



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

Présentée et soutenue par :

Simon TOURNIER

le jeudi 22 mars 2012

Titre :

Contribution à la modélisation de la diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses à partir de méthodes rigoureuses

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED GEET : Electromagnétisme et systèmes de haute fréquence

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA SCANR

Directeur(s) de Thèse :

M. Pierre BORDERIES (directeur de thèse)

M. Jean-René POIRIER (co-directeur de thèse)

Jury :

M. Pierre BORDERIES - Directeur de thèse

M. Jean-René POIRIER (co-directeur de thèse)

M. Christophe Bourlier - Rapporteur

M. Christophe Geuzaine - Rapporteur

M. Abderrahmane Bendali - Examineur

M. Luc Giraud - Examineur

Résumé

Cette thèse traite de la diffusion par des surfaces rugueuses monodimensionnelles. Les surfaces présentant des petites échelles de variations nécessitent une discrétisation fine pour représenter les effets de diffusion sur le champ diffracté, ce qui augmente les coûts numériques. Deux aspects sont considérés : la réduction de la taille du problème en construisant une condition aux limites équivalente traduisant les effets des variations rapides et la réduction du nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le système linéaire issu de la méthode des moments par une méthode basée sur les sous-espaces de Krylov. En ce qui concerne la réduction de la taille du problème, une technique d'homogénéisation est utilisée pour transformer la condition aux limites posée sur la surface rugueuse par des paramètres effectifs. Ces paramètres sont déterminés par des problèmes auxiliaires qui tiennent compte des échelles fines de la surface. Dans le cas de surfaces parfaitement métalliques, la procédure est appliquée en polarisation Transverse Magnétique (TM) et Transverse Électrique (TE). Une impédance équivalente de Léontovich d'ordre 1 est déduite. Le procédé est automatique et les ordres supérieurs sont dérivés pour la polarisation TM. La procédure d'homogénéisation est aussi appliquée pour des interfaces rugueuses séparant deux milieux diélectriques. En ce qui concerne la réduction du nombre d'itérations, un préconditionneur, basé sur des considérations physiques, est construit à partir des modes de Floquet. Bien que le préconditionneur soit initialement élaboré pour des surfaces périodiques, nous montrons qu'il est aussi efficace pour des surfaces tronquées éclairées par une onde plane. L'efficacité des deux aspects présentés dans cette thèse est numériquement illustrée pour des configurations d'intérêt.

Mots clés : *surface rugueuse, homogénéisation, préconditionneur physique, développement asymptotique, condition aux limites équivalente, modes de Floquet*

Abstract

This work is about the scattering by monodimensional rough surfaces. Surfaces presenting small scales of variations need a very refined mesh to finally capture the scattering field behaviour what increases the computational cost. Two aspects are considered : the reduction of the problem size through an effective boundary condition incorporating the effect of rapid variations and the reduction of the number of iterations to solve the linear system arising from method of moments by a method based on Krylov subspace. Firstly, an homogenization process is used to convert the boundary condition on the rough interface into effective parameters. These parameters are determined by the solutions of auxiliary problems which involve the detailed profile of the interface. In the case of perfectly metallic surfaces, the process is applied to the E- and H-polarization and an Leontovich impedance of order 1 is deduced. The process is automatic and higher orders are derived for E-polarization. The homogenization process is also applied to dielectric rough interfaces. Secondly, a physically-based preconditioner is built with Floquet's modes. Although the preconditioner has been designed for periodical surfaces, it was shown to be efficient in the case of truncated surfaces illuminated by a plane wave. The efficiency of both aspects is numerically illustrated for some configurations of interest.

Key words : *rough surfaces, homogenization, physically-based preconditioner, asymptotic expansion, effective boundary conditions, Floquet's modes*

Remerciements

Je tiens en premier lieu remercier mes deux directeurs : Jean-René Poirier et Pierre Borderies. Merci pour votre patience et confiance durant ces quatre longues années.

Merci Jean-René, de m'avoir proposé au détour d'un projet étudiant de faire une thèse, pour toutes ces opportunités que tu m'as offertes, pour avoir toujours écouté et expliqué, parfois laissé chuter quand il fallait ; pour faire simple : pour ton encadrement. J'espère être le premier d'une longue série d'étudiants.

Merci Pierre, pour ton optimisme à toute épreuve, pour ta disponibilité, surtout celle à quelques heures des *deadlines*, et pour avoir partagé cette richesse culturelle, tant sur les sujets scientifiques que celle plus en marge comme la politique en Amérique Latine ou un film improbable, j'ai beaucoup appris.

Ensuite, je tiens à remercier Christophe Bourlier et Christophe Geuzaine de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse. Leur lecture attentive et leurs remarques m'ont permis d'améliorer grandement ce *manuscrit* de thèse.

Je suis également très reconnaissant à Abderrahmane Bendali d'avoir présidé le jury ainsi qu'à Jean-Yves Suratteau d'avoir accepté l'invitation. Je tiens à vivement remercier Luc Giraud pour l'intérêt qu'il a manifesté tout au long de ce travail.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à Florent Christophe pour m'avoir accueilli au sein du Département d'ÉlectroMagnétisme et Radar de l'ONERA.

Le film fut long, des rebondissements, du suspense . . . Donc tel un long générique qui défile dans le désordre, je remercie :

– les gens que j'ai côtoyés à l'ONERA pour l'ambiance agréable de travail ; en particulier : Bas Michielsen pour ce voyage en voiture vers Pau, puis pour toutes tes patientes explications.

– les fidèles des *pauses* : Nico pour m'avoir supporté (dans les deux sens du terme) dans le bureau ; Stef' parce que tu sais être cathare ; Benjamin pour m'avoir initié au Go ; Thomas pour l'éclectisme des sujets (des arts-martiaux aux gouttes d'eau sauteuses) ; Laura pour m'avoir fait connaître lors des prolongations d'une conf' à Boston le confidentiel espace $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}(\text{rot})$, plus marrant que $H(\text{div})$ ou autres Sobolev exotiques ; Laurent pour toutes nos discussions informelles sur les méthodes numériques ; les anciens (Rémi, Max, Antho), les nouveaux (Clément, . . .) ainsi que les gars du bâtiment d'en face ; le grand Ludo pour avoir ouvert la voie ; l'autre Nico pour m'avoir montré qu'il était possible de boire des godets vendredi soir, de partir en rando avec un dénivelé à 4 chiffres le samedi, et d'aller dans le sud-Aveyron en vélo pour un barbecue le dimanche midi.

– les gens que j’ai croisés dans les couloirs du LAPLACE ; en particulier : David pour m’avoir converti à *emacs* et pour toutes tes astuces linuxiennes ; Clément parce qu’il faut toujours connaître un breton ; François pour ton cours très intéressant ; Raphaël parce qu’il a trop, mais beaucoup trop, d’idées saugrenues ; Dam’s parce qu’on se marre toujours ; Dédé pour m’avoir permis de faire croire que je surfais sur la Garonne ; Isabelle pour avoir osé expérimenter certains de mes plans semi-*foireux*.

– le GÉNEPI, cette fleur des Alpes dont la gnôle est paraît-il “dégueulasse” mais qui a mis du riz dans mes poches ; toutes les personnes que j’ai rencontrées par ce biais, ici ou là ; tous les toulousains, trop nombreux pour être cités ; Marco de Radio Campus pour nous avoir permis de tenter des choses sur les ondes ; Juliette parce que tu as plus mauvais caractère que moi ; Adeline parce que j’ai cru comprendre un peu de sociologie avec ton mémoire sur RESF ; les anciens toulousains : bigeon pour m’avoir expliqué le principe de corrélation, Tino pour nos parties d’échec sous le soleil près de l’écluse de Montgiscard ; les marseillais : Brice et Cerise pour les différents WIRG, Sarah pour ta manière de conduire lors d’ISPR et autre VVV, Jean-Phi parce que je n’ai rien compris pendant une heure et aussi pour ces belles sessions alpines prétextes à des boustifailles gargantuesques.

– tous les copaings d’Aveyron dont Pierrot, Sèb le pêcheur, Cédric (dit Sallou), Cédric (dit anciennement Ours, maintenant le Canadien ou le Chinois), avec vous on en voit des vertes mais surtout des jaunes ; et aussi le Grand Cèdre, pour nos *geekeries* de jeunesses jusqu’à nos discussions d’aveyronnais en passant par nos folies estudiantines.

– les camarades de l’école ; PAMouze parce que tu es un vrai Parisien ; Beno pour les sorties barrages ; Ju pour les midis au Danu ; l’autre Ju pour ne pas savoir faire de vélo ; Jeannot parce qu’il faut toujours connaître un syndicaliste ; Divi parce que tu es féministe ; Capt’n Colin pour ta connaissance des Dodo ; Larnac’ parce que tu t’y connais en bagnole ; NÉrika yeaha ! pour les week-ends calanques ; Hélène et François parce que vous faites tout les premiers ; RineKa parce que la carte c’est la carte ; Alex’ pour tes émissions sur Radio Mignot ; Greg pour cette matinée d’inter-contrat ; Angèle pour avoir gardé un peu de cet accent du Nord ; Tibo pour tes enfantillages ; Lætitia pour nos papotages ; et les deux compères des repas du samedi : l’ami Lap’ et Martin, pour avoir osé boire cet ignoble digestif dont mon père a le secret.

– la grande famille : tantes et oncles, cousins et cousines, grandes tatas et petits cousins ; en particulier ma marraine Isabelle et sa petite famille, pour mes venues à Frontignan, pour tout.

– les acolytes pour tous ces petits grains de folie ; Etienne pour tous nos plans *foireux* et surtout ceux à venir ; Thomas parce que tu assumes tes charentaises ; MariNNe parce que tu connais Mirta ; Bertille pour parler de tout à la piscine ; Cécile parce que c’est toujours bien à Audaux ou Guéthary ; l’autre Cécile même si tu ne m’as jamais fait visiter les Beaux Arts, ni montré ton travail ; M&M pour avoir souvent recueilli le gros chat que je suis ; Malika euh ? Madame Abdelmoula parce que tu réponds toujours à mes appels de dernière minute lors de mes passages éclairs à Paris ; Hélène pour avoir eu dans son jardin le plus grand tournesol du monde ; Nohmane parce que tu cryptes naturellement tes conversations téléphoniques ; Amaury pour avoir littéralement accouché avant moi ; Martin parce que tu prends le temps ; Séb parce qu’on a souvent oublié de t’appeler ; Kébounet pour tes petits bons plans ; Jérém’ pour toutes tes magouilles ; Luc&Élodie pour m’avoir permis de me luxer l’épaule dans une mémorable chute à vélo après une soirée chez vous ; et Nerea pour les vacances, les sorties montagnes et les moments au Pays-Basque : milesker !

– à tous ceux que j’ai oublié : *merci à toi*.

– mention spéciale à tous les canapés que j’ai fréquentés sur la fin, celui d’Étienne, de M&M, de Jérém’, de Clém’, de Marie&Cédric, de Burtu&Tomo.

Pour finir, je voudrais remercier la *pitchoune*, ma sœur : parce qu'elle a su tricoter une couverture pour mes soirées tisane-nanard, parce qu'elle sait faire une tarte au citron quand j'en ai besoin, parce qu'elle a toujours son Laguiole sur elle, même au Palais de Justice, au cas où il y aurait un bout de fromage, parce qu'elle me passe des savons sans raison, parce qu'elle n'est pas une bonne sœur, mais simplement la meilleure.

Enfin, merci à mes parents. À mon Papa de savoir presque tout faire. À ma Maman d'être tellement extraordinaire.

*Mais il restait le monde entier à explorer,
et derrière les montagnes j'imaginai toujours des horizons sans limites.*

CARLO ROVELLI – Qu'est-ce que le temps ? Qu'est-ce que l'espace ?

On écrit des choses un peu parce qu'on les pense mais aussi beaucoup pour ne plus les penser.

MICHEL FOUCAULT – émission *Apostrophe* du 17 décembre 1976.

*À Pierre, Jeanne, André et Odette,
je n'oublie pas d'où je viens.*

Table des matières

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xvii
Notations	xix

Introduction	1
--------------	---

Chapitre 1 Présentation générale	5
---	----------

1.1 Le problème 2D de diffraction électromagnétique	5
1.1.1 Généralités	5
1.1.2 Condition de Radiation	10
1.1.3 Cas Transverse Magnétique – E-polarisation ($u = E_z$)	12
1.1.4 Cas Transverse Électrique – H-polarisation ($u = H_z$)	15
1.1.5 Coefficient de diffusion et Surface Équivalente Radar	16
1.2 Surfaces rugueuses	17
1.2.1 Rugosités périodiques	17
1.2.2 Rugosités aléatoires	18
1.2.3 Critère de Rayleigh	20
1.3 Méthodes de résolution : présentation non-exhaustive	22
1.3.1 Méthodes basées sur une <i>approximation</i>	22
1.3.2 Approche <i>rigoureuse</i>	23

Chapitre 2	
Homogénéisation de surfaces rugueuses métalliques	25

2.1 Présentation générale de la méthode	26
2.1.1 Les grandes lignes	26
2.1.2 Les différents <i>outils</i>	29
2.2 Équation de Propagation	33

2.3	Polarisation TM ($u = E_z$)	34
2.3.1	Injection des Éléments	34
2.3.2	Résolution	35
2.3.3	Conclusion : C.L.E.	36
2.3.4	Analyse en terme de coefficients de réflexion	37
2.3.5	Ordres supérieurs	42
2.4	Polarisation TE ($u = H_z$)	48
2.4.1	Injection des Éléments	48
2.4.2	Résolution : ordre -1 et ordre 0	50
2.4.3	Résolution : ordre 1	52
2.4.4	Conclusion : C.L.E.	54
2.4.5	Analyse en terme de coefficients de réflexion	55
2.5	Commentaires	59
2.5.1	Synthèse	59
2.5.2	Condition de Léontovich : impédance équivalente	60
2.5.3	Une interprétation pour les surfaces de faible hauteur	61
2.6	Conclusion	62

Chapitre 3	63
Homogénéisation : cas diélectrique	

3.1	Préliminaires	64
3.1.1	Notations	64
3.1.2	Une illustration informelle	66
3.2	Injection des <i>outils</i>	69
3.2.1	Équation de propagation	69
3.2.2	Condition aux Limites : $[u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0$	70
3.2.3	Condition aux Limites : $[\partial_{\mathbf{n}} u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0$	71
3.2.4	Synthèse	71
3.3	Résolution de l'ordre 0 (associé à $u^{(0)}$)	74
3.3.1	Calcul de $\Pi^{(0)}$ et détermination de $[u_{1,2}^{(0)}]_{y=0}$	74
3.3.2	Caractérisation de $[\partial_y u_{1,2}^{(0)}]_{y=0}$	74
3.3.3	Conclusion pour l'ordre 0	75
3.4	Résolution de l'ordre 1 (associé à $u^{(1)}$)	76
3.4.1	Calcul de $\Pi^{(1)}$ et détermination de $[u_{1,2}^{(1)}]_{y=0}$	76
3.4.2	Caractérisation de $[\partial_y u_{1,2}^{(1)}]_{y=0}$	77
3.4.3	Conclusion pour l'ordre 1	78

3.4.4	Analyse : coefficients de réflexion et transmission	79
3.5	Ordre supérieur	82
3.5.1	Calcul de $\Pi^{(2)}$ pour déterminer $\left[u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0}$	82
3.5.2	Caractérisation de $\left[\partial_y u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0}$	83
3.5.3	Conclusion pour l'ordre 2	85
3.5.4	Analyse	85
3.6	Conclusion	87

Chapitre 4	
Préconditionneur physique	89

4.1	Introduction	90
4.1.1	Quelques éléments sur la formulation intégrale utilisée	90
4.1.2	Méthodes itératives de type Krylov	92
4.1.3	Éléments sur les Préconditionneurs	93
4.1.4	Méthodes itératives et surfaces rugueuses	95
4.2	Valeurs Propres – Vecteurs Propres	96
4.2.1	Cas Analytique : plaque périodique	96
4.2.2	Hypothèse et Justifications numériques	99
4.2.3	Synthèse	107
4.3	Construction du Préconditionneur Physique	108
4.3.1	Construction du préconditionneur	108
4.3.2	Heuristique : choix de ε , \mathcal{M} et M	109
4.3.3	Performances	116
4.3.4	Conclusion : surfaces périodiques	120
4.4	Application aux surfaces tronquées	122
4.4.1	Information spectrale périodique pour des surfaces tronquées	122
4.4.2	Performances	127
4.4.3	Conclusion	132
4.5	Extensions	134
4.5.1	Surface métallique – polarisation TE	134
4.5.2	Interface diélectrique – polarisation TM	134
4.6	Perspectives	135
4.7	Conclusion	137

Conclusion	139
-------------------	------------

Bibliographie	143
<hr/>	
Annexe A Résumé de l'article de Holloway et Kuester [34]	149
Annexe B Ordre 2 – Polarisation TE (métallique)	161
Annexe C Paires propres à l'ordre 1 par la théorie des perturbations	165

Table des figures

1.1	Schéma général du problème	6
1.2	Schéma illustrant les lois de Descartes (ici $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$)	13
1.3	Profil : sinus double échelle	18
1.4	Profils : fonction auto-corrélation gaussienne de paramètres $ks = 2, kl = 8$ et $ks = 2, kl = 5$	19
1.5	Profils : fonction auto-corrélation gaussienne et exponentielle de paramètres $ks = 2$ et $kl = 8$	20
1.6	Schéma illustrant le critère de Rayleigh	21
2.1	Schéma présentant l'idée générale de la procédure d'homogénéisation	27
2.2	Schéma du problème métallique	30
2.3	Illustration du développement asymptotique sur le coefficient de réflexion d'une surface à une échelle de périodicité.	32
2.4	Comparaison en fonction du paramètre δ du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence normale.	38
2.5	Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 80° -profil sinusoïdal : $h = 0.001m$ et $d = 0.002m$	38
2.6	Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence $0^\circ, 60^\circ$ et 80° -profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$	39
2.7	Comparaison en fonction de $k_y h_{max}$ du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence $0^\circ, 60^\circ$ et 80° -profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$	39
2.8	Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Profil sinusoïdal : $d = 0.002m$ et $h_{max} = 0.001m, 0.002m$ et $0.004m$	40
2.9	Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.001m, 0.002m$ et $0.003m$	40
2.10	Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Profil sinusoïdal, créneau et triangulaire ($h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$).	41
2.11	Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_2 et celui approché R_{eq} . Incidence 0° -profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$	43

2.12	Erreur en fonction du paramètre δ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec ceux évalués asymptotiquement R_2 , R_1 et R_0 et aussi avec celui approché R_{eq} . Incidence 0° – profil sinusoidal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$	44
2.13	Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_2 et aussi avec celui approché R_{eq} . Incidence 0° et 60° – profil sinusoidal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$	44
2.14	Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_2 et aussi avec celui approché R_{eq} . Incidence 0° et 45° – profil créneau : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$	45
2.15	Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_2 et aussi avec celui approché R_{eq} . Incidence 0° – profil sinus, créneau et triangle : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$	45
2.16	Erreur en fonction du paramètre δ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec ceux évalués asymptotiquement R_4 , R_3 , R_2 , R_1 et R_0 . Incidence 0° – profil sinusoidal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$	47
2.17	Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 0° , 60° et 80° – profil sinusoidal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$	56
2.18	Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 0° – profil créneau et triangle : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$	57
2.19	Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 60° et 80° – profil triangle : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$	57
2.20	Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq}	58
2.21	Une géométrie équivalente de la surface homogénéisée	62
3.1	Schéma du problème diélectrique	64
3.2	Illustration du développement asymptotique sur le coefficient de réflexion et de transmission d'une surface à une échelle de périodicité.	68
3.3	Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion et de transmission de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 45° – profil sinusoidal : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$. Incidence 0° – profil quadratique : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$	81
3.4	Comparaison entre les sauts évalués par la MoM et les sauts évalués asymptotiquement – profil sinusoidal – Incidence normale	86
4.1	Courant induit par l'onde plane Φ_0 à incidence normale pour différents types de surface : Plan (Cas 0) , Sinus avec $h = 0.1125\lambda$ (Cas 1) et Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 1) (voir TAB. 4.2).	100
4.2	Courant induit par le 2 ^e mode de Floquet Φ_2 à incidence normale pour différents types de surface : Plan (Cas 0) , Sinus avec $h = 0.1125\lambda$ (Cas 1) et Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 2) (et TAB. 4.2).	101
4.3	Courant induit par l'onde plane Φ_0 à incidence de 30 degré pour différents types de surface : Plan (Cas 0) , Sinus avec $h = 0.1125\lambda$ (Cas 1) et Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 2) (voir TAB. 4.2)	101

4.4	Courant induit par l'onde plane Φ_0 à incidence normale pour deux types de surface : Plan (Cas 0) , et Gaussienne (Cas 4) (voir TAB. 4.2).	102
4.5	Comparaison des Valeurs Propres théoriques et numériques dans le plan complexe : surface plane avec différentes discrétisations ou longueurs (voir TAB. 4.3)	103
4.6	Zoom de FIG. 4.5	104
4.7	Comparaison dans le plan complexe des Valeurs Propres théoriques (plan) et celles numériques de deux profils de surfaces rugueuses (voir TAB. 4.3)	105
4.8	Validité de l'approximation sur le couple propre pour différents profils de surfaces : Plan avec un pas de maillage de $\lambda/105$ (Cas 0a), Plan avec un pas de maillage de $\lambda/52.5$ (Cas 0b), Plan avec un pas de maillage de $\lambda/26.25$ (Cas 0c), Gaussien avec un pas de maillage de $\lambda/105$ (Cas 2b), Gaussien avec un pas de maillage de $\lambda/52.5$ (Cas 2c) (voir TAB. 4.4)	106
4.9	Validité de l'approximation du couple propre pour différents profils de surfaces : Plan (Cas 0), Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 1), Gaussien $ks = 1$ (Cas 2), Gaussien $ks = 2$ (Cas 3), Exponentiel $ks = 0.75$ (Cas 4) (voir TAB. 4.5)	107
4.10	Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour avoir un résidu de 10^{-4} et du Temps CPU total correspondant en fonction du nombre de modes considérées pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.6), à incidence normale	113
4.11	Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour avoir un résidu de 10^{-4} et du Temps CPU total correspondant en fonction du nombre de modes considérés pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.6), à incidence de 70°	114
4.12	Historique de convergence pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.8)	117
4.13	Historique de convergence pour une surface à auto-corrélation exponentielle de paramètres : $N = 1000$, $L = 65.7\lambda$, $ks = 4$, $kl = 5$	117
4.14	Nombre d'itérations pour avoir un résidu de 10^{-4} en fonction de l'angle d'incidence : surface à auto-corrélation gaussienne (voir TAB. 4.10)	119
4.15	Nombre d'itérations pour avoir un résidu de 10^{-4} en fonction de la hauteur quadratique moyenne : surface à auto-corrélation gaussienne (voir TAB. 4.11)	120
4.16	Validité de l'approximation du couple propre pour différents profils de surfaces : Plan (Cas 0), Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 1), Gaussien $ks = 1$ (Cas 2), Gaussien $ks = 2$ (Cas 3), Exponentiel $ks = 0.75$ (Cas 4) (voir TAB. 4.12)	123
4.17	Validité de l'approximation du couple propre pour un profil Gaussien $ks = 2$ et $kl = 8$ (Cas 2 du TAB. 4.12) pour différentes longueurs : 32.8λ , 65.7λ et 131.1λ	123
4.18	Valeurs Propres numériques de Z et celles de $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ dans le plan complexe pour différents profils de surface : Plan (Cas 0), Sinus (Cas 1), Gaussien $ks = 1$ (Cas 2) et Gaussien $ks = 2$ (Cas 3) (voir TAB. 4.3).	125
4.19	Comparaison dans le plan complexe des Valeurs Propres numériques dans le cas tronqué et dans le cas périodique : Cas 3 – Profil Gauss. (voir TAB. 4.13)	126
4.20	Historique de convergence pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.15)	128
4.21	Historique de convergence pour une incidence de 0° et 60° – profil Gaussien (Cas 3 du TAB. 4.15).	129
4.22	Historique de convergence avec un vecteur initial nul et avec un vecteur initial aléatoire – Profil Gaussien (Cas 3 du TAB. 4.15).	130
4.23	Comparaison des historiques de convergence entre GMRES et GMRES préconditionné soit par Z^{drop} soit par $Y_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.15).	131

Liste des tableaux

2.1	Influence du rapport h_{max}/d sur le paramètre h_{TM} .	41
2.2	Précision en fonction de l'ordre	47
2.3	Comparaison coefficient de réflexion évalué $r^{(n)}$ et celui calculé $R^{(n)}$. Incidence 0° – profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$	47
2.4	Comparaison de h_{TM} et $\bar{s} + \mathfrak{h}_{TE}$ pour différents profils de surfaces.	54
2.5	Synthèse de l'homogénéisation par les surfaces métalliques 1D	59
2.6	Comparaison : condition d'impédance homogénéisée et condition d'impédance de Engquist-Nédélec	62
4.1	Comparaisons des matrices en norme de Frobenius	99
4.2	Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur le courant	100
4.3	Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur les valeurs propres	103
4.4	Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur l'information spectrale : influence de la discrétisation	105
4.5	Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur l'information spectrale	107
4.6	Caractéristiques des surfaces pour déterminer le choix de \mathcal{M} et M	112
4.7	Comparaison du Temps CPU requis par GMRES pour avoir un résidu de 10^{-4} avec le Temps CPU requis pour évaluer la "qualité" de M modes de Floquet (initialisation de \mathcal{M}_3)	115
4.8	Caractéristiques des surfaces pour comparer les historiques de convergence	116
4.9	Comparaison du Temps CPU entre GMRES et GMRES préconditionné (surfaces du TAB. 4.8)	118
4.10	Caractéristiques des surfaces pour déterminer l'influence de l'angle d'incidence	118
4.11	Caractéristiques des surfaces à auto-corrélation gaussienne pour évaluer les performances du préconditionneur	119
4.12	Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur l'information spectrale	122
4.13	Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur les valeurs propres	124
4.14	Comparaison du conditionnement en norme 2 de Z et celui de $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ (voir TAB. 4.13).	126
4.15	Caractéristiques des surfaces pour comparer les historiques de convergence	127
4.16	Comparaison du Temps CPU entre GMRES et GMRES préconditionné (surfaces de TAB. 4.15)	128
4.17	Comparaison pour différents angles d'incidence du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un résidu de 10^{-4} (voir TAB. 4.15 pour les profils).	129

4.18 Comparaison pour différentes longueurs du nombre d'itération nécessaire pour
atteindre un résidu de 10^{-4} 130

Notations

Polarisation	:	
	TM	Transverse Magnétique : $u = E_z$
	TE	Transverse Électrique : $u = H_z$
convention	:	$e^{-i\omega t}$
$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$:	vecteur unitaire du repère cartésien
	$\hat{\mathbf{z}}$	direction d'invariance
γ_δ	:	profil de la surface (soit $\gamma_\delta = \delta s$ [homogénéisation] ou soit $\gamma_\delta = ks$ [préconditionneur])
ks	:	hauteur quadratique moyenne (rms) normalisée
kl	:	longueur de corrélation normalisée
Γ ou Γ^δ	:	frontière définie par le profil
N	:	nombre points échantillonnant la surface ($N + 1$ points)
L	:	“grande” période de la surface : $\gamma_\delta(x + L) = \gamma_\delta(x)$
$\hat{\mathbf{n}}$:	vecteur normal (entrant)
\mathcal{N}	:	facteur de normalisation : $\mathcal{N} = 1/\sqrt{1 + \gamma'_\delta}$
k	:	nombre d'onde
$\theta^{\text{inc}}, \theta_R$ et θ_T	:	angle d'incidence, de réflexion et de transmission
α_n	=	$\frac{2\pi n + k_x}{L}$
γ_n	=	$\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $ \alpha_n \leq k$ ou $i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}$, $ \alpha_n \geq k$
R_0 et T_0	:	coefficient de réflexion et de transmission pour une interface plane
d	:	“petite” période de la surface
δ	:	paramètre de changement d'échelle
Σ	:	frontière avec changement d'échelle
$(\sigma, \tau) = (x/\delta, y/\delta)$:	coordonnées dans le changement d'échelle
$\Pi = \Pi(x, \sigma, \tau)$:	correcteur de couche limite
$u^{(m)}$ et $\Pi^{(m)}$:	champ effectif et correcteur à l'ordre m
$R^{(m)}$ et $T^{(m)}$:	coefficient de réflexion et de transmission asymptotique à l'ordre m
et		$R_m = \sum_m R^{(m)} \delta^m$ et $T_m = \sum_m T^{(m)} \delta^m$
C.L.	:	condition aux limites
$\widetilde{\text{C.L.}}^{(m)}$:	condition aux limites modifiées à l'ordre m
C.L.E.	:	condition aux limites équivalente
e.g.,		C.L.E. = $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)} + \delta \widetilde{\text{C.L.}}^{(1)} + O(\delta^2)$

- Z : matrice impédance (issu de la Méthode des MoM)
 $\left(\cdot \mid \cdot \right)$: produit scalaire usuel de \mathbb{C}^N
 $\| \cdot \|_2$: norme euclidienne usuelle de \mathbb{C}^N
 r_k : résidu à l'itération k
 Y : préconditionneur (homogène à une admittance)
 λ_n : valeur propre
 Φ_n : mode de Floquet discret (pris en $y = 0$)
 $\| \cdot \|_F$: norme de Frobenius

$$\|Z\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Z_{ij}|^2$$

Introduction

Le travail de thèse rapporté dans ce document est une contribution au calcul de la diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses, c'est-à-dire des surfaces présentant des irrégularités. Ces surfaces peuvent se classer en deux catégories : celles dont les irrégularités présentent une périodicité et celles dont les irrégularités sont aléatoires. Sans être exhaustif, dans les problèmes de diffusion électromagnétique, les surfaces possédant des rugosités périodiques modélisent par exemple les antennes réseaux, les composants micro-ondes ou les composants optiques, les circuits imprimés ou encore les éléments urbains, . . . Quant aux surfaces possédant des rugosités aléatoires, elles modélisent par exemple la surface du sol ou de la mer, les surfaces de végétations (écorce des arbres, feuilles, . . .) ou encore les surfaces métalliques, . . . Le caractère rugueux d'une surface n'est pas un paramètre intrinsèque à la surface mais dépend de l'onde électromagnétique éclairant celle-ci.

L'évaluation de la diffusion électromagnétique est nécessaire dans de nombreuses applications allant du domaine optique au domaine radar, en passant par la télédétection ou les télécommunications. En particulier, ce calcul représente un grand intérêt pour les problèmes directs comme le dimensionnement d'équipements (par exemple les télécommunications en milieu urbain) ou l'évaluation d'algorithmes de télédétection. De plus, la connaissance de la diffusion est souvent un paramètre d'entrée pour les problèmes inverses : à partir de l'effet (le champ diffusé obtenu par simulations ou par mesures), on tente de retrouver les caractéristiques du diffuseur.

La diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses est en général évaluée à partir de méthodes asymptotiques. À partir d'hypothèses simplificatrices, le champ diffracté par la surface est approché de manière analytique. Toutefois, leur domaine de validité n'est pas toujours connu, et surtout, ces méthodes ne recouvrent pas nécessairement tous les domaines d'intérêts ci-dessus. Par exemple elles ne rendent pas compte de toutes les quantités d'intérêts (comme la phase).

Une alternative est l'utilisation de méthodes rigoureuses comme par exemple la méthode des Différences Finies (FDTD), ou la Méthode des Moments (MoM ou aussi appelée méthode de résolution des Équation Intégrale) et plus rarement la méthode des Éléments Finis. Cependant, ces méthodes présentent, elles aussi, des limitations en terme de champ d'application. Elles nécessitent des capacités de calculs importantes, en terme de complexité calculatoire et en terme de mémoire requise. Certaines configurations ne sont pas abordables par ces techniques. Traiter des échantillons de surface rugueuse, suffisamment étendus en terme de longueur d'onde tout en prenant en compte les multiples échelles de rugosités fines, est un défi numérique difficile.

Généralement, pour le calcul de la diffusion, la MoM est préférée : seule la surface est discrétisée au lieu de tout le volume de calcul, et par conséquent la condition de radiation bornant le domaine de calcul est déjà incluse dans la formulation. Toutefois, toutes les méthodes rigoureuses conduisent à la résolution d'un système linéaire, et celui issu de la MoM est dense. Finalement deux problèmes connexes se posent.

- Le premier concerne la taille du système linéaire. Pour représenter les échelles de plus en plus “petites”, la surface doit être discrétisée de plus en plus finement. Ceci mène inéluctablement à l’augmentation de la taille N du problème numérique à résoudre.
- Le second concerne le coût numérique pour résoudre le système linéaire. Les méthodes de résolution directe, comme la méthode Gauss ou la factorisation LU, restent limitées en terme de performances, autant en terme de mémoire en $O(N^2)$ qu’en terme de temps de calcul en $O(N^3)$. Les méthodes de résolution itératives basées sur les sous-espace de Krylov sont bien plus efficaces car leur temps de calcul est en $O(N_{\text{iter}}N^2)$. Plus le nombre d’itérations N_{iter} est petit et plus la méthode itérative devient intéressante.

De plus, il faut noter que dans le cas de surfaces aléatoires, une méthode de Monte-Carlo, exacerbant les difficultés, est souvent utilisée pour obtenir une statistique représentative.

L’objectif de cette thèse est d’établir des outils pour prendre en compte efficacement les rugosités fines dans le calcul de la diffusion électromagnétique à partir de méthodes rigoureuses. Conformément aux problèmes soulevés ci-avant, deux directions complémentaires sont suivies.

Le premier axe s’attachera à réduire la nombre de degrés de liberté N en cherchant une condition équivalente représentant les rugosités fines périodiques (ou aléatoires). Cette condition équivalente est construite en s’appuyant sur les travaux antérieurs menés sur l’homogénéisation des rugosités surfaciques. Poirier [56] a obtenu des résultats pour des surfaces mono-dimensionnelles parfaitement métalliques éclairées par une onde plane en polarisation Transverse Magnétique (TM). La condition aux limites équivalente est exacte pour des surfaces possédant des rugosités périodiques et les heuristiques évaluées dans le cas de surfaces aléatoires sont encourageantes. Pour éviter de se cantonner à un problème particulier et risquer de se restreindre à des spécificités de celui-ci, nous chercherons dans le cadre de surfaces 1D présentant des irrégularités périodiques à établir une condition équivalente pour l’autre polarisation (Transverse Électrique TE), puis pour des interfaces rugueuses séparant deux milieux diélectriques. Nous souhaitons mettre en évidence la possibilité d’une condition équivalente pour traiter les rugosités périodiques.

Le deuxième axe se consacrera à réduire le nombre d’itérations dans la méthode itérative de type Krylov. La stratégie classique est de transformer le système linéaire issu de la MoM en un système linéaire équivalent numériquement plus facile à résoudre : le nouveau système linéaire nécessite un nombre d’itérations N_{iter} plus petit. Pour réaliser cette transformation, un préconditionneur est utilisé et généralement il est construit à partir de propriétés purement algébriques. Partant de considérations physiques, nous proposerons un préconditionneur adapté aux rugosités quasi-planaires pour diminuer le coût dans la résolution du problème issu de la MoM.

Organisation du manuscrit

Le **Chapitre 1** est consacré à une présentation générale du cadre de cette étude. Les surfaces considérées sont invariantes suivant une direction et éclairées par une onde plane soit en polarisation TM soit en polarisation TE. Le problème de diffusion (diffraction) se simplifie en un problème en deux dimensions. À partir des équations de Maxwell en régime harmonique, les différents systèmes d'équations intervenant dans le reste du document sont exposés. Ensuite, les rugosités surfaciques considérées ici sont illustrées. Puis, les différentes méthodes usuelles pour résoudre un problème de diffusion sont succinctement présentées.

Dans le **Chapitre 2**, la méthode basée sur l'homogénéisation est présentée. L'idée de la méthode d'homogénéisation est de substituer la condition aux limites posée sur la surface rugueuse par une *condition aux limites modifiée* posée sur un plan. En effet, les rugosités fines engendrent un problème numériquement difficile. Cette procédure d'homogénéisation repose sur trois outils : une séparation des différentes échelles, un développement asymptotique et un développement de Taylor. Pour finir, l'évaluation de cette condition aux limites modifiée passe par la résolution d'un problème auxiliaire qui ne dépend ni de la fréquence, ni de l'angle d'incidence. Dans un premier temps, nous prolongeons les résultats obtenus dans [56] pour le cas de surfaces parfaitement métalliques éclairées en polarisation TM. Dans un deuxième temps, nous appliquons la procédure au problème d'une surface métallique 1D éclairée par une onde plane en polarisation TE. La condition aux limites du problème en polarisation TM est de type Dirichlet et celle du problème en polarisation TE est de type Neumann. Par conséquent, la présence de la dérivée normale dans la condition aux limites implique des modifications dans le système auxiliaire ainsi que dans son obtention. Une analyse des résultats obtenus par la procédure d'homogénéisation à l'ordre 1 pour des surfaces métalliques éclairées dans les deux polarisations est faite.

Le **Chapitre 3** étend la technique d'homogénéisation au cas d'interfaces rugueuses séparant des milieux diélectriques éclairées par une onde plane en polarisation TM. Dans cette configuration, le problème devient un problème de transmission. Les relations de continuité du champ électromagnétique impliquent deux conditions aux limites : l'une de type Dirichlet et l'autre de type Neumann. Ce problème de transmission peut être vu comme une combinaison des problèmes traités au Chapitre 2. La procédure d'homogénéisation mise en place au Chapitre 2 est alors appliquée de manière systématique au cas d'une interface rugueuse séparant deux milieux diélectriques. Les problèmes auxiliaires ne dépendent ni de la fréquence ni de l'angle d'incidence.

Dans le **Chapitre 4**, un préconditionneur physique, exploitant la nature quasi-planaire de la surface rugueuse, a été développé et intégré dans un code traditionnel d'Équation Intégrale 2D (métallique parfait en polarisation TM). Dans le cas particulier d'un plan infini, le problème électromagnétique peut être résolu analytiquement et l'information spectrale est déduite (modes de Floquet). Cette information spectrale n'est pas assez précise pour donner une solution au problème de diffraction par une surface rugueuse. En revanche, elle est une approximation raisonnable de la matrice impédance associée à la surface (moyennement) rugueuse, et elle est injectée lors de la résolution itérative (type Krylov) du système linéaire, aidant à avoir une meilleure convergence.

Liste des publications relative à la thèse présentée

Articles :

- (1) S. Tournier, P. Borderies, J.-R. Poirier – *Integral Equations Physically-based Preconditioner for Two-Dimensional Electromagnetic Scattering by Rough Surfaces* –IEEE Antennas and Propagation, 2011, vol 59, no 10, pp. 3764-3771
- (2) S. Tournier – *Modélisation de la diffusion électromagnétique par surfaces rugueuses à partir de méthodes rigoureuses* – REE, n° Juin 2010.

Conférences :

- (3) S. Tournier, P. Borderies, J.-R. Poirier – *Analysis of Performances of a Floquet Mode Preconditioner for Electromagnetic Scattering Computation by Rough Surfaces* – PIERS 2009 Beijing
- (4) J.-R. Poirier, P. Borderies, A. Bendali, S. Tournier – *High order asymptotic expansion for the scattering of fast oscillating periodic surfaces* – WAVES 2009 Pau
- (5) S. Tournier, P. Borderies, J.-R. Poirier – *A Physically-based Preconditioner for 2D Electromagnetic Rough Surfaces Scattering Problems* – WAVES 2009 Pau
- (6) S. Tournier, P. Borderies, J.-R. Poirier – *Analysis of Homogenization Techniques for Improving Electromagnetic Scattering Computation by Rough Surfaces* – PIERS 2010 Cambridge

Chapitre 1

Présentation générale

Sommaire

1.1	Le problème 2D de diffraction électromagnétique	5
1.1.1	Généralités	5
1.1.2	Condition de Radiation	10
1.1.3	Cas Transverse Magnétique – E-polarisation ($u = E_z$)	12
1.1.4	Cas Transverse Électrique – H-polarisation ($u = H_z$)	15
1.1.5	Coefficient de diffusion et Surface Équivalente Radar	16
1.2	Surfaces rugueuses	17
1.2.1	Rugosités périodiques	17
1.2.2	Rugosités aléatoires	18
1.2.3	Critère de Rayleigh	20
1.3	Méthodes de résolution : présentation non-exhaustive	22
1.3.1	Méthodes basées sur une <i>approximation</i>	22
1.3.2	Approche <i>rigoureuse</i>	23

L’objectif de ce chapitre est d’introduire le problème de diffraction ainsi que de donner les conséquences de l’invariance, et par conséquent les systèmes d’équations qui interviennent dans la suite du document. Sans être exhaustif, nous rappelons ensuite quelques éléments sur les surfaces rugueuses et nous précisons le cadre dans lequel les chapitres suivant se positionnent.

1.1 Le problème 2D de diffraction électromagnétique

1.1.1 Généralités

Les problèmes que nous cherchons à modéliser électromagnétiquement concernent les surfaces rugueuses. Nous sommes intéressés par la modélisation de surfaces naturelles (par exemple les sols) comme par la modélisation de surfaces artificielles (par exemple des circuits imprimés ou un toit recouvert de tuiles). Toutefois, nous supposons l’hypothèse simplificatrice d’une invariance de la surface suivant une direction. De plus, nous supposons les milieux linéaires et isotropes.

Géométrie du problème : surface 1D

La géométrie que nous considérons présentent une invariance suivant la direction de l’axe \hat{z} . De plus, pour s’affranchir des effets de diffraction sur les deux bords de la surface, le problème est “périodisé”. En outre, cette périodisation donne le cadre mathématique adéquat pour

la procédure d'homogénéisation (voir par exemple section 4.6 de [56]). Une alternative serait l'utilisation d'un faisceau à bande limitée (*tapered beam*) comme les faisceaux gaussiens.

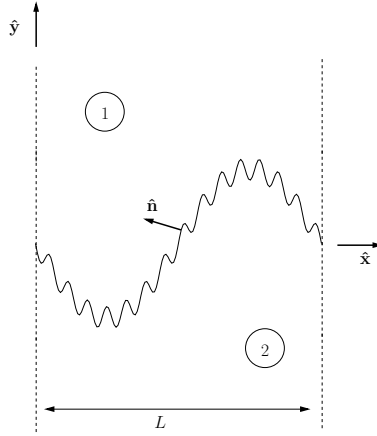


FIGURE 1.1 – Schéma général du problème

Dans le cas considéré FIG. 1.1, l'interface séparant deux milieux se définit en toute généralité par la relation $S(x, y) = 0$. Cette surface a une période L suivant la direction \hat{x} , c'est-à-dire $S(x + L, y) = S(x, y)$. Les extrema de la surface sont respectivement notés h_{max} et h_{min} .

Le vecteur $\hat{\mathbf{n}}$ normal à cette interface est défini par,

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla_{\mathbf{r}} S}{\|\nabla_{\mathbf{r}} S\|}$$

où $\nabla_{\mathbf{r}}$ représente l'opérateur gradient pris au point $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Sans perdre en généralité, la surface sera supposée de la forme : $S(x, y) = y - \gamma_{\delta}(x) = 0$. Implicitement, nous considérons le vecteur normal allant du milieu 2 vers le milieu 1, ou encore $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_{2 \rightarrow 1}$. Ainsi, l'expression du vecteur normal dans le repère $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ est,

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathcal{N} \begin{vmatrix} -\gamma'_{\delta} \\ +1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

avec $\gamma'_{\delta} = \frac{d\gamma_{\delta}}{dx}(x)$ et $\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma'^2_{\delta}}}$. Le terme \mathcal{N} est un facteur de normalisation. Il dépend de la position x .

La dérivée normale d'un champ scalaire u est définie par le produit scalaire,

$$\nabla_{\mathbf{r}} u \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{vmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \\ \partial_z u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\mathcal{N}\gamma'_{\delta} \\ \mathcal{N} \\ 0 \end{vmatrix} = -\mathcal{N}\gamma'_{\delta}\partial_x u + \mathcal{N}\partial_y u := \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u \quad (1.1)$$

Cette surface sépare deux milieux supposés non-magnétiques. Les deux milieux considérés ici sont des milieux diélectriques, avec ou sans perte. Typiquement, le milieu 1 est de l'air et le milieu 2 est : soit un métal parfait (de conductivité infinie), soit un diélectrique parfait (de permittivité purement réelle) soit un diélectrique à perte (de permittivité complexe).

L'invariance suivant la direction de l'axe \hat{z} simplifie le problème. Vu qu'il n'y a pas de variations suivant cette direction, les termes portant les dérivées de cette direction ∂_z sont nuls.

Polarisations

L'onde incidente est une onde plane et cette onde peut avoir deux polarisations. Dans le cas de problème sans invariance, la définition des différentes polarisations est claire. Mais la terminologie concernant la polarisation Transverse Magnétique (TM) ou Transverse Électrique (TE) est ambiguë dans le cas de surface 1D. Pour clarifier la nomenclature et éviter les confusions, nous utilisons les définitions suivantes (e.g., section 2.1.2 de [75]),

- dans le cas de surfaces 1D, le problème 2D correspondant est identifié par TM lorsque le champ Magnétique est transverse à la direction d'invariance, c'est-à-dire $H_z = 0$. Toutefois, dans le cas de surfaces 2D, la polarisation TM correspond à un champ Électrique dans le plan d'incidence (celui contenant la direction de propagation incidente). Elle est aussi appelée v-polarisation, ou p-polarisation ou encore H-polarisation.
- dans le cas de surfaces 1D, le problème 2D correspondant est identifié par TE lorsque le champ Électrique est transverse à la direction d'invariance, c'est-à-dire $E_z = 0$. Cependant, pour les surfaces 2D, la polarisation est dite TM quand le champ Électrique est perpendiculaire au plan. Cette polarisation est aussi appelée h-polarisation, ou s-polarisation, ou encore E-polarisation.

En d'autres termes, entre les surfaces 1D et les surfaces 2D, la nomenclature sur la polarisation est en quelque sorte inversée.

Pour résumer dans le cas de surfaces 1D, les deux polarisations sont : TM ($H_z = 0$) ou TE ($E_z = 0$). Le champ incident sera dans l'une ou l'autre polarisation, et du fait de l'invariance le champ diffracté sera dans cette même polarisation. Il ne peut pas y avoir de polarisation croisée car les problèmes sont découplés.

Équations de Maxwell

Le champ électromagnétique est régi par les équations de Maxwell [45]. En régime harmonique de pulsation ω (convention $e^{-i\omega t}$) et en considérant les milieux non-magnétiques, linéaires et isotropes, ces équations sont,

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^{\text{tot}} - i\omega\mu_0\mathbf{H}^{\text{tot}} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}^{\text{tot}} + i\omega\epsilon\mathbf{E}^{\text{tot}} = \mathbf{J} \quad (1.3)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\epsilon\mathbf{E}^{\text{tot}}) = \rho$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}^{\text{tot}} = 0$$

où $\nabla_{\mathbf{r}}$ représente l'opérateur gradient pris au point $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Dans le repère cartésien $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, il s'écrit : $\nabla_{\mathbf{r}} = \partial_x \hat{\mathbf{x}} + \partial_y \hat{\mathbf{y}} + \partial_z \hat{\mathbf{z}}$. L'invariance suivant la direction $\hat{\mathbf{z}}$ implique qu'il n'y a pas de dépendance par rapport à la coordonnée z , ou en d'autre terme $\partial_z = 0$. Ainsi l'opérateur gradient se réduit à $\nabla = \partial_x \hat{\mathbf{x}} + \partial_y \hat{\mathbf{y}}$.

Les quantités \mathbf{E}^{tot} et \mathbf{H}^{tot} désignent respectivement le champ électrique total et le champ magnétique total, \mathbf{J} et ρ désignent respectivement les densités de courant et de charge. Les paramètres ϵ et μ_0 sont les paramètres constitutifs des milieux et ils sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique (du vide car le milieu est non-magnétique).

Les milieux considérés sont des milieux diélectriques, par conséquent ils sont dépourvus de densité de charge électrique : $\rho = 0$. De plus, si les milieux sont des milieux purement diélectriques, alors dans ce cas la densité de courant \mathbf{J} est nulle. Pour des milieux diélectriques

à perte conductrice, la loi d'Ohm locale s'écrit,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}^{\text{tot}}$$

où σ représente la conductivité électrique du milieu considéré. Ainsi, l'équation de Maxwell-Ampère Eq. (1.3) se réécrit,

$$\nabla \times \mathbf{H}^{\text{tot}} + i\omega \underline{\epsilon} \mathbf{E}^{\text{tot}} = 0 \quad (1.4)$$

avec $\underline{\epsilon} = \epsilon + i\sigma/\omega$ la permittivité équivalente complexe. Les milieux peuvent aussi être à perte diélectrique, c'est-à-dire que la permittivité ϵ caractéristique du diélectrique possède une partie imaginaire. Dans la suite, la permittivité est notée $\underline{\epsilon}$ et peut prendre des valeurs complexes.

Dû fait de l'invariance, les deux polarisations conduisent à des simplifications différentes.

- **Polarisation TM** ($H_z = 0$) : l'équation de Maxwell-Ampère Eq. (1.4) se réduit à,

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x \end{vmatrix} = -i\omega \underline{\epsilon} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \implies \begin{cases} E_x = 0 = E_y \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = -i\omega \underline{\epsilon} E_z \end{cases}$$

De plus, l'équation de Maxwell-Faraday Eq. (1.2) devient,

$$\begin{vmatrix} \partial_y E_z \\ -\partial_x E_z \\ 0 \end{vmatrix} = +i\omega \mu_0 \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Finalement, la connaissance de la composante E_z suffit pour connaître tout le champ électromagnétique. Éliminant les composantes magnétiques dans l'équation de Maxwell-Ampère, il vient l'équation de Helmholtz suivante,

$$\left\{ \nabla^2 + \underline{\epsilon}_r k^2 \right\} E_z = 0 \quad (1.6)$$

avec $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ le nombre d'onde dans le vide, et $\underline{\epsilon}_r = \epsilon_r + i\sigma/\omega \epsilon_0$ la permittivité relative complexe.

- **Polarisation TE** ($E_z = 0$) : de manière quasiment symétrique, de l'équation Maxwell-Faraday Eq. (1.4) est déduit : $H_x = 0 = H_y$, puis l'équation de Maxwell-Ampère Eq. (1.3) implique que seule la connaissance de la composante H_z suffit pour connaître tout le champ électromagnétique. En toute clarté, cela s'écrit,

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = +i\omega \mu_0 H_z \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \partial_y H_z \\ -\partial_x H_z \end{vmatrix} = -i\omega \underline{\epsilon} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

Combinant ces deux dernières équations, la composante H_z vérifie l'équation de propagation suivante,

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\underline{\epsilon}_r} \nabla H_z \right) + k^2 H_z = 0$$

Dans le cas où le milieu est homogène, cette équation devient l'équation d'Helmholtz,

$$\left\{ \nabla^2 + \underline{\epsilon}_r k^2 \right\} H_z = 0 \quad (1.8)$$

Dans la suite du document, pour simplifier les notations, les quantités seront indicées par le milieu. Par exemple, les nombres d'onde seront pour chaque milieu,

$$k_p^2 = \underline{\epsilon}_{rp} k^2 \quad p = 1, 2$$

Conditions aux Limites

Le champ électromagnétique satisfait les équations de Maxwell. Elles impliquent qu'il vérifie des équations de continuité à la traversée de l'interface,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1^{\text{tot}} - \mathbf{E}_2^{\text{tot}}) = 0 \quad (1.9)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1^{\text{tot}} - \mathbf{H}_2^{\text{tot}}) = \mathbf{J}_s \quad (1.10)$$

où \mathbf{J}_s représente la densité surfacique de courant. Lorsque les milieux sont des milieux diélectriques, ce courant surfacique est nul. Les milieux sont non-magnétiques donc la composante normale du champ magnétique est continue : $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_1^{\text{tot}} - \mathbf{H}_2^{\text{tot}}) = 0$.

Il faut aussi distinguer les deux polarisations.

- **Polarisation TM** : en tenant compte des simplifications induites par l'invariance, l'équation de continuité sur le champ électrique (1.9) donne,

$$E_{z1} - E_{z2} = 0 \quad (1.11)$$

et l'équation de continuité sur le champ magnétique (1.10) donne, en considérant l'équation de Maxwell-Faraday (1.5) et la définition de la dérivée normale Eq. (1.1),

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} E_{z1} - \partial_{\hat{\mathbf{n}}} E_{z2} = 0 \quad (1.12)$$

- **Polarisation TE** : de façon quasiment symétrique, l'équation de continuité sur le champ magnétique (1.10) donne,

$$H_{z1} - H_{z2} = 0 \quad (1.13)$$

et l'équation de continuité sur le champ électrique (1.9) donne en simplifiant grâce à l'équation de Maxwell-Ampère (1.7),

$$\frac{\partial_{\hat{\mathbf{n}}} H_{z1}}{\epsilon_{r1}} - \frac{\partial_{\hat{\mathbf{n}}} H_{z2}}{\epsilon_{r2}} = 0 \quad (1.14)$$

Si le milieu 2 est un métal parfait, les équations se réduisent à seulement,

$$\mathbf{TM} : E_{z1} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{TE} : \partial_{\hat{\mathbf{n}}} H_{z1} = 0 \quad (1.15)$$

Dans le cas de surfaces 1D, les problèmes de diffraction électromagnétique et de diffraction acoustique sont identiques. Ils se résument à la résolution d'une équation de propagation scalaire (Eq. (1.6) ou Eq. (1.8)) avec des conditions aux limites (CL) de Dirichlet (Eq. (1.11) ou Eq. (1.13)) et de Neumann (Eq. (1.12) ou Eq. (1.14)). Dans la suite du document, le champ est déterminé par la variable scalaire u qui représente :

- la composante suivant l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ du champ électrique (E_z) pour la polarisation TM
- la composante suivant l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ du champ magnétique (H_z) pour la polarisation TE.

La connaissance du champ scalaire u (une seule composante) permet de déterminer complètement le champ électromagnétique.

1.1.2 Condition de Radiation

Pour caractériser le champ électromagnétique, les équations de Maxwell et les conditions aux limites ne suffisent pas. Une condition sur le comportement du champ à l'infini doit être ajoutée. Le champ doit vérifier une condition de radiation, et la plus utilisée est celle de Sommerfeld, écrite ici en 2D,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\partial_r u - i|k|u \right) = 0$$

où r est la coordonnée sphérique d'un point. Ici, le champ u représente le champ diffracté. Cette condition de radiation exprime l'adaptation du champ diffracté u à l'infini.

La condition de radiation est traduite pour la géométrie périodique. Pour cela, les modes de Floquet sont utilisés. Pour ne pas alourdir la présentation des modes de Floquet, nous n'indexons pas par les milieux.

Modes de Floquet ([55] p.298-301)

L'onde plane n'est pas périodique mais elle est k_x -quasi-périodique, c'est-à-dire,

$$u^{\text{inc}}(x + L, y) = e^{+ik_x L} u^{\text{inc}}(x, y)$$

Par conséquent, comme l'onde plane est considérée comme champ incident, les champs considérés sont aussi k_x -quasi-périodiques.

Nous posons $v(x, y) = e^{-ik_x x} u(x, y)$ alors la fonction v est de période L , et ainsi elle se décompose en série de Fourier,

$$v(x, y) = \sum_n v_n(y) e^{\frac{i2\pi n}{L} x} \quad \text{avec} \quad v_n(y) = \frac{1}{L} \int_0^L v(x, y) e^{-\frac{i2\pi n}{L} x} dx$$

et par suite, le champ u s'écrit,

$$u(x, y) = \sum_n u_n(y) e^{i\alpha_n x} \quad \text{et} \quad u_n(y) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, y) e^{-i\alpha_n x} dx$$

avec $\alpha_n = \frac{2\pi}{L}n + k_x$. Ce développement est injecté dans l'équation d'Helmholtz (équation de propagation Eq. (1.6) ou Eq. (1.8)), ce qui donne l'équation différentielle, pour $y > h_{\text{max}}$ ou $y < h_{\text{min}}$,

$$u_n''(y) + (k^2 - \alpha_n^2) u_n(y) = 0$$

dont les solutions générales sont,

$$u_n(y) = u_n^+ e^{+i\gamma_n y} + u_n^- e^{-i\gamma_n y} \quad \text{avec} \quad \gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha_n^2} & , \quad |\alpha_n| \leq k \\ i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} & , \quad |\alpha_n| > k \end{cases}$$

Du point de vue du milieu 1, les ondes indexées “+” correspondent à des ondes s'éloignant de la surface : ceux sont des ondes sortantes, et les ondes indexées “-” correspondent à des ondes s'approchant de la surface : ceux sont des ondes entrantes. Les ondes diffractées par la surface sont nécessairement sortantes, seuls les modes indexés “+” sont conservés.

Du point de vue du milieu 2, c'est l'inverse. Seules les ondes sortantes indexées "–" sont conservées. Pour ce qui suit, nous nous restreignons au milieu 1 et les éléments concernant le milieu 2 seront adaptés en conséquence.

Finalement, le champ diffracté se décompose en mode de Floquet au dessus de la surface ($y > h_{max}$),

$$u(x, y) = \sum_n u_n e^{i\alpha_n x} e^{i\gamma_n y} \quad (1.16)$$

Dans la zone $\gamma_\delta(x) \leq y \leq h_{max}$, la décomposition en mode de Floquet n'est plus rigoureusement valable. La supposer revient à faire l'hypothèse de Rayleigh.

Si les milieux sont à pertes, le développement en modes de Floquet précédent reste valable. En revanche, l'interprétation en terme de modes propagatifs et évanescents est plus délicate, puisque les constantes de propagation γ_n ne sont plus purement imaginaire ou purement réelle. Dans ce cas, le nombre d'onde k est complexe. Cependant, deux directions de propagation se distinguent tout de même. Et dû fait des pertes le champ s'amortit, c'est-à-dire que suffisamment loin de la surface, ce champ est nul. Par conséquent, la discussion sur la condition de radiation a peu d'importance.

Si les milieux ne sont pas homogènes, le développement en modes de Floquet reste possible. Toutefois, l'équation différentielle fait intervenir la permittivité et sa solution n'est plus directe car ses coefficients deviennent variables. Mais il est généralement possible de se placer sur la ligne $y = +H$ loin de la surface telle que la permittivité soit constante, auquel cas le développement précédent est valable.

Condition de radiation périodique

Les modes ayant une constante de propagation γ_n purement imaginaire sont évanescents, c'est-à-dire qu'ils ne contribuent pas au champ loin de la surface. Les modes propagatifs sont ceux dont la constante de propagation γ_n est purement réelle, et ils contribuent au champ loin de la surface.

Sur une ligne $y = +H > h_{max}$, le champ diffracté s'écrit,

$$u(x, H) = \sum_{n \in \mathcal{M}_{propa}} u_n e^{i\alpha_n x} e^{i\gamma_n H} + \sum_{n \in \mathcal{M}_{evane}} u_n e^{i\alpha_n x} e^{-|\gamma_n|H} \quad (1.17)$$

avec \mathcal{M}_{propa} l'ensemble représentant les modes propagatifs. Cet ensemble n'est pas vide (il contient au moins le mode fondamental : $n = 0$) et il est fini.

Pour le problème périodique, la condition de radiation (CR) sur le champ diffracté est donnée par Eq. (1.17). Sur la ligne $y = +H$, la condition de Sommerfeld est vérifiée par chaque mode.

Opérateur Dirichlet-Neumann : domaine tronqué

Le domaine de travail comporte deux bords périodiques et l'interface séparant les deux milieux. Ce domaine n'est pas borné dans la direction \hat{y} . Dans la suite du document, le domaine devra parfois être tronqué. Par fermer le domaine, nous définissons les deux frontières suivantes,

1. $\Gamma_1^H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, y = +H > h_{max} \right\}$
2. $\Gamma_2^H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, y = -H < h_{min} \right\}$

sur lesquelles un opérateur est appliqué pour représenter le milieu infini et la condition de radiation. L'opérateur adapté est l'opérateur Dirichlet-to-Neumann,

$$\partial_y u|_{\Gamma_H} = T_k(u|_{\Gamma_H})$$

où k représente le nombre d'onde. Cet opérateur est défini par,

$$T_k(w)(x) = \sum_n i\gamma_n w_n e^{i\alpha_n x} \quad \text{avec} \quad w_n = \frac{1}{L} \int_0^L w(x) e^{-i\alpha_n x} dx \quad (1.18)$$

où $w(x) = u|_{\Gamma_H} = u(x, H)$ est le champ diffracté loin de la surface. Il faut être vigilant car pour le milieu 2, les ondes sortantes ont une direction opposée, c'est-à-dire $T_{k_2}(w) = \sum -i\gamma_{2n} w_n e^{i\alpha_{2n}}$.

La CR est donnée sur le champ diffracté et elle s'exprime en fonction du champ total,

$$\partial_y (u^{\text{tot}} - u^{\text{inc}})|_{\Gamma_H} = T_k((u^{\text{tot}} - u^{\text{inc}})|_{\Gamma_H})$$

Dans le cas limite à fréquence nulle ($k = 0$), la décomposition, similaire à celle de Fourier, s'écrit,

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 0} u_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} e^{-\frac{2\pi n}{L}y}$$

et l'opérateur pour borner le domaine devient,

$$T_0(w)(x) = \sum_{n \geq 0} -\frac{2\pi n}{L} w_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \quad \text{avec} \quad w_n = \frac{1}{L} \int_0^L w(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} dx \quad (1.19)$$

sans oublier la modification du signe dans le cas du milieu 2.

1.1.3 Cas Transverse Magnétique – E-polarisation ($u = E_z$)

Le système d'équations régissant le problème de diffraction en polarisation TM correspond à l'équation de Helmholtz Eq. (1.6) avec une CL de Dirichlet Eq. (1.11) et une CL de Neumann Eq. (1.12) ainsi que deux CR, c'est-à-dire que le problème à résoudre est,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\nabla^2 + k_1^2\} u_1^{\text{tot}} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega_1^\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, y > \gamma_\delta(x)\} \\ [u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma^\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, y = \gamma_\delta(x)\} \\ [\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma^\delta \\ \{\nabla^2 + k_2^2\} u_2^{\text{tot}} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega_2^\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, y < \gamma_\delta(x)\} \\ +\text{CRs} \end{array} \right. \quad (1.20)$$

où les crochets $[\bullet]$ représentent les sauts pris en $y = \gamma_\delta(x)$, autrement dit les continuités sur le champ,

$$[u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0 \quad \iff \quad u_1^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} - u_2^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} = 0$$

$$[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0 \quad \iff \quad \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_1^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} - \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_2^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} = 0$$

Le champ u^{tot} représente le champ total qui se décompose en une partie diffractée notée respectivement u^{diff} dans le milieu 1 et u_T dans le milieu 2, et une partie incidente u^{inc} ,

$$u_1^{\text{tot}} = u^{\text{diff}} + u^{\text{inc}} \quad \text{et} \quad u_2^{\text{tot}} = u_T$$

avec u^{inc} le champ incident donné par une onde plane.

Pour obtenir le système Eq. (1.20), aucune hypothèse sur les caractéristiques des milieux n'est faite. Par ailleurs, la permittivité ϵ_r n'intervient pas dans les CL mais uniquement dans l'équation de propagation.

