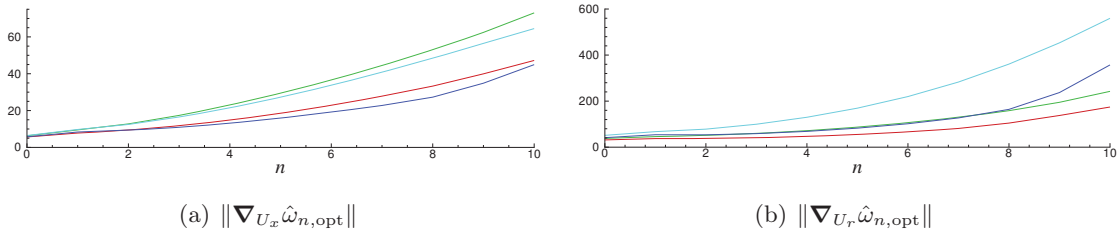


FIGURE 7.11 – Sensibilités optimales vis-à-vis d’une perturbation sur les composantes axiale et radiale de l’écoulement de base en fonction de l’indice  $n$  du mode considéré. (—) :  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 100$ ; (—) :  $X_{\text{in}} = 5$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 100$ ; (—) :  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 2000$ ; (—) :  $X_{\text{in}} = 5$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 2000$ .

fonctions de sensibilité  $\nabla_{U_x} \hat{\omega}_n$  et  $\nabla_{U_r} \hat{\omega}_n$  sont également qualifiées d’optimales puisque, lorsque les perturbations sur l’écoulement de base leur sont colinéaires, les variations sur les valeurs propres sont optimales. Par ailleurs, ces dernières n’ont de sens que si elles restent en pratique très petites devant 1. En ce sens, le tracé des sensibilités optimales, présenté en figure 7.11 pour  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $X_{\text{in}} = 4$  ou  $X_{\text{in}} = 5$ , et  $\text{Re} = 100$  ou  $\text{Re} = 2000$ , permet d’une part d’illustrer l’influence des différents paramètres sur la sensibilité des valeurs propres, et d’autre part de donner un seuil de tolérance sur les perturbations de l’écoulement de base  $\delta U_x$  (ou  $\delta U_r$ ) à partir desquelles les valeurs propres peuvent être radicalement modifiées, ce seuil étant de l’ordre de  $\varepsilon / \|\nabla_{U_x} \hat{\omega}_n\|$  (ou  $\varepsilon / \|\nabla_{U_r} \hat{\omega}_n\|$ ) où  $\varepsilon$  est un facteur de linéarité égal au maximum à 1.

Nous remarquons en premier lieu que les deux composantes des sensibilités optimales sont croissantes le long de la branche VSP. Les modes d’ordre élevé sont donc d’autant plus susceptibles d’être modifiés par une distorsion sur l’écoulement de base, même si en pratique cela dépend également de la forme de celle-ci comparée aux fonctions de sensibilité. À ce titre, la composante la plus sensible est celle associée à la vitesse radiale, quels que soient les paramètres employés. Ensuite, l’influence du nombre de Reynolds n’est pas déterminante, puisque pour des bornes du domaine fixées, les sensibilités optimales sont légèrement plus faibles pour  $\text{Re} = 2000$  que pour  $\text{Re} = 100$ . En revanche, le fait d’avancer la condition d’entrée de  $X_{\text{in}} = 4$  à  $X_{\text{in}} = 5$  conduit à une augmentation notable des sensibilités optimales : une perturbation géométrique a donc d’autant plus d’influence sur les modes de stabilité qu’elle est située à l’aval du moteur.

Revenons maintenant au cas particulier de la réponse forcée simulée pour un scotch placé en  $x_s/R = 5$ . La distorsion  $(\delta \mathbf{U}, \delta \nabla \mathbf{U})$  sur l’écoulement de base est en pratique calculée comme la différence entre l’écoulement de base convergé calculé avec CEDRE et l’écoulement de Taylor-Culick équivalent pris entre les bornes  $X_{\text{in}} = 4.98$  et  $X_{\text{out}} = 7.98$ . Pour information, les normes  $\|\delta U_x\|$  et  $\|\delta U_r\|$  des distorsions sur la vitesse axiale et radiale sont égales à 0.026 et 0.031. Si ces distorsions étaient optimales, on ne pourrait absolument pas considérer les variations qu’elles engendreraient sur les valeurs propres comme «petites», notamment celles engendrées par la perturbation  $\delta U_r$ , qui seraient de l’ordre de l’unité pour  $\hat{\omega}_0$  et de la dizaine dès  $\hat{\omega}_8$  ! Fort heureusement, la comparaison entre cette distorsion (gradients compris) et les sensibilités partielles correspondantes, tracé en figure 7.12, montre que la présence du cisaillement dû à la rupture de débit n’est pas vraiment critique. En effet, celui-ci n’intervient pas là où les valeurs propres sont les plus sensibles, c’est-à-dire à l’emplacement du premier maximum de chaque sensibilité partielle, systématiquement placé entre  $x/R = 5.3$  et  $x/R = 5.6$ . Par conséquent, il se trouve que le déplacement des valeurs propres n’excède pas  $\delta \hat{\omega} = 0.17$  quel que soit le mode propre considéré. Dans le détail, nous montrons en table 7.2 que les contributions dues aux différents termes sont toutes du même ordre de grandeur, et surtout qu’elles ne suivent en aucun cas une évolution monotone ni n’atteignent un maximum en fonction de l’ordre du mode considéré. Cela vient probablement du fait que les maxima des sensibilités partielles sont atteints en des points différents pour chaque mode : si l’un de ces maxima coïncide mieux pour un certain mode que pour les autres avec la distorsion, alors



l'effet sur les valeurs propres sera plus grand.

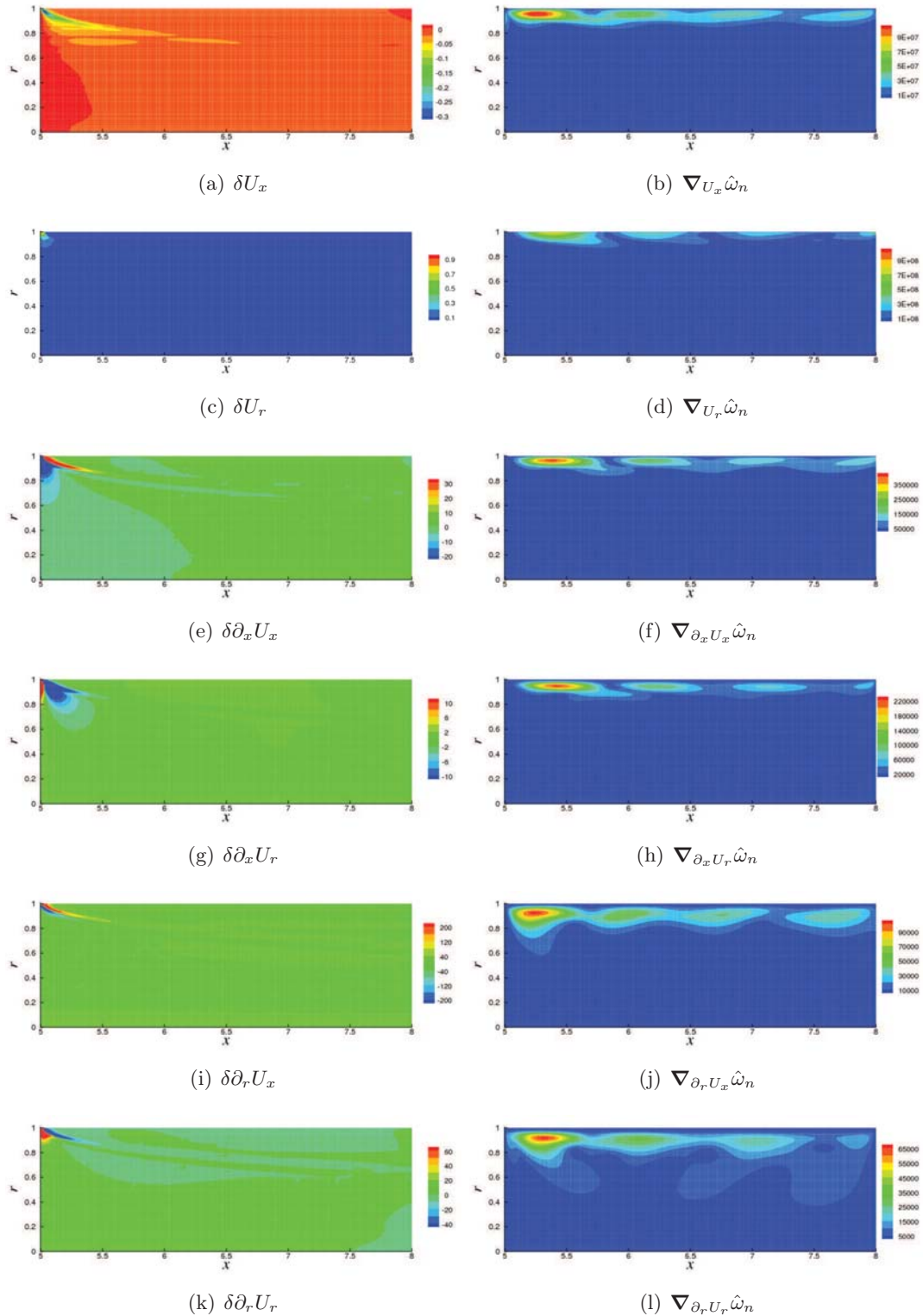


FIGURE 7.12 – Distorsions sur l'écoulement de base (à gauche) et sensibilités partielles correspondantes (à droite) pour le mode  $\hat{\omega}_n = 71.32 - 18.64i$  — cas  $X_{in} = 4.98$ ,  $X_{out} = 7.98$ ,  $Re = 2000$ .

Au final, la distorsion sur l'écoulement de base ne semble pas modifier radicalement les valeurs propres, en tout cas dans le cas idéal de perturbations hydrodynamiques émergeant exactement au



TABLE 7.2 – Valeurs absolues des corrections partielles des valeurs propres relatives à la distorsion de l'écoulement de base et à son gradient. Cas  $X_{\text{in}} = 4.98$ ,  $X_{\text{out}} = 7.98$ ,  $\text{Re} = 2000$ .

	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_5$
$ \langle \nabla_{U_x} \hat{\omega}, \delta U_x \rangle $	0.0021	0.0010	0.0010	0.0013
$ \langle \nabla_{U_r} \hat{\omega}, \delta U_r \rangle $	0.0005	0.0017	0.0008	0.0015
$ \langle \nabla_{\partial_x U_x} \hat{\omega}, \delta \partial_x U_x \rangle $	0.0415	0.0208	0.0397	0.0495
$ \langle \nabla_{\partial_x U_r} \hat{\omega}, \delta \partial_x U_r \rangle $	0.0220	0.0258	0.0166	0.0502
$ \langle \nabla_{\partial_r U_x} \hat{\omega}, \delta \partial_r U_x \rangle $	0.0356	0.0101	0.0130	0.0040
$ \langle \nabla_{\partial_r U_r} \hat{\omega}, \delta \partial_r U_r \rangle $	0.0097	0.0095	0.0372	0.0608

niveau de la rupture de débit. Cependant, imaginons que le VSP démarre bien à l'amont du scotch, disons en  $x_s/R - \delta X$  avec  $\delta X$  de l'ordre de 0.2. Cette fois-ci, l'étude de stabilité doit être menée en prenant  $X_{\text{in}} = x_s/R - \delta X$ . Dans ces conditions, les valeurs propres ne sont guère modifiées d'après le paragraphe précédent, l'allure des sensibilités partielles tracées en figure 7.12 ne devrait pas l'être non plus. Par contre, dans ces conditions, la position de la rupture de débit se rapproche potentiellement de leurs premiers maxima respectifs, ce qui peut modifier plus largement les valeurs propres, en tout cas jusqu'au seuil donné par le calcul des perturbations optimales.

## 7.4 Formulation théorique de la réceptivité d'un MPS simplifié

La simulation numérique directe nous a permis de caractériser le forçage du VSP par l'acoustique. Celui-ci est linéaire vis-à-vis de l'amplitude des ondes de pression, il est d'autant plus grand que la rupture de débit pariétale est importante, et la fréquence de la réponse est indubitablement différente de celle de l'acoustique naturelle du conduit à parois débitantes considéré. Nous cherchons ici à interpréter ces résultats en terme de *réceptivité* au sens introduit par Hill [50] et utilisé notamment par Airiau [3] dans le cas de l'étude des couches limites en présence de rugosités de paroi et d'un forçage acoustique. Cette approche a pour fondement la décomposition de la solution des équations de Navier-Stokes en termes stationnaires et en petites perturbations linéaires associées à l'acoustique (d'onde plane avec sa correction rotationnelle) et du VSP. Nous voulons ainsi montrer, au moins formellement, que la réponse forcée de l'écoulement de Taylor-Culick est bien due à l'interaction entre l'acoustique et la perturbation sur l'écoulement de base introduite par la rupture de débit pariétale. C'est à partir de ce résultat qu'il est éventuellement possible de comprendre pourquoi le système sélectionne ses fréquences propres.

### 7.4.1 Séparation des différents termes

Du point de vue théorique, l'écoulement instationnaire d'un MPS simplifié, noté formellement  $q$ , peut se décomposer sous la forme

$$q(x, r, t) = Q_0(x, r) + \delta Q(x, r) + \bar{q}(x, r, t) + \tilde{q}(x, r, t) \quad (7.6)$$

où l'on a séparé les termes suivants :<sup>4</sup>

4. Nous désignons chaque terme par les variables avec lesquels il est usuellement exprimé en vertu des hypothèses qui sont faites pour son calcul. Par exemple, la plupart de ces termes sont supposés isentropiques, ce qui évite de poser une équation pour la variable de température.

- L'écoulement de base  $Q = (P, \mathbf{U})$ . Lui-même peut se décomposer en la somme de l'écoulement de Taylor-Culick équivalent, noté  $Q_0 = (P_0, \mathbf{U}_0)$ , et une perturbation  $\delta Q = (\delta P, \delta \mathbf{U})$  prenant en compte la présence de la couche limite au fond avant, de la rupture de débit et du cisaillement de vitesse que celui-ci entraîne. Cette perturbation est supposée «petite».
- La solution de couche limite acoustique, notée  $\bar{q} = (\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{\mathbf{u}})$ , décomposée en une partie irrotationnelle compressible  $(\hat{\rho}, \hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  et une partie rotationnelle incompressible  $(\check{\rho}, \check{p}, \check{\mathbf{u}})$ . La somme des deux est solution des équations de Navier-Stokes instationnaires compressibles linéarisées autour de l'écoulement de Taylor-Culick, en supposant que leur dépendance temporelle suit celle des modes acoustiques en onde plane du conduit, dont nous noterons les pulsations réduites<sup>5</sup>  $\bar{\omega}$  complexes du fait de la possible amplification ou atténuation de l'acoustique du moteur.
- Les fluctuations hydrodynamiques dues au VSP, notées  $\hat{q} = (\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$ . On ne fait pas d'hypothèse pour le moment sur la possible décomposition de ces fluctuations sur la base des modes propres  $(\hat{\omega}_n; \hat{p}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)_n$  issus de l'analyse de stabilité.

En reprenant l'approche de Majdalani et Van Moorhem [60], supposons que la somme de toutes ces contributions est solution des équations de Navier-Stokes instationnaires pour un écoulement compressible et supposé homentropique du fait de la faiblesse des effets visqueux. En notant<sup>6</sup>  $(\rho', p', \mathbf{u}')$  la somme des différents termes instationnaires, on se retrouve à résoudre le problème linéarisé

$$\partial_t \rho' + \nabla \cdot \mathbf{u}' = -\mathbf{U} \cdot \nabla \rho' \quad (7.7)$$

$$\partial_t \mathbf{u}' + \nabla p' = \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{u}') \quad (7.8)$$

avec

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{u}') = [-\nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \wedge (\nabla \wedge \mathbf{U}) + \mathbf{U} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}')] + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{4}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}' - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{u}' \right] \quad (7.9)$$

En séparant chaque contribution, l'équation de continuité devient :

$$\{\partial_t \bar{\rho} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \bar{\rho}\} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = -\delta \mathbf{U} \cdot \nabla \bar{\rho} \quad (7.10)$$

De même, l'équation de quantité de mouvement s'écrit

$$\{-\partial_t \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} - \mathcal{L}(\mathbf{U}_0, \bar{\mathbf{u}})\} + \partial_t (\hat{\mathbf{u}}) + \nabla \hat{p} - \mathcal{L}(\mathbf{U}_0, \hat{\mathbf{u}}) = \mathcal{L}(\delta \mathbf{U}, \hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{L}(\delta \mathbf{U}, \bar{\mathbf{u}}) \quad (7.11)$$

Dans les deux expressions (7.10) et (7.11), les termes entre accolades s'annulent puisqu'il s'agit des équations linéarisées vérifiées par la solution de couche limite acoustique. D'autre part, les termes du membre de gauche restants peuvent être réécrits en utilisant les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  introduits lors de l'écriture des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées. En supposant également incompressible la perturbation sur l'écoulement de base, il vient

$$\partial_t (\mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})) + (\mathcal{A} + \delta \mathcal{A})(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \mathcal{F}(\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{\mathbf{u}}) \quad (7.12)$$

avec

$$\delta \mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \hat{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{U} + \nabla \delta \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{U} \cdot \bar{\rho} \\ \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{U} + \nabla \delta \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Finalement, la relation (7.12) traduit bien la réponse forcée du système en termes d'instabilités hydrodynamiques. L'expression du forçage  $\mathcal{F}$  montre que cette réponse est due à la conjonction de deux

5. Nous supposons nous placer dans le système d'adimensionnalisation utilisé en stabilité, la vitesse de référence étant la vitesse d'injection pariétale.

6. Ces quantités, ainsi que les fluctuations acoustiques  $(\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{\mathbf{u}})$  et les fluctuations hydrodynamiques  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$ , dépendent implicitement de l'espace et du temps.

phénomènes, à savoir la présence de fluctuations acoustiques et d'une perturbation sur l'écoulement de base — ce que nous avons appelé précédemment l'«accrochage» du VSP sur l'acoustique *via* la présence d'une rupture de débit pariétale. Nous comprenons également pourquoi, au cours des DNS effectuées en configuration lisse (section 5.2), les modes hydrodynamiques et les fluctuations acoustiques n'interagissent pas, si ce n'est par la création d'acoustique par le déséquilibre en sortie dû à l'introduction d'un mode VSP dans la condition initiale. Reste à savoir, dans la relation de forçage (7.12), quelle hypothèse on peut faire sur la dépendance temporelle des différentes fluctuations.