Loi de Descartes – Coefficient de Fresnel (Réflexion et Transmission)

Dans la partie concernant l'homogénéisation, nous serons amenés à analyser les résultats à l'aide des coefficients de Fresnel. Comme les résultats numériques ne traitent que les milieux homogènes sans pertes, la présentation des coefficients de réflexion et de transmission, aussi dits coefficients de Fresnel, est restreinte à ces cas (homogènes sans perte). Pour une présentation générale, nous renvoyons à [55].

Une interface plane séparant deux milieux diélectriques sans pertes est considérée et illustrée par la FIG. 1.2. Le "contraste" ϵ_c entre le 2 milieux est défini par,

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

et par conséquent les nombres d'onde sont reliés par la relation : $k_2 = \sqrt{\epsilon_c}k_1$. Si l'interface sépare les milieux air/diélectrique, alors le paramètre est : $\epsilon_c = \epsilon_r$.

L'interface est éclairée par une onde plane dont la direction est donnée par le vecteur d'onde $\mathbf{k}_1^{\text{inc}}$. Cette onde incidente engendre une onde réfléchi dans la direction \mathbf{k}_1^{R} et une onde transmise dans la direction \mathbf{k}_2^{T} .

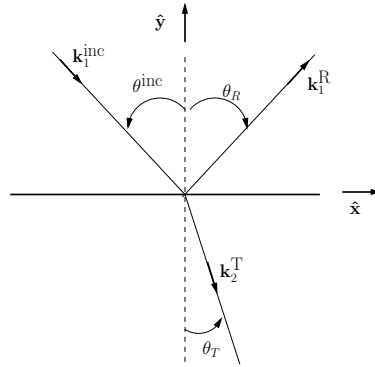


FIGURE 1.2 – Schéma illustrant les lois de Descartes (ici $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$)

Les exposants {inc, R, T} signifie respectivement incident, réfléchi et transmis. Les modules des vecteurs d'onde, notés k_p , correspondent aux nombres d'onde k_p des milieux.

Le vecteur d'onde $\mathbf{k}_1^{\text{inc}}$ s'écrit dans la repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$,

$$\mathbf{k}_1^{\text{inc}} = k_1 \sin \theta^{\text{inc}} \hat{x} - k_1 \cos \theta^{\text{inc}} \hat{y}$$

où $\theta^{\text{inc}} = \widehat{(\hat{y}, \mathbf{k}_1^{\text{inc}})} \in] -\pi/2, \pi/2[$ est l'angle d'incidence orienté.

De façon analogue, les vecteurs d'onde réfléchi et transmis sont,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{\text{R}} &= k_1 \sin \theta_R \hat{x} + k_1 \cos \theta_R \hat{y} \quad \text{avec} \quad \theta_R = \widehat{(\hat{y}, \mathbf{k}_1^{\text{R}})} \\ \mathbf{k}_2^{\text{T}} &= k_2 \sin \theta_T \hat{x} - k_2 \cos \theta_T \hat{y} \quad \text{avec} \quad \theta_T = \widehat{(-\hat{y}, \mathbf{k}_2^{\text{T}})} \end{aligned}$$

À partir des relations de continuité à travers une interface plane se déduit la deuxième loi de Descartes-Snell qui donne la relation suivante entre les angles,

$$\begin{aligned}\theta_R &= -\theta^{\text{inc}} \\ k_1 \sin \theta^{\text{inc}} &= k_2 \sin \theta_T\end{aligned}$$

ainsi nous définissons le rapport angulaire,

$$\Theta_c(\theta^{\text{inc}}, \epsilon_c) = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta^{\text{inc}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{(\sin \theta^{\text{inc}})^2}{\epsilon_c}}}{\cos \theta^{\text{inc}}} \quad (1.21)$$

Le cas limite d'incidence rasante $\theta^{\text{inc}} = \pm\pi/2$ doit être manipulé avec précaution. L'autre cas limite : milieu à très fort contraste $\epsilon_c \rightarrow \infty$, ne pose pas de difficulté ici.

L'interface est plane (en $y = 0$) et infinie, les champs réfléchis et transmis s'écrivent,

$$(y \geq 0) \begin{cases} u^{\text{diff}} = R_0 e^{+ik_{1y}y} e^{+ik_{1x}x} \\ u^{\text{inc}} = e^{-ik_{1y}y} e^{+ik_{1x}x} \end{cases} ; \quad (y \leq 0) \quad u_T = T_0 e^{-ik_{2y}y} e^{+ik_{2x}x}$$

où R_0 et T_0 sont respectivement le coefficient de réflexion et de transmission pour le plan infini. En injectant dans les relations de continuité (CL), il vient directement,

$$\begin{aligned}[u_{1,2}^{\text{tot}}] &= 0 \quad \iff \quad 1 + R_0 = T_0 \\ [\partial_{\hat{y}} u_{1,2}^{\text{tot}}] &= 0 \quad \iff \quad k_{1y}(1 - R_0) = k_{2y}T_0\end{aligned}$$

où l'on reconnaît les deux relations classiques liant les coefficients de réflexion et de transmission. L'expression des coefficients se déduisent,

$$R_0 = \frac{k_{1y} - k_{2y}}{k_{1y} + k_{2y}} = \frac{1 - \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}}{1 + \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}} = \frac{2}{1 + \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}} \quad (1.22)$$

Ces deux coefficients dépendent de l'angle d'incidence θ^{inc} et des permittivités. À incidence rasante ($\theta^{\text{inc}} = \pm\pi/2$), les coefficients deviennent, $R_0 = -1$ et $T_0 = 0$, c'est-à-dire que toute l'onde est réfléchi (dans une direction rasante $\theta_R = \mp\pi/2$).

Dans les applications que nous considérons, l'onde va toujours d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent (c'est-à-dire que nous avons toujours $\epsilon_c > 1$). Par conséquent, il n'y a pas d'angle incidence limite. Cependant, l'angle limite de transmission, qui correspond à l'angle de l'onde transmise lorsque l'onde incidente est rasante, est donné par : si $\theta^{\text{inc}} = \pm\pi/2$, alors $\sin \theta_T = \pm 1/\sqrt{\epsilon_c}$. Ces deux angles limites signifient : l'onde transmise ne peut jamais être rasante, et pour toutes les valeurs possibles d'angle d'incidence, l'angle de transmission sera toujours compris dans l'intervalle $[0, \arcsin(1/\sqrt{\epsilon_c})]$.

Dans cette polarisation, le coefficient de réflexion ne peut pas s'annuler (à part pour le cas limite $\epsilon_c = 1$ sans intérêt pratique). En d'autres termes, il n'existe pas d'angle de Brewster.

Cas métallique

Si le milieu 2 est un métal parfait, alors le milieu 1 considéré est de l'air et la CL se réduit à une seule condition de Dirichlet Eq. (1.15). Le problème de diffraction consiste au système suivant,

$$\begin{cases} \{\nabla^2 + k^2\} u^{\text{tot}} = 0 & \text{dans } \Omega^\delta \\ u^{\text{tot}} = 0 & \text{sur } \Gamma^\delta \\ \quad \quad \quad +\text{CR} \end{cases} \quad (1.23)$$

Lorsque l'interface Γ^δ est plane, le coefficient de réflexion peut être calculé et il donne classiquement $R_0 = -1$. Ce résultat se retrouve par passage à la limite ($\epsilon_c \rightarrow i\infty$) des coefficients précédents Eq. (1.22).

1.1.4 Cas Transverse Électrique – H-polarisation ($u = H_z$)

Les milieux sont considérés ici homogènes, par conséquent le système d'équations régissant le problème de diffraction en polarisation TE correspond à l'équation de Helmholtz Eq. (1.8) avec une CL de Dirichlet Eq. (1.13) et une CL de Neumann Eq. (1.14) ainsi que deux CR, c'est-à-dire que le problème à résoudre est,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\nabla^2 + k_1^2\} u_1^{\text{tot}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_1^\delta \\ [u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\delta \\ \left[\frac{\partial \mathbf{n} u_{1,2}^{\text{tot}}}{\epsilon_{r1,2}} \right] = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\delta \\ \{\nabla^2 + k_2^2\} u_2^{\text{tot}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_2^\delta \\ \text{+CRs} \end{array} \right.$$

Pour les milieux hétérogènes, la modification de l'équation de propagation est présentée section 1.1.1 (p.8). Et contrairement à la polarisation TM, la permittivité des milieux intervient dans une CL.

Le cas d'une interface séparant deux diélectriques éclairée par une onde plane en polarisation TE n'est pas traité dans la suite du document. Toutefois, dans le cas d'une interface plane, les coefficients de réflexion et de transmission sont donnés par,

$$R_0 = \frac{1 - \Theta_c/\sqrt{\epsilon_c}}{1 + \Theta_c/\sqrt{\epsilon_c}} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2/\sqrt{\epsilon_c}}{1 + \Theta_c/\sqrt{\epsilon_c}}$$

Dans cette polarisation, il existe un angle de Brewster où toute l'onde est transmise, l'onde réfléchie est nulle ($R_0 = 0$). Cet angle d'incidence est donné par,

$$\tan \theta^{\text{inc}} = \sqrt{\epsilon_c}$$

L'analyse sur les angles limites d'incidence et de transmission ne dépendent pas de la polarisation, mais uniquement de la deuxième loi de Descartes-Snell. Elle est par conséquent identique dans les deux polarisations.

Cas métallique

Si le milieu 2 est un métal parfait, les deux conditions aux limites se simplifient Eq. (1.15) et le problème à résoudre est le suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\nabla^2 + k^2\} u_1^{\text{tot}} = 0 \quad \text{dans } \Omega^\delta \\ \partial_{\mathbf{n}} u^{\text{tot}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\delta \\ \text{+CR} \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Lorsque l'interface Γ^δ est plane, le coefficient de réflexion vaut $R_0 = +1$.

1.1.5 Coefficient de diffusion et Surface Équivalente Radar

Généralement une quantité d'intérêt est le coefficient de diffusion. Par exemple, il est un des paramètres utilisés dans les problèmes inverses, en particulier en télédétection. Il est défini pour des surfaces de taille finie (A est l'aire de la surface considérée), et il est évalué en connaissant le champ diffracté \mathbf{E}^{diff} dans une direction θ par,

$$\sigma(\theta, \theta^{\text{inc}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{A} \frac{|\mathbf{E}^{\text{diff}}|^2}{|\mathbf{E}^{\text{inc}}|^2}$$

En d'autres termes, il correspond à la portion de puissance diffusée par la surface dans une direction d'observation, par rapport à la puissance incidente. Il est donc sans dimension. Ce coefficient est évalué, par définition, en champ lointain. Dans le cas où la direction d'observation est la direction d'incidence ($\theta = \theta^{\text{inc}}$), le coefficient est appelé coefficient de rétro-diffusion. Et la direction spéculaire correspond à $\theta = -\theta^{\text{inc}}$.

L'invariance de la surface suivant une direction implique des simplifications (voir p. 8) et tout le champ électromagnétique peut être calculé à partir d'une seule composante u (soit E_z pour la polarisation TM, soit H_z pour la polarisation TE). Par conséquent, le coefficient de diffusion est donné par l'évaluation de $|u^{\text{diff}}|^2$, c'est à dire,

$$\sigma(\theta, \theta^{\text{inc}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{A} \frac{|u^{\text{diff}}|^2}{|u^{\text{inc}}|^2}$$

Un coefficient de diffusion en *transmission* se définit de manière équivalente avec le champ transmis. Dans les applications considérant les sols par exemple, il est peu utilisé car il est souvent difficile d'accès.

Dans le domaine radar, une définition similaire est utilisée,

$$SER = 4\pi A \sigma(\theta, \theta^{\text{inc}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r \frac{|u^{\text{diff}}|^2}{|u^{\text{inc}}|^2}$$

appelée Surface Équivalente Radar, homogène comme son nom l'indique à une surface. La préférence des radaristes va à la SER car souvent ils ne connaissent pas la taille de l'objet diffusant.

La SER est utilisée dans deux configurations : monostatique et bistatique. Dans le cas monostatique, le point d'émission et de réception est identique. L'appareil émetteur est aussi l'appareil récepteur. Dans le cas bistatique, la direction d'émission est fixée et la direction de réception est quelconque. L'appareil émetteur et l'appareil récepteur sont distincts, et généralement plusieurs appareils récepteurs sont utilisés.

Coefficient de réflexion et surface périodique

Les surfaces considérées sont périodiques. Ainsi le champ diffracté se décompose en mode de Floquet Eq. (1.16). Les directions sont données par ,

$$\sin \theta_n = -\sin \theta^{\text{inc}} + n \frac{\lambda}{L}$$

où $\lambda = 2\pi/k$ correspond à la longueur d'onde. L'amplitude du mode correspond au coefficient de réflexion R_n de cette direction.

Lorsque la période L est petite devant la longueur d'onde, un seul mode de Floquet est propagatif : le mode fondamental ($n = 0$) dans la direction spéculaire. Lorsque la période est plus grande que la longueur d'onde, le champ diffracté se décompose alors en plusieurs modes caractérisés par leur amplitude complexe R_n . À chaque mode correspond une direction de propagation.

Coefficient de réflexion et surface tronquée

Les amplitudes complexes données précédemment considèrent une surface invariante et de période L , donc de taille infinie. La direction d'invariance ne pose pas de difficulté puisqu'il suffit de choisir une longueur unité. Considérant une surface finie de longueur L , nous souhaitons connaître le coefficient de diffusion ou la SER.

Si cette longueur L est très grande devant la longueur d'onde, la diffraction par les deux bords est négligeable. Établir le coefficient de diffusion ou la SER en considérant la surface infinie (de période L) est une approximation raisonnable.

En revanche, si la longueur L est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, alors les effets de diffraction par les bords ne sont plus négligeables. Le coefficient de diffusion (ou la SER) peut tout de même être déduit des amplitudes complexes. Il suffit d'utiliser la transformée de Fourier spatiale du profil. Dans notre cas, il faut multiplier les amplitudes complexes par le sinus cardinal,

$$\sigma(\theta, \theta^{\text{inc}}) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathcal{M}_{\text{propa}}} R_n \frac{\sin\left(k_1 \frac{L}{2} (\sin \theta - \sin \theta_n)\right)}{k_1 \frac{L}{2} (\sin \theta - \sin \theta_n)}$$

Même si les paramètres en transmission sont peu utilisés, ils s'obtiennent en adaptant sans difficulté ces résultats.

1.2 Surfaces rugueuses

Dans cette section, certaines surfaces rugueuses, utilisées dans le reste du document, sont présentées. Nous distinguons deux types de surfaces rugueuses : celles dont les rugosités sont périodiques et celles dont les rugosités suivent un profil aléatoire. Toutes les surfaces possèdent une période L .

1.2.1 Rugosités périodiques

Sous cette dénomination sont regroupées les surfaces présentant deux échelles de variation : l'une dite rapide et l'autre par opposition dite lente. Les variations rapides forment des rugosités périodiques et présentent une période $d = L/M$.

L'exemple représentatif de cette catégorie de surface est le "sinus double échelle" illustré sur la FIG. 1.3.

Le "sinus double échelle" est la superposition de deux fonctions sinusoïdales,

$$y = \gamma_\delta(x) = h_1 \sin(2\pi x/L) + h_2 \sin(2\pi x/d)$$

où la hauteur h_2 est petite devant la hauteur h_1 . Pour que la surface définie par γ_δ soit de période L , la période rapide d en est une fraction entière : $d = L/M$.

Cette catégorie de surface est le cadre mathématique adéquat pour appliquer les méthodes d'homogénéisation.

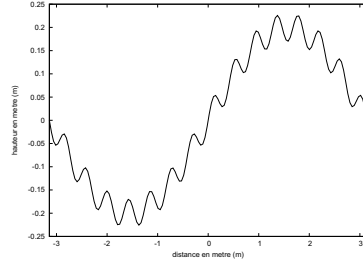


FIGURE 1.3 – Profil : sinus double échelle

1.2.2 Rugosités aléatoires

Les scènes naturelles sont souvent représentées par des surfaces ayant un profil stochastique dont seules certaines caractéristiques statistiques sont connues, par exemple la loi de distribution des hauteurs ou la fonction d'autocorrélation du profil.

Bien que des lois de distribution non-gaussienne des hauteurs possèdent des applications [36, 69], nous intéressons uniquement au profil dont la hauteur $\gamma_\delta(x)$ suit une loi de probabilité gaussienne,

$$p(\gamma_\delta) = \frac{1}{m_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\gamma_\delta - m_1)^2}{m_2^2}}$$

où les paramètres m_1 et m_2 sont respectivement la moyenne et l'écart type définis par,

$$\begin{aligned} m_1 = m(\gamma_\delta) &= \int_{\mathbb{R}} \gamma_\delta p(\gamma_\delta) d\gamma_\delta & \text{et} & & m_2^2 &= m\left((\gamma_\delta - m_1)^2\right) \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \gamma_\delta(x) dx & & & &= m(\gamma_\delta^2) - m^2(\gamma_\delta) \end{aligned}$$

La moyenne est choisie nulle ($m_1 = 0$). Dans ce cas, l'écart type m_2 correspond à la hauteur quadratique moyenne notée s qui peut se réécrire sous la forme,

$$s = m\left(\sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L \gamma_\delta^2(x) dx}\right)$$

La densité de probabilité gaussienne est souvent utilisée car elle donne une description naturelle de la majorité des surfaces réelles.

De plus, une distribution gaussienne possède la propriété remarquable que le profil stochastique correspondant est entièrement déterminé par sa loi de distribution des hauteurs et par sa fonction d'autocorrélation.

La fonction d'autocorrélation C représente, comme son nom l'indique, la corrélation entre deux points du profil, c'est-à-dire,

$$C(X) = m\left(\gamma_\delta(x)\gamma_\delta(x+X)\right)$$

La fonction C vérifie la propriété : $C(0) = s^2$.

Les deux grands types de profils les plus utilisées [52] sont ceux dont la fonction d'autocorrélation suit : soit une loi gaussienne, soit une loi exponentielle. Par abus de langage, nous les appellerons respectivement : surface gaussienne ou surface exponentielle. La fonction d'autocorrélation suit une loi du type,

$$\text{Gaussienne : } C(X) = s^2 e^{-\frac{X^2}{l^2}} \quad \text{Exponentielle : } C(X) = s^2 e^{-\frac{|X|}{l}}$$

où la paramètre l s'appelle longueur de corrélation défini par la relation, $C(l) = 1/e$. Le coefficient de diffusion (ou la SER) doit être calculé pour un échantillon de profil suffisamment étendu pour être statistiquement représentatif.

Pour résumer, dans la suite du document, les surfaces rugueuses aléatoires utilisées seront caractérisées par :

- une loi de probabilité des hauteurs gaussienne, de moyenne nulle et de hauteur rms s ,
- une fonction d'auto-corrélation gaussienne ou exponentielle avec une longueur de corrélation l .

Les paramètres de hauteur rms s et de longueur de corrélation l sont souvent donnés normalisés par le nombre d'onde k , c'est-à-dire que qu'ils sont exprimés en terme de hauteur rms normalisées ks et de longueur de corrélation normalisée kl .

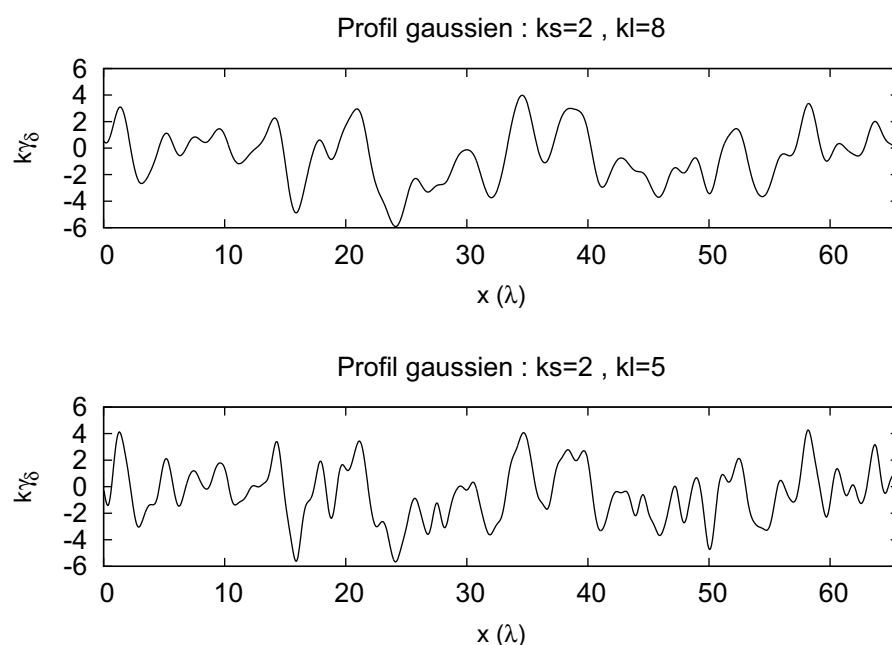


FIGURE 1.4 – Profils : fonction auto-corrélation gaussienne de paramètres $ks = 2$, $kl = 8$ et $ks = 2$, $kl = 5$

Sur FIG. 1.4 sont représentés deux profils de surfaces aléatoires avec une fonction d'auto-corrélation gaussienne. Les hauteurs rms normalisées sont identiques et prises à $ks = 2$. La longueur de corrélation normalisée est prise pour deux valeurs différentes : $kl = 8$ et $kl = 5$. À hauteur rms fixée, plus la longueur de corrélation est petite et plus la surface présente des irrégularités.

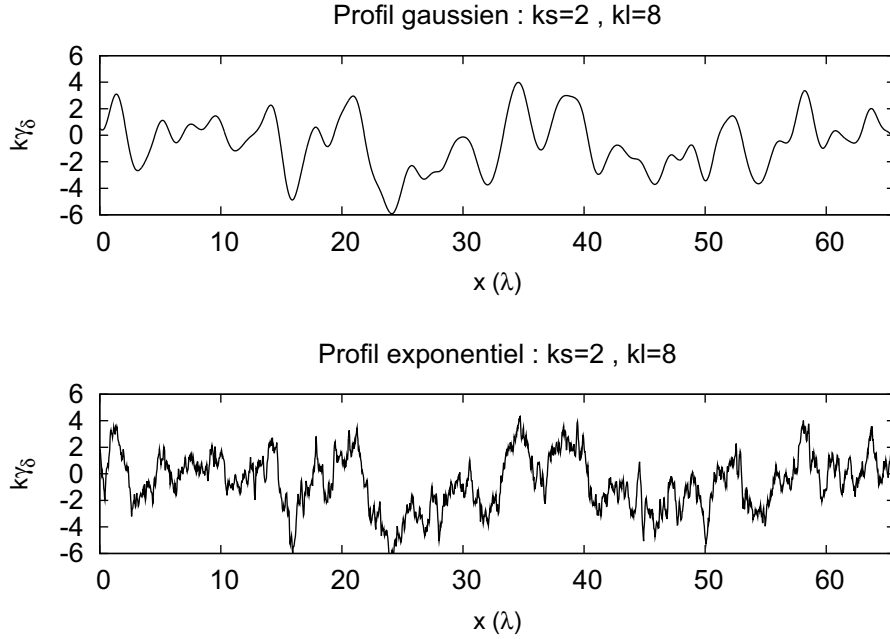


FIGURE 1.5 – Profils : fonction auto-corrélation gaussienne et exponentielle de paramètres $ks = 2$ et $kl = 8$

Sur FIG. 1.5 sont représentés deux profils de surfaces aléatoires dont les paramètres hauteur rms normalisée et longueur de corrélation normalisée sont identique mais dont la fonction d’auto-corrélation est différente : l’une est gaussienne et l’autre est exponentielle. Les surfaces à auto-corrélation exponentielle présentent plus d’irrégularités que les surfaces à auto-corrélation gaussienne.

Généralement, pour obtenir une statistique représentative d’une surface aléatoire, un grand nombre de profils doit être tiré.

1.2.3 Critère de Rayleigh

Une surface n’est pas intrinsèquement rugueuse. La “taille” de la rugosité (et son effet) dépend de la longueur d’onde du champ incident. Le paramètre représentatif pour quantifier les rugosités d’une surface est le déphasage induit par deux points $P_1 = (x_1, \gamma_\delta(x_1))$ et $P_2 = (x_2, \gamma_\delta(x_2))$ appartenant à la surface.

Le déphasage $\Delta\phi$ entre les deux rayons réfléchis par les points P_1 et P_2 est donné par,

$$\Delta\phi = k \left((\gamma_\delta(x_1) - \gamma_\delta(x_2)) (\cos \theta^{\text{inc}} + \cos \theta_R) + (x_1 - x_2) (\sin \theta^{\text{inc}} - \sin \theta_R) \right)$$

où les angles sont ici non-orientés. Le nombre d’onde k est celui du milieu 1. Dans la direction spéculaire ($\theta_R = \theta^{\text{inc}}$), cette différence de phase devient,

$$\Delta\phi = 2k(\gamma_\delta(x_1) - \gamma_\delta(x_2)) \cos \theta^{\text{inc}}$$

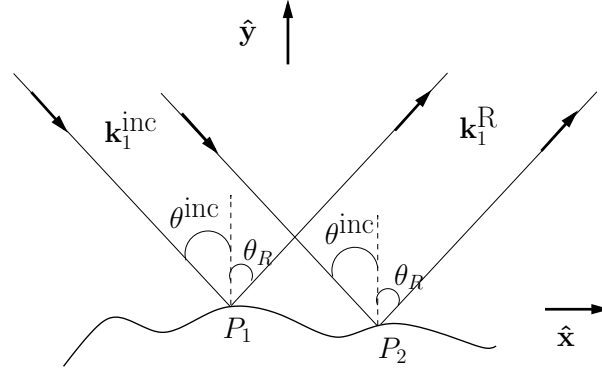


FIGURE 1.6 – Schéma illustrant le critère de Rayleigh

Le déphasage dépend de la hauteur séparant les points P_1 et P_2 . Généralement [51], si la hauteur est telle que le déphasage soit $\Delta\phi < \pi/2$, alors les rayons interagissent de manière constructive et la surface est considérée comme peu rugueuse (lisse). A contrario, si la hauteur est telle que $\Delta\phi > \pi/2$ alors les ondes interfèrent de manière destructive et la surface est considérée comme rugueuse.

Le paramètre de Rayleigh [51] tient compte du caractère stochastique du profil de la surface. En prenant la variance du déphasage et en considérant que les hauteurs de deux points éloignés ($|x_1 - x_2| \gg 0$) ne sont pas corrélées, le paramètre de Rayleigh est défini par,

$$C_{\text{Rayleigh}} = 2ks \cos \theta^{\text{inc}} = 4\pi \frac{s}{\lambda} \cos \theta^{\text{inc}}$$

Le paramètre est défini ici dans la direction spéculaire, il peut aussi se définir dans une direction arbitraire : $C_{\text{Rayleigh}} = ks(\cos \theta^{\text{inc}} + \cos \theta_R)$. Un paramètre similaire pourrait aussi être défini en considérant la transmission.

Le critère de Rayleigh permet de quantifier les rugosités d'une surface : si $C_{\text{Rayleigh}} < \pi/2$ alors la surface est peu rugueuse et si $C_{\text{Rayleigh}} > \pi/2$ alors la surface est considérée comme rugueuse. À partir de ce critère, une surface est considérée peu rugueuse si sa hauteur rms vérifie,

$$s < \frac{1}{8} \frac{\lambda}{\cos \theta^{\text{inc}}}$$

Le paramètre de Rayleigh dépend de la longueur d'onde et de la hauteur de la surface mais aussi de l'angle d'incidence (et de l'angle d'observation). Par conséquent, une surface peut être considérée comme rugueuse à une faible incidence et être considérée comme lisse pour une incidence rasante.

1.3 Méthodes de résolution : présentation non-exhaustive

Il faut distinguer deux types de problèmes : ceux où la surface est déterministe et ceux où la surface est stochastique. Ces deux types de problèmes dépendent de la connaissance de la surface. Dans certaines applications, le profil de la surface n'est pas connu mais seuls des paramètres statistiques de celui-ci le sont (section 1.2.2). Le champ diffracté est alors une variable aléatoire (stochastique) et ses moments statistiques sont recherchés. Par exemple, sa moyenne (moment d'ordre 1) correspond à la composante cohérente du champ ou sa variance (moment d'ordre 2) correspond à la puissance incohérente.

Les deux types de problèmes sont de nature très différents. Cependant, deux classes de méthodes se distinguent pour connaître le champ diffracté :

- celles basées sur une *approximation* des équations de Maxwell,
- celles basées sur une résolution dite *rigoureuse* des équations de Maxwell.

Ces deux classes de résolution se complètent, en terme de domaine de validité, de précision, de configurations abordables ou même en terme de ressources numériques nécessaires. Les premières sont plus rapides et numériquement beaucoup moins coûteuses mais souvent au détriment de la précision ou du domaine de validité. Les deuxièmes sont généralement utilisées pour valider les premières en terme de précision et de domaine de validité, mais, même en tenant compte de la montée en puissance des calculateurs, elles permettent difficilement des applications embarquées (temps-réel, ...).

Dans le cas où la surface est stochastique, une approche classique est d'utiliser une méthode de Monte-Carlo. De nombreuses variantes plus ou moins élaborées ont été utilisées, cependant l'idée générale de cette approche est la suivante : un grand nombre de profils de la surface sont tirés pour avoir un échantillon statistiquement représentatif, puis le problème est résolu (soit par une méthode approchée soit par une méthode rigoureuse) pour chaque profil (déterministe) et enfin les moments statistiques des quantités d'intérêts (coefficient de diffusion, SER, ...) sont extraits. Certaines méthodes basées sur des approximations permettent d'accéder de manière analytique directement aux moments statistiques recherchés.

1.3.1 Méthodes basées sur une *approximation*

Les méthodes basées sur une approximation sont les plus nombreuses et les plus anciennes. Même si la séparation n'est pas franche, deux approches peuvent être distinguées :

- l'une se base sur une formulation intégrale et rigoureuse du champ électromagnétique puis la résolution de cette formulation est faite en utilisant un développement en série (par rapport à un petit paramètre). Généralement, le domaine de validité de cette approche est directement relié au rayon de convergence de la série.
- l'autre suppose des mécanismes de diffraction (diffusion) basés sur des considérations heuristiques.

Nous donnons très succinctement quelques références sur les méthodes utilisées dans la communauté des surfaces rugueuses. La dénomination des méthodes dépend des auteurs, et souvent deux appellations recouvrent la même mise en œuvre.

Elfouhaily et Guérin [26] donnent une présentation complète (*Topical Review*) des différentes méthodes basées sur des approximations dans une notation unifiée. En particulier, ils s'attachent à montrer les connexions entre les différentes méthodes.

Dans le cas où la surface possède des rugosités périodiques (une échelle de variation), les premiers travaux de résolution sont dus à Rayleigh [59] puis largement étendus (par exemple

voir Ishimaru [37] chapitre 21).

Par exemple la méthodes des petites perturbations [51], la méthode *small-slope approximation* [74] ou parfois appelé *operator expansion model* sont basés sur la première approche. Les méthodes basées sur l'approximation de l'optique géométrique (*ray tracing*, méthode haute-fréquence, ...) ou celles basées sur l'approximation de Kirchoff [29, 76] appartiennent à la deuxième approche.

1.3.2 Approche rigoureuse

Le problème de diffraction est un problème d'équations aux dérivées partielles (EDP) avec des conditions aux limites. Donc toutes les méthodes numériques de résolution d'EDP sont applicables : des méthodes basées sur les éléments finis aux méthodes basées sur les volumes finis en passant par l'approche Galerkin discontinu. La préférence de la communauté des surfaces rugueuses est portée sur les méthodes basées sur les différences finies (FDTD) et sur les méthodes basées sur des équations intégrales. Dans le reste du document, comme la méthode basée sur une représentation intégrale du champ est utilisée, quelques points de celle-ci sont détaillés.

Méthodes de Moments (MoM)

Dans la MoM, seule la surface doit être échantillonnée et cette méthode conduit à chercher le vecteur densité de courant sur la surface. La MoM consiste à discrétiser une représentation intégrale du problème de diffraction ce qui mène à la résolution d'un système linéaire. Dans le cas d'un problème périodique, la MoM est présentée en détail à la section 4.1.1 (p. 90).

Le nombre d'inconnues, directement lié à l'échantillonnage de la surface, est souvent important et le système linéaire est résolu par une méthode itérative : soit basée sur les sous-espaces de Krylov (présentée à la section 4.1.2), soit basée sur une décomposition judicieuse de la matrice impédance associée au système linéaire. Les principales méthodes itératives appliquées aux surfaces rugueuses sont discutées dans la section 4.1.4.

La matrice impédance issue de la MoM est dense et ses coefficients sont complexes, c'est pourquoi elle a longtemps été peu utilisée. Les performances des calculateurs ne permettaient pas d'accéder à des tailles de problème conséquent. De plus, la matrice étant dense, la résolution par une méthode directe (décomposition LU avec substitution, décomposition de Choleski, ...) est numériquement difficile. Les méthodes itératives sont préférées et le coût numérique est généralement concentré dans l'évaluation du produit matrice-vecteur. La montée des performances des calculateurs et les travaux sur l'évaluation rapide du produit matrice-vecteur l'ont rendue populaire.

Au lieu de calculer puis de stocker la matrice du système linéaire pour au final n'utiliser que le produit matrice-vecteur dans la résolution itérative, seul un produit matrice-vecteur approché est construit en essayant de réduire son coût. Sans être exhaustifs, nous pouvons citer quelques travaux dans cette voie. Canning [14] et La Bourdonnaye [23] cherchent à creuser la matrice en utilisant respectivement des fonctions de base qui ne rayonnent pas dans des directions privilégiées ou une méthode basée sur une discrétisation micro-locale complétée par la théorie de la phase stationnaire. Abboud, Nédélec et Zhou [2] cherchent à réduire la dimension de l'espace de discrétisation en évaluant la phase du courant grâce aux théories asymptotiques et en ne discrétisant que le module du courant, ceci permettant de relâcher le critère de discrétisation. La technique la plus performante à l'heure actuelle est la méthode multi-pôle rapide (Fast Multipole Method) proposée par Greengard et Rokhlin [20, 31] et amélioré par Song et Chew [67].

La FMM permet de réduire la complexité calculatoire du produit matrice-vecteur de $O(N^2)$ à seulement $O(N \log N)$. Toutefois, les méthodes de type FMM sont inefficaces pour les problèmes périodiques. Pour accélérer le produit matrice-vecteur, une méthode alternative basée sur une décomposition QR de la matrice a été proposée par Poirier dans [58]. Même si nous avons étendu cette méthode alternative aux problèmes périodiques [71], dans le reste du document, le produit matrice-vecteur n'est pas accéléré et reste en $O(N^2)$ (en terme de nombre d'opérations).

Pour finir, la difficulté dans les méthodes itératives est le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence. Dans la section 4.1.3 sont présentés les préconditionneurs qui sont la méthode classique pour réduire le nombre d'itérations. Une méthode alternative est la construction d'une représentation intégrale du problème de diffraction qui mène à des matrices bien préconditionnées. Levadoux [43] présente un formalisme pour l'équation d'Helmholtz puis a été étendu aux équations de Maxwell dans [11, 12]. Cette approche est aussi utilisée dans [21, 18, 53].

Chapitre 2

Homogénéisation de surfaces rugueuses métalliques

Sommaire

2.1	Présentation générale de la méthode	26
2.1.1	Les grandes lignes	26
2.1.2	Les différents <i>outils</i>	29
2.2	Équation de Propagation	33
2.3	Polarisation TM ($u = E_z$)	34
2.3.1	Injection des Éléments	34
2.3.2	Résolution	35
2.3.3	Conclusion : C.L.E.	36
2.3.4	Analyse en terme de coefficients de réflexion	37
2.3.5	Ordres supérieurs	42
2.4	Polarisation TE ($u = H_z$)	48
2.4.1	Injection des Éléments	48
2.4.2	Résolution : ordre -1 et ordre 0	50
2.4.3	Résolution : ordre 1	52
2.4.4	Conclusion : C.L.E.	54
2.4.5	Analyse en terme de coefficients de réflexion	55
2.5	Commentaires	59
2.5.1	Synthèse	59
2.5.2	Condition de Léontovich : impédance équivalente	60
2.5.3	Une interprétation pour les surfaces de faible hauteur	61
2.6	Conclusion	62

Beaucoup de problèmes physiques dépendent de “petits” paramètres. La recherche de coefficients effectifs pour représenter ces fines variations est depuis longtemps étudiée. De nombreuses méthodes suivant les cadres d’application ont été proposées, et généralement, elles reposent sur un développement asymptotique conduisant à une procédure d’homogénéisation. L’effet du “petit” paramètre est en quelque sorte “moyenné”. Une présentation détaillée de différentes méthodes est faite dans les livres de Bensoussan et al. [10], ou de Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia [63], ou encore de Sanchez-Palencia [64].

Dans le cadre de l'électromagnétisme, deux techniques se distinguent : celle d'un développement asymptotique raccordé et celle d'un développement double-échelle. L'idée des développements asymptotiques raccordés est de scinder la solution en une partie locale (problème intérieur) et en une partie globale (problème extérieur). Puis ces deux solutions sont judicieusement raccordées. Cette technique a été appliquée à plusieurs types de problème comme celui des couches minces [5], ou des fentes [39], ou encore des problèmes liés aux antennes [9]. Dans le cas de surface présentant des irrégularités périodiques, Nevard et Keller ont proposé cette technique dans [50], puis Kristensson [41] l'a étendue aux géométries 3D. De notre point de vue, le raccordement est le point délicat dans la procédure car il n'existent pas de stratégie unique pour tous les problèmes.

L'autre technique est celle d'un développement double-échelle ou parfois appelée développement par correcteurs. Dans ce cas, la solution recherchée est séparée en une partie globale (champ effectif) et en une partie locale (correcteur de couche limite). Le nom de couche limite s'illustre dans l'application de la technique en mécanique des fluides, où une loi de paroi effective est cherchée [4]. Dans le cas d'objet métallique (parfait ou non) recouvert d'une couche diélectrique comportant des billes métalliques, Achdou [3] puis Abboud et Ammari [1] ont utilisé cette technique pour traiter le problème. Concernant les surfaces comportant des irrégularités périodiques, Holloway et Kuester [34] proposent des développements similaires à ceux présentés dans ce document. Pour illustrer les différences et similitudes, leurs développements sont succinctement présentés en Annexe A.

La procédure que nous allons suivre, conduisant à l'évaluation asymptotique du champ, est basée sur un développement double-échelle en tenant compte de variations lentes des irrégularités. Initialement, nous cherchons à dériver une condition équivalente à partir de cette évaluation. Toutefois, cette évaluation peut aussi être utilisée en tant que telle.

Avant de rentrer dans les détails techniques, nous présentons les idées directrices de la méthode "homogénéisation". Nous donnons quelques détails sur la procédure générale. Puis afin de se familiariser avec la méthode, nous rappelons succinctement le cas de la polarisation Transverse Magnétique (TM), traité en détail à l'ordre 1 par Poirier [56]. Toutefois, la mise en œuvre numérique est nouvelle et les résultats numériques à l'ordre 1 sont présentés différemment de [56].

2.1 Présentation générale de la méthode

2.1.1 Les grandes lignes

La difficulté majeure lors du calcul de la diffraction par des surfaces rugueuses à partir de méthodes rigoureuses est le nombre de détails nécessaires pour décrire correctement toutes les échelles de rugosités. Ceci entraîne, dans les méthodes rigoureuses, une augmentation significative du nombre d'inconnues (degré de liberté), qui rend souvent impossible le calcul.

L'idée générale est donc de transformer la Condition aux Limites (C.L.) posée sur la surface rugueuse (notée Γ^d) en une Condition aux Limites Équivalente ou Effective (C.L.E.) représentant les rugosités et posée sur une surface numériquement plus accessible (par exemple un plan noté Γ^0).

La stratégie que l'on cherche à mettre en place est donc la suivante (voir FIG. 2.1). Le problème initial de taille N est divisé en M cellules, puis sur chaque cellule p nous évaluons la C.L.E.. En d'autres termes, nous résolvons 1 sous-problèmes de taille N_p puis un problème (numériquement plus facile) de taille M , au lieu de résoudre un seul problème de taille N (qui peut-être numériquement inaccessible).

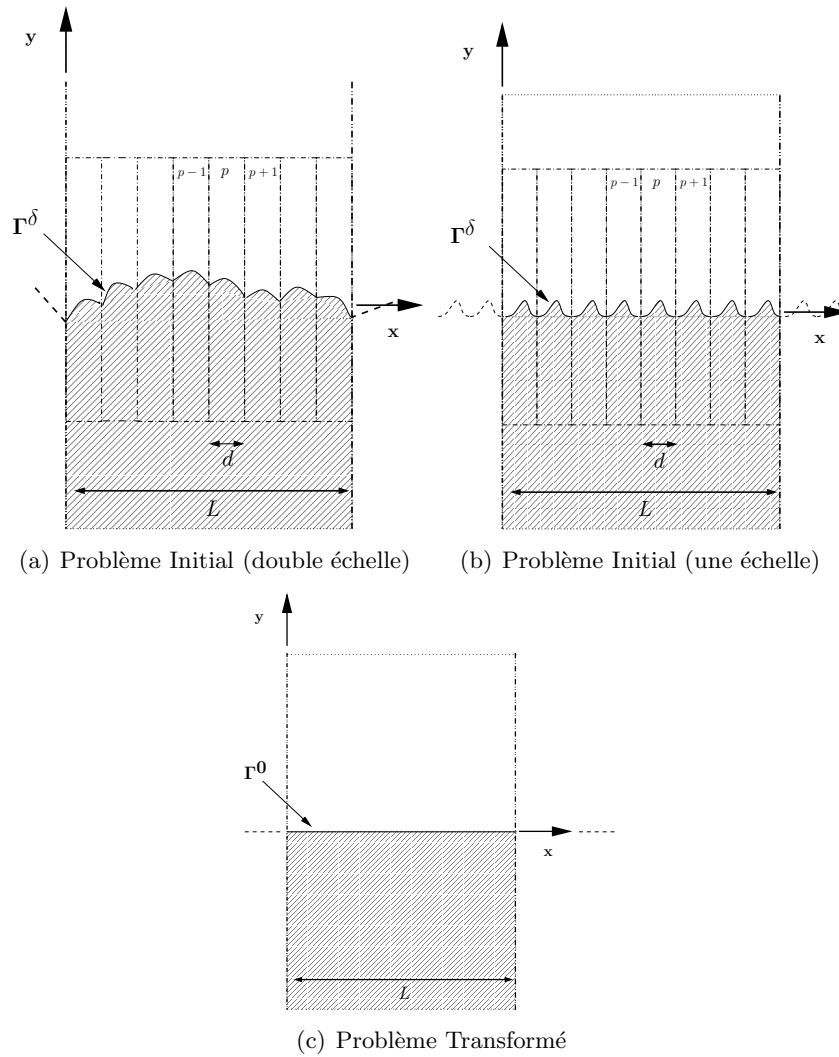


FIGURE 2.1 – Schéma présentant l'idée générale de la procédure d'homogénéisation

Pour évaluer la C.L.E., une méthode d'homogénéisation est utilisée. En outre, la technique employée est basé sur deux conditions :

- périodicités des cellules,
- dépendance d'un "petit" paramètre.

Dans le cadre de surfaces à une échelle de périodicité, ces deux conditions sont bien respectées (voir FIG. 2.1(b)). Les techniques d'homogénéisations sont mêmes construites pour traiter ce type de problèmes. Les surfaces présentant deux échelles de variations, l'une lente et l'autre rapide (en terme de longueur d'onde), et dont la variation rapide est aussi périodique, vérifient aussi les deux conditions. Dans une cellule, la variation lente est faible et par conséquent elle peut être négligée.

Dans le cadre de surfaces rugueuses ayant un profil aléatoire, les cellules ne seront évidemment pas périodiques. La première condition n'est plus respectée. Toutefois, Poirier et al. [57] ont montré l'intérêt numérique de cette approche. La C.L.E. sera établie comme si chaque cellule était périodique.

La deuxième condition impose un profil pour les surfaces dites *homogénéisables*. La taille des rugosités doit être liée à la taille des cellules. La longueur totale de la surface est notée L , et nous définissons la taille des cellules comme $d = L/M$ ainsi que le paramètre $\delta = d/L$, et nous nous supposons la surface a le profil suivant,

$$\gamma_\delta(x) = \delta s(x, \sigma) \quad \text{avec} \quad \sigma = x/\delta \quad (2.1)$$

La fonction $s(x, \sigma)$ est de période L suivant x et de période d suivant σ . Pour M entier, la surface définie par γ_δ est bien de période L ,

$$\begin{aligned} \gamma_\delta(x + L) &= \delta s(x + L, \sigma) \Big|_{\sigma=\frac{x+L}{\delta}} \\ &= \delta s(x, \sigma) \Big|_{\sigma=\frac{x}{\delta}+M^2d} \\ &= \delta s(x, \sigma) \Big|_{\sigma=\frac{x}{\delta}} \end{aligned}$$

Ce profil modélise des surfaces rugueuses pour lesquelles le domaine de validité des méthodes classiques reste incertain. De plus, il explicite le caractère double échelle des surfaces. Dans le cas de surfaces à une échelle de périodicité (FIG. 2.1(b)), le profil de la surface se réduit à seulement, $\gamma_\delta(x) = \delta s(\sigma)$.

Le paramètre δ représente le changement d'échelle. Il est par définition sans dimension. Pour les surfaces à une échelle de périodicité, il n'y a pas à proprement parler de *grande* période L et de *petite* période d . Toutefois, un grand nombre de périodes sont considérées pour conserver le rapport $\delta = d/L$ petit devant 1.

Pour finir sur les grandes lignes de la méthode, précisons que la technique employée utilise trois *outils*, à savoir :

- Séparation des “effets lents” et des “effets rapides” (noté $u + \Pi$)
- Développement Asymptotique (DA) par rapport au (petit) paramètre δ
- Développement de Taylor (DT) sur la partie lente uniquement.

Puis ces *outils* sont introduits dans les équations initiales que l'on cherche à résoudre. Les grandes lignes de la méthode sont résumées par la procédure suivante :

1. $u + \Pi$ + DA \rightarrow EP \Rightarrow 2 Equations
2. $u + \Pi$ + DA + DT \rightarrow C.L. \Rightarrow 1 $\widetilde{\text{C.L}}$
3. Regroupement des Puissances de δ
4. Résolution des sous-problèmes

où $\widetilde{\text{C.L}}$ signifie une Condition aux Limites Modifiée, et EP signifie Équation de Propagation.

Par cette procédure, nous avons transformé le problème initial en deux problèmes : l'un relatif aux effets *globaux* (u) et l'autre relatif aux effets *locaux* (Π). Ces deux nouveaux problèmes sont liés par la $\widetilde{\text{C.L}}$.

L'information des rugosités fines est contenues dans les problèmes auxiliaires “rapides” (relatif aux effets locaux). Ainsi en résolvant le problème relatif aux effets locaux (Π) nous espérons caractériser la $\widetilde{\text{C.L}}$ et prendre en compte l'effet des rugosités fines. Puis, nous pourrons l'introduire dans le problème relatif aux effets globaux (u).

2.1.2 Les différents *outils*

Avant d'appliquer la procédure aux surfaces parfaitement métalliques dans les deux cas de polarisation, nous allons détailler les trois *outils* et préciser les différentes notations utilisées par la suite.

Séparation lents/rapides (noté $u + \Pi$)

Le champ total u^{tot} est décomposé en deux parties :

$$u^{\text{tot}}(x, y) = u(x, y) + \Pi(x, \sigma, \tau) \quad (2.2)$$

où :

- la partie u correspond à la contribution des effets globaux (partie lente). C'est la partie qui nous intéresse pour calculer par exemple le coefficient de réflexion. Nous l'appelons le *champ effectif*.
- la partie Π correspond à la contribution des effets locaux (partie rapide). Celle-ci donne une information sur ce qui se passe près de la surface (dans la couche limite). Nous l'appelons le *correcteur (de couche limite)*.

Et les variables correspondantes sont,

- (x, y) sont les variables lentes
- $(\sigma = x/\delta, \tau = y/\delta)$ sont les variables rapides. Elles correspondent à un changement d'échelle, entre l'échelle globale et l'échelle locale.

Pour préciser les notations, le champ effectif u "évolue" dans le même domaine Ω^δ que le champ total u^{tot} , à savoir :

$$\Omega^\delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, H > y > 0 \right\}$$

et le correcteur de couche limite Π "évolue" dans le domaine avec le changement d'échelle δ ,

$$D = \left\{ (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \in]0, d[, H_D > \tau > s(x, \sigma) \right\}$$

Ce domaine D représente une cellule, et comme la fonction $s(x, \sigma)$ possède une période d suivant σ , la cellule a aussi une taille d .

Le problème est périodique, par conséquent le champ se décompose en modes de Floquet Eq. (1.16). Cette séparation peut être motivée par cette décomposition. Dans la cellule D , le mode Φ_n d'ordre n s'écrit,

$$\Phi_n(x, y) = e^{i\alpha'_n x} e^{i\sqrt{k^2 - \alpha_n'^2} y}$$

avec $\alpha'_n = k_x + 2\pi n/d$. Par conséquent, les modes rapides, c'est-à-dire avec n suffisamment grand, peuvent être approchés par,

$$\Phi_n(x, y) \approx e^{ik_x x} e^{i\frac{2\pi n}{d} x} e^{-\frac{2\pi n}{d} y}$$

Or la relation de changement d'échelle est $d = \delta L$. Le mode est alors écrit,

$$\Phi_n(x, y) \approx e^{ik_x x} e^{i\frac{2\pi n}{L} \sigma} e^{-\frac{2\pi n}{L} \tau} = \phi_n(x, \sigma, \tau)$$

Le correcteur Π correspond physiquement aux modes évanescents et s'atténue exponentiellement pour $\tau \rightarrow \infty$. Le correcteur Π représente les effets locaux, c'est-à-dire les effets proches de la surface. Il est donc raisonnable qu'il soit nul loin de la surface, ce qui s'écrit,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi(x, \sigma, \tau) = 0 \quad (2.3)$$

que l'on notera : $\Pi = 0$. En outre, la même conséquence est tirée sur les dérivées du correcteur, et incluse dans la notation Π_∞ .

Rigoureusement, le correcteur de couche limite devrait être $\Pi = \Pi(x, y, \sigma, \tau)$. Cependant, nous venons d'illustrer que le correcteur n'a pas de dépendance en y , i.e., $\Pi = \Pi(x, \sigma, \tau)$. D'un point de vue physique, cela paraît naturel car ce terme représente les effets locaux, ce qui *se passe* dans la couche limite (i.e., ce qui est proche de la surface). La dépendance en x du terme Π , relatif au comportement interne à la couche limite, est destinée à prendre en compte le fait que la période locale de la frontière peut varier d'une zone à l'autre. De plus, il faut noter que la variable x est considérée comme un paramètre fixé pour le problème local.

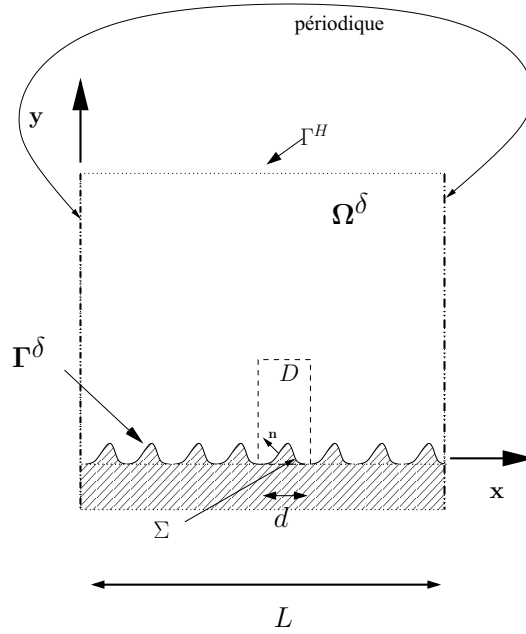


FIGURE 2.2 – Schéma du problème métallique

La Condition aux Limites (C.L.) pour le champ effectif u est posée sur la surface,

$$\Gamma^\delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, y = \delta s(x, \sigma) \right\}$$

et celle du correcteur Π est posée sur :

$$\Sigma = \left\{ (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \in]0, d[, \tau = s(x, \sigma) \right\}$$

FIG. 2.2 illustre ces différentes notations.

Pour finir, précisons que le domaine Ω^δ et le domaine D sont des domaines bornés. Une C.L. sur la frontière fermant les domaines doit donc être précisée. La condition de radiation décrite dans la section 1.1.2 est utilisée.

Développement Asymptotique

Nous cherchons (ansatz) la solution sous la forme d'un développement asymptotique,

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 0} u_{(x,y)}^{(n)} \delta^n \quad \text{et} \quad \Pi(x, \sigma, \tau) = \sum_{n \geq 0} \Pi_{(x,\sigma,\tau)}^{(n)} \delta^n \quad (2.4)$$

En choisissant le paramètre δ petit devant 1, peu de termes sont nécessaires pour avoir une représentation correcte de la solution.

Ce développement asymptotique est motivé par deux remarques :

- le calcul du coefficient de réflexion d'un plan périodique déphasé ($y = +h_{max} \quad \forall x \in]0, d[$).

Nous considérons ici une surface à une échelle de périodicité dont la période d est petite devant la longueur d'onde. Ceci implique que seul le mode de Floquet fondamental est propagatif, c'est-à-dire que le champ total admet la décomposition,

$$u^{\text{tot}}(x, y) = u^{\text{inc}}(x, y) + R_\delta e^{ik_x x + ik_y y} + \text{termes évanescents} \quad (2.5)$$

Le coefficient R_δ peut être interprété comme le coefficient de réflexion du champ incident. L'onde incidente est prise ici en polarisation TM. Cependant, les résultats sont similaires pour l'autre polarisation. Le calcul du coefficient de réflexion du plan déphasé donne : $R_\delta = -e^{i2k_y h_{max}}$. En considérant la hauteur de déphasage h_{max} petite devant la longueur d'onde, le développement limité donne,

$$R_\delta = -1 + 2ik_y h_{max} - 4(k_y h_{max})^2 + o\left((k_y h_{max})^2\right)$$

En choisissant, comme définition alternative pour le paramètre δ , de prendre $\delta = k_y h_{max}$, le coefficient de réflexion s'écrit,

$$R_\delta = R^{(0)} + \delta R^{(1)} + \delta^2 R^{(2)} + O(\delta^3) \quad (2.6)$$

avec $R^{(0)} = -1$, $R^{(1)} = 2$ et $R^{(2)} = -4$.

- le calcul numérique (Méthode des Moments) du coefficient de réflexion.

FIG. 2.3(a) et FIG. 2.3(b) montrent le coefficient de réflexion R_δ à incidence normale calculé par la MoM pour une surface à une échelle de périodicité. La première chose est qu'une surface n'est pas intrinsèquement rugueuse mais que l'effet de la rugosité dépend du champ incident (en terme de la longueur d'onde et d'angle d'incidence). Comme la hauteur du profil est fixée, le coefficient de réflexion varie avec la longueur d'onde, c'est-à-dire que la taille de la rugosité devient plus importante (en terme de longueur d'onde) lorsque la fréquence augmente. Ensuite, sur ces deux courbes, un développement asymptotique s'esquisse. Le coefficient de réflexion à l'ordre 0 (lorsque la fréquence tend vers 0) correspondrait au coefficient de réflexion d'un plan, c'est-à-dire que nous attendons $R^{(0)} = -1$ pour la polarisation TM et $R^{(0)} = +1$ pour la polarisation TE.

Pour cette même surface, nous traçons la partie réelle et imaginaire du coefficient $\frac{R_\delta - R^{(0)}}{\delta}$ (FIG. 2.3(c) et FIG. 2.3(d)). En utilisant la formule suivante,

$$R^{(1)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{R_\delta - R^{(0)}}{\delta}$$

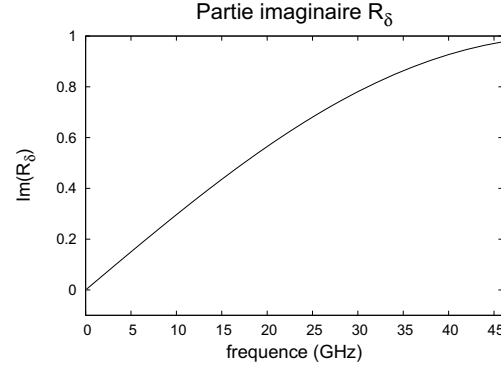
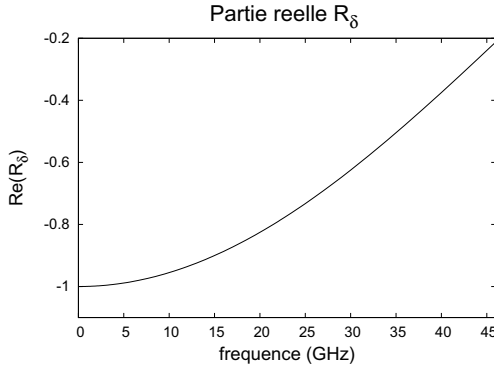
nous nous attendons à obtenir un coefficient de réflexion pour l'ordre 1 purement imaginaire, c'est-à-dire que le coefficient $R^{(1)}$ correspondrait à la valeur lorsque la fréquence tend vers 0 (FIG. 2.3(d)). La pente de la partie réelle (FIG. 2.3(c)) correspondrait au coefficient d'ordre 2.

Remarquons qu'en combinant Eq. (2.5) et Eq. (2.6), nous en déduisons,

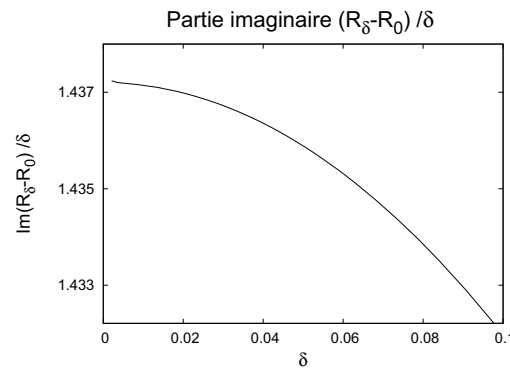
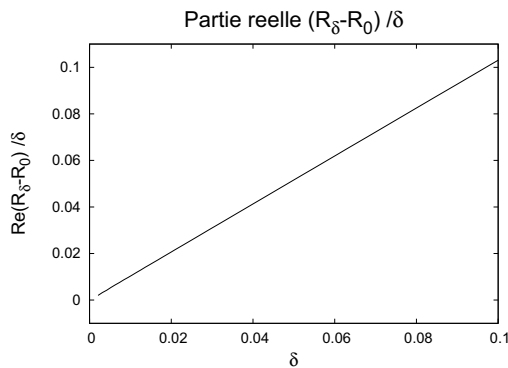
$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, y) &= R^{(0)} e^{ik_x x + ik_y y} + u^{\text{inc}}(x, y) \\ u^{(1)}(x, y) &= R^{(1)} e^{ik_x x + ik_y y} \end{aligned}$$

$$\gamma_\delta(x) = h_{max} \sin(2\pi x/d) \quad \left(= \delta \left(\frac{1}{k_y} \sin\left(\frac{2\pi k_y h_{max}}{d} \frac{x}{\delta}\right) \right) = \delta s(\sigma) \right)$$

hauteur $h = 0.001\text{m}$	période $d = 0.002\text{m}$	fréquence varie de 0.1GHz à 46GHz	longueur d'onde $6.52 \cdot 10^{-3}$ à 3m
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------------	--



(a) Partie réelle de R_δ en fonction de la fréquence (b) Partie imaginaire de R_δ en fonction de la fréquence



(c) Partie réelle : évaluation de $R^{(1)}$ en fonction du paramètre δ

(d) Partie imaginaire : évaluation de $R^{(1)}$ en fonction du paramètre δ

FIGURE 2.3 – Illustration du développement asymptotique sur le coefficient de réflexion d'une surface à une échelle de périodicité.

Développement de Taylor

Un développement de Taylor est introduit pour “ramener” le problème lent posé sur Γ^δ en un problème posé sur un plan Γ^0 (i.e., posé sur $y = 0$) :

$$u^{(n)} \Big|_{\Gamma^\delta} \underset{\delta s \rightarrow 0}{=} u^{(n)} \Big|_{y=0} + \sum_{k=1}^N \delta^k \frac{s^k}{k!} \left(\partial_y^k u^{(n)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} + O(\delta^{N+1})$$

ce qui s’écrit, explicitement, en puissances de δ :

$$\left. \begin{aligned} & u^{\text{tot}} \Big|_{\Gamma^\delta} = \\ & \delta^0 \quad u \Big|_{y=0}^{(0)} \\ & + \delta^1 \quad u \Big|_{y=0}^{(1)} + s \left(\partial_y u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} \\ & + \delta^2 \quad u \Big|_{y=0}^{(2)} + s \left(\partial_y u^{(1)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} + \frac{s^2}{2} \left(\partial_y^2 u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} \\ & \quad \vdots \\ & + \delta^n \quad u \Big|_{y=0}^{(n)} + \sum_{k=1}^n \frac{s^k}{k!} \left(\partial_y^k u^{(n-k)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Nous choisissons de “ramener” le problème lent sur un plan Γ^0 car la résolution finale devient plus facile (méthode de collocation). Un autre choix possible, qui n’est pas envisagé dans ce document, serait une moyenne locale (dépendant des paramètres lents). Cependant, la résolution finale serait numériquement plus coûteuse.

Maintenant que les différentes notations et outils ont été précisés, nous pouvons réaliser la procédure.

2.2 Équation de Propagation

La première étape de la procédure, à savoir injecter la séparation $u + \Pi$ et le développement asymptotique dans l’équation de propagation, est identique quelle que soit la polarisation.

Comme le correcteur de couche de limite Π dépend des deux types de variables, il faut utiliser la formule de la chaîne,

$$\left. \begin{aligned} \partial_x \Pi &\rightarrow \delta^{-1} \partial_\sigma \Pi + \partial_x \Pi \\ \partial_y \Pi &\rightarrow \delta^{-1} \partial_\tau \Pi \end{aligned} \right| \quad \nabla^2 \Pi \rightarrow \delta^{-2} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi + 2\delta^{-1} \partial_x \partial_\sigma \Pi + \partial_x^2 \Pi \quad (2.8)$$

L'équation de propagation $\{\nabla^2 + k^2\}u^{\text{tot}} = 0$ devient,

$$\left. \begin{aligned}
 & \delta^{-2} \quad \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(0)} \\
 + & \quad \delta^{-1} \quad \left(\nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(1)} + 2\partial_x \partial_\sigma \Pi^{(0)} \right) \\
 + & \sum_{n \geq 2} \delta^{n-2} \quad \left(\{\nabla_{xy}^2 + k^2\} u^{(n-2)} \right. \\
 & \quad \left. + \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(n)} + 2\partial_x \partial_\sigma \Pi^{(n-1)} \right. \\
 & \quad \left. + \{\partial_x^2 + k^2\} \Pi^{(n-2)} \right) \\
 = & \quad 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Nous obtenons donc deux équations pour chaque ordre du développement asymptotique, l'une régissant les effets globaux en $u^{(n)}$, et l'autre régissant les effets locaux en $\Pi^{(n)}$. Le "découplage" de ces deux équations résulte de la condition à l'infini imposée pour les correcteurs de couche limite $\Pi^{(n)}$.