### 7.4.2 Approche modale

Nous avons vu en section 7.3.2 que la modification des valeurs propres corrélative à la modification de l'écoulement de base induite par la présence du scotch est négligeable. Nous pouvons donc, en première approximation, négliger le terme  $\delta\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  dans l'expression de la réponse forcée (7.12). Ce problème s'écrit alors :

$$\partial_t (\mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})) + \mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \mathcal{F}(\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{\mathbf{u}}) \quad (7.14)$$

Supposons que l'écoulement de Taylor-Culick «scotché» (c'est-à-dire modifié par la présence d'une rupture de débit) se comporte comme un amplificateur de bruit. Il est alors plausible que la fréquence du système soit imposée par l'acoustique naturelle du MPS simplifié, auquel cas le forçage peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F}(\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{\mathbf{u}})(x, r, t) = (m, \mathbf{q})^T(x, r) e^{-i\bar{\omega}t} \quad (7.15)$$

où  $\bar{\omega}$  est la pulsation réduite associée à un mode acoustique donné, et  $m = \delta\mathbf{U} \cdot \bar{\rho}$  et  $\mathbf{q} = \nabla\bar{\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{U} + \nabla\delta\mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{u}}$ . Dans ce cas, les fluctuations hydrodynamiques forcées  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  évoluent temporellement avec la même pulsation. Reste à décrire leur dépendance spatiale.

Une première manière de le faire consiste à décomposer en chaque instant les fluctuations  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  sur l'ensemble des fonctions propres  $(\hat{\mathbf{u}}_n)_n$  du problème de stabilité — et pas seulement celles de la branche VSP. On obtient alors la relation :

$$\left[ \sum_n \lambda_n (\mathcal{A} - i\bar{\omega}\mathcal{B}) \hat{\mathbf{u}}_n(x, r) \right] e^{-i\bar{\omega}t} = (m, \mathbf{q})(x, r) e^{-i\bar{\omega}t} \quad (7.16)$$

L'utilisation des fonctions propres adjointes permet alors d'explicitier les coefficients complexes  $\lambda_n$ . On obtient finalement

$$(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})(x, r, t) = \left( \sum_n \frac{\langle \tilde{p}_n, m \rangle + \langle \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{q} \rangle}{i(\hat{\omega}_n - \bar{\omega}) \langle \tilde{\mathbf{u}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n \rangle} (\hat{p}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)(x, r) \right) e^{-i\bar{\omega}t} \quad (7.17)$$

Cette expression amène deux remarques. D'une part, le forçage est d'autant plus «efficace» que les fluctuations du forçage en masse et en quantité de mouvement sont colinéaires aux fonctions propres adjointes, du fait des produits scalaires  $\langle \tilde{p}_n, m \rangle$  et  $\langle \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{q} \rangle$  qui apparaissent au numérateur. Or, l'amplitude du forçage est maximale là où celle de la perturbation sur l'écoulement de base est la plus forte, c'est-à-dire au voisinage du scotch. Les modes propres les plus forcés sont donc ceux dont l'allure des fonctions propres adjointes  $\tilde{p}_n$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  sont les plus similaires aux fluctuations en forçage de masse et de quantité de mouvement  $m$  et  $\mathbf{q}$ . Cela explique que l'amplitude des fluctuations hydrodynamiques ne soit pas proportionnelle à la taille de la rupture de débit, comme nous l'avons montré par DNS. En effet, une modification sur la longueur du scotch n'a pas seulement une influence sur l'intensité du cisaillement qu'il produit dans l'écoulement de base, elle détermine également la forme de cette distorsion. En revanche, les expressions des termes de masse et de quantité de mouvement du forçage  $m$  et  $\mathbf{q}$  sont bien linéaires vis-à-vis de l'amplitude de l'acoustique, ce qui avait été là encore constaté par DNS.

D'autre part, l'amplitude de la réponse forcée est d'autant plus grande que la pulsation réduite du forçage au sens complexe  $\bar{\omega}$  est proche de l'un des modes hydrodynamiques  $\hat{\omega}_n$ , du fait du facteur

$\hat{\omega}_n - \bar{\omega}$  du dénominateur. Cependant, il est peu probable que cette situation apparaisse. En effet, on peut concevoir la présence d'un forçage acoustique dont la fréquence est proche de celle d'un mode hydrodynamique, mais le taux d'atténuation de l'acoustique, généralement de l'ordre de  $-60 \text{ s}^{-1}$  dans nos DNS, correspond à une atténuation adimensionnée d'environ  $\bar{\omega}_i = -1.8$ , très éloignée de celle des modes propres de la branche VSP, située autour de  $-15$ . Il est donc difficile d'étudier la restriction de la somme (7.17) à un certain nombre de termes impliquant uniquement des modes hydrodynamiques de la branche la plus instable. Cela est d'ailleurs confirmé par notre tentative avortée de décomposer les champs de vitesse issus du calcul de la réponse forcée de l'écoulement par simulation numérique directe sur la base des fonctions propres des modes de la branche VSP, alors que cette méthode était parfaitement valide dans le cas de la réponse impulsionnelle.

### 7.4.3 Description par perturbations optimales

C'est pourquoi cette approche modale du calcul de la réponse d'un amplificateur de bruit à un forçage est généralement préférée à l'approche par *perturbations optimales*, de plus en plus souvent utilisée en stabilité des couches limites (voir par exemple Marquet [63], Monokrousos [65], Sipp *et al.* [79], Brandt *et al.* [19]). Celle-ci consiste à calculer le forçage qui maximise la réponse du système en terme d'amplitude. Elle est principalement basée sur le calcul des valeurs singulières de l'opérateur de stabilité ou de sa version discrétisée, qui sont moins sensibles que les valeurs propres aux perturbations numériques [85]. Nous introduisons ici le formalisme des perturbations optimales et expliquons comment nous les avons calculées.

#### 7.4.3.1 Introduction du formalisme

En reprenant l'expression (7.12), on peut écrire que la réponse forcée s'exprime directement sous la forme

$$(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \mathcal{R}(\bar{\omega})(m, \mathbf{q}) \quad (7.18)$$

où

$$\mathcal{R}(\omega) = (\mathcal{A} - i\omega\mathcal{B})^{-1} \quad (7.19)$$

est appelée résolvante du système forcé. Cette approche est à mettre en relation avec l'introduction des pseudo-spectres effectuée au chapitre 3 : un complexe  $\omega$  est dans l' $\varepsilon$ -pseudospectre du problème aux valeurs propres généralisé  $(\mathcal{A} - i\omega\mathcal{B})(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = 0$ , noté  $\Lambda_\varepsilon(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , si  $\|\mathcal{R}(\omega)\| \geq 1/\varepsilon$ . En ce sens, l'écriture modale (7.17) permet bien de retrouver le fait que les valeurs propres du problème sont les points du plan complexe pour lesquelles la norme de la résolvante est arbitrairement grande.

Notons que la norme de la résolvante est prise au sens de la norme induite par la norme quadratique sur les fluctuations de pression et de vitesse, à savoir

$$\|\mathcal{R}(\omega)\| = \sup_{(m, \mathbf{q})} \frac{\|\mathcal{R}(\omega)(m, \mathbf{q})\|}{\|(m, \mathbf{q})\|} \quad (7.20)$$

À partir de cette définition, il existe plusieurs possibilités pour calculer cette norme. Du point de vue des opérateurs continus, le carré de la norme  $\|\mathcal{R}(\omega)(m, \mathbf{q})\|^2$  est directement égale à  $\langle (m, \mathbf{q}), \mathcal{R}(\omega)^\dagger \circ \mathcal{R}(\omega) \rangle (m, \mathbf{q})$ , où  $\mathcal{R}(\omega)^\dagger$  désigne l'adjoint de la résolvante. L'opérateur composé  $\mathcal{R}(\omega)^\dagger \circ \mathcal{R}(\omega)$  étant symétrique positif, ses valeurs propres sont réelles et la norme de la résolvante est égale à la plus grande valeur propre de cet opérateur dit *composite*. Or, du point de vue numérique, celui-ci est très difficile à calculer :<sup>7</sup> on préfère donc calculer l'approximation numérique de la norme  $\|\mathcal{R}(\omega)(m, \mathbf{q})\|^2$  :

$$\|\mathcal{R}(\omega)(m, \mathbf{q})\|^2 \approx \mathbf{Y}^H \left( (\mathcal{A} - i\omega\mathcal{B})^{-1} \right)^H \left( (\mathcal{A} - i\omega\mathcal{B})^{-1} \right) \mathbf{Y} \quad (7.21)$$

7. Cela supposerait que l'on puisse calculer correctement à la fois le problème direct et le problème adjoint sur une même grille, ce qui est hors de notre portée avec la collocation spectrale.

où  $\mathbf{Y}$  est le vecteur contenant les valeurs du forçage aux points de discrétisation choisis. La norme de la résolvante numérique est alors la plus grande valeur propre de la matrice  $((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1})^H ((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1})$ . L'intérêt du calcul de la norme de la résolvante (7.21) est que celle-ci, réécrite sous la forme

$$\|\mathcal{R}(\omega)\| = \sup_{(m, \mathbf{q})} \frac{\|(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})\|}{\|(\hat{m}, \hat{\mathbf{q}})\|} \quad (7.22)$$

donne l'amplitude maximale que peuvent atteindre les fluctuations  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  par rapport à celle du forçage  $(m, \mathbf{q})$  de pulsation  $\omega$ . Le forçage qui maximise l'amplitude de la réponse, noté  $(\hat{m}, \hat{\mathbf{q}})$ , est appelé *forçage optimal*. Il est associé à la plus grande valeur propre  $\hat{\sigma}$  de la matrice composite  $((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1})^H ((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1})$ , ou encore la plus grande valeur singulière de  $((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1})$ . La *perturbation optimale* du problème est enfin définie comme  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \mathcal{R}(\omega)(\hat{m}, \hat{\mathbf{q}})$ .

L'intérêt de cette approche est double. D'une part, Trefethen montre dans [85] que le calcul des valeurs singulières d'une matrice ou d'un opérateur —ou encore les valeurs propres de sa matrice ou de son opérateur composite associé— est plus robuste aux perturbations numériques que le calcul de valeurs propres opéré dans le cas d'une approche modale. Cela est particulièrement intéressant dans le cas d'opérateurs non-normaux pour lesquels la sensibilité aux perturbations est grande, comme nous l'avons vu pour notre exemple au chapitre 3. D'autre part, cette méthode donne plus facilement accès à la réponse en fréquence de l'écoulement que l'approche modale. Cependant, cette dernière reste plus naturelle pour l'analyse de stabilité des moteurs à propergol solide simplifiés, car la physique des boosters est visiblement commandée par des modes discrets plus aisément discernables par calcul de valeurs propres classique. Nous allons toutefois montrer sur un cas rapide ce que l'approche par perturbations optimales nous apprend.

#### 7.4.3.2 Stratégie pour le calcul du pseudo-spectre

Plusieurs stratégies de calcul sont présentées dans la littérature. Par exemple, on trouve chez Toumazou [62] une comparaison entre le calcul direct de la plus petite valeur singulière de  $\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B}$  et différentes méthodes basées sur le calcul d'un sous-espace itéré de type Lanczos, dont l'algorithme d'Arnoldi est dérivé. Trefethen [83, 84, 94] propose également différentes méthodes dérivées de celles-ci, dont certaines sont particulièrement intéressantes dans le cas où la matrice  $\mathbf{B}$  est inversible (ou directement égale à l'identité), car il suffit alors de calculer une fois pour toute un sous-espace de Krylov pour la matrice  $\mathbf{A}$  et se ramener au calcul du pseudospectre de la matrice  $\tilde{\mathbf{H}} - i\omega\tilde{\mathbf{I}}$ , où  $\tilde{\mathbf{H}}$  est la (petite) matrice de Hessenberg obtenue après calcul du sous-espace de Krylov. Dans notre cas,  $\mathbf{B}$  n'est pas inversible et le calcul de la plus petite valeur singulière de  $\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B}$  doit être recommencé pour chaque valeur de  $\omega$ .

En fait, notre méthode de calcul de pseudo-spectre dérive de la méthode de la matrice composite introduite par Toumazou [62] et suit la définition (7.21). Nous partons en effet de la factorisation LU parallèle des matrices  $(\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})$  et  $(\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^H$ . Cela nous permet, comme dans le cas du calcul de valeurs propres par la méthode d'Arnoldi, de ne calculer que la valeur propre de plus grand module de la matrice  $((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1})^H ((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1})$ , en appliquant l'algorithme d'Arnoldi à la matrice composite

$$\mathbf{M}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & ((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1})^H \\ ((\mathbf{A} - i\omega\mathbf{B})^{-1}) & 0 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

pour un sous-espace itéré de petite taille  $p\kappa$ . Notons que la matrice  $\mathbf{M}(\omega)$  est alors stockée sur une double grille de processeurs, les deux factorisations LU étant faites sur deux grilles différentes.

Ainsi, le calcul de la norme de la résolvante pour un nombre complexe  $\omega$  donné peut être rapide, typiquement 2 minutes environ pour une matrice de taille  $n_{\text{mat}} = 12\,000$ . Cependant, nous cherchons à calculer  $\|\mathcal{R}(\omega)(m, \mathbf{q})\|$  pour de nombreuses valeurs de  $\omega$  dans le plan complexe. Le calcul rapide du pseudo-spectre pour un calcul de stabilité à  $\text{Re} = 2000$ , où il nous faut au minimum  $N \times M = 200 \times 100$  points, est donc pour le moment hors de portée.

### 7.4.3.3 Cas de calcul pour $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ et $\text{Re} = 100$

C'est pourquoi nous nous intéressons au cas de calcul  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 100$ , pour lequel nous pouvons obtenir des valeurs propres raisonnablement convergées avec une discrétisation multidomaine avec  $M = 50$  points suivant  $r$  et  $N = 50 + 20 + 10$  points suivant  $x$ , les limites entre domaines étant les mêmes que celles du maillage  $\text{MULTI}_0^d$  présenté au chapitre 3. Nous avons calculé la norme de la résolvante pour  $\bar{\omega}_r \in [50, 70]$  pour les taux d'amplification  $\bar{\omega}_i \in \{0, -5, -10, -15, -20, -25, -30\}$ . Le cas  $\bar{\omega}_i = 0$  correspond au cas d'un forçage qui n'est ni amplifié ni atténué au cours du temps. La norme de la résolvante correspondante est tracée en figure 7.13(a). La courbe monotone que nous observons alors semble indiquer que l'écoulement ne sélectionne pas de fréquence, mais amplifie plus particulièrement les forçages de pulsation propre croissante, du moins sur l'intervalle de pulsations réduites sur lequel a été effectué le calcul. C'est seulement lorsqu'on considère des valeurs plus négatives de  $\bar{\omega}_i$  que des maxima locaux sont atteints, d'ailleurs au voisinage des pulsations réduites des modes de stabilité ( $\hat{\omega}_r \in \{56.6, 63.9, 70.8\}$ ,  $\hat{\omega}_i \approx -28$ ). Cela fait écho à la formulation modale de la réponse à un forçage (7.17) qui laisse supposer que celle-ci est d'amplitude plus grande quand les dénominateurs en  $\bar{\omega} - \hat{\omega}_n$  sont proches de zéro, c'est-à-dire quand la pulsation réduite du forçage est proche de celle des modes propres de l'écoulement.

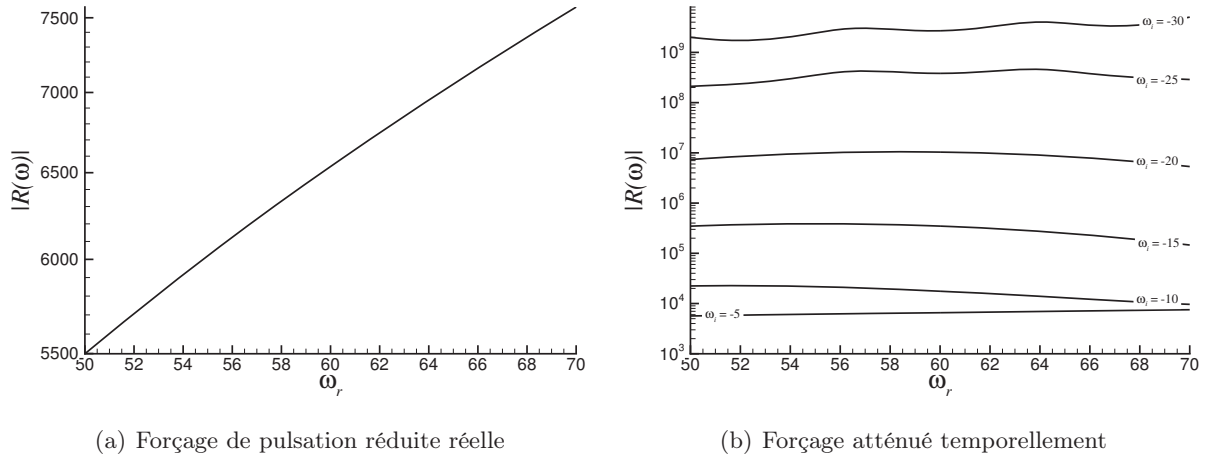


FIGURE 7.13 – Tracés de la norme de la résolvante pour le cas de calcul  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 100$ . Discrétisation multi-domaine avec  $N \times M = 80 \times 50$  points avec raffinement en sortie.

Le calcul de la norme de la résolvante peut également être interprété en termes de pseudo-spectres. Vu les valeurs de l'ordre de  $10^9$  que celle-ci atteint régulièrement pour  $\bar{\omega}_i < -25$  par exemple, il est plausible que de petites perturbations —qu'elles soient numériques ou physiques— de l'ordre de  $10^{-9}$  puissent notablement faire varier la position des valeurs propres. Cela est à rapprocher de la grande sensibilité aux perturbations sur la condition d'entrée, et dans une moindre mesure sur la condition de paroi. Le calcul de la norme de la résolvante ajoute alors des informations sur la direction dans laquelle les valeurs propres peuvent bouger, à savoir parallèlement à l'axe réel. Au contraire, il est peu probable que les modes propres soient fortement destabilisés, car la norme de la résolvante décroît assez rapidement quand  $\bar{\omega}_i$  augmente.

### 7.4.3.4 Cas de calcul pour $X_{\text{in}} = 4$ , $X_{\text{out}} = 8$ et $\text{Re} = 2000$

Le calcul de la norme de la résolvante à  $\text{Re} = 2000$  que nous présentons ici est à prendre avec précaution, car il est effectué avec le même maillage que précédemment pour des raisons de temps de calcul. Il est en effet peu probable que les modes propres de l'écoulement soient correctement calculés avec une telle discrétisation. Cependant, la robustesse de l'approche par perturbations optimales laisse



tout du moins supposer une certaine validité qualitative des résultats suivants. En figure 7.14 est tracée la norme de la résolvante pour  $\bar{\omega}_r \in [50, 80]$  et  $\bar{\omega}_i \in \{0, -5, -10\}$ . Les courbes correspondant à  $\bar{\omega}_i = -10$  et dans une moindre mesure  $\bar{\omega}_i = -5$  indiquent que l'écoulement amplifie plus facilement certaines fréquences pour des forçages possédant une certaine atténuation temporelle. Cependant, à titre de comparaison, l'acoustique initiale calculée par DNS est caractérisée par une atténuation temporelle correspondant à  $\bar{\omega}_i \approx -1.8$ , ce qui est en réalité très proche de l'axe réel. En outre, l'amplitude des fluctuations de pression croît même une fois que les structures tourbillonnaires ont atteint la sortie du conduit. Un forçage «plausible» a donc une atténuation nulle en moyenne.