Il est important de noter que l'équation régissant le champ effectif $u^{(n)}$ est une équation de Helmholtz, tandis que l'équation régissant le correcteur de couche limite $\Pi^{(n)}$ est une équation de Laplace, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la fréquence.

2.3 Polarisation TM ($u = E_z$)

Le cas de cette polarisation est traité en détail à l'ordre 1 dans [56]. Nous en reprenons les grandes lignes pour illustrer les étapes de la méthode d'homogénéisation. La procédure est appliquée au problème (1.23).

2.3.1 Injection des Éléments

Le deuxième étape de la procédure concerne le traitement de la C.L. : $u^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} = 0$. Nous commençons par y introduire le développement asymptotique, ce qui donne,

$$\sum_{n \geq 0} \left(u^{(n)}|_{\Gamma^\delta} + \Pi^{(n)}|_{\Sigma} \right) \delta^n = 0 \quad \text{ou encore} \quad u^{(n)}|_{\Gamma^\delta} + \Pi^{(n)}|_{\Sigma} = 0 \quad , \quad \forall n$$

puis en injectant le Développement de Taylor Eq. (2.7), nous obtenons,

$$\left. \begin{aligned}
 & \delta^0 \quad \Pi^{(0)}|_{\Sigma} + u_{|y=0}^{(0)} \\
 + & \delta^1 \quad \Pi^{(1)}|_{\Sigma} + u_{|y=0}^{(1)} + s(x, \sigma) \left(\partial_y u^{(0)}(x, y) \right)_{|y=0} \\
 + & \delta^2 \quad \Pi^{(2)}|_{\Sigma} + u_{|y=0}^{(2)} \\
 & \quad \quad \quad + s \left(\partial_y u^{(1)}(x, y) \right)_{|y=0} + \frac{s^2}{2} \left(\partial_y^2 u^{(0)}(x, y) \right)_{|y=0} \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 = & \quad 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Pour chaque puissance de δ , ces C.L. sont les Conditions aux Limites Modifiées pour chaque ordre ($\widetilde{\text{C.L.}}^{(n)}$).

Finalement, nous rassemblons les termes suivant leur puissance de δ . Nous avons bien découplé le problème en deux sous-problèmes reliés par une condition aux limites ($\widetilde{\text{C.L.}}^{(n)}$). Les deux premiers ordres sont,

$$\begin{array}{c} \text{Ordre 0} \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(0)} = 0 \\ \Pi^{(0)}|_{\Sigma} = -u|_{y=0} \\ \Pi_{\infty}^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\nabla_{xy}^2 + k^2\}u^{(0)} = 0 \\ u|_{y=0} = -\Pi^{(0)}|_{\Sigma} \\ \text{Condition de radiation} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Ordre 1} \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(1)} = -2\partial_x \partial_{\sigma} \Pi^{(0)} \\ \Pi^{(1)}|_{\Sigma} = -u|_{y=0} - s \left(\partial_y u^{(0)}(x,y) \right)|_{y=0} \\ \Pi_{\infty}^{(1)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\nabla_{xy}^2 + k^2\}u^{(1)} = 0 \\ u|_{y=0} + s \left(\partial_y u^{(0)}(x,y) \right)|_{y=0} = -\Pi^{(1)}|_{\Sigma} \\ \text{Condition de radiation} \end{array} \right. \end{array}$$

Pour les problèmes en $\Pi^{(n)}$, les différentes inconnues relatives à $u^{(n)}$ sont considérées comme des constantes, car celles-ci ne dépendent pas des variables rapides (σ, τ).

Suivant la méthodologie présentée à la section 2.1.1, nous résolvons d'abord le problème rapide en $\Pi^{(n)}$, puis l'information ainsi obtenue est injectée dans le problème lent en $u^{(n)}$.

2.3.2 Résolution

Pour finir la présentation de la méthode appliquée au problème de diffraction en polarisation TM, nous allons résoudre les deux premiers ordres (ordre 0 et ordre 1).

Ordre 0

Dans [56], Poirier démontre que la solution du problème (2.11) en $\Pi^{(0)}$ ne peut être que 0. Nous avons ainsi caractérisé la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$: $u|_{y=0} = 0$. Donc, l'ordre 0 est celui d'un plan métallique. Ceci signifie qu'à l'ordre 0, la surface rugueuse peut être vue comme une surface lisse, i.e. ne présentant pas d'irrégularités fines.

À ce stade, l'ordre 0 est entièrement déterminé : $\Pi^{(0)} = 0$ et $u^{(0)}$ peut être déterminé de façon analytique. Il est important de noter que u est un champ total, donc $u^{(0)}$ contient l'information sur le champ incident,

$$u^{(0)} = u^{\text{inc}} + \widetilde{u^{(0)}}$$

où $\widetilde{u^{(0)}}$ est le champ diffracté (réfléchi) par un plan métallique. Par conséquent, nous déduisons l'expression analytique du champ,

$$u^{(0)}(x, y) = e^{ik_x x - ik_y y} - e^{ik_x x + ik_y y} \implies \left(\partial_y^2 u^{(0)}(x, y) \right)|_{y=0} = 0 \quad (2.13)$$

Cette dernière implication permet des simplifications dans des calculs ultérieurs (p.42).

Ordre 1

Maintenant, il faut résoudre le problème (2.12) en $\Pi^{(1)}$. Pour cela, nous utilisons une variable auxiliaire α . Si on pose que la solution du problème en $\Pi^{(1)}$ est de la forme,

$$\Pi^{(1)}(x, \sigma, \tau) = \alpha(x, \sigma, \tau) \partial_y u_{|y=0}^{(0)} - u_{|y=0}^{(1)} \quad (2.14)$$

alors la variable auxiliaire α doit vérifier le système suivant,

$$\begin{cases} \nabla_{\sigma\tau}^2 \alpha = 0 \\ \alpha|_{\Sigma} = -s(x, \sigma) \\ \alpha \text{ borné à l'infini} \end{cases} \quad (2.15)$$

Ce nouveau problème auxiliaire est résolu numériquement à l'aide d'une méthode Éléments Finis périodiques.

Nous notons cette solution à l'infini,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha(x, \sigma, \tau) = h_{TM}(x)$$

et par conséquent, en utilisant le fait que le correcteur est nul loin de la surface : $\Pi_{\infty}^{(1)} = 0$, nous avons caractérisé la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$,

$$u_{|y=0}^{(1)} - h_{TM} \partial_y u_{|y=0}^{(0)} = 0 \quad (2.16)$$

Dans le cas de surfaces à une échelle de périodicité (FIG. 2.1(b)), le paramètre h_{TM} ne dépend plus de la variable lente x .

2.3.3 Conclusion : C.L.E.

À partir des $\widetilde{\text{C.L.}}$, nous cherchons à expliciter la Condition aux Limites Effective (C.L.E.) sur le plan Γ^0 . Pour l'ordre 0 et l'ordre 1, nous avons les $\widetilde{\text{C.L.}}$,

$$\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)} : u_{|y=0}^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{C.L.}}^{(1)} : u_{|y=0}^{(1)} - h_{TM} \partial_y u_{|y=0}^{(0)} = 0$$

et de plus le champ total s'écrit à l'ordre 1 : $u^{\text{tot}} = u^{(0)} + \delta u^{(1)} + O(\delta^2)$. Nous en déduisons la C.L.E. = $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)} + \delta \widetilde{\text{C.L.}}^{(1)} + O(\delta^2)$ d'ordre 1,

$$u_{|y=0}^{\text{tot}} - \delta h_{TM} \partial_y u_{|y=0}^{\text{tot}} = O(\delta^2) \quad (2.17)$$

Finalement, au lieu de résoudre le problème initial (1.23), nous résolvons alors ce problème,

$$\begin{cases} \{\nabla_{xy}^2 + k^2\} u^{\text{tot}} = 0 \\ u_{|y=0}^{\text{tot}} - \delta h_{TM} \partial_y u_{|y=0}^{\text{tot}} = 0 \\ \text{Condition de radiation} \end{cases} \quad (2.18)$$

Le problème (2.18) est numériquement *plus facile* à résoudre que le problème initial. Du fait que la Condition aux Limites de ce nouveau problème (i.e., la C.L.E.) soit posée sur un plan, il peut être résolu par une méthode numériquement peu coûteuse comme une méthode de collocation.

2.3.4 Analyse en terme de coefficients de réflexion

Une surface à une échelle de périodicité est considérée ici. Le champ est cherché sous la forme d'un développement asymptotique, c'est-à-dire $u^{\text{tot}} = u^{(0)} + \delta u^{(1)} + O(\delta^2)$. Or le champ total est donné par Eq. (2.5) qui s'écrit,

$$u^{\text{tot}}(x, y) = u^{\text{inc}}(x, y) + R_\delta e^{ik_x x + ik_y y} + \text{termes évanescents}$$

ainsi nous explicitons les termes du développement,

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, y) &= R^{(0)} e^{ik_x x + ik_y y} + u^{\text{inc}}(x, y) \\ u^{(1)}(x, y) &= R^{(1)} e^{ik_x x + ik_y y} \end{aligned}$$

où $R^{(0)}$ et $R^{(1)}$ peuvent respectivement s'interpréter comme les coefficients de réflexion à l'ordre 0 et à l'ordre 1.

La $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ établie précédemment donne directement le coefficient $R^{(0)}$. Le calcul est immédiat puisque l'ordre 0 correspond à la réflexion par un plan,

$$R^{(0)} = -1$$

Pour établir le coefficient $R^{(1)}$, la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$ est utilisée. De Eq. (2.16) est déduit,

$$R^{(1)} = +2ik_y h_{TM}$$

Comme nous l'attendions (p.31), le coefficient de réflexion d'ordre 1 est purement imaginaire. L'ordre 1 apporte une correction sur la phase. Le coefficient de réflexion se développe asymptotiquement à l'ordre 1,

$$R_1 = -1 + 2ik_y h_{TM} \delta + O(\delta^2) \quad (2.19)$$

En utilisant la C.L.E. (Eq. (2.17)), une approximation à l'ordre 1 du coefficient R_δ s'écrit,

$$R_{eq} \sim -\frac{1 + ik_y h_{TM} \delta}{1 - ik_y h_{TM} \delta} \quad (2.20)$$

Illustration numérique

La même surface utilisée pour illustrer le développement asymptotique (voir FIG. 2.3 p.32) est considérée ici. C'est une fonction sinusoïdale de hauteur $h_{max} = 0.001m$ et de période $d = 0.002m$. La solution de référence est calculée par la MoM en prenant un nombre de point dans la discrétisation du sinus de $N = 200$.

Sur la FIG. 2.4 sont tracées la partie réelle et la partie imaginaire du coefficient de réflexion R_δ ainsi que les deux évaluations obtenues par la procédure d'homogénéisation. Dans la région linéaire du coefficient de réflexion, c'est-à-dire lorsque le paramètre δ est petit, la prédiction du coefficient de réflexion par un développement asymptotique est pertinente. Lorsque le paramètre δ augmente, la prédiction linéaire n'est plus suffisante : le coefficient de réflexion possède des non-linéarités. L'approximation R_{eq} à l'ordre 1 en utilisant la C.L.E. reproduit le comportement du coefficient de réflexion.

Le paramètre h_{TM} calculé par la procédure d'homogénéisation ne dépend pas de la fréquence ni de l'angle d'incidence. Par conséquent, la même résolution du système auxiliaire permet de comparer l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de la fréquence pour une incidence

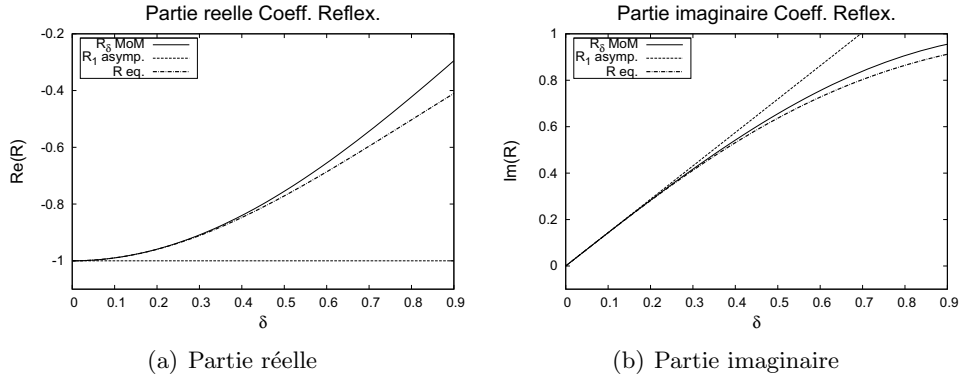


FIGURE 2.4 – Comparaison en fonction du paramètre δ du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché $R_{eq.}$. Incidence normale.

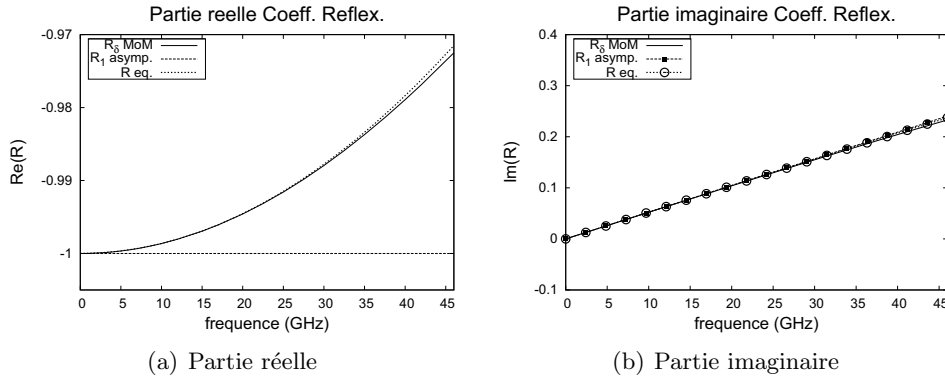


FIGURE 2.5 – Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché $R_{eq.}$. Incidence 80° – profil sinusoïdal : $h = 0.001m$ et $d = 0.002m$.

de 80° (FIG. 2.5). Pour les deux approximations, la partie imaginaire est bien prédite. La partie réelle est bien approchée par le coefficient de réflexion équivalent.

Sur FIG. 2.6 sont tracées la partie réelle et la partie imaginaire du coefficient de réflexion en fonction de la fréquence pour un profil sinusoïdal de période $d = 0.002m$ mais dont la hauteur est de $h_{max} = 0.002m$. Trois incidences sont comparées : 0° , 60° , 80° . Le domaine fréquentiel où les coefficients approchés R_1 et R_{eq} représentent correctement le coefficient de référence R_δ augmente avec l'angle d'incidence. Ceci s'explique par le fait que l'effet de la rugosité diminue avec l'incidence (critère de Rayleigh). À hauteur h_{max} fixée, en considérant le paramètre $\delta = k_y h_{max}$ (par analogie avec un plan déphasé), il est clair que l'augmentation de l'angle d'incidence diminue le paramètre δ ; c'est-à-dire que les domaines de développement ne sont pas les mêmes.

Sur FIG. 2.7, la hauteur et la période de la fonction sinusoïdale sont fixées à $0.002m$ et nous traçons la partie imaginaire du coefficient de réflexion en fonction de $k_y h_{max}$, donc en tenant compte de l'angle d'incidence. Toutes les courbes sont superposées; c'est-à-dire que le modèle asymptotique proposé donne une approximation pertinente à l'ordre 1 du coefficient de réflexion.

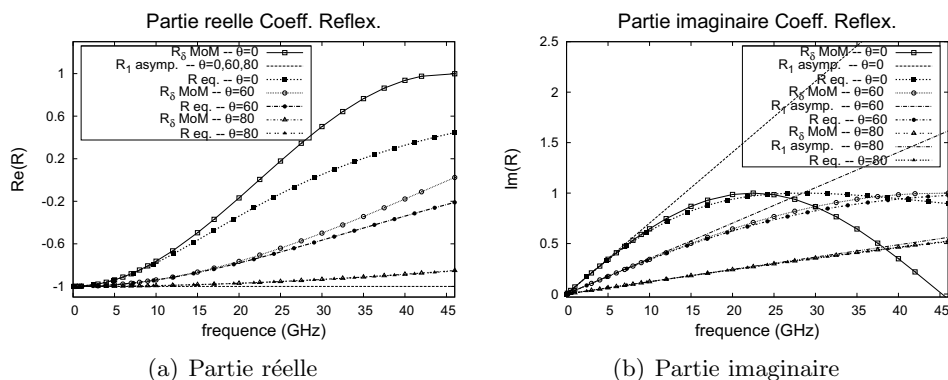


FIGURE 2.6 – Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché $R_{eq.}$. Incidence 0° , 60° et 80° – profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$.

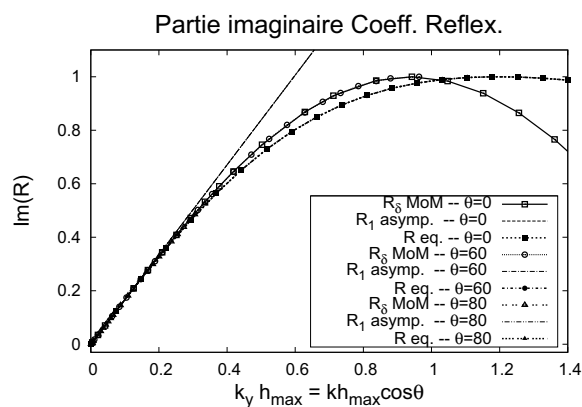


FIGURE 2.7 – Comparaison en fonction de $k_y h_{max}$ du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché $R_{eq.}$. Incidence 0° , 60° et 80° – profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$.

Sur la FIG. 2.8, la période est fixée $d = 0.002m$, et nous considérons une fonction sinusoïdale avec trois hauteurs différentes : $h_{max} = 0.001m$, $h_{max} = 0.002m$ et $h_{max} = 0.004m$. Nous traçons l'erreur relative commise sur le coefficient de réflexion en fonction de $k_y h_{max}$,

$$\text{Erreur} = |R_\delta - R_1| \quad \text{ou} \quad \text{Erreur} = |R_\delta - R_{eq}|$$

en remarquant la conservation de l'énergie : $|R_\delta| = 1$.

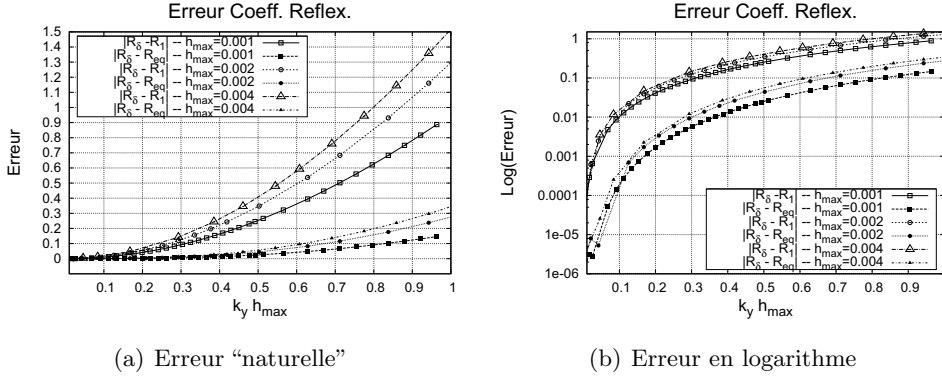


FIGURE 2.8 – Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Profil sinusoïdal : $d = 0.002m$ et $h_{max} = 0.001m, 0.002m$ et $0.004m$.

À période fixée, l'erreur dépend sensiblement de la hauteur (FIG. 2.8).

La hauteur du profil sinusoïdal est fixée à $h_{max} = 0.001m$ et nous faisons varier la période. Les résultats sont rassemblés sur FIG. 2.9. À hauteur fixée, l'erreur dépend de la période.

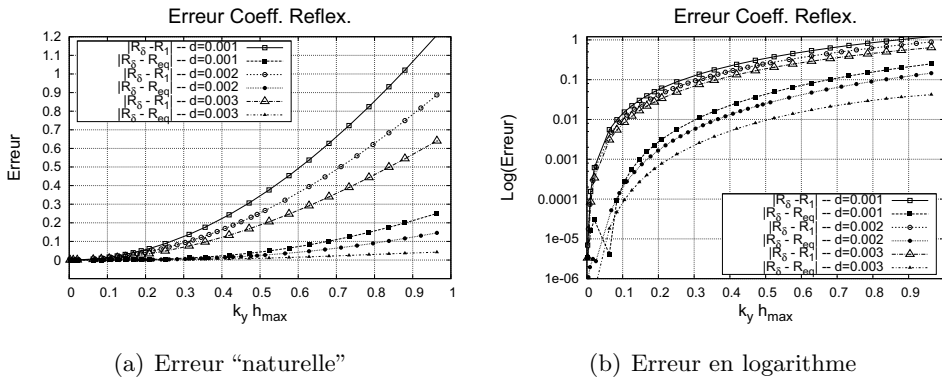


FIGURE 2.9 – Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.001m, 0.002m$ et $0.003m$.

L'erreur est comparée sur trois profils : sinusoïdal, créneau et triangulaire. Ces deux derniers profils sont déphasés, c'est-à-dire qu'ils varient entre $\gamma_\delta(x) = 0$ et $\gamma_\delta(x) = h_{max}$. La forme du profil influe peu sur l'erreur (FIG. 2.10).

De ces courbes, nous pouvons tirer une heuristique restreinte puisque l'erreur dépend de la hauteur, de la période et de la forme du profil. L'erreur commise par le coefficient de réflexion

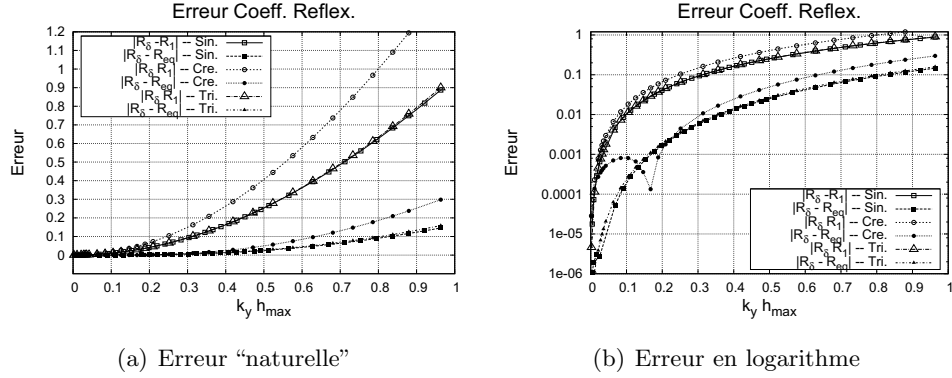


FIGURE 2.10 – Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Profil sinusoidal, créneau et triangulaire ($h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$).

équivalent R_{eq} est inférieure à 10^{-2} lorsque que,

$$k_y h_{max} \lesssim 0.3 \quad \text{c'est à dire} \quad h_{max} \lesssim \frac{\lambda}{20 \cos \theta^{inc}}$$

Pour le coefficient R_1 , le domaine est plus réduit et se limite à environ $h_{max} \lesssim \lambda/60 \cos \theta^{inc}$.

Pour une erreur de l'ordre de 10%, la hauteur des rugosités est de l'ordre de,

$$k_y h_{max} \lesssim 0.7 \quad \text{c'est à dire} \quad h_{max} \lesssim \frac{\lambda}{10 \cos \theta^{inc}}$$

et pour le coefficient R_1 , elle se limite à environ $h_{max} \lesssim \lambda/20 \cos \theta^{inc}$.

Pour trois types de profils, nous faisons varier la hauteur et la période, et nous calculons le paramètre h_{TM} . Nous remarquons que la valeur du paramètre h_{TM} dépend du rapport hauteur/période (TAB. 2.1). Cependant, aucune heuristique n'est exploitable.

h_{max}/d	h_{TM}		
	sin.	cré.	tri.
1/4	-0.544	-0.839	-0.671
1/2	-0.719	-0.9167	-0.720
1	-0.839	-0.958	-0.822
2	-0.912	-0.979	-0.899

TABLE 2.1 – Influence du rapport h_{max}/d sur le paramètre h_{TM} .

Remarque

Les performances numériques entre la MoM et la méthode d'homogénéisation ne sont pas comparables. La MoM requiert une résolution pour chaque point de fréquence ainsi que pour chaque angle d'incidence. Une résolution (code MoM en FORTRAN) est de l'ordre de 20s pour

une fonction sinusoïdale de $N = 200$ points avec une hauteur $h_{max} = 0.001m$ et une période $d = 0.002m$. De plus, dans l'assemblage de la matrice dépend de la fréquence : plus la fréquence est basse et plus le temps d'assemblage est long car la fonction de Green périodique devient numériquement coûteuse. La résolution du système auxiliaire (code FEM en MATLAB) pour obtenir le paramètre h_{TM} est de l'ordre 1.6s.

2.3.5 Ordres supérieurs

Les ordres supérieurs sont cherchés pour augmenter le domaine où la méthode est précise ; c'est-à-dire qu'à précision fixée, nous cherchons à pouvoir traiter des rugosités plus importantes (en terme de longueur d'onde).

Caractérisation de $\widetilde{C.L.}^{(2)}$

Pour l'ordre 2 en polarisation TM, il faut résoudre le système régissant le correcteur de couche limite $\Pi^{(2)}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(2)} = -2\partial_x \partial_\sigma \Pi^{(1)} \\ \Pi^{(2)}|_{\Sigma} = -u_{|y=0}^{(2)} - s \left(\partial_y u_{(x,y)}^{(1)} \right)_{|y=0} \\ \quad \quad \quad - \frac{s^2}{2} \left(\partial_y^2 u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \\ \Pi_{\infty}^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

Premièrement il faut remarquer la simplification de $\left(\partial_y^2 u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} = 0$ donnée par Eq. (2.13). Ensuite, le terme $\Pi^{(1)}$ est déjà calculé par Eq. (2.14), c'est-à-dire que le système à résoudre est,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(2)} = -2 \partial_\sigma \alpha \left(\partial_x \partial_y u^{(0)} \right)_{|y=0} \\ \Pi^{(2)}|_{\Sigma} = -u_{|y=0}^{(2)} - s \partial_y u_{|y=0}^{(1)} \\ \Pi_{\infty}^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

La solution est cherchée sous la forme,

$$\Pi^{(2)}(x, \sigma, \tau) = -u_{|y=0}^{(2)} + \alpha^{(1)}(\sigma, \tau) \partial_y u_{|y=0}^{(1)} + \alpha_{int}^{(0)}(\sigma, \tau) \left(\partial_x \partial_y u^{(0)} \right)_{|y=0}$$

où les variables auxiliaires sont données par,

$$\alpha^{(1)} \equiv \alpha \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \alpha_{int}^{(0)} = -2 \partial_\sigma \alpha \\ \alpha_{int}^{(0)}|_{\Sigma} = 0 \\ \alpha_{int}^{(0)} \quad \text{borné à l}'\infty \end{array} \right.$$

Et en utilisant le fait que le correcteur est nul loin de la surface, nous en déduisons la $\widetilde{C.L.}^{(2)}$,

$$u_{|y=0}^{(2)} - h_{TM} \partial_y u_{|y=0}^{(1)} - h_{int}^{(0)} \left(\partial_x \partial_y u^{(0)} \right)_{|y=0} = 0 \quad (2.21)$$

À partir de cette $\widetilde{C.L.}^{(2)}$, nous pouvons déduire une condition aux limites équivalente d'ordre 2 : $C.L.E. = \widetilde{C.L.}^{(0)} + \delta \widetilde{C.L.}^{(1)} + \delta^2 \widetilde{C.L.}^{(2)} + O(\delta^3)$

$$u_{|y=0}^{\text{tot}} - \delta h_{TM} \partial_y u_{|y=0}^{\text{tot}} - \delta^2 h_{int}^{(0)} \partial_x \partial_y u_{|y=0}^{\text{tot}} = O(\delta^3)$$

Coefficients de réflexion

De l'Eq. (2.21), est déduit le coefficient $R^{(2)}$ qui s'écrit,

$$R^{(2)} = ik_y h_{TM} R^{(1)} - k_x k_y h_{int}^{(0)} (R^{(0)} - 1) = -2(k_y h_{TM})^2 + 2k_x k_y h_{int}^{(0)}$$

Le coefficient à l'ordre 2 est purement réel. Le coefficient de réflexion se développe asymptotiquement à l'ordre 2 comme $R_2 = R^{(0)} + \delta R^{(1)} + \delta^2 R^{(2)} + O(\delta^3)$, ou encore

$$R_2 = -1 + 2ik_y h_{TM} \delta - \left(2(k_y h_{TM})^2 - 2k_x k_y h_{int}^{(0)} \right) \delta^2 + O(\delta^3)$$

De la C.L.E. d'ordre 2 est déduit un coefficient de réflexion équivalent,

$$R_{eq} \sim - \frac{1 + ik_y h_{TM} \delta - k_x k_y h_{int}^{(0)} \delta^2}{1 - ik_y h_{TM} \delta + k_x k_y h_{int}^{(0)} \delta^2}$$

Le terme $k_x k_y$ s'écrit aussi $k^2 \sin \theta^{\text{inc}} \cos \theta^{\text{inc}}$. À incidence normale, le coefficient de réflexion équivalent établi précédemment (Eq. (2.20)) est donc déjà d'ordre 2.

Sur la FIG. 2.11, la partie réelle du coefficient de réflexion est tracée en fonction de la fréquence pour un profil sinusoïdal de hauteur $h = 0.002m$ et de période $d = 0.002m$.

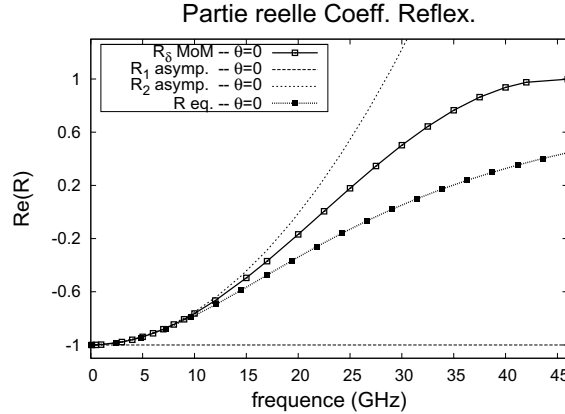


FIGURE 2.11 – Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_2 et celui approché $R_{eq.}$. Incidence 0° – profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$.

Le coefficient R_2 permet d'approcher la partie quadratique du coefficient de réflexion.

Pour cette même surface, l'erreur en fonction du paramètre δ est tracée sur FIG. 2.12. Nous comparons l'erreur entre le coefficient de réflexion de référence R_δ , et les coefficients calculés asymptotiquement à l'ordre 0, à l'ordre 1 et à l'ordre 2, et aussi l'erreur entre le coefficient de référence et celui approché par la condition équivalente. L'ordre d'approximation, c'est-à-dire

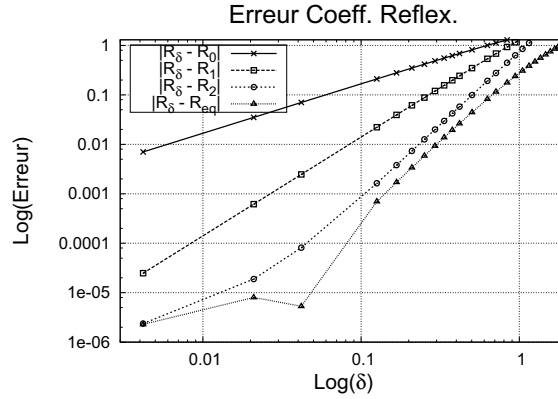


FIGURE 2.12 – Erreur en fonction du paramètre δ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec ceux évalués asymptotiquement R_2 , R_1 et R_0 et aussi avec celui approché R_{eq} . Incidence 0° – profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$.

l'ordre du développement asymptotique, est retrouvé et il est donné par les pentes des courbes. Pour l'ordre 2, l'erreur relative ($|R_\delta| = 1$) s'écrit,

$$\text{Erreur} = |R_\delta - R_2| \sim O(\delta^3)$$

et la pente est bien de 3 unités par décade. De plus, sur FIG. 2.12, l'incidence est normale et la pente du coefficient de réflexion équivalent R_{eq} est de 3 unité par décade, c'est-à-dire que c'est bien une approximation d'ordre 2.

À incidence non-normale, le coefficient de réflexion dépend du paramètre $h_{int}^{(0)}$. Toutefois, en première approximation ce terme est négligé. Le paramètre $h_{int}^{(0)}$ est multiplié par $k_x k_y$, c'est-à-dire par $\sin \theta^{inc} \cos \theta^{inc}$. Pour valider cette approximation, l'erreur sur le coefficient de réflexion est tracée dans deux configurations et pour deux profils de surface.

Dans le cas d'un profil sinusoïdal, FIG. 2.13 trace l'erreur à l'ordre 2 sur le coefficient de réflexion en fonction de $k_y h_{max}$ pour deux incidences : l'une normale et l'autre de 60° .

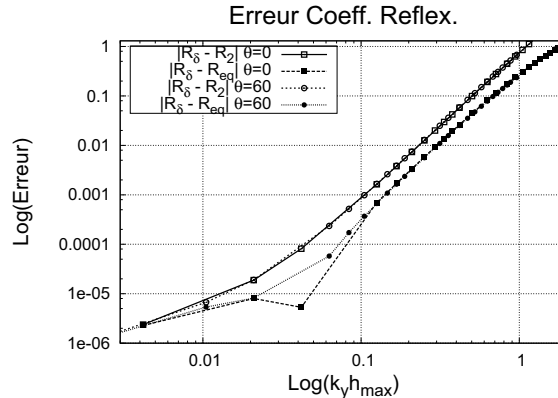


FIGURE 2.13 – Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_2 et aussi avec celui approché R_{eq} . Incidence 0° et 60° – profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$.

Les courbes d'erreur à incidence normale et à incidence de 60° se superposent, ce qui justifie la pertinence de l'approximation : le paramètre $h_{int}^{(0)}$ peut être négligé.

Nous vérifions ensuite que cette approximation est aussi pertinente sur un autre profil de surface. La contribution du terme $\sin \theta^{inc} \cos \theta^{inc}$ est la plus importante pour $\theta^{inc} = 45^\circ$. Sur la FIG. 2.14, nous comparons l'erreur à incidence normale et à une incidence de 45° pour un profil créneau. Les courbes d'erreur se superposent aussi, c'est-à-dire que le terme $h_{int}^{(0)}$ contribue peu,

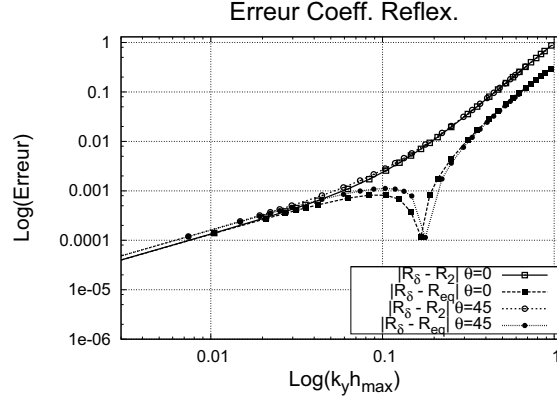


FIGURE 2.14 – Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_2 et aussi avec celui approché R_{eq} . Incidence 0° et 45° – profil créneau : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$.

voire pas, à la correction d'ordre 2.

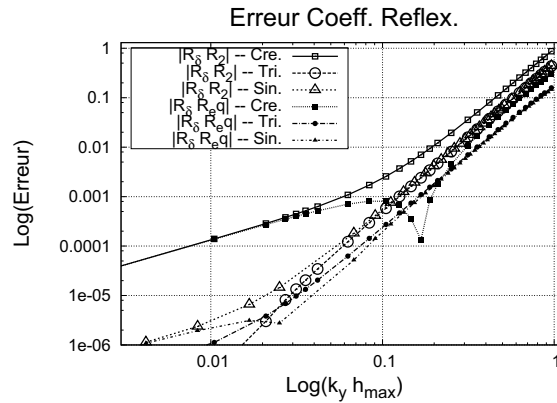


FIGURE 2.15 – Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_2 et aussi avec celui approché R_{eq} . Incidence 0° – profil sinus, créneau et triangle : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$.

Sur la FIG. 2.15, nous comparons l'erreur en fonction de $k_y h_{max}$ à incidence normale sur trois profils : sinusoïdal, créneau et triangle. À l'ordre 2, pour les trois profils, les coefficients

de réflexion approchés par la condition équivalente R_{eq} ou évalué asymptotiquement R_2 sont en accord avec le coefficient de réflexion de référence R_δ calculé par la MoM.

Pour conclure, ces courbes montrent que le calcul d'un seul paramètre d'homogénéisation h_{TM} permet d'obtenir une approximation du coefficient de réflexion à l'ordre 2. L'évaluation de ce paramètre ne dépend ni de la fréquence ni de l'angle d'incidence, uniquement du profil de la surface.

Caractérisation de $\widetilde{C.L.}^{(n)}$

La procédure présente un caractère automatique. La montée en ordre suit toujours le même mécanisme : le correcteur de couche limite $\Pi^{(n)}$ est cherché en séparant la solution en deux parties,

- l'une concernant la surface (et le développement de Taylor),
- l'autre concernant les correcteurs d'ordre inférieur.

En d'autres termes, les systèmes auxiliaires à résoudre sont de la forme,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \alpha^{(n)} = 0 \\ \alpha^{(n)} \Big|_{\Sigma} = -\frac{s^n}{n!} \\ \alpha^{(n)} \text{ borné à l' } \infty \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \alpha_{int}^{(n)} = -2\partial_x \partial_\sigma \Pi^{(n-1)} + \{\partial_x^2 + k^2\} \Pi^{(n-2)} \\ \alpha_{int}^{(n)} \Big|_{\Sigma} = 0 \\ \alpha_{int}^{(n)} \text{ borné à l' } \infty \end{array} \right.$$

Ainsi, avec l'utilisation de la condition à l'infini : $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha^{(n)} = h_{TM}^{(n)}$ et $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha_{int}^{(n)} = h_{int}^{(n)}$, les $\widetilde{C.L.}^{(n)}$ se déduisent.

À partir de ces $\widetilde{C.L.}^{(n)}$, le développement asymptotique du coefficient de réflexion peut être construit. Par exemple, il s'écrit à l'ordre 4,

$$R_4 = R^{(0)} + \delta R^{(1)} + \delta^2 R^{(2)} + \delta^3 R^{(3)} + \delta^4 R^{(4)} + O(\delta^5)$$

et les différentes erreurs s'écrivent,

$$e_n = |R_\delta - R_n| \sim O(\delta^{n+1}) \quad (2.22)$$

La FIG. 2.16 compare l'erreur sur le coefficient de réflexion pour les quatre premiers ordres, l'ordre 0 étant simplement un plan. Les erreurs suivent bien le modèle donné par Eq. (2.22), à savoir que les pentes des courbes donnent l'ordre de l'approximation. Par exemple, la pente de l'erreur d'ordre 4 est bien de 5 unité par décade.

À précision fixée, monter en ordre permet de traiter des rugosités de taille plus importante. À taille de rugosité fixée, les ordres supérieurs donnent une précision plus importante. Quantitativement, pour une précision de 10^{-2} , suivant les ordres, le domaine est de précision est approximativement donné par TAB. 2.2.

À partir du coefficient de réflexion de référence R_δ , nous pouvons évaluer les coefficients de son interpolation polynômiale en fonction du paramètre δ et les comparer avec ceux que nous calculons par la procédure d'homogénéisation. Le coefficient de réflexion R_δ est écrit sous la forme,

$$R_\delta^{(N)} = \sum_{n=0}^N r^{(n)} \delta^n \quad \text{avec} \quad r^{(n)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{R_\delta - R_\delta^{(n-1)}}{\delta} \quad \text{et} \quad r^{(0)} = -1$$

Les coefficients $r^{(n)}$ et $R^{(n)}$ sont comparés dans le TAB. 2.3. Les résultats sont en accord.

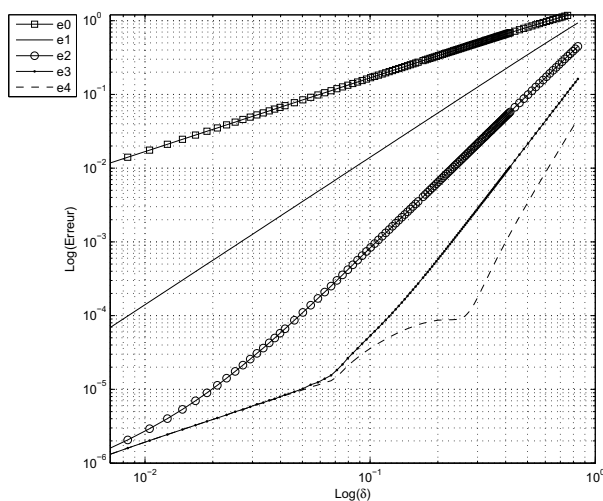


FIGURE 2.16 – Erreur en fonction du paramètre δ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec ceux évalués asymptotiquement R_4, R_3, R_2, R_1 et R_0 . Incidence 0° – profil sinusoidal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$.

Ordre	$k_y h_{max}$	h_{max}
1	0.1	$\lambda / 60 \cos \theta^{inc}$
2	0.2	$\lambda / 30 \cos \theta^{inc}$
3	0.4	$\lambda / 15 \cos \theta^{inc}$
4	0.6	$\lambda / 10 \cos \theta^{inc}$

TABLE 2.2 – Précision en fonction de l'ordre

Ordre	$r^{(n)}$	$R^{(n)}$	$ r^{(n)} - R^{(n)} $
1	i 1.6771879	i 1.677421	$2.23 \cdot 10^{-4}$
2	1.4066619	1.406877	$2.15 \cdot 10^{-4}$
3	-i 0.8190628	-i 0.791399	$2.76 \cdot 10^{-2}$
4	-0.3937800	-0.329740	$6.64 \cdot 10^{-2}$

TABLE 2.3 – Comparaison coefficient de réflexion évalué $r^{(n)}$ et celui calculé $R^{(n)}$. Incidence 0° – profil sinusoidal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$.

2.4 Polarisation TE ($u = H_z$)

Maintenant, la méthode est appliquée au problème (1.24) en polarisation TE. La condition aux limites de Neumann rend l'application un peu plus calculatoire, bien entendu que la démarche décrite précédemment reste la même.

La surface γ_δ étant définie par la fonction s qui dépend de la variable rapide σ , il faut donc aussi utiliser la formule de la chaîne,

$$\gamma'_\delta(x) = \frac{d}{dx}\gamma_\delta(x) = \frac{d}{dx}(\delta s(x, \sigma)) = \partial_\sigma s + \delta \partial_x s$$

Dans le cas de surfaces à une échelle de périodicité (FIG. 2.1(b)), le profil se note $\gamma_\delta(x) = \delta s(\sigma)$ et par conséquent $\gamma'_\delta(x) = \partial_\sigma s$ et il n'y a pas de variations lentes ($\partial_x s = 0$). Pour plus de lisibilité, nous notons les dérivées,

$$\partial_\sigma s = s'_\sigma \quad \text{et} \quad \partial_x s = s'_x$$

Dans cette polarisation, la dérivée de la surface intervient dans la dérivée normale,

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathcal{N} \left(-\gamma'_\delta \partial_x + \partial_y \right) = \underbrace{\mathcal{N} \left(-s'_\sigma \partial_x + \partial_y \right)}_{\text{nouv. déf. } \partial_{\hat{\mathbf{n}}}} - \delta s'_x \partial_x$$

où \mathcal{N} est un facteur de normalisation. Ainsi avec cette nouvelle définition, la dérivée normale ne contient que des variations rapides et la dépendance par rapport au paramètre δ est explicite.

De plus, pour alléger les notations, nous définissons une dérivée normale par rapport aux variables rapides,

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} = \mathcal{N} \left(-s'_\sigma \partial_\sigma + \partial_\tau \right)$$

2.4.1 Injection des Éléments

Reprenant les calculs de la section 2.2, l'injection des *outils* dans l'équation de propagation est déjà traitée dans l'Eq. (2.9).

Il nous faut introduire la séparation $u + \Pi$ ainsi que le développement asymptotique dans la C.L. correspondant à la polarisation TE, i.e., dans $\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} = 0$, ce qui donne,

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(0)} \Big|_\Sigma + \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(1)} \Big|_\Sigma - \mathcal{N} s'_\sigma \partial_x \Pi^{(0)} \Big|_\Sigma - \mathcal{N} s'_x \partial_\sigma \Pi^{(0)} \Big|_\Sigma + \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(0)} \Big|_{\Gamma^\delta} \\ & + \sum_{n \geq 2} \delta^{n-1} \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(n)} \Big|_\Sigma - \mathcal{N} s'_\sigma s \partial_x \Pi^{(n-1)} \Big|_\Sigma - \mathcal{N} s'_x \partial_\sigma \Pi^{(n-1)} \Big|_\Sigma - \mathcal{N} s'_x \partial_x \Pi^{(n-2)} \Big|_\Sigma \right. \\ & \quad \left. + \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(n-1)} \Big|_{\Gamma^\delta} - \mathcal{N} s'_x \partial_x u^{(n-2)} \Big|_{\Gamma^\delta} \right) = 0 \end{aligned}$$

Maintenant, nous introduisons le Développement de Taylor Eq. (2.7) sur la partie lente (i.e.,

sur le champs effectif u). Nous obtenons ainsi, en explicitant les puissances δ ,

$$\left. \begin{aligned}
 & \delta^{-1} \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(0)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} \\
 + \delta^0 & \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(1)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} - \mathcal{N} s'_{\sigma} \left(\partial_x \Pi^{(0)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} - \mathcal{N} s'_x \left(\partial_{\sigma} \Pi^{(0)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} \\
 & + \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} \\
 + \delta^1 & \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(2)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} - \mathcal{N} s'_{\sigma} \left(\partial_x \Pi^{(1)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} - \mathcal{N} s'_x \left(\partial_{\sigma} \Pi^{(1)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} \\
 & + \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(1)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} + s(x, \sigma) \left(\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} - \mathcal{N} s'_x \left(\partial_x u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} \\
 + \delta^2 & \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(3)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} - \mathcal{N} s'_{\sigma} \left(\partial_x \Pi^{(2)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} - \mathcal{N} s'_x \left(\partial_{\sigma} \Pi^{(2)}(x, \sigma, \tau) \right) \Big|_{\Sigma} \\
 & + \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(2)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} + s(x, \sigma) \left(\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(1)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} - \mathcal{N} s'_x \left(\partial_x u^{(1)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} \\
 & + \frac{s^2}{2} \left(\partial_y^2 \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} - \mathcal{N} s'_x s(x, \sigma) \left(\partial_y \partial_x u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} \\
 \vdots & \\
 & = 0
 \end{aligned} \right\}$$

Finalement, les puissances de δ sont regroupées. Nous avons bien découpé le problème en deux sous-problèmes reliés par une Condition aux Limites Modifiée ($\widetilde{\text{C.L.}}^{(n)}$). Toutefois, la dérivée normale modifie le regroupement des puissances de δ . Il faut par conséquent résoudre un système en Π de plus. Nous obtenons pour les deux premiers ordres (relatif à $u^{(n)}$), les systèmes suivants,

Ordre -1

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(0)} = 0 \\
 & \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(0)} \Big|_{\Sigma} = 0 \\
 & \Pi_{\infty}^{(0)} = 0
 \end{aligned} \right. \quad (2.23)$$

Ordre 0

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(1)} = -2\partial_x \partial_{\sigma} \Pi^{(0)} \\
 & \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(1)} \Big|_{\Sigma} = - \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} \\
 & + \mathcal{N} s'_{\sigma} \partial_x \Pi^{(0)} \Big|_{\Sigma} + \mathcal{N} s'_x \partial_{\sigma} \Pi^{(0)} \Big|_{\Sigma} \\
 & \Pi_{\infty}^{(1)} = 0
 \end{aligned} \right. \quad (2.24) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \{ \nabla_{xy}^2 + k^2 \} u^{(0)} = 0 \\
 & \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(0)}(x, y) \right) \Big|_{y=0} = - \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(1)} \Big|_{\Sigma} \\
 & + \mathcal{N} s'_{\sigma} \partial_x \Pi^{(0)} \Big|_{\Sigma} + \mathcal{N} s'_x \partial_{\sigma} \Pi^{(0)} \Big|_{\Sigma} \\
 & \text{Condition de radiation}
 \end{aligned} \right.$$

Ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(2)} = -2\partial_x \partial_\sigma \Pi^{(1)} - \{\partial_x^2 + k^2\} \Pi^{(0)} \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(2)} \Big|_\Sigma = +\mathcal{N} s'_\sigma \partial_x \Pi^{(1)} \Big|_\Sigma + \mathcal{N} s'_x \partial_\sigma \Pi^{(1)} \Big|_\Sigma \\ \quad - \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{(x,y)}^{(1)} \right) \Big|_{y=0} - s(x, \sigma) \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} \partial_y u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} + \mathcal{N} s'_x \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \\ \Pi_\infty^{(2)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\nabla_{xy}^2 + k^2\} u^{(1)} = 0 \\ \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{(x,y)}^{(1)} \right) \Big|_{y=0} + s(x, \sigma) \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} \partial_y u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} - \mathcal{N} s'_x \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} = -\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(2)} \Big|_\Sigma \\ \quad + \mathcal{N} s'_\sigma \partial_x \Pi^{(1)} \Big|_\Sigma + \mathcal{N} s'_x \partial_\sigma \Pi^{(1)} \Big|_\Sigma \\ \Pi_\infty^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

Puis nous suivons la méthodologie, à savoir résoudre le problème local en $\Pi^{(n)}$ pour caractériser la C.L.⁽ⁿ⁾ et ainsi l'injecter dans le problème global en $u^{(n)}$.

2.4.2 Résolution : ordre -1 et ordre 0

la solution du problème (2.23) est une fonction constante par rapport aux variables σ et τ , i.e., une fonction de la variable x seulement. Cette fonction constante vérifie le Laplacien avec la condition aux limites de Neumann. En ajoutant la condition à l'infini, nous fixons cette constante, et la seule possible est donc 0. Par conséquent, la solution du système (2.23) à l'ordre -1 est 0.

Le problème (2.24) en $\Pi^{(1)}$ se simplifie,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(1)} = 0 \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(1)} \Big|_\Sigma = - \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \\ \Pi_\infty^{(1)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Le terme de droite en $u^{(1)}$ n'est pas constant par rapport aux variables σ et τ . La dérivée normale possède des variations rapides (à cause du terme s'_σ). Ce terme s'écrit explicitement (voir p.48),

$$\begin{aligned} \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} &= \left(\mathcal{N} (-s'_\sigma \partial_x + \partial_y) u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \\ &= -\mathcal{N} s'_\sigma \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} + \mathcal{N} \left(\partial_y u_{(x,y)}^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \end{aligned}$$

Puis, le théorème de la divergence sur le Laplacien est utilisé, ce qui donne,

$$0 = \int_D \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(1)} \, dS = - \int_{\partial D} \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(1)} \, dl \quad (2.27)$$

où $\hat{\mathbf{n}}_\sigma$ est un vecteur normal unitaire entrant au domaine D . En général, ce théorème s'écrit avec le vecteur normal sortant au domaine, d'où ce signe inhabituel.

Le bord ∂D se décompose en trois morceaux : la surface rugueuse (notée Σ), une frontière à $\tau = +H_D$ fermant le domaine (notée Γ^{H_D}) et les deux cotés périodiques (noté Pér.). Ainsi nous avons formellement $\partial D = \Sigma \cup \Gamma^{H_D} \cup \text{Pér.}$. Comme le problème est périodique et que les normales aux bords périodiques sont opposés, les contributions des cotés périodiques se compensent. Ainsi, il reste à calculer,

$$-\left(\int_{\Sigma} \partial_{\hat{\mathbf{n}}_\sigma} \Pi^{(1)} \, dl(\sigma) - \int_{\Gamma^{H_D}} \partial_\tau \Pi^{(1)} \, d\sigma \right) = 0$$

Or, pour borner le domaine D , l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann T_k discuté à la section 1.1.2 (p.11) est choisi en prenant $k = 0$. Ainsi la partie sur Γ^{H_D} donne,

$$\int_{\Gamma^{H_D}} \partial_\tau \Pi^{(1)} \, d\sigma = \int_0^d T_0(\Pi^{(1)}) \, d\sigma = 0$$

En outre, notons que la condition $\Pi_\infty^{(1)} = 0$ est imposée, donc il est cohérent que le bord Γ^{H_D} ne contribue pas. Ainsi, le calcul de Eq. (2.27) se termine avec,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} \partial_{\hat{\mathbf{n}}_\sigma} \Pi^{(1)} \, dl(\sigma) = \int_{\Sigma} \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \, dl(\sigma) \\ &= \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} s'_\sigma \, dl(\sigma) + \left(\partial_y u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \, dl(\sigma) \\ &= \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \int_0^d \mathcal{N} s'_\sigma \frac{d\sigma}{\mathcal{N}} + \left(\partial_y u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \int_0^d \mathcal{N} \frac{d\sigma}{\mathcal{N}} \\ &= \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \int_0^d s'_\sigma \, d\sigma + \left(\partial_y u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \int_0^d d\sigma \end{aligned}$$

Les cellules sont localement périodiques, i.e., que la surface possède une période d suivant la variable σ : $s(x, d) = s(x, 0)$.

$$\int_0^d s'_\sigma(x, \sigma) \, d\sigma = s(x, d) - s(x, 0) = 0$$

Dans ce cas, la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ est,

$$\partial_y u_{|y=0}^{(0)} = 0 \tag{2.28}$$

Nous avons obtenu le résultat recherché pour l'ordre 0, à savoir que la surface rugueuse peut être vue comme une surface lisse, i.e. ne présentant pas d'irrégularités fines. Il faut noter que cette condition Eq. (2.28) est une condition nécessaire pour obtenir l'existence d'une solution au problème en $\Pi^{(1)}$. Dans la littérature, ce type de condition Eq. (2.27) reliant les données du problème s'appelle condition de compatibilité.

Pour finir et résoudre le problème (2.26) en $\Pi^{(1)}$, une variable auxiliaire est utilisée. Nous posons la solution de la forme,

$$\Pi^{(1)}(x, \sigma, \tau) = \beta(\sigma, \tau) \partial_x u_{|y=0}^{(0)}$$

où la variable auxiliaire β doit vérifier le système auxiliaire suivant,

$$\begin{cases} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta = 0 \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta|_{\Sigma} = \mathcal{N} s'_{\sigma} = \frac{s'_{\sigma}}{\sqrt{1 + s'_{\sigma}{}^2}} \\ \beta_{\infty} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

La condition de compatibilité (application du théorème de la divergence sur ce système) est bien vérifiée car les cellules D sont périodiques. De plus, ce problème est périodique, c'est-à-dire $\beta(0, \tau) = \beta(d, \tau)$. Ce nouveau problème auxiliaire se résout numériquement par une méthode Éléments Finis périodiques. Toutefois, nous notons que la présence du terme “dérivée” peut introduire des instabilités numériques.

Finalement, l'ordre 0 est complètement déterminé. À ce stade, la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ est caractérisée et le problème global se ramène au problème posé sur un plan métallique (en $y = 0$), qui peut être calculé analytiquement. Il faut aussi garder en tête que le champ $u^{(0)}$ représente un champ total comme dans la polarisation TM. De plus, le problème local est calculé numériquement à l'aide du système auxiliaire.

2.4.3 Résolution : ordre 1

Le système (2.25) est réécrit en considérant les termes déjà connus. Il reste,

$$\begin{cases} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(2)} = -2(\partial_{\sigma}\beta) \partial_x \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(2)}|_{\Sigma} = +\mathcal{N} s'_{\sigma} \beta|_{\Sigma} \partial_x \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} + \mathcal{N} s'_x (\partial_{\sigma}\beta)|_{\Sigma} \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \\ \quad - \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{(x,y)}^{(1)} \right)_{|y=0} - s(x, \sigma) \left(\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} + \mathcal{N} s'_x \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \\ \Pi_{\infty}^{(2)} = 0 \end{cases}$$

Comme précédemment, nous utilisons le théorème de la divergence pour obtenir une condition de compatibilité entre les données. Les mêmes justifications s'appliquent pour passer du calcul sur le bord ∂D à celui sur Σ . Ainsi, nous avons,

$$-2 \left(\partial_x^2 u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \int_D \partial_{\sigma}\beta \, dS = - \int_{\Sigma} \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(2)} \, dl$$

Nous faisons un abus de notation en remplaçant $\partial_x \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0}$ par $\left(\partial_x^2 u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0}$. Toutefois, si le champ incident est une onde plane, alors le champ $u^{(0)}$ est aussi une onde plane et la notation se justifie.

Le terme de droite dans cette condition de compatibilité se résume au calcul de,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(2)} \, dl &= \partial_x^2 u_{|y=0}^{(0)} \int_0^d \mathcal{N} s'_{\sigma} \beta|_{\Sigma} \frac{d\sigma}{\mathcal{N}} + \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \int_0^d \mathcal{N} s'_x (\partial_{\sigma}\beta)|_{\Sigma} \frac{d\sigma}{\mathcal{N}} \\ &+ \int_0^d - \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{(x,y)}^{(1)} \right)_{|y=0} - s(x, \sigma) \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}} \partial_y u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} + \mathcal{N} s'_x \left(\partial_x u_{(x,y)}^{(0)} \right)_{|y=0} \frac{d\sigma}{\mathcal{N}} \end{aligned}$$

En explicitant le dérivée normale ($\partial_{\mathbf{n}} = \mathcal{N}(-s'_\sigma \partial_x + \partial_y)$), il vient,

$$\begin{aligned} \int_0^d -\left(\partial_{\mathbf{n}} u_{(x,y)}^{(1)}\right)_{|y=0} \frac{d\sigma}{\mathcal{N}} &= \partial_x u_{|y=0}^{(1)} \int_0^d s'_\sigma d\sigma \\ &\quad - \partial_y u_{|y=0}^{(1)} \int_0^d d\sigma \\ \int_0^d -s(x, \sigma) \left(\partial_{\mathbf{n}} \partial_y u_{(x,y)}^{(0)}\right)_{|y=0} \frac{d\sigma}{\mathcal{N}} &= \partial_x \partial_y u_{|y=0}^{(0)} \int_0^d s'_\sigma s d\sigma \\ &\quad - \partial_y^2 u_{|y=0}^{(0)} \int_0^d s(x, \sigma) d\sigma \end{aligned}$$

et comme la surface est localement périodique entre chaque cellule, des termes sont nuls, car,

$$\begin{aligned} \int_0^d s'_\sigma d\sigma &= s(x, d) - s(x, 0) = 0 \\ \int_0^d s s'_\sigma d\sigma &= \frac{s^2(x, d)}{2} - \frac{s^2(x, 0)}{2} = 0 \end{aligned}$$

Pour plus de lisibilité dans les résultats, nous notons,

$$\bar{s}(x) = \frac{1}{d} \int_0^d s(x, \sigma) d\sigma \quad (2.30)$$

$$\mathfrak{h}_{TE}(x) = \frac{1}{d} \int_0^d s'_\sigma \beta|_{\tau=s} d\sigma \quad (2.31)$$

$$\mathfrak{g}_{TE}(x) = \frac{2}{d} \int_D \partial_\sigma \beta dS \quad (2.32)$$

$$\overline{s'_x}(x) = \frac{1}{d} \int_0^d s'_x d\sigma$$

$$\mathfrak{g}^{(0)}(x) = \frac{1}{d} \int_0^d s'_x \partial_\sigma \beta|_\Sigma d\sigma$$

avec

$$h_{TE} = \mathfrak{g}_{TE} - \mathfrak{h}_{TE}$$

$$g_{TE} = \overline{s'_x} + \mathfrak{g}^{(0)}$$

Nous obtenons le résultat,

$$\partial_y u_{|y=0}^{(1)} + \bar{s} \partial_y^2 u_{|y=0}^{(0)} + h_{TE} \partial_x^2 u_{|y=0}^{(0)} - g_{TE} \partial_x u_{|y=0}^{(0)} = 0 \quad (2.33)$$

En d'autres termes, nous avons caractérisé la $\widetilde{C.L.}^{(1)}$. Dans le cas d'une surface à une échelle de périodicité, les différents paramètres ne dépendent d'aucune variable, et le paramètre g_{TE} est nul (car la surface n'a pas de variations suivant x , c'est-à-dire $s'_x = 0$).

Les paramètres h_{TE} et g_{TE} , liés à la résolution du système auxiliaire (2.29), comportent deux termes chacun. L'évaluation de ces deux termes n'ajoute pas de sur-coût numérique comparée à la résolution par Éléments Finis du système auxiliaire.

Relation entre les paramètres

D'après les résultats établis en Annexe A, en considérant la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$ obtenue en polarisation TM donnée par l'Eq. (2.16) et par analogie avec l'Eq. (A.10), et en remarquant la similitude des deux systèmes auxiliaires l'Eq. (2.29) et Eq. (A.11), le paramètre h_{TE} donné par Eq. (2.31) peut aussi s'écrire,

$$h_{TM} = \bar{s} + h_{TE} \quad (2.34)$$

Pour différents profils de surface, TAB. 2.4 compare le calcul de ces coefficients soit en résolvant le système auxiliaire issu de la polarisation TM (Eq. (2.15)), soit en résolvant le système auxiliaire issu de la polarisation TE (Eq. (2.29)). Le nom quad. est un profil quadratique de fonction : $\gamma_\delta(x) = -4h_{max} (x^2 - dx)/d^2$. Il faut être vigilant aux signes des différents paramètres

$d = 0.002$		h_{TM}	$\bar{s} + h_{TE}$	\bar{s}	h_{TE}	$ h_{TM} - \bar{s} - h_{TE} $
$h_{max} = 0.001$	quad.	0.8359	0.8351	0.6665	0.1687	$7.91 \cdot 10^{-4}$
$h_{max} = 0.002$	quad.	0.8903	0.8898	0.6666	0.2232	$4.78 \cdot 10^{-4}$
$h_{max} = 0.001$	sin.	0.7198	0.7168	0.	0.7168	$3.16 \cdot 10^{-3}$
$h_{max} = 0.002$	sin.	0.8395	0.8371	0.	0.8371	$2.34 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2.4 – Comparaison de h_{TM} et $\bar{s} + h_{TE}$ pour différents profils de surfaces.

qui dépendent des systèmes auxiliaires. La différence absolue n'est qu'indicative car elle dépend de la finesse du maillage considéré.

Le système auxiliaire en β issu de la polarisation TE (Eq. (2.29)) est numériquement plus instable car d'une part c'est un problème de Laplacien avec condition de Neumann et d'autre part la donnée est la dérivée de la fonction pouvant poser des difficultés numériques dans certaines configurations.

2.4.4 Conclusion : C.L.E.

Nous avons caractérisé les $\widetilde{\text{C.L.}}$ d'ordre 0 et d'ordre 1. Maintenant, nous cherchons à expliciter la C.L.E.. Pour résumer, nous avons les $\widetilde{\text{C.L.}}$ d'ordre 0 et d'ordre 1,

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{C.L.}}^{(0)} & : \partial_y u|_{y=0}^{(0)} = 0 \\ \widetilde{\text{C.L.}}^{(1)} & : \partial_y u|_{y=0}^{(1)} + \bar{s} \partial_y^2 u|_{y=0}^{(0)} + h_{TE} \partial_x^2 u|_{y=0}^{(0)} - g_{TE} \partial_x u|_{y=0}^{(0)} = 0 \end{aligned}$$

À partir du développement asymptotique du champ total : $u^{\text{tot}} = u^{(0)} + \delta u^{(1)} + O(\delta^2)$, nous en déduisons la C.L.E. = $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)} + \delta \widetilde{\text{C.L.}}^{(1)} + O(\delta^2)$ d'ordre 1 pour le problème en polarisation TE,

$$\partial_y u|_{y=0}^{\text{tot}} + \delta \bar{s} \partial_y^2 u|_{y=0}^{\text{tot}} + \delta h_{TE} \partial_x^2 u|_{y=0}^{\text{tot}} - \delta g_{TE} \partial_x u|_{y=0}^{\text{tot}} = O(\delta^2) \quad (2.35)$$

Finalement, au lieu de résoudre le problème initial (1.24), nous résolvons alors ce problème,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\nabla_{xy}^2 + k^2\} u^{\text{tot}} = 0 \\ \partial_y u|_{y=0}^{\text{tot}} + \delta \bar{s} \partial_y^2 u|_{y=0}^{\text{tot}} + \delta h_{TE} \partial_x^2 u|_{y=0}^{\text{tot}} - \delta g_{TE} \partial_x u|_{y=0}^{\text{tot}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Condition de radiation

Les effets des irrégularités surfaciques fines sont contenus dans les deux paramètres \bar{s} et h_{TE} , au lieu d'un seul pour la polarisation TM. Suivant l'utilisation de la C.L.E., la relation suivante peut être appliquée,

$$\partial_y^2 u|_{y=0}^{\text{tot}} = -k^2 u|_{y=0}^{\text{tot}} - \partial_x^2 u|_{y=0}^{\text{tot}}$$

car le champ u^{tot} vérifie l'équation de Helmholtz,

Si le champ incident est une onde plane à incidence normale, alors le terme en ∂_x se simplifie. En outre, si la surface est à moyenne nulle sur chaque cellule, l'ordre 1 n'ajoute aucune information supplémentaire par rapport à l'ordre 0. En d'autres termes, en incidence normale, une surface métallique purement périodique à moyenne nulle peut être vue à l'ordre 1 comme un plan métallique (en $y = 0$).

2.4.5 Analyse en terme de coefficients de réflexion

Comme pour la polarisation TM (section 2.3.4), nous déduisons le coefficient de réflexion à partir de Eq. (2.28) et de Eq. (2.33). Les surfaces à une échelle de périodicité sont considérées ici, et la période d est petite devant la longueur d'onde : un seul mode de Floquet est propagatif. Nous rappelons les coefficients de réflexion associés à chaque ordre.

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, y) &= R^{(0)} e^{ik_x x + ik_y y} + u^{\text{inc}}(x, y) \\ u^{(1)}(x, y) &= R^{(1)} e^{ik_x x + ik_y y} \end{aligned}$$

Le calcul de l'ordre 0, donné par $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ et correspondant à un plan, est immédiat,

$$R^{(0)} = +1$$

La $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$ donne : $ik_y R^{(1)} - 2\bar{s}k_y^2 - 2h_{TE}k_x^2 = 0$ ce qui s'écrit,

$$R^{(1)} = -2ik_y \bar{s} - 2i \frac{k_x^2}{k_y} h_{TE}$$

ou encore : $R^{(1)} = -2ik \left(\bar{s} \cos \theta^{\text{inc}} + h_{TE} \sin \theta^{\text{inc}} \tan \theta^{\text{inc}} \right)$. Comme pour la polarisation TM, le coefficient d'ordre 1 est purement imaginaire, c'est-à-dire que l'ordre 1 apporte une correction sur la phase. Le coefficient de réflexion se développe asymptotiquement à l'ordre 1,

$$R_1 = +1 - \left(2ik_y \bar{s} + 2i \frac{k_x^2}{k_y} h_{TE} \right) \delta + O(\delta^2)$$

En utilisant la C.L.E. (Eq. (2.35)), le coefficient de réflexion s'approche à l'ordre 1 par,

$$R_{eq} \sim \frac{1 - i \left(k_y \bar{s} + h_{TE} k_x^2 / k_y \right) \delta}{1 + i \left(k_y \bar{s} + h_{TE} k_x^2 / k_y \right) \delta}$$

Illustration numérique

La solution de référence est calculée par la MoM en prenant un nombre de point dans la discrétisation suffisamment important (de l'ordre de $N = 200$).

La surface considérée ici est un profil sinusoidal de hauteur $h_{max} = 0.002m$ et de période $d = 0.002m$. Par conséquent, cette surface est de moyenne nulle : $\bar{s} = 0$. Le profil créneau correspond une fonction échelle entre 0 et h_{max} de période d . Le profil triangle est une fonction

linéaire par morceaux variant entre 0 et h_{max} et de période d . Ces deux profils ne sont pas de moyenne nulle : $\bar{s} = h_{max}/2$.

À incidence normale, le coefficient de réflexion attendu pour les deux approximations (R_1 et R_{eq}) est 1 pour toute fréquence. De plus, nous négligeons le coefficient g_{TE} donné par Eq. (2.32) et nous ramenons l'évaluation du paramètre homogénéisé h_{TE} au calcul de h_{TM} en utilisant Eq. (2.34), c'est-à-dire que le coefficient h_{TE} est évalué par,

$$h_{TE} \approx \bar{s} - h_{TM}$$

Cette approximation, sans justification *a priori* mais vérifier *a posteriori*, est d'un double intérêt : éviter les instabilités numériques du système auxiliaire en β ainsi que les erreurs induites par la dérivée partielle dans Eq. (2.32) et surtout ne résoudre qu'un système auxiliaire.

Sur la FIG. 2.17 sont tracées la partie réelle et la partie imaginaire du coefficient de réflexion pour les incidences de 0° , 60° et 80° . À incidence normale, le coefficient de réflexion est bien de 1 pour une large bande de fréquence. Pour les incidences non-normales, la prévision du coefficient de réflexion par les deux modèles (asymptotique ou équivalent) est satisfaisante. Le comportement global est correctement représenté. De plus, l'approximation, sans assise théorique, du coefficient h_{TE} est numériquement pertinente.

Pour les profils créneau et triangle à incidence normale, FIG. 2.18 compare le coefficient de réflexion R_δ calculé par la MoM avec celui évalué asymptotiquement R_1 et avec celui approché par la condition équivalente R_{eq} . Les coefficients R_1 et R_{eq} donne une bonne approximation du coefficient de réflexion.

Pour le profil triangulaire, FIG. 2.19 trace la partie réelle et la partie imaginaires des coefficients de réflexion pour une incidence de 60° et de 80° . Les différents coefficients sont en accord.

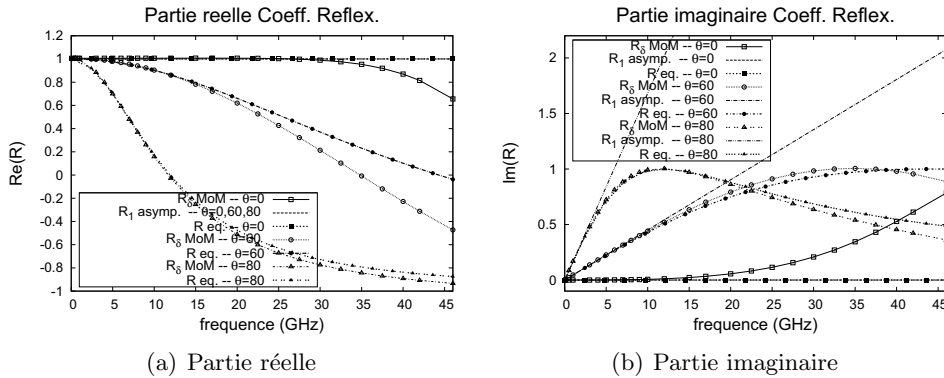


FIGURE 2.17 – Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 0° , 60° et 80° – profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.002m$ et $d = 0.002m$.

L'étude de l'erreur est plus délicate. La MoM est moins précise dans la polarisation TE : d'une part parce que la formulation intégrale est de type MFIE et d'autre part parce que l'évaluation du noyau de Green périodique est plus difficile. Raffiner la discrétisation apporte peu de précision comparée à l'effort numérique ajouté.

FIG. 2.20 représente l'erreur en fonction du $k_y h_{max}$ pour trois profils : sinusoïdal, créneau et triangle. Il est délicat de tirer des conclusions. Pour des hauteurs relatives $k_y h_{max}$ faible, l'erreur observée est celle de la MoM.

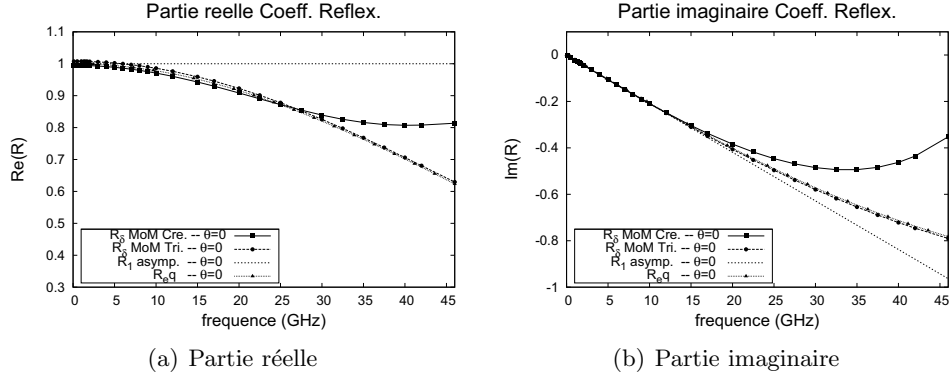


FIGURE 2.18 – Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 0° – profil créneau et triangle : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$.

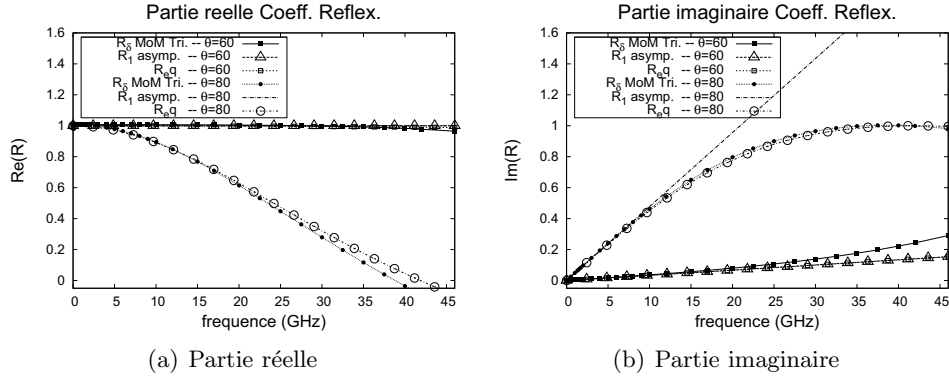
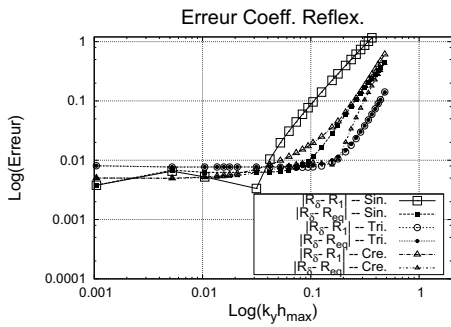


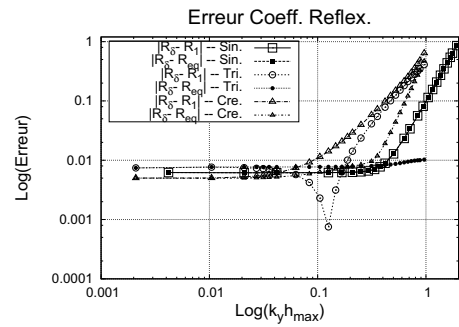
FIGURE 2.19 – Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 60° et 80° – profil triangle : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$.

L'angle d'incidence influe sur le domaine où les coefficients R_1 et R_{eq} donnent une précision acceptable. Contrairement à la polarisation TM la dépendance par rapport à l'angle d'incidence est explicite, dans cette polarisation l'incidence intervient à travers deux termes. Les comparaisons sont par conséquent plus difficiles.

L'ordre 2 pour la polarisation TE est présenté formellement dans l'Annexe B.



(a) Erreur à Incidence 60° – profil sinusoidal, créneau et triangulaire : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$.



(b) Erreur à Incidence 0° – profil sinusoidal $h_{max} = 0.001m$, créneau et triangulaire : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$.

FIGURE 2.20 – Erreur en fonction de $k_y h_{max}$ entre le coefficient de réflexion de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} .

2.5 Commentaires

Dans cette section, nous rassemblons les différents résultats obtenus pour le cas métallique dans les deux polarisations.

2.5.1 Synthèse

Les résultats sont rassemblés dans TAB. 2.5. Nous pouvons noter que, dans les deux polarisations, l'ordre 0 est celui d'un plan métallique. Dans les méthodes utilisant des développements double-échelles, l'ordre 0 est généralement supposé être le cas non-pertubé (le plan). Puis un terme de couche limite est ajouté à chaque ordre pour corriger l'erreur. Dans l'application de la procédure, nous retrouvons par le calcul cette hypothèse généralement faite sur l'ordre 0.

À l'ordre 1, nous obtenons quatre paramètres correspondant à la surface homogénéisée. Les effets des irrégularités surfaciques sont contenus dans ces quatre paramètres, le problème global ne "voit" en quelque sorte que ces effets "moyennés".

Ces paramètres dépendent de la polarisation. Ils résultent de la résolution de systèmes auxiliaires indépendants de la fréquence et de l'angle d'incidence, i.e., qu'ils sont valables dans une bande de fréquence et pour toutes les incidences. De plus, ils sont purement réels.

Polarisation	: TM		
composante	: $u = E_z$;	$u^{\text{tot}} = u^{(0)} + \delta u^{(1)}$	$+O(\delta^2)$
C.L.	: $u_{ \Gamma\delta}^{\text{tot}} = 0$		
$\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$: $u_{ y=0}^{(0)}$		$= 0$
$\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$: $u_{ y=0}^{(1)}$	$- h_{TM} \partial_y u_{ y=0}^{(0)}$	$= 0$
C.L.E. ⁽¹⁾	: $u_{ y=0}^{\text{tot}}$	$- \delta h_{TM}(x) \partial_y u_{ y=0}^{\text{tot}}$	$= O(\delta^2)$
Polarisation	: TE		
composante	: $u = H_z$;	$u^{\text{tot}} = u^{(0)} + \delta u^{(1)}$	$+O(\delta^2)$
C.L.	: $\partial_{\mathbf{n}} u_{ \Gamma\delta}^{\text{tot}} = 0$		
$\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$: $\partial_y u_{ y=0}^{(0)}$		$= 0$
$\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$: $\partial_y u_{ y=0}^{(1)}$	$+ \bar{s} \partial_y^2 u_{ y=0}^{(0)} + h_{TE} \partial_x^2 u_{ y=0}^{(0)} - g_{TE} \partial_x u_{ y=0}^{(0)}$	$= 0$
C.L.E. ⁽¹⁾	: $\partial_y u_{ y=0}^{\text{tot}}$	$+ \delta \bar{s}(x) \partial_y^2 u_{ y=0}^{\text{tot}} + \delta h_{TE}(x) \partial_x^2 u_{ y=0}^{\text{tot}} - \delta g_{TE}(x) \partial_x u_{ y=0}^{(0)}$	$= O(\delta^2)$

TABLE 2.5 – Synthèse de l'homogénéisation par les surfaces métalliques 1D

Pour finir, l'obtention du champ total solution du problème de diffraction initial Eq. (1.23) ou Eq. (1.24) peut être menée de deux manières :

- soit en utilisant la C.L.E.. Cette condition aux limites effective est introduite dans un code basé sur des méthodes rigoureuses (Équation Intégrale, . . .) où l'effort numérique sera moindre, ou dans un code basé sur des méthodes approchées leur permettant de prendre en compte des effets de rugosités fines, jusqu'alors complexes ou impossibles à mettre en œuvre.

- soit en utilisant le développement asymptotique construit à chaque ordre. Dans le cas où l'effet de la rugosité est ramené sur un plan, à partir de l'ordre $n - 1$, le calcul pour obtenir l'ordre n peut être réalisé analytiquement.

2.5.2 Condition de Léontovich : impédance équivalente

En associant les grandeurs u à leurs grandeurs physiques (champs électrique \mathbf{E} , magnétique \mathbf{H} , ...) et en utilisant les différentes équations de Maxwell, la C.L.E. d'ordre 1 obtenue peut se mettre sous la forme d'une Impédance Équivalente (IBC ou condition de Léontovich [42, 66]). Le cas traité étant 2D (invariance suivant la direction $\hat{\mathbf{z}}$), cette impédance est diagonale : il n'y a pas de polarisation croisée. Cette impédance équivalente est posée sur le plan et elle représente les effets de rugosités. Formellement, elle s'écrit à l'ordre 1,

$$\hat{\mathbf{y}} \times \left(\mathbf{E}^{\text{tot}} \times \hat{\mathbf{y}} \right) + Z \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}^{\text{tot}} = O(\delta^2)$$

ou encore,

$$\begin{vmatrix} E_x^{\text{tot}} \\ E_z^{\text{tot}} \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} -H_z^{\text{tot}} \\ -H_x^{\text{tot}} \end{vmatrix} = O(\delta^2)$$

Nous considérons des surfaces à une échelle de périodicité : $s'_x = 0$ ou encore $g_{TE} = 0$. D'après TAB. 2.5, nous en déduisons (en $y = 0$) pour les deux polarisations,

Polarisation TM : $E_z^{\text{tot}} - \delta h_{TM} \partial_y E_z^{\text{tot}} = O(\delta^2)$

Or nous avons l'équation de Maxwell : $\nabla \times \mathbf{E}^{\text{tot}} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}^{\text{tot}}$, i.e.,

$$\begin{vmatrix} \partial_y E_z^{\text{tot}} \\ -\partial_x E_z^{\text{tot}} \\ 0 \end{vmatrix} = -i\omega\mu_0 \begin{vmatrix} H_x^{\text{tot}} \\ H_y^{\text{tot}} \\ 0 \end{vmatrix}$$

ce qui donne,

$$E_z^{\text{tot}} + \delta i\omega\mu_0 h_{TM} H_x^{\text{tot}} = O(\delta^2)$$

Polarisation TE : $\partial_y H_z^{\text{tot}} + \delta \bar{\epsilon} \partial_y^2 H_z^{\text{tot}} + \delta h_{TE} \partial_x^2 H_z^{\text{tot}} = O(\delta^2)$

Or nous avons l'équation de Maxwell : $\nabla \times \mathbf{H}^{\text{tot}} = +i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}^{\text{tot}}$, i.e.,

$$\begin{vmatrix} \partial_y H_z^{\text{tot}} \\ -\partial_x H_z^{\text{tot}} \\ 0 \end{vmatrix} = +i\omega\epsilon_0 \begin{vmatrix} E_x^{\text{tot}} \\ E_y^{\text{tot}} \\ 0 \end{vmatrix}$$

et l'équation de Helmholtz est satisfaite, i.e., $\partial_y^2 H_z^{\text{tot}} = -k^2 H_z^{\text{tot}} - \partial_x^2 H_z^{\text{tot}}$. Ceci donne,

$$+i\omega\epsilon_0 E_x^{\text{tot}} - \delta \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \bar{\epsilon} H_z^{\text{tot}} - \delta (\bar{\epsilon} - h_{TE}) \partial_x^2 H_z^{\text{tot}} = O(\delta^2)$$

Ces deux calculs, pour les deux polarisations, montrent que l'impédance équivalente est bien diagonale. De façon synthétique, la C.L.E. sous forme d'impédance équivalente s'écrit :

$$\hat{\mathbf{y}} \times \left(\mathbf{E}^{\text{tot}} \times \hat{\mathbf{y}} \right) + \delta \begin{vmatrix} Z^{\text{TE}} & 0 \\ 0 & Z^{\text{TM}} \end{vmatrix} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}^{\text{tot}} = O(\delta^2)$$

avec

$$Z^{\text{TE}} = +i\omega\mu_0 \bar{\epsilon} - \frac{\bar{\epsilon} - h_{TE}}{i\omega\epsilon_0} \partial_x^2$$

$$Z^{\text{TM}} = -i\omega\mu_0 h_{TM}$$

Ces résultats appellent trois remarques.

En premier lieu, le paramètre δ est sans dimension. Il est clair que le paramètre \bar{s} est par définition homogène à une hauteur, puisqu'il représente la moyenne de la surface sur une cellule. Et d'après les deux expressions précédentes, le paramètre h_{TM} a la même dimension que le paramètre \bar{s} , i.e., une hauteur. De plus, comme le paramètre h_{TM} (ou le paramètre \bar{s}) est homogène à des mètres, une analyse dimensionnelle montre que cette impédance est bien homogène à des Ohms (Ω),

$$\omega\mu_0 h_{TM} \propto \text{rad.s}^{-1} \text{H.m}^{-1} \text{m} = \text{s}^{-1} \text{V.s.A} = \text{V.A}^{-1} = \Omega$$

De plus, pour pouvoir réaliser l'addition, le paramètre h_{TE} doit être de la même homogénéité que le paramètre \bar{s} . Et ceci est confirmé par l'analyse dimensionnelle,

$$\frac{h_{TE}}{\omega\epsilon_0} \propto \text{m} (\text{rad.s}^{-1})^{-1} (\text{A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1})^{-1} = \text{V.A}^{-1} = \Omega$$

Donc, les trois paramètres calculés : \bar{s} , h_{TM} , h_{TE} sont homogènes à des hauteurs. Dans ce cas, les paramètres \mathfrak{h}_{TE} et \mathfrak{g}_{TE} sont aussi homogènes à des hauteurs. En revanche, l'interprétation du paramètre homogénéisé comme hauteur équivalente [57] n'est qu'une particularité de la polarisation TM et ne s'applique pas à la polarisation TE.

En second lieu, notons que cette impédance d'ordre 1 modélisant une surface rugueuse métallique est, dans les deux cas de polarisation, imaginaire pure. Ceci signifie que l'information qu'elle apporte au champ global ne contribue que sur la phase de celui-ci. Pour tenir compte des effets de rugosités fines sur le module du champ, une C.L.E. d'ordre 2 doit être évaluée.

Pour finir, l'impédance dépend du terme ∂_x^2 . Dans le cas d'une onde plane comme champ incident, ce terme se traduit par une dépendance en $\sin^2 \theta^{\text{inc}}$. Donc les trois paramètres homogénéisés sont indépendants de la fréquence et de l'angle d'incidence, mais l'impédance équivalente, elle, en dépend.

2.5.3 Une interprétation pour les surfaces de faible hauteur à une échelle de périodicité

Dans le cas d'une fine couche de diélectrique déposée sur un plan métallique, Engquist et Nédélec [27] ont établi une condition d'impédance équivalente de d'ordre 1 lorsque la hauteur h de la couche est "petite" (relativement à la longueur d'onde λ). Les expressions sont résumées dans TAB. 2.6

Le paramètre δ représente le changement d'échelle et il est défini par,

$$\delta = d/L$$

Si la hauteur h de la couche diélectrique est fixée à : $h = \delta\lambda$, alors nous en déduisons pour la polarisation TM :

$$\epsilon_{TM} h = \delta h_{TM} \implies \epsilon_{TM} = \frac{h_{TM}}{\lambda}$$

et pour la polarisation TE :

$$\begin{cases} \mu_{TE} h = -\delta\bar{s} \\ \epsilon_{TE}^{-1} h = -\delta(\bar{s} - h_{TE}) \end{cases} \implies \begin{cases} \mu_{TE} = \frac{-\bar{s}}{\lambda} \\ \epsilon_{TE} = \frac{\lambda}{h_{TE} - \bar{s}} \end{cases}$$

TE			
Engquist-Nédélec	$\partial_y u^{\text{tot}}$	$+\left(k^2 h\mu + \epsilon^{-1}h\partial_x^2 \right)$	$u^{\text{tot}} = 0$
C.L.E. surf. rug.	$\partial_y u^{\text{tot}}$	$-\left(k^2 \delta \bar{s} + \delta (\bar{s} - h_{TE})\partial_x^2 \right)$	$u^{\text{tot}} = 0$
TM			
Engquist-Nédélec	u^{tot}	$-\epsilon h$	$\partial_y u^{\text{tot}} = 0$
C.L.E. surf. rug.	u^{tot}	$-\delta h_{TM}$	$\partial_y u^{\text{tot}} = 0$

TABLE 2.6 – Comparaison : condition d’impédance homogénéisée et condition d’impédance de Engquist-Nédélec

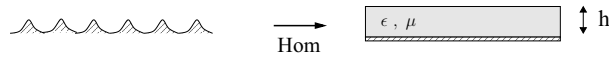


FIGURE 2.21 – Une géométrie équivalente de la surface homogénéisée

Ainsi, nous pouvons faire l’analogie entre une surface rugueuse et une fine couche d’un matériau complexe déposée sur un plan métallique (FIG. 2.21). Il est important de préciser que ce sont des permittivités et perméabilités relatives. Le caractère sans dimension est bien préservé. La couche limite proche de la surface peut s’interpréter comme un milieu diélectrique anisotrope.

Il faut noter aussi que ceci n’est qu’une interprétation des coefficients obtenus par la procédure d’homogénéisation. L’obtention des impédances de Engquist-Nédélec n’est possible que pour une fine couche de diélectrique, et le choix de $h = \delta\lambda$ limite, par conséquent, le domaine où cette interprétation est justifiée. Cette interprétation est uniquement formelle et des expériences numériques permettraient de la vérifier.

2.6 Conclusion

Une procédure d’homogénéisation permettant de calculer des coefficients effectifs a été proposée. Cette procédure a été appliquée à des surfaces parfaitement métalliques éclairées par une onde plane en polarisation TM et en polarisation TE. Les résultats obtenus sont satisfaisants. Nous avons illustré que la méthode était peu sensible à la forme du profil de la surface. De plus, la méthode est aussi valide pour des profils présentant des fortes pentes ou une dérivée discontinue. Dans le cas de la polarisation TM, le domaine de validité est encore convenable pour des hauteurs de l’ordre de $\lambda/8$. Dans le cas de la polarisation TE, dû fait d’un manque de précision dans la solution de référence (MFIE) le domaine de validité n’est pas pu être établi avec exactitude. Ceci renforce l’intérêt de la procédure d’homogénéisation. Nous avons montré que la montée en ordre étend le domaine de validité.

Chapitre 3

Homogénéisation : cas diélectrique

Sommaire

3.1	Préliminaires	64
3.1.1	Notations	64
3.1.2	Une illustration informelle	66
3.2	Injection des <i>outils</i>	69
3.2.1	Équation de propagation	69
3.2.2	Condition aux Limites : $[u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0$	70
3.2.3	Condition aux Limites : $[\partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0$	71
3.2.4	Synthèse	71
3.3	Résolution de l'ordre 0 (associé à $u^{(0)}$)	74
3.3.1	Calcul de $\Pi^{(0)}$ et détermination de $[u_{1,2}^{(0)}]_{y=0}$	74
3.3.2	Caractérisation de $[\partial_y u_{1,2}^{(0)}]_{y=0}$	74
3.3.3	Conclusion pour l'ordre 0	75
3.4	Résolution de l'ordre 1 (associé à $u^{(1)}$)	76
3.4.1	Calcul de $\Pi^{(1)}$ et détermination de $[u_{1,2}^{(1)}]_{y=0}$	76
3.4.2	Caractérisation de $[\partial_y u_{1,2}^{(1)}]_{y=0}$	77
3.4.3	Conclusion pour l'ordre 1	78
3.4.4	Analyse : coefficients de réflexion et transmission	79
3.5	Ordre supérieur	82
3.5.1	Calcul de $\Pi^{(2)}$ pour déterminer $[u_{1,2}^{(2)}]_{y=0}$	82
3.5.2	Caractérisation de $[\partial_y u_{1,2}^{(2)}]_{y=0}$	83
3.5.3	Conclusion pour l'ordre 2	85
3.5.4	Analyse	85
3.6	Conclusion	87

Dans ce chapitre, la méthode d'homogénéisation présentée au chapitre précédent (section 2.1.1) est appliquée au cas d'une interface rugueuse séparant deux milieux diélectriques.

Dans le cas d'une interface séparant deux diélectriques, Nevard et Keller [50] ont proposé des développements asymptotiques raccordés, puis étendus par Kristensson [41] en 3D. Notons que dans le cadre d'un problème connexe, celui d'une surface métallique avec une conductivité finie,

plusieurs approches ont été proposées. En particulier, les travaux de Senior [65, 66] cherchent à modéliser les effets de peau à travers une impédance équivalente. Cette approche est poursuivie par exemple dans [44, 6], où le phénomène est modélisé par un opérateur de Steklov-Poincaré. Ces développements permettent de réduire la taille du problème : la discrétisation n'est plus gouvernée par l'effet de peau puisqu'il est déjà pris en compte dans la condition aux limites. La difficulté de cette approche est que, généralement, elle ne permet pas de prendre en compte les rugosités de l'interface. Holloway et Kuester [35] ont étendu leur résultat de [34] (voir Annexe A) pour prendre en compte à la fois la rugosité et l'effet de peau.

À notre connaissance, l'approche que nous présentons ici pour traiter une interface séparant deux diélectriques par une technique d'homogénéisation basée sur un développement asymptotique double échelle est originale.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Notations

Dans cette section, nous rappelons le problème et les différentes notations. Nous considérons le problème de deux milieux diélectriques dont le rapport entre les constantes diélectriques est donné par $\epsilon_c = \epsilon_2/\epsilon_1$. Ce rapport peut être complexe. Nous considérons le rapport $\sqrt{|\epsilon_c|}kh_{max}$ petit devant la longueur d'onde. Ces deux diélectriques sont séparés par une surface rugueuse (Γ^δ) de période L . Les profils de surfaces considérés dans ce chapitre sont à une échelle de périodicité.

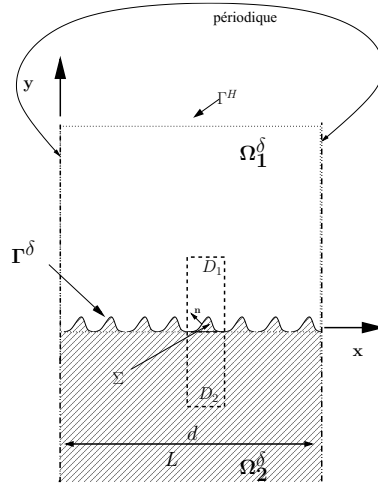


FIGURE 3.1 – Schéma du problème diélectrique

Pour préciser la géométrie (voir FIG. 3.1), nous définissons :

- le domaine : $\Omega^\delta = \Omega_1^\delta \cup \Omega_2^\delta$

1. $\Omega_1^\delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, H_1 \geq y \geq \gamma_\delta(x) \right\}$
2. $\Omega_2^\delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, -H_2 \leq y \leq \gamma_\delta(x) \right\}$

- la frontière : $\Gamma^\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, L[, y = \gamma_\delta(x)\}$

La polarisation TE ne sera pas traitée ici. Seule la polarisation TM sera considérée. Toutefois, la procédure d'homogénéisation reste identique et certains développements sont similaires. Le problème (polarisation TM, i.e., $u = E_z$) sur lequel nous voulons appliquer la procédure d'homogénéisation est le problème suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \nabla_{xy}^2 + k_{1,2}^2 \right\} u_{1,2}^{\text{tot}}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega_{1,2}^\delta \\ [u^{\text{tot}}] = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma^\delta \\ [\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{\text{tot}}] = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma^\delta \\ \text{Conditions de radiation} \end{array} \right.$$

Les crochets $[\bullet]$ représentent les sauts pris en $y = \gamma_\delta(x)$, i.e.,

$$[u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0 \quad \iff \quad u_2^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} - u_1^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} = 0$$

$$[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0 \quad \iff \quad \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_2^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} - \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_1^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} = 0$$

Lorsque les sauts ne seront pas considérés sur la surface rugueuse Γ^δ , nous expliciterons, (e.g. $[u_{1,2}^{\text{tot}}]_{y=0} = u_2^{\text{tot}}|_{y=0} - u_1^{\text{tot}}|_{y=0}$).

Ainsi, le problème de transmission en polarisation TM comporte deux C.L. traduisant la continuité des champs à travers la surface. Ces deux conditions de sauts peuvent être vues comme une combinaison des deux problèmes métalliques précédents, celui de Dirichlet (polarisation TM) et celui de Neumann (polarisation TE). Certaines analogies dans les développements seront faites.

Le paramètre δ de changement d'échelle est défini de la même façon : $\delta = d/L$. Pour cette configuration, seuls les profils de surface à une échelle de périodicité sont considérés. En d'autres termes, le profil de la surface est modélisé par,

$$\gamma_\delta(x) = \delta s(\sigma) \quad \text{avec} \quad \sigma = x/\delta$$

Par conséquent, nous avons l'égalité :

$$\gamma'_\delta = \partial_\sigma s = s' \tag{3.1}$$

La dérivée normale s'écrit,

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathcal{N} \left(-\gamma'_\delta \partial_x + \partial_y \right) = \mathcal{N} \left(-s' \partial_x + \partial_y \right)$$

De la même manière que précédemment, nous définissons les variables lentes (x, y) , et les variables rapides $(\sigma = x/\delta, \tau = y/\delta)$. Pour alléger les notations, nous définissons une dérivée normale par rapport aux variables rapides,

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} = \mathcal{N} \left(-s' \partial_\sigma + \partial_\tau \right)$$

Nous cherchons à transformer le problème initial en deux problèmes découplés : l'un relatif aux effets de rugosité et l'autre relatif aux effets globaux. Ainsi, les trois mêmes *outils* sont utilisés et introduits dans les équations initiales, à savoir,

- Séparation des “effets lents” et des “effets rapides” (noté $u + \Pi$)
- Développement Asymptotique par rapport au (petit) paramètre δ

- Développement de Taylor sur la partie lente uniquement

Par conséquent, la géométrie dans l'autre échelle est (voir FIG. 3.1) :

- le domaine est : $D = D_1 \cup D_2$

1. $D_1 = \left\{ (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \in]0, d[, H_{D_1} \geq \tau \geq s(\sigma) \right\}$
2. $D_2 = \left\{ (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \in]0, d[, -H_{D_2} \leq \tau \leq s(\sigma) \right\}$

- la frontière est : $\Sigma = \left\{ (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \in]0, d[, \tau = s(\sigma) \right\}$

Pour finir, nous supposons aussi que le terme de couche limite Π est nul loin de la surface. Toutefois, comme deux milieux sont considérés avec une transmission du champ, cette condition devient,

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Pi_1(x, \sigma, \tau) = 0 \\ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Pi_2(x, \sigma, \tau) = 0 \end{cases}$$

que nous noterons de façon concise : $\Pi = 0$

Maintenant, nous appliquons la méthode d'homogénéisation décrite précédemment, à savoir caractériser les problèmes locaux pour déterminer les problèmes globaux.

3.1.2 Une illustration informelle

Avant de se lancer dans les développements calculatoires, nous souhaitons illustrer le développement asymptotique et corroborer l'axe de recherche.

Le champ total est noté $u_{1,2}^{\text{tot}}$, et par définition,

$$u_1^{\text{tot}} = u^{\text{inc}} + u^{\text{diff}} \quad \text{et} \quad u_2^{\text{tot}} = u_{\text{T}}$$

avec u^{inc} le champ incident donné par une onde plane, u^{diff} le champ réfléchi, u_{T} transmis. De plus, le paramètre Θ_c , déduit de la deuxième loi de Descartes, est défini par Eq. (1.21), rappelé ici,

$$\Theta_c(\theta^{\text{inc}}, \epsilon_c) = \frac{\cos \theta_{\text{T}}}{\cos \theta^{\text{inc}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta^{\text{inc}}}{\epsilon_c}}}{\cos \theta^{\text{inc}}}$$

et en polarisation TM, les coefficients de réflexion et de transmission associé au plan infini ($y = 0$) sont bien connus Eq. (1.22) et rappelé,

$$R_0 = \frac{k_{1y} - k_{2y}}{k_{1y} + k_{2y}} = \frac{1 - \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}}{1 + \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}} = \frac{2}{1 + \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}}$$

Plan déphasé : $y = +h$

Le plan est "décalé" d'une hauteur h , pour être précis, il est défini par : $\gamma_\delta(x) = +h \forall x$. Cette configuration analytique correspond trivialement à un déphasage sur le champ, nous l'utilisons uniquement à titre illustratif. Les champs réfléchi u^{diff} , transmis u_{T} , et incident u^{inc} sont donnés par,

$$(y \geq h) \begin{cases} u^{\text{diff}} = R_\phi e^{+ik_{1y}y} e^{+ik_{x1}x} \\ u^{\text{inc}} = e^{-ik_{1y}y} e^{+ik_{x1}x} \end{cases} ; \quad (y \leq h) \quad u_{\text{T}} = T_\phi e^{-ik_{2y}y} e^{+ik_{x2}x}$$

où R_ϕ et T_ϕ sont respectivement le coefficient de réflexion et de transmission. Ces champs sont introduits dans la C.L.,

$$\begin{aligned} [u_{1,2}^{\text{tot}}]_{y=h} = 0 &\iff e^{-ik_{1y}h}(1 + R_\phi e^{+2ik_{1y}h}) = T_\phi e^{-ik_{2y}h} \\ [\partial_{\hat{y}} u_{1,2}^{\text{tot}}]_{y=h} = 0 &\iff k_{1y} e^{-ik_{1y}h}(1 - R_\phi e^{+2ik_{1y}h}) = k_{2y} T_\phi e^{-ik_{2y}h} \end{aligned}$$

et les coefficients de Réflexion et de Transmission sont déduits,

$$R_\phi = \frac{k_{1y} - k_{2y}}{k_{1y} + k_{2y}} e^{-2ik_{1y}h} = R_0 e^{-2ik_{1y}h} \quad (3.2)$$

$$T_\phi = \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}} e^{i(k_{2y} - k_{1y})h} = T_0 e^{i(k_{2y} - k_{1y})h} \quad (3.3)$$

Pour finir, un développement asymptotique est recherché, c'est-à-dire que nous supposons un décalage négligeable devant la longueur d'onde, ou encore $k_{1y}h \ll 1$ et $(k_{2y} - k_{1y})h \ll 1$, Ceci permet d'obtenir le développement limité,

$$R_\phi = R_0 - 2ik_{1y}hR_0 - (2k_{1y}h)^2 R_0 + o(2k_{1y}h) \quad (3.4)$$

$$T_\phi = T_0 + i(k_{2y} - k_{1y})hT_0 - \left((k_{2y} - k_{1y})h\right)^2 T_0 + o\left((k_{2y} - k_{1y})h\right) \quad (3.5)$$

La définition du paramètre δ représentant le changement d'échelle n'est pas immédiate. Toutefois, le rapport entre la hauteur h et la longueur d'onde λ_1 dans le milieu 1 semble un critère pertinent pour représenter l'effet du "décalage" sur les coefficients d'intérêts. De ce fait, ici nous définissons le paramètre de changement d'échelle,

$$\delta = 2\pi \frac{h}{\lambda_1}$$

où le facteur 2π est arbitraire mais choisi pour simplifier la mise en forme du développement limité. D'autre part, il est clair que $2k_{1y}R_0 = (k_{2y} - k_{1y})T_0$. Ainsi les développements limités Eq. (3.4) et Eq. (3.5) s'écrivent,

$$\begin{aligned} R_\phi &= R_0 - 2iR_0\delta - 4R_0\delta^2 + o(\delta^2) \\ T_\phi &= T_0 - 2iR_0\delta + (\sqrt{\epsilon_c}\Theta_c - 1)^2 R_0\delta^2 + o(\delta^2) \end{aligned}$$

Piste de recherche

FIG. 3.2 montre les parties réelles et imaginaires des coefficients de réflexion et de transmission calculés par la MoM à incidence normale. Sur ces courbes, un développement asymptotique s'esquisse.

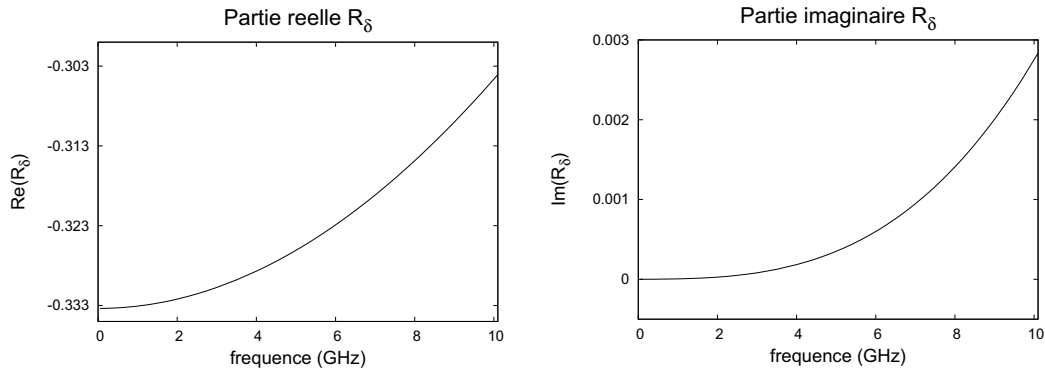
Lorsque la fréquence tend vers 0, les coefficients de réflexion et de transmission tendent vers ceux d'un plan. Nous attendons le coefficient de réflexion à l'ordre 0 : $R^{(0)} = R_0$ et celui de transmission : $T^{(0)} = T_0$, ce qui se traduit en terme de condition aux limites par,

$$\begin{cases} [u_{1,2}^{(0)}]_{y=0} = 0 \\ [\partial_y u_{1,2}^{(0)}]_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

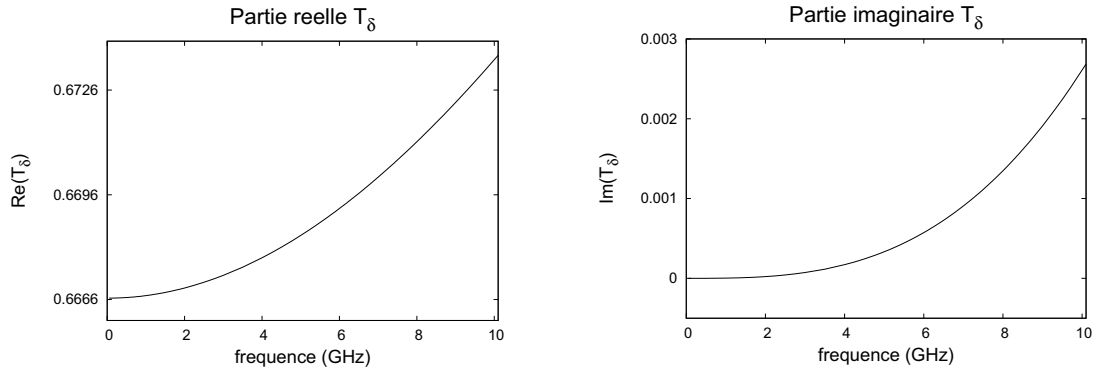
Cette condition correspondrait à la condition aux limites modifiées d'ordre 0 $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ que nous cherchons.

$$\gamma_\delta(x) = h_{max} \sin(2\pi x/d) \quad \left(= \delta\left(\frac{1}{k_y} \sin\left(\frac{2\pi k_y h_{max}}{d} \frac{x}{\delta}\right)\right) = \delta_s(\sigma) \right)$$

perm. $\sqrt{\epsilon_c} = 2$	hauteur $h = 0.001\text{m}$	période $d = 0.002\text{m}$ $R_0 = -1/3$	fréquence varie de 0.1GHz à 10.1GHz $T_0 = 2/3$	longueur d'onde $2.97 \cdot 10^{-2}$ à 3m
----------------------------------	--------------------------------	--	---	--



(a) Partie réelle de R_δ en fonction de la fréquence (b) Partie imaginaire de R_δ en fonction de la fréquence



(c) Partie réelle de T_δ en fonction de la fréquence (d) Partie imaginaire de T_δ en fonction de la fréquence

FIGURE 3.2 – Illustration du développement asymptotique sur le coefficient de réflexion et de transmission d'une surface à une échelle de périodicité.

Les conditions aux limites du problème relatif à une interface séparant deux milieux diélectriques peuvent être vue comme une combinaison des problèmes traités au chapitre précédent. Ainsi, s'inspirant des résultats obtenus pour les surfaces métalliques, nous pouvons nous attendre à la forme très générale suivante,

$$\begin{aligned} \left[u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + h_E^{(y)} \left[\partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} + h_E^{(x)} \left[\partial_x u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} &= c_E \\ \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + h_H^{(y)} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} + h_H^{(x)} \left[\partial_x^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} &= c_H \end{aligned}$$

or si l'ordre 0 est bien vérifié (Eq. (3.6)), cette forme se simplifie, et elle devient,

$$\left\{ \begin{aligned} \left[u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + h_E^{(x)} \left[\partial_x u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} &= c_E \\ \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + h_H^{(x)} \left[\partial_x^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} &= c_H \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

Cette conditions aux limites correspondrait à la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$ que nous cherchons.

3.2 Injection des *outils*

Les différents développements sont déjà quasiment décrits dans le chapitre 2. Les équations du problème de transmission peuvent être vues comme une combinaison des équations établies dans le cas métallique pour les deux polarisation. Il faut tout de même être attentif aux indices des différents milieux.

3.2.1 Équation de propagation

Les équations de propagation sont des équations de Helmholtz. Par conséquent, le résultat Eq. (2.9) est repris, en adaptant pour les deux milieux. L'Équation de Propagation devient donc,

$$\left. \begin{aligned} & \delta^{-2} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(0)} \\ + & \delta^{-1} \left(\nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(1)} + 2\partial_x \partial_\sigma \Pi_{1,2}^{(0)} \right) \\ + & \sum_{n \geq 2} \delta^{n-2} \left(\{ \nabla_{xy}^2 + k_{1,2}^2 \} u_{1,2}^{(n-2)} \right. \\ & \left. \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(n)} + 2\partial_x \partial_\sigma \Pi_{1,2}^{(n-1)} \right. \\ & \left. \{ \partial_x^2 + k_{1,2}^2 \} \Pi_{1,2}^{(n-2)} \right) \\ = & 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Cette équation, notée de façon synthétique, regroupe les deux équations de propagation, une par milieu. Dû fait de la condition sur le terme de couche limite imposée à l'infini, les deux problèmes sont donc séparés (en quatre équations). Le problème relatif aux effets globaux est régi par une équation de Helmholtz et celui relatif aux effets locaux par une équation de Laplace.

3.2.2 Condition aux Limites : $[u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0$

La C.L. est une condition de saut qui s'écrit : $u_1^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta} = u_2^{\text{tot}}|_{\Gamma^\delta}$. Sur chaque partie de l'égalité est appliquée la première étape (séparation $u + \Pi$, développement asymptotique, développement de Taylor sur la partie lente u). Ainsi, le résultat de l'Eq. (2.10) est repris. La C.L. devient,

$$\begin{aligned}
 & \delta^0 \left(\left(u_{1|y=0}^{(0)} + \Pi_1^{(0)} \Big|_{\Sigma} \right) - \left(u_{2|y=0}^{(0)} + \Pi_2^{(0)} \Big|_{\Sigma} \right) \right) \\
 + & \delta^1 \left(\left(u_{1|y=0}^{(1)} + \Pi_1^{(1)} \Big|_{\Sigma} \right) + s(\sigma) \left(\partial_y u_1^{(0)} \right)_{|y=0} \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots - \left(u_{2|y=0}^{(1)} + \Pi_2^{(1)} \Big|_{\Sigma} \right) - s(\sigma) \left(\partial_y u_2^{(0)} \right)_{|y=0} \right) \\
 + & \delta^2 \left(\left(u_{1|y=0}^{(2)} + \Pi_1^{(2)} \Big|_{\Sigma} \right) + s(\sigma) \left(\partial_y u_1^{(1)} \right)_{|y=0} + \frac{s^2}{2} \left(\partial_y^2 u_1^{(0)} \right)_{|y=0} \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots - \left(u_{2|y=0}^{(2)} + \Pi_2^{(2)} \Big|_{\Sigma} \right) - s(\sigma) \left(\partial_y u_2^{(1)} \right)_{|y=0} - \frac{s^2}{2} \left(\partial_y^2 u_2^{(0)} \right)_{|y=0} \right) \\
 & \vdots \\
 = & 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \dots \\ \dots \\ \dots \end{aligned}} \right\}$$

expression qui peut s'écrire simplement,

$$\begin{aligned}
 & \delta^0 \left(\left[u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} + \left[\Pi_{1,2}^{(0)} \right]_{\Sigma} \right) \\
 + & \delta^1 \left(\left[u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + \left[\Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} + s(\sigma) \left[\partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \right) \\
 + & \delta^2 \left(\left[u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} + \left[\Pi_{1,2}^{(2)} \right]_{\Sigma} + s(\sigma) \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots + \frac{s^2(\sigma)}{2} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \right) \\
 & \vdots \\
 = & 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \dots \\ \dots \\ \dots \end{aligned}} \right\} \quad (3.9)$$

La première partie de la condition aux limites modifiées relie les effets globaux et les effets locaux.

3.2.3 Condition aux Limites : $[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{\text{tot}}] = 0$

Les mêmes remarques que pour la C.L. précédente sont appliquées. Les résultats des calculs établis dans 2.4.1 sont utilisés. La séparation $u + \Pi$ et le développement asymptotique donne,

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_1^{(0)} \Big|_{\Sigma} + \sum_{n \geq 0} \delta^n \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_1^{(n+1)} \Big|_{\Sigma} - \mathcal{N} \gamma'_{\delta} \partial_x \Pi_1^{(n)} \Big|_{\Sigma} + \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_1^{(n)} \Big|_{\Gamma^{\delta}} \right) \\ & = \\ & \delta^{-1} \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_2^{(0)} \Big|_{\Sigma} + \sum_{n \geq 0} \delta^n \left(\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_2^{(n+1)} \Big|_{\Sigma} - \mathcal{N} \gamma'_{\delta} \partial_x \Pi_2^{(n)} \Big|_{\Sigma} + \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_2^{(n)} \Big|_{\Gamma^{\delta}} \right) \end{aligned}$$

Puis, le développement de Taylor est introduit. Le résultat final est donc une adaptation de l'Eq. (2.4.1), et s'écrit de façon synthétique,

$$\left. \begin{aligned} & \delta^{-1} \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(0)} \right]_{\Sigma} \\ & \delta^0 \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} - \mathcal{N} \gamma'_{\delta} \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(0)} \right]_{\Sigma} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \\ & \delta^1 \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(2)} \right]_{\Sigma} - \mathcal{N} \gamma'_{\delta} \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \dots \\ & \dots + s(\sigma) \left[\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \\ & \delta^2 \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(3)} \right]_{\Sigma} - \mathcal{N} \gamma'_{\delta} \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(2)} \right]_{\Sigma} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} \dots \\ & \dots + s(\sigma) \left[\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + \frac{s^2(\sigma)}{2} \left[\partial_y^2 \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \\ & \vdots \\ & = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

C'est la deuxième partie de la condition aux limites modifiée.

3.2.4 Synthèse

Finalement, en regroupant les puissances de δ dans les équations (3.8), (3.9) et (3.10), le problème obtenu est découpé en deux sous-problèmes reliés par une Condition aux Limites Modifiées ($\widetilde{\text{C.L.}}^{(n)}$).

Avant de se lancer dans la résolution à proprement parlée, les différents systèmes à traiter sont présentés, ce qui nous permet de préciser la stratégie pour caractériser la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ et la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$.

La procédure pour obtenir les $\widetilde{\text{C.L.}}^{(n)}$ et la C.L.E. présente un caractère automatique, mais du fait des nombreuses équations à manipuler, nous rassemblons les différents systèmes à traiter pour obtenir les deux premiers ordres (relatif au champ effectif u).

Systèmes pour l'ordre 0 (relatif à $u^{(0)}$)

Le problème d'ordre 0 pour le champ effectif $u^{(0)}$ est le suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\nabla_{xy}^2 + k_{1,2}^2\} u_{1,2}^{(0)} = 0 \\ \left[\Pi_{1,2}^{(0)} \right]_{\Sigma} + \left[u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} - \mathcal{N} \gamma'_{\delta} \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(0)} \right]_{\Sigma} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \text{Condition de Radiation} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Le problème (3.11) dépend du correcteur $\Pi^{(0)}$ donc il faut commencer par résoudre le système suivant,

Ordre -1

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(0)} = 0 \\ \left[\Pi_{1,2}^{(0)} \right]_{\Sigma} + \left[u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(0)} \right]_{\Sigma} = 0 \\ \Pi_{\infty}^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Et le problème (3.11) dépend aussi du correcteur $\Pi^{(1)}$, il faut donc aussi résoudre le système suivant,

Ordre 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(1)} = -2\partial_x \partial_{\sigma} \Pi_{1,2}^{(0)} \\ \left[\Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} + \left[u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + s(\sigma) \left[\partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} - \mathcal{N} \gamma'_{\delta} \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(0)} \right]_{\Sigma} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \Pi_{\infty}^{(1)} = 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Mais, ce dernier problème dépend du champ effectif d'ordre 1. Cependant, en utilisant une condition de compatibilité (théorème de la divergence), la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ sera déterminée. Pour déterminer cette condition aux limites, ce dernier système n'a pas besoin d'être résolu, mais seulement manipulé pour extraire l'information utile.

La $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ ainsi obtenue sera ensuite injectée dans le système d'intérêt donné par Eq. (3.11).

Systèmes pour l'ordre 1 (relatif à $u^{(1)}$)

Le problème pour le champ effectif $u^{(1)}$ est le suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\nabla_{xy}^2 + k_{1,2}^2\}u_{1,2}^{(1)} = 0 \\ \left[\Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} + \left[u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + s(\sigma) \left[\partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(2)} \right]_{\Sigma} - \mathcal{N}\gamma'_{\delta} \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \dots \\ \dots + s(\sigma) \left[\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Condition de Radiation

Ce problème dépend du correcteur $\Pi^{(1)}$, par conséquent le système (3.13) doit être résolu. Remarquons qu'il sera simplifié par la condition de compatibilité précédemment utilisée pour exprimer $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$. Ensuite, comme Eq. (3.14) dépend aussi de $\Pi^{(2)}$, le système suivant doit être manipulé avec une condition de compatibilité.

Ordre 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(2)} = -2\partial_x \partial_{\sigma} \Pi_{1,2}^{(1)} \\ \left[\Pi_{1,2}^{(2)} \right]_{\Sigma} + \left[u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} + s(\sigma) \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \dots \\ \dots + \frac{s^2}{2} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(2)} \right]_{\Sigma} - \mathcal{N}\gamma'_{\delta} \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(1)} \right]_{\Sigma} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \dots \\ \dots + s(\sigma) \left[\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \Pi_{\infty}^{(2)} = 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Finalement, la stratégie pour caractériser la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(n)}$ se déroule en deux étapes : le problème en $\Pi^{(n)}$ est complètement résolu par l'intermédiaire d'un système auxiliaire, puis une condition de compatibilité est utilisée sur le problème en $\Pi^{(n+1)}$. La première étape donnera une information sur $\left[u_{1,2}^{(n)} \right]_{y=0}$ (continuité du champ électrique) et la deuxième étape donnera une information sur $\left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(n)} \right]_{y=0}$ (continuité du champ magnétique).

3.3 Résolution de l'ordre 0 (associé à $u^{(0)}$)

3.3.1 Calcul de $\Pi^{(0)}$ et détermination de $\left[u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0}$

À partir du problème (3.12), la détermination de $\Pi^{(0)}$ est cherchée. Dans ce système, il est rappelé que le terme $\left[u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0}$ est considéré comme une constante par rapport aux variables rapides (σ, τ) , car il ne dépend que des variables lentes (x, y) .

Le choix suivant est un bon candidat comme solution,

$$\Pi_1^{(0)}(x, \sigma, \tau) = c_1(x) \text{ et } \Pi_2^{(0)}(x, \sigma, \tau) = c_2(x) \quad \text{tel que} \quad c_2 - c_1 = -\left[u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0}$$

Cette solution vérifie bien l'équation du laplacien et les deux conditions aux limites du problème. De plus, la condition à l'infini ($\Pi_\infty^{(0)} = 0$) impose que ces deux constantes c_1 et c_2 soient nulles.

Donc nous avons le résultat,

$$\Pi_1^{(0)}(x, \sigma, \tau) = 0 = \Pi_2^{(0)}(x, \sigma, \tau) \quad (3.16)$$

qui implique que,

$$\left[u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} = 0 \quad (3.17)$$

À l'ordre 0, la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée de l'interface plane diélectrique. Le champ électrique ne "voit" pas la rugosité à l'ordre 0,

3.3.2 Caractérisation de $\left[\partial_y u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0}$

Avant d'appliquer le théorème de la divergence, rappelons le système d'équations (3.13) régissant le correcteur de couche limite $\Pi^{(1)}$, en introduisant les termes déjà calculés. La condition de compatibilité est appliquée sur le système suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(1)} = 0 \\ \left[\Pi_{1,2}^{(1)}\right]_\Sigma + \left[u_{1,2}^{(1)}\right]_{y=0} + s(\sigma) \left[\partial_y u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}_\sigma} \Pi_{1,2}^{(1)}\right]_\Sigma + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} = 0 \\ \Pi_\infty^{(1)} = 0 \end{array} \right.$$

Le théorème de la divergence est appliqué sur les deux domaines D_1 et D_2 ,

$$0 = \int_{D_1} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_1^{(1)} \, dS = - \int_{\partial D_1} \partial_{\hat{\mathbf{n}}_\sigma} \Pi_1^{(1)} \, dl \quad (3.18)$$

$$0 = \int_{D_2} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_1^{(2)} \, dS = - \int_{\partial D_2} \partial_{\hat{\mathbf{n}}_\sigma} \Pi_1^{(2)} \, dl \quad (3.19)$$

où $\hat{\mathbf{n}}_\sigma$ représente ici le vecteur normal unitaire entrant au domaine $D_{1,2}$.

Le bord du domaine $\{1,2\}$ est : $\partial D_{1,2} = \Sigma \cup \Gamma^{H_{D_{1,2}}} \cup \text{Pér.}$. Les deux bords périodiques se compensent. De plus, la partie sur $\Gamma^{H_{D_{1,2}}}$ est aussi nulle, soit en considérant l'opérateur Dirichlet-to-Neumann pour borner le domaine $D_{1,2}$, soit en se plaçant suffisamment loin de la surface où le correcteur de couche limite est nul.

Finalement, le calcul se réduit à l'évaluation de l'intégrale posée sur la surface Σ . Le vecteur normal entrant pour le domaine D_1 est opposé au vecteur normal entrant pour le domaine D_2 . Maintenant, les deux équations (3.18) et (3.19) sont ajoutées. En tenant compte des parties nulles, il reste uniquement,

$$0 = \int_{\Sigma} \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_1^{(1)} \, dl - \int_{\Sigma} \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_1^{(2)} \, dl = \int_{\Sigma} \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(1)} \right] \, dl$$

Ce même résultat peut être obtenu (directement) en utilisant le théorème de la divergence sur le domaine $D = D_1 \cup D_2$ puisque ils ne se recouvrent pas.

Enfin, le calcul est terminé en utilisant la condition aux limites,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(1)} \right] \, dl(\sigma) = \int_{\Sigma} \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \, dl(\sigma) \\ &= \int_{\Sigma} \left[\mathcal{N}(-\gamma'_\delta \partial_x + \partial_y) u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \, dl(\sigma) \\ &= \int_0^d \left[\mathcal{N}(-\gamma'_\delta \partial_x + \partial_y) u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \frac{d\sigma}{\mathcal{N}} \\ &= \left[\partial_x u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \int_0^d -\gamma'_\delta \, d\sigma + \left[\partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \int_0^d \, d\sigma \end{aligned}$$

or, les cellules sont considérées localement périodiques, i.e., $s(d) = s(0)$, ce qui implique directement,

$$\int_0^d \gamma'_\delta \, d\sigma = \int_0^d s'(\sigma) \, d\sigma = s(d) - s(0) = 0$$

Pour finir, la deuxième $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ que nous cherchions pour l'ordre 0 est établie,

$$\left[\partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \quad (3.20)$$

À l'ordre 0, la composante tangentielle du champ magnétique est nulle à la traversée de l'interface plane diélectrique.

3.3.3 Conclusion pour l'ordre 0

À ce stade, l'ordre 0 est entièrement déterminé. Avant d'établir la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$, faisons une synthèse des différents termes calculés :

- le correcteur de couche limite d'ordre 0 (noté $\Pi^{(0)}$) est nul (Eq. (3.16)).
- le correcteur de couche limite $\Pi^{(1)}$ n'est pas encore calculé,
- la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ est déterminée par Eq. (3.17) et par Eq. (3.20). Elle correspond à une interface plane séparant deux milieux diélectriques,

$$\begin{cases} \left[u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

L'ordre 0 correspond à traiter un problème sans irrégularités surfaciques.

Pour finir, le problème associé à l'ordre 0 peut être résolu de façon analytique, et par conséquent, le champ effectif $u_{1,2}^{(0)}$ d'ordre 0 ainsi que ses dérivées est considéré connu. Il ne faut pas oublier que le champ effectif est un champ total, donc il comporte la partie correspondante au champ incident.

Remarque sur $\left[\partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0}$

Si le problème en $u^{(0)}$ est résolu avec comme champ incident une onde plane, alors le champ diffracté est calculé analytiquement. Il s'écrit,

$$(y \geq 0) \begin{cases} u^{\text{diff}} = R_0 e^{+ik_{1y}y} e^{+ik_{1x}x} \\ u^{\text{inc}} = e^{-ik_{1y}y} e^{+ik_{1x}x} \end{cases} ; \quad (y \leq 0) \quad u_T = T_0 e^{-ik_{2y}y} e^{+ik_{2x}x}$$

avec la relation entre les coefficients de réflexion et de transmission : $1 + R_0 = T_0$ et la loi de Descartes : $k_{1x} = k_{2x}$. Le saut s'écrit alors,

$$\left[\partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} = ik_{1x}(1 + R_0)e^{+ik_{1x}x} - ik_{2x}T_0e^{+ik_{2x}x} = 0$$

De plus, la quantité $\partial_x u^{(0)}$ correspond à la grandeur $H_y^{(0)}$. Sachant que la composante normale du champ magnétique est continue lors de la traversée d'un plan diélectrique, il est cohérent de trouver $\left[H_y^{(0)}\right]_{y=0} = \left[\partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} = 0$.

Par conséquent, nous considérons la simplification suivante induite par l'ordre 0,

$$\left[\partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} = 0 \tag{3.22}$$

3.4 Résolution de l'ordre 1 (associé à $u^{(1)}$)

3.4.1 Calcul de $\Pi^{(1)}$ et détermination de $\left[u_{1,2}^{(1)}\right]_{y=0}$

Suivant la méthode, il faut maintenant évaluer le correcteur de couche limite $\Pi_{1,2}^{(1)}$ d'ordre 1 pour obtenir un premier paramètre correspondant à la surface homogénéisée.