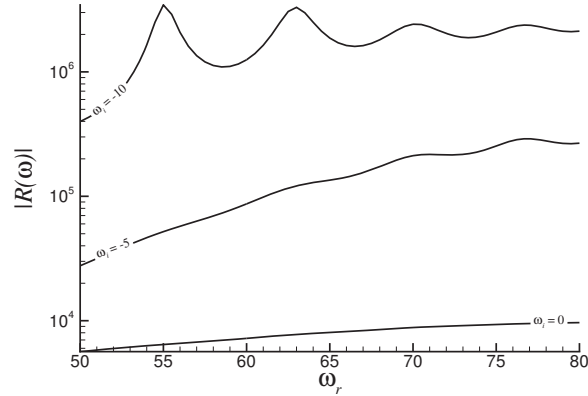


FIGURE 7.14 – Tracés de la norme de la résolvante pour le cas de calcul  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 2000$ . Discrétisation multi-domaine avec  $N \times M = 80 \times 50$  points avec raffinement en sortie.

En particulier, dans le cas des simulations effectuées avec un rapport d'aspect  $X_{\text{out}} = 8$ , l'acoustique est caractérisée par une pulsation réduite  $\bar{\omega} \approx 65.5$ . Nous avons donc calculé la réponse optimale  $\hat{\mathbf{u}}$  pour cette pulsation et nous l'avons comparée au champ de vitesse calculé par simulation numérique directe dans le cas d'un scotch placé en  $x_s/R = 4$  à l'instant  $t = 0.022$  s. En particulier, il est plus judicieux de comparer les champs de vitesse radiale afin de s'abstraire de la présence de la couche limite acoustique sur le champ de vitesse longitudinale. La perturbation optimale de vitesse radiale est rephasée par rapport à la DNS, et les deux champs sont normalisés de sorte que leur maximum soit atteint au point  $(x = 7.2, r = 0.8)$  et soit égal à 1. Les champs présentés en figure 7.15 montrent alors un très bon accord, notamment en ce qui concerne l'accroissement spatial qui est dans les deux cas bien moindre que celui des fonctions propres calculées par analyse de stabilité modale. Ce n'est pas une surprise, dans la mesure où, d'après la théorie locale de stabilité, les instabilités hydrodynamiques sont d'autant moins amplifiées spatialement que leur atténuation temporelle est faible.

#### 7.4.3.5 Remarques d'ordre numérique

En utilisant un même maillage pour tous les calculs que nous avons présenté, nous avons balayé le problème de la discrétisation dans les calculs de norme de résolvante. En particulier, nous savons pertinamment que le maillage employé dans le cas  $\text{Re} = 2000$  n'est sans doute pas assez fin. Une analyse détaillée des perturbations optimales montre d'ailleurs que celles-ci, bien que très marginalement bruitées (contrairement à des fonctions propres sous-maillées) ne vérifient pourtant pas la condition aux limites de sortie  $\partial_r \hat{u}_r = 0$ . Quant aux forçages optimaux, ils sont amplifiés vers l'amont du domaine, un peu à la manière des fonctions propres adjointes, et surtout très largement bruités. Il est donc possible que la bonne résolution des forçages optimaux soit soumise aux mêmes contraintes que celle des fonctions propres adjointes, à savoir un sur-maillage en entrée du domaine. Le calcul des perturbations optimales est donc sujet aux problèmes numériques rencontrés à la fois pour le calcul des fonctions propres directes et adjointes. Or, nous avons vu, au moins dans le cas de la collocation spectrale, que



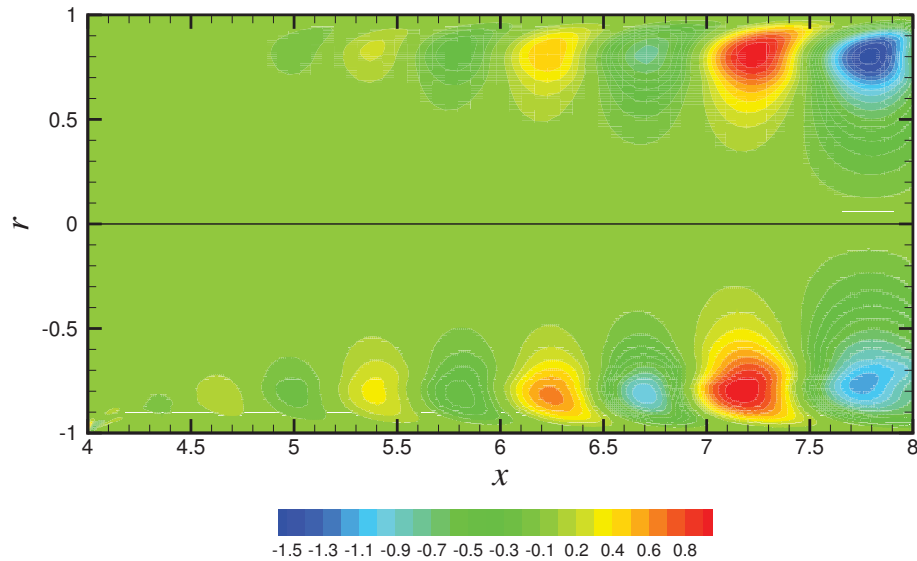


FIGURE 7.15 – Comparaison entre la perturbation optimale de l’écoulement de Taylor-Culick calculée pour  $X_{\text{in}} = 4$ ,  $X_{\text{out}} = 8$ ,  $\text{Re} = 2000$  pour un forçage de pulsation  $\bar{\omega} = 65.5$  (haut), et le champ de vitesse de la réponse forcée calculé par DNS avec un scotch en  $x_s/R = 4$  et une vitesse d’injection  $V_{\text{inj}} = 1.04$  m/s (intégration explicite, pas de temps  $\delta t = 10^{-8}$ ). Coordonnées adimensionnalisées.

le sur-maillage de l’extrémité du domaine où les fonctions propres sont de faible amplitude dégrade la précision de l’ensemble.

En fait, une approche plus précise consisterait à calculer non pas la norme de la résolvante associée à la matrice  $\mathbf{A} - i\bar{\omega}\mathbf{B}$  de l’opérateur direct  $\mathcal{A} - i\omega\mathcal{B}$  discrétisé, mais au contraire à calculer directement la plus grande valeur propre de l’opérateur  $(\mathcal{A} - i\omega\mathcal{B})^\dagger o(\mathcal{A} - i\omega\mathcal{B})$ . Cela suppose de calculer correctement l’image d’une fluctuation par l’inverse de l’opérateur adjoint, puis par l’inverse de l’opérateur direct... ce qui n’est pas aisé en collocation spectrale puisque cela suppose d’avoir des maillages indépendants raffinés en des endroits différents ! On peut alors penser utiliser des schémas de discrétisation autres que la collocation spectrale, pour lesquels un sur-raffinement de maillage à un endroit ne fasse pas baisser la précision du calcul.

## 7.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de caractériser l’influence des différents phénomènes connus dans la physique des Moteurs à Propergol Solide sur la génération forcée d’instabilités hydrodynamiques. Fondamentalement, c’est bien l’accrochage des fluctuations acoustiques sur une petite perturbation de l’écoulement de base qui conduit à l’apparition de structures tourbillonnaires pariétales. Ce résultat, dont les simulations numériques directes que nous avons présentées nous donnent l’intuition, se montre de manière théorique par la décomposition de la solution des équations de Navier-Stokes en écoulement de base, distorsion, fluctuations acoustiques et fluctuations hydrodynamiques. Ces dernières représentent alors la réponse du système gouverné par les modes de stabilité de l’écoulement de Taylor-Culick à un forçage harmonique qui est fonction de l’acoustique et de la distorsion de l’écoulement de base. De ce point de vue, la théorie comme la simulation numérique directe montrent que la dépendance de la réponse forcée de l’écoulement est linéaire vis-à-vis des fluctuations acoustiques, tandis que l’influence de la taille du scotch est plus difficile à décrire car celle-ci détermine non seulement l’intensité mais aussi la forme de la distorsion de l’écoulement de base.

Nous avons également comparé, d’un point de vue théorique, l’intérêt respectif de l’approche modale et de l’approche par perturbations optimales pour l’analyse de la réponse forcée de l’écoulement en

présence d'une rupture de débit. Du point de vue de la physique, l'approche modale est *a priori* la plus séduisante car elle est cohérente avec la sélection fréquentielle observée expérimentalement, ainsi que dans nos différentes simulations numériques directes de réponses forcées. Cependant, une décomposition modale des champs de fluctuations de vitesse serait envisageable si elle prenait en compte non seulement les modes de la branche la plus instable, mais aussi ceux qui sont plus atténués temporellement et que nous ne parvenons pas à calculer correctement. Notons que les «modes VSP» ont des fonctions propres beaucoup plus amplifiées spatialement que les fluctuations de vitesse calculées pour la réponse forcée, ce qui illustre l'impossibilité de se restreindre à eux pour une éventuelle décomposition modale. En ce sens, l'utilisation du formalisme par perturbations optimales représente l'envers du formalisme modal. Les fluctuations de vitesse optimales ont la même allure que celles calculées par DNS, mais l'évolution de l'amplitude de la réponse du VSP en fonction de la pulsation réduite du forçage ne présente la trace d'aucune sélection fréquentielle.

Toutefois, les calculs de norme de résolvante présentés dans ce manuscrit représentent une première tentative qui soulève plusieurs questions. En effet, nos résultats ne permettent pas d'expliquer pourquoi le système sélectionne ses propres fréquences. Corrélativement, il serait intéressant de s'assurer d'un calcul de perturbations optimales bien convergé afin de savoir si la réponse fréquentielle de l'écoulement de Taylor-Culick avec rupture de paroi est large bande en fréquence, ou si au contraire il est possible de distinguer des raies fréquentielles qui expliquent la dynamique modale des Moteurs à Propergol Solide.

Une autre piste de travail porterait éventuellement sur une étude approfondie des aspects transitoires. À supposer que la réponse fréquentielle de l'écoulement soit bien large bande, on ne peut écarter l'existence d'une réponse transitoire de l'écoulement qui génère des instabilités hydrodynamiques à leur fréquence propre. Une fois que ces instabilités atteignent la sortie du conduit, les ondes de pression induites, caractérisées par les fréquences hydrodynamiques, se surajoutent au forçage acoustique et forcent la réponse du VSP à sa propre fréquence. Cependant, la vérification de cette hypothèse n'est pas triviale compte tenu des outils dont nous disposons actuellement.

*Ce dernier chapitre vise à interpréter les résultats obtenus par simulation numérique directe en terme de réceptivité. Il a été d'abord observé que la réponse de l'écoulement en terme de VSP à des ondes de pression entretenues au cours du temps est linéaire vis-à-vis de celles-ci. Ensuite, la prise en compte de plusieurs tailles de scotch n'a pas d'influence sur les fréquences des instabilités, mais seulement sur leur amplitude. De plus, les différentes positions de rupture de débit ont conduit à des résultats cohérents vis-à-vis de la théorie de stabilité linéaire. En outre, il a été montré, par une analyse de sensibilité, qu'il est pertinent de comparer les instabilités calculées par simulation numérique avec les modes de stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick non-perturbé par un scotch.*

*Du point de vue théorique, la séparation de la solution des équations de Navier-Stokes en un état de base, une distorsion créée par le scotch, une partie acoustique et une partie hydrodynamique, a permis de montrer que l'écoulement génère des structures tourbillonnaires pariétales en répondant à un forçage linéaire vis-à-vis de la distorsion et de l'acoustique. La modélisation de cette réponse forcée en termes de perturbations optimales est alors cohérente avec les fluctuations hydrodynamiques calculées par DNS. En revanche, cette modélisation ne permet pas d'expliquer la sélection fréquentielle observée au chapitre 6, ce qui laisse supposer que les effets transitoires jouent un rôle majeur dans l'apparition d'Oscillations De Pression à des fréquences discrètes.*

# Conclusion et perspectives

Notre thèse a poursuivi deux objectifs : montrer la pertinence de l'analyse de stabilité globale des moteurs à propergol solide simplifiés dans la description des Oscillations De Pression, et améliorer la compréhension de l'interaction des modes de stabilité avec les ondes de pression qui se propagent dans le moteur. En effet, partant de l'idée que les ODP sont en majorité dues à une interaction entre détachements tourbillonnaires pariétaux et ondes de pression, la modélisation du VSP sous forme d'instabilités modales de l'écoulement est cohérente avec l'apparition des bouffées observées expérimentalement, dont la fréquence est proche mais différente de celle de l'acoustique du moteur. Cependant, pour valider cette approche, nous devons parvenir à calculer des modes propres qui ne dépendent pas de la discrétisation axiale employée, pour ensuite montrer que ces modes permettent bien de décrire la dynamique des conduits à parois débitantes. Si nous avons réussi à atteindre le premier objectif, nous n'avons pas épuisé toutes les pistes de travail que nous avons ouvertes pour répondre au second.

## Avancées en stabilité globale

Notre réflexion sur la stabilité globale de l'écoulement de Taylor-Culick, et en particulier sur l'existence de modes propres discrets, a eu pour point de départ le paradoxe suivant : les modes calculés sur le domaine entier pour la discrétisation de référence  $N = 50$  points introduite par F. Chedevergne sont parfaitement recouverts par simulation numérique directe, mais ceux calculés avec une autre discrétisation le sont tout autant. Nous comprenons donc que se pose la question de l'existence de modes discrets. À partir de là, le calcul de modes propres sur un demi-domaine, introduit au chapitre 3, se justifie de trois manières.

- Dès le chapitre introductif, nous avons noté que les premiers tirs sur le montage LP9 avaient montré que l'utilisation d'un chargement strictement monobloc ne permet pas l'accrochage du VSP à une fréquence propre avec une amplitude élevée. La réintroduction d'un intersegment permettait de retrouver, comme sur le P230, des bouffées d'amplitude notable.
- De même, les simulations numériques directes effectuées en l'absence de rupture de débit pariétale (section 5.2) ne permettent de mettre en évidence que l'excitation d'ondes de pression lors du passage du VSP par la sortie du cylindre. Le couplage inverse, à savoir l'émergence de structures tourbillonnaires, ne se fait que si l'on introduit une petite perturbation sur l'écoulement de base induite par la présence d'un «scotch» à la paroi qui fixe l'origine du VSP à cet endroit. S'il existe des instabilités intrinsèques de l'écoulement, alors celles-ci ne partent pas du fond avant mais d'une perturbation sur l'écoulement de base.
- Enfin, l'étude au chapitre 3 d'un problème de stabilité convectif-diffusif simplifié avec état de base uniformément accéléré a en effet mis en lumière la possibilité d'une non-convergence numérique des modes propres. Cette non-convergence est intimement liée à une sensibilité excessive de ces modes vis-à-vis d'une perturbation quelconque sur la condition aux limites imposée en  $x = 0$ . Par analogie, il est donc très difficile de calculer des modes globaux sur le domaine entier, car ils sont sans doute également sensibles à la condition au fond avant. Outre le fait que la physique nous pousse à imposer la condition aux limites amont non pas au fond avant mais au niveau d'une perturbation géométrique plus à l'aval, le conditionnement numérique du problème de stabilité

nous l'impose.

Ces calculs de stabilité effectués sur un sous-domaine nous ont alors permis d'obtenir des modes qui finissent par converger en maillage, à deux conditions. Premièrement, l'étude du problème simplifié a également mis en évidence la présence de couches limites visqueuses imposées par certaines conditions aux limites. Nous avons donc développé une méthode de discrétisation multi-domaines basée sur la collocation spectrale afin de résoudre correctement ces zones restreintes de variations rapides. D'autre part, le nombre de points nécessaires à ces calculs de stabilité globale étant toujours élevé, il a été intéressant de paralléliser leur exécution afin de repousser les limites de mémoire auxquelles nous avons été confrontées, ainsi que de rendre plus rapide ces calculs.

Nous avons pu calculer correctement la branche des modes de stabilité les plus instables. Ceux-ci sont toujours atténués temporellement et amplifiés le long du conduit. Leur allure est très proche de celle des modes calculés sur un domaine entier, de sorte que leur identification au VSP mesuré sur montage gaz froid ne soulève pas de questions. De plus, ces modes sont discrets, et bien identifiés de manière intrinsèque par le nombre de points amphidromiques que contiennent leurs fonctions propres. Nous avons ensuite réalisé une étude paramétrique portant sur les effets de la viscosité et de la position des limites du domaine de calcul. D'une part, un accroissement du nombre de Reynolds a pour seulement pour effet de destabiliser très marginalement les modes propres. En revanche, les valeurs propres dépendent très explicitement des limites du domaine : en particulier, l'origine des structures tourbillonnaires fixe la position et l'allure de la branche des modes hydrodynamiques les plus instables, tandis que les modes «coulissent» sur cette branche vers les plus basses fréquences quand la sortie de domaine  $X_{\text{out}}$  est positionnée plus à l'aval. Cependant, nous n'avons pas pu tester des valeurs de  $X_{\text{out}}$  extrêmement grandes du fait des contraintes numériques qui deviennent plus critiques quand le domaine s'élargit. De plus, nous savons que la pertinence de l'écoulement de Taylor-Culick pour des valeurs de  $X_{\text{out}}$  supérieures à 12 est discutable du fait de l'apparition progressive de la turbulence.

Enfin, l'utilisation des équations adjointes nous a permis d'introduire au chapitre 3 la notion de sensibilité des valeurs propres aux perturbations sur l'écoulement de base. Nous avons montré en section 7.3 que la présence d'un scotch modifie très peu les modes propres de l'écoulement, car la sensibilité maximale associée à chaque mode se situe non pas à la limite amont du domaine, mais légèrement à l'aval de celle-ci. De même, cette sensibilité décroît globalement le long du moteur, ce qui laisse présager que d'éventuelles modifications de l'écoulement de base à l'aval dues à la turbulence aient peu d'influence sur les modes de stabilité. Cependant, le calcul des sensibilités optimales montre que les valeurs propres peuvent être très largement modifiées par de petites distorsions proportionnelles aux fonctions de sensibilité.

## Justifications de l'approche modale apportées par la DNS

L'obtention de modes propres convergés en maillage ne suffit toutefois pas à justifier leur pertinence. C'est pourquoi nous avons mené en parallèle les simulations numériques directes décrites au chapitre 6. Le premier cas de validation a consisté à calculer la réponse impulsionnelle de l'écoulement à une perturbation initiale en présence d'une rupture de débit pariétale. Non seulement cette réponse impulsionnelle se fait bien sous forme de structures tourbillonnaires qui sont générées au voisinage du scotch, mais ces dernières sont également décomposables en somme de modes de stabilité une fois une période transitoire achevée. Cette décomposition est cohérente avec la solution simulée, que ce soit spatialement ou temporellement. Les modes de stabilité permettent donc de modéliser la dynamique de l'écoulement en dehors des croissances transitoires.

Le deuxième cas d'application de la DNS porte sur le calcul d'une réponse forcée, en imposant en sortie une condition aux limites qui permette la réflexion des ondes sortantes à l'extrémité du conduit. Là encore, des instabilités pariétales s'échappent bien du scotch, leur analyse en fréquence a montré qu'il était possible de les décomposer en modes de pulsations discrètes différentes de celle de l'acoustique naturelle du moteur. Elles ont de plus montré un bon accord avec les modes issus de

---

la stabilité globale. Il est donc plus que jamais pertinent de chercher à caractériser une dynamique modale dans les moteurs à propergol solide. De plus, l'effet de la modification de la position de la rupture de débit sur ces fréquences s'est montrée qualitativement cohérente avec les résultats obtenus lors de l'étude paramétrique réalisée en stabilité.