Dans le système (3.13) est injecté ce qui est déjà connu (voir la section 3.3.3), il reste le problème suivant à résoudre,

$$\begin{cases} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(1)} = 0 \\ \left[\Pi_{1,2}^{(1)}\right]_{\Sigma} = -\left[u_{1,2}^{(1)}\right]_{y=0} \\ \left[\partial_{\hat{n}\sigma} \Pi_{1,2}^{(1)}\right]_{\Sigma} = 0 \\ \Pi_{\infty}^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Ce problème est du même type que le problème (3.12) en $\Pi_{1,2}^{(0)}$. Les mêmes arguments sont appliqués pour sa résolution (voir section 3.3.1). Par conséquent, nous obtenons les deux résultats suivants,

$$\Pi_1^{(1)} = 0 = \Pi_2^{(1)} \tag{3.23}$$

qui implique,

$$\left[u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} = 0 \quad (3.24)$$

La première partie de $\widetilde{C.L.}^{(1)}$ est déterminée. Elle signifie que la composante tangentielle du champ électrique à l'ordre 1 est continue à la traversée du plan séparant deux milieux diélectriques.

3.4.2 Caractérisation de $\left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0}$

Pour terminer la détermination de l'ordre 1, il manque encore la caractérisation de $\left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0}$. Pour cela, nous appliquons la condition de compatibilité sur le système régissant $\Pi_{1,2}^{(2)}$ défini par l'Eq. (3.15). Nous commençons par remplacer les termes déterminés précédemment, puis la condition de compatibilité est appliquée à ce système. Tout comme dans le cas des surfaces métalliques, nous nous autorisons l'abus de notation en remplaçant $\partial_y \left[\partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0}$ par $\left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0}$. Il ne faut pas oublier que la dérivée normale se décompose en,

$$\left[\partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} = -\mathcal{N} \gamma'_\delta \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + \mathcal{N} \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0}$$

Ainsi, le système (3.15) est maintenant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(2)} = 0 \\ \left[\Pi_{1,2}^{(2)} \right]_\Sigma + \left[u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} + s(\sigma) \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \dots \\ \dots + \frac{s^2}{2} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{n}\sigma} \Pi_{1,2}^{(2)} \right]_\Sigma - \mathcal{N} \gamma'_\delta \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \dots \\ \dots + \mathcal{N} \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + s(\sigma) \left[\partial_y \partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \Pi_\infty^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

Nous appliquons le théorème de la divergence, en faisant attention au sens des vecteurs normaux. En utilisant le propriété de périodicité et le fait que le correcteur de couche limite $\Pi^{(2)}$ soit nul loin de la surface, nous obtenons,

$$\begin{aligned} 0 &= + \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \int_\Sigma \mathcal{N} \gamma'_\delta \, dl - \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \int_\Sigma \mathcal{N} \, dl \dots \\ &\dots + \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \int_\Sigma \mathcal{N} \gamma'_\delta \, s(\sigma) \, dl - \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \int_\Sigma \mathcal{N} \, s(\sigma) \, dl \end{aligned}$$

Les cellules sont toujours considérées localement périodiques ($s(d) = s(0)$) et la dérivée de la

surface γ'_δ est égale à s' (voir Eq. (3.1)). Comme précédemment, le calcul des intégrales devient,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta \, dl &= \int_0^d s'(\sigma) \, d\sigma = 0 \\ \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta s(\sigma) \, dl &= \int_0^d s'(\sigma) s(\sigma) \, d\sigma = \left[\frac{s^2(\sigma)}{2} \right]_0^d = 0 \\ \int_{\Sigma} \mathcal{N} \, dl &= \int_0^d d\sigma = d \\ \int_{\Sigma} \mathcal{N} s(\sigma) \, dl &= \int_0^d s(\sigma) \, d\sigma = d \bar{s} \end{aligned}$$

où \bar{s} est la moyenne locale.

Finalement, la deuxième $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$ manquante est obtenue,

$$\left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + \bar{s} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \quad (3.25)$$

3.4.3 Conclusion pour l'ordre 1

L'ordre 1 est entièrement déterminé. Les différents résultats obtenus se résument à :

- le correcteur de couche limite d'ordre 1 (noté $\Pi^{(1)}$) est nul (Eq. (3.23)),
- la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$ est déterminée par Eq. (3.24) et par Eq. (3.25),

$$\begin{cases} \left[u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + \bar{s} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

- et elle correspond bien à celle pressentie (Eq. (3.7)),
- la condition aux limites équivalente se déduit du développement asymptotique et elle s'écrit : $\text{C.L.E.} = \widetilde{\text{C.L.}}^{(0)} + \delta \widetilde{\text{C.L.}}^{(1)} + O(\delta^2)$, ce qui s'exprime par,

$$\begin{cases} \left[u_{1,2}^{\text{tot}} \right]_{y=0} = O(\delta^2) \\ \left[\partial_y u_{1,2}^{\text{tot}} \right]_{y=0} + \delta \bar{s} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{\text{tot}} \right]_{y=0} = O(\delta^2) \end{cases} \quad (3.27)$$

- à l'ordre 1, il n'y a pas de problème auxiliaire à résoudre. L'effet de la rugosité est inclus seulement dans la moyenne de la surface. Pour les surfaces à moyenne nulle, l'ordre 1 n'apporte pas de correction supplémentaire de l'ordre 0.

3.4.4 Analyse : coefficients de réflexion et transmission

Nous cherchons à construire le développement asymptotique des coefficients de réflexion et de transmission à partir des conditions aux limites modifiées d'ordre 0 ($\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$) et d'ordre 1 ($\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$), c'est à dire,

$$\begin{aligned} R_1 &= R^{(0)} + \delta R^{(1)} + O(\delta^2) \\ T_1 &= T^{(0)} + \delta T^{(1)} + O(\delta^2) \end{aligned}$$

Les champs résultants du développement asymptotique sont donnés par,

$$(y \geq 0) \left\{ u_1^{(n)} = R^{(n)} e^{+ik_{1y}y} e^{+ik_{x1}x} \quad , \quad (y \leq 0) \quad u_2^{(n)} = T^{(n)} e^{-ik_{2y}y} e^{+ik_{x2}x} \right.$$

avec le champ incident considéré uniquement à l'ordre 0.

Pour l'ordre 0, la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ obtenue avec l'Eq. (3.21) correspond exactement au problème d'un plan en $y = 0$. Par conséquent, le premier terme du développement du coefficient de réflexion $R^{(0)}$ et du coefficient de transmission $T^{(0)}$ est respectivement R_0 et T_0 .

Pour l'ordre 1, la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$ obtenue par l'Eq. (3.26) se traduit en terme de coefficients de réflexion et de transmission par,

$$\begin{cases} T^{(1)} - R^{(1)} = 0 \\ -ik_{2y}T^{(1)} - ik_{1y}R^{(1)} + \bar{s} \left\{ (-ik_{2y})^2 T^{(0)} - \left((+ik_{1y})^2 R^{(0)} + (-ik_{1y})^2 \right) \right\} = 0 \end{cases}$$

et qui donne après simplification,

$$R^{(1)} = T^{(1)} = i \bar{s} (k_{2y} - k_{1y}) \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission se développent asymptotiquement à l'ordre 1 comme,

$$R_1 = R_0 - 2ik_{1y} \bar{s} R_0 \delta + O(\delta^2) \quad (3.28)$$

$$T_1 = T_0 + i(k_{2y} - k_{1y}) \bar{s} T_0 \delta + O(\delta^2) \quad (3.29)$$

À partir de la C.L.E. (Eq. (3.27)), une approximation à l'ordre 1 des coefficients de réflexion se déduit. Les deux équations de 3.27 se traduisent en terme de coefficients de réflexion et de transmission par,

$$\begin{cases} T_{eq} - R_{eq} - 1 = O(\delta^2) \\ -ik_{2y}T_{eq} - ik_{1y}(R_{eq} - 1) + \delta \bar{s} \left\{ (-ik_{2y})^2 T_{eq} - \left((+ik_{1y})^2 R_{eq} + (-ik_{1y})^2 \right) \right\} = O(\delta^2) \end{cases}$$

L'expression des coefficients de réflexion et de transmission se déduit,

$$R_{eq} = \frac{(k_{1y} - k_{2y}) + \delta \bar{s} i (k_{1y} + k_{2y})(k_{2y} - k_{1y})}{(k_{1y} + k_{2y}) - \delta \bar{s} i (k_{1y} + k_{2y})(k_{2y} - k_{1y})} = R_0 \frac{1 - \delta \bar{s} i (k_{2y} + k_{1y})}{1 - \delta \bar{s} i (k_{2y} - k_{1y})} \quad (3.30)$$

$$T_{eq} = \frac{2k_{1y}}{(k_{1y} + k_{2y}) - \delta \bar{s} i (k_{1y} + k_{2y})(k_{2y} - k_{1y})} = T_0 \frac{1}{1 - \delta \bar{s} i (k_{2y} - k_{1y})} \quad (3.31)$$

À l'ordre 1, les coefficients de réflexion et de transmission ne dépendent que de la moyenne de la surface. Pour une surface à moyenne nulle, l'ordre 1 n'apporte aucune amélioration comparativement à l'ordre 0.

Plan déphasé : $y = +h$

Dans le cas d'un plan déphasé en $y = +h$, nous avons clairement $\bar{s} = +h/\delta$. Et par conséquent, les coefficients de réflexion Eq. (3.28) et de transmission Eq. (3.29) calculés par la procédure d'homogénéisation correspondent bien à ceux établis par Eq. (3.4) et Eq. (3.5).

Mêmes milieux : $\epsilon_c = 1$

En dépit du fait que la configuration où l'interface sépare deux mêmes milieux n'a aucun intérêt pratique, le résultat attendu est bien retrouvé. Comme les coefficients de réflexion et de transmission associés à une interface plane sont en facteur des développements, le résultat en découle.

Métallique : $\epsilon_c \rightarrow i\infty$ (ou très fort contraste : $\epsilon_c \rightarrow \infty$)

Le passage à la limite dans les coefficients de réflexion et transmission associés à une interface plane donnent,

$$R_0 = \frac{1 - \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}}{1 + \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}} \underset{\epsilon_c \rightarrow i\infty}{=} -1 \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2}{1 + \Theta_c \sqrt{\epsilon_c}} \underset{\epsilon_c \rightarrow i\infty}{=} 0$$

Dans ce cas, le coefficient de transmission Eq. (3.28) est bien nul. Le coefficient de réflexion Eq. (3.28) devient,

$$R_1 \underset{\epsilon_c \rightarrow i\infty}{=} -1 + 2ik_{1y} \bar{s} \delta + O(\delta^2)$$

Ce coefficient présente une similarité avec le coefficient établi dans le cadre métallique Eq. (2.19) (voir section 2.3.4). Cependant, le coefficient h_{TM} calculé par la procédure d'homogénéisation ne représente pas la simple moyenne.

Les coefficients de réflexion Eq. (3.30) et de transmission Eq. (3.31) établis par la C.L.E. deviennent,

$$R_{eq} = R_0 \frac{1 - ik_{1y} \bar{s} \delta (\Theta_c \sqrt{\epsilon_c} + 1)}{1 - ik_{1y} \bar{s} \delta (\Theta_c \sqrt{\epsilon_c} - 1)} \underset{\epsilon_c \rightarrow i\infty}{=} -1$$

$$T_{eq} = T_0 \frac{1}{1 - ik_{1y} \bar{s} \delta (\Theta_c \sqrt{\epsilon_c} - 1)} \underset{\epsilon_c \rightarrow i\infty}{=} 0$$

Le coefficient de transmission est bien nul. En revanche, le coefficient de réflexion ne correspond pas à celui attendu (voir section 2.3.4 concernant l'homogénéisation de surfaces parfaitement métalliques).

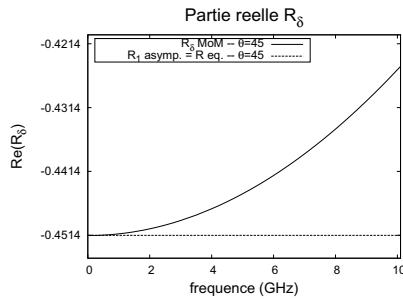
Les coefficients sont différents parce que le passage à la limite induit des simplifications dans certaines équations, et donc les résultats deviennent différents.

En particulier, la séparation des contributions lentes et rapides (séparation $u + \Pi$) doit être adaptée dans le milieu 2. Si le milieu 2 est un milieu à forte perte métallique ($\epsilon_c \rightarrow i\infty$), alors il n'y aura pas de champ effectif : tout le champ total sera contenu dans le correcteur de couche limite (effet de peau). De plus, le développement asymptotique doit aussi être adapté.

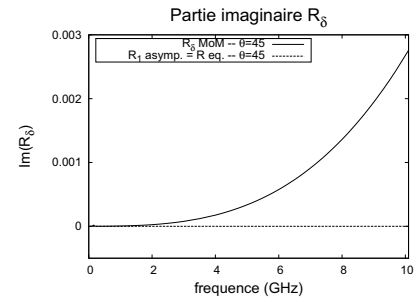
Profil sinusoïdal et quadratique

La première surface considérée ici est la même surface que celle utilisée pour FIG. 3.2, à savoir un profil sinusoïdal de hauteur $h_{max} = 0.001m$ et de période $d = 0.002m$. Ce profil est de moyenne nulle : $\bar{s} = 0$. La deuxième surface est un profil quadratique : $\gamma_\delta(x) = -4h_{max}(x^2 - dx)/d^2$ de moyenne non-nulle : $\bar{s} = 2h_{max}/3$. Le profil sinusoïdal est éclairé par une onde plane d'incidence de 45° et le profil quadratique est éclairé par une onde plane à incidence normale. La solution de référence est calculée par la MoM.

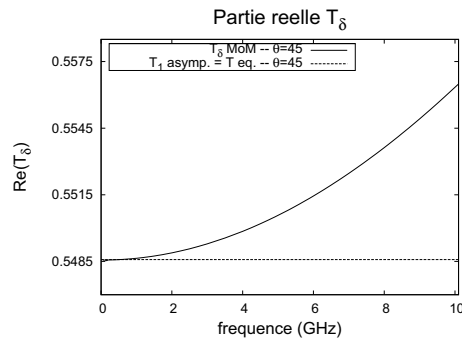
Sur la FIG. 3.3 sont tracées les parties réelles et imaginaires des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de la fréquence. Les résultats sont en accord avec ceux attendus.



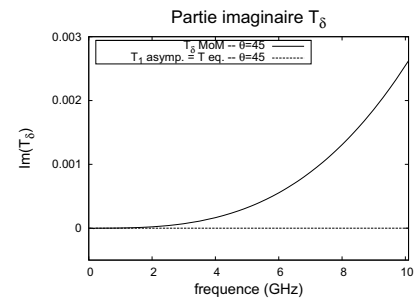
(a) Partie réelle : coeff. réfl.



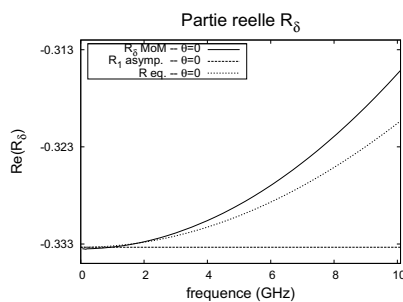
(b) Partie imaginaire : coeff. réfl.



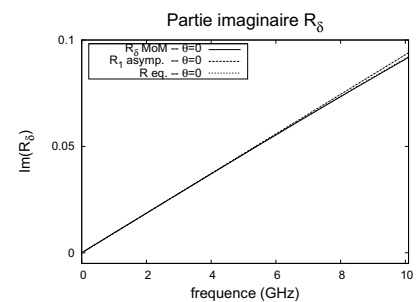
(c) Partie réelle : coeff. trans.



(d) Partie imaginaire : coeff. trans.



(e) Partie réelle : coeff. réfl. (prof. quad.)



(f) Partie imaginaire : coeff. réfl. (prof. quad.)

FIGURE 3.3 – Comparaison en fonction de la fréquence du coefficient de réflexion et de transmission de référence R_δ avec celui évalué asymptotiquement R_1 et celui approché R_{eq} . Incidence 45° – profil sinusoïdal : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$. Incidence 0° – profil quadratique : $h_{max} = 0.001m$ et $d = 0.002m$.

3.5 Ordre supérieur

Pour déterminer l'ordre 2, le problème en $\Pi^{(2)}$ est résolu ce qui permet d'obtenir la première $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$ portant sur $\left[u_{1,2}^{(2)}\right]_{y=0}$ puis une condition de compatibilité est extraite du problème en $\Pi^{(3)}$ pour caractériser la deuxième $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$ portant sur $\left[\partial_y u_{1,2}^{(2)}\right]_{y=0}$.

Les termes déjà évalués (voir les sections 3.3.3 et 3.4.3) sont directement injectés s'ils simplifient les équations.

3.5.1 Calcul de $\Pi^{(2)}$ pour déterminer $\left[u_{1,2}^{(2)}\right]_{y=0}$

Dans le système (3.15) régissant $\Pi^{(2)}$ est injecté les termes connus et il reste le problème suivant à résoudre,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(2)} = 0 \\ \left[\Pi_{1,2}^{(2)}\right]_{\Sigma} + \left[u_{1,2}^{(2)}\right]_{y=0} + \left(\frac{s^2}{2} - \bar{s}s\right) \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(2)}\right]_{\Sigma} - \mathcal{N}\gamma'_{\delta} \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)}\right]_{y=0} \dots \\ \dots - \mathcal{N}\gamma'_{\delta} s \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} + \mathcal{N}(s - \bar{s}) \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} = 0 \\ \Pi_{\infty}^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce problème, trois variables auxiliaires sont utilisées et la solution est posée sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(2)} &= -u_1^{(2)} + \alpha_1^0 \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} + \alpha_1^1 \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)}\right]_{y=0} + \beta_1^0 \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} \\ \Pi_2^{(2)} &= -u_1^{(2)} + \alpha_2^0 \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} + \alpha_2^1 \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)}\right]_{y=0} + \beta_2^0 \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les conditions aux limites s'écrivent,

$$\begin{aligned} \left[\Pi_{1,2}^{(2)}\right]_{\Sigma} &= -\left[u_{1,2}^{(2)}\right]_{y=0} + \left[\alpha_{1,2}^0\right]_{\Sigma} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} + \left[\alpha_{1,2}^1\right]_{\Sigma} \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)}\right]_{y=0} + \left[\beta_{1,2}^0\right]_{\Sigma} \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi_{1,2}^{(2)}\right]_{\Sigma} &= \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \alpha_{1,2}^0\right]_{\Sigma} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \alpha_{1,2}^1\right]_{\Sigma} \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)}\right]_{y=0} + \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_{1,2}^0\right]_{\Sigma} \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)}\right]_{y=0} \end{aligned}$$

ainsi par identification, nous obtenons les problèmes auxiliaires suivants,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \alpha_{1,2}^1 = 0 \\ \left[\alpha_{1,2}^1\right]_{\Sigma} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \alpha_{1,2}^1\right]_{\Sigma} = +\mathcal{N}\gamma'_{\delta} \\ \alpha_{1,2}^1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta_{1,2}^0 = 0 \\ \left[\beta_{1,2}^0\right]_{\Sigma} = 0 \\ \left[\partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_{1,2}^0\right]_{\Sigma} = +\mathcal{N}\gamma'_{\delta} s \\ \beta_{1,2}^0 = 0 \end{array} \right. \quad (3.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \alpha_{1,2}^0 = 0 \\ \left[\alpha_{1,2}^0 \right]_{\Sigma} = -s \left(\frac{s}{2} - \bar{s} \right) \\ \left[\partial_{\hat{n}\sigma} \alpha_{1,2}^0 \right]_{\Sigma} = -\mathcal{N} \left(s - \bar{s} \right) \\ \alpha_{1,2}^0 = 0 \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Ces trois systèmes auxiliaires vérifient bien une condition de compatibilité.

Pour finir, la condition à l'infini sur la correcteur de couche limite $\Pi^{(2)}$ est appliquée, ce qui donne les deux équations suivantes,

$$\begin{aligned} 0 = \Pi_{\infty}^{(2)} &= -u_1^{(2)} + \alpha_1^1 \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + \alpha_1^0 \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} + \beta_1^0 \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \\ 0 = \Pi_{-\infty}^{(2)} &= -u_1^{(2)} + \alpha_2^1 \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + \alpha_2^0 \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} + \beta_2^0 \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \end{aligned}$$

qui sont soustraites l'une de l'autre pour donner la première $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$,

$$\left[u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} - h_x^{(1)} \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} - h_y^{(0)} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} - h_{xy}^{(0)} \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \quad (3.35)$$

avec les paramètres,

$$h_x^{(1)} = \alpha_1^1 - \alpha_2^1 \quad (3.36)$$

$$h_y^{(0)} = \alpha_1^0 - \alpha_2^0 \quad (3.37)$$

$$h_{xy}^{(0)} = \beta_1^0 - \beta_2^0 \quad (3.38)$$

3.5.2 Caractérisation de $\left[\partial_y u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0}$

Une condition de compatibilité sur le système régissant $\Pi^{(3)}$ est appliquée. Cette condition donne un lien, par l'intermédiaire du théorème de la divergence, entre l'équation du laplacien et la condition aux limites de Neumann. Ces deux équations, données par l'Eq. (3.8) et l'Eq. (3.10), sont,

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_{1,2}^{(3)} &= -2\partial_x \partial_\sigma \Pi_{1,2}^{(2)} \\ \left[\partial_{\hat{n}\sigma} \Pi_{1,2}^{(3)} \right]_{\Sigma} &= +\mathcal{N} \gamma'_\delta \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(2)} \right]_{\Sigma} - \left[\partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} - s \left[\partial_y \partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} - \frac{s^2}{2} \left[\partial_y^2 \partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \end{aligned}$$

et le théorème de la divergence donne,

$$\int_{D_1} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_1^{(3)} \, dS + \int_{D_2} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_2^{(3)} \, dS = - \int_{\Sigma} \left[\partial_{\hat{n}\sigma} \Pi_{1,2}^{(3)} \right]_{\Sigma} \, dl$$

Le correcteur de couche limite $\Pi^{(2)}$ est connu et il dépend des trois variables auxiliaires calculées précédemment et des champs effectifs. Le membre de droite donne,

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_1^{(3)} dS + \int_{D_2} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi_2^{(3)} dS = \\ -2 \left[\partial_x^2 u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \left(\int_{D_1} \partial_\sigma \alpha_1^1 dS + \int_{D_2} \partial_\sigma \alpha_2^1 dS \right) \\ -2 \left[\partial_x \partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \left(\int_{D_1} \partial_\sigma \alpha_1^0 dS + \int_{D_2} \partial_\sigma \alpha_2^0 dS \right) \\ -2 \left[\partial_x^2 \partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \left(\int_{D_1} \partial_\sigma \beta_1^0 dS + \int_{D_2} \partial_\sigma \beta_2^0 dS \right) \end{aligned}$$

et le membre de gauche se ramène au calcul de,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left[\partial_{\hat{n}\sigma} \Pi_{1,2}^{(3)} \right]_{\Sigma} dl = \\ \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta \left[\partial_x \Pi_{1,2}^{(2)} \right]_{\Sigma} dl \longrightarrow - \left[\partial_x u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta dl \longrightarrow 0 \\ + \left[\partial_x^2 u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta \left[\alpha_1^1 \right]_{\Sigma} dl \longrightarrow 0 \\ + \left[\partial_x \partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta \left[\alpha_1^0 \right]_{\Sigma} dl \longrightarrow \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta \left(- \left(\frac{s^2}{2} - \bar{s} s \right) \right) dl \\ + \left[\partial_x^2 \partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta \left[\beta_1^0 \right]_{\Sigma} dl \longrightarrow 0 \\ - \int_{\Sigma} \left[\partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} dl \longrightarrow - \left[\partial_x u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} -\mathcal{N} \gamma'_\delta dl \longrightarrow 0 \\ - \left[\partial_y u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} dl \longrightarrow d \\ - \int_{\Sigma} s \left[\partial_y \partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} dl \longrightarrow - \left[\partial_x \partial_y u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} -\mathcal{N} \gamma'_\delta s dl \longrightarrow 0 \\ - \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} s dl \longrightarrow d \bar{s} \\ - \int_{\Sigma} \frac{s^2}{2} \left[\partial_y^2 \partial_{\hat{n}} u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} dl \longrightarrow - \left[\partial_x \partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} -\mathcal{N} \gamma'_\delta \frac{s^2}{2} dl \longrightarrow \left[\frac{s^3(\sigma)}{6} \right]_0^d = 0 \\ - \left[\partial_y^3 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \frac{s^2}{2} dl \longrightarrow d \bar{s}^2 / 2 \end{aligned}$$

Le dernier terme à évaluer est nul,

$$\int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_\delta \left(\frac{s^2}{2} - \bar{s} s \right) dl = \left[\frac{s^3(\sigma)}{6} \right]_0^d - \bar{s} \left[\frac{s^2(\sigma)}{2} \right]_0^d = 0$$

Finalement la deuxième $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$ s'écrit,

$$\begin{aligned} & \left[\partial_y u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} + \bar{s} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + g^{(1)} \left[\partial_x^2 u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} \\ & + \frac{\bar{s}^2}{2} \left[\partial_y^3 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} + g_x^{(0)} \left[\partial_x \partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} + g_y^{(0)} \left[\partial_x^2 \partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

avec les paramètres,

$$g^{(1)} = \frac{2}{d} \left(\int_{D_1} \partial_\sigma \alpha_1^1 \, dS + \int_{D_2} \partial_\sigma \alpha_2^1 \, dS \right) \quad (3.40)$$

$$g_x^{(0)} = \frac{2}{d} \left(\int_{D_1} \partial_\sigma \alpha_1^0 \, dS + \int_{D_2} \partial_\sigma \alpha_2^0 \, dS \right) \quad (3.41)$$

$$g_y^{(0)} = \frac{2}{d} \left(\int_{D_1} \partial_\sigma \beta_1^0 \, dS + \int_{D_2} \partial_\sigma \beta_2^0 \, dS \right) \quad (3.42)$$

3.5.3 Conclusion pour l'ordre 2

À ce stade, les différents paramètres de l'ordre 2 sont explicités. En toute généralité, il faut calculer 2 moyennes et il faut résoudre 3 problèmes auxiliaires à partir desquels sont évalués par intégration six paramètres.

Les résultats de la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$ donnés par Eq. (3.35) et Eq. (3.39) sont rassemblés et s'écrivent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} - h_x^{(1)} \left[\partial_x u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} - h_y^{(0)} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} - h_{xy}^{(0)} \left[\partial_y \partial_x u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \\ \left[\partial_y u_{1,2}^{(2)} \right]_{y=0} + \bar{s} \left[\partial_y^2 u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + \frac{\bar{s}^2}{2} \left[\partial_y^3 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} \\ \quad + g^{(1)} \left[\partial_x^2 u_{1,2}^{(1)} \right]_{y=0} + g_x^{(0)} \left[\partial_x \partial_y^2 u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} + g_y^{(0)} \left[\partial_x^2 \partial_y u_{1,2}^{(0)} \right]_{y=0} = 0 \end{array} \right. \quad (3.43)$$

3.5.4 Analyse

Nous n'exploiterons que les conditions aux limites modifiées, c'est-à-dire que seul le développement des coefficients de réflexion et de transmission sera comparé avec une solution de référence calculée par la MoM. Dû fait des noyaux de Green périodiques et de l'approximation \mathbb{P}_0 (fonctions de base constante par morceaux) utilisée dans la MoM, la solution de référence doit être calculée avec un nombre important de points de discrétisation ($N = 800$) pour obtenir des précisions suffisantes. Les temps de calculs sont conséquents.

Les coefficients de réflexion et de transmission sont recherchés sous la forme asymptotique suivante,

$$\begin{aligned} R_2 &= R^{(0)} + \delta R^{(1)} + \delta^2 R^{(2)} + O(\delta^3) \\ T_2 &= T^{(0)} + \delta T^{(1)} + \delta^2 T^{(2)} + O(\delta^3) \end{aligned}$$

Le résultat issu de la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(0)}$ implique que $R^{(0)} = R_0$ et $T^{(0)} = T_0$. La $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$ mène à (voir section 3.4.4),

$$R^{(1)} = T^{(1)} = i \bar{s} (k_{2y} - k_{1y}) \frac{2k_{1y}}{k_{1y} + k_{2y}}$$

À partir du système d'équations de la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$ (Eq. (3.43)), l'ordre 2 des coefficients de réflexion et de transmission peuvent se déduire. Nous nous restreignons à l'incidence normale ($\partial_x \equiv 0$) et à un profil de moyenne nulle ($\overline{s} = 0$). Par conséquent, la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$ se simplifie et s'écrit,

$$\begin{cases} [u_{1,2}^{(2)}]_{y=0} - h_y^{(0)} [\partial_y^2 u_{1,2}^{(0)}]_{y=0} = 0 \\ [\partial_y u_{1,2}^{(2)}]_{y=0} + \frac{\overline{s^2}}{2} [\partial_y^3 u_{1,2}^{(0)}]_{y=0} = 0 \end{cases}$$

Ces équations se traduisent en termes de coefficients de réflexion et de transmission par,

$$\begin{aligned} T^{(2)} - R^{(2)} - h_y^{(0)} \left(-k^2 \epsilon_c T^{(0)} + k^2 (R^{(0)} + 1) \right) &= 0 \\ -ik\sqrt{\epsilon_c} T^{(2)} - ikR^{(2)} + \frac{\overline{s^2}}{2} \left((-ik\sqrt{\epsilon_c})^3 T^{(0)} - ((ik)^3 R^{(0)} + (-ik)^3) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations permettent de calculer les coefficients de réflexion et de transmission d'ordre 2.

Nous avons remarqué que le paramètre $h_y^{(0)}$ est proportionnel à la hauteur rms, c'est-à-dire que nous avons la relation,

$$h_y^{(0)} \approx \frac{\overline{s^2}}{2}$$

FIG. 3.4 compare en fonction de la fréquence les parties réelles des sauts exprimés en terme de coefficients de réflexion et de transmission,

$$\begin{array}{ll} T_\delta - R_\delta & \text{et} \quad T_2 - R_2 \\ -\sqrt{\epsilon_c} T_\delta - R_\delta & \text{et} \quad -\sqrt{\epsilon_c} T_2 - R_2 \end{array}$$

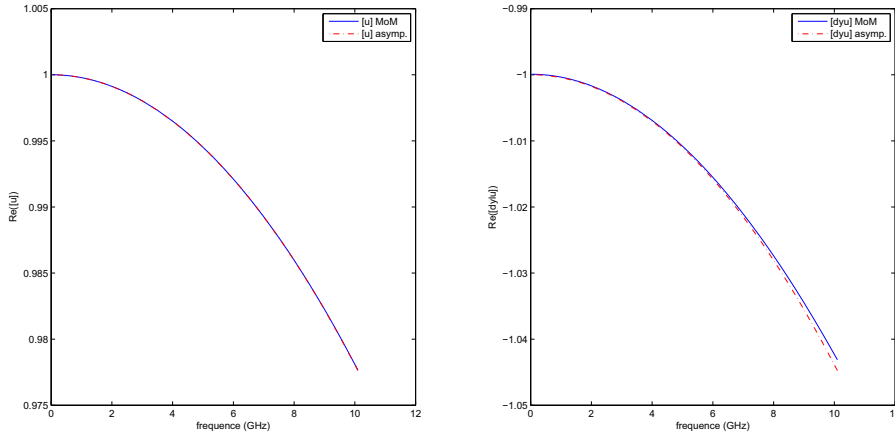


FIGURE 3.4 – Comparaison entre les sauts évalués par la MoM et les sauts évalués asymptotiquement – profil sinusoïdal – Incidence normale

Le résultat obtenu conforte l'approche. Les effets de rugosité sur les quantités d'intérêts interviennent au second ordre.

3.6 Conclusion

La procédure d'homogénéisation a été appliquée dans le cas d'une interface rugueuse séparant deux milieux diélectriques. Même si les développements deviennent plus calculatoires, la procédure reste systématique. Nous avons retrouvé à l'ordre 1 les conclusions communément admises : le centre de phase doit être pris à la moyenne, la forme des rugosités n'intervient pas. Notons que ces résultats ne sont peut-être qu'une particularité des surfaces mono-dimensionnelles éclairée par une onde plane en polarisation TM. Pour obtenir des effets des rugosités significatifs, les ordres supérieurs doivent être calculés. Ces résultats donnent une première justification quantitative au fait que l'on remplace une interface rugueuse séparant deux milieux diélectriques par sa moyenne.

Chapitre 4

Préconditionneur physique

Sommaire

4.1	Introduction	90
4.1.1	Quelques éléments sur la formulation intégrale utilisée	90
4.1.2	Méthodes itératives de type Krylov	92
4.1.3	Éléments sur les Préconditionneurs	93
4.1.4	Méthodes itératives et surfaces rugueuses	95
4.2	Valeurs Propres – Vecteurs Propres	96
4.2.1	Cas Analytique : plaque périodique	96
4.2.2	Hypothèse et Justifications numériques	99
4.2.3	Synthèse	107
4.3	Construction du Préconditionneur Physique	108
4.3.1	Construction du preconditionneur	108
4.3.2	Heuristique : choix de ε , \mathcal{M} et M	109
4.3.3	Performances	116
4.3.4	Conclusion : surfaces périodiques	120
4.4	Application aux surfaces tronquées	122
4.4.1	Information spectrale périodique pour des surfaces tronquées	122
4.4.2	Performances	127
4.4.3	Conclusion	132
4.5	Extensions	134
4.5.1	Surface métallique – polarisation TE	134
4.5.2	Interface diélectrique – polarisation TM	134
4.6	Perspectives	135
4.7	Conclusion	137

Dans ce chapitre, nous proposons et étudions un preconditionneur adapté aux rugosités surfaciques et basé sur des considérations physiques.

La Méthode des Moments (MoM) pour un problème 2D en polarisation Transverse Magnétique (TM) est présentée (section 4.1.1). Dans le cas où le problème est en 2D et périodique, Zaki et Neuther ont étudié une formulation dans [80, 81]. Une étude mathématique des formulations Équations Intégrales peut être trouvée dans [49].

La MoM mène à la résolution d'un système linéaire. Deux approches concurrentes sont généralement proposées pour cette résolution : les méthodes *directes* (décomposition LU, méthode de

Gauss, de Choleski, ...) et les méthodes *itératives*, en particulier celles basées sur les sous-espaces de Krylov (Gradient Conjugué, GMRES, ...).

Les principes directeurs de ces méthodes itératives de type Krylov sont brièvement exposées dans la section 4.1.2. Pour une étude détaillée de ces méthodes, nous renvoyons à [60] (en particulier les chapitres 5 et 6 puis 9). Dans le cadre des surfaces rugueuses, les principales méthodes itératives employées sont indiquées (section 4.1.4).

Après avoir présenté quelques éléments sur le preconditionneur (section 4.1.3), nous construisons un preconditionneur "spectral" adapté aux surfaces rugueuses. Ce preconditionneur original est initialement développé pour les problèmes périodiques possédant des rugosités périodiques ou aléatoires. De plus, nous étudions aussi ses performances dans le cadre de surfaces tronquées. Nous explicitons formellement le principe proposé au cas de la polarisation Transverse Électrique (TE) ainsi qu'au cas d'une interface rugueuse séparant deux milieux diélectriques en polarisation TM.

Pour finir, nous proposons des directions pour étendre son domaine d'application. Et nous présentons à titre de perspectives de possibles liens avec l'homogénéisation d'ordre 1.

4.1 Introduction

4.1.1 Quelques éléments sur la formulation intégrale utilisée

Le cas 2D en polarisation TM ($u = E_z$) avec une surface métallique 1D (conducteur parfait) est considéré ici, c'est à dire que nous cherchons à résoudre,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{\nabla^2 + k^2\} u_{(x,y)}^{\text{tot}} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_{(x,\Gamma(x))}^{\text{tot}} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ + \text{Condition Radiation (Sommerfeld)} \end{array} \right.$$

ou encore, en terme de champ diffracté, avec $u^{\text{tot}} = u^{\text{inc}} + u^{\text{diff}}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\nabla^2 + k^2\} u^{\text{diff}} = 0 \\ u^{\text{diff}}|_{\Gamma} = -u^{\text{inc}}|_{\Gamma} \\ |\partial_r u^{\text{diff}} - ik u^{\text{diff}}| \leq \frac{c}{r^2} \quad \text{à l' } \infty \end{array} \right.$$

Ce problème de diffraction peut être résolu à l'aide de l'opérateur intégral [49] suivant,

$$(Sj)(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) j(\mathbf{r}_s) d\gamma(\mathbf{r}_s) \quad (4.1)$$

et nous utilisons le théorème de représentation,

$$u^{\text{diff}}(\mathbf{r}) = (Sj)(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \notin \Gamma \quad (4.2)$$

où le potentiel de simple couche j est proportionnel à un courant électrique sur la surface et correspond à l'inconnue. De plus, en remarquant que $u^{\text{diff}}|_{\Gamma} = -u^{\text{inc}}|_{\Gamma}$, la formulation intégrale du problème de diffraction se déduit par passage à la limite sur Γ ,

$$(Sj)(\mathbf{r}) = -u^{\text{inc}}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (4.3)$$

Dans Eq. (4.2), G représente la fonction de Green en espace libre et son expression est,

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|) \quad \text{Cas non-périodique} \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{1}{4i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-indk \sin \theta^{\text{inc}}} H_0^{(2)}(k\sqrt{(x-x_s-nL)^2 + (y-y_s)^2}) \quad \text{Cas périodique} \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i\gamma_n L} e^{-i\gamma_n|y-y_s|} e^{i\alpha_n(x-x_s)} \end{array} \right.$$

avec $H_0^{(2)}$ la fonction de Hankel de seconde espèce, L la période de la surface, θ^{inc} l'angle d'incidence, et $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$ avec $\alpha_n = 2\pi n/L + k_x$.

Nous appliquons une formulation variationnelle sur Eq. (4.3) avec la fonction test j^{test} , et l'équation devient,

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) j(\mathbf{r}_s) j^{\text{test}}(\mathbf{r}) d\gamma(\mathbf{r}_s) d\gamma(\mathbf{r}) = - \int_{\Gamma} u^{\text{inc}}(\mathbf{r}) j^{\text{test}}(\mathbf{r}) d\gamma(\mathbf{r})$$

Nous choisissons les fonctions f_n comme fonctions de base pour la discrétisation, ainsi nous écrivons :

$$j(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N j_n f_n(\mathbf{r})$$

et ces mêmes fonctions sont considérées comme fonctions tests (Méthode de Galerkin ou Méthode des Moments), il résulte,

$$\sum_{n=1}^N j_n \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) f_n(\mathbf{r}_s) f_m(\mathbf{r}) d\gamma(\mathbf{r}_s) d\gamma(\mathbf{r}) = - \int_{\Gamma} u^{\text{inc}}(\mathbf{r}) f_m(\mathbf{r}) d\gamma(\mathbf{r}) \quad \forall m \in [1, N]$$

qui s'écrit aussi sous la forme d'un système linéaire de taille N ,

$$Z\mathbf{j} = \mathbf{e} \quad (4.4)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{mn} = \int_{\Gamma_m} \int_{\Gamma_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) f_n(\mathbf{r}_s) f_m(\mathbf{r}) d\gamma(\mathbf{r}_s) d\gamma(\mathbf{r}) \\ \mathbf{e}_m = - \int_{\Gamma_m} u^{\text{inc}}(\mathbf{r}) f_m(\mathbf{r}) d\gamma(\mathbf{r}) \end{array} \right.$$

Dans la système (4.4), la matrice impédance Z dépend de l'angle d'incidence dans le cas périodique car la fonction de Green en dépend. Dans le cas non-périodique, l'angle d'incidence intervient uniquement dans le vecteur excitation \mathbf{e} (second membre).

Nous notons \mathbf{j} la représentation discrète du potentiel j et l'appelons par abus courant électrique. Pour être clair, le vecteur densité de courant électrique (physique) $\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{\text{tot}}$ est relié au potentiel scalaire j par l'équation,

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}} = j/\omega\mu \quad (4.5)$$

De la même manière, la matrice Z est considérée comme une matrice impédance.

Pour finir, nous considérons une approximation \mathbb{P}_0 , c'est à dire que les fonctions f_n sont constantes par morceaux,

$$f_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} \in \Gamma_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ainsi les coefficients du système linéaire deviennent,

$$\begin{cases} Z_{mn} &= \int_{\Gamma_m} \int_{\Gamma_n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) d\gamma(\mathbf{r}_s) d\gamma(\mathbf{r}) \\ e_m &= - \int_{\Gamma_m} u^{\text{inc}}(\mathbf{r}) d\gamma(\mathbf{r}) \end{cases}$$

Le système linéaire de taille N est donc dense (la matrice Z est entièrement pleine) et ses coefficients sont complexes.

Pour connaître le courant sur la surface à partir duquel le champ diffracté peut se déduire (grâce à Eq. (4.2)), le système linéaire (4.4) doit être résolu numériquement. La stratégie classique pour le résoudre est l'utilisation de méthodes dites *directes*, comme une factorisation LU. Toutefois, en dépit de leur robustesse, résoudre à l'aide de ces méthodes des problèmes de diffraction de grandes tailles devient numériquement (très) onéreux, en terme de temps de calcul en $O(N^3)$ et en terme de mémoire requise en $O(N^2)$. Une alternative efficace est l'utilisation de méthodes *itératives* présentées dans les deux sous-sections suivantes.

4.1.2 Méthodes itératives de type Krylov

L'idée initiale dans les méthodes de résolution itérative est d'utiliser une projection pour extraire une solution approchée de Eq. (4.4). La solution est dite approchée, mais l'erreur est entièrement connue et surtout elle peut être réduite à l'ordre de précision de la méthode numérique mise en jeu (ici la MoM). La solution obtenue par une méthode itérative peut être considérée comme aussi rigoureuse que celle obtenue par une méthode directe.

D'un point de vue formel, si \mathcal{K}_m est l'espace de recherche de dimension m , alors pour être capable d'extraire une approximation de la solution, m contraintes doivent être imposées. La spécification de contrainte la plus commune est une condition de Petrov-Galerkin, c'est-à-dire d'imposer que le résidu $e - Z\tilde{\mathbf{j}}$ soit orthogonal à un autre sous-espace \mathcal{L}_m aussi de dimension m . Finalement, chercher la solution approchée de Eq. (4.4) revient à résoudre la problème,

$$\text{Trouver } \tilde{\mathbf{j}} \in \mathbf{j}_0 + \mathcal{K}_m \quad \text{tel que } r = e - Z\tilde{\mathbf{j}} \perp \mathcal{L}_m$$

où \mathbf{j}_0 est un vecteur initial. En général, le vecteur nul est pris comme vecteur initial.

D'un point de vue matriciel, une base du sous-espace \mathcal{K}_m est représentée par la matrice $K_m = [k_1, \dots, k_m]$ de taille $N \times m$, et de façon similaire pour le sous-espace \mathcal{L}_m avec la matrice $L_m = [l_1, \dots, l_m]$. Ainsi le problème pour trouver une solution approchée s'écrit,

$$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j}_0 + K_m y_m \quad \text{avec} \quad \left(e - Z\tilde{\mathbf{j}} \mid l_i \right) = 0 \quad \forall i \in [1, m]$$

où $\left(\cdot \mid \cdot \right)$ est le produit scalaire usuel de \mathbb{C}^N . La condition d'orthogonalité s'écrit aussi sous forme matricielle comme $L_m^H (e - Z\tilde{\mathbf{j}}) = 0$. Ainsi la solution approchée s'écrit,

$$\tilde{\mathbf{j}} = \mathbf{j}_0 + K_m \left(L_m^H Z K_m \right)^{-1} L_m^H (e - Z\mathbf{j}_0) \tag{4.6}$$

La matrice $L_m^H Z K_m$ ne doit pas être construite et encore moins inversée. Toutes les nuances dans les méthodes itératives sont dans le choix des sous-espaces \mathcal{K}_m et \mathcal{L}_m et dans l'algorithme de projection. C'est à dire que, suivant les méthodes, cette matrice est évaluée différemment.

Pour résumer, les différences entre les méthodes itératives sont :

- la construction de la base $\{k_1, \dots, k_m\}$ de \mathcal{K}_m et l'espace de contraintes \mathcal{L}_m ,
- la méthode pour déterminer les coefficients du vecteur y_m .

Dans la suite du document, nous utiliserons la méthode GMRES [61]. Cette méthode itérative utilise comme espace d'approximation \mathcal{K}_m un espace de Krylov défini par,

$$\mathcal{K}_m = \text{span}\{r_0, Zr_0, Z^2r_0, \dots, Z^{m-1}r_0\} \quad (4.7)$$

et comme espace de contrainte l'espace $\mathcal{L}_m = Z\mathcal{K}_m$.

La stratégie est la suivante : la base $\{k_1, \dots, k_m\}$ de \mathcal{K}_m est construite au fur et à mesure. À chaque itération, un nouveau vecteur est ajouté à la base de recherche (il est orthogonalisé par la procédure d'Arnoldi) puis les coefficients du vecteur y_m sont évalués. Le procédé est arrêté quand la solution approchée est considérée comme acceptable. Une étude détaillée des critères d'arrêt pour GMRES est faite dans [28]. Nous utilisons comme critère le résidu. Il est défini à chaque n^e itération par,

$$r_n = \frac{\|e - Zj_n\|_2}{\|e\|_2} \quad (4.8)$$

avec $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle de \mathbb{C}^N . La méthode a convergé quand le résidu est inférieur à un critère de tolérance, en général 10^{-3} ou 10^{-4} .

Pour résumer la stratégie, la dimension de l'espace Krylov augmente tant que la solution approchée n'a pas la précision requise. Ceci peut poser des problèmes de stockage. Donc, une alternative est l'utilisation d'une variante dite *restarted*. La dimension maximale de l'espace de Krylov est fixée, et lorsqu'elle est atteinte, la procédure est réinitialisée et relancée, en conservant comme nouveau vecteur initial le dernier vecteur de la base (i.e., k_{m-1}).

Pour finir, le choix d'un espace de Krylov Eq. (4.7) pour l'espace d'approximation implique que la solution est de la forme,

$$\tilde{j} = j_0 + p_{m-1}(Z)r_0$$

où p_{m-1} est un polynôme de degré $m - 1$. Les méthodes itératives diffèrent dans leur stratégie pour construire ce polynôme. De plus, une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton est que la solution appartient théoriquement à \mathcal{K}_N . Toutefois, cette convergence théorique n'est pas toujours assurée.

Remarquons aussi que la formulation intégrale présentée Eq. (4.3) (formulation de première espèce) est du type Electric Field Integral Equation (EFIE) qui est bien connue pour être mal conditionnée [22] et dégrade la convergence de la méthode itérative. Une autre formulation mieux conditionnée (formulation de deuxième espèce) est la Magnetic Field Integral Equation (MFIE), mais elle impose que l'objet diffractant soit fermé.

En outre, les méthodes de résolution itérative peuvent être optimisées : le but étant de réduire au minimum le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution dont l'approximation est contrôlée par le résidu. C'est la motivation des préconditionneurs.

4.1.3 Éléments sur les Préconditionneurs

Principes

Le but est de diminuer le nombre d'itérations nécessaires pour avoir convergence. Le système linéaire original donné par Eq. (4.4) est transformé en un autre système linéaire possédant la

même solution. Cet autre système linéaire doit être plus “facile” à résoudre, ou tout du moins, il doit converger plus rapidement. Deux transformations sont envisageables,

$$YZj = Ye \quad (4.9)$$

ou

$$ZYz = e \quad \text{avec } j = Yz \quad (4.10)$$

Eq. (4.9) est appelé système préconditionné à gauche et Eq. (4.10) système préconditionné à droite. Dans [60] (voir section 9.3.4), Saad compare les deux types de préconditionnement. Dans la plupart des situations pratiques, il n’y a pas de différence entre les deux types de préconditionnement. Toutefois, un système préconditionné à droite sera préféré car il ne modifie pas le résidu Eq. (4.8), contrairement au système préconditionné à gauche. Le critère d’arrêt n’est pas modifié et la comparaison des vitesses de convergence a un sens.

La matrice Y est appelée préconditionneur. Elle est ici homogène à une admittance. La stratégie pour construire un préconditionneur efficace est d’exhiber une “bonne” approximation de l’inverse de la matrice impédance Z , et ceci à moindre coûts numériques. Il est évident que si l’inverse exact $Y = Z^{-1}$ est construit, le système est déjà résolu et la méthode converge en une seule itération.

Les caractéristiques d’un “bon” préconditionneur sont :

- la “meilleure” approximation possible de Z^{-1} ,
- une construction la moins coûteuse possible en terme de temps de calculs,
- un stockage mémoire le plus petit possible,
- un produit matrice-vecteur le plus efficace possible.

Exemples de préconditionneurs algébriques

Une revue des stratégies proposées dans la littérature pour construire des préconditionneurs ne peut être exposée ici tant elles sont nombreuses et variées, suivant les applications visées et les méthodes numériques mises en jeu. Toutefois, les stratégies classiques reposent sur certaines propriétés algébriques (voir chapitre 10 de [60]), par exemple l’utilisation d’une factorisation LU incomplète (iLU).

Dans le cadre de l’électromagnétisme, une stratégie robuste et performante est l’utilisation d’un SPAI (SParse Approximate Inverse) [16]. Il est construit autour de deux contraintes : aucun accès direct à la matrice (utilisation d’un produit matrice-vecteur type FMM) et une utilisation en calcul massivement parallèle. Cependant, les produits matrice-vecteur rapides type FMM ne sont pas performants dans le cas de problèmes périodiques.

Un autre préconditionneur algébrique est le préconditionneur que nous appelons **drop** (ou *banded*). Il est simple à construire. Il consiste à réaliser une factorisation complète sur une matrice seuillée, ce qui ne correspond pas à un préconditionneur iLU qui fait une factorisation LU incomplète d’une matrice complète. La matrice Z^{drop} est construite en annulant les coefficients inférieurs à un certain seuil, c’est-à-dire $Z_{ij}^{\text{drop}} = 0$ si $|Z_{ij}| < \varepsilon$. La matrice Z^{drop} est creuse, et du fait des propriétés de la fonction de Green, elle est aussi bande et à diagonale dominante. Une factorisation LU de cette matrice (sous forme de matrices triangulaires inférieure et supérieure) termine sa construction. À chaque itération, pour le produit matrice-vecteur préconditionné, deux substitutions sont faites en utilisant le caractère triangulaire de la factorisation. Nous utiliserons ce préconditionneur à titre de comparaison avec celui que nous proposons.

Pour finir, une autre approche est utilisée pour améliorer la convergence : c’est d’exploiter l’information spectrale évaluée par une procédure algébrique au fur et à mesure des itérations. Une information spectrale approchée est extraite à partir de la procédure d’Arnoldi lors du *restart*. Puis, deux idées sont utilisées pour profiter de cette information spectrale : soit l’espace de Krylov Eq. (4.7) est modifié [46, 47], c’est la variante *deflated* – les vecteurs propres approchés sont utilisés pour “augmenter” l’espace de Krylov – soit des préconditionneurs spectraux sont construits [7, 30].

Toutefois, toutes ces approches ne tirent pas partie de la physique du problème de diffraction, et en particulier de celui par une surface rugueuse. Dans les sections suivantes, nous proposons la construction d’un préconditionneur spectral basé sur une connaissance *a priori* de l’information spectrale tirée d’une analyse de la physique du problème.

4.1.4 Méthodes itératives et surfaces rugueuses

Dans le cadre des surfaces rugueuses, de nombreuses méthodes itératives ont été proposées pour améliorer les performances dans la recherche de la solution du système linéaire Eq. (4.4). Elles se classent en deux catégories : celles utilisant des décompositions judicieuses de la matrice impédance (méthodes stationnaires), et celles utilisant les espaces de Krylov. Des comparaisons entre des méthodes de chacune des catégories sont faites par exemple dans [15].

Les méthodes stationnaires diffèrent principalement par le découpage de la matrice impédance, c’est à dire que la solution \mathbf{j}_n est cherchée itérativement par,

$$F^{(n)}\mathbf{j}^{(n+1)} = G^{(n)}\mathbf{j}_n + k^{(n)}$$

avec des termes $F^{(n)}$, $G^{(n)}$ et $k^{(n)}$ différents suivant les décompositions. En fonction des propositions, ces termes sont fixés au début, ou réévalués à chaque itération. Le critère d’arrêt est basé sur la précision de la solution obtenue en utilisant le résidu Eq. (4.8). Une étude de décompositions purement algébriques est faite dans [60] (chapitre 4).

Des décompositions ont été proposées sur des considérations physiques. Par exemple pour la MFIE, l’inverse de la matrice est calculé par une série de Neumann dont les termes sont astucieusement évalués par une approximation de Kirchhoff (KA) [70]. Les limites, dû en particulier à la convergence de la série de Neumann, sont montrées dans [79].

La méthode FB (Forward/Backward) [33] et la MOMI (Method of Ordered Multiple Interactions) [40] sont basées sur la même idée : elles séparent les interactions *forward* et *backward*. C’est à dire que la matrice impédance est découpée en trois matrices : l’une diagonale, la deuxième triangulaire supérieure et la troisième triangulaire inférieure. Cette méthode donne des résultats intéressants pour le champ diffusé par un large éventail de surfaces rugueuses [40]. Pour les surfaces 1D, la méthode est améliorée [17] en construisant un produit matrice-vecteur rapide. Toutefois, dans le cas de surfaces 2D, cette construction est plus délicate.

West [78] montre que ces deux méthodes basées sur des considérations physiques – KA, FB ou MOMI – sont mathématiquement équivalentes à, respectivement, la méthode stationnaire de Jacobi et la méthode stationnaire SSOR (Symmetric Successive Over Relaxation). L’intérêt de ces méthodes est qu’elles convergent plus rapidement que celles basées sur les espaces de Krylov pour certains problèmes. Cependant, elles sont beaucoup moins robustes [72], c’est-à-dire qu’elles ne convergent pas pour tous les problèmes d’intérêts.

Par ailleurs, une autre proposition basée sur une considération physique [73] est de séparer la matrice impédance en deux matrices : une représentant les interactions proches et une autre

représentant les interactions éloignés. Avec ce procédé, les deux matrices sont “creusées”; la matrice des interactions éloignés peut être pleine mais dans ce cas soit une structure de Toeplitz peut être exploitée [62] ou soit une FMM (Fast Multipole Method) peut être construite. Puis cette séparation est utilisée dans la méthode stationnaire, et cela revient à résoudre à chaque itération un système linéaire avec uniquement la matrice des proches interactions. Dans le cas de surface 1D, elle est appelée BMIA (Banded Matrix Iterative Algorithm) car la matrice des interactions proches est une matrice bande. Ce principe, appliqué au cas de surface 2D, est appelé SMFSIA (Sparse Matrix Flat Surface Iterative Algorithm). Les techniques BMIA et SMFSIA sont généralement couplées à des méthodes de grille, comme la méthode CAG (CAnonical Grid), qui permettent l’utilisation d’un produit matrice-vecteur rapide (transformée de Fourier, structure creuse, ou de Toeplitz, ...). De nombreuses améliorations ont été proposées comme l’utilisation de méthodes itératives de type Krylov pour traiter le système des interactions proches. En outre, cette approche peut être appliquée aux surfaces diélectriques combinées à des impédances de surfaces [38, 13] ou intégrée dans d’autres méthodes [24].

Pour finir, West [77] montre que la MOMI (ou la méthode FB) est équivalente à un système préconditionné avec un préconditionneur de Jacobi. De plus, Donohue et al. [25] montrent que la méthode BMIA [73] est équivalente à un préconditionneur bande (du type Z^{drop}).

À notre connaissance, peu de préconditionneurs basés sur des considérations physiques ont été proposés pour améliorer la convergence d’une méthode itérative de type Krylov dans le cas des surfaces rugueuses. Citons l’approche de Naenna et Johnson [48] qui est discuté p.132 (section 4.4.3).

4.2 Valeurs Propres – Vecteurs Propres

4.2.1 Cas Analytique : plaque périodique

Dans cette partie, nous mettons en évidence le lien entre les modes propres (valeurs propres et vecteurs propres) associés au problème de diffraction (réflexion) par une plaque périodique et les Modes de Floquet.

Deux points de vue très semblables sont adoptés : le premier utilise le calcul analytique du courant sur la plaque pour en déduire les modes propres, et le second utilise l’opérateur intégral associé au problème.

Premier point de vue

Le cas trivial d’une plaque plane métallique périodique de période L (plan infini) est considéré. Nous définissons cette plaque par $\Gamma^{(0)} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq L, y = 0\}$, et la matrice impédance associée sera notée $Z^{(0)}$. La surface est éclairée par une onde plane $u^{\text{inc}}(x, y) = e^{i(k_x x - k_y y)}$. Dans ce cas, l’onde diffractée (réfléchi) par la plaque périodique est : $u^{\text{diff}}(x, y) = -e^{i(k_x x + k_y y)}$. De plus, le scalaire j , proportionnel au courant électrique \mathbf{J} sur la plaque périodique, est donné par,

$$j(x, 0) = \omega\mu \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \omega\mu(-\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}^{\text{tot}}) \cdot \hat{\mathbf{z}}$$

En utilisant les simplifications induites par la polarisation TM, nous en déduisons le résultat bien connu,

$$j(x) = \left(\partial_y u^{\text{tot}}(x, y) \right)_{|y=0} = \left(\partial_y u^{\text{inc}} + \partial_y u^{\text{diff}} \right)_{|y=0} = -2ik_y e^{ik_x x}$$

Le courant j recherché dans le système linéaire (4.4) est donc connu analytiquement. Pour alléger l'écriture mais sans perdre en généralité, ici une incidence normale est considérée (i.e., $k_x = 0$), et nous pouvons donc écrire,

$$Z^{(0)} \begin{pmatrix} -2ik_y \\ \vdots \\ -2ik_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L/N \\ \vdots \\ -L/N \end{pmatrix}$$

où N est le nombre de fonction de base considérée, c'est-à-dire la taille de la matrice $Z^{(0)}$.

De ceci, nous déduisons que le vecteur constant $(1, \dots, 1)^T$ est un vecteur propre et que sa valeur propre associée est $\lambda_0 = \frac{1}{2ik_y} L/N$.

Du fait de la périodicité, toute onde k_x -périodique satisfaisant l'équation de Helmholtz peut être décomposée sur les modes de Floquet, c'est-à-dire,

$$u = \sum_n U_n e^{i\gamma_n y} e^{i\alpha_n x}$$

avec $\alpha_n = 2\pi n/L + k_x$ et $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$ comme défini précédemment. De plus, comme la surface est plane, ce développement est valable partout.

Suivant le principe de superposition, pour calculer le courant induit sur la plaque périodique par une onde incidente quelconque, un mode de Floquet $e^{-i\gamma_n y} e^{i\alpha_n x}$ quelconque est utilisé comme onde incidente. Par conséquent, le champ diffracté est : $u^{\text{diff}}(x, y) = -e^{i\gamma_n y} e^{i\alpha_n x}$. Suivant le même calcul que précédemment, le courant se déduit,

$$j(x) = \left(\partial_y \{e^{-i\gamma_n y} e^{i\alpha_n x}\} - \partial_y \{e^{i\gamma_n y} e^{i\alpha_n x}\} \right)_{|y=0} = -2i\gamma_n e^{i\alpha_n x} \quad (4.11)$$

Par conséquent, nous en déduisons que les valeurs propres associées à la matrice impédance $Z^{(0)}$ sont,

$$\lambda_n = \frac{1}{2i\gamma_n} \frac{L}{N}$$

et que les vecteurs propres associés correspondent aux représentations discrètes de $e^{i\alpha_n x}$.

Deuxième point de vue

Pour résoudre le problème de diffraction par un plaque périodique, l'opérateur intégral $S^{(0)}$ associé peut être utilisé Eq. (4.1). Formellement, il s'écrit,

$$(S^{(0)}j)(x) = \int_0^L \sum_n \frac{1}{2i\gamma_n L} e^{i\alpha_n(x-x_s)} j(x_s) dx_s$$

La variation suivant x des modes de Floquet est noté,

$$\phi_m(x) = e^{i\alpha_m x} / \sqrt{L}$$

et l'opérateur $S^{(0)}$ est appliqué à cette quantité. Ainsi, il vient,

$$(S^{(0)}\phi_m)(x) = \sum_n \frac{1}{2i\gamma_n d} e^{i\alpha_n x} \int_0^L e^{i(\alpha_m - \alpha_n)x_s} dx_s = \frac{1}{2i\gamma_m} \phi_m(x)$$

ce qui signifie que ϕ_m est un vecteur propre de l'opérateur $S^{(0)}$ avec la valeur propre associée $\lambda_m^{\{S^{(0)}\}} = \frac{1}{2i\gamma_m}$, ou encore,

$$(S^{(0)}\phi_m)(x) = \lambda_m^{\{S^{(0)}\}} \phi_m(x)$$

Maintenant, nous considérons l'approximation discrète $\widetilde{\phi}_m$ de la quantité ϕ_m , ou autrement dit la projection de ϕ_m sur la base des fonctions constantes par morceaux f_p , c'est-à-dire,

$$\widetilde{\phi}_m(x) = \sum_{p=1}^N \varphi_p^{(n)} f_p(x) \quad \text{avec} \quad \varphi_p^{(n)} = \phi_n\left(\frac{x_p + x_{p+1}}{2}\right) / \sqrt{N}$$

De plus, le vecteur correspondant $\widetilde{\phi}_m$ est noté Φ_m . Pour une période L fixée, l'augmentation de la taille de l'espace discret (c'est à dire du nombre N d'inconnues) rendra cette approximation meilleure.

Pour un maillage approprié, c'est à dire une discrétisation de la surface acceptable, il est raisonnable de supposer l'implication suivante,

$$(S^{(0)}\phi_m)(x) = \lambda_m^{\{S^{(0)}\}} \phi_m(x) \implies (S^{(0)}\widetilde{\phi}_m)(x) \approx \lambda_m^{\{S^{(0)}\}} \widetilde{\phi}_m(x) \quad (4.12)$$

En appliquant une formulation variationnelle sur la partie droite de Eq. (4.12), il vient facilement,

$$\begin{cases} \int_0^L (S^{(0)}\widetilde{\phi}_m)(x_s) f_q(x_s) dx_s &= \sum_{p=1}^N \varphi_p^{(m)} Z_{qp}^{(0)} \\ &\text{et} \\ \int_0^L \lambda_m^{\{S^{(0)}\}} \widetilde{\phi}_m(x_s) f_q(x_s) dx_s &= \lambda_m^{\{S^{(0)}\}} \varphi_q^{(m)} (x_{q+1} - x_q) \end{cases}$$

Et en estimant que le maillage considéré a un pas de discrétisation Δx moyen tel que : $\Delta x = x_{q+1} - x_q = L/N$, alors nous retrouvons le même résultat que précédemment,

$$Z^{(0)}\Phi_m \approx \lambda_m^{\{S^{(0)}\}} \frac{L}{N} \Phi_m = \lambda_m \Phi_m \quad (4.13)$$

La base propre, constituée des couples valeur propre/vecteur propre, est alors déterminée. La paire propre $\{\lambda_m, \Phi_m\}$ associée à la matrice impédance $Z^{(0)}$ est donc,

$$\lambda_m = \frac{1}{2i\gamma_m} \frac{L}{N} \quad \text{et} \quad \Phi_m = \begin{pmatrix} \phi_m\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) / \sqrt{N} \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_m\left(\frac{x_{N+1} - x_N}{2}\right) / \sqrt{N} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Il faut avoir en tête que nous avons aussi caractérisé les modes propres de l'admittance $Y^{(0)}$ associés au problème de diffraction par la plaque périodique, à savoir que les vecteurs propres sont identiques et les valeurs propres sont clairement : $\lambda_n^{\{Y^{(0)}\}} = 1/\lambda_n$.