En outre, la DNS nous a permis de montrer la linéarité de la réponse forcée vis-à-vis de l'acoustique initiale. Plus intéressante est la trace prépondérante des fréquences hydrodynamiques dans les signaux de pression normalement caractéristiques de l'acoustique. Cela suppose donc que les ondes de pression issues de la réflexion en sortie du VSP gardent la fréquence de ce dernier et finissent par être dominantes par rapport à l'acoustique initiale du moteur dont la fréquence est fixée par les conditions aux limites au fond avant et en sortie. Nous parlons alors d'ondes de pression induites, sous-entendu : par le VSP.

Ces simulations numériques nous ont donc permis de montrer le double couplage entre ondes de pression et instabilités hydrodynamiques. Dans un sens, la réflexion du VSP en sortie entretient la présence d'ondes de pression qui gardent la fréquence de celui-ci. Dans l'autre sens, ces ondes de pression forcent la création de structures tourbillonnaires en interagissant avec les petites perturbations de l'écoulement induites ici par des scotchs. Ce forçage a d'ailleurs été mis en évidence théoriquement au chapitre 7. Cependant, les raisons pour lesquelles c'est le VSP qui dirige la dynamique des ODP —et non l'acoustique naturelle du moteur— restent difficile à expliquer. Toujours suivant la mise en équation de la réponse forcée présentée en section 7.4, il n'y a aucune raison pour que la fréquence du forçage s'aligne sur celle des modes propres de l'écoulement. De plus, l'allure spatiale des structures tourbillonnaires calculées par DNS peuvent difficilement être reconstituées sous forme de modes de la branche VSP, tandis que la perturbation optimale à un forçage de fréquence acoustique montre, elle, un très bon accord avec les champs issus de la simulation. Or, le calcul de l'amplitude optimale de la réponse forcée en fonction de la fréquence du forçage n'a pas permis de mettre en évidence des pics de fréquence représentant des modes d'instabilité que l'écoulement puisse sélectionner. En ce sens, ni l'approche modale ni l'approche optimale ne sont parfaitement capables de décrire, en l'état actuel des choses, la dynamique des moteurs à propergol solide.

## Perspectives

Il ne faut toutefois pas minimiser l'intérêt de l'analyse de stabilité linéaire pour la compréhension des ODP. Notre étude laisse au contraire entrevoir deux pistes de travail supplémentaires. Premièrement, maintenant que nous avons obtenu des modes propres convergés en maillage, il est possible d'envisager l'utilisation d'autres méthodes de discrétisation pour leur calcul. Il serait en effet intéressant d'utiliser des schémas qui ne souffrent pas, comme la collocation spectrale, d'une perte de précision quand le nombre de points augmente de manière trop importante. Par exemple, l'effet d'une rupture de débit sur les modes propres n'a pas pu être directement calculée par analyse de stabilité, car le raffinement de maillage nécessaire près de la condition d'entrée destabilise complètement le calcul. De plus, la collocation spectrale, bien adaptée à des configurations simples, est difficilement utilisable dans des cas plus réels. On peut donc penser à des méthodes de type éléments finis qui sont susceptibles d'apporter plus de souplesse mais aussi moins de difficultés numériques —nous ne disons pas : plus de précision, car les méthodes pseudo-spectrales restent les plus performantes pour calculer des solutions régulières telles que pourraient l'être nos modes propres si elles ne comportaient pas de couches limites.

Utiliser des méthodes plus souples dans le sens de raffinements en maillage qui ne perturbent pas la précision globale du calcul aurait également un grand intérêt dans le cas de l'approche optimale. En effet, dans l'approche modale, nous raffinons des zones différentes suivant que nous calculons les modes propres directs ou les modes propres adjoints. Dans le cas de l'approche optimale, équations directes et équations adjointes interviennent en même temps d'une manière ou d'une autre, soit explicitement, soit implicitement à travers la matrice transposée de la matrice des équations directes discrétisées. Parvenir à des perturbations optimales convergées en maillage nécessite donc sans doute de raffiner à la fois la limite amont et la limite aval, ce qui introduirait sans doute des perturbations numériques

catastrophique dans le cas de notre méthode par collocation spectrale multi-domaine.

Utiliser des schémas plus stables et plus souples pourrait alors permettre d'étendre l'une ou l'autre de ces approches à des configurations réalistes, ne serait-ce que des moteurs plus longs qu'un facteur d'aspect égal à 9 dont nous arrivons difficilement à calculer les modes propres ! Cela ouvrirait également la voie à la prise en compte de phénomènes tels que la compressibilité et la turbulence qui interviennent dans des moteurs réels plus longs que les conduits considérés dans ce manuscrit.

Une dernière piste de travail que nous voulons mentionner est celle de la prise en compte de la phase dispersée. Deux questions se posent en effet quant à l'influence des particules dans les moteurs à propergol solide : celle de leur effet sur l'amplitude des bouffées, et celle de l'existence d'instabilités propres à leur présence. La théorie de la stabilité pourrait donc permettre de déterminer les modifications engendrées par la phase particulaire sur les modes hydrodynamiques (structures et amplification spatiales, atténuation temporelle), mais surtout déterminer s'il existe des modes propres supplémentaires qui ne soient dus qu'à la présence des particules.

# Annexe A

## Compléments mathématiques

### A.1 Forme faible du problème de stabilité direct

#### A.1.1 Rappel des équations de stabilité

Nous voulons ici montrer que le système des équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées est bien posé s'il est associé aux équations que nous avons introduites en section 2.1. Rappelons que ce problème s'écrit, sur le domaine fluide  $\Omega$ ,

$$\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = i\hat{\omega}\mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) \quad (\text{A.1})$$

où, en définissant l'opérateur

$$\mathcal{M}(\hat{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\text{Re}}\Delta\hat{\mathbf{u}} + \nabla\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U} + \nabla\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{A.2})$$

on écrit

$$\mathcal{A}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} \\ \mathcal{M}(\hat{\mathbf{u}}) + \nabla\hat{p} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

et

$$\mathcal{B}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Les conditions aux limites dont nous voulons montrer la validité s'écrivent dans l'ordre, à la paroi, à l'entrée du domaine, sur l'axe et en sortie, de la manière suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_W \cup \Gamma_I \\ \partial_r \hat{p} = \partial_r \hat{u}_x = \hat{u}_r = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_A \\ -\frac{1}{\text{Re}}(\nabla\hat{\mathbf{u}} + \alpha\nabla\hat{\mathbf{u}}^T) \cdot \mathbf{n} + \beta(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})\hat{\mathbf{u}} + \hat{p}\mathbf{n} = -\frac{1}{\text{Re}}\partial_x \hat{\mathbf{u}}_r = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante au domaine au niveau de la frontière imposée. Le paramètre  $\alpha$  vaut 0 ou 1, tandis que  $\beta$  appartient à l'intervalle  $[0, 1]$ .

#### A.1.2 Cadre Mathématique

En analyse fonctionnelle, un problème aux dérivées partielles bien posé est un problème qui admet une solution et une seule. Dans le cas d'un problème aux valeurs propres, les choses sont légèrement différentes puisque nous recherchons plusieurs couples de valeurs propres ( $\hat{\omega}$ ) et de fonctions propres



$\hat{q}$  vérifiant un problème de la forme (A.1). Cependant, la question de chercher si ce problème est bien posé a toujours un sens. En effet, après discrétisation, le problème aux valeurs propres matriciel correspondant est réécrit sous la forme

$$(A - i\omega_0 B)^{-1} B \hat{X} = \frac{i}{\hat{\omega} - \omega_0} \hat{X}, \quad (\text{A.6})$$

où  $\omega_0$  est un nombre complexe appelé «valeur-cible», afin d'être résolu par la méthode d'Arnoldi. La matrice  $\tilde{A}_{\omega_0} = A - i\omega_0 B$  doit donc être inversible. Comme ce problème est l'image discrétisée du problème continu (A.1), on peut se demander si l'opérateur continu associé  $\tilde{A} = \mathcal{A} - i\omega_0 \mathcal{B}$  est tel que le problème  $\tilde{A}(\hat{q}) = f$  pour  $f$  fixé admet une et une seule solution. Cependant, là où les propriétés d'inversibilité d'une matrice peuvent être étudiées sur la matrice elle-même, il est nécessaire, pour le problème continu, d'étudier la forme bilinéaire associée à l'opérateur  $\tilde{A}_{\omega_0}$  :

$$\tilde{a}_{\omega_0}(\hat{q}, \hat{q}') = \int_{\Omega} \tilde{A}_{\omega_0}(\hat{q}^*) \cdot \hat{q}' d\hat{\omega}. \quad (\text{A.7})$$

où la notation  $*$  désigne le complexe conjugué. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, le problème  $\tilde{a}_{\omega_0}(\hat{q}, \hat{q}') = l(\hat{q}')$  admet une et une seule solution si  $\tilde{a}_{\omega_0}$  est une forme :

- continue (i.e. il existe  $c_0 > 0$  tel que pour tout  $(\hat{q}, \hat{q}')$ ,  $\tilde{a}_{\omega_0}(\hat{q}, \hat{q}') \leq c_0 \|\hat{q}\| \|\hat{q}'\|$ )
- coercive (i.e. il existe  $c_1 > 0$  tel que pour tout  $(\hat{q}, \hat{q}')$ ,  $|\tilde{a}_{\omega_0}(\hat{q}, \hat{q}')| \geq c_1 \|\hat{q}\|^2$ ), où  $\hat{q}$  et  $\hat{q}'$  évoluent dans un espace hilbertien  $H$  muni de la norme  $\|\cdot\|$  dérivée d'un produit scalaire.

et si la forme linéaire  $l$  associée à  $f$  et définie par  $l(\hat{q}) = \int_{\Omega} f^* \hat{q} d\Omega$  pour tout  $\hat{q}$  est également continue. Ce second point ne pose pas de problème puisqu'on peut transférer la généralité de  $f$  sur la généralité de  $l$  supposée continue. Reste à savoir :

- sur quelles variables on étudie la forme faible ;
- dans quel espace de Hilbert celles-ci évoluent ;
- et quel produit scalaire on utilise.

Introduisons maintenant quelques définitions qui seront utiles par la suite.

- On note  $(\cdot, \cdot)_2$  le produit scalaire classique sur l'ensemble des fonctions intégrables sur le domaine fluide  $\Omega$  et  $\|\cdot\|_2$  sa norme associée. Remarquons que l'on note  $(\cdot)$  et  $\|\cdot\|$  le produit scalaire et la norme portant sur des vecteurs au sens géométrique.
- On définit  $L^2(\Omega)$  comme l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur le domaine  $\Omega$  au sens de la norme précédente ;
- On définit les espaces de Sobolev d'ordre  $p$ , notés  $H^p(\Omega)$ , des fonctions de  $L^2(\Omega)$  de dérivée  $p$ -ième de carré intégrable ; on leur associe la semi-norme<sup>1</sup>

$$|\hat{q}|_{H^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=p} \|D^{|\alpha|} \hat{q}\|_2; \quad (\text{A.8})$$

- l'espace  $D(\Omega)$  des fonctions de  $L^2(\Omega)$  infiniment dérivables à support compact ;
- $H_0^p(\Omega)$  l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $H^p(\Omega)$  pour la norme (A.8). Dans le cas  $p = 1$  par exemple, il s'agit du sous-espace de  $H^1(\Omega)$  des fonctions nulles sur le bord du domaine. Sur cet espace, la semi-norme (A.8) avec  $p = 1$  est alors une norme. On montre également, toujours dans le cas  $p = 1$ , que la semi-norme (A.8) est une norme sur tout sous-espace de  $H^1(\Omega)$  de fonctions nulles sur un ouvert de la frontière de  $\Omega$ . On note ce type d'espace  $H_0^1(\Omega)$ .

1. On note  $\alpha$  une combinaison de dérivées partielles d'ordre  $p = |\alpha| : \partial x_1 \dots \partial x_p$ . D'où la notation

$$D^\alpha \hat{q} = \frac{\partial^p \hat{q}}{\partial x_1 \dots \partial x_p}$$

La question des conditions aux limites est donc fondamentale : ce sont elles qui définissent l'espace sur lequel porte l'opérateur  $\tilde{a}_{\omega_0}$ , et le fait de pouvoir utiliser les semi-normes (A.8) en tant que normes.

Introduisons enfin le résultat sur lequel repose toute l'étude qui suit, à savoir l'inégalité de Poincaré. Celle-ci indique qu'il existe une constante  $c$  telle que pour toute fonction  $\hat{q}$  appartenant à un espace de type  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$\|\hat{q}\|_2 \leq c|\hat{q}|_{H^p(\Omega)} \quad (\text{A.9})$$

La constante  $c$  ne dépend en outre que de  $p$  et  $\Omega$  [30].

### A.1.3 Problème de stabilité bien posé

Soit maintenant  $\Omega$  le domaine fluide  $\Omega = [X_i, X_{\text{out}}] \times [0, 1]$ . Il est naturel de considérer le triplet des variables primitives  $\hat{q} = (\hat{p}, \hat{u}_x, \hat{u}_r)$ , et de les supposer de carré intégrable, i.e.  $\hat{q} \in (L^2(\Omega))^3$ . On définit alors le produit scalaire hermitien usuel sur cet espace :

$$\forall \hat{q}, \hat{q}' \in (L^2(\Omega))^3, \quad (\hat{q}, \hat{q}') = \int_{\Omega} (\hat{q}^* \cdot \hat{q}') \, d\Omega; \quad (\text{A.10})$$

Or, l'ordre maximum de dérivation étant 2 pour les fluctuations du vecteur vitesse  $\hat{\mathbf{u}}$ , leur gradient doit également être de carré sommable.  $\hat{\mathbf{u}}$  appartient donc à l'espace de Sobolev  $H_1(\Omega)$ . On note alors  $E = L^2(\Omega) \times (H_1(\Omega))^2$  l'espace dans lequel évolue  $\hat{q}$ .

Nous nous intéressons maintenant à l'opérateur bilinéaire  $\tilde{a}_{\omega_0}$  associé à l'opérateur linéaire  $\mathcal{A} - i\omega_0\mathcal{B}$  défini par les équation (A.1) à (A.4). Après intégrations par parties, celui-ci prend la forme

$$\tilde{a}_{\omega_0}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}; \hat{p}', \hat{\mathbf{u}}') = a_d(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') + a_{c1}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') + a_{c2}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') + c_0(p_1, \hat{\mathbf{u}}') - i\omega_0 b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') + \gamma(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}; \hat{\mathbf{u}}') \quad (\text{A.11})$$

où l'on a introduit les sous-opérateurs

$$a_d(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} \nabla \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}' \, d\Omega \quad (\text{A.12})$$

$$a_{c1}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{U} \, d\Omega \quad (\text{A.13})$$

$$a_{c2}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (\text{A.14})$$

$$c_0(p_1, \hat{\mathbf{u}}') = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}') p_1 \, d\Omega \quad (\text{A.15})$$

$$b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^* \hat{\mathbf{u}}' \, d\Omega \quad (\text{A.16})$$

et le terme de bord<sup>2</sup>

$$\gamma(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}; \hat{\mathbf{u}}') = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \left( -\frac{1}{\text{Re}} (\nabla \hat{\mathbf{u}}^* + \alpha \nabla \hat{\mathbf{u}}^{*T}) + \hat{p}^* \right) \cdot \hat{\mathbf{u}}' \, ds \quad (\text{A.17})$$

Compte tenu des conditions aux limites imposées (équations (A.5)), ce terme est indépendant de la pression imposée et s'écrit

$$\gamma(\hat{\mathbf{u}}; \hat{\mathbf{u}}') = -\alpha \int_{\partial\Omega} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})(\hat{\mathbf{u}}^* \cdot \hat{\mathbf{u}}') \, ds \quad (\text{A.18})$$

À ce stade, si l'on définit  $\tilde{E}$  le sous-espace de  $E$  des fonctions  $\hat{q} = (\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  :

– telles que  $\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$

– et vérifiant sur les frontières les conditions aux limites (A.5),

toute solution  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  dans  $\tilde{E}$  du problème

$$\forall (\hat{p}', \hat{\mathbf{u}}') \in \tilde{E}, \quad \tilde{a}_{\omega_0}(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}; \hat{p}', \hat{\mathbf{u}}') = l(\hat{p}', \hat{\mathbf{u}}') \quad (\text{A.19})$$

2. Le terme en  $\alpha \nabla \hat{\mathbf{u}}^T$  peut être introduit quelque soit le réel  $\alpha$  dans cette expression du fait de la propriété de divergence nulle du vecteur-vitesse, qui permet de faire apparaître un terme supplémentaire  $-\text{Re}^{-1} \alpha \nabla \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}^T$  dans l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

est solution du problème suivant ne portant plus que sur l'espace des fluctuations de vitesse noté  $\tilde{E}_u$  :

$$\forall \hat{\mathbf{u}}' \in \tilde{E}_u, \quad a_d(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') + a_{c_1}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') + a_{c_2}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') - i\omega_0 b(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') + \gamma(\hat{\mathbf{u}}; \hat{\mathbf{u}}') = l_u(\hat{\mathbf{u}}') \quad (\text{A.20})$$

où  $l_u$  est la projection sur  $\tilde{E}_u$  de la forme linéaire  $l$ . En effet,  $\hat{\mathbf{u}}'$  est supposée de divergence nulle, donc l'opérateur  $c_0$  est identiquement nul sur  $\tilde{E}$ , tandis que les termes de bord peuvent être uniquement définis sur  $\tilde{E}_u$  (formulation (A.18)). À supposer que le problème (A.20) n'admette qu'une et une seule solution, on peut donc se demander s'il existe un unique champ de fluctuation de pression  $\hat{p} \in L^2(\Omega)$  tel que  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  vérifie le problème originel (A.19). En fait, il existe un théorème connu pour le problème de Stokes [72], qui indique que pour tout opérateur linéaire  $a^*$  défini sur un espace de fonctions  $\mathbf{v}$  de divergence nulle, il existe un champ  $p$  défini à une constante additive près tel que

$$a^*(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (\text{A.21})$$

Supposons donc l'existence d'une unique solution  $\hat{\mathbf{u}} \in \tilde{E}_u$  du problème (A.20). Soit  $a^*$  l'opérateur linéaire défini par  $a^*(\hat{\mathbf{u}}') = \tilde{a}_{\omega_0}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}')$ ,  $\hat{p}$  le champ de pression défini à une constante additive près donné par la relation (A.21) et  $c_0$  l'opérateur bilinéaire tel que  $c_0(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}}') = -\int_{\Omega} \hat{p} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}' d\Omega$ . Le couple  $(\hat{p}, \hat{\mathbf{u}})$  est donc bien solution unique du problème (A.19) à une constante additive près sur  $\hat{p}$ . De plus, si ce couple vérifie les conditions aux limites (A.5), l'indétermination sur la pression disparaît. Il reste donc à montrer que le problème (A.19) admet bien une solution unique en montrant que l'opérateur  $\tilde{a}_{\omega_0}$  est continu et coercif.