4.2.2 Hypothèse et Justifications numériques

L'idée sous-jacente à cette étude des modes propres associés à la plaque périodique trouve une origine dans les développements asymptotiques présentés ci-avant. Dans les chapitres précédents, il a été illustré qu'une surface rugueuse peut être (très grossièrement puisqu'à l'ordre 0) considérée comme la perturbation d'une plaque plane périodique. En d'autres termes, nous supposons que les modes propres associés à la plaque périodique sont une approximation pertinente de ceux associés à une surface rugueuse. Cette connaissance *a priori* d'une approximation des modes propres sera injectée dans la résolution itérative du système linéaire Eq. (4.4) via le préconditionneur.

Avant de présenter la construction du préconditionneur dans la section suivante, nous allons illustrer numériquement sur différents types de surfaces rugueuses cette hypothèse.

Illustration numérique sur la norme de la matrice

Pour commencer, nous pouvons regarder dans quelle mesure la matrice Z impédance associée à une perturbation du plan est proche de celle $Z^{(0)}$ du dit plan.

Ainsi, à titre indicatif, nous comparons les normes de Frobenius des matrices. Ceci est à prendre avec précaution car la longueur des segments pour calculer un coefficient de la matrice n'est pas identique entre le plan et la surface perturbée. Un coefficient de la matrice représente comment deux éléments du maillage interagissent. Par conséquent, une longueur de segment différente implique une légère erreur sur le coefficient correspondant.

f=1GHz	Longueur	taille
$\lambda = 0.3m$	$L = 65.7\lambda$	$N = 1000$

	Profil	$\ Z\ _F^2 (\times 10^{-4})$	$\ Z - Z^{(0)}\ _F^2 / \ Z^{(0)}\ _F^2 (\%)$
Cas 0	Plan	1.9410	0
Cas 1	Sinus $h = 0.2250\lambda$, $\omega_x = 2\pi/L$	2.0113	$(10^{-2} \times)$ 0.3038
Cas 2	Gaussien $ks = 1$, $kl = 8$	2.0385	0.6404
Cas 2bis	Gaussien $ks = 1$, $kl = 5$	2.2099	2.5444
Cas 3	Gaussien $ks = 2$, $kl = 8$	2.3575	9.38
Cas 3bis	Gaussien $ks = 2$, $kl = 5$	3.1542	30.2
Cas 4	Exponentiel $ks = 0.75$, $kl = 8$	2.7474	7.27

TABLE 4.1 – Comparaisons des matrices en norme de Frobenius

Dans le TAB. 4.1 sont regroupées les erreurs en norme de Frobenius pour différents profils de surfaces. Tout d'abord, il faut noter que la norme matricielle donne une information globale ; si un seul coefficient est très différent alors la norme sera importante. Les cas 2 et 3 (ou les cas 2bis et 3bis) montrent l'influence de la hauteur. Les cas 2 et 2bis (ou les cas 3 et 3bis) montrent l'influence de la variation de la surface (pente).

Donc, naturellement plus la surface a une hauteur importante ou une variation rapide et moins sa matrice impédance est proche de celle associée au plan. Cependant, le cas 4 montre qu'il est difficile de séparer l'influence des paramètres hauteur et variations rapides.

Illustration numérique sur le courant

Pour illustrer numériquement l'hypothèse, nous comparons le courant sur la plaque périodique Eq. (4.11) à celui sur différentes surfaces perturbées calculé par la MoM. Les différents profils de surfaces utilisés ainsi que leurs caractéristiques sont regroupés dans le TAB. 4.2. Dans cette section, la fréquence est fixée à 1GHz. Le pas de maillage est fixé arbitrairement à 15.22 points par longueur d'onde (λ). Nous pouvons aussi noter que ces figures traçant la densité de courant sont une illustration numérique de Eq. (4.13) : si le champ incident est le m^e mode de Floquet, alors la densité de courant est la trace sur la surface de ce m^e mode de Floquet et son amplitude est donnée par $1/(\omega\mu\lambda_m)$.

f=1GHz	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 0	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$	$N = 1000$
Cas 1	Sinus ($ks = 1$)	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $h = \sqrt{2}/(4\pi) \lambda$	$N = 1000$ $\omega_x = 2\pi/L$
Cas 2	Sinus ($ks = 2$)	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $h = \sqrt{2}/(2\pi) \lambda$	$N = 1000$ $\omega_x = 2\pi/L$
Cas 3	Gaussien $ks = 1$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$

TABLE 4.2 – Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur le courant

La FIG. 4.1 représente le module et la phase de le densité de courant \mathbf{J} induit par une onde plane à incidence normale en fonction de la position (donnée en longueur d'onde). Pour l'onde

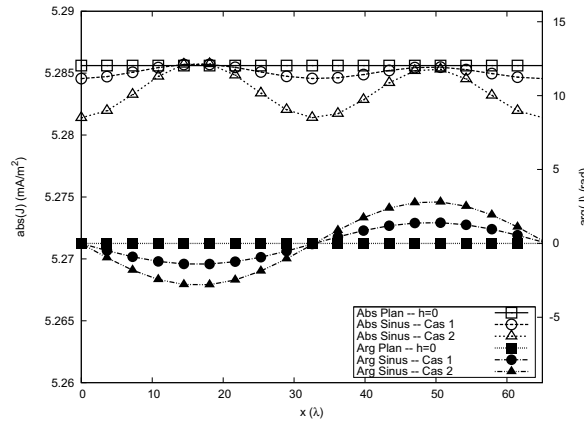


FIGURE 4.1 – Courant induit par l'onde plane Φ_0 à incidence normale pour différents types de surface : Plan (Cas 0) , Sinus avec $h = 0.1125\lambda$ (Cas 1) et Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 1) (voir TAB. 4.2).

plane, il est bien connu que la densité de courant Eq. (4.5) sur la surface plane (et périodique) est donnée par Eq. (4.11) (avec $n = 0$) : $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}} = j/(\omega\mu) = -2ik_y/\omega\mu$. Donc pour le plan (Cas 0), le module du courant est $|\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}}| = 5.3052 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}^2$ et sa phase est constante. La très légère erreur entre le module du courant calculé analytiquement et celui calculé par la MoM provient d'erreurs numériques (discrétisation, noyau de Green périodique, ...). De plus, pour les cas autres que le plan périodique, la différence entre la valeur du courant sur le plan et celle calculée

sur la surface perturbée au plus de 0.07% pour le module. L'effet sur la phase est plus important.

Par conséquent, la FIG. 4.1 confirme numériquement l'hypothèse : le courant d'une surface planaire perturbée (surface rugueuse) est une perturbation du courant induit sur le plan.

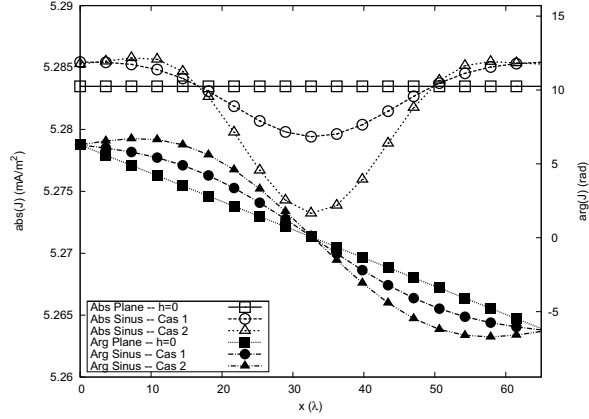


FIGURE 4.2 – Courant induit par le 2^e mode de Floquet Φ_2 à incidence normale pour différents types de surface : Plan (Cas 0) , Sinus avec $h = 0.1125\lambda$ (Cas 1) et Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 2) (et TAB. 4.2).

La FIG. 4.2 montre que la conclusion est aussi vraie pour le 2^e mode de Floquet. La densité de courant sur le plan périodique est $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 2i\gamma_2/(\omega\mu)e^{i4\pi/L}$. Donc dans le cas du plan (Cas 0), le module du courant est légèrement diminué par rapport à celui induit par l'onde plane, i.e. $|\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{z}}| = 5.3027 \text{ A/m}^2$ et sa phase a une variation de 4π . Dans les cas de perturbations du plan, la différence entre la valeur du courant sur le plan et celle calculée sur la perturbation est au plus de 0.2% pour le module. L'erreur sur la phase est du même ordre que celle commise sur la FIG. 4.1.

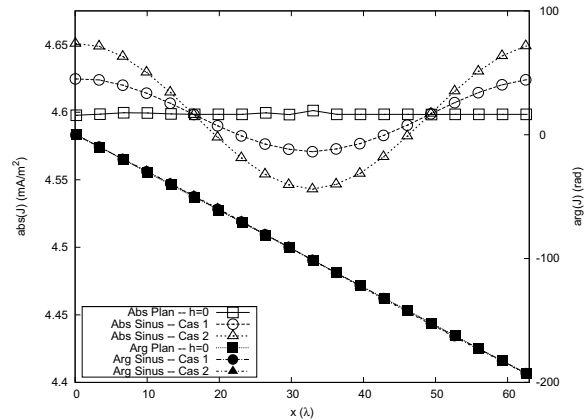


FIGURE 4.3 – Courant induit par l'onde plane Φ_0 à incidence de 30 degré pour différents types de surface : Plan (Cas 0) , Sinus avec $h = 0.1125\lambda$ (Cas 1) et Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 2) (voir TAB. 4.2)

Sur la FIG. 4.3, l'onde plane considérée a une incidence de 30° . Suivant Eq. (4.11), la valeur des courants pour les surfaces perturbées est bien autour de la valeur analytique $(4\pi/\lambda) \cos \theta^{\text{inc}} / (\omega\mu) = 4.5944 \text{ A/m}^2$. Et la phase suit bien la variation attendue, à savoir en $2\pi/\lambda \sin \theta^{\text{inc}}$. En outre, la (petite) perturbation déphase peu le courant par rapport à celui calculé sur la plan.

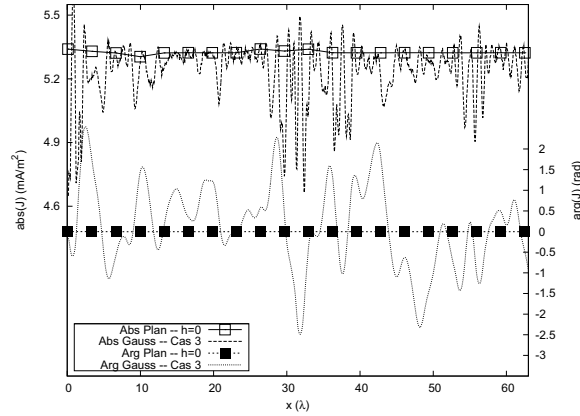


FIGURE 4.4 – Courant induit par l'onde plane Φ_0 à incidence normale pour deux types de surface : Plan (Cas 0) , et Gaussienne (Cas 4) (voir TAB. 4.2).

Pour finir, le module et la phase du courant sont comparés entre le plan et une surface à auto-corrélation gaussienne (Cas 3). Le module et la phase de la surface très perturbée varie autour des valeurs données par le plan.

Pour conclure, comme nous nous y attendions, le courant calculé sur les surfaces perturbées suit approximativement les mêmes variations que celui calculé sur une plaque plane périodique. Mais, plus la surface sera une perturbation importante, en terme de hauteur ou de pente, et moins l'approximation sera pertinente.

Illustration numérique sur les valeurs propres

Dans cette partie, nous étudions les valeurs propres de la matrice Z . Nous commençons par comparer les valeurs propres analytiques données par Eq. (4.14) et celle données par une fonction numérique `eig` pour la matrice impédance $Z^{(0)}$ associée à la plaque périodique. Puis, l'influence de la perturbation sur la répartition des valeurs propres est illustrée.

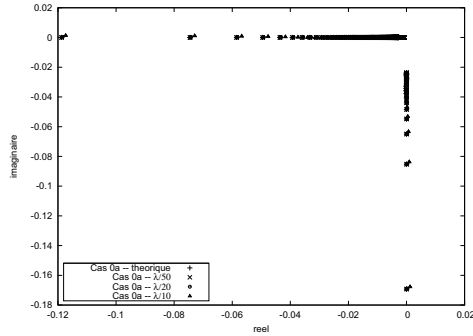
La fonction `eig` (MATLAB) étant numériquement coûteuse, les cas traités ici sont de moindre tailles. Dans le TAB. 4.3 sont regroupés les différentes caractéristiques des surfaces utilisées.

	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 0a	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 33.3\lambda$	N varie
Cas 0b	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	L varie	$N = 374$
Cas 1	Sinus	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 13.63\lambda$ $h = \lambda/33$	$N = 100$ $\omega_x = 2\pi/L$
Cas 2	Gaussien $ks = 1$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 13.63\lambda$ $kl = 8$	$N = 410$

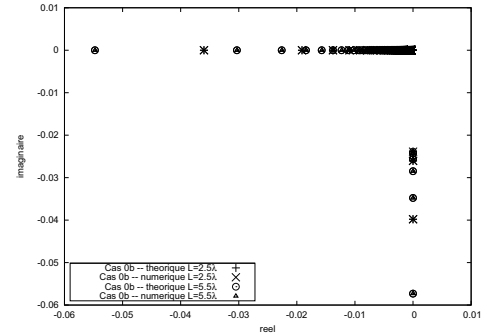
TABLE 4.3 – Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur les valeurs propres

Pour pouvoir comparer les géométries de tailles différentes, les valeurs représentées sont : $\lambda'_n = \lambda_n N/L$.

Les valeurs propres d'un plan périodique sont analytiques. Elles sont comparées à celles obtenues numériquement pour différentes discrétisations du plan. Pour le cas 0a, les tailles sont $N = 1667, 667$ et 333 ce qui correspond respectivement à des pas de maillage de $\lambda/50, \lambda/20$ et $\lambda/10$. Pour le cas 0b, les longueurs sont $L = 2.5\lambda$ et 5.5λ .



(a) Différentes tailles



(b) Différentes longueurs

FIGURE 4.5 – Comparaison des Valeurs Propres théoriques et numériques dans le plan complexe : surface plane avec différentes discrétisations ou longueurs (voir TAB. 4.3)

La FIG. 4.5 montre qu'aux erreurs numériques près, les valeurs propres analytiques et numériques sont en adéquations. De plus, la FIG. 4.5(b) illustre la prévision de la partie théorique : le nombre de valeurs propres purement imaginaires (celles correspondant des modes de Floquet

propagatifs) est fini et dépend de la constante de propagation γ_n , c'est-à-dire uniquement de la période de la surface (et de l'angle d'incidence).

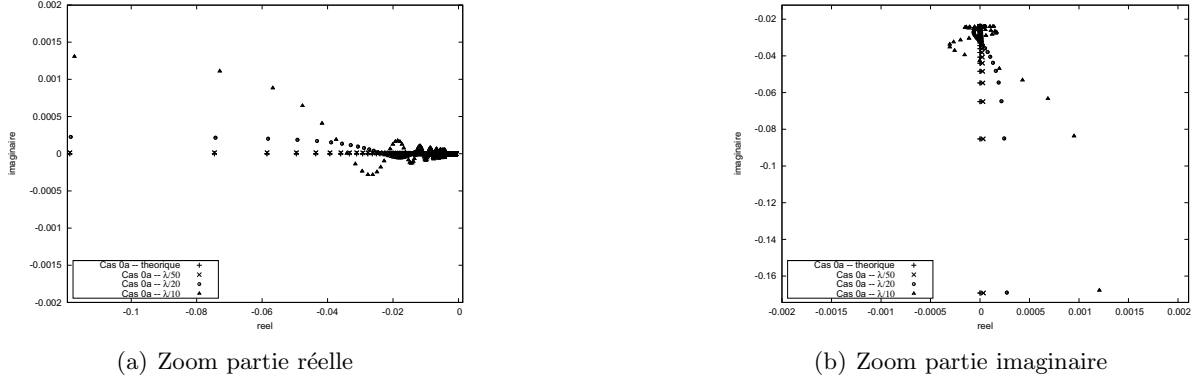


FIGURE 4.6 – Zoom de FIG. 4.5

Par ailleurs, comme dans toutes les méthodes numériques, plus la discrétisation est fine et plus la différence entre les valeurs théoriques et numériques est petite (voir FIG. 4.6). En outre, la FIG. 4.6(a) montre que, à longueur fixée, l'augmentation de la taille du système linéaire N augmente le nombre de valeurs propres qui tendent vers 0,

$$\lambda'_n = \frac{1}{2i\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{L} + k_x\right)^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-L}{4\pi n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

Généralement, ces “petites” valeurs propres sont responsables de la dégradation de la convergence dans les méthodes de résolution itérative (GMRES). Les stratégies mises en place dans les preconditionneurs spectraux algébriques (décrits p.95) visent à extraire ces valeurs propres puis à les déplacer autour de 1. La FIG. 4.6(b) met en évidence que les “petites” valeurs propres analytiques ne sont pas en accord avec les “petites” valeurs propres numériques. Pour une valeur propre fixée, raffiner le maillage diminue l'erreur mais il ajoute aussi des valeurs propres qui seront mal évaluées. Nous ne pouvons pas avoir accès à ces “petites” valeurs propres.

Seules les valeurs propres numériques de plus grand module sont bien représentées par les valeurs propres analytiques.

Pour deux surfaces rugueuses, l'influence de la perturbation sur le spectre est observée.

Pour finir, la FIG. 4.7 confirme le résultat : plus la perturbation est importante et moins l'approximation se justifie.

Justification numérique sur l'information spectrale (couple propre)

Le but de cette partie est de vérifier numériquement la validité de l'hypothèse sur le couple propre. Dans cette perspective, le paramètre d'erreur naturel est,

$$err_s = \frac{\|Z\Phi_m - \lambda_m\Phi_m\|_2}{\|\lambda_m\Phi_m\|_2} = \frac{\|Z\Phi_m - \lambda_m\Phi_m\|_2}{|\lambda_m|} \quad (4.15)$$

avec $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de \mathbb{C}^N . Les vecteurs Φ_m sont normés. Dans cette partie, la fréquence est fixée à 1GHz. À incidence normale, les modes sont symétriques, c'est-à-dire que

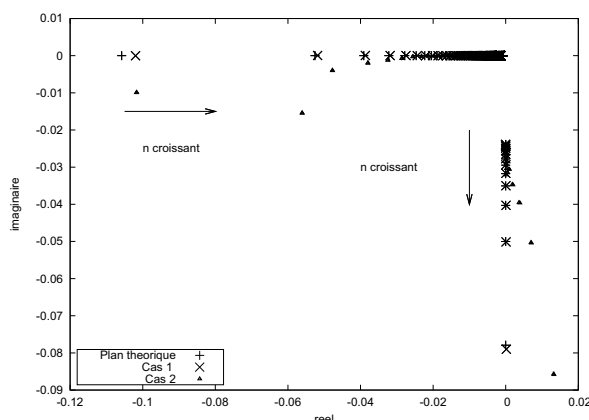


FIGURE 4.7 – Comparaison dans le plan complexe des Valeurs Propres théoriques (plan) et celles numériques de deux profils de surfaces rugueuses (voir TAB. 4.3)

$$\Phi_n = \Phi_{-n}.$$

Ce paramètre-erreur nous donne un critère pour évaluer l'approximation du couple propre. Les trois comparaisons précédentes sont des indications sur la pertinence de l'hypothèse. Avec ce paramètre, l'erreur relative est quantifiée mode par mode et pour différents profils de surface.

Tout d'abord, l'illustration sur les valeurs propres montre que les petites valeurs propres calculées numériquement ne correspondent pas à celles calculées analytiquement, et par conséquent, qu'elles sont toujours mal représentées. Pour vérifier cette conclusion sur le couple propre, nous considérons deux types de surfaces avec des pas de discrétisation différents.

f=1GHz	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 0a	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 9.51\lambda$	$N = 1000$
Cas 0b	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 9.51\lambda$	$N = 500$
Cas 0c	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 9.51\lambda$	$N = 250$
Cas 2b	Gaussien $ks = 1$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 9.51\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 2c	Gaussien $ks = 1$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 9.51\lambda$ $kl = 8$	$N = 500$

TABLE 4.4 – Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur l'information spectrale : influence de la discrétisation

Pour s'affranchir des tailles différentes, nous considérons le numéro n du mode relativement à la taille N (index = $100 n/N$). La FIG. 4.8 montre l'erreur relative en fonction de l'index du mode.

La première remarque concerne l'effet de la discrétisation sur l'erreur d'approximation. Pour les deux types de surfaces, l'erreur est la même quelque soit la discrétisation admissible choisie.

La deuxième remarque concerne les modes qui peuvent être considérés comme une approximation valable. Le cas de la surface plane permet d'évaluer l'erreur numérique commise dans Eq. (4.13). L'erreur commise par les modes de grand index (correspondant à des petites valeurs

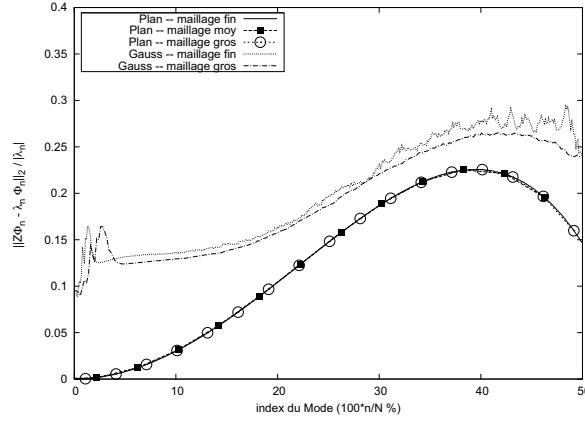


FIGURE 4.8 – Validité de l'approximation sur le couple propre pour différents profils de surfaces : Plan avec un pas de maillage de $\lambda/105$ (Cas 0a), Plan avec un pas de maillage de $\lambda/52.5$ (Cas 0b), Plan avec un pas de maillage de $\lambda/26.25$ (Cas 0c), Gaussien avec un pas de maillage de $\lambda/105$ (Cas 2b), Gaussien avec un pas de maillage de $\lambda/52.5$ (Cas 2c) (voir TAB. 4.4)

propres) est plus importante que celle commise par les premiers (en terme d'index). La conclusion tirée de l'illustration sur les valeurs propres est confirmée : seul les modes de valeurs propres de plus grand module sont bien représentés. De plus, l'expression des modes Φ_n correspond à des exponentielles, donc 3 points par longueur d'onde est le minimum acceptable pour représenter ses variations ; c'est-à-dire, avec Δx le pas de discrétisation moyen, la relation pour bien décrire le n^e mode est,

$$\frac{1}{\Delta x} > 3 \frac{\alpha_n}{2\pi} \quad \text{ou encore} \quad \frac{n}{L} < \frac{1}{3} \left(\frac{N}{L} - \frac{1}{\lambda} \sin \theta^{\text{inc}} \right) \quad \text{c'est à dire} \quad n \lesssim \frac{N}{3}$$

Par conséquent, seuls les 30% premiers modes sont correctement représentés par la discrétisation. Ainsi, les modes pour un index supérieur à 30% étant mal représentés numériquement, l'erreur que nous observons n'a pas de sens d'un point de vue numérique. C'est une conséquence du théorème de Shannon.

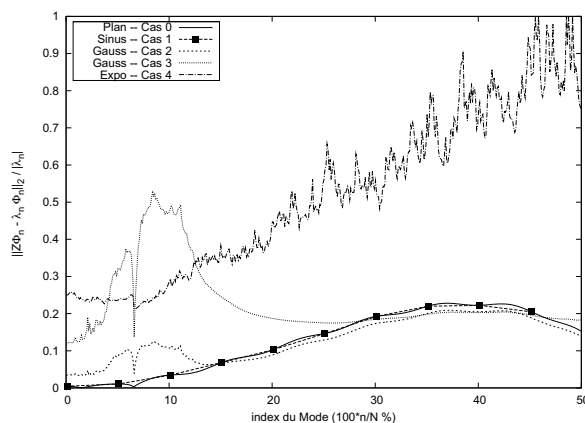
Pour finir, l'influence de la perturbation sur l'approximation est étudiée. L'information spectrale est comparée sur quatre profils de surfaces (voir TAB. 4.5).

La FIG. 4.9 compare l'erreur relative en fonction de l'index du mode pour les surfaces de la TAB. 4.5. Plus la surface présente des irrégularités et moins pertinente l'hypothèse est. Le cas 1 (Sinus) a une hauteur faible ainsi qu'une variation lente, son couple propre est très proche de celui du plan (Cas 0). Les deux cas de surfaces à auto-corrélation gaussienne (Cas 2 et 3) montre que plus la surface présente une hauteur importante et moins l'approximation est pertinente. De plus, la zone où l'erreur est la plus importante est celle où les modes de Floquet Φ_n sont représentés correctement. Le facteur limitant est la hauteur qui va entraîner une erreur de phase. Cependant, la courbe pour la surface à auto-corrélation exponentielle (Cas 4) montre que la vitesse de variation (pente) est un facteur tout aussi limitant.

Par ailleurs, un pic (discontinuité) est vu pour le mode L/λ (i.e., index du mode $(L/\lambda) \times (100/N) = 6.57\%$ dans ce cas). Cette valeur correspond à une singularité dans le spectre de la matrice impédance associée : pour un index de mode inférieur à ce seuil les valeurs propres sont purement imaginaires (modes de Floquet propagatifs) et pour un index de mode supérieur à ce seuil les valeurs propres sont purement réelles (modes de Floquet évanescents).

f=1GHz	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 0	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$	$N = 1000$
Cas 1	Sinus ($ks = 2$)	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $h = \sqrt{2}/(2\pi) \lambda$	$N = 1000$ $\omega_x = 2\pi/L$
Cas 2	Gaussien $ks = 1$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 3	Gaussien $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 4	Exponentiel $ks = 0.75$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$

TABLE 4.5 – Caractéristiques des surfaces pour l’illustration numérique sur l’information spectrale

FIGURE 4.9 – Validité de l’approximation du couple propre pour différents profils de surfaces : Plan (Cas 0), Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 1), Gaussien $ks = 1$ (Cas 2), Gaussien $ks = 2$ (Cas 3), Exponentiel $ks = 0.75$ (Cas 4) (voir TAB. 4.5)

4.2.3 Synthèse

Nous avons exprimé une évaluation analytique du couple propre (valeur propre et vecteur propre) de la matrice impédance associée à une plaque périodisée. Puis nous avons numériquement justifié que cette information spectrale donne une approximation des couples propres associés à des perturbations du cas idéal, en l’occurrence des surfaces rugueuses aléatoires. La validité de cette approximation est limitée par :

- le ratio entre la pente et la hauteur,
- la discrétisation : seuls 30% des modes de Floquet sont numériquement représentatifs.

Pour finir, l’approximation de la surface rugueuse par un plan (ordre 0) ne suffit évidemment pas pour calculer le courant, il est utilisé pour enrichir l’information dans l’espace de Krylov via le préconditionneur.

4.3 Construction du Préconditionneur Physique

Généralement, chercher à construire un preconditionneur revient à chercher une approximation de l'inverse de la matrice considérée. Par conséquent, nous cherchons une approximation de la matrice $Y = Z^{-1}$.

4.3.1 Construction du preconditionneur

L'information spectrale calculée par la plaque périodique est proche de celle d'une surface *peu* rugueuse. Cette information spectrale va être injectée lors de la résolution itérative du système linéaire par le biais du preconditionneur. Nous cherchons à orienter la recherche dans l'espace de Krylov.

À partir de l'information spectrale approchée, nous souhaitons construire une approximation de la matrice admittance Y . Bien entendu, connaissant les modes propres associés à $Z^{(0)}$ et par conséquent ceux associés à $Y^{(0)}$, une approximation immédiate de la matrice admittance Y peut être donnée. Étant uniquement intéressé par le produit matrice-vecteur, pour tout vecteur v , le vecteur w résultant du produit matrice-vecteur peut s'écrire,

$$w = Y^{(0)}v = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} (v | \Phi_n) \Phi_n \quad (4.16)$$

avec $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire usuel de \mathbb{C}^N .

Toutefois, Eq. (4.16) présente un inconvénient, son coût numérique; ou autrement dit, la contribution de certains modes est ajoutée mais cette information apportée pourrait être négligée sans trop détériorer l'approximation. Nous souhaitons ne conserver que certains modes contribuant effectivement.

Tout d'abord, nous définissons $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$ un sous-espace de \mathbb{C}^N engendré par les vecteurs Φ_n , i.e.,

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}} = \text{span} \left\{ \Phi_n, n \in \mathcal{M} \right\}$$

où \mathcal{M} est une liste de M éléments. De plus, la matrice rectangulaire associée à ce sous-espace est notée $V_{\mathcal{M}}$. Pour finir, la matrice diagonale (donc carrée) contenant les valeurs propres λ_n est notée $D_{\mathcal{M}}$.

Tout vecteur v peut se décomposer en deux vecteurs : l'un dans le sous-espace $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$, et l'autre dans le sous-espace $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}^{\perp}$ (orthogonal de $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$), i.e.,

$$v = v|_{\mathcal{V}_{\mathcal{M}}} + (v - v|_{\mathcal{V}_{\mathcal{M}}}) = \sum_{n \in \mathcal{M}} (v | \Phi_n) \Phi_n + \Delta v \quad (4.17)$$

où Δv appartient à $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}^{\perp}$.

Le produit matrice-vecteur ne conservant que les modes *contributifs* s'écrit,

$$w = Y_{\mathcal{M}}v = \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{1}{\lambda_n} (v | \Phi_n) \Phi_n \quad (4.18)$$

et il doit être complété pour couvrir tout l'espace de recherche. Se limiter à Eq. (4.18) revient à limiter à M la dimension de l'espace de Krylov. Cette limitation peut empêcher de trouver la solution : rien ne nous dit que la solution appartient uniquement à $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$. Le vecteur le plus facile à construire pour compléter l'espace de recherche est un vecteur appartenant à l'espace $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}^{\perp}$. Ainsi, en utilisant Eq. (4.17), le produit matrice-vecteur du preconditionneur est,

$$\begin{aligned}
 w = Y_{\mathcal{M}}^{\varepsilon} v &= Y_{\mathcal{M}} v + \varepsilon \Delta v \\
 &= \sum_{n \in \mathcal{M}} \frac{1}{\lambda_n} (v | \Phi_n) \Phi_n + \varepsilon v - \varepsilon \sum_{n \in \mathcal{M}} (v | \Phi_n) \Phi_n \\
 &= \sum_{n \in \mathcal{M}} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \varepsilon \right) (v | \Phi_n) \Phi_n + \varepsilon v
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Le paramètre ε est un paramètre de contrôle. Nous cherchons à orienter la recherche principalement dans l'espace $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$, et ce paramètre "contrôle" l'importance donnée dans les autres directions.

Eq. (4.19) s'écrit matriciellement,

$$Y_{\mathcal{M}}^{\varepsilon} = V_{\mathcal{M}} (D_{\mathcal{M}}^{-1} - \varepsilon I_{\mathcal{M}}) V_{\mathcal{M}}^H + \varepsilon I_N \tag{4.20}$$

et sans l'ajout des termes relatif à ε , la matrice $Y_{\mathcal{M}}^{\varepsilon}$ serait singulière, donc elle ne représenterait pas une approximation pertinente de la matrice admittance Y .

Synthèse

Nous avons construit un preconditionneur basé sur une approximation spectrale de la matrice admittance Y . Ce preconditionneur oriente la recherche dans l'espace de Krylov. Cette orientation est faite suivant une considération physique : la solution est *proche* d'une combinaison de modes de Floquet. Donc nous imposons les directions en projetant sur les modes de Floquet d'intérêt (espace $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$).

Dans le preconditionneur Eq. (4.19), le calcul numériquement le plus onéreux correspond à l'évaluation des modes Φ_n . Pour M un nombre raisonnable de modes, les vecteurs Φ_n sont calculés à l'initialisation du preconditionneur puis stockés. Par ailleurs, le produit matrice-vecteur ainsi défini s'exécute en $O(MN)$ opérations.

4.3.2 Heuristique : choix de ε , \mathcal{M} et M

Le preconditionneur ainsi construit dépend de trois paramètres. Dans cette partie, nous discutons donc du choix de ces paramètres principalement sur des critères heuristiques.

Heuristique : choix de ε

Nous rappelons que le vecteur Δv a été ajouté pour compléter l'espace de recherche. Sans ce vecteur ajouté et contrôlé par le paramètre ε , le preconditionneur correspond une matrice singulière. Par conséquent, plus le paramètre ε est proche de 0 et plus le preconditionneur possède un caractère singulier.

Le conditionnement en norme 2 d'une matrice Z est défini par,

$$\kappa_2(Z) = \|Z\|_2 \|Y\|_2 = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \tag{4.21}$$

avec $\|Z\|_2$ la norme euclidienne de la matrice et $Y = Z^{-1}$.

Dans certaines méthodes itératives de type Krylov (e.g., Gradient Conjugué (CG) voir [60] section 6.7), le nombre d'itérations nécessaires pour avoir la précision requise sur la solution

est directement relié au conditionnement de la matrice (e.g., décrit pour le CG dans [60] section 6.11.3). Généralement, plus le conditionnement est proche de 1, et plus l'algorithme itératif converge en peu d'itérations. Nous cherchons donc à avoir le conditionnement du système préconditionné le plus proche de 1.

Dans cette section uniquement, pour simplifier les notations, les valeurs propres associées à $Z^{(0)}$ sont considérées rangées dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N| > 0$$

et la liste \mathcal{M} est constituée de ces M plus grandes valeurs propres.

Il faut remarquer que la matrice $Z^{(0)}$ se décompose comme,

$$Z^{(0)} = V_N \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} V_N^H$$

et le préconditionneur défini par Eq. (4.20) s'écrit aussi,

$$Y_{\mathcal{M}}^\varepsilon = V_N \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1/\lambda_M & \\ & & & \varepsilon \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon \end{pmatrix} V_N^H$$

Par conséquent, sans oublier que $V_N V_N^H = I_N$, il vient directement,

$$Z^{(0)} Y_{\mathcal{M}}^\varepsilon = V_N \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \varepsilon \lambda_{M+1} & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon \lambda_N \end{pmatrix} V_N^H$$

Ce dernier résultat pourrait aussi se déduire de Eq. (4.20) et s'exprimer par,

$$Z^{(0)} Y_{\mathcal{M}}^\varepsilon V_{\mathcal{M}} = V_{\mathcal{M}} \quad \text{et} \quad Z^{(0)} Y_{\mathcal{M}}^\varepsilon V_{\overline{\mathcal{M}}} = \varepsilon V_{\overline{\mathcal{M}}} D_{\overline{\mathcal{M}}}$$

avec $\overline{\mathcal{M}}$ la liste complémentaire à \mathcal{M} .

Donc, le conditionnement de cette matrice $Z^{(0)} Y_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ ainsi formée est,

$$\kappa_2(Z^{(0)} Y_{\mathcal{M}}^\varepsilon) = \frac{\max(|\varepsilon \lambda_{M+1}|, 1)}{\min(1, |\varepsilon \lambda_N|)}$$

Pour avoir ce conditionnement égal à 1, il faut choisir le paramètre ε tel que,

$$\left. \begin{array}{l} |\varepsilon \lambda_{M+1}| \leq 1 \\ 1 \leq |\varepsilon \lambda_N| \end{array} \right\} \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{|\lambda_N|} \leq |\varepsilon| \leq \frac{1}{|\lambda_{M+1}|}$$

qui n'est pas possible puisque $|\lambda_N| \leq |\lambda_{M+1}|$. Il faut donc choisir une des deux alternatives pour l'inégalité. De plus, parmi ces deux alternatives, seules deux possibilités minimisent le conditionnement,

$$\left. \begin{array}{l} \text{soit } \varepsilon = \frac{1}{\lambda_{M+1}} \\ \text{soit } \varepsilon = \frac{1}{\lambda_N} \end{array} \right\} \text{ donne } \kappa_2(Z^{(0)}Y_{\mathcal{M}}^\varepsilon) = \frac{|\lambda_{M+1}|}{|\lambda_N|}$$

Finalement, nous choisissons,

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda_{M+1}} \quad (4.22)$$

où λ_{M+1} représente la plus grande valeur propre n'appartenant pas à la liste \mathcal{M} . Ce choix est motivé par deux remarques portant sur des considérations numériques :

1. comme nous l'avons illustré précédemment (FIG. 4.6), les valeurs propres de plus petit module ne sont pas évaluées correctement,
2. dans la proposition du produit matrice-vecteur préconditionné Eq. (4.19), le paramètre ε est soustrait aux valeurs propres de la liste \mathcal{M} . C'est pourquoi, pour que cette soustraction soit numériquement représentative, le paramètre ε doit être du même ordre de grandeur que ces valeurs propres.

Pour finir, il est important de préciser que le conditionnement n'est qu'un élément indicatif pour la convergence des méthodes itératives, mais il n'est généralement pas suffisant. Dans le cas de l'algorithme CG, le conditionnement ne donne pas de prédiction sur le nombre d'itérations nécessaires mais une borne. Dans le cas de l'algorithme GMRES, aucun critère significatif donnant une "règle" sur la convergence n'est été démontré.

Heuristique : choix de \mathcal{M} et M

Maintenant, le choix de la liste \mathcal{M} , c'est-à-dire les modes à considérer ainsi que de leur nombre, est discuté dans cette section.

Le premier choix possible suit une considération physique : le champ loin de la surface nous intéresse pour calculer la SER ou les paramètres de diffusion, donc il faut orienter l'espace de recherche dans la direction des modes propagatifs, ceux qui auraient une contribution effective en champ lointain. La liste associée à ce choix est notée \mathcal{M}_1 ,

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ n \text{ tel que } -\frac{L}{\lambda}(1 + \sin \theta^{\text{inc}}) < n < \frac{L}{\lambda}(1 - \sin \theta^{\text{inc}}) \right\}$$

Par ailleurs, pour que sa taille soit bien de M éléments, elle est complétée par autant de modes évanescents que nécessaires. Ces modes ajoutés sont choisis par un indice n alternativement positif et négatif.

Le deuxième choix possible suit une considération plus algébrique : les M modes de plus grand module sont choisis. La motivation sous-jacente est de réduire au mieux le conditionnement. La liste associée à ce choix est notée \mathcal{M}_2 ,

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ n \text{ tel que Tri décroissant de } |\lambda_n| \right\}$$

Le tri utilisé est un tri par insertion. Son nombre d'opérations le rend moins performant qu'un tri rapide (*quicksort*). Cependant, son implémentation est plus facile et surtout les valeurs propres sont presque rangées, choses qui jouent à son avantage.

	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 1	Gaussien $ks = 1$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$l = 32.8\lambda$ $kl = 8$	$N = 500$
Cas 2	Gaussien $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$l = 32.8\lambda$ $kl = 8$	$N = 500$
Cas 3	Gaussien $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$l = 32.8\lambda$ $kl = 5$	$N = 500$

TABLE 4.6 – Caractéristiques des surfaces pour déterminer le choix de \mathcal{M} et M

Pour évaluer ces deux listes, nous considérons les matrices impédances associées aux surfaces caractérisées dans le TAB. 4.6. L’algorithme GMRES préconditionné à droite est utilisé pour résoudre le système linéaire. GMRES est utilisé sans restart, et le critère d’arrêt est fixé pour un résidu de 10^{-4} . La partie de gauche de la FIG. 4.10 montre le nombre d’itérations nécessaire pour atteindre le résidu fixé en fonction du nombre de modes (exprimé relativement à la taille de matrice). La partie de droite montre le Temps CPU nécessaire pour atteindre ce résidu aussi en fonction du nombre de modes. Ce Temps CPU inclut l’initialisation du préconditionneur. Quand le nombre de modes vaut 0, cela signifie que le système linéaire n’est pas préconditionné; c’est le résultat obtenu par GMRES seul (le tri de la liste \mathcal{M}_2 est quand même fait).

L’incidence pour les courbes présentées sur la FIG. 4.10 est normale et celle pour les courbes présentées sur la FIG. 4.11 est de 70° .

L’ajout de modes ne fait que diminuer le nombre d’itérations nécessaire. Les deux choix \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 donnent des résultats très différents, et les conclusions sont liées à l’incidence.

Jusqu’à environ 20%, la stratégie 1, considérant seulement les modes propagatifs, n’a presque aucune influence sur la convergence. Quant à la stratégie 2, conservant les modes de plus grands modules, elle réduit directement le nombre d’itérations.

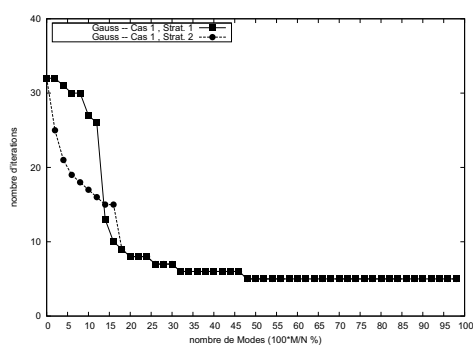
De plus, dépassé un seuil d’environ 20%, les deux stratégies réduisent notablement le nombre d’itérations nécessaires. Ensuite les deux stratégies ne réduisent plus le nombre d’itérations ou peu. Un certain seuil atteint (qui dépend de l’angle d’incidence), les modes sélectionnés dans les deux listes \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont similaires : la stratégie de sélection est différente mais la liste finale est identique.

Dépassé les 35-40%, l’ajout de mode n’apporte plus d’information. La réduction du nombre d’itérations nécessaires pour avoir un résidu fixé est bloquée par un seuil. Une explication de ce seuil serait la mauvaise représentation numérique des modes illustrée précédemment (FIG. 4.8). Le préconditionneur a donc une limite, en terme de performances, fixée par la discrétisation des modes.

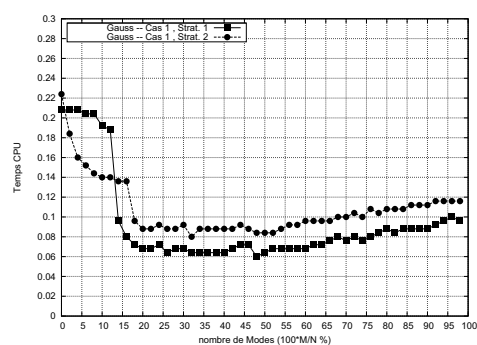
Au regard du nombre d’itérations, la stratégie 2 est la plus performante. Elle nécessite moins de modes pour obtenir une réduction significative.

Concernant le Temps CPU, il suit les mêmes variations que le nombre d’itérations. Il correspond à deux produits matrice-vecteur, l’un classique et l’autre préconditionné, pour chaque itération. La stratégie 2 consomme en plus du temps dans la phase de tri. Dans la zone 0 à 20-30% de modes, en dépit du surcoût du tri, la stratégie 2 est plus performante que la stratégie 1. Cependant sortie de cette zone, le coût du tri la rend moins performante.

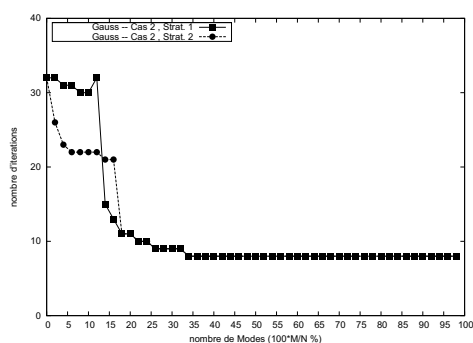
Finalement, de l’analyse des temps CPU nous déduisons que la stratégie 1 avec 30% est la



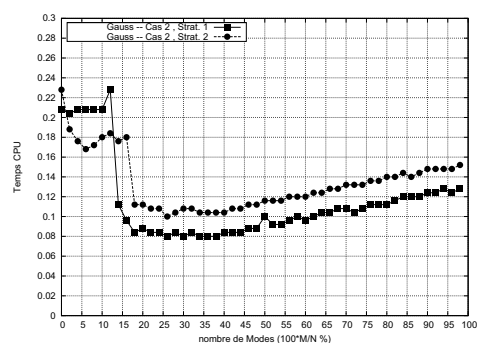
(a) Nombre d'itérations – Cas 1



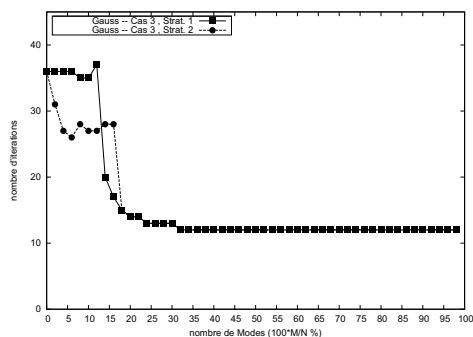
(b) Temps CPU – Cas 1



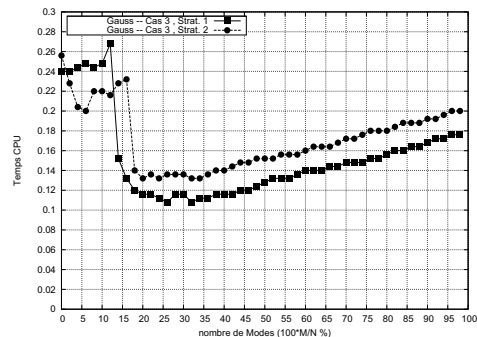
(c) Nombre d'itérations – Cas 2



(d) Temps CPU – Cas 2



(e) Nombre d'itérations – Cas 3

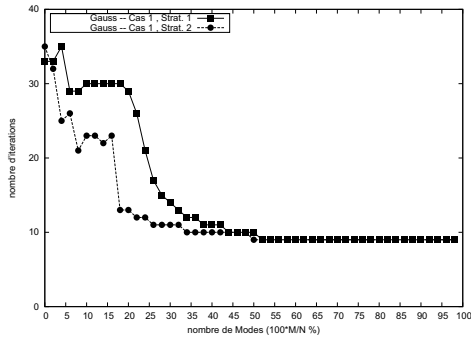


(f) Temps CPU – Cas 3

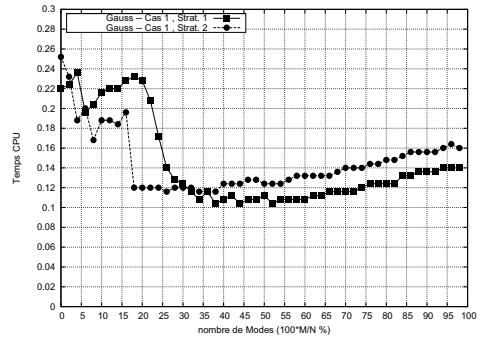
FIGURE 4.10 – Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour avoir un résidu de 10^{-4} et du Temps CPU total correspondant en fonction du nombre de modes considérées pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.6), à incidence normale

plus performante.

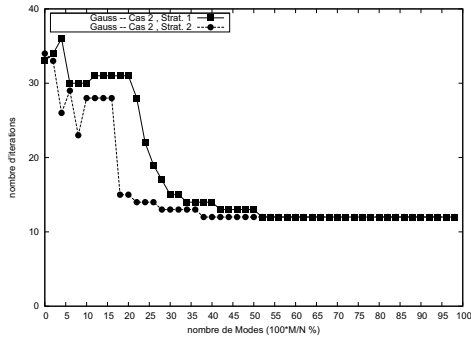
Pour finir, dépassé les 30-35% de modes, le nombre d'itérations n'est plus réduit. Cependant des modes sont ajoutés, et par conséquent le produit matrice-vecteur préconditionné coûte numériquement plus cher. C'est pourquoi le Temps CPU augmente dépassé ce seuil de 30-35%. Du temps est dépensé pour calculer la contribution de modes qui n'apportent pas d'information. Dans cette zone, le surcoût du tri est bien visible.



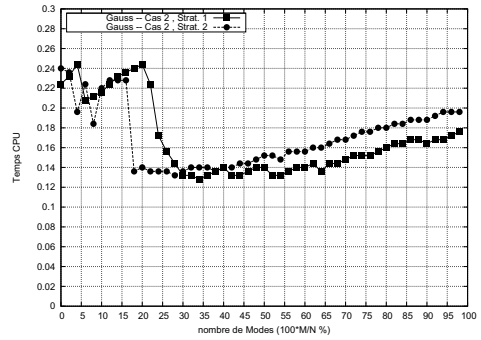
(a) Nombre d'itérations – Cas 1



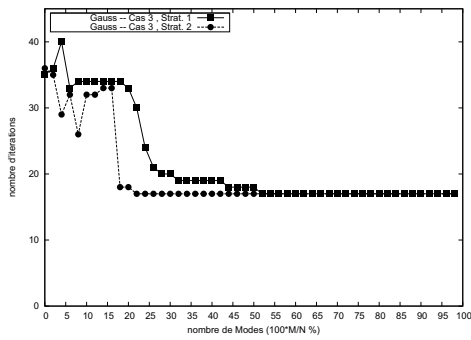
(b) Temps CPU – Cas 1



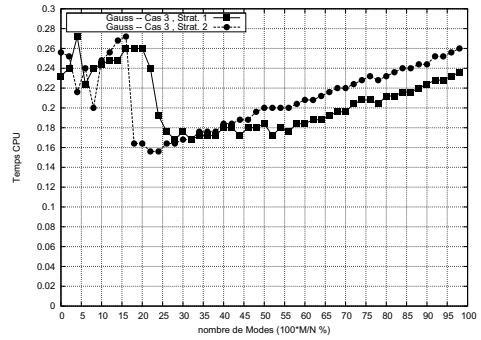
(c) Nombre d'itérations – Cas 2



(d) Temps CPU – Cas 2



(e) Nombre d'itérations – Cas 3



(f) Temps CPU – Cas 3

FIGURE 4.11 – Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour avoir un résidu de 10^{-4} et du Temps CPU total correspondant en fonction du nombre de modes considérés pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.6), à incidence de 70°

Un troisième choix serait envisageable : seuls les modes ayant une “qualité” suffisante sont conservés. La liste associée à ce choix est notée \mathcal{M}_3 ,

$$\mathcal{M}_3 = \left\{ n \text{ tel que } \frac{\|Z\Phi_n - \lambda_n\Phi_n\|_2}{|\lambda_n|} < \varepsilon_{\text{tol}} \right\}$$

Néanmoins, même si cette stratégie apparaît comme la plus judicieuse, elle ne peut pas être performante d’un point de vue numérique. Dans le meilleur des cas, M produits matrice-vecteur sont nécessaires pour initialiser le preconditionneur, ce qui devient rédhibitoire sur le temps CPU total. Pour fixer les idées, dans le cas d’une surface gaussienne (e.g. le cas 3 défini p.103), l’algorithme GMRES converge en 38 itérations (pour un résidu à 10^{-4}).

(s)	GMRES	$M = 10\% N$	$M = 20\% N$	$M = 30\% N$
Temps CPU	4.14	1.22	2.44	3.66

TABLE 4.7 – Comparaison du Temps CPU requis par GMRES pour avoir un résidu de 10^{-4} avec le Temps CPU requis pour évaluer la “qualité” de M modes de Floquet (initialisation de \mathcal{M}_3)

Le TAB. 4.7 donne le temps total mis par GMRES pour obtenir la convergence à 10^{-4} et les temps pour uniquement initialiser le preconditionneur dans la stratégie 3. D’après les résultats de la FIG. 4.10, c’est autour de 30% de modes que les performances en terme de temps de calcul sont les meilleures. Par conséquent, suivant ces ratios de performances, nous évaluons en incidence normale, pour le preconditionneur de la stratégie 3, le temps total mis pour atteindre un résidu de 10^{-4} à approximativement : $0.06/0.20 \times 4.14 + 3.66 = 4.90$, et à approximativement : $0.12/0.22 \times 4.14 + 3.66 = 5.92$ pour une incidence de 70° .

Par ailleurs, la FIG. 4.9 montre que les modes dans la zone 0-30% ne respecte généralement pas le critère de \mathcal{M}_3 et que ceux de la zone supérieure à 30% sont mal représentés numériquement.

Synthèse

Pour résumer, le preconditionneur construit dépend de trois paramètres :

- le paramètre ε qui est raisonnablement fixé à $1/\lambda_{M+1}$,
- le nombre de modes à considérer. Nous avons numériquement établi que $M = 30\%$ donne les meilleures performances,
- les modes à considérer \mathcal{M} . Nous avons numériquement établi que la liste \mathcal{M}_1 est la plus performante pour un nombre de modes fixé à 30%.

Les performances du preconditionneur peuvent maintenant être explorées.

4.3.3 Performances

Afin de déterminer le domaine où le preconditionneur est performant comparé à GMRES, les historiques de convergence de GMRES et de GMRES preconditionné sont d'abord tracés pour plusieurs profils de surfaces. Puis la dépendance de l'angle d'incidence est examinée pour deux profils de surfaces. Pour finir, le domaine de performances pour les surfaces aléatoires à auto-corrélation gaussienne et exponentielle est établi.

Historique de convergence

Nous comparons l'évolution du résidu (défini par Eq. (4.8)) au fil des itérations. Les caractéristiques des surfaces utilisés sont regroupées dans le TAB. 4.8. La fréquence est de 1GHz et l'incidence est normale.

f=1GHz	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 1	Gaussien $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 2	Gaussien $ks = 4$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 3	Gaussien $ks = 5$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 5$	$N = 1000$
Cas 4	Gaussien $ks = 5$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 131.4\lambda$ $kl = 5$	$N = 2000$
Cas 5	Exponentiel $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 6	Gaussien $ks = 5$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 10$	$N = 1000$

TABLE 4.8 – Caractéristiques des surfaces pour comparer les historiques de convergence

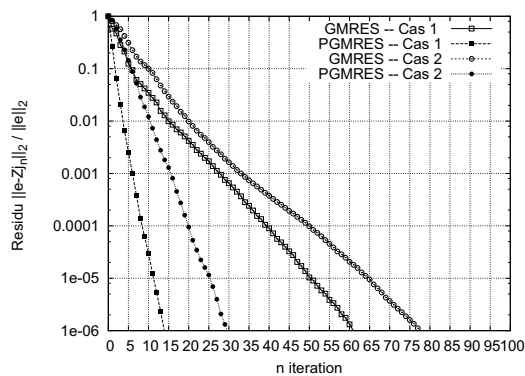
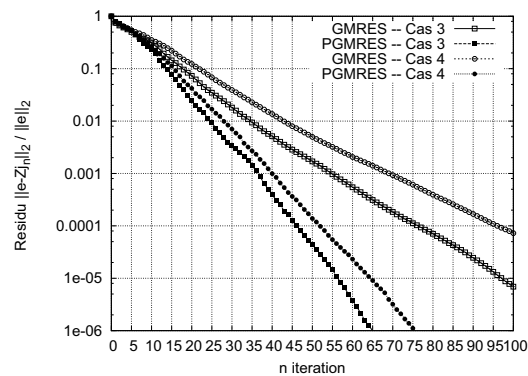
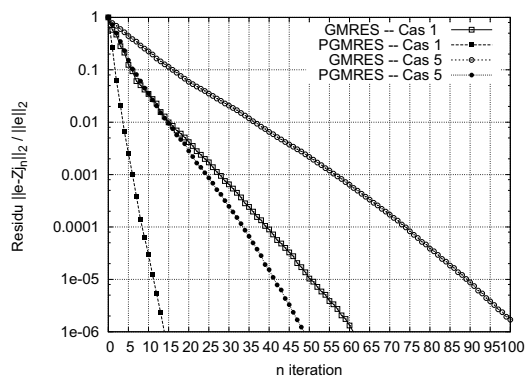
Les différents historiques de convergence sont regroupés dans la FIG. 4.12. Sur les cas présentés ici, le preconditionneur réduit toujours le nombre d'itérations. Par ailleurs, la rugosité, en terme de hauteur et de vitesse de dégradation, dégrade la convergence, tant sur GMRES que sur GMRES preconditionné.

Sur la FIG. 4.12(a), les paramètres sont égaux, sauf la hauteur rms qui est le double l'une de l'autre. La convergence du système preconditionné est plus sensible à ce paramètre que GMRES seul. Ceci est lié à l'hypothèse : les modes de Floquet sont d'autant moins une approximation raisonnable du couple propre que la hauteur est importante.

La FIG. 4.12(b) montre l'influence de la longueur de la surface sur la convergence. Pour garder un pas de maillage constant, la taille de la surface est augmentée. La convergence de GMRES avec le preconditionneur est moins dégradée que celle de GMRES seul.

Ensuite, deux profils aléatoires différents sont comparés sur la FIG. 4.12(c) : l'un est à auto-corrélation gaussienne et l'autre à auto-corrélation exponentielle, et ils ont les mêmes propriétés statistiques. Toutefois, la surface à auto-corrélation exponentielle comporte des variations très rapides comparée à une surface à auto-corrélation gaussienne. Toutes les convergences sont dégradées. Comparativement à GMRES, la convergence du preconditionneur est légèrement plus dégradée. Ceci s'explique par le fait que l'information spectrale du plan est une moins bonne approximation pour les surface ayant des variations rapides.

Pour finir, la FIG. 4.12(d) représente la convergence pour deux surfaces dont la longueur de corrélation est le double l'une de l'autre. Comme on peut s'y attendre, la pente de la surface dégrade la convergence, et dans les deux cas la dégradation est du même ordre.

(a) Gauss. – Cas 1 et 2 : $ks = 2$ et $ks = 4$ (b) Gauss. – Cas 3 et 4 : $N = 1000$ et $N = 2000$ 

(c) Gauss. & Exp. – Cas 1 et 5

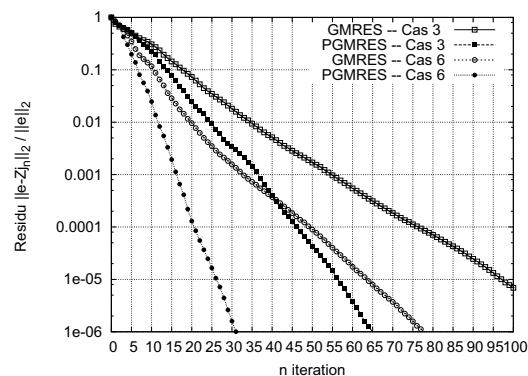
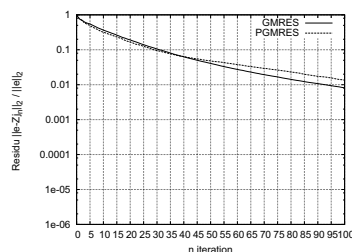
(d) Gauss. – Cas 3 et 6 : $kl = 5$ et $kl = 10$

FIGURE 4.12 – Historique de convergence pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.8)

Par ailleurs, quand la surface comporte certain type d'irrégularités, le preconditionneur devient inefficace, voir il dégrade la convergence. Par exemple, la FIG. 4.13 montre l'historique de

FIGURE 4.13 – Historique de convergence pour une surface à auto-corrélation exponentielle de paramètres : $N = 1000$, $L = 65.7\lambda$, $ks = 4$, $kl = 5$

convergence pour une surface à auto-corrélation exponentielle de paramètres : $ks = 4$ et $kl = 5$. GMRES ne converge pas et le preconditionneur proposé non plus.

Comparaison de la réduction faite par le preconditionneur

Le TAB. 4.9 compare le temps total mis pour atteindre un résidu de 10^{-4} par GMRES et celui mis avec le preconditionneur pour les surfaces précédentes (TAB. 4.8). Pour quantifier la réduction, nous définissons le paramètre,

$$\rho = 1 - \frac{N_{iter}^{PGMRES}}{N_{iter}^{GMRES}} \quad \text{ou} \quad \rho' = 1 - \frac{t_{tot}^{PGMRES}}{t_{tot}^{GMRES}}$$

avec N_{iter} et t_{tot} le nombre d'itérations et le temps total nécessaire pour atteindre un résidu de 10^{-4} . Pour le système preconditionné, le temps total tient compte de l'initialisation.

(s)	GMRES		PGMRES		Réduction (ρ)	
	Temps CPU	Itération	Temps CPU	Itération	Temps CPU	Itération
Cas 1	0.220	40	0.160	9	0.27	0.775
Cas 2	0.284	50	0.256	20	0.10	0.6
Cas 3	0.440	77	0.504	47	-0.14	0.39
Cas 5	0.416	74	0.388	34	0.067	0.54
Cas 6	0.284	50	0.268	21	0.056	0.58

TABLE 4.9 – Comparaison du Temps CPU entre GMRES et GMRES preconditionné (surfaces du TAB. 4.8)

Dans les cas présentés ici, le preconditionneur apporte toujours une réduction significative sur le nombre d'itérations : de 39% à 77.5%. Concernant la réduction sur le temps total, les performances sont plus mitigées. La gain est d'environ 6% et dans le meilleur des cas de 27%. Pour une surface très rugueuse (cas 3 : auto-corrélation gaussienne de paramètre $ks = 5$ et $kl = 5$), le preconditionneur diminue le nombre d'itérations mais le temps total lui n'est pas réduit. L'ajout du produit matrice-vecteur preconditionné à chaque itération n'est pas compensé par la réduction du nombre d'itérations.

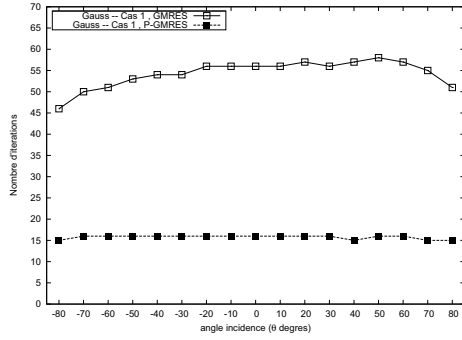
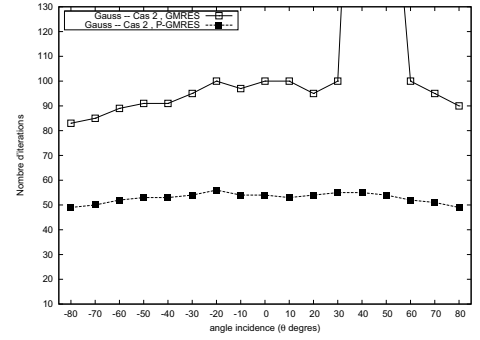
Influence de l'angle d'incidence

Nous déterminons l'influence de l'angle d'incidence sur la convergence, c'est-à-dire sur le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un résidu de 10^{-4} en fonction de l'angle d'incidence.

f=1GHz	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 1	Gaussien $ks = 2$	$\lambda = 0.3m$	$L = 39.61\lambda$ $kl = 5$	$N = 1000$
Cas 2	Gaussien $ks = 5$	$\lambda = 0.3m$	$L = 39.61\lambda$ $kl = 5$	$N = 1000$

TABLE 4.10 – Caractéristiques des surfaces pour déterminer l'influence de l'angle d'incidence

La matrice impédance dépend de l'angle d'incidence par l'intermédiaire de la fonction de Green périodique. Le preconditionneur dépend des modes de Floquet, et sa convergence n'est pas détériorée par une forte incidence. La FIG. 4.14 montre que l'angle d'incidence influe peu sur la vitesse de convergence.