D'abord, compte tenu des conditions de symétrie sur l'axe et d'attachement aux parois, notre espace de Hilbert  $\tilde{E}_u$  est bien un espace de Sobolev de type  $\tilde{H}_1^0(\Omega)$ , et que la semi-norme

$$|\hat{\mathbf{u}}|_{H_1(\Omega)} = \int_{\Omega} \|\nabla \hat{\mathbf{u}}\|^2 d\Omega \quad (\text{A.22})$$

est bien une norme sur  $\tilde{H}_1^0(\Omega)$ . C'est vis-à-vis de cette norme qu'on démontre en fait la continuité et la coercivité de  $\tilde{a}_{\omega_0}$ . Pour ce qui est de sa continuité :

- celle de  $a_d$  est évidente, celle de  $b$  provient de l'inégalité de Poincaré (A.9) ;
- $\mathbf{U}$  et  $\nabla \mathbf{U}$  sont continus sur un ensemble borné, donc bornées : on peut donc effectuer les majorations suivantes :

$$a_{c_1}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') \leq \sup_{\Omega} (\|\mathbf{U}\|) \|\hat{\mathbf{u}}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \|\hat{\mathbf{u}}'\|_2^2 \quad (\text{A.23})$$

$$a_{c_2}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}') \leq \sup_{\Omega} (\|\nabla \mathbf{U}\|) \|\hat{\mathbf{u}}\|_2^2 \|\hat{\mathbf{u}}'\|_2^2 \quad (\text{A.24})$$

La continuité de ces deux opérateurs découle donc encore de l'inégalité de Poincaré.

Pour la coercivité de  $\tilde{a}_{\omega_0}$ , cette forme bilinéaire étant à valeurs complexes, nous recherchons une inégalité de la forme

$$\Re(\tilde{a}_{\omega_0}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}))^2 + \Im(\tilde{a}_{\omega_0}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}))^2 \geq c_1 \|\hat{\mathbf{u}}\|_{H_0^1(\Omega)}^4 \quad (\text{A.25})$$

Or, la partie réelle peut se décomposer de la manière suivante :

$$\Re(\tilde{a}_{\omega_0}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}})) = \underbrace{\frac{1}{\text{Re}} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{H_0^1(\tilde{\Omega})}^2}_{\text{coercif}} + \underbrace{\int_{\Gamma_S} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) d\gamma}_{\text{positif?}} + \underbrace{\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^* \cdot \nabla \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \omega_{0,i} \|\hat{\mathbf{u}}\|^2 d\Omega}_{\text{positif?}} \quad (\text{A.26})$$

À condition de prendre  $\alpha > 1/2$  et la partie imaginaire de la cible telle que

$$\omega_{0,i} \geq \sup_{\Omega} (\|\nabla \mathbf{U}\|) \quad (\text{A.27})$$

la coercivité du terme visqueux assure celle de l'opérateur.

Cette étude conduit donc à deux résultats intéressants pour le calcul des modes de stabilité, le fait d'avoir un problème continu bien posé conduisant normalement à un problème matriciel après discrétisation facile à inverser. D'une part, le problème est évidemment d'autant mieux inversible que le nombre de Reynolds est faible. D'autre part, on peut rendre le problème mieux inversible en prenant une cible d'Arnoldi  $\omega_0$  de partie imaginaire arbitrairement positive. En pratique, il faut cependant être prudent avec ce résultat car si la matrice  $A - i\omega_0 B$  est plus facilement inversible quand  $\omega_{0,i} \gg 1$ , la distance entre la cible et les valeurs propres, qui sont toutes de partie imaginaire négative, augmente et rend le calcul du sous-espace de Krylov plus délicate. C'est pourquoi nous préconisons en fait une cible de partie imaginaire située entre 10 et 20.

## A.2 Méthodes de traitement du signal

Les outils d'analyse de signaux évoluant peu et se transmettant de bouche de doctorant à oreille de doctorant, cette partie est en fait une réactualisation du chapitre de la thèse d'Estelle Piot [67] concernant le traitement du signal continu en mécanique des fluides. Il traite de deux types de méthodes : les méthodes *non-paramétriques* basées sur l'analyse de Fourier, et la méthode *paramétrique* d'analyse Haute Résolution due à R. Badeau [14]. Les premières présentent en effet un certain nombre de contraintes sur l'échantillonnage du signal à traiter, notamment le sur nombre de périodes enregistrées nécessaires pour distinguer deux fréquences proches. La seconde permet au contraire de séparer avec une très grande précision des fréquences aussi rapprochées que l'on veut, mais elle conduit souvent à des résultats à interpréter avec plus de précautions.

### A.2.1 Analyse de Fourier

#### Transformée de Fourier discrète

Si l'on considère un signal  $v(t)$ , sa transformée de Fourier<sup>3</sup> au point  $\xi = 2\pi f \in \mathbb{R}$  est donnée par :

$$\hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} v(t) dt \quad (\text{A.28})$$

En pratique, on ne connaît de la fonction  $v$  que  $N$  échantillons  $v_n = v(t_n)$ , les valeurs discrètes  $t_n, n = 0 \dots N - 1$ , étant espacées de  $\Delta t$ . On dit alors que le signal est échantillonné à la fréquence  $F_s = 1/\Delta t$ , et qu'il est observé sur une longueur totale  $T = (N - 1)/F_s$ . La transformée de Fourier discrète du signal  $v$  à la fréquence  $f$  est donnée par :

$$\hat{v}_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi n f / F_s} \quad (\text{A.29})$$

Elle est exprimée aux  $N$  points fréquentiels  $f_j = F_s j/N$ , pour  $j = 0 \dots N - 1$ , où elle prend les valeurs :

$$\hat{v}_j = \hat{v}_N(f_j) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi n j / N} \quad (\text{A.30})$$

Le contenu fréquentiel du signal est alors donné par la densité spectrale de puissance (PSD<sup>4</sup>) définie par

$$\Phi(v)(f) = \frac{|\hat{v}(f)|^2}{NF_s} \quad (\text{A.31})$$

3. Elle est définie mathématiquement si la fonction  $v$  appartient à l'espace des fonctions sommables sur  $\mathbb{R}$ . On préfère d'une manière générale se restreindre encore aux fonctions de carré sommable pour pouvoir définir l'énergie du signal  $v$ .

4. acronyme de "power spectral density"

La représentation de  $\Phi(v)$  en fonction de  $f$  est ce qu'on appelle le *spectre* du signal. Elle exprime la puissance que contient le signal pour chaque fréquences  $f$ . L'égalité de Parseval indique alors qu'il existe deux manières de représenter l'énergie totale  $E(v)$  que contient le signal selon qu'on considère sa représentation temporelle ou fréquentielle :

$$E(v) = \lim_{f \rightarrow \infty} \int_{-f}^f \Phi v(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |v|(t)^2 dt \quad (\text{A.32})$$

Il est commode d'exprimer cette moyenne quadratique temporelle *et* fréquentielle sous forme d'une *valeur efficace* ou «RMS» pour «Root Mean Square» :

$$v_{\text{RMS}} = \sqrt{E(v)} \quad (\text{A.33})$$

Dans le cas d'un signal échantillonné, on a seulement accès à la densité spectrale de puissance exprimée aux fréquences  $f_j$  notée  $\Phi(v)_j = (f_j)$ . Comme la fonction  $\hat{v}_N(f)$  est  $F_s$ -périodique, il est impossible de distinguer dans le spectre la contribution des fréquences  $f$  et  $F_s - f$ . C'est ce qu'on appelle le phénomène de "repliement du spectre" (aliasing en anglais). Afin de ne pas être gêné par ce phénomène, la fréquence d'échantillonnage  $F_s$  doit être supérieure ou égale au double de la plus haute fréquence que l'on souhaite capter dans le spectre : c'est le théorème de Nyquist-Shannon. D'autre part, comme dans les cas que nous étudions le signal est réel, le spectre est symétrique par rapport à la valeur  $F_s/2$  : seules les  $N/2$  premières valeurs du spectre donnent une information utile.

La longueur totale d'observation du signal,  $T = (N-1)/F_s$ , est le paramètre qui a le plus d'influence sur les caractéristiques du spectre. En effet, calculer la transformée de Fourier discrète du signal par la formule (A.29) revient à calculer la transformée de Fourier du produit du signal  $v$ , discrétisé sur une durée illimitée, avec ce qui est appelé une *fenêtre rectangulaire*. Celle-ci représente un signal unitaire pour  $t \in [t_0, t_N = t_0 + T]$  et nul pour les autres valeurs de  $t$ . La transformée de Fourier de ce produit est égale à la convolution des transformées de Fourier du signal illimité et de la fenêtre. Le spectre obtenu à partir de (A.29) ne représente donc pas le spectre réel du signal  $v$ , mais un spectre altéré par le spectre de la fenêtre. Celui-ci comporte un pic central de largeur  $\Delta f_L$  et des lobes secondaires. La largeur du pic central influe sur la *résolution fréquentielle* : la transformée de Fourier discrète ne peut distinguer deux fréquences discrètes que si elles sont écartées de plus de la moitié de la largeur  $\Delta f_L$  du pic central. Cela se traduit par la relation sur l'écart dimensionnel  $\Delta f$  :

$$\Delta f > \frac{\Delta f_L}{2} \quad (\text{A.34})$$

La relation précédente donne donc une valeur limite de  $\Delta f$  en fonction de la durée d'observation  $T$ . Les lobes secondaires ont eux une influence sur la répartition d'énergie entre les différentes fréquences, c'est-à-dire sur les valeurs relatives des  $P_j$ . Ils induisent l'apparition d'énergie là où il n'y en a pas dans le spectre réel (non fenêtré). Ceci est d'autant plus accentué que le rapport entre l'amplitude du pic principal du spectre de la fenêtre et de son premier lobe secondaire est faible.

Selon que le problème de la résolution fréquentielle ou de la discrimination des amplitudes est le plus critique, on utilise différentes fenêtres. Le tableau A.1 donne les valeurs asymptotiques (lorsque  $N \rightarrow +\infty$ ) des caractéristiques des principales fenêtres utilisées.

La formule (A.30) calcule la transformée de Fourier en  $N$  points fréquentiels. Il arrive qu'on veuille calculer cette transformée en un nombre de points fréquentiels  $K$  plus important. Cela est souvent le cas lorsqu'on utilise les algorithmes de transformée de Fourier rapide (FFT), qui sont les plus rapides lorsque le nombre de points de calcul est un multiple de 2. Cela permet aussi d'obtenir un tracé du spectre sur plus de points, et ainsi d'avoir une visualisation plus "lisse". Mais il faut bien être conscient que cela ne change rien à la précision intrinsèque de la transformée de Fourier, et donc à sa résolution fréquentielle. La transformée de Fourier exprimée aux  $K > N$  points fréquentiels  $f_k = F_s k/K$ , où  $k = 0 \dots K-1$ , est donnée par :

$$\hat{w}_k = \hat{v}_N(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi kn/K} \quad (\text{A.35})$$

	$\Delta f_L$	$A(\text{dB})$
rectangulaire	$2/(T)$	-13
Hahn	$4/(T)$	-32
Hamming	$4/(T)$	-43
Blackman	$6/(T)$	-59

TABLE A.1 – Largeur  $L$  du lobe principal en fonction de la durée d’observation, et rapport  $A$  entre la densité spectrale de puissance du pic principal et du premier lobe secondaire (en dB).

Alors que d’après (A.30), on a  $\hat{v}_j = \hat{v}_{j+N}$  pour  $j = 0 \dots N-1$ , la relation (A.36) montre que  $\hat{w}_k = \hat{w}_{k+K}$  pour  $k = 0 \dots K-1$ .

Pour les signaux expérimentaux que nous présentons dans ce manuscrit, la fréquence d’échantillonnage est toujours suffisamment élevée pour que la fréquence de coupure donnée par le théorème de Shannon soit largement plus grande que celle des instabilités hydrodynamiques ou de l’acoustique que nous souhaitons observer. En revanche, dans le cas du montage VALDO, certaines mesures effectuées à une fréquence d’acquisition  $F_s = 4000$  s sur une durée de l’ordre de la seconde conduisent à une résolution fréquentielle maximale théorique de l’ordre du Hertz. Pour des visées théoriques où nous recherchons des modes séparés d’une dizaine de Hertz, cela reste acceptable. En revanche, dans le cas de simulations numériques directes, le temps de calcul élevé fait que l’on rechigne à poursuivre un calcul sur plus de quelques dixièmes de secondes de temps physique, ce qui nous empêche d’effectuer des transformées de Fourier avec une précision raisonnable. C’est pourquoi nous préférons dans ce cas nous tourner vers les méthodes paramétriques telles que l’analyse Haute Résolution.

### Algorithme PWELCH

Dans le cas d’un montage expérimental tel que le montage VALDO pour la mesure des instabilités pariétales apparaissant dans les conduits à parois débitantes, la théorie de stabilité linéaire suggère la présence de plusieurs raies spectrales bien séparées dans le spectre des fluctuations de vitesse mesurées dans les zones où l’écoulement est laminaire et les instabilités pariétales d’amplitude suffisamment élevées. Or, il existe toujours des biais par rapport à cette représentation idéale : la présence de bruit de mesure dues par exemple aux vibrations des capteurs ou au circuit d’acquisition, mais également des fluctuations de vitesse additionnelles dénotant la présence de turbulence résiduelle par exemple ou de bruit d’injection. On cherche donc à calculer une représentation spectrale indépendante des variations aléatoires de ces biais. C’est l’objectif de l’algorithme de Welch [93] qui est utilisable directement par la fonction PWELCH de Matlab.

On considère un signal  $v$ , stochastique ou non,<sup>5</sup> contenant  $N$  acquisitions à la fréquence d’échantillonnage  $F_s$ . On récupère alors  $K$  signaux de la forme  $v_k(t_n) = v(t_n)w(t_n)$ , où  $w$  est une fenêtre d’acquisition<sup>6</sup> de taille  $N_w$  (pour «window» en anglais). Afin d’augmenter le nombre de sous-fenêtres, on peut introduire un nombre  $n_o$  de points de chevauchement (pour «overlap»), ce qui conduit à  $K = (N - n_o)/(N_w - n_o)$ . Sur chaque sous-fenêtre, on calcule la transformée de Fourier  $\hat{v}_{N_w}^k(f_j)$  du signal  $v_k$  exprimé aux seuls points où la fenêtre d’observation n’est pas nulle, notés  $(t_1^k, \dots, t_{N_w}^k)$  puis sa densité spectrale de puissance  $\Phi(v)_{N_w}^k(f_j)$ . On obtient alors une densité spectrale de puissance estimée

5. Un signal stochastique contient une information spectrale qui dépend de manière aléatoire de l’instant autour duquel on le mesure. La turbulence, par exemple, peut être vue comme un phénomène stochastique. Cependant, il faut distinguer les phénomènes dont le spectre moyenné sur plusieurs réalisations tend vers une valeur fixe, de ceux qui n’ont pas cette propriété (comme un bruit blanc par exemple, dont la densité spectrale de puissance est infinie).

6. Dans notre cas il s’agit d’une fenêtre de Hamming.

définie comme la moyenne de ces densités spectrales de puissance exprimée aux fréquences  $f_j$  :

$$\Phi_e(v)(f_j) = \frac{F_s}{NK} \sum_{k=1}^K \Phi(v)_{N_w}^k(f_j) \quad (\text{A.36})$$

Dans le cas de phénomènes stochastiques, Welch montre que cette estimation exprimée en une fréquence  $f_j$  tend, quand on augmente le nombre de réalisations, vers la convolution entre la densité spectrale de puissance de la fenêtre d'acquisition et de la densité spectrale de puissance du signal exprimée en  $f_j$ . Dans le cas où il existe dans le signal des bruits de mesure ou des événements physiques parasites, on obtient donc une représentation spectrale en partie filtrée, qui ne laisse apparaître que les raies correspondant à des modes discrets et la puissance associée aux phénomènes stochastiques. Notons de plus que la normalisation de la densité spectrale estimée introduite plus haut permet d'écrire l'approximation

$$E(v) \approx \sum_{j=1}^N \Phi v_e(f_j) \quad (\text{A.37})$$

ce qui permet de relier directement cette estimation à la valeur RMS du signal en question.

### Transformée de Fourier à fenêtre glissante

Lorsqu'au contraire on a besoin de calculer le spectre d'un signal sensé varier lentement dans le temps, quitte à obtenir une représentation plus ou moins bruitée, on utilise la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Comme dans le cas de l'algorithme de Welch, le signal contenant  $N$  acquisitions est divisé en  $K$  fenêtres glissantes de taille  $N_w$  avec  $n_o$  points de chevauchement. Sur chacun de ces intervalles de taille  $N_w$ , on effectue une transformée de Fourier discrète du signal multiplié par la fenêtre d'observation.<sup>7</sup> Cependant, les densités spectrales de puissance locales  $\Phi(v)_{N_w}^k$  ne sont pas moyennées, mais permettent d'exprimer une densité spectrale de puissance sous la forme  $\Phi(v)_{N_w}^k = \Phi(v)(t_k, f_j)$  à l'instant  $t^k = (t_1^k + t_{N_w}^k)/2$  correspondant au milieu de la fenêtre et à la fréquence  $f_j$ . On obtient alors un diagramme temps-fréquence, l'échelle de la légende variant en fonction de l'amplitude de la densité spectrale de puissance.

Cette méthode étant basée sur la transformée de Fourier discrète, elle est elle aussi concernée par la résolution fréquentielle. Il faut donc faire un compromis temps/fréquence. Plus la taille  $\Delta\tau$  des sous-intervalles est petite, plus la résolution temporelle est bonne, mais la résolution fréquentielle est dégradée, puisque  $\Delta f$  est proportionnelle à  $1/\Delta\tau$  (la constante de proportionnalité dépendant du type de fenêtre). Si on souhaite avoir une bonne résolution fréquentielle, il faut choisir des intervalles de temps grands, mais on perd alors de la sensibilité temporelle.

### A.2.2 Analyse Haute Résolution

Les méthodes dite à *Haute Résolution* (HR), présentent l'avantage de s'affranchir de la limitation sur la résolution fréquentielle de l'analyse de Fourier. Contrairement à cette dernière, qui représente le signal dans un domaine transformé (celui des fréquences), les méthodes HR sont des méthodes d'estimation *paramétrique*, au sens où elles supposent que le signal suit un modèle d'évolution donné dont on cherche à évaluer les paramètres. Dans notre cas, nous utilisons le modèle de signal dit *ESM* (Exponential Sinusoidal Model), qui représente le signal comme une somme de sinusoïdes modulées exponentiellement :

$$v(t) = \sum_{k=0}^{K-1} A_k z_k^t \quad (\text{A.38})$$

---

7. Encore de Hamming dans notre cas



où  $A_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  représente une amplitude et où les pôles  $z_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  représentent des sinusoïdes de fréquence  $f_k \in \mathbb{R}$  modulées exponentiellement :

$$z_k = e^{\delta_k} e^{2i\pi f_k}$$

Le nombre  $K$  est appelé l'ordre du modèle. Pour évaluer les paramètres de ce modèle, c'est-à-dire les amplitudes  $A_k$  et les pôles  $z_k$ , nous utilisons l'algorithme développé par Roland Badeau au cours de sa thèse [14]. C'est une adaptation de l'algorithme ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques), développé par Roy *et al.* [76]. Les détails de tous ces algorithmes ne sont pas donnés ici, ils peuvent être trouvés dans la thèse de Roland Badeau.