(a) Gaussienne $ks = 2$, $kl = 5$ (b) Gaussienne $ks = 5$, $kl = 5$ FIGURE 4.14 – Nombre d'itérations pour avoir un résidu de 10^{-4} en fonction de l'angle d'incidence : surface à auto-corrélation gaussienne (voir TAB. 4.10)

Domaine de performances

Pour finir, nous comparons le nombre d'itérations pour atteindre un résidu de 10^{-4} pour une surface à auto-corrélation gaussienne en fonction de sa hauteur quadratique moyenne. Trois profils de longueur de corrélation différente sont étudiés. Le TAB. 4.11 rassemble les paramètres des surfaces.

f=1GHz	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 1	Gaussien	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 107.8\lambda$	$N = 5000$
			$kl = 5$	
Cas 2	Gaussien	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 107.8\lambda$	$N = 5000$
			$kl = 8$	
Cas 3	Gaussien	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 107.8\lambda$	$N = 5000$
			$kl = 10$	

TABLE 4.11 – Caractéristiques des surfaces à auto-corrélation gaussienne pour évaluer les performances du preconditionneur

La FIG. 4.15 montre l'évolution du nombre d'itérations nécessaire pour atteindre un résidu de 10^{-4} en fonction de la hauteur rms normalisée (ks). En premier lieu, le preconditionneur améliore toujours la convergence pour une surface gaussienne suffisamment étendue (en terme de longueur d'onde) dans un large domaine de hauteur rms.

À longueur de corrélation fixée, la hauteur rms dégrade la convergence, dans la résolution GMRES seul comme dans la résolution GMRES avec le preconditionneur. À hauteur rms fixée, les variations plus rapides ($kl = 10$ vers $kl = 5$) dégradent les performances du preconditionneur, comparativement à GMRES seul, et réciproquement des variations plus faibles (kl de plus en plus grand) donnent une plus grande réduction. Finalement, la validité de l'hypothèse se retrouve dans les performances : plus la surface est rugueuse, moins l'approximation par un plan se justifie et par conséquent moins bonnes sont les performances.

Les performances sont liées au rapport entre la hauteur et la variation des rugosités. Toutefois, il est difficile d'exhiber un critère. Pour une hauteur rms normalisée ks inférieure à 2, quelque soit longueur de corrélation, le preconditionneur donne le même nombre d'itérations. En fixant

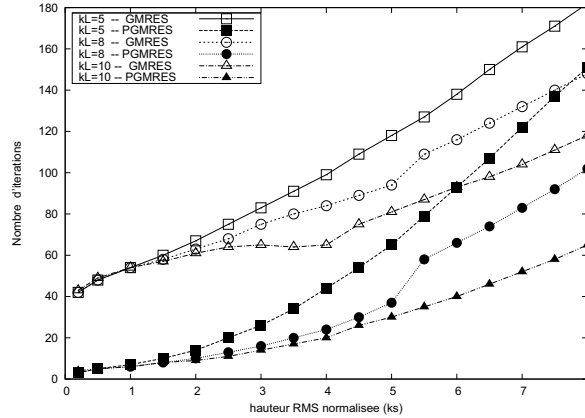


FIGURE 4.15 – Nombre d’itérations pour avoir un résidu de 10^{-4} en fonction de la hauteur quadratique moyenne : surface à auto-corrélation gaussienne (voir TAB. 4.11)

le rapport, par exemple $ks/kl = 1$, pour $ks = 2$, $ks = 3$ et $ks = 5$ (avec $N = 1000$ et $L = 65.7\lambda$), la réduction en terme d’itérations est respectivement de 56%, 49% et 39%.

Pour finir, remarquons que le nombre d’itérations nécessaires pour atteindre un résidu de 10^{-4} est approximativement du même ordre pour une surface à auto-corrélation gaussienne de longueur $L = 107.8\lambda$ et de taille $N = 5000$ que pour une surface à auto-corrélation gaussienne de longueur $L = 65.7\lambda$ et de taille $N = 1000$ (FIG. 4.12). Ceux sont les caractéristiques statistiques de la surface qui influent plus que sa longueur ou sa taille. Cette remarque est d’ordre général, car la FIG. 4.12(b) montre une légère dépendance de la longueur.

4.3.4 Conclusion : surfaces périodiques

Partant de considérations physiques du problème de diffraction périodique, nous avons proposé un preconditionneur basé sur les modes de Floquet. Le nombre de modes à considérer pour avoir des performances optimales correspond à 1/3 de la taille de la matrice impédance à preconditionner.

Le preconditionneur proposé réduit significativement le nombre d’itérations nécessaires à la convergence pour des surfaces rugueuses aléatoires, dans un domaine de profils utilisées dans la modélisation des sols par exemple. Cette réduction dépend du rapport entre la hauteur et vitesse de variations des rugosités, ce qui découle directement de la construction du preconditionneur (approximation par un plan périodique).

Remarque sur le temps total mis pour converger

Ici nous donnons une estimation de la réduction nécessaire en nombre d’itérations pour que le preconditionneur présente un avantage comparé à GMRES seul.

Le temps total t_{tot}^{GMRES} mis par GMRES pour atteindre un résidu fixé est proportionnel au nombre d’itérations N_{iter} et au coût du produit matrice-vecteur en N^2 , c’est-à-dire que,

$$t_{tot}^{GMRES} \propto N_{iter} N^2$$

et dans le cas de GMRES avec le preconditionneur, ce temps total t_{tot}^{PGMRES} est proportionnel au nombre d’itérations N'_{iter} et au coût du produit matrice-vecteur classique auquel est ajouté

le coût du produit matrice-vecteur préconditionné en MN , c'est-à-dire,

$$t_{tot}^{\text{PGMRES}} \propto N'_{iter}(N^2 + MN)$$

Le paramètre ρ représente la réduction du nombre d'itérations : $N'_{iter} = (1 - \rho)N_{iter}$. Si le paramètre ρ est inférieur à 0, cela signifie que le preconditionneur dégrade la convergence.

Le but du preconditionneur est de réduire le temps total de résolution ; nous cherchons à avoir $t_{tot}^{\text{PGMRES}} \leq t_{tot}^{\text{GMRES}}$, ce qui se traduit par,

$$(1 - \rho)N_{iter}N^2\left(1 + \frac{M}{N}\right) \leq N_{iter}N^2$$

Ceci est légitime car le même algorithme est utilisé (procédé d'Arnoldi, rotations de Givens, ...), donc les facteurs de proportionnalité sont du même ordre.

Finalement, le critère sur la réduction est,

$$\rho \geq \frac{M}{M + N} \quad \underset{M=N/3}{=} \quad \frac{1}{4}$$

Pour obtenir cette inégalité, le temps d'initialisation du preconditionneur (principalement l'évaluation des vecteurs Φ_n) est négligé.

Pour que le preconditionneur présente un avantage numérique en terme de temps de calcul, il doit réduire d'au moins 25% le nombre d'itérations. Dans le cas contraire, il peut améliorer la convergence mais ne diminue pas le temps total de résolution.

4.4 Application aux surfaces tronquées

Dans cette section, nous étudions les performances du préconditionneur dans le cadre de surfaces tronquées. Le produit matrice-vecteur préconditionné construit précédemment Eq. (4.19), c'est-à-dire pour des problèmes périodiques, est utilisé tel quel pour des problèmes tronqués éclairés par une onde plane. Ainsi, les bords de la surface font engendrer de la diffraction supplémentaire qui n'est pas considérée par le préconditionneur. Toutefois, les surfaces tronquées peuvent être vues comme une "perturbation" de ces mêmes surfaces périodisées.

Dans le cas de surfaces tronquées, la matrice impédance Z ne dépend pas de l'angle d'incidence, seul le vecteur excitation e (second membre) en dépend. Comme le préconditionneur agit sur la matrice impédance, nous fixons une incidence normale dans la construction du préconditionneur. Les trois paramètres ε , \mathcal{M} et M du préconditionneur utilisés dans cette section sont ceux établis pour les problèmes périodiques.

4.4.1 Information spectrale périodique pour des surfaces tronquées

Dans cette partie, nous souhaitons vérifier la pertinence de l'hypothèse faite sur l'information spectrale : les modes propres associés à une plaque périodique sont une approximation fonctionnelle de ceux associés à une surface rugueuse tronquée.

Justification numérique sur le couple propre

Pour illustrer numériquement la pertinence de l'approximation sur le couple propre, nous utilisons le paramètre d'erreur défini par Eq. (4.15). L'incidence est normale et la fréquence est fixée à 1GHz.

f=1GHz	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 0	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$	$N = 1000$
Cas 1	Sinus ($ks = 2$)	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $h = \sqrt{2}/(2\pi) \lambda$	$N = 1000$ $\omega_x = 2\pi/L$
Cas 2	Gaussien $ks = 1$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 3	Gaussien $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 4	Exponentiel $ks = 0.75$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$

TABLE 4.12 – Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur l'information spectrale

La FIG. 4.16 compare l'erreur relative en fonction de l'index du mode pour différents profils de surfaces dont les caractéristiques sont regroupées dans le TAB. 4.12.

Premièrement, l'allure des courbes est similaire à celle obtenue pour des surfaces périodiques (FIG. 4.9). Les conclusions sont par conséquent les mêmes. Plus la surface présente des irrégularités et moins pertinente l'hypothèse est. De plus, le facteur limitant de l'approximation est un rapport entre la hauteur qui va entraîner une erreur de phase et la vitesse de variations des rugosités qui va entraîner des oscillations rapides dans les modes. En outre, l'erreur due à une

mauvaise représentation numérique (théorème de Shannon) est aussi observée. Seul les 30% premiers modes sont correctement représentés par la discrétisation. Et la région en terme d'index où l'erreur est la plus notable est celle où les modes de Floquet sont correctement représentés.

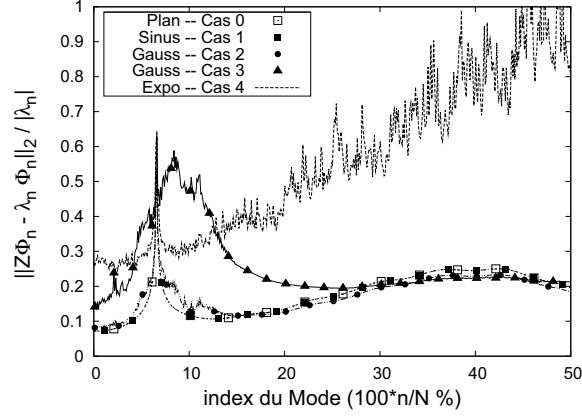


FIGURE 4.16 – Validité de l'approximation du couple propre pour différents profils de surfaces : Plan (Cas 0), Sinus avec $h = 0.2251\lambda$ (Cas 1), Gaussien $ks = 1$ (Cas 2), Gaussien $ks = 2$ (Cas 3), Exponentiel $ks = 0.75$ (Cas 4) (voir TAB. 4.12)

Le pic (discontinuité) correspond au passage de modes propagatifs (valeur propre purement imaginaire) à des modes évanescents (valeur purement réelle) est très marqué. Ce pic correspond au mode d'index $(L/\lambda) \times (100/N)$. Pour un profil de surface gaussien (auto-corrélation de caractéristiques $ks = 2$ et $kl = 8$), le paramètre d'erreur est évalué pour différente longueur (FIG. 4.17) et les pics correspondent aux valeurs d'index de mode attendues.

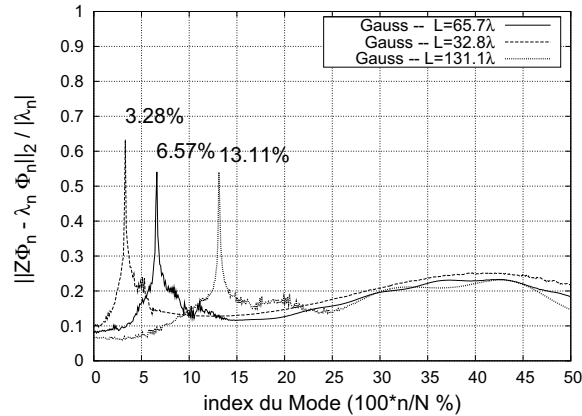


FIGURE 4.17 – Validité de l'approximation du couple propre pour un profil Gaussien $ks = 2$ et $kl = 8$ (Cas 2 du TAB. 4.12) pour différentes longueurs : 32.8λ , 65.7λ et 131.1λ

Les surfaces rugueuses tronquées peuvent être vues comme des perturbations de ces mêmes surfaces périodisées qui sont déjà une perturbation du plan. L'erreur est la plus importante lorsque les modes changent de régime (de propagatif à évanescent), ceci correspond aux modes qui ont les valeurs propres de plus grand module.

Illustration sur le spectre de $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$

Dans cette partie, nous étudions les valeurs propres du système préconditionné $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$. Même si ce n'est pas un élément décisif pour déterminer la convergence, le preconditionneur doit rassembler les valeurs propres autour de 1 et par conséquent réduire le conditionnement (défini par Eq. (4.21)).

Les valeurs propres du système préconditionné $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ sont évaluées numériquement à l'aide de la fonction `eig` (MATLAB). D'une part, l'évaluation du produit matrice-matrice étant coûteux et d'autre part la fonction `eig` étant aussi coûteuse, les cas traités ici sont de moindre tailles. Dans le TAB. 4.13 sont regroupées les différentes caractéristiques des surfaces utilisées.

	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 0	Plan	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 13.63\lambda$	$N = 374$
Cas 1	Sinus	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 13.63\lambda$ $h = \lambda/3$	$N = 204$ $\omega_x = 2\pi/L$
Cas 2	Gaussien $ks = 1$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 13.63\lambda$ $kl = 8$	$N = 410$
Cas 3	Gaussien $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 13.63\lambda$ $kl = 5$	$N = 410$

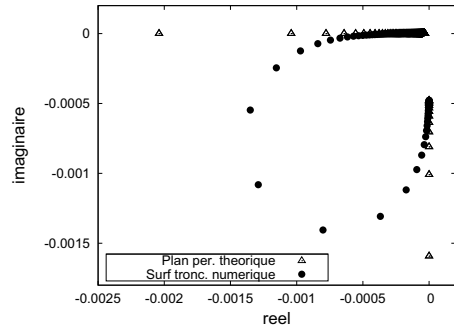
TABLE 4.13 – Caractéristiques des surfaces pour l'illustration numérique sur les valeurs propres

Sur la partie de gauche de la FIG. 4.18 sont tracées dans le plan complexe les valeurs propres numériques de Z ainsi que les valeurs propres d'une plaque périodique calculées analytiquement (ceux de $Z^{(0)}$). Pour les quatre profils de surface, les valeurs propres ont le même ordre de grandeur mais les deux spectres ne sont pas en adéquation.

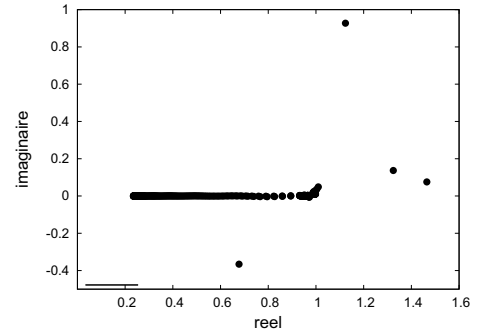
Dans le cas d'une surface plane, la FIG. 4.18(a) illustre les effets de la troncature sur le spectre. Les valeurs propres ne sont plus soit purement imaginaires soit purement réelles. Les valeurs propres de "petits" modules sont numériquement difficiles à calculer mais elles tendent vers 0. La troncature semble plus affecter les valeurs propres de plus grands modules. la FIG. 4.18(g) illustre que plus la surface est rugueuse et plus le spectre est perturbé.

Sur la partie de droite de la FIG. 4.18 sont tracées dans le plan complexe les valeurs propres numériques du système préconditionné $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$. Le preconditionneur a bien déplacé les valeurs propres pour les regrouper autour de 1. Les valeurs propres qui tendent vers 0 sont généralement considérées comme celle qui altèrent la convergence des méthodes itératives de type Krylov et le preconditionneur les déplacent. La plupart des valeurs propres sont concentrées autour de l'axe réel. Certaines valeurs propres, vraisemblablement les plus perturbées par la troncature, s'éloignent de cet axe réel. Plus la surface possède des rugosités et plus le spectre de $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ est étalé (FIG. 4.18(h)). À partir du spectre de système préconditionné, il est difficile de conclure sur le gain apporté par le preconditionneur. Toutefois, nous remarquons qu'un spectre de $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ étalé donne de moins bonnes performances.

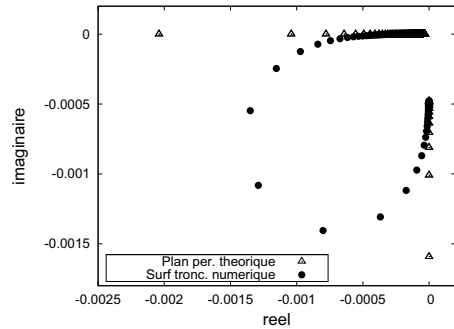
La FIG. 4.19 compare le spectre du système préconditionné dans le cas d'une surface tronquée et de cette même surface périodisée. Dans les deux configurations, le spectre est étalé, c'est-à-dire que même si la troncature correspond à une perturbation supplémentaire, le preconditionneur est pertinent.



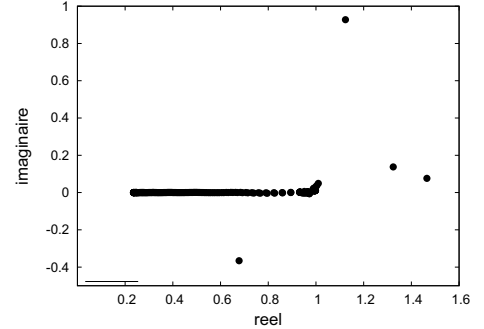
(a) Valeurs propres Z et $Z^{(0)}$ – Cas 0 Plan



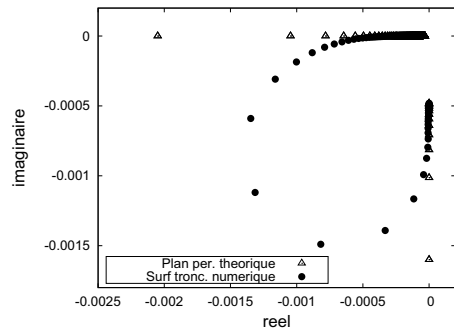
(b) Valeurs propres $ZY_{\mathcal{M}}^{\epsilon}$ – Cas 0 Plan



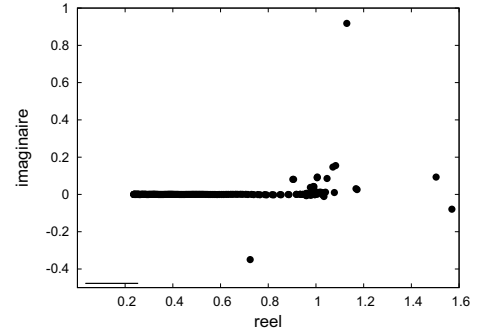
(c) Valeurs propres Z et $Z^{(0)}$ – Cas 1 Sinus



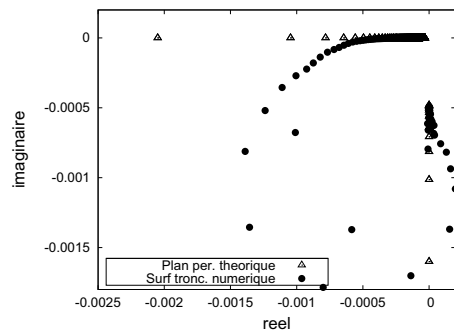
(d) Valeurs propres $ZY_{\mathcal{M}}^{\epsilon}$ – Cas 1 Sinus



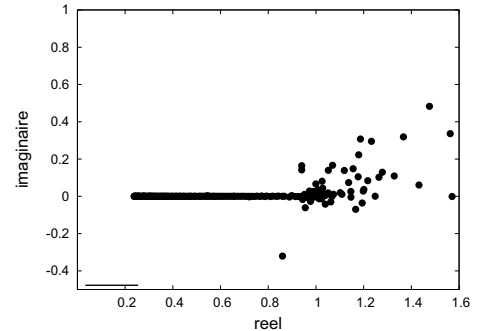
(e) Valeurs propres Z et $Z^{(0)}$ – Cas 2 Gauss.



(f) Valeurs propres $ZY_{\mathcal{M}}^{\epsilon}$ – Cas 2 Gauss.



(g) Valeurs propres Z et $Z^{(0)}$ – Cas 3 Gauss.



(h) Valeurs propres $ZY_{\mathcal{M}}^{\epsilon}$ – Cas 3 Gauss.

FIGURE 4.18 – Valeurs Propres numériques de Z et celles de $ZY_{\mathcal{M}}^{\epsilon}$ dans le plan complexe pour différents profils de surface : Plan (Cas 0), Sinus (Cas 1), Gaussien $ks = 1$ (Cas 2) et Gaussien $ks = 2$ (Cas 3) (voir TAB. 4.3).

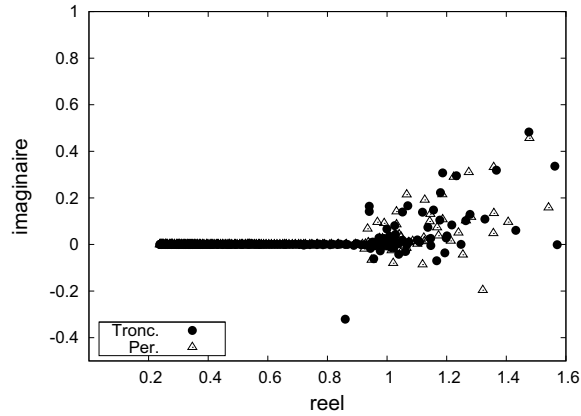


FIGURE 4.19 – Comparaison dans le plan complexe des Valeurs Propres numériques dans le cas tronqué et dans le cas périodique : Cas 3 – Profil Gauss. (voir TAB. 4.13)

Le conditionnement κ_2 en norme 2 (Eq. (4.21)) est le rapport entre la valeur propre maximale (en module) et la valeur propre minimale (en module). Le conditionnement donne une information sur l'étendu du spectre.

Pour la matrice impédance Z et le système préconditionné, les conditionnements sont calculés à l'aide de la fonction numérique `cond` (MATLAB). À titre indicatif, les valeurs du conditionnement dans le cas périodique sont données.

		Périodique			
	Profil	$\text{cond}(Z)$	$\text{cond}(ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon)$	$\text{cond}(Z)$	$\text{cond}(ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon)$
Cas 0	Plan	46.66	10.34	37.17	5.94
Cas 1	Sinus	47.26	10.49	37.17	5.94
Cas 2	Gaussien	47.88	10.83	34.41	6.03
Cas 3	Gaussien	56.47	18.83	36.15	10.59

TABLE 4.14 – Comparaison du conditionnement en norme 2 de Z et celui de $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ (voir TAB. 4.13).

Le TAB. 4.14 compare le conditionnement en norme 2 pour différents profils de surface (TAB. 4.12). En premier lieu, il faut noter que les conditionnements de la matrice Z ne sont pas considérés comme problématiques, c'est-à-dire que la valeur propre maximale et la valeur propre minimale sont du même ordre de grandeur. Par ailleurs, l'augmentation des rugosités augmente aussi le conditionnement. Dans les cas présentés ici, le préconditionneur réduit toujours le conditionnement. Comme nous nous y attendions, plus la surface présente des rugosités importantes et moins le conditionnement de $ZY_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ est réduit.

4.4.2 Performances

Afin d'examiner les performances du préconditionneur construit pour un problème périodique et appliqué à un problème tronqué, les historiques de convergence de GMRES et de GMRES préconditionné sont d'abord tracés pour plusieurs profils de surfaces. Puis, l'influence du champ incident est étudiée à travers un choix de vecteur initial non nul dans la méthode de Krylov. L'effet de la diffraction par les bords de la surface est examiné. Pour finir, le préconditionneur est comparé à un préconditionneur algébrique.

Historique de convergence

Nous comparons l'évolution du résidu (défini par Eq. (4.8)) au fil des itérations. Les surfaces utilisées sont les mêmes que celles en configuration périodique. Les caractéristiques de celles-ci sont rappelées dans le TAB. 4.15. La fréquence est de 1GHz et l'incidence est normale.

f=1GHz	Profil	Wavelength	Longueur	taille
Cas 1	Gaussien $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 2	Gaussien $ks = 4$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 3	Gaussien $ks = 5$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 5$	$N = 1000$
Cas 4	Gaussien $ks = 5$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 131.4\lambda$ $kl = 5$	$N = 2000$
Cas 5	Exponentiel $ks = 2$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 8$	$N = 1000$
Cas 6	Gaussien $ks = 5$	$\lambda = 0.3\text{m}$	$L = 65.7\lambda$ $kl = 10$	$N = 1000$

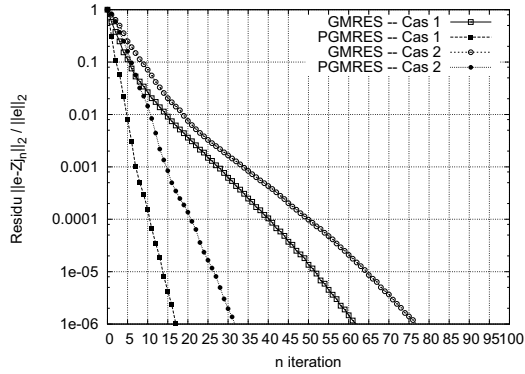
TABLE 4.15 – Caractéristiques des surfaces pour comparer les historiques de convergence

Les différents historiques de convergence sont regroupés dans la FIG. 4.20. Ces historiques sont très semblables à ceux obtenus pour des problèmes périodiques (FIG. 4.12). Par conséquent, les conclusions sont très similaires. Le préconditionneur réduit toujours le nombre d'itérations pour les surfaces présentées ici. De plus, la convergence, tant sur GMRES que sur GMRES préconditionné, est dégradée par la taille des rugosités.

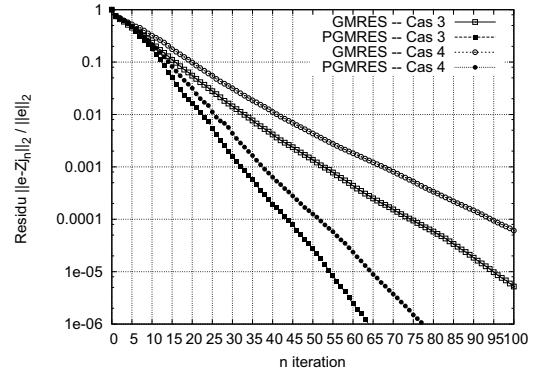
Comparaison de la réduction faite par le préconditionneur

Le paramètre de réduction ρ (défini p.118) est utilisé pour quantifier l'apport du préconditionneur, en terme de réduction d'itérations et du temps total, pour atteindre un résidu de 10^{-4} . Pour le système préconditionné, le temps total tient compte de l'initialisation. Le TAB. 4.16 compare cette réduction pour les profils de surfaces précédentes (TAB. 4.15).

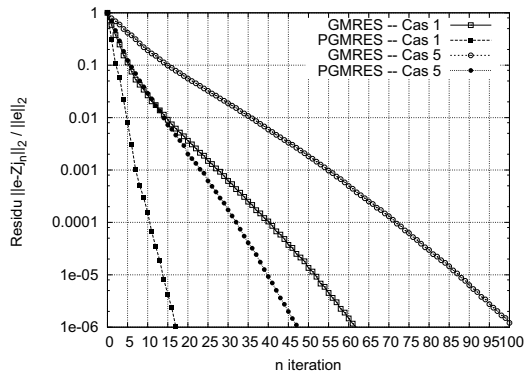
Les résultats sont du même ordre de ceux obtenus pour les problèmes périodiques. Le préconditionneur réduit toujours significativement le nombre d'itérations dans le cas des surfaces présentées ici. La réduction va de 41.3% à 75.6%. Ce n'est pas pour le profil de surface possédant le plus rugosité (cas 4 – profil à auto-corrélation exponentielle) que la réduction du préconditionneur est la moins importante : les rugosité détériorent moins le système préconditionné comparativement GMRES.



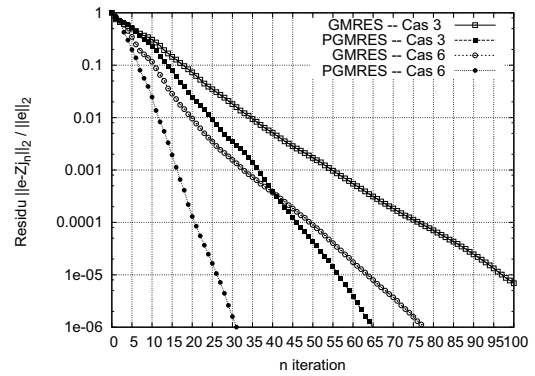
(a) Gauss. – Cas 1 et 2 : $ks = 2$ et $ks = 4$



(b) Gauss. – Cas 3 et 4 : $N = 1000$ et $N = 2000$



(c) Gauss. & Exp. – Cas 1 et 5



(d) Gauss. – Cas 3 et 6 : $kl = 5$ et $kl = 10$

FIGURE 4.20 – Historique de convergence pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.15)

(s)	GMRES		PGMRES		Réduction (ρ)	
	Temps CPU	Itération	Temps CPU	Itération	Temps CPU	Itération
Cas 1	0.232	41	0.172	10	0.259	0.756
Cas 2	0.284	50	0.256	19	0.098	0.620
Cas 3	0.456	75	0.472	44	-0.035	0.413
Cas 4	2.060	95	2.160	52	-0.048	0.453
Cas 5	0.436	72	0.3884	34	0.119	0.528
Cas 6	0.276	49	0.260	20	0.058	0.592

TABLE 4.16 – Comparaison du Temps CPU entre GMRES et GMRES préconditionné (surfaces de TAB. 4.15)

Concernant la réduction du temps total de résolution, les résultats sont plus modérés. La réduction du nombre d'itérations ne compense pas l'ajout d'un produit matrice-vecteur à chaque itération.

Influence de l'angle d'incidence (vecteur initial)

Pour les profils de surfaces gaussien $ks = 2$, $kl = 8$ et $ks = 5$, $kl = 5$ (Cas 1 et Cas 3 du TAB. 4.15), nous déterminons l'influence de l'angle d'incidence sur la convergence, c'est-à-dire le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un résidu de 10^{-4} pour trois angles choisis arbitrairement : $\theta^{\text{inc}} = 0$, 60° et 80° . Les résultats sont rassemblés dans le TAB. 4.17.

θ^{inc}	Cas 1		Cas 3	
	GMRES	PGMRES	GMRES	PGMRES
0	41	10	75	44
60	39	10	74	47
80	37	13	70	55

TABLE 4.17 – Comparaison pour différents angles d'incidence du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un résidu de 10^{-4} (voir TAB. 4.15 pour les profils).

L'angle d'incidence influe peu la convergence. La FIG. 4.21 trace l'historique de convergence pour un profil à auto-corrélation gaussienne de paramètres : $ks = 5$ et $kl = 5$ (Cas 3 du TAB. 4.15) pour deux incidences et les courbes peuvent être considérées comme superposées.

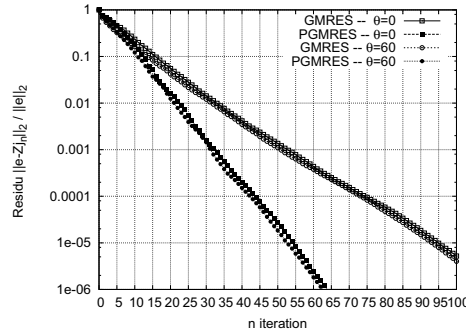


FIGURE 4.21 – Historique de convergence pour une incidence de 0° et 60° – profil Gaussien (Cas 3 du TAB. 4.15).

La matrice impédance Z ne dépend pas de l'angle d'incidence et le préconditionneur est construit avec une incidence normale. En d'autres termes, l'angle d'incidence n'intervient que dans le second membre (vecteur excitation e).

Au lieu de faire varier l'angle d'incidence, nous choisissons un vecteur initial arbitraire. Cette alternative est algébriquement équivalente à un angle d'incidence arbitraire et il permet d'illustrer la robustesse du préconditionneur quant au choix du champ incident (onde plane, faisceau gaussien, ...). Dans cette partie, les comparaisons sont faites à partir de notre implémentation MATLAB des différents algorithmes. Comme vecteur initial, nous prenons un vecteur tiré aléatoirement à l'aide de la fonction `rand` et divisé par $\min |Z_{ij}|$ pour que son influence soit significative dans le vecteur résidu initial.

Il est difficile de comparer les historiques de convergence car le résidu initial dans Eq. (4.8) ne vaut plus 1. Pour s'affranchir de cette difficulté, le résidu à chaque itération est normalisé par le résidu initial. Par conséquent, le nombre d'itérations pour atteindre un résidu de 10^{-4} n'est pas comparable (75 versus 156 pour GMRES et 44 versus 86 pour GMRES préconditionné). En

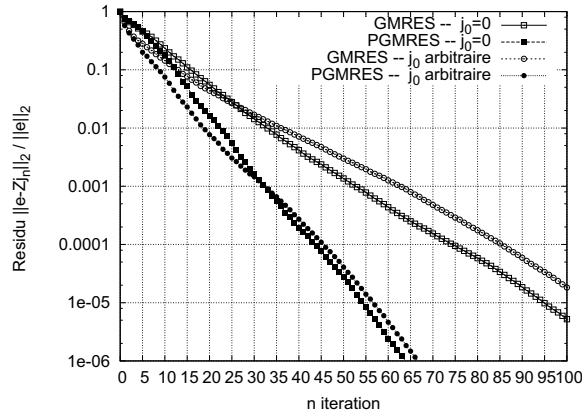


FIGURE 4.22 – Historique de convergence avec un vecteur initial nul et avec un vecteur initial aléatoire – Profil Gaussien (Cas 3 du TAB. 4.15).

terme de réduction du nombre d'itérations, dans le cas du vecteur initial nul, elle est de 41.3% et dans le cas d'un vecteur initial arbitraire, elle est de 44.8%.

La FIG. 4.22 illustre que la vitesse de convergence dépend peu du choix du vecteur initial, autant dans le cas de GMRES que dans le cas de GMRES préconditionné.

Influence de la troncature (effet de diffraction)

Pour les surfaces suffisamment étendues en termes de longueur d'onde, les effets de diffraction par les bords sont négligeables devant la diffusion de la surface. Cependant, la matrice impédance Z représente ces effets et le preconditionneur ne les prends pas compte. Le vecteur courant, solution du système linéaire, les représente.

Comparant les historiques de convergence pour les problèmes périodiques (FIG. 4.12) et ceux pour les problèmes tronqués (FIG. 4.20), les performances du preconditionneur ne sont pas altérées par les effets de diffraction des bords dans le cas de surfaces suffisamment étendues.

Il est difficile d'isoler les effets de diffraction issus de la troncature et ceux issus des rugosités de la surface. Nous choisissons de considérer un profil de surface sinusoïdal de hauteur fixée à $h = \lambda/6$ et de nombre de points d'échantillonnage aussi fixé à $N = 1000$. Une période de la fonction sinusoïdal est utilisée et nous faisons varier la longueur du profil.

Longueur	GMRES	PGMRES	Réduction (ρ) %
65.7λ	38	10	73.7
16.42λ	39	7	82.1
4.11λ	32	7	78.1
1.03λ	25	9	64.0
0.51λ	23	14	39.1
0.13λ	24	38	-58.3

TABLE 4.18 – Comparaison pour différentes longueurs du nombre d'itération nécessaire pour atteindre un résidu de 10^{-4} .

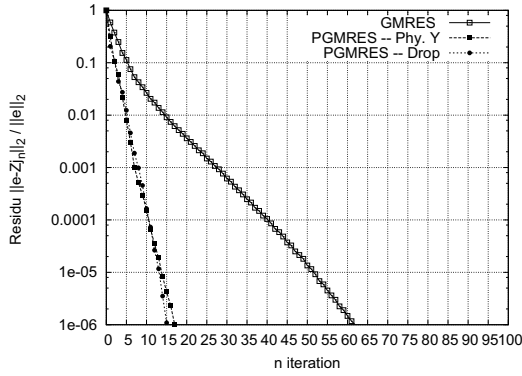
Les conclusions concernant le domaine de performances du preconditionneur en terme de longueur de surface tronquée sont difficiles. À hauteur fixée, en diminuant la longueur du profil, la

penne est par conséquent augmentée. Le TAB. 4.18 montre que, pour ce profil, le préconditionneur est encore performant pour des pentes significatives.

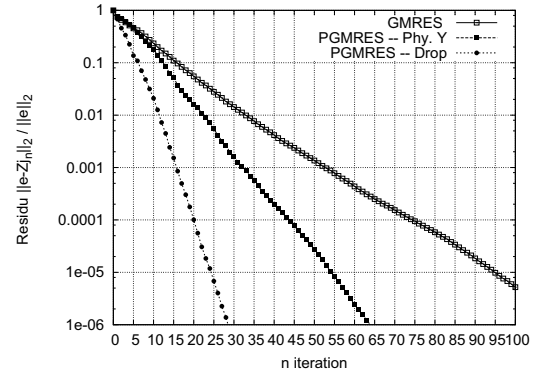
Dans cet exemple, pour maintenir le rapport h/L constant, il faut prendre une hauteur $h = \lambda/80$ avec une longueur $L = 0.13\lambda$ et ainsi GMRES préconditionné nécessite 7 itérations pour atteindre un résidu de 10^{-4} . Toutefois, aucune heuristique ne se dégage clairement : d'une part, les performances du préconditionneur dépendent du rapport entre la hauteur et la vitesse de variations des rugosités, et d'autre part quand les effets de diffraction par les bords deviennent importants comparés aux effets de diffusion, les performances se dégradent.

Comparaison avec le préconditionneur algébrique Z^{drop}

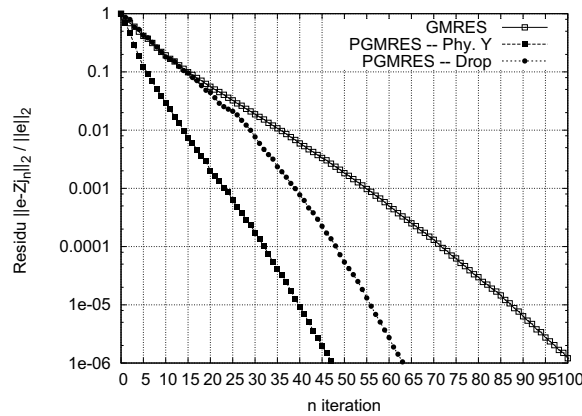
Maintenant, le préconditionneur $Y_{\mathcal{M}}^{\varepsilon}$ construit sur des considérations physiques est comparé à un préconditionneur de nature algébrique (voir p.94) Dans la matrice impédance, les 30% des coefficients de plus grand module sont conservés dans la matrice Z^{drop} . Cette matrice est ensuite factorisée sous forme LU et le produit matrice-vecteur préconditionné est remplacé par deux substitutions. D'un point de vue calculatoire, le préconditionneur **drop** est du même ordre que celui que nous proposons. Les paramètres des différents profils de surface sont regroupés dans le TAB. 4.15.



(a) Gauss. - Cas 1 $ks = 2$ et $kl = 8$



(b) Gauss. - Cas 3 : $ks = 5$ et $kl = 5$



(c) Exp. - Cas 5 : $ks = 2$ et $kl = 8$

FIGURE 4.23 – Comparaison des historiques de convergence entre GMRES et GMRES préconditionné soit par Z^{drop} soit par $Y_{\mathcal{M}}^{\varepsilon}$ pour différents profils de surfaces (voir TAB. 4.15).

Dans le cas d'une surface présentant des rugosités modérées (cas 1 : auto-corrélation gaussienne de paramètres $ks = 2$ et $kl = 8$), les deux types de preconditionneur donnent des résultats similaires : ils diminuent notablement le nombre d'itérations comparativement à GMRES seul (FIG. 4.23(a)). Pour des rugosités de hauteurs importantes (cas 3 : auto-corrélation gaussienne de paramètres $ks = 5$ et $kl = 5$), la convergence du preconditionneur physique est dégradée et celle du preconditionneur algébrique est peu modifiée (FIG. 4.23(b)). Le preconditionneur **drop** utilise la structure algébrique de la matrice impédance et ne repose donc pas sur une hypothèse physique. En revanche, dans le cas de surface à variations rapides (cas 5 : auto-corrélation exponentielle de paramètres $ks = 2$ et $kl = 8$), la convergence du preconditionneur algébrique est plus dégradée que celle du preconditionneur physique (FIG. 4.23(c)). Une explication concernerait la nature des coefficients conservés dans la matrice Z^{drop} : ce sont ceux de plus grands modules et l'information de phase est perdue.

Pour finir, même si le preconditionneur **drop** est simple à construire, il nécessite tout de même une étape de seuil puis une factorisation LU et deux substitutions. Sa complexité algorithmique est plus importante que celle du preconditionneur Y_M^ε qui ne nécessite que l'évaluation des modes de Floquet.

4.4.3 Conclusion

Le preconditionneur, partant de considérations physiques et basé sur les modes de Floquet, initialement construit pour des problèmes de diffraction périodiques a été appliqué à des surfaces finies. Ce preconditionneur réduit significativement le nombre d'itérations nécessaires à la convergence pour des surfaces rugueuses, dont les irrégularités sont faibles à modérées.

Pour des surfaces tronquées suffisamment étendues en terme de longueur d'onde, le comportement du preconditionneur est sensiblement identique à celui pour ces mêmes surfaces périodisées. Le domaine de performance est le même, c'est-à-dire que la réduction dépend du rapport entre la hauteur et la vitesse de variations des rugosités. Lorsque l'effet de la diffraction par les bords de la surface sont importants, comparés aux effets de diffusion, les performances du preconditionneur sont dégradées. Cependant, le preconditionneur réduit le nombre d'itérations pour des surfaces dont la longueur est inférieure à la longueur d'onde.

Une autre approche proposée par Naenna et Jonhson [48]

Dans [48], un autre preconditionneur est proposé, basé lui aussi sur des considérations physiques. Ils considèrent une surface rugueuse tronquée éclairée par un faisceau à bande limitée (*tapered beam*). Ils utilisent comme point de départ une analyse en ondes planes sur une surface plane et ils en déduisent des propriétés spectrales. Puis, la bande limitée du faisceau incident leur permet de tronquer la représentation intégrale du spectre en onde plane.

Par conséquent, dans le cas d'une surface 1D, en prenant un nombre de modes égal à la taille du problème (i.e., $M = N$), le preconditionneur que nous proposons est similaire à celui proposé dans [48].

Toutefois, deux différences sont notables :

- en prenant $M = N$, le coût du produit-vecteur devient prohibitif. Pour s'affranchir de cette difficulté, ils considèrent des surfaces discrétisées uniformément, et ceci leur permet d'utiliser une Transformée de Fourier Rapide (FFT),
- dans le cas d'une géométrie circulaire, le preconditionneur que nous proposons utilisera les modes cylindriques (fonction de Hankel). Peterson et al. mentionne dans [54] le lien

entre la matrice impédance associée à un cylindre et les fonctions de Hankel. Ainsi les deux préconditionneurs ne seront finalement plus similaires.

4.5 Extensions

Dans cette section, deux extensions sont succinctement présentées, l'une correspondant à l'autre polarisation (TE) dans le cas métallique, et l'autre correspondant à la polarisation TM dans le cas diélectrique.

4.5.1 Surface métallique – polarisation TE

Dans cette polarisation, nous avons défini $u = H_z$ avec $E_z = 0$, et par conséquent nous pouvons aussi définir un potentiel scalaire j proportionnel au courant électrique $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{\text{tot}}$. Ainsi, nous avons le résultat classique,

$$j(x) = \left(u^{\text{tot}}(x, y) \right)_{|y=0}$$

La même méthode que celle utilisée dans le cas de la polarisation TM est utilisée. La surface est éclairée avec un mode de Floquet, $u^{\text{inc}}(x, y) = e^{-i\gamma_n y} e^{i\alpha_n x}$, et il est bien connu que le champ diffracté (réfléchi) par la plaque périodique est $u^{\text{diff}}(x, y) = e^{-i\gamma_n y} e^{i\alpha_n x}$. Par conséquent, il est immédiat,

$$j(x) = 2e^{i\alpha_n x}$$

et nous en déduisons que les vecteurs propres sont les mêmes que ceux établis dans le cas de la polarisation TM. Cependant, les valeurs propres $\lambda_n^{\{\text{TE}\}}$ associées valent toujours 2. Ce résultat sur les valeurs propres implique que la plaque périodique ne peut pas être utilisée comme un préconditionneur efficace pour un problème de diffraction par une surface rugueuse en polarisation TE.

La matrice impédance $Z_{\text{TE}}^{(0)}$ associée à la plaque périodique s'écrit simplement $Z_{\text{TE}}^{(0)} = 2I_N$. De plus, l'opérateur intégral associé donne le même résultat au prix d'un petit calcul. Par ailleurs, la MoM dans cette polarisation est construite à partir d'un potentiel double couche, c'est-à-dire que la MoM est de type MFIE. Nous retrouvons donc le fait que la MFIE est considérée comme mieux conditionnée.

La connaissance des modes propres associés au problème de diffraction par une plaque périodique en polarisation TE n'est pas suffisant pour construire un préconditionneur physique.

4.5.2 Interface diélectrique – polarisation TM

Le problème de transmission en polarisation TM est considéré ici. Dans le cas diélectrique, un vecteur densité de courant électrique $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{\text{tot}}$ existe et par conséquent sa représentation scalaire (potentiel) j doit être évalué. De surcroît, il y a aussi un courant magnétique $\mathbf{M} = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{tot}}$ avec une représentation scalaire m . La matrice impédance est par conséquent composée de quatre blocs : un pour chaque courant et deux blocs hors diagonaux représentant les couplages entre les deux types de courants.

Le principe de superposition est utilisé. La surface est éclairée par deux modes de Floquet, l'un venant du milieu 1 : $u^{\text{inc}}(x, y) = e^{-i\gamma_n^{(1)} y} e^{i\alpha_n^{(1)} x}$ et l'autre venant du milieu 2. Ainsi, il se déduit,

$$j_n = \left(-i\gamma_n^{(1)} + R_0 i\gamma_n^{(1)} \right) \phi_{1n} + \left(i\gamma_n^{(2)} - T_0 i\gamma_n^{(2)} \right) \phi_{2n}$$

$$m_n = \left(1 + R_0 \right) \phi_{1n} + \left(1 + T_0 \right) \phi_{2n}$$

avec R_0 et T_0 les coefficients de réflexion et de transmission associés à une interface plane. De ces expressions des potentiels de courants, il se déduit les valeurs propres associées à chaque bloc de la matrice impédance,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n^{\{J_1\}}} &= -2i \frac{\gamma_n^{(1)} \gamma_n^{(2)}}{\gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)}} \\ \frac{1}{\lambda_n^{\{J_2\}}} &= +2i \frac{\gamma_n^{(1)} \gamma_n^{(2)}}{\gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)}} \\ \frac{1}{\lambda_n^{\{M_1\}}} &= 2i \frac{\gamma_n^{(1)}}{\gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)}} \\ \frac{1}{\lambda_n^{\{M_2\}}} &= 2i \frac{\gamma_n^{(2)}}{\gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)}}\end{aligned}$$

et par conséquent, le produit matrice-vecteur préconditionné suivant pourra être utilisé dans la MoM issue d'une interface séparant deux milieux diélectriques,

$$\begin{pmatrix} P_J v \\ P_M v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n \in \mathcal{M}_1^J} \left(\frac{1}{\lambda_n^{\{J_1\}}} - \nu_1^J \right) (v | \phi_{1n}) \phi_{1n} & + \sum_{n \in \mathcal{M}_2^J} \left(\frac{1}{\lambda_n^{\{J_2\}}} - \nu_2^J \right) (v | \phi_{2n}) \phi_{2n} & + (\nu_1^J + \nu_2^J) v \\ \sum_{n \in \mathcal{M}_1^M} \left(\frac{1}{\lambda_n^{\{M_1\}}} - \nu_1^M \right) (v | \phi_{1n}) \phi_{1n} & + \sum_{n \in \mathcal{M}_2^M} \left(\frac{1}{\lambda_n^{\{M_2\}}} - \nu_2^M \right) (v | \phi_{2n}) \phi_{2n} & + (\nu_1^M + \nu_2^M) v \end{pmatrix}$$

Dans le cas de surfaces métalliques, le préconditionneur dépend de trois paramètres (ε , \mathcal{M} et M) et dans le cas d'une interface diélectrique, le préconditionneur dépend de trois paramètres par bloc, c'est-à-dire de douze paramètres. Cependant, il semble pertinent d'utiliser les heuristiques établies pour les surfaces métalliques.

4.6 Perspectives

Une autre approche : D_Φ GMRES

Comme mentionné 4.1.3 (p.94), une idée alternative pour utiliser la connaissance sur l'information spectrale est de modifier l'espace de Krylov. Au lieu d'utiliser l'espace Eq. (4.7), la solution est cherchée dans l'espace *deflated*,

$$\mathcal{K}_{M+m}^\Phi = \text{span} \left\{ \Phi_1, \dots, \Phi_M, r_0, Zr_0, Z^2r_0, \dots, Z^{m-1}r_0 \right\}$$

c'est à dire que le M premières directions sont imposées.

L'utilisation brutale de cette approche ne semble pas performante. Nous n'avons pas pu pousser les investigations de la méthode D_Φ GMRES, en particulier le choix l'espace \mathcal{K}_{M+m}^Φ . L'espace de recherche $\text{span} \left\{ r_0, Zr_0, Z^2r_0, \dots, Z^{m-1}r_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M \right\}$, où les directions sont imposés avant la ré-initialisation, serait peut-être un meilleur candidat. De plus, l'effet du *restart* dans la méthode n'a pas été étudié.

Pour finir, le principal intérêt de cette approche est l'économie, en terme de coût calculatoire, faite sur le calcul du produit matrice-vecteur. Et l'utilisation de la connaissance physique semble plus judicieuse, la zone de recherche de la solution est directement incluse dans l'espace de recherche lui-même.

Premiers pas vers l'ordre 1

Nous commençons par donner un résumé de ce que nous avons étudié dans la partie précédente du chapitre pour avoir synthétiquement les principes et définir les notations. Puis deux directions sont évoquées pour essayer d'améliorer le preconditionneur.

Résumé succinct de l'ordre 0

Soit $Z \in \mathbb{C}^{N \times N}$ la matrice impédance (résultant des Équation Intégrales). Nous rappelons que dans le cas périodique, elle ne possède aucune propriété *sympathique* (ni hermitienne, ni symétrie, ...).

Dans le cas où l'objet est un plan périodique, la matrice est noté $Z^{(0)}$ et le couple valeurs-propres / vecteurs-propres $\{\lambda_n, \Phi_n\}$ est connu analytiquement. Les erreurs numériques ont été étudiées à la section 4.2.2.

Nous définissons la matrice rectangulaire $V_M^{(0)}$,

$$V_M^{(0)} = [\Phi_1, \dots, \Phi_M] \in \mathbb{C}^{N \times M} \quad \text{avec} \quad V_M^{(0)H} V_M^{(0)} = I_M$$

Quand l'objet est (peu) rugueux, la matrice Z peut être considérée comme une perturbation de la matrice $Z^{(0)}$ (par exemple p.99 l'étude en norme de Frobenius de $\|Z - Z^{(0)}\|_F$ du TAB. 4.1).

Le preconditionneur suivant a été proposé et ses performances ont été étudiés dans différentes configurations,

$$Y_0 = V_M^{(0)} \left(D_M^{(0)-1} - \varepsilon I_M \right) V_M^{(0)H} + \varepsilon I_N$$

avec $D_M^{(0)}$ la matrice diagonale composée de λ_n , et $\varepsilon = 1/\lambda_{M+1}$.

D'un point de vue physique, ce preconditionneur peut s'interpréter comme la réponse d'une onde Φ_n (le n^{e} mode de Floquet) par une surface plane. Et nous supposons que la réponse de la surface rugueuse est *proche*, c'est cette information qui est injectée pour "orienter" l'espace de recherche dans la méthode itérative.

Cette approximation, de la surface rugueuse par un plan, limite le domaine de validité (en terme de hauteur de rugosités, de type de rugosités, ...) ou plutôt le domaine où le preconditionneur Y_0 est performant (ne dégrade pas la méthode itérative de résolution).

L'idée est donc d'essayer d'étendre ce domaine de validité, c'est-à-dire d'essayer de mieux approcher la réponse de la surface rugueuse par le n^{e} mode de Floquet.

À partir de $\{\lambda_n, \Phi_n\}$

Nous cherchons à mieux approcher la réponse de la surface rugueuse éclairée par un mode de Floquet. La réponse du n^{e} mode de Floquet (onde Φ_n) par la surface rugueuse est,

$$Z\Phi_n = \sum_m \nu_{mn} \Phi_m$$

ce qui peut être vu de façon matricielle comme : $ZV_N^{(0)} = V_N^{(0)}C_N$, où C_N est une matrice pleine composée des coefficients ν_{mn} qui représentent les couplages entre les ondes.

Intuitivement, le *meilleur* candidat, connaissant des vecteurs propres approchés, serait le préconditionneur,

$$M_1 = V_M^{(0)} \left(\left(V_M^{(0)H} Z V_M^{(0)} \right)^{-1} - \varepsilon I_M \right) V_M^{(0)H} + \varepsilon I_N$$

Dans le cas d'une plaque périodique, le préconditionneur M_1 devient clairement Y_0 puisque il a été montré que $Z^{(0)} V_M^{(0)} = V_M^{(0)} D_M^{(0)}$. De plus, remarquons que dans le cas $M = N$, un rapide calcul mène à $M_1 = Z^{-1}$ qui est le préconditionneur idéal mais sans intérêt.

En pratique, le calcul, mais surtout l'inversion, de $C_M = V_M^{(0)H} A V_M^{(0)}$ n'est pas raisonnable. L'idée est donc d'essayer de l'approcher au mieux :

1. la matrice C_M est approchée par la matrice diagonale composée des coefficients $\left(Z \Phi_n \middle| \Phi_n \right) = \Phi_n^H Z \Phi_n$ ce qui correspond au préconditionneur M_1^{diag} .
2. la matrice C_M^{-1} est directement approchée par des considérations physiques (optique physique).

À partir de l'ordre 1 donné par la théorie des perturbations

Partant des développements asymptotiques considérés pour la procédure d'homogénéisation, la théorie des perturbations est appliquée. Les développements sont faits dans une notation unifiée en Annexe C. Les modes propres à l'ordre 1 $\{\mu_n, \psi_n\}$ correspondant à l'impédance Z associée à une surface rugueuse sont donnés par,

$$\begin{aligned} Z \psi_n &= \mu_n \psi \\ \text{avec} \quad \mu_n &= \left(Z \Phi_n \middle| \Phi_n \right) \\ \text{et} \quad \psi_n &= \Phi_n + \sum_{p \neq n} \frac{\left(Z \Phi_n \middle| \Phi_p \right)}{\lambda_n - \lambda_p} \Phi_p \end{aligned}$$

Il ne faut pas perdre de vue le but d'un préconditionneur, c'est-à-dire aider la méthode itérative (de type Krylov) à converger plus rapidement : soit la méthode itérative ne converge pas et le préconditionneur doit permettre d'atteindre le résidu fixé, soit la méthode itérative converge et le préconditionneur doit améliorer la convergence sans dégrader le coût total de la résolution (en terme de temps et de mémoire requise).

4.7 Conclusion

Nous avons proposé un produit matrice-vecteur préconditionné pour des rugosités déposées sur une surface quasi-planaire. Ce préconditionneur, basé sur des considérations physiques, est construit pour des problèmes périodiques. Par ailleurs, il est aussi appliqué, sans modification, à des problèmes où la surface est finie. Dans le deux cas, les performances du préconditionneur dépendent du rapport entre la hauteur et la vitesse de variations des rugosités. Il est difficile de dégager une heuristique établissant les performances, autant en terme de réduction du nombre d'itérations qu'en terme de réduction du temps total de résolution. Pour des surfaces peu rugueuses à modérées, le préconditionneur réduit significativement le nombre d'itération nécessaire

à la convergence. Les résultats sur la réduction du temps total de résolution sont moins satisfaisants. Cependant, l'évaluation du produit matrice-vecteur préconditionné n'est pas optimisé. Comme il est constitué d'une somme de termes indépendants, il pourrait être exécuté en parallèle (à l'aide de MPI ou juste simplement avec des `thread`).

Pour finir, dans le cas d'une géométrie canonique, c'est-à-dire où un calcul analytique est possible, le lien entre les modes *physiques* et la MoM a déjà été illustré. Par exemple, Peterson et al. [54] mettent en évidence le lien entre les modes associés à un objet cylindrique et les valeurs propres de la matrice impédance. Toutefois, l'utilisation ces modes analytiques comme préconditionneur d'objet "proche", en terme de perturbation, est à notre connaissance une contribution originale.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons apporté une contribution à la modélisation électromagnétique en régime harmonique de la diffusion par des surfaces rugueuses 1D. Deux difficultés se présentent dans le calcul numérique de la diffusion : d'une part la surface doit être échantillonnée finement pour représenter tous les détails et par conséquent les problèmes à résoudre sont de grande taille, et d'autre part la surface doit être suffisamment étendue pour être représentative sachant que le coût numérique de la résolution est proportionnel à la taille du problème. L'objectif était donc de prendre en compte les rugosités fines à moindre coût numérique dans le calcul de la diffusion. Dans cette optique, nous nous sommes intéressés à deux points en particulier.

Dans une première partie de ce travail (**Chapitre 2 et 3**), nous avons appliqué une procédure d'*homogénéisation* pour extraire des paramètres effectifs caractérisant les rugosités surfaciques. Les effets des rugosités sur la diffusion sont pris en compte au travers de ces quelques paramètres au lieu d'une discrétisation fine. En d'autres termes, à la condition aux limites (C.L.) posée sur la surface rugueuse est substituée une condition aux limites modifiée ($\widetilde{\text{C.L.}}$) numériquement moins difficile. La procédure d'homogénéisation est construite pour des surfaces rugueuses à deux échelles de périodicité : les surfaces rugueuses considérées sont des surfaces périodiques (variations lentes) dont les irrégularités fines (variations rapides) sont aussi périodiques. De plus, la procédure ne fait pas d'hypothèse sur la forme de profil des irrégularités.

La procédure d'homogénéisation est basée sur un développement asymptotique double-échelle. À chaque ordre du développement asymptotique est calculé un correcteur à partir duquel les paramètres effectifs sont évalués. Ces paramètres effectifs résultent d'un système auxiliaire qui ne dépend ni de la fréquence, ni de l'angle d'incidence. De plus, la procédure construit automatiquement ces correcteurs. Nous avons montré que la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(n)}$ établie à chaque ordre peut être utilisée de deux manières : soit en tant que telle et en déduisant la solution asymptotique, soit en dérivant une condition aux limites effectives (C.L.E.). Dans les configurations que nous avons utilisées, l'erreur de la C.L.E. donne toujours des résultats plus précis comparés à ceux établis par la $\widetilde{\text{C.L.}}$. À partir des C.L.E. métalliques, nous avons déduit une impédance équivalente (condition de Leontovitch). Cette impédance représente les rugosités fines et dépend des paramètres effectifs ainsi que de la fréquence et de l'angle d'incidence. Nous avons montré que pour des surfaces 1D, les paramètres effectifs à l'ordre 1 sont homogènes à des hauteurs.

Dans un premier temps (**section 2.3**), la procédure est appliquée au problème de diffraction par une surface parfaitement métallique éclairée par une onde plane en polarisation Transverse Magnétique (TM). L'ordre 1 a été traité en détail par Poirier [56], cependant nous présentons une nouvelle mise en œuvre numérique, tant du point de l'implémentation de la résolution du système auxiliaire que de l'exploitation des résultats. La procédure n'est pas sensible au type de profil des irrégularités (créneaux, triangles, ...) mais la validité des résultats dépendent des caractéristiques géométriques (hauteur, ...) du profil. Quantitativement, pour une erreur de 10% sur le coefficient de réflexion, les hauteurs admissibles par la procédure sont de l'ordre de $\lambda/8$.

De plus, les résultats issus de la procédure restent corrects pour des pentes non négligeables (par exemple un rapport hauteur/période valant 2) ainsi que pour des profils présentant une dérivée discontinue. Puis, la $\widetilde{C.L.}^{(2)}$ est établie et une C.L.E. d'ordre 2 est déduite. La résolution d'un seul système auxiliaire est suffisante pour caractériser l'ordre 2. Nous montrons aussi que l'ordre 2 n'apporte pas d'information supplémentaire dans la C.L.E. comparé à l'ordre 1 : l'erreur commise par la C.L.E. d'ordre 1 est déjà d'ordre 2. La procédure présentant un caractère systématique, l'erreur commise par les $\widetilde{C.L.}^{(n)}$ sont numériquement illustrées jusqu'à l'ordre 4. À précision fixée, la montée en ordre permet de traiter des rugosités de taille plus importante.

Dans un deuxième temps (**section 2.4**), la polarisation Transverse Électrique (TE) est étudiée dans le cas de surfaces parfaitement métalliques. La C.L. de type Dirichlet (TM) est remplacée par une C.L. de type Neumann (TE). La présence de la dérivée normale dans la C.L. et les variations rapides de la surface impliquent une résolution en deux temps. Le correcteur d'ordre 0 est établi puis la condition aux limites portant sur le correcteur d'ordre 1 est utilisée pour obtenir la $\widetilde{C.L.}^{(0)}$. L'ordre 0 est bien celui d'un plan métallique. Pour évaluer la $\widetilde{C.L.}^{(1)}$, il faut d'abord calculer le correcteur d'ordre 1 à l'aide d'un système auxiliaire et il faut ensuite prendre en compte le problème régissant le correcteur d'ordre 2 (application du théorème de la divergence et appelé condition de compatibilité). Dans cette polarisation, la méthode d'homogénéisation est doublement intéressante : les paramètres effectifs ne dépendent ni de la fréquence ni de l'angle d'incidence et obtenir une solution précise par la MoM est numériquement difficile. Du fait de ce manque de précision pour calculer une solution de référence, il est difficile de donner des heuristiques encadrant un domaine de précision de la méthode. Par ailleurs, à l'ordre 1, nous avons exhibé un lien entre le paramètre effectif calculé pour la polarisation TM et les paramètres effectifs calculés pour la polarisation TE. Et nous avons montré, à l'aide de ce lien, que la résolution d'un seul système auxiliaire est suffisant pour caractériser la C.L.E. d'ordre 1 dans les deux polarisations.

Dans le **Chapitre 3**, la méthode d'homogénéisation est appliquée au problème d'une interface à une échelle de rugosités séparant deux milieux diélectriques et éclairée par une onde plane en polarisation TM. La continuité (saut à travers l'interface) du champ électromagnétique implique deux conditions aux limites : l'une portant sur le champ électrique (de type Dirichlet) et l'autre portant sur le champ magnétique (de type Neumann). Ce problème est un problème de transmission et il peut être vu comme la combinaison des deux problèmes parfaitement métalliques précédents. L'obtention des $\widetilde{C.L.}$ se fait aussi en deux temps. En calculant le correcteur d'ordre 0, nous montrons que le champ électrique à l'ordre 0 est continu à la traversée d'une interface plane. Puis, la condition de type Neumann portant sur le correcteur d'ordre 1 est utilisée, et à l'aide du théorème de la divergence, nous montrons que le champ magnétique à l'ordre 0 est continu à la traversée d'une interface plane. La même stratégie de résolution est utilisée pour caractériser la $\widetilde{C.L.}^{(1)}$. À l'ordre 1, le seul paramètre effectif intervenant est la moyenne de la surface. Pour une surface à une échelle de périodicité, la moyenne peut être choisie arbitrairement donc nulle, c'est-à-dire que l'ordre 1 n'apporte aucune information sur la rugosité. La $\widetilde{C.L.}^{(2)}$ est établie et elle dépend de trois systèmes auxiliaires indépendants de la fréquence et de l'angle d'incidence. Ces problèmes auxiliaires sont des problèmes avec des C.L. de transmission. Même si l'implémentation numérique n'a pas été terminée, une première validation numérique de l'approche a été faite.