Le principe général consiste à observer le signal sur des fenêtres temporelles de longueur  $N_w \geq K$ , de manière similaire à ce qui est fait pour la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Ainsi, pour tout instant d'analyse  $t_a$ , on considère la fenêtre temporelle  $\{t_a - l + 1 \dots t_a + n - 1\}$  où les entiers  $n$  et  $l$  sont tels que  $N_w = n + l - 1$  et on définit le vecteur  $\mathbf{v}(t_a) = [v(t_a - l + 1), \dots, v(t_a + n - 1)]^T$ , de dimension  $N_w$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $\mathbf{x}(z) = [1, z, \dots, z^{N_w-1}]^T$ . On a donc  $\mathbf{v}(t_a) = \sum_{k=0}^{K-1} A_k z_k^{t_a-l+1} \mathbf{x}(z_k)$ . Cette égalité peut être réécrite sous la forme d'un produit :

$$\mathbf{v}(t_a) = \mathbf{X}^{N_w} \mathbf{J}^{t_a-l+1} \mathbf{A}$$

où  $\mathbf{A} = [A_0, \dots, A_{K-1}]^T$  est un vecteur de dimension  $K$ ,  $\mathbf{J} = \text{diag}(z_0, \dots, z_{K-1})$  est une matrice diagonale de dimension  $K \times K$  et  $\mathbf{X}^{N_w} = [\mathbf{x}(z_0), \dots, \mathbf{x}(z_{K-1})]$  est une matrice de Vandermonde de dimension  $N_w \times K$  :

$$\mathbf{X}^N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^{N_w-1} & z_1^{N_w-1} & \cdots & z_{K-1}^{N_w-1} \end{bmatrix}$$

L'algorithme de la méthode HR consiste à estimer les pôles  $z_k$  et les amplitudes  $A_k$  en utilisant des propriétés de cette matrice de Vandermonde.

Au final, on peut associer à chaque instant d'analyse  $t_a$   $K$  fréquences  $f_k$  et taux d'atténuation  $\delta_k$ , ainsi qu'une amplitude  $A_k$ . Plus cette dernière est grande, plus la sinusoïde modulée associée est importante dans le signal. Ces résultats sont représentés sous la forme d'un "HRogram" qui, par analogie au spectrogramme de la méthode de transformée de Fourier à fenêtre glissante, est un diagramme temps/fréquence dont l'échelle de la légende varie selon les valeurs des amplitudes  $A_k$  estimées.

On montre alors qu'il est aisé, contrairement aux méthodes basées sur la transformée de Fourier, de séparer par exemple deux fréquences de 500 et 600 Hz dans un signal acquis sur 0.02 s à la fréquence d'acquisition de 44100 Hz, par une analyse HR portant sur des fenêtres de  $N_w = 128$  échantillons décalées l'une de l'autre de  $N_w/8$  points. Cependant, les choses peuvent être plus délicates dans des cas qui ne sont pas idéalisés. Prenons l'exemple d'un calcul de vérification de modes tels que ceux présentés en section 5.2. Nous cherchons à tester une instabilité hydrodynamique de fréquence  $f_{VSP} = 222$  Hz, excitant potentiellement une acoustique longitudinale dont les deux premiers modes ont pour fréquence  $f_{AC,1} = 360$  Hz et  $f_{AC,2} = 1080$  Hz. Conformément à ce qui est traditionnellement admis pour les essais expérimentaux, la mesure de la pression au fond avant doit traduire l'ensemble de ces phénomènes.

Nous nous intéressons à des analyses Haute Résolution de ce signal effectuées avec diverses valeurs de la fréquence de rééchantillonnage  $F_s$  et de la taille de fenêtre  $N_w$ . Nous notons  $T_w = N_w/F_s$  l'intervalle de temps associé à une fenêtre. Le tableau A.2 donne tous ces paramètres, ainsi que le nombre d'exponentielles sur lesquelles l'algorithme permet de décomposer le signal. La figure A.1 décrit les HRogrammes ainsi obtenus. On remarque alors que les fréquences distinguées dépendent en premier lieu de l'intervalle de temps des fenêtres  $T_w$  : par exemple,  $T_w$  vaut identiquement  $1.16 \cdot 10^{-2}$  s pour les HRogrammes tracés en figures A.1(b), A.1(e) et A.1(f) qui indiquent tous la présence des deux modes

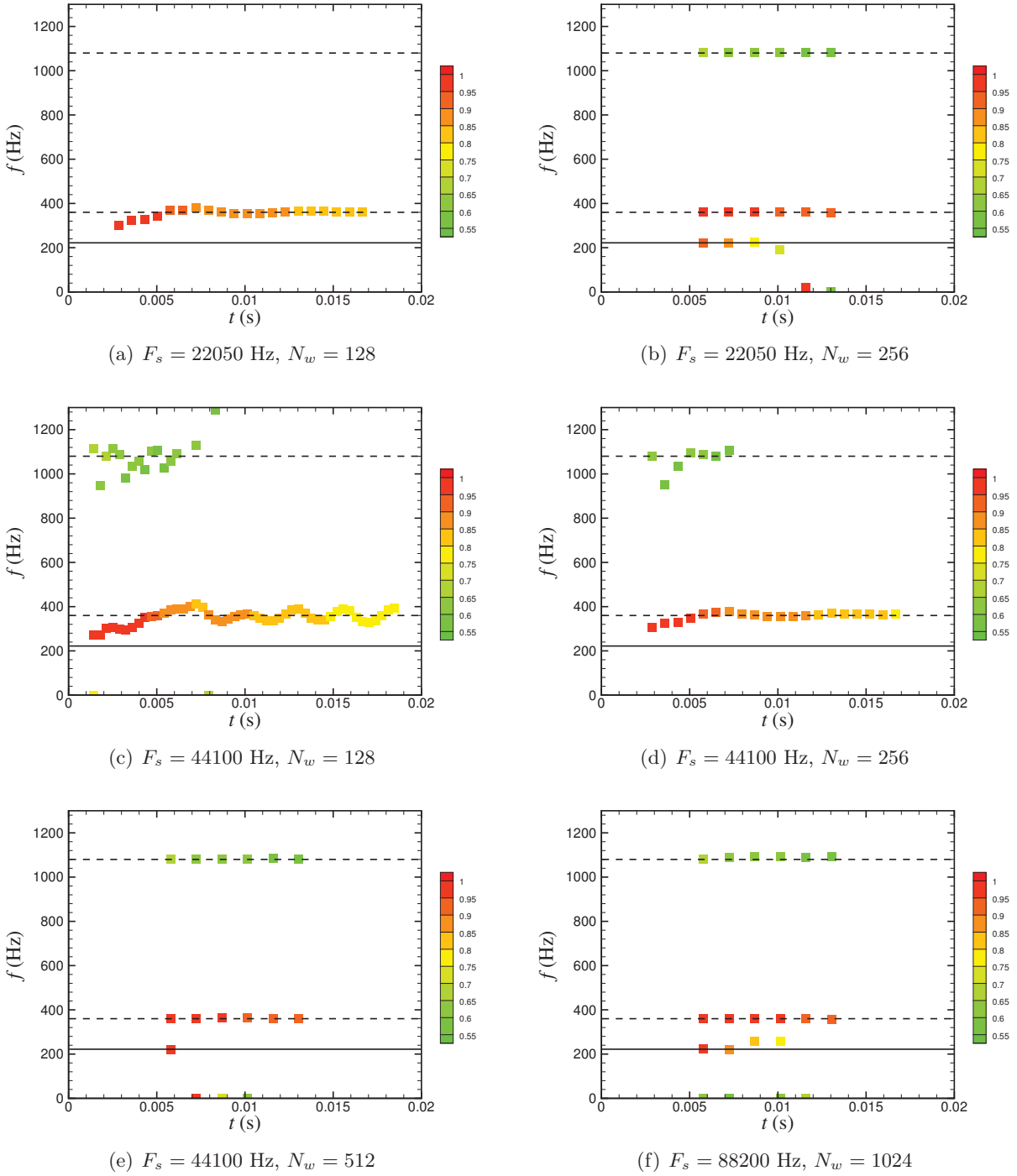


FIGURE A.1 – HRogramme du signal de pression au fond avant issu d’une DNS sur MPS simplifié pour lequel les deux premières fréquences acoustiques sont  $f_{AC,1} = 360$  Hz et  $f_{AC,2} = 1080$  Hz ( - - ) et le mode hydrodynamique attendu a pour fréquence  $f_{VSP} = 222$  Hz. Les couleurs traduisent l’amplitude  $A_k$  des modes exponentielles modulés.

acoustiques et du mode hydrodynamique. Notons qu’il s’agit également des représentations dont l’ordre  $K$  est le plus élevé. Au contraire, les représentations effectuées sur des fenêtres de  $T_w = 5.8 \cdot 10^{-3}$  s et  $T_w = 2.9 \cdot 10^{-3}$  s sont d’ordre  $K$  moins élevé, ne permettent absolument pas de distinguer la première fréquence acoustique du mode hydrodynamique et rendent compte difficilement de la présence du se-

$F_s$ (Hz)	$N_w$	$T_w$ (s)	$K$
22050	128	$5.8 \cdot 10^{-3}$	2
22050	256	$1.16 \cdot 10^{-2}$	22
44100	128	$2.9 \cdot 10^{-3}$	8
44100	256	$5.8 \cdot 10^{-3}$	6
44100	512	$1.16 \cdot 10^{-2}$	14
88200	1024	$1.16 \cdot 10^{-2}$	17

TABLE A.2 – Paramètres utilisés pour obtenir les HRogrammes présentés en figure A.1.

cond mode acoustique. On retrouve, à une autre échelle, la contrainte de la durée physique du signal à analyser qui doit être supérieure à un certain seuil pour être valide. Dans le cas du HRogramme, il semble nécessaire d'avoir des fenêtres portant sur au moins quatre périodes de la plus petite fréquence du signal pour que celle-ci soit correctement calculée. Autrement, l'analyse Haute Résolution tend à donner la fréquence moyenne de modes trop proches. Notons enfin que le manque de précision des HRogrammes obtenus sur des fenêtres trop petites est également visible sur les reconstitutions du signal analysé : en figure A.2, le signal reconstitué avec  $F_s = 44100$  Hz et  $N_w = 256$  ne suit pas correctement le signal original, contrairement à celui rééchantillonné à la fréquence  $F_s = 22050$  Hz.

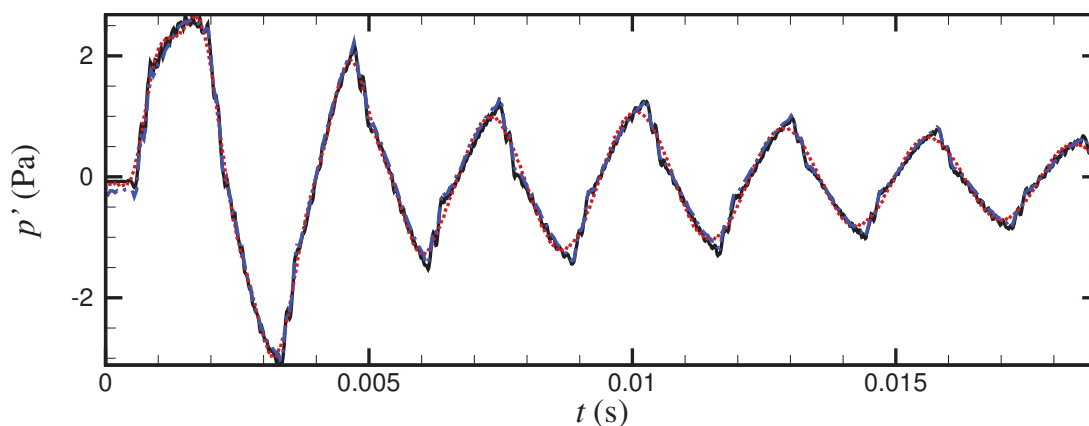


FIGURE A.2 – Signal de pression instationnaire au fond avant obtenu par DNS (—) et reconstitution par analyse Haute Résolution du même signal rééchantillonné à  $F_s = 44100$  Hz ( $\cdot \cdot \cdot$ ) et à  $F_s = 22050$  Hz ( $- - -$ ) pour une taille de fenêtre  $N_w = 256$ .



## Annexe B

# Compléments pour la simulation numérique directe

### B.1 Compléments théoriques sur le code CEDRE

#### B.1.1 Equations d'Euler compressibles monodimensionnelles

Du point de vue numérique, la résolution, par la méthode des volumes finis, des équations de Navier-Stokes est en fait très proche de celle des équations d'Euler pour un écoulement compressible. En effet, nous avons remarqué la séparation en *flux Euler* et *flux visqueux* des flux apparaissant dans leur écriture conservative. La discrétisation des flux Euler est alors primordiale car c'est elle qui permet de résoudre les phénomènes compressibles (acoustique, chocs éventuels) et règle la convection de structures éventuellement dues à la viscosité. Nous présentons donc ici rapidement une formulation des équations d'Euler compressibles monodimensionnelles que nous utilisons notamment dans ce manuscrit pour expliquer les problèmes rencontrés dans les écoulements à faible nombre de Mach et la formulation des conditions aux limites.

Pour cela, introduisons les jeux de variables primitives  $\mathbf{V} = (\rho, u, e)^T$  et conservatives  $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho e)^T$ , où  $u$  est la vitesse du fluide suivant  $x$ ,  $\rho$  sa masse volumique et  $e$  son énergie totale telle que la pression  $p$  soit égale à  $(\gamma - 1)\rho(e - u^2/2)$ ,  $\gamma$  désignant le rapport des chaleurs spécifiques. On notera également  $c = \gamma p/\rho$  la vitesse du son. La formulation des équations d'Euler en variables primitives s'écrit alors

$$\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{V} = 0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \rho^{-1} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

On montre alors que la matrice  $\mathbf{A}$  est diagonalisable à valeurs propres réelles et peut donc se mettre sous la forme  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}$  avec

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho c & 1 \\ 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & \rho c & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} u - c & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u + c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} c^2/2 & 1 & c^2/2 \\ -\rho c/2 & 0 & \rho c/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

En particulier, en multipliant à gauche les équations (B.5), on obtient le système caractéristique sui-

vant :

$$\begin{cases} (\partial_t p - \rho c \partial_t u) + (u - c)(\partial_x p - \rho c \partial_x u) & = 0 \\ (\partial_t p - c^2 \partial_t \rho) + u(\partial_x p - c^2 \partial_x \rho) & = 0 \\ (\partial_t p + \rho c \partial_t u) + (u + c)(\partial_x p + \rho c \partial_x u) & = 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Cela signifie qu'il existe trois ondes d'amplitude constante  $W_1 = p - \rho c u$ ,  $W_2 = p - c^2 \rho$  et  $W_3 = p + \rho c u$  sur des droites caractéristiques  $dx = (u - c)dt$ ,  $dx = udt$  et  $dx = (u + c)dt$  respectivement et vérifiant sur ces droites les équations

$$\begin{cases} \partial_t W_1 + (u - c) \partial_x W_1 & = 0 \\ \partial_t W_2 + u \partial_x W_2 & = 0 \\ \partial_t W_3 + (u + c) \partial_x W_3 & = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Dans le cas d'un écoulement très faiblement compressible, où la vitesse convective locale  $u$  est très faible devant la vitesse du son  $c$ , ces ondes se propagent donc à des vitesses très différentes. C'est ce qui conduit à l'idée d'un *préconditionnement bas-Mach* afin de résoudre un problème mieux conditionné dans le sens où ses valeurs propres sont plus rapprochées.

### B.1.2 Préconditionnement bas-Mach

Dans le cas d'une intégration par la méthode des volumes finis, on résout plutôt le problème sous forme conservative

$$\partial_t \mathbf{Q} + \partial_x (\mathbf{F}(\mathbf{U})) = \partial_t \mathbf{Q} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{U} = 0 \quad (\text{B.5})$$

où  $\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2, \rho u(e + p/\rho))^T$  est le vecteur de flux des équations d'Euler et  $\tilde{\mathbf{A}}$  la jacobienne du flux par rapport aux variables primitives  $\mathbf{U}$ . Supposons vouloir résoudre ce problème sur un domaine  $[a, b]$  sur lequel une discrétisation spatiale de sommets dont on note  $c_i$  les centres de cellules,  $x_i - 1/2$  les sommets et  $\delta x_i$  les pas pour  $i = 1 \dots N$ . L'intégration de la relation (B.5) sur une cellule donne une relation de la forme

$$\partial_t \bar{\mathbf{Q}}_i + (F_{i+1/2}(\mathbf{V}_k) - F_{i-1/2}(\mathbf{V}_k)) = 0 \quad (\text{B.6})$$

où  $\bar{\mathbf{Q}}(c_i)$  est la moyenne des variables conservatives sur la cellule, et  $F_{i+1/2}(\mathbf{V}_k)$  le flux sortant par l'interface au point  $x_{i+1/2}$ , exprimé en fonction des variables primitives évaluées au centre des cellules du domaines  $\mathbf{V}_k$ . Les méthodes de preconditionnement bas-Mach s'appliquent surtout aux schémas de type Roe ou «Flux difference splitting», qui consistent à évaluer le flux aux interfaces  $F_{i+1/2}$  sous la forme

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{V}^G, \mathbf{V}^D) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{V}^G) + \mathbf{F}(\mathbf{V}^D)}{2} - \mathcal{D}(\mathbf{V}_{\text{moy}}, \mathbf{V}^G, \mathbf{V}^D) \quad (\text{B.7})$$

où  $\mathbf{V}^G$  et  $\mathbf{V}^D$  sont les variables primitives calculées du côté gauche et du côté droit de l'interface, et  $\mathcal{D}$  un opérateur de décentrement dépendant explicitement d'une moyenne  $\mathbf{V}_{\text{moy}}$  des états gauche et droit en plus de ces états eux-mêmes. Dans le cas du schéma de Roe, l'opérateur de décentrement prend la forme

$$\mathcal{D}(\mathbf{V}_{\text{moy}}, \mathbf{V}^G, \mathbf{V}^D) = \mathbf{R} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{L} (\mathbf{V}^D - \mathbf{V}^G) \quad (\text{B.8})$$

où  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{L}$  sont les matrices des vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , et  $|\mathbf{\Lambda}|$  la matrice diagonale des valeurs absolues des valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , toutes ces matrices, définies en équation B.2, sont évaluées en  $\mathbf{V}_{\text{moy}}$  (qui peut être soit une moyenne arithmétique entre les états gauche et droit, soit la moyenne au sens de Roe qui permet de résoudre de manière exacte les chocs).

Le preconditionnement bas-Mach consiste alors à introduire une matrice  $\mathbf{P}$  telle que la matrice  $\mathbf{P}\mathbf{A}$  ait des valeurs propres du même ordre de grandeur. En introduisant le paramètre  $\beta$  défini par

$$\beta = \min(\max(M^2, \eta), 1) \quad (\text{B.9})$$

la matrice  $\mathbf{P}$  peut être prise égale à

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} \left( \frac{1}{1-\beta} \mathbf{I} \right) \mathbf{L} \quad (\text{B.10})$$

notons que le coefficient  $\beta$  est défini localement, en fonction d'un paramètre  $\eta$  qui règle le seuil du pré-conditionnement. Par exemple, quand  $\eta$  est inférieur au nombre de Mach minimal de l'écoulement, on a directement  $\beta = M^2$ , ce qui donne des valeurs propres de la matrice jacobienne préconditionnée égales à  $u/(M(M+1))$ ,  $u/(M-1)(M+1)$  et  $u/(M(M-1))$ .

### B.1.3 Conditions aux limites et réflexions acoustiques

Revenons au système des équations d'Euler écrites sous forme caractéristique (équations (B.3)). Il est possible d'interpréter cette écriture de la manière suivante : supposons connue une solution stationnaire  $\mathbf{V}_0 = (\rho_0, u_0, p_0)^T$  du problème, et cherchons-en les petites perturbations  $\mathbf{V}'$ . En posant  $W'_1 = p' - \rho_0 c_0 u'$ ,  $W'_2 = p' - c_0^2 \rho'$  et  $W'_3 = p' + \rho_0 c_0 u'$ , il vient que  $W'_1, W'_2$  et  $W'_3$  sont bien des ondes d'amplitude constante sur des lignes définies localement par  $dx/dt = u_0 - c_0$ ,  $dx/dt = u_0$  et  $dx/dt = u_0 + c_0$ . Dans le cas d'un MPS simplifié (dont on donne ici une représentation monodimensionnelle), les conditions aux limites reviennent à imposer l'attachement de la vitesse au fond avant, c'est-à-dire  $u' = 0$ , et à fixer la valeur de la pression en sortie, c'est-à-dire  $p' = 0$ . Ces deux conditions sont équivalentes à  $W'_2 = 0$  et  $W'_3 - W'_1 = 0$  au fond avant et  $W'_1 + W'_3 = 0$  en sortie. Par conséquent, une perturbation qui remonte l'écoulement à la vitesse  $u_0 - c_0$  se réfléchit au fond avant avec la même amplitude et la même phase en une onde qui descend l'écoulement à la vitesse  $u_0 + c_0$ ; de même, une perturbation (onde acoustique ou détachement tourbillonnaire) qui est sur le point de sortir du domaine de calcul à la vitesse  $u_0 + c_0$  génère une onde réfléchie de même amplitude mais en opposition de phase qui suit la troisième caractéristique.

On peut accepter ce jeu de réflexions d'ondes dans nos simulations numériques afin de nous rapprocher du cas d'un MPS réel où les ondes acoustiques et les détachements tourbillonnaires impactant le col de la tuyère se réfléchissent en ondes de pression remontant l'écoulement. Cependant, le solveur CHARME présente une deuxième possibilité qui permet d'éviter les réflexions en sortie : on parle de conditions non-réfléchissantes, introduites par Thompson [82] puis Poinot et Lele [69]. L'implémentation la plus récente effectuée dans CEDRE est en outre inspirée de [57].

Si l'on cherche à imposer une non-réflexion totale, il suffit de «couper» la caractéristique sortante correspondant à l'onde d'amplitude  $W'_1$ , ce qui s'écrit <sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_1 = (u - c) (\partial_x p - \rho c \partial_x u) = 0 \quad (\text{B.11})$$

Or, les équations d'Euler ne demandent en tout et pour tout qu'une seule condition en sortie, et il demeure naturel d'imposer une valeur de la pression  $p_o$ . C'est pourquoi Poinot et Lele [69] préconisent une condition de la forme

$$\mathcal{L}_1 = K(p - p_o) \quad \text{avec} \quad K = \frac{\sigma c(1 - M^2)}{L} \quad (\text{B.12})$$

où  $L$  est une distance caractéristique du domaine de calcul (pour nous sa longueur), et  $\sigma$  une constante généralement prise égale à  $1/4$ . Notons que dans CEDRE, cette relation est corrigée pour prendre en compte le formalisme particulier des conditions aux limites relaxées en temps. En outre, cette relation valable dans le cas d'écoulements fortement unidirectionnels et *a fortiori* monodimensionnels comme les équations d'Euler 1D doit être corrigée en toute généralité par la prise en compte de termes transverses. Cette écriture modifiée est donnée dans [57]. Dans notre cas, cette condition non-réfléchissante est uniquement utilisée dans le cadre de simulations instationnaires dans lesquelles on recherche la réponse du système à une perturbation initiale en l'absence d'acoustique.

1. nous avons pris garde de faire en sorte que la caractéristique entrante soit bien indiquée par 1 comme dans la convention prise initialement par Thompson.



## B.2 Utilisation des conditions aux limites hétérogènes et instationnaires dans CEDRE

### B.2.1 Terminologie utilisée

La définition d'une condition aux limites hétérogène et/ou instationnaire dans le solveur CHARME se fait par la lecture d'un fichier nécessairement de la forme `psl_domaine_LIMITE.0` où `LIMITE` est la limite du domaine utilisateur `domaine` considérée, ke nom du domaine et de la limite étant ceux définis dans le fichier `epicea.xml`. Ce fichier est écrit dans le format défini dans la bibliothèque d'entrées-sorties auxiliaires IOCEDRE qui est utilisé pour d'autres fichiers. Il permet la définition et l'utilisation d'objets interprétables par le code dans la mesure ou un type correspondant, au sens du langage fortran 90, a été défini dans le programme CEDRE. Ces objets sont appelés *variables* et présentent les champs suivants :

- un *nom*;
- un *type*, cohérent avec le nom du type correspondant défini dans cedre dans un module de la forme `mod_type.f90`;
- des *paramètres* qui sont des ensembles d'entiers et de réels intrinsèques à la variable donnée;
- des *sous-variables* qui sont des ensemble d'entiers et de réels pouvant être définis en interaction avec d'autres variables (typiquement, un champ de vitesse d'injection qui peut dépendre de variables définissant le temps et l'espace);
- une *dimension*, qui correspond au nombre d'enregistrements des sous-variables reliées à la variable;
- et un *nombre de partitions* qui permet de définir ces enregistrements en plusieurs parties.

Les paramètres et les sous-variable sont définis par les données suivantes : nom, type (réel ou entier), codage (nombre d'octets), nombre de champs et nom de chaque champ.

Une variable est toujours définie en deux temps : d'abord dans un *champ de définition*, où sont récupérés son nom, son type, ses paramètres (définitions et valeurs), sa dimension, son nombre de partitions et la définition de ses sous-variables ; ensuite dans un champ appelé *bloc* où sont récupérées les enregistrements des ses sous-variables, enregistrements qui peuvent d'ailleurs dépendre des sous-variables de plusieurs variables.

### B.2.2 Exemple d'une condition hétérogène

Voici un exemple concret de fichier `psl_cylindre_PAROI.0` utilisé pour une condition hétérogène en paroi. D'abord, l'entête contient les deux lignes suivantes :

```
1 ===== psl_cylindre_PAROI.0 : VERSION 5 =====
2                2                                * DESCRIPTEURS DE VARIABLES
```

Dans la première n'est lue que la version de la bibliothèque IOCEDRE utilisée, la seconde donne le nombre de variables définies et enregistrées dans le fichier — ici une variable d'espace et une variable donnant les valeurs aux limites imposées.

Ensuite vient le champ de définition de la première variable de type `grille_affine` permettant de stocker les coordonnées où sont imposées les valeurs aux limites. Son nom n'a pas d'importance :

```
1 -----
2                1                                * no DE VARIABLE, NOM ET TYPE :
3 parallelepipede
4 grille_affine
5                9                                - nbre DE PARAMETRES ET LISTE :
6 0                r                8                3                ox oy oz
7                0.                0.                0.
8 v1                r                8                3                v1x v1y v1z
```

```

 9          1.          0.          0.
10 v2      r          8          3          v2x v2y v2z
11          0.          1.          0.
12 v3      r          8          3          v3x v3y v3z
13          0.          0.          1.
14 min     r          8          3          min1 min2 min3
15          0.          0.030000  0.
16 max     r          8          3          max1 max2 max3
17          0.240000  0.030000  0.
18 nor     i          4          3          nor1 nor2 nor3
19          0          0          0
20 pro     i          4          3          pro1 pro2 pro3
21          0          0          0
22 ms      i          4          3          ms1 ms2 ms3
23          122         1          1
24          122         1          - DIMENSION ET nbre PARTITIONS
25          2          - nbre DE SOUS-VARIABLES ET LISTE :
26 j       i          4          3          j1 j2 j3
27 csisom  r          8          3          csi1 csi2 csi3

```

Les quatre premiers paramètres définissent un repère cartésien par son origine 0 et trois vecteurs **v1**, **v3** et **v3**, chacun composés de trois réels. Par exemple, la ligne 6 indique dans l'ordre le nom du paramètre 0, le fait qu'il contient des réels codés sur 8 octets (**r** puis 8) qui sont au nombre de 3, et nommés **ox**, **oy** et **oz**. Les paramètres **min** et **max** indiquent, dans les coordonnées du repère défini précédemment, les points extrémaux d'un sous-domaine de l'espace (une «boîte»). Le paramètre **nor** permet de définir les points de la grille soit de manière absolue (**nor**= 0), soit relativement aux coordonnées de la boîte (**nor**= 1). Le paramètre **pro** donne les règles d'interpolation de champs définis sur la grille en-dehors de la boîte : mise à zéro (**pro**= 0), extrapolation de la valeur du champ à la limite de la boîte (**pro**= 1) ou condition de périodicité (**pro**= 1). Le paramètre **ms**, enfin, donne le nombre de points définis dans chaque direction. Vient enfin la définition des sommets de la grille, d'abord par son nombre et son nombre de partitions (ligne 24), et par la donnée d'un triplet d'indices **j**= (**j1**,**j2**,**j3**) et des coordonnées suivant chaque vecteur de la grille **csisom**= (**csi1**,**csi2**,**csi3**).

A supposer qu'un champ soit défini sur cette grille, il existe une bibliothèque **GEODON**, contenant notamment le module **mod\_grille\_affine.f90**, qui dispose de sous-routines permettant d'interpoler linéairement ce champ vers un nuage de points quelconque. Dans notre cas, il s'agira d'interpoler par exemple les valeurs de vitesse et de température que nous souhaitons imposer sur la limite **PAROI** vers les centre de face de cette limite.

Après, le fichier définit la variable **psl/cylindre/PAROI** de type **psl04** destinée à stocker, comme son nom l'indique, les paramètres de sous-limite imposés à la limite **PAROI** du domaine **cylindre**.

```

1 -----
2          2          * no DE VARIABLE, NOM ET TYPE :
3 psl/cylindre/PAROI
4 psl04
5          0          - nbre DE PARAMETRES ET LISTE :
6          1          1          - DIMENSION ET nbre PARTITIONS
7          5          - nbre DE SOUS-VARIABLES ET LISTE :
8 p       r          8          1          pression
9 T      r          8          1          temperature
10 v      r          8          3          v_x v_y v_z
11 y      r          8          1          y_Air
12 z      r          8          0

```

Ce fichier ne contient que des sous-variable dont n'est défini qu'un seul enregistrement. Ce point *a priori* contre-intuitif s'explique si l'on se rappelle que les sous-variables peuvent dépendre d'autres variables

que celle dans laquelle elles sont définies. Ici, les sous-variables définies dans `psl/cylindre/PAROI` sont bien sûr en relation avec la variable `parallelepiped` précédente dans le sens où on associe chacune de leurs occurrences à un point de la grille. Ces sous-variables sont en fait le jeu d'états (variables<sup>2</sup> primitives ou quantités conservées) dans lequel est écrite la condition aux limites. Dans le cas d'une condition de type 4, il s'agit, dans cet ordre, des variables primitives, soit `p` pour la pression, `T` pour la température, `v` pour la vitesse définie en trois composantes (même si seule la première composante, correspondant à la vitesse normale entrante à la limite, est active), `y` pour les fractions massiques (seule la fraction `y_Air` est définie, en cohérence avec les espèces utilisées dans le fichier `epicea.xml`) et `z` pour les scalaires passifs lorsqu'ils sont définis (toujours en cohérence avec leur nom donné dans `epicea.xml`).

L'étape suivante consiste à enregistrer les valeurs des sous-variables définies dans chaque variable par la lecture de blocs de données. Après l'en-tête suivant, toujours dans le fichier `psl_cylondre_PAROI.0`,

```

1 =====
2           2           * nbre BLOCS DE DONNEES

```

est écrit le bloc correspondant suivant :

```

1 -----
2           1           * no DE BLOC :
3           1           - nbre VARIABLES, PUIS POUR CHAQUE
                VARIABLE : no VARIABLE, no PARTITION, nbre ET LISTE DES SOUS-
                VARIABLES
4           1           1           2           1           2
5           122        - nbre ENREGISTREMENTS, PUIS CONTENU DE
                CHAQUE ENREGISTREMENT :
6           1           3           1           1           1
                3           0.000000      0.03000      0.000000
7           2           3           2           1           1
                3           0.000008      0.03000      0.000000
8           3           3           3           1           1
                3           0.00017       0.03000      0.000000
9           .....

```

Voici quelques explications. Ce bloc donne les enregistrement d'une sous-variable dépendant d'une seule variable : c'est le sens de la ligne 3 (entendre «nombre de variables dont dépend la sous-variable décrite»). La ligne 4 donne le numéro de la variable (n° 1, `parallelepiped`, ici) et la partition concernée, puis le nombre et la liste des sous-variables *dont on donne ici les enregistrements*. Il est en effet possible qu'on ne donne qu'une partie des sous-variables, les autres étant initialisées à 0. Ici, on donne tout, à savoir les 122 enregistrements attendus. À partir de la ligne 6, sont donc rangés, dans l'ordre, l'indice de l'enregistrement, le nombre d'entiers à stocker (ici 3), les entiers en question, le nombre de réels à stocker, et enfin les trois réels en question.

Cela fonctionne de la même manière pour le second bloc définissant la valeur des sous-variables de la variable `psl/cylindre/PAROI` :

```

1 -----
2           2           * no DE BLOC
3           2           - nbre VARIABLES, PUIS POUR CHAQUE
                VARIABLE : no VARIABLE, no PARTITION, nbre ET LISTE DES SOUS-
                VARIABLES
4           1           1           0

```

2. Désolé pour la confusion possible!

```

5          2          1          1          3
6          122          - nbre ENREGISTREMENTS , PUIS CONTENU DE
          CHAQUE ENREGISTREMENT :
7          1          0          0
8          1          0          3          0.000000          0.000000
          0.000000
9          2          0          0
10         1          0          3          0.034187          0.000000
          0.000000
11         3          0          0
12         1          0          3          0.068674          0.000000
          0.000000
13         4          0          0
14         1          0          3          0.103387          0.000000
          0.000000
15         5          0          0
16         1          0          3          0.138247          0.000000
          0.000000
17         6          0          0
18 .....

```

Cette fois-ci, le bloc porte sur des enregistrements liés à deux sous-variables de deux variables différentes : la première partition de la variable 1 (`parallelepiped`) pour laquelle on n'entre toutefois les données d'aucune donnée sous-variable (ce qui est signifié par le dernier 0 en ligne 4) ; la première partition de la variable 2 (`ps1/cylindre/PAROI`) pour laquelle on entre les données d'une sous variable, à savoir la variable 3 (`v`). Viennent après les enregistrements : pour la première variable on donne l'indice de l'enregistrement concerné, puis aucun entier ni réel ; pour la seconde variable on donne encore l'indice de l'enregistrement concerné (qui est toujours 1 puisqu'il n'y en a qu'un) puis aucun entier, puis les trois réels correspondant aux trois composantes de vitesse.

### B.2.3 Passage à une condition hétérogène et instationnaire

Dans le cas d'une condition aux limites instationnaire, il est nécessaire d'ajouter une variable `dates` de type `grille_temporelle` qui fonctionne sur le même principe que les grilles géométriques.

```

1 -----
2          1          * no DE VARIABLE , NOM ET TYPE :
3 dates
4 grille_temporelle
5          4          - nbre DE PARAMETRES ET LISTE :
6 min          r          8          1          tmin
7          0.0
8 max          r          8          1          tmax
9          0.4
10 nor          i          4          1          normalisation
11          0
12 pro          i          4          1          prolongement
13          0
14          2          1          - DIMENSION ET nbre PARTITIONS
15          2          - nbre DE SOUS-VARIABLES ET LISTE :
16 n          i          4          1          etiquette
17 t          r          8          1          temps

```

On remarque simplement l'absence d'origine et de vecteurs puisqu'il s'agit d'une simple droite : on ne définit qu'un minimum et un maximum, les règles de normalisation et de prolongement étant inchangés

par rapport à ce qui a été décrit plus haut. De ce point de vue, les deux sous-variables **n** et **t** sont transparentes. Leurs enregistrements sont donnés dans un bloc de la forme :

```

1 -----
2         1          * no DE BLOC
3         1          - nbre VARIABLES, PUIS POUR CHAQUE
          VARIABLE : no VARIABLE, no PARTITION, nbre ET LISTE DES SOUS-
          VARIABLES
4         1          1          2          1          2
5         2          - nbre ENREGISTREMENTS, PUIS CONTENU DE
          CHAQUE ENREGISTREMENT :
6         1          1          0          1          0.00000
7         2          1          1          1          0.40000
    
```

Ici, on ne donne que deux dates pour obtenir une variation linéaire des paramètres de sous-limite. Reste à définir le bloc d'enregistrement de ces paramètres. Dans le cas d'une limite homogène instationnaire, où la première variable est **dates** et la seconde **psl/cylindre/paroi**, on aura :

```

1 -----
2         2          * no DE BLOC
3         2          - nbre VARIABLES, PUIS POUR CHAQUE
          VARIABLE : no VARIABLE, no PARTITION, nbre ET LISTE DES SOUS-
          VARIABLES
4         1          1          1          0
5         2          1          1          3
6         2          - nbre ENREGISTREMENTS, PUIS CONTENU DE
          CHAQUE ENREGISTREMENT :
7         1          0          0
8         1          0          3          1.000000          0.000000
          0.000000
9         2          0          0
10        1          0          3          1.050000          0.000000
          0.000000
    
```

En effet, les enregistrements portent à la fois sur les indices des dates (ligne 4) et définissent les valeurs de la sous-variable **v** (ligne 5) aux instants correspondants.

Dans le cas d'une condition à la fois hétérogène et instationnaire, il faudra définir trois blocs : un bloc pour les enregistrements donnant les sous-variables de **dates**, un bloc pour ceux donnant les indices et les points de la grille **parallelepiped**, et un troisième bloc donnant la valeur des conditions aux limites en ces instants et en ces points. Les deux premiers sont identiques à ceux présentés précédemment, le troisième donnant :

```

1 -----
2         3          * no DE BLOC
3         3          - nbre VARIABLES, PUIS POUR CHAQUE
          VARIABLE : no VARIABLE, no PARTITION, nbre ET LISTE DES SOUS-
          VARIABLES
4         1          1          0
5         2          1          0
6         3          1          1          3
7         244        - nbre ENREGISTREMENTS, PUIS CONTENU DE
          CHAQUE ENREGISTREMENT :
8         1          0          0
9         1          0          0
10        1          0          3          0.000000          0.000000
          0.000000
11        2          0          0
    
```

B.2. Utilisation des conditions aux limites hétérogènes et instationnaires dans CEDRE

12	1	0	0		
13	1	0	3	0.000000	0.000000
		0.000000			
14	1	0	0		
15	2	0	0		
16	1	0	3	0.034187	0.000000
		0.000000			
17	2	0	0		
18	2	0	0		
19	1	0	3	0.037474	0.000000
		0.000000			
20	1	0	0		
21	3	0	0		
22	1	0	3	0.068674	0.000000
		0.000000			
23	2	0	0		
24	3	0	0		
25	1	0	3	0.075278	0.000000
		0.000000			
26	1	0	0		
27	4	0	0		
28	1	0	3	0.103387	0.000000
		0.000000			
29	2	0	0		
30	4	0	0		
31	.....				

On a supposé ici que l'on avait défini dans l'ordre les variables `dates`, `parallelepipede` puis `psl/cylindre/paroi`. Les lignes 4 à 6 indiquent donc que l'on enregistre les valeurs des limites aux indices de la variable temporelle, puis à ceux de la variable spatiale, pour enfin donner les valeurs aux limites correspondantes dans l'unique enregistrement de la variable `psl/cylindre/paroi`.





# Bibliographie

- [1] C. Airiau. *Stabilité, réceptivité et contrôle optimal d'écoulements cisailés : approches adjointes*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Habilitation à diriger des recherches, 2005.
- [2] C. Airiau, A. Bottaro, S. Walther, and D. Legendre. A methodology for optimal laminar flow control : Application to the damping of Tollmien-Schlichting waves in a boundary layer. *Phys. Fluids*, 15(5) :1131–1145, 2003.
- [3] Ch. Airiau. *Stabilité, réceptivité et contrôle optimal d'écoulements cisailés : approches adjointes — Habilitation à diriger des recherches*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 2004.
- [4] F. Alizard, S. Cherubini, and J.-C. Robinet. Sensitivity and optimal forcing response in separated boundary layer flows. *Phys. Fluids*, 21, June 2009.
- [5] F. Alizard and J.-C. Robinet. Spatially convective global modes in a boundary layer. *Phys. Fluids*, 19, November 2007.
- [6] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen. *The Lapack users' guide, third edition*. Philadelphia, SIAM books edition, 1999.
- [7] J. Anthoine. *Experimental and numerical study of acoustic phenomena in large solid propellant boosters*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, October 2000.
- [8] W. E. Arnoldi. The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quart. Appl. Math*, 9 :17–29, 1951.
- [9] G. Avalon, G. Casalis, and J. Griffond. Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection. In *36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Cleveland (USA)*, July 13-15 1998.
- [10] G. Avalon and T. Josset. Cold gas experiments applied to the understanding of aeroacoustic phenomena inside solid propellant rockets. In *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and exhibit*, number AIAA Paper 2006-5111, July 2006.
- [11] G. Avalon and D. Lambert. Montage VALDO : premiers essais de mise au point et de qualification. Technical Report 5/00064 DEFA, ONERA, établissement de Palaiseau, 2000.
- [12] G. Avalon and D. Lambert. Base de données VALDO sur les écoulements générés par injection à la paroi. Technical Report 1/14797 DEFA, ONERA, établissement de Palaiseau, décembre 2009.
- [13] G. Avalon, B. Ugurtas, F. Grisch, and A. Bresson. Numerical computations and visualization tests of the flow inside a cold gas simulation with characterization of a parietal vortex shedding. In *36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Huntsville (USA)*, july 16-19 2000.

- [14] R. Badeau. *Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Application aux signaux de musique*. PhD thesis, ENST, 2005.
- [15] A. Berman. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 24(9) :1232–1237, 1953.
- [16] L. S. Blackford, J. Choi, A. Cleary, E. D'Azevedo, J. Demmel, I. Dhillon, J. Dongarra, S. Hammarling, G. Henry, A. Petitet, K. Stanley, D. Walker, and R. C. Whaley. Scalapack : a linear algebra library for message-passing computers. 1997.
- [17] A. Bottaro, P. Corbett, and P. Lucchini. The effect of base flow variation on flow stability. *J. Fluid Mech.*, 476 :293–302, 2003.
- [18] G. Boyer, E. Piot, and J.-Ph. Brazier. Theoretical investigation of hydrodynamic surface mode in a lined duct with sheared flow and comparison with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 330 :1793–1809.
- [19] L. Brandt, D. Sipp, J. O. Pralits, and O. Marquet. Effects of base-flow variation in noise amplifiers : the flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 687 :503–528, september 2011.
- [20] R.S. Brown, R. Dunlap, S. W. Young, and R. C. Waugh. Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid motor rockets. *J. Spacecraft*, 18 :312–319, 1981.
- [21] C. Canuto, Y.M. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. New York, Springer edition, 1988.
- [22] G. Casalis. Stabilité linéaire d'un écoulement dans un conduit à parois débitantes en géométrie cartésienne. Technical Report Rapport final DERAT 114/5118.25, CERT-ONERA, 1996.
- [23] G. Casalis, F. Chedeveigne, and T. Feraille. Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection. *Phys. Fluids*, 18, January 2006.
- [24] N. Cesco. *Étude et modélisation de l'écoulement diphasique à l'intérieur des propulseurs à poudre*. PhD thesis, ENSAE, 1997.
- [25] F. Chedeveigne. *Instabilités intrinsèques des moteurs à propulsion solide*. PhD thesis, ENSAE, 2007.
- [26] F. Chedeveigne and G. Casalis. Detailed analysis of the thrust oscillations in reduced scale solid rocket motors. In *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Sacramento, US*, volume AIAA 2006-4424, 9-12 July 2006.
- [27] F. Chedeveigne, G. Casalis, and J. Majdalani. Direct numerical simulation and biglobal stability investigations of the gaseous motion in solid rocket motors. *J. Fluid Mech.*, 706 :190–218, July 2012.
- [28] P. Corbett and A. Bottaro. Optimal perturbations for boundary layers subject to stream-wise pressure gradient. *Phys. Fluids*, 12(1) :120–130, 2000.
- [29] F. Culick. Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. *AIAA Journal*, 4 :1462–1464, 1966.
- [30] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique*, volume 3. Paris, Masson edition, 1987.
- [31] S. Didorally. *Étude théorique de l'interaction entre l'acoustique et les détachements tourbillonnaires dans une chambre de moteur à propergol solide*, 2010.

- 
- [32] W.S. Don and A. Solomonoff. Accuracy enhancement for higher derivatives using Chebyshev collocation and a mapping technique. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(4) :1040–1055, 1997.
- [33] R. Dunlap, A. M. Blackner, R. C. Waugh, R. S. Brown, and P. G. Willoughby. Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber. *J. Propulsion*, 6(6) :290–704, Nov-Dec 1990.
- [34] F. Vuillot et. al. Manuel théorique de la chaîne cadre version 4.1. Technical report, ONERA, 2010.
- [35] T. Feraille. *Instabilités de l'écoulement interne des moteurs à propulsion solide*. PhD thesis, ENSAE, 2004.
- [36] G. A. Flandro. Effects of vorticity transport on axial acoustic waves in a solid propellant rocket chamber. In *Combustion Instabilities Driven by Thermo-Chemical Acoustic Sources, Noise Control & Acoustics, ASME, New York*, volume 4, pages 53–60, 1989.
- [37] G. A. Flandro. Effects of vorticity on rocket combustion stability. *Journal of Propulsion and Power*, 11(4) :607–625, 1995.
- [38] G. A. Flandro and J. Majdalani. Aeroacoustic instability in rockets. *AIAA Journal*, 41 :485–497, March 2003.
- [39] G. A. Flandro and J. Majdalani. Aeroacoustic instability in rockets. In *37th AIAA/ASME/-SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 8-11 July 2001.
- [40] S. Gallier, F. Godfroy, and F. Plourde. Computational study of turbulence in a subscale solid rocket motor, 40th. In *40th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, number 2004-4052, Fort Lauderdale, Florida, 2004.
- [41] M. Gaster. A note on the relation between temporally increasing and spatial disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, 14 :222–224, 1962.
- [42] J. Cl. Godon. Code PERSE : une approche unidimensionnelle dans la modélisation du fonctionnement stationnaire d'un propulseur à propergol solide. In *3e colloque R&D "Écoulements internes en propulsion solide"*, Poitiers, 25-27 mars 1998.
- [43] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations, third edition*. Baltimore, John Hopkins University Press edition, 1996.
- [44] B. Gossant. *Solid Propellant Combustion and Internal Ballistics of Motors*. Pergamon Press, a. davenas edition, 1993.
- [45] J. Griffond. *Instabilité pariétale et accrochage aéroacoustique dans les conduits à parois débitantes simulant les moteurs à propergol solide d'Ariane 5*. PhD thesis, ENSAE, 2001.
- [46] J. Griffond. *Simulation des grandes échelles en aérothermique sur des maillages non-structurés généraux*. PhD thesis, Université Paris IV, 2006.
- [47] J. Griffond and G. Casalis. On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow. *Phys. Fluids*, 13(1635), 2001.
- [48] J. Griffond, G. Casalis, and J. Ph. Pineau. Spatial instability of flow in a semiinfinite cylinder with fluid injection through its porous walls. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 19, January 2000.

- [49] J. Guery, F. Godfroy, S. Ballereau, S. Gallier, P. Della Pieta, O. Orlandi, E. Robert, and N. Cesco. Thrust oscillations in solid rocket motors. In *44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Hartford, CT*, number 2008-4979, July 2008.
- [50] D. C. Hill. Adjoint systems and their role in the receptivity problems for boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 292 :183–204, June 1995.
- [51] P. Huerre and M. Rossi. *Hydrodynamic instabilities in open flows*. C. Godrèche and P. Manneville, Cambridge, Cambridge university press edition, 1998.
- [52] M. R. Khorrami, M. R. Malik, and R. L. Ash. Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *Journal of Computational Physics*, 81 :206–229, 1989.
- [53] E. Laroche and F. Vuillot. Charme : préconditionnement bas-mach. Technical report, ONERA, 2010. dans *Manuel théorique de la chaîne CEDRE version 4.1*.
- [54] R. B. Lehoucq, D.C Sorensen, and C. Yang. Arpack users’s guide : Solution of large eigenvalue problems with implicitly restarted arnoldi methods. 1997.
- [55] M.-S. Liou. A sequel to ausm, part ii : Ausm+up for all speeds. *J. Comput. Phys.*, 214 :137–170, 2006.
- [56] M.-S. Liou and C. J. Steffen Jr. A new flux splitting scheme. *J. Comput. Phys.*, 107, 1993.
- [57] G. Lodato, P. Domingo, and L. Vervisch. Three-dimensional boundary conditions for direct and large eddy simulation of compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 227(10) :5105–5143, 2008.
- [58] J Majdalani. Multiple asymptotic solutions for axially travelling waves in porous channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 636(1) :59–89, October 2009.
- [59] J Majdalani, G A Flandro, and S R Fischbach. Some rotational corrections to the acoustic energy equation in injection-driven enclosures. *Physics of Fluids*, 17(7) :0741021–20, July 2005. NSF.
- [60] J. Majdalani and W. K. Van Moorhem. Multiple-scales solution to the acoustic boundary layer in solid rocket motor. *Journal of Propulsion and Power*, 13(2) :188–193, 1997.
- [61] Joseph Majdalani, Sean R. Fischbach, and Gary A. Flandro. Improved energy normalization function in rocket motor stability calculations. *Aerospace Science and Technology*, 10 :495–500, September 2006.
- [62] O. A. Marques and V. Toumazou. Spectral portrait computation by a lanzos method. *CERFACS Technical Report TR/PA/95/05*, 1995.
- [63] O. Marquet, M. Lombardi, J.-M. Chomaz, D. Sipp, and L. Jacquin. Direct and adjont global modes of a recirculation bubble : Lift-up and convective non-normalities. *J. Fluid Mech.*, 622, 2009.
- [64] X. Merle. *Résolution des équations de stabilité globale en régime incompressible et compressible avec une méthode de différences finies de haute précision*. PhD thesis, ENSAM, 2009.
- [65] A. Monokrosous, E. Åkervik, , L. Brandt, and D. S. Henningson. Global three-dimensional optimal disturbances in the blasius boundary layer flow using time-steepers. *J. Fluid Mech.*, 650, may 2010.
- [66] R. Peyret. *Spectral Methods for incompressible viscous flows*, volume 148 of *Applied Mathematical Sciences*. New York, springer edition, 2000.

- 
- [67] E. Piot. *Simulation numérique directe et analyse de stabilité de couches limites en présence de micro-rugosités*. PhD thesis, ENSAE, 2008.
- [68] O. Pironneau. *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Paris, masson edition, 1988.
- [69] T. Poinso and S. K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible flows. *J. Comput. Phys.*, 101 :104–129, 1991.
- [70] M. Prévost and J.C. Godon. Bilan des études dur les oscillations de poussée du mps p230 d’ariane 5. annexe 3 : base synthétique des odp sur maquette lp9. Technical Report Rapport final RF 3/09668 DEFA/DMAE, ONERA, 2005.
- [71] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation in Partial Differential Equations*. Berlin, springer-verlag edition, 1994.
- [72] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Methods of Partial Differential Equations*. New York, springer-verlag edition, 1994.
- [73] E. Åkervik, U. Ehrenstein, F. Gallaire, and D. S. Henningson. Global two-dimensional stability measures of flate plate boundary layer flow. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 27 :501–513, November 2008.
- [74] C. Robiltaillié-Montané. *Une approche non-locale pour l’étude des instabilités linéaires. Application à l’écoulement de couche limite compressible le long d’une ligne de partage*. PhD thesis, ENSAE, 2005.
- [75] Daniel Rodríguez and Vassilis Theophilis. Massively parallel solution of the BiGlobal eigenvalue problem usieng dense linear algebra. *AIAA Journal*, 47 :2449–2459, October 2009.
- [76] R. Roy, A. Paulraj, and T. Kailath. ESPRIT— a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoïds in noise. *IEEE. Trans. Acoust., Speech, Signa, Processing*, 34(5) :1340–1342, 1986.
- [77] P. J. Schmid. Nonmodal stability theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 39 :129–162, 2007.
- [78] M. Simoes. *Modélisation eulérienne de la phase dispersée ans les moteurs à propergol solide, avec prise en compte de la pression particulière*. PhD thesis, INP Toulouse, 2006.
- [79] D. Sipp, O. Marquet, and Ph. Meglia. Dynamics and control of global instabilities in open flows ; a linearized approach. *Applied Mechanics Reviews*, 63, may 2010.
- [80] G. I. Taylor. Fluid flows in regions bounded by porous surfaces. In *Proc. of the Royal Soc. Series A*, volume 234(1199), pages 546–475, 1956.
- [81] V. Theophilis. Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 39 :249–315, 2003.
- [82] W. K. Thompson. Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.*, 68 :1–24, 1987.
- [83] K. C. Toh and L. N. Trefethen. Calculation of pseudospectra by the arnoldi iteration. *SIAM J. Sci. Comput*, 17 :1–15, 1996.
- [84] L. N. Trefethen. Computation of pseudospectra. pages 247–295, 1999.
- [85] L.-N. Trefethen and M. Embree. *Spectra and pseudospectra*. Princeton, Princeton university press edition, 2005.

- [86] L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, , and T. A. Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261, 1993.
- [87] A. Tumin. Multimode decomposition of spatially growing perturbations in a two-dimensional boundary layer. *Phys. Fluids*, 15(9) :2525–2540, July 2003.
- [88] B. Ugurtas. *Étude numérique et expérimentale des instabilités hydrodynamiques et du couplage aéro-acoustique dans un écoulement de Taylor*. PhD thesis, Université Paris VI, 2000.
- [89] V. N. Varapaev and V. I. Yagodkin. Flow instability in a channel with porous wall. *Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosi i Gaza.*, 4(5), 1969.
- [90] F. Vuillot. Vortex shedding phenomena in solid propellant motors. *Journal of Propulsion and Power*, 11(4) :626–639, July-August 1995.
- [91] David S. Watkins. *Fundamentals of matrix computations*. New York, Willey edition, 2002.
- [92] J.A.C. Weideman and S.C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions of Mathematical Software*, 26(4) :465–519, 2000.
- [93] P. D. Welch. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra : A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, AU-15 :70–73, 1967.
- [94] T. G. Wright and L. N. Trefethen. Large scale computation of pseudospectra using ARPACK and eigs. *SIAM J. Sci. Comput*, 23 :591–605, 2001.
- [95] V. I. Yagodkin. Use of channels with porous walls for studying flows which occur during combustion of solid propellants. In *18th AIAA/CEAS International Astronautical Congress AGARD*, 1967.







## Résumé

Cette thèse vise à modéliser les instabilités hydrodynamiques générant des détachements tourbillonnaires pariétaux (ou VSP) responsables des Oscillations De Pression dans les moteurs à propergol solide longs et segmentés par interaction avec l'acoustique du moteur. Ces instabilités sont modélisées en tant que modes de stabilité linéaire globaux de l'écoulement d'un conduit à parois débitantes. En supposant que les structures pariétales émergent d'une perturbation de l'écoulement de base, des modes discrets et indépendants du maillage utilisé sont calculés. Dans ce but, une discrétisation par collocation spectrale multi-domaine est implémentée dans un solveur parallèle afin de s'affranchir de la croissance polynomiale des fonctions propres et de la présence de couches limites. Les valeurs propres ainsi calculées dépendent explicitement des frontières du domaine, à savoir la position de la perturbation et celle de la sortie, et sont ensuite validées par simulation numérique directe. On montre alors qu'elles permettent bien de décrire la réponse à une perturbation initiale de l'écoulement modifiée par une rupture de débit pariétale. Ensuite, la simulation d'une réponse forcée par l'acoustique se fait sous forme de structures tourbillonnaires dont les fréquences discrètes sont en accord avec celles des modes de stabilité. Ces structures sont réfléchies en ondes de pression de même fréquences remontant l'écoulement. Finalement, la simulation numérique et la théorie de la stabilité permettent de montrer que le VSP, dont la réponse est linéaire vis-à-vis d'un forçage compressible comme l'acoustique, est le phénomène moteur des Oscillations De Pression.

Mots-clés : Moteurs à propergol solide, Oscillations De Pression, Vortex Shedding Pariétal, instabilités hydrodynamiques, stabilité globale, écoulement de Taylor-Culick, collocation spectrale, non-normalité, analyse de sensibilité, réceptivité.

## Abstract

The current work deals with the modeling of the hydrodynamic instabilities that play a major role in the triggering of the Pressure Oscillations occurring in large segmented solid rocket motors. These instabilities are responsible for the emergence of Parietal Vortex Shedding (PVS) and they interact with the boosters acoustics. They are first modeled as eigenmodes of the internal steady flowfield of a cylindrical duct with sidewall injection within the global linear stability theory framework. Assuming that the related parietal structures emerge from a baseflow disturbance, discrete mesh-independent eigenmodes are computed. In this purpose, a multi-domain spectral collocation technique is implemented in a parallel solver to tackle numerical issues such as the eigenfunctions polynomial axial amplification and the existence of boundary layers. The resulting eigenvalues explicitly depend on the location of the boundaries, namely those of the baseflow disturbance and the duct exit, and are then validated by performing Direct Numerical Simulations. First, they successfully describe flow response to an initial disturbance with sidewall velocity injection break. Then, the simulated forced response to acoustics consists in vortical structures with discrete frequencies that are in good agreement with those of the eigenmodes. These structures are reflected into upstream pressure waves with identical frequencies. Finally, the PVS, which response to a compressible forcing such as the acoustic one is linear, is understood as the driving phenomenon of the Pressure Oscillations thanks to both numerical simulation and stability theory.

Keywords : Solid Rocket Motors, Pressure Oscillations, Parietal Vortex Shedding, Hydrodynamic instabilities, Global stability, Taylor-Culick Flow, Non-Normality, Sensitivity Analysis, Receptivity.