Dans une seconde partie de cette thèse (**Chapitre 4**), nous nous sommes attachés à construire un *préconditionneur physique* qui exploite la nature quasi-planaire des surfaces rugueuses. Il repose sur des considérations physiques. Dans un premier temps, nous avons exhibé le lien entre les

modes de Floquet et l'information spectrale de la matrice impédance associée à une plaque plane périodique. Nous avons numériquement montré que ces modes peuvent être utilisés comme une approximation de l'information spectrale d'une matrice impédance associée à une perturbation du plan. Dans un deuxième temps, à partir des modes de Floquet, un produit matrice-vecteur préconditionné est construit. Ce produit matrice-vecteur dépend de trois paramètres que nous avons discutés. Des considérations heuristiques ont permis de choisir les paramètres optimaux.

Le préconditionneur construit pour problèmes périodiques a été appliqué à des surfaces finies. Dans les deux configurations, pour des surfaces suffisamment étendues, les performances du préconditionneur sont sensiblement identiques. Il réduit significativement le nombre d'itérations nécessaire à la convergence pour des surfaces peu rugueuses jusqu'à modérées. Le facteur limitant les performances est le rapport entre la hauteur et la vitesse de variations des rugosités. Dans le cas de surfaces finies, les bords engendrent de la diffraction. Ces effets de diffraction influent peu sur les performances du préconditionneur et nous avons montré que la réduction du nombre d'itérations est encore significative pour des surfaces dont la taille est inférieure à la longueur d'onde.

Le préconditionneur proposé a été comparé à un préconditionneur algébrique (**drop**). De prime abord, le préconditionneur algébrique n'est pas sensible aux caractéristiques géométriques de la surface : il est généralement considéré comme plus robuste car il ne dépend pas d'une hypothèse physique. Cependant, nous avons montré que dans certaines configurations, le préconditionneur proposé est plus performant.

Les performances sur la réduction du temps total de résolution sont moins satisfaisants. Nous avons montré que si le préconditionneur ne réduit pas le nombre d'itérations d'au moins 1/4 alors l'ajout du produit matrice-vecteur préconditionné à chaque itération n'est pas compensé. Ceci a été numériquement illustré dans certaines configurations, c'est-à-dire que le préconditionneur réduit le nombre d'itérations nécessaire à la convergence mais il augmente le temps nécessaire à cette même convergence.

Nous avons mis en évidence que l'information spectrale d'une géométrie canonique, où une expression analytique des modes est possible (par exemple le cylindre, la sphère, ...), peut être utilisée comme préconditionneur pour des objets proches, en terme de perturbation. Le produit matrice-vecteur préconditionné n'est pas complètement optimisé à ce stade et des évaluations rapides (transformée de Fourier rapide, ...) pourrait être apportées.

Perspectives

Trois prolongations complémentaires de ce travail peuvent être menées : la construction d'une condition effective rendant compte de rugosités aléatoires, l'application de la procédure d'homogénéisation à des surfaces bidimensionnelles et l'utilisation de résultats issus de l'homogénéisation pour améliorer le préconditionneur.

La condition aux limites équivalente est exacte pour des surfaces possédant des rugosités périodiques et les heuristiques évaluées dans le cas de surfaces aléatoires sont encourageantes [57]. À partir de la procédure d'homogénéisation, nous avons mis en évidence, dans le cas de surface mono-dimensionnelle parfaitement métallique ainsi que dans le cas d'une interface séparant deux milieux diélectriques, la construction systématique d'une condition équivalente pour traiter les rugosités périodiques. Une prolongation naturelle de ces travaux est l'amélioration de la condition équivalente pour mieux rendre compte des effets de rugosités aléatoires. Dans un autre contexte applicatif (équation de Navier-Stokes), Gérard-Varet a récemment établi des résultats significatifs

[8, 32].

Concernant les surfaces bidimensionnelles présentant deux échelles de rugosités, Poirier [56] a donné les développements pour une configuration parfaitement métallique éclairée par une onde plane en polarisation TM. Ces développements sont similaires à ceux présentés en Annexe A, et quelques modifications permettraient d'établir une condition équivalente pour des surfaces à une échelle bidimensionnelle de périodicité. Dans le cas où les échelles sont séparées, au lieu de ramener la condition équivalente sur un plan, il serait plus judicieux de ramener cette condition sur la surface lissée. Ainsi, les effets de rugosités fines pourraient être introduit dans un code équation intégrale sous la forme d'une impédance (condition de Leontovich).

Pour améliorer les performances du préconditionneur, nous avons proposé trois approches exploitant l'ordre 0, c'est-à-dire la connaissance des modes associés au plan. Une autre direction serait d'utiliser les résultats issus de l'homogénéisation. La condition équivalente traduisant l'effet de la rugosité pourrait être utilisée, par exemple en construisant un nouveau produit matrice-vecteur préconditionné.

Bibliographie

- [1] T. Abboud and H. Ammari. Diffraction at a curved grating : Tm and te cases, homogenization. *Journal of mathematical analysis and applications*, 202(3) :995–1026, 1996.
- [2] T. Abboud, J.-C. Nédélec, and B. Zhou. Méthodes des équations intégrales pour les hautes fréquences. *C. R. Académie des Sciences*, 368 :165–170, 1994.
- [3] Yves Achdou. Etude de la reflexion d’une onde electromagnetique par un metal recouvert d’un revêtement métallisé. Rapport de recherche RR-1136, INRIA, 1989.
- [4] Yves Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *Journal of Computational Physics*, 147(1) :187 – 218, 1998.
- [5] H. Ammari and C. Latiri-Grouz. Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(4) :673–692, 1999.
- [6] X. Antoine and H. Barucq. Approximation by generalized impedance boundary conditions of a transmission problem in acoustic scattering. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(5) :1041–1059, 2005.
- [7] J. Baglama, D. Calvetti, G. H. Golub, and L. Reichel. Adaptively preconditioned gmres algorithms. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1) :243–269, 1998.
- [8] A. Basson and D. Gérard-Varet. Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness. *Communications on pure and applied mathematics*, 61 :941–987, 2008.
- [9] A. Bendali, A. Makhlouf, and S. Tordeux. Matched asymptotic expansions for the determination of the electromagnetic field near the edge of a patch antenna. In Special Issue PAMM, editor, *Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics*, volume 7 of 1, pages 2050013–2050014, december 2007.
- [10] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolau. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, New-York, 1978.
- [11] S. Borel, D.P. Levadoux, and F. Alouges. A new well-conditioned integral formulation for maxwell equations in three dimensions. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 53(9) :2995 – 3004, sept. 2005.
- [12] Sophie Borel. *Étude d’une équation intégrale stabilisée pour la résolution itérative de problèmes de diffraction d’ondes harmoniques en électromagnétisme*. PhD thesis, Université Paris XI, 2006.
- [13] C. Bourlier, G. Kubické, and Y. Brelet. Rigorous prediction of the ground wave above flat and rough highly-conducting one-dimensional sea surfaces in hf-vhf band. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 59 :271–280, jan 2011.
- [14] F. Canning. Transformations that produce a sparse moment method matrix. *Electromagnetic Waves Applications, Journal of*, 4(9) :893–913, 1990.

- [15] P. Cao and C. Macaskill. Iterative techniques for rough surface scattering problems. *Wave Motion*, 21(3) :209–229, may 1995.
- [16] B. Carpentieri, I. S. Duff, L. Giraud, and G. Sylvand. Combining fast multipole techniques and an approximate inverse preconditioner for large electromagnetism calculations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(3) :774–792, 2005.
- [17] H. T. Chou and J. T. Johnson. A novel acceleration algorithm for the computation of scattering from rough surfaces with the forward-backward method. *Radio Science*, 33(5) :1277–1287, 1999.
- [18] Snorre H. Christiansen. *Résolution des équations intégrales pour la diffraction d’ondes acoustiques et électromagnétiques. Stabilisation d’algorithmes itératifs et aspects de l’analyse numérique*. PhD thesis, École Polytechnique, 11 janvier 2002.
- [19] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Mécanique Quantique – Tome II*. 1997.
- [20] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura. The fast multipole method for the wave equation : a pedestrian prescription. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, 35(3) :7–12, Jun 1993.
- [21] H. Contopanagos, B. Dembart, M. Epton, J.J. Ottusch, V. Rokhlin, J.L. Visher, and S.M. Wandzura. Well-conditioned boundary integral equations for three-dimensional electromagnetic scattering. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 50(12) :1824 – 1830, dec 2002.
- [22] Allan G. Dallas, G.C. Hsiao, and R.E. Kleinman. Observations on the numerical stability of the galerkin method. *Advances in Computational Mathematics*, 9(1-2) :37–67, 1998.
- [23] A. de la Bourdonnaye. High frequency approximation of integral equations modeling scattering phenoma. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 28(2) :223–241, 1994.
- [24] N. Dechamps and C. Bourlier. Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-inside-layer expansion method combined to an updated bmia/cag approach. *Antennas and Propagation, IEE Transactions on*, 55(10) :2790–2802, oct 2007.
- [25] D.J. Donohue, H.-C. Ku, and D.R. Thompson. Application of iterative moment-method solutions to ocean surface radar scattering. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 46(1) :121–132, 1998.
- [26] T. Elfouhaily and C.-A. Guérin. A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces. *Waves in Random Media*, 14 :R1–R40, 2004.
- [27] B. Engquist and J.-C. Nédélec. Effective boundary conditions for electro-magnetic scattering in thin layers. Rapport de Recherche 278, CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 1993.
- [28] V. Frayssé, L. Giraud, S. Gratton, and J. Langou. Algorithm 842 : A set of gmres routines for real and complex arithmetics on high performance computers. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 31(2) :228–238, june 2005.
- [29] A. K. Fung. *Microwave scattering and emission models and their applications*. Artech House, 1994.
- [30] L. Giraud and S. Gratton. On the sensitivity of some spectral preconditioners. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(4) :1089–1105, 2006.
- [31] L. Greengard, Jingfang Huang, V. Rokhlin, and S. Wandzura. Accelerating fast multipole methods for the helmholtz equation at low frequencies. *Computational Science & Engineering, IEEE*, 5(3) :32–38, Jul-Sep 1998.

-
- [32] D. Gérard-Varet. The navier wall law at a boundary with random roughness. *Communications in Mathematical Physics*, 286(1) :81–110, 2009.
- [33] D. Holliday, L. L. DeRaad, and G. J. St-Cyr. Forward-backward : a new method for computing low-grazing angle scattering. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 44(5) :722, 1996.
- [34] C. L. Holloway and E. F. Kuester. Equivalent boundary conditions for a perfectly conducting periodic surface with a cover layer. *Radio Science*, 35(3) :661–681, 2000.
- [35] C.L. Holloway and E.F. Kuester. Impedance-type boundary conditions for a periodic interface between a dielectric and a highly conducting medium. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 48(10) :1660–1672, october 2000.
- [36] N E Huang, S R Long, C C Tung, Y Yuan, and L F Bliven. A non-gaussian statistical model for surface elevation of nonlinear random wave fields. *Journal of Geophysical Research*, 88(C12) :7597–7606, 1983.
- [37] A. Ishimaru. *Wave propagation and scattering in random media*. IEEE Press, New York, 1978.
- [38] J.T. Johnson, R.T. Shin, J. A. Kong, L. Tsang, and K. Pak. A numerical study of ocean polarimetric thermal emission. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 37(1) :8–20, 1999.
- [39] P. Joly and S. Tordeux. Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots i : The asymptotic expansion. *Multiscale Modeling and Simulation, SIAM J. Appl. Math.*, 5(1) :304–336, 2006.
- [40] D. A. Kapp and G. S. Brown. A new numerical method for rough-surface scattering calculations. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 44(5) :711, 1996.
- [41] G Kristensson. Homogenization of corrugated interfaces in electromagnetic. *Progress in Electromagnetic Research*, 55 :1–31, 2005.
- [42] M. A. Leontovich. *Investigations on Radiowave Propagation*. Printing House of the Academy of Sciences, Moscow,, 1948.
- [43] David P. Levadoux and Bastiaan L. Michielsen. Nouvelles formulations intégrales pour les problèmes de diffraction d’ondes. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(1) :157–175, janvier 2004.
- [44] A.M. Marvin and V. Celli. Relation between the surface impedance and the extinction theorem on a rough surface. *Physical Review B*, 50 :14546–14553, 1994.
- [45] J. C. Maxwell. On physical lines of force. *Philosophical Magazine.*, 1861/1862.
- [46] R. B. Morgan. A restarted gmres method augmented with eigenvectors. *SIAM. Journal on Matrix Analysis and Applications*, 16(4) :1154–1171, october 1995.
- [47] R. B. Morgan. Gmres with deflated restarting. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(1) :20–37, 2002.
- [48] P. Naenna and J.T. Johnson. A physically-based preconditioner for quasi-planar scattering problems. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 56(8) :2421 –2426, aug. 2008.
- [49] J.-C. Nedelec. *Acoustic And Electromagnetic Equations : Integral Representations For Harmonic Problems*. Springer-Verlag New York Inc, 2001.
- [50] J. Nevard and J. B. Keller. Homogenization of rough boundaries and interfaces. *Journal on Applied Mathematics, SIAM*, 57(6) :1660–1686, 1997.

- [51] J. Ogilvy. *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces*. A. Hilger, Bristol, England, 1991.
- [52] J. A. Ogilvy and J. R. Foster. Rough surfaces : gaussian or exponential statistics. *Applied Physics*, 22 :1243–1251, 1989.
- [53] S. Pernet. A well-conditioned integral equation for iterative solution of scattering problems with a variable leontovitch boundary condition. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 44(4) :781–801, july 2010.
- [54] A. F. Peterson, C. F. Smith, and R. Mittra. Eigenvalues of the moment-method matrix and their effect on the convergence of the conjugate gradient algorithm. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 36(8) :1177–1179, august 1988.
- [55] R. Petit. *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*. Masson, Paris, 1989.
- [56] J.-R. Poirier. *Modélisation électromagnétique des effets de rugosité surfacique*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées, 14 décembre 2000.
- [57] J.-R. Poirier, A. Bendali, and P. Borderies. Impedance boundary conditions for the scattering of time-harmonic waves by rapidly varying surfaces. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 54(3) :995–1005, March 2006.
- [58] J.-R. Poirier, P. Borderies, R. Mittra, and V. Varadarajan. Numerically efficient solution of dense linear system of equations arising in a class of electromagnetic scattering problems. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 46(8) :1169–1175, Aug 1998.
- [59] Lord Rayleigh. On the dynamical theory of gratings. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 79(632) :399–416, august 1907.
- [60] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Society for Industrial Mathematics, second edition, 2002.
- [61] Y. Saad and M. H. Schultz. Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving non symmetric linear systems. *SIAM J. Stat Comput.*, vol. 7(No. 3), July 1986.
- [62] M. Saillard and G.; Soriano. Fast numerical solution for scattering from rough surfaces with small slopes. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 52(10) :2799–2803, oct 2004.
- [63] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l’homogénéisation*. Masson, Paris, 1993.
- [64] E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous media and vibration theory*. Lecture notes in physics No 127 (Springer-Verlag), 1980.
- [65] T. B. A. Senior. Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces. *Applied Scientific Research, Section B*, 8(1) :418–436, 1960.
- [66] T. B. A. Senior and J. L. Volakis. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*. 1995.
- [67] J. M. Song and W. C. Chew. Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering. *Microwave and Optical Technology Letters*, 10(1), 1995.
- [68] G. W. Stewart. *Matrix Algorithms vol I*. SIAM, 2001.
- [69] V. V. Tatarskii and V. I. Tatarskii. Non-gaussian statistical model of the ocean surface for wave-scattering theories. *Waves Random Media*, 6(4) :419–435, 1996.

-
- [70] E. I. Thorsos and D. R. Jackson. Studies of scattering theory using numerical methods. *Waves in Random Media*, 1(3) :S165–S190, 1991.
- [71] S. Tournier, J. Girardin, J.-R. Poirier, and P. Borderies. Analysis of qr-compression techniques for improving electromagnetic scattering computation by periodic rough surfaces. In *AMPERE – 13th International Conference on Microwave and RF Heating*, september 2011.
- [72] P. Tran. Calculation of the scattering of electromagnetic waves from a two-dimensional perfectly conducting surface using the method of ordered multiple interaction. *Waves in Random Media*, 7(3) :295–302, 1997.
- [73] L. Tsang, C. H. Chan, K. Pak, and H. Sangani. Monte-carlo simulations of large-scale problems of random rough surface scattering and applications to grazing incidence with the bmia/canonical grid method. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 43 :851–859, 1995.
- [74] Alexander G. Voronovich. *Wave Scattering from Rough Surfaces*. Springer Series on Wave Phenomena, 2nd edition, 1998.
- [75] K. Warnick and W. C. Chew. Numerical simulation methods for rough surface scattering. *Waves Random Media*, 11(1) :R1–R30, 2001.
- [76] K. F Warnick and D. V. Arnold. Generalization of the geometrical-optics scattering limit for a rough conducting surface. *JOSA A*, 15(9) :2355–2361, 1998.
- [77] J.C. West. Preconditioned iterative solution of scattering from rough surfaces. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 48(6) :1001 –1002, jun 2000.
- [78] J.C. West and J.M. Sturm. On iterative approaches for electromagnetic rough-surface scattering problems. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 47(8) :1281 –1288, aug 1999.
- [79] D.J. Wingham and R.H. Devayya. A note on the use of the neumann expansion in calculating the scatter from rough surfaces. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 40(5) :560–563, may 1992.
- [80] K. Zaki and A. Neureuther. Scattering from a perfectly conducting surface with a sinusoidal height profile : Te polarization. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 19(2) :208–214, Mar 1971.
- [81] K. Zaki and A. Neureuther. Scattering from a perfectly conducting surface with a sinusoidal height profile : Tm polarization. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 19(6) :747–751, Nov 1971.

Annexe A

Résumé de l'article de Holloway et Kuester [34]

Sommaire

A.1	Notations	150
A.2	Mise en équation	150
A.3	Résolution	153
A.3.1	Ordre 0	153
A.3.2	Ordre 1	155
A.3.3	Résolution des systèmes auxiliaires	157
A.3.4	Résultat synthétisé pour l'ordre 1	158
A.4	Application au cas TM	158
A.5	Application au cas TE	159

Dans cette annexe, nous décrivons la technique présentée dans l'article de Holloway et Kuester [34]. Le cas traité est celui d'une surface (de période L) parfaitement métallique invariante suivant la direction $\hat{\mathbf{z}}$. Toutefois, la simplification due à l'invariance n'est pas faite (la dérivée suivant $\hat{\mathbf{z}}$ est conservée). L'approche reste vectorielle (il n'y a pas de considération sur la polarisation). Cependant, l'approche reste identique, à savoir :

- (i) séparation des contributions lentes & celles rapides
- (ii) développement asymptotique
- (iii) développement de Taylor
- (iv) introduction des "outils" dans les équations
- (v) introduction des "outils" dans la condition aux limites
- (vi) regroupement des puissances de δ
- (vii) résolution des sous-systèmes

Cette annexe peut paraître longue. Toutefois, certains calculs sont détaillés pour mettre en valeur les points communs et les différences entre les deux mises en œuvre de l'approche.

A.1 Notations

L'invariance suivant la direction $\hat{\mathbf{z}}$ est supposée, mais la variable z est tout de même conservée. Un point quelconque de l'espace dans le repère $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ est défini par,

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

Un point quelconque du plan est $\mathbf{r}_0 = (x, 0, z)$.

Le plan se note :

$$\Gamma^0 = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \right\}$$

Contrairement à l'article, la surface est considérée ici à double échelle¹, et la frontière² Γ^δ (resp. Σ) est associée aux variables lentes (resp. rapides). Le domaine lent (resp. rapides) sera noté Ω^δ (resp. D).

Le vecteur $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unitaire normal à la surface. Le vecteur $\hat{\mathbf{t}}$ est le vecteur tangent à la surface, défini par,

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{z}} = \begin{vmatrix} +\mathcal{N} \\ +\mathcal{N}\gamma'_\delta \\ 0 \end{vmatrix}$$

De cette façon, la base $(\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{z}})$ est une base directe.

La surface considérée est à une échelle de périodicité, c'est-à-dire que nous avons

$$\gamma_\delta(x) = \delta s(\sigma) \quad \text{et} \quad \gamma'_\delta = \partial_\sigma s = s'$$

A.2 Mise en équation

(i) Séparation lente & rapide

De manière identique à la procédure d'homogénéisation présentée précédemment (Chapitre 2), le champ est séparé en une partie rapide (effective ; en majuscule) et en une partie lente (couche limite/correcteur ; en minuscule),

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{tot}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{e}(\mathbf{r}_0, \sigma, \tau) \\ \mathbf{H}^{\text{tot}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{r}_0, \sigma, \tau) \end{cases}$$

et le correcteur de couche limite est imposé nul à l'infini, i.e.,

$$\mathbf{e} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{e} = 0$$

idem sur \mathbf{h} noté \mathbf{h}_∞ .

(ii) Développement asymptotique

De plus, la solution est cherchée sous la forme d'un développement asymptotique,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}) \delta^n \quad , \quad \mathbf{e}(\mathbf{r}_0, \sigma, \tau) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{e}^{(n)}(\mathbf{r}_0, \sigma, \tau) \delta^n$$

idem sur \mathbf{H} et \mathbf{h} .

1. Dans l'article, ils considèrent la surface simplement périodique par rapport à d .
2. Pour faciliter la comparaison, les notations du reste du document sont utilisées.

(iii) Développement de Taylor

Le développement de Taylor est considéré sur les vecteurs champs effectifs, i.e., qu'il est appliqué sur chaque composante,

$$\mathbf{E}^{(n)}|_{\mathbf{r} \in \Gamma^\delta} = \mathbf{E}^{(n)}|_{\mathbf{r} \in \Gamma^0} + \sum_{k \geq 1} \frac{(\delta s)^k}{k!} \left(\partial_y^k \mathbf{E}^{(n)} \right) |_{\mathbf{r} \in \Gamma^0}, \quad \forall n \geq 0$$

idem sur \mathbf{H} .

(iv) Equation de Maxwell

Sans oublier la formule de la chaîne pour les termes de couche limite (*en minuscule*),

$$\nabla_{\mathbf{r}} \longrightarrow \nabla_{\mathbf{r}_0} + \frac{1}{\delta} \nabla_{\sigma\tau}$$

la séparation lente/rapide et le développement asymptotique sont injectés dans les Équations de Maxwell.

L'équation portant sur le rotationnel $\nabla_{\mathbf{r}} \times$ devient,

$$\left. \begin{aligned} & + \sum_{n \geq 0} \left. \begin{aligned} & \delta^{-1} \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e}^{(0)} \\ & \delta^n \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^{(n)} \\ & \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e}^{(n+1)} + \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{e}^{(n)} \\ & = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & + i\omega\mu\mathbf{H}^{(n)} \\ & + i\omega\mu\mathbf{h}^{(n)} \end{aligned} \end{aligned}$$

idem sur l'autre équation (\mathbf{H}^{tot}).

Puis l'équation sur la divergence $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot$ donne,

$$\left. \begin{aligned} & + \sum_{n \geq 0} \left. \begin{aligned} & \delta^{-1} \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathbf{h}^{(0)} \\ & \delta^n \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}^{(n)} \\ & \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathbf{h}^{(n+1)} + \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{h}^{(n)} \\ & = 0 \end{aligned} \right\}$$

et idem sur l'autre équation (\mathbf{E}^{tot}).

$$\text{(v) Condition aux Limites : } \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \left(\begin{smallmatrix} \times \mathbf{E}^{\text{tot}} \\ \cdot \mathbf{H}^{\text{tot}} \end{smallmatrix} \right) (\mathbf{r}) = 0$$

Il faut faire attention à ce que l'on manipule. Précisons le sens de la condition aux limites,

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{tot}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\delta \quad \text{signifie} \quad \left(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^{\text{tot}}(\mathbf{r}) \right)_{\mathbf{r} \in \Gamma^\delta} = 0$$

ainsi, lorsque le développement asymptotique est injecté, il vient,

$$\left(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{r}) \right)_{\mathbf{r} \in \Gamma^\delta} + \left(\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{(\mathbf{r}_0, \sigma, \tau)}^{(n)} \right)_{\substack{(\sigma, \tau) \in \Sigma \\ \mathbf{r} \in \Gamma^\delta}} = 0, \quad \forall n \geq 0$$

Dans cette dernière expression, le développement de Taylor est aussi injecté. Il faut noter que le développement de Taylor ne *touche* pas au vecteur normal $\hat{\mathbf{n}}$. Pour alléger les notations, \mathbf{r} (resp. \mathbf{r}_0) signifie ici appartenant à Γ^δ (resp. Γ^0). L'expression devient donc,

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \left(\mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(n)} + \sum_{k \geq 1}^N \frac{s^k}{k!} (\partial_y^k \mathbf{E}^{(n-k)})(\mathbf{r}_0) \right) + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{|\Sigma}^{(n)} = o(\delta^N) \quad , \quad \forall n \geq 0$$

Cette expression ainsi obtenue s'écrit en puissance de δ ,

$$\left. \begin{array}{l} \delta^0 \quad \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{|\Sigma}^{(0)} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \\ \delta^1 \quad \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{|\Sigma}^{(1)} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} + s(\sigma) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \partial_y \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \\ \vdots \\ \simeq 0 \end{array} \right\}$$

idem sur \mathbf{H}^{tot} en remplaçant $\hat{\mathbf{n}} \times$ par $\hat{\mathbf{n}} \cdot$.

Il est important de noter que le terme $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ possède encore du rapide. Á ce stade, les composantes rapides dans le champ effectif (majuscule) ne sont pas entièrement enlevées.

(vi) Synthèse en puissance de δ

Les 4 équations de Maxwell et les conditions aux limites ainsi obtenues sont synthétisées. Deux systèmes d'équations pour chaque ordre couplés par des conditions aux limites sont alors obtenus. Les systèmes pour les champs de couche limite sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 0} \\ \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e}^{(0)} = 0 \\ \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{h}^{(0)} = 0 \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot (\epsilon \mathbf{e}^{(0)}) = 0 \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{|\Sigma}^{(0)} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \quad ; \quad \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}_{|\Sigma}^{(0)} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \\ \mathbf{e}_{\infty}^{(0)} = 0 \quad ; \quad \mathbf{h}_{\infty}^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1} \\ \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e}^{(1)} = -i\omega\mu\mathbf{h}^{(0)} - \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{e}^{(0)} \\ \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{h}^{(1)} = +i\omega\epsilon\mathbf{e}^{(0)} - \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{h}^{(0)} \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot (\epsilon \mathbf{e}^{(1)}) = -\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot (\epsilon \mathbf{e}^{(0)}) \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathbf{h}^{(1)} = -\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{h}^{(0)} \\ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{|\Sigma}^{(1)} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} + s(\sigma) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \partial_y \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}_{|\Sigma}^{(1)} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} + s(\sigma) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \partial_y \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \\ \mathbf{e}_{\infty}^{(1)} = 0 \quad ; \quad \mathbf{h}_{\infty}^{(1)} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Les champs effectifs (majuscule) sont régis par les équations de Maxwell avec la condition aux limites des problèmes de couche limite (minuscules).

Une Remarque (et demi)

Dans l'article, deux changements de variables sont considérés,

a) celui par rapport aux variables rapides.

Soit, d la période des oscillations rapides, alors le paramètre δ est défini par : $\delta = k_0 d$. Ensuite, les variables rapides sont définies par : $\sigma = x/d$ et $\tau = y/d$,

b) et un autre d'adimensionnement fréquentiel des variables lentes. Les nouvelles variables lentes adimensionnées par rapport à la fréquence sont : $\tilde{\mathbf{r}} = k_0 \mathbf{r}$.

Puis la solution est cherchée sous la forme,

$$\mathbf{E}^{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}}) + \mathbf{e}(\tilde{\mathbf{r}}_0, \sigma, \tau) \quad \text{avec} \quad \mathbf{E} = \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}^{(n)} \delta^n \quad \text{et} \quad \mathbf{e} = \sum_{n \geq 0} \mathbf{e}^{(n)} \delta^n$$

L'intérêt de ces changements est d'obtenir des systèmes qui ne dépendent plus de la pulsation ω , mais de la célérité dans le vide $c = \omega/k_0$, e.g,

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \times \mathbf{E} + \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_0} \times \mathbf{e} + \frac{1}{\delta} \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e} = -ic\mu(\mathbf{H} + \mathbf{h})$$

Il faut aussi noter que le développement de Taylor est *légèrement* différent. Tout d'abord, aucune considération *directe*³ sur la forme de la surface n'est faite. Ensuite, ce changement de variables lentes permet d'obtenir le paramètre asymptotique δ .

Toutefois, ces différents jeux d'écriture ne jouent pas de rôle dans les développements suivants. Nous ne considérons pas ces deux changements de variables, et nous obtiendrons les mêmes systèmes à résoudre que ceux présentés dans l'article.

A.3 Résolution

La résolution se fait en deux temps.

1. D'abord il est montré que l'ordre 0 est bien celui d'un plan métallique, et ce quelque soit la polarisation.
2. Ensuite l'ordre 1 est manipulé pour trouver une condition aux limites liant $\{\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}\}$ et $\{\mathbf{E}^{(0)}, \mathbf{H}^{(0)}\}$. Le travail sur l'ordre 1 se fait aussi en deux temps.
 - (a) Tout d'abord, le lien est formellement exprimé.
 - (b) Ensuite, les systèmes à résoudre sont précisés et les implications sur ledit lien sont tirées en vue de faire des comparaisons avec le cas établi précédemment.

A.3.1 Ordre 0

Le théorème de Stokes⁴ est appliqué sur la première équation du système (A.1) (ce qui revient à faire une Formulation Variationnelle) :

$$0 = \int_D \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{z}} \, dS = \int_{\partial D} \mathbf{e}^{(0)} \cdot d\mathbf{l}_{\partial D}$$

3. Contrairement à notre présentation p.28.

4. cette version : $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ où \mathbf{l} représente le vecteur tangent au contour, i.e., soit $\hat{\mathbf{t}}$, soit $+\hat{\mathbf{y}}$, soit $-\hat{\mathbf{x}}$, ou soit $-\hat{\mathbf{y}}$

De plus, le contour ∂D s'écrit $\partial D = \Sigma \cup \Gamma^H \cup \text{Pér.}$. Les frontières périodiques se compensent. Et la contribution sur la partie Γ^H est nulle : soit par une considération physique, c'est à dire qu'en considérant la frontière suffisamment loin, les champs de couche limite sont nuls par définition ; soit par le calcul d'un opérateur (type 1.1.2) modélisant la fermeture du domaine.

Il ne reste plus que la partie sur la frontière métallique Σ à calculer, i.e.,

$$0 = \int_{\Sigma} \mathbf{e}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl_{\Sigma}(\sigma)$$

Or, il est clair que $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{z}}$, puis le produit mixte bien connu est utilisé : $\mathbf{e}^{(0)} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{(0)})$. Enfin, la condition aux limites est employée : $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}|_{\Sigma}^{(0)} = \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \times \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$, et le résultat est donc,

$$0 = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}_0) \times \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} \, dl_{\Sigma} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}_0) \times \int_{[0,d]} \left(-\mathcal{N} \gamma'_{\delta} \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{N} \hat{\mathbf{y}} \right) \frac{d\sigma}{\mathcal{N}}$$

Le résultat du calcul de cette intégrale, dû à la périodicité, est :

$$\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}_0) = 0$$

ce qui donne la condition aux limites d'un plan métallique⁵.

A l'aide du théorème de Stokes⁶ appliquée à la quatrième équation du système (A.1), le résultat $\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r}_0) = 0$ est démontré. Ainsi, la condition à l'ordre 0 pour le champ effectif (majuscule) est bien celui d'un plan métallique.

Le système alors obtenu pour le champ effectif $\{\mathbf{E}^{(0)}, \mathbf{H}^{(0)}\}$ correspond aux équations de Maxwell avec une condition aux limites de plan métallique , à savoir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^{(0)} = -i\omega\mu\mathbf{H}^{(0)} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}^{(0)} = +i\omega\epsilon\mathbf{E}^{(0)} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}^{(0)} = 0 \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}^{(0)} = 0 \\ \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \quad ; \quad \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

3 Remarques :

- Ce système peut se résoudre à la main.
- Il ne faut pas oublier que les champs effectifs sont des champs totaux, donc comportant le champ incident.
- Aucune hypothèse sur la polarisation n'a été faite, i.e. que ce résultat est général.

A ce stade, le champ effectif $\{\mathbf{E}^{(0)}, \mathbf{H}^{(0)}\}$ d'ordre 0 est entièrement connu. Toutefois, le champ de couche limite n'est pas encore déterminé. Il va être maintenant calculé. Pour cela l'information obtenue sur les conditions aux limites du champ effectif $\{\mathbf{E}^{(0)}, \mathbf{H}^{(0)}\}$ est exploitée, i.e.,

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \\ \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}_0) = E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r}_0) = H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{x}} + H_z^{(0)}(\mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{z}} \end{array} \right.$$

5. Pour être précis, le résultat qui est démontré est : $\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}_0) \times \hat{\mathbf{y}}) = 0$ qui montre que $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}_0)$ n'a pas de composante suivant $\hat{\mathbf{x}}$ et donne le résultat.

6. cette version : $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, ce qui se traduit ici grâce à l'invariance et la périodicité,

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{h}^{(0)} \, dS = - \int_{\Sigma} \mathbf{h}^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dl$$

Ces nouvelles expressions sont injectés dans le système de couche limite donné par Eq. (A.1),

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e}^{(0)} = 0 \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathbf{e}^{(0)} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{|\Sigma}^{(0)} = E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{h}^{(0)} = 0 \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}_{|\Sigma}^{(0)} = \gamma'_\delta \mathcal{N} H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) \end{array} \right.$$

Et il vient,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \sigma, \tau) &= E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \mathcal{E}(\sigma, \tau) \\ \mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{r}_0, \sigma, \tau) &= H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) \mathcal{H}(\sigma, \tau) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où $\{\mathcal{E}, \mathcal{H}\}$ sont des variables auxiliaires vectorielles qui vérifient les systèmes⁷,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau} \times \mathcal{E} = 0 \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathcal{E} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathcal{E}_{|\Sigma} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{n}} \\ \mathcal{E} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau} \times \mathcal{H} = 0 \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathcal{H} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathcal{H}_{|\Sigma} = \gamma'_\delta \mathcal{N} \\ \mathcal{H}_\infty = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

L'ordre 0 est entièrement déterminé, les termes de champ effectif $\{\mathbf{E}^{(0)}, \mathbf{H}^{(0)}\}$ comme ceux du champ de couche limite $\{\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{h}^{(0)}\}$ sont connus. L'ordre 1 va maintenant être résolu pour exhiber le lien (vers une condition aux limites *effective*).

A.3.2 Ordre 1

Le champ de couche limite d'ordre 0 est déterminé par Eq. (A.3). Et, ce qui est déjà connu est introduit,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{e}^{(0)}(\mathbf{r}, \sigma, \tau) &= \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \left(E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \mathcal{E}(\sigma, \tau) \right) = \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \right) \times \mathcal{E} \\ \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{e}^{(0)}(\mathbf{r}, \sigma, \tau) &= \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \left(E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \mathcal{E}(\sigma, \tau) \right) = \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \right) \cdot \mathcal{E} \end{aligned}$$

et idem sur \mathbf{h} . Ainsi, le système (A.2) régissant les couches limites d'ordre 1 est transformé,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e}^{(1)} = -i\omega\mu H_{x(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \mathcal{H} - \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \right) \times \mathcal{E} \\ \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{h}^{(1)} = +i\omega\epsilon E_{y(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \mathcal{E} - \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) \right) \times \mathcal{H} \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathbf{e}^{(1)} = - \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \right) \cdot \mathcal{E} \\ \nabla_{\sigma\tau} \cdot \mathbf{h}^{(1)} = - \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) \right) \cdot \mathcal{H} \\ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{|\Sigma}^{(1)} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} + s(\sigma) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \partial_y \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{h}_{|\Sigma}^{(1)} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} + s(\sigma) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \partial_y \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

7. la résolution est mise en place ci-après (voir A.3.3)

Le théorème de Stokes⁸ est encore utilisé. Considérant la périodicité et le caractère évanescent des champs de couche limite, il donne,

$$\begin{aligned}
 \int_D \nabla_{\sigma\tau} \times \mathbf{e}^{(1)} dS &= \int_{\partial D} \mathbf{e}^{(1)} \times d\mathbf{l}_{\partial D} = \int_{\Sigma} \mathbf{e}^{(1)} \times \hat{\mathbf{n}} dl_{\Sigma} \\
 &= \int_D \left(-i\omega\mu H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0)\mathcal{H} - \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \right) \times \mathcal{E} \right) dS \\
 &= -i\omega\mu H_{x(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \left(\int_D \mathcal{H}(\sigma, \tau) dS \right) \dots \\
 &\dots - \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} E_{y(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \times \int_D \mathcal{E}(\sigma, \tau) dS \right)
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Pour calculer Eq. (A.5), la condition aux limites d'ordre 1 est utilisée, ce qui donne,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} \mathbf{e}^{(1)} \times \hat{\mathbf{n}} dl_{\Sigma} &= \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} + s(\sigma) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \times \partial_y \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} dl_{\Sigma} \\
 &= -\mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} \times \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} dl_{\Sigma} - \partial_y \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \times \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} s(\sigma) dl_{\Sigma} \\
 &= -\left(\mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} + \bar{s} \partial_y \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \right) \times \hat{\mathbf{y}} d
 \end{aligned}$$

Pour résumer, la condition aux limites d'ordre 1 s'écrit,

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} \times \hat{\mathbf{y}} = -\bar{s} \partial_y \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \times \hat{\mathbf{y}} \tag{A.6}$$

$$+i\omega\mu H_{x(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \left(\int_D \mathcal{H}(\sigma, \tau) dS \right) \frac{1}{d} \tag{A.7}$$

$$+\nabla_{\mathbf{r}_0} E_{y(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \times \left(\int_D \mathcal{E}(\sigma, \tau) dS \right) \frac{1}{d} \tag{A.8}$$

La condition aux limites d'ordre 1 est entièrement déterminée⁹. Toutefois, il faut évaluer les quantités $\int_D \{\mathcal{E}, \mathcal{H}\}$ apparaissant dans Eq. (A.7) et Eq. (A.8). Pour cela, il faut résoudre les systèmes auxiliaires donnés par Eq. (A.4).

Avant de résoudre les systèmes auxiliaires, un jeu d'écriture sur Eq. (A.6) s'impose. A partir l'équation, $\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^{(0)} = -i\omega\mu \mathbf{H}^{(0)}$, on en déduit,

$$\begin{vmatrix} \partial_y E_x^{(0)} \\ 0 \\ \partial_y E_z^{(0)} \end{vmatrix} = -i\omega\mu \begin{vmatrix} -H_z^{(0)} \\ 0 \\ H_x^{(0)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_x E_y^{(0)} \\ 0 \\ \partial_z E_y^{(0)} \end{vmatrix}$$

8. cette version ci : $\int_V \nabla \times \mathbf{F} dv = - \oint_{\partial V} \mathbf{F} \times d\mathbf{S}$ avec \mathbf{S} sortant au volume et comme précédemment l'invariance est prise en compte.

9. la moyenne locale de la surface est notée :

$$\bar{s} = \frac{1}{d} \int_{[0,d]} s(\sigma) d\sigma$$

que l'on écrit :

$$\partial_y \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} = -i\omega\mu \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \times \hat{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0)$$

Ainsi, la condition aux limites d'ordre 1 s'écrit aussi,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} \times \hat{\mathbf{y}} &= -i\omega\mu \bar{s} \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \\ &\quad - \bar{s} \nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \times \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + i\omega\mu H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) \left(\int_D \mathcal{H}(\sigma, \tau) dS \right) \quad \frac{1}{d} \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \times \left(\int_D \mathcal{E}(\sigma, \tau) dS \right) \quad \frac{1}{d} \end{aligned}$$

A.3.3 Résolution des systèmes auxiliaires

D'après le système auxiliaire (A.4), les variables $\{\mathcal{E}, \mathcal{H}\}$ sont de la forme potentiel¹⁰,

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau} \times \mathcal{E} = 0 \\ \nabla_{\sigma\tau} \times \mathcal{H} = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = -\nabla_{\sigma\tau} \phi_e \\ \mathcal{H} = -\nabla_{\sigma\tau} \phi_h \end{array} \right.$$

et ces potentiels vérifient les systèmes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \phi_e = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \nabla_{\sigma\tau} \phi_e |_{\Sigma} = -\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{n}} \\ = -\gamma'_\delta \mathcal{N} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla_{\sigma\tau} \phi_e = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \phi_h = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\sigma\tau} \phi_h |_{\Sigma} = -\gamma'_\delta \mathcal{N} \\ \nabla_{\sigma\tau} \phi_h = 0 \end{array} \right.$$

La condition à l'infini peut se transformer,

$$\nabla_{\sigma\tau} \phi_{e,h} = 0 \quad \iff \quad \phi_{e,h} \text{ borné à l'infini (noté } \phi_{e,h} < c_{ste})$$

Finalement, les systèmes auxiliaires à résoudre s'écrivent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \phi_e = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \nabla_{\sigma\tau} \phi_e |_{\Sigma} = -\gamma'_\delta \mathcal{N} \hat{\mathbf{z}} \\ \text{(ou } \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla_{\sigma\tau} \phi_e |_{\Sigma} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{t}} \text{)} \\ \phi_e < c_{ste} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \phi_h = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\sigma\tau} \phi_h |_{\Sigma} = -\gamma'_\delta \mathcal{N} \\ \phi_h < c_{ste} \end{array} \right.$$

Enfin, le théorème de Stokes¹¹ est une dernière fois utilisée pour avoir une relation explicite entre les champs auxiliaires et les potentiels,

$$\begin{aligned} \int_D \mathcal{E}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau &= - \int_D \nabla_{\sigma\tau} \phi_e d\sigma d\tau = \int_{\Sigma} \phi_e \hat{\mathbf{n}} dl_{\Sigma} \\ \int_D \mathcal{H}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau &= - \int_D \nabla_{\sigma\tau} \phi_h d\sigma d\tau = \int_{\Sigma} \phi_h \hat{\mathbf{n}} dl_{\Sigma} \end{aligned}$$

10. à un vecteur constant additif près, i.e., $\mathcal{E} = -\nabla_{\sigma\tau} \phi_e + \prec \mathcal{E} \succ$, et l'on pourrait fixer $\prec \mathcal{E} \succ$ par une moyenne à déterminer.

11. cette version : $\int_V \nabla f dv = \oint_{\partial V} f d\mathbf{S}$, et idem que précédemment

A.3.4 Résultat synthétisé pour l'ordre 1

Finalement, la condition d'ordre 1 pour le champ effectif $\{\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}\}$ s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{(1)} \times \hat{\mathbf{y}} &= \left(-i\omega\mu \bar{s} \mathbf{H}_{(\mathbf{r}_0)}^{(0)} \right) \\ &+ \left(i\omega\mu H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) \int_{\Sigma} \phi_h \hat{\mathbf{n}} dl_{\Sigma} \right) \frac{1}{d} \\ &+ \left(-\bar{s} \nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \times \hat{\mathbf{y}} \right) \\ &+ \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \times \int_{\Sigma} \phi_e \hat{\mathbf{n}} dl_{\Sigma} \right) \frac{1}{d} \end{aligned}$$

En notant (abusivement) les quantités,

$$\begin{aligned} \alpha_{e,h} &= \frac{1}{d} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \gamma'_{\delta} \phi_{e,h} dl_{\Sigma} = \frac{1}{d} \int_0^d s'(\sigma) \phi_{e,h}(\sigma, \tau = s) d\sigma \\ \beta_{e,h} &= \frac{1}{d} \int_{\Sigma} \mathcal{N} \phi_{e,h} dl_{\Sigma} = \frac{1}{d} \int_0^d \phi_{e,h}(\sigma, \tau = s) d\sigma \end{aligned}$$

la condition d'ordre 1 de [34] s'écrit composante par composante :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^{(1)} = -i\omega\mu \bar{s} H_z^{(0)}(\mathbf{r}_0) + \left(\bar{s} + \beta_e \right) \partial_x E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \\ E_z^{(1)} = i\omega\mu \left(\bar{s} + \alpha_h \right) H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) - \left(\bar{s} - \beta_e \right) \partial_z E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \\ \\ i\omega\mu \beta_h H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0) = \alpha_e \partial_z E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0) \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

A.4 Application au cas TM

Dans le cas de la polarisation TM (avec l'invariance suivant la direction $\hat{\mathbf{z}}$), une forme de champ incident est imposé, ce qui implique que le champ cherché possède la même forme, à savoir,

$$E_x = 0 = E_y \quad , \quad H_z = 0$$

Ceci donne dans Eq. (A.9)

$$E_z^{(1)}(\mathbf{r}_0) = i\omega\mu \left(\bar{s} + \alpha_h \right) H_x^{(0)}(\mathbf{r}_0)$$

De plus, en utilisant l'équation de Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$, nous obtenons la condition à l'ordre 1 dans la polarisation TM,

$$E_z^{(1)}(\mathbf{r}_0) = \left(\bar{s} + \alpha_h \right) \partial_y E_z^{(0)}(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.10})$$

Et le système auxiliaire à résoudre¹² est,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \phi_h(\sigma, \tau) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\sigma\tau} \phi_h|_{\Sigma} = -s' \mathcal{N} \\ \phi_h < C_{ste} \\ \infty \end{array} \right. \text{ et } \begin{array}{l} \alpha_h = \frac{1}{d} \int_0^d s' \phi_h|_{\Sigma} d\sigma \\ \bar{s} = \frac{1}{d} \int_0^d s d\sigma \end{array} \quad (\text{A.11})$$

A.5 Application au cas TE

Dans le cas de la polarisation TE, nous imposons,

$$H_x = 0 = H_y \quad , \quad E_z = 0$$

Ceci donne dans Eq. (A.9)

$$E_x^{(1)}(\mathbf{r}_0) = -i\omega\mu \bar{s} H_z^{(0)}(\mathbf{r}_0) + (\bar{s} + \beta_e) \partial_x E_y^{(0)}(\mathbf{r}_0)$$

De plus, en utilisant l'équation de Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = +i\omega\epsilon\mathbf{E}$, nous obtenons la condition à l'ordre 1 dans la polarisation TE,

$$\partial_y H_z^{(1)}(\mathbf{r}_0) = \omega^2 \mu \epsilon \beta_e H_z^{(0)}(\mathbf{r}_0) + (\bar{s} + \beta_e) \partial_y^2 H_z^{(0)}(\mathbf{r}_0)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \phi_e(\sigma, \tau) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \nabla_{\sigma\tau} \phi_e|_{\Sigma} = -s' \mathcal{N} \hat{\mathbf{z}} \\ \phi_e < C_{ste} \\ \infty \end{array} \right. \text{ et } \begin{array}{l} \beta_e = \frac{1}{d} \int_0^d \phi_e|_{\Sigma} d\sigma \\ \bar{s} = \frac{1}{d} \int_0^d s d\sigma \end{array}$$

De plus, si l'équation de Helmholtz est respectée, nous avons la relation,

$$k^2 H_z^{(0)} = -\partial_y^2 H_z^{(0)} - \partial_x^2 H_z^{(0)}$$

et nous pouvons alors écrire,

$$\partial_y H_z^{(1)}(\mathbf{r}_0) = \bar{s} \partial_y^2 H_z^{(0)}(\mathbf{r}_0) - \beta_e \partial_x^2 H_z^{(0)}(\mathbf{r}_0) \quad (\text{A.12})$$

12. Attention à la condition de compatibilité : $\int_{\Sigma} \gamma'_s \mathcal{N} dl_{\Sigma} = 0$ qui implique que la surface est purement périodique, i.e., $\gamma'_s(d) - \gamma'_s(0) = 0$. Ou encore c'est dire que la moyenne de la dérivée sur une cellule est nulle.

Annexe B

Ordre 2 – Polarisation TE (métallique)

Dans cette annexe, la condition aux limites modifiée d'ordre 2 $\widetilde{C.L.}^{(2)}$ est établie pour la polarisation Transverse Électrique pour des surfaces à une échelle de périodicité. Ils sont à notre connaissance originaux.

Avant d'appliquer la même démarche que dans le chapitre 2, à savoir résoudre le problème en $\Pi^{(2)}$ puis appliquer la condition de compatibilité sur le problème en $\Pi^{(3)}$, nous commençons par rappeler brièvement les résultats obtenus pour l'ordre 0 et l'ordre 1.

B.1 Résumé des épisodes précédents

Le profil de la surface considérée à une échelle de périodicité. Ceci se traduit par $\gamma_\delta(x) = \delta s(\sigma)$ avec $\sigma = x/\delta$ et implique que $\gamma'_\delta = \partial_\sigma s = s'$.

Dans le chapitre 2 sont établis les résultats suivants. Le premier est établi section 2.4.2 (p.50) et le second est établi section 2.4.3 (p.52).

$$\begin{aligned} \widetilde{C.L.}^{(0)} & : \partial_y u|_{y=0} = 0 \\ \widetilde{C.L.}^{(1)} & : \partial_y u|_{y=0} + \bar{s} \partial_y^2 u|_{y=0} + h_{TE} \partial_x^2 u|_{y=0} = 0 \end{aligned}$$

avec \bar{s} la simple moyenne locale du profil Eq. (2.30) et le paramètre h_{TE} est donné par,

$$h_{TE} = \mathfrak{g}_{TE} - \mathfrak{h}_{TE}$$

avec \mathfrak{g}_{TE} et \mathfrak{h}_{TE} calculés respectivement à l'aide de Eq. (2.32) et Eq. (2.31) qui dépendent de la solution du système auxiliaire Eq. (2.29) réécrit ici,

$$\begin{cases} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta = 0 \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta|_\Sigma = \mathcal{N} \gamma'_\delta = \frac{s'}{\sqrt{1+s'}} \\ \beta = 0 \\ \infty \end{cases}$$

Pour finir, rappelons que la correction de couche limite $\Pi^{(1)}$ n'est pas nul et dépend de la variable auxiliaire β , c'est-à-dire,

$$\Pi^{(1)}(x, \sigma, \tau) = \beta(\sigma, \tau) \partial_x u|_{y=0}^{(0)}$$

Pour finir, les notations utilisées dans cette annexe sont exactement les mêmes que celles définies dans les sections mentionnées ci-avant.

B.2 Résolution de $\Pi^{(2)}$: systèmes auxiliaires

Les quantités déjà évaluées sont injectées dans le système en $\Pi^{(2)}$ donné par Eq. (2.25), il ne reste plus que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \Pi^{(2)} = -2\partial_\sigma \beta \partial_x^2 u_{|y=0}^{(0)} \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \Pi^{(2)} \Big|_\Sigma = +\mathcal{N} \gamma'_\delta \beta |_\Sigma \partial_x^2 u_{|y=0}^{(0)} \\ \quad - \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{|y=0}^{(1)} \\ \quad - s(\sigma) \partial_{\hat{\mathbf{n}}} \partial_y u_{|y=0}^{(0)} \\ \\ = +\mathcal{N} \gamma'_\delta \beta |_\Sigma \partial_x^2 u_{|y=0}^{(0)} \\ \quad + \mathcal{N} \gamma'_\delta \partial_x u_{|y=0}^{(1)} - \mathcal{N} \partial_y u_{|y=0}^{(1)} \\ \quad + \mathcal{N} \gamma'_\delta s \partial_x^2 u_{|y=0}^{(0)} - \mathcal{N} s \partial_y^2 u_{|y=0}^{(0)} \\ \\ \Pi_\infty^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

Nous cherchons la solution de ce système sous la forme,

$$\Pi^{(2)}(x, \sigma, \tau) = \beta_{xx}^0 \partial_x^2 u_{|y=0}^{(0)} + \beta_x^1 \partial_x u_{|y=0}^{(1)} + \beta_y^1 \partial_y u_{|y=0}^{(1)} + \beta_{xy}^0 \left(\partial_y \partial_x u^{(0)} \right)_{|y=0} + \beta_{yy}^0 \partial_y^2 u_{|y=0}^{(0)}$$

où les variables auxiliaires vérifient les systèmes suivants obtenus par identification. Les variables relatives à l'ordre 0 satisfont,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta_{xx}^0 = -2\partial_\sigma \beta \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_{xx}^0 \Big|_\Sigma = \mathcal{N} \gamma'_\delta \beta |_\Sigma \\ \beta_{xx}^0 = 0 \\ \infty \end{array} \right. \Big| \text{et} \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta_{xy}^0 = 0 \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_{xy}^0 \Big|_\Sigma = \mathcal{N} \gamma'_\delta s \\ \beta_{xy}^0 = 0 \\ \infty \end{array} \right. \Big| \text{et} \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta_{yy}^0 = 0 \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_{yy}^0 \Big|_\Sigma = -\mathcal{N} s \\ \beta_{yy}^0 = 0 \\ \infty \end{array} \right.$$

et celles portant sur l'ordre 1,

$$\beta_x^1 \equiv \beta \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta_y^1 = 0 \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_y^1 \Big|_\Sigma = -\mathcal{N} \\ \beta_y^1 = 0 \\ \infty \end{array} \right.$$

En utilisant la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(1)}$, le système d'ordre 1 restant peut s'introduire dans ceux d'ordre 0, c'est-à-dire que la variable auxiliaire β_y^1 est inutile. Les trois systèmes à résoudre sont,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta_{xx}^0 = -2\partial_\sigma \beta \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_{xx}^0 \Big|_\Sigma = \mathcal{N} (\gamma'_\delta \beta |_\Sigma + h_{TE}) \\ \beta_{xx}^0 = 0 \\ \infty \end{array} \right. \Big| \text{et} \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta_{xy}^0 = 0 \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_{xy}^0 \Big|_\Sigma = \mathcal{N} \gamma'_\delta s \\ \beta_{xy}^0 = 0 \\ \infty \end{array} \right. \Big| \text{et} \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\sigma\tau}^2 \beta_{yy}^0 = 0 \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}\sigma} \beta_{yy}^0 \Big|_\Sigma = \mathcal{N} (\bar{s} - s) \\ \beta_{yy}^0 = 0 \\ \infty \end{array} \right.$$

avec le correcteur de couche limite d'ordre 2 de la forme,

$$\Pi^{(2)}(x, \sigma, \tau) = \beta \partial_x u_{|y=0}^{(1)} + \beta_{xx}^0 \partial_x^2 u_{|y=0}^{(0)} + \beta_{xy}^0 \left(\partial_x \partial_y u^{(0)} \right)_{|y=0} + \beta_{yy}^0 \partial_y^2 u_{|y=0}^{(0)}$$

B.3 Condition de compatibilité sur $\Pi^{(3)}$

Il faut maintenant appliquer la condition de compatibilité pour le correcteur de couche limite $\Pi^{(3)}$. En d'autres termes il faut évaluer et simplifier l'équation suivante,

$$\begin{aligned} - \int_D 2\partial_x \partial_\sigma \Pi^{(2)} + \{k^2 + \partial_x^2\} \Pi^{(1)} \, dS &= - \int_\Sigma +\mathcal{N} \gamma'_\delta \partial_x \Pi^{(2)} \Big|_\Sigma \, dl \\ &+ \int_\Sigma \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{y=0}^{(2)} \, dl \\ &+ \int_\Sigma s \left(\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(1)} \right) \Big|_{y=0} + \frac{s^2}{2} \left(\partial_y^2 \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \, dl \end{aligned}$$

Un rapide calcul permet de simplifier certains termes de champ effectif et il ne reste plus que,

$$\int_\Sigma \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u_{y=0}^{(2)} + s \left(\partial_y \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(1)} \right) \Big|_{y=0} + \frac{s^2}{2} \left(\partial_y^2 \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \, dl = -d \partial_y u_{y=0}^{(2)} - d\bar{s} \partial_y^2 u_{y=0}^{(1)} - d \frac{\bar{s}^2}{2} \partial_y^3 u_{y=0}^{(0)}$$

Pour les termes de couche limite, le membre de droite (surfaccique) donne,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma +\mathcal{N} \gamma'_\delta \partial_x \Pi^{(2)} \Big|_\Sigma \, dl &= \partial_x^2 u_{y=0}^{(1)} \int_\Sigma \mathcal{N} \gamma'_\delta \beta \Big|_\Sigma \, dl \longrightarrow \mathfrak{h}_{TE} \\ \partial_x^3 u_{y=0}^{(0)} \int_\Sigma \mathcal{N} \gamma'_\delta \beta_{xx}^0 \Big|_\Sigma \, dl &\longrightarrow \mathfrak{h}_{xx} \\ \left(\partial_x^2 \partial_y u^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \int_\Sigma \mathcal{N} \gamma'_\delta \beta_{xy}^0 \Big|_\Sigma \, dl &\longrightarrow \mathfrak{h}_{xy} \\ \left(\partial_x \partial_y^2 u^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \int_\Sigma \mathcal{N} \gamma'_\delta \beta_{yy}^0 \Big|_\Sigma \, dl &\longrightarrow \mathfrak{h}_{yy} \end{aligned}$$

et le membre de gauche (volumique) donne,

$$\begin{aligned} \int_D \partial_x \partial_\sigma \Pi^{(2)} \, dS &= \partial_x^2 u_{y=0}^{(1)} \int_D \partial_\sigma \beta \, dS \longrightarrow \mathfrak{g}_{TE} \\ \partial_x^3 u_{y=0}^{(0)} \int_D \partial_\sigma \beta_{xx}^0 \, dS &\longrightarrow \mathfrak{g}_{xx} \\ \left(\partial_x^2 \partial_y u^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \int_D \partial_\sigma \beta_{xy}^0 \, dS &\longrightarrow \mathfrak{g}_{xy} \\ \left(\partial_x \partial_y^2 u^{(0)} \right) \Big|_{y=0} \int_D \partial_\sigma \beta_{yy}^0 \, dS &\longrightarrow \mathfrak{g}_{yy} \\ \int_D \{k^2 + \partial_x^2\} \Pi^{(1)} \, dS &= \left\{ k^2 \partial_x u_{y=0}^{(0)} + \partial_x^3 u_{y=0}^{(0)} \right\} \int_D \beta \, dS \longrightarrow \mathfrak{f}_{TE} \end{aligned}$$

B.4 Synthèse

Finalement il faut rassembler tous les résultats et la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$ s'écrit,

$$\begin{aligned}
 \partial_y u|_{y=0}^{(2)} &+ \bar{s} \partial_y^2 u|_{y=0}^{(1)} + \frac{\bar{s}^2}{2} \partial_y^3 u|_{y=0}^{(0)} \\
 &+ h_{TE} \partial_x^2 u|_{y=0}^{(1)} \\
 &+ h_{xx} \left(\partial_x^3 u^{(0)} \right) |_{y=0} \\
 &+ h_{xy} \left(\partial_x^2 \partial_y u^{(0)} \right) |_{y=0} \\
 &+ h_{yy} \left(\partial_x \partial_y^2 u^{(0)} \right) |_{y=0} \\
 &+ k^2 \mathfrak{f}_{TE} \partial_x u|_{y=0}^{(0)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}
 h_{xx} &= \mathfrak{g}_{xx} - \mathfrak{h}_{xx} - \mathfrak{f}_{TE} \\
 h_{xy} &= \mathfrak{g}_{xy} - \mathfrak{h}_{xy} \\
 h_{yy} &= \mathfrak{g}_{yy} - \mathfrak{h}_{yy}
 \end{aligned}$$

Il est important de noter qu'en incidence normale, la $\widetilde{\text{C.L.}}^{(2)}$ est réduite à seulement,

$$\partial_y u|_{y=0}^{(2)} + \bar{s} \partial_y^2 u|_{y=0}^{(1)} + \frac{\bar{s}^2}{2} \partial_y^3 u|_{y=0}^{(0)} = 0$$

Pour finir, la condition aux limites équivalent d'ordre 2 se déduit de $\text{C.L.E.} = \delta^2 \widetilde{\text{C.L.}}^{(2)} + \delta \widetilde{\text{C.L.}}^{(1)} + \widetilde{\text{C.L.}}^{(0)} + o(\delta^2)$.

Annexe C

Paires propres à l'ordre 1 par la théorie des perturbations

Nous voulons connaître une approximation d'ordre 1 des valeurs propres et des vecteurs propres. L'idée est donc d'utiliser la théorie des perturbations. Cette annexe rassemble dans une notation unifiée le détail de calculs déjà connu (voir [19] ou [68] chapitre 1.3).

Dans toute cette partie, les équations comportant **HX** sont des hypothèses qui mériteront une vérification par la suite.

Tout d'abord, nous supposons que la matrice Z associée à la surface rugueuse peut s'écrire sous la forme d'une perturbation de la plaque périodique, i.e., la matrice Z s'écrit sous la forme du développement asymptotique,

$$Z = Z^{(0)} + \delta Z^{(1)} + o(\delta) \quad \mathbf{H0} \quad (\text{C.1})$$

où $Z^{(0)}$ est la matrice associée à la plaque périodique, et $Z^{(1)}$ représente la perturbation du premier ordre.

Nous avons entièrement déterminé les valeurs/vecteurs propres de $Z^{(0)}$ qui sont les modes de Floquet (Φ_n) et leurs constantes de propagation (λ_n) associées, i.e.,

$$Z^{(0)}\Phi_n = \lambda_n\Phi_n$$

Nous cherchons maintenant à évaluer et caractériser à l'ordre 1 le couple $\{\mu_n, \psi_n\}$ tel que :

$$Z\psi_n = \mu_n\psi_n \quad (\text{C.2})$$

où le développement asymptotique suivant est aussi supposé,

$$\mu_n = \epsilon_n^{(0)} + \delta\epsilon_n^{(1)} + o(\delta) \quad \mathbf{H1a} \quad (\text{C.3})$$

$$\psi_n = j_n^{(0)} + \delta j_n^{(1)} + o(\delta) \quad \mathbf{H1b} \quad (\text{C.4})$$

De plus, nous imposons que les vecteurs propres soient de norme 1,

$$\left(\psi_n \middle| \psi_n\right) = 1 \quad (\text{C.5})$$

À partir de Eq. (C.5), nous injectons Eq. (C.4) ce qui mène après identification en puissance de δ à,

$$\left(j_n^{(0)} \middle| j_n^{(0)}\right) = 1 \quad (\text{C.6})$$

$$\delta \left(j_n^{(1)} \middle| j_n^{(0)}\right) = -\overline{\delta \left(j_n^{(1)} \middle| j_n^{(0)}\right)} \quad (\text{C.7})$$

Cette dernière équation Eq. (C.7) signifie que $\delta \left(j_n^{(1)} \middle| j_n^{(0)} \right)$ est purement imaginaire. De plus, Eq. (C.2) est défini à un terme multiplicatif près et imposer une valeur à $\left(j_n^{(1)} \middle| j_n^{(0)} \right)$ revient à fixer la phase de ψ_n . Nous imposons donc,

$$\left(j_n^{(1)} \middle| j_n^{(0)} \right) = 0 \quad (\text{C.8})$$

Ainsi, ce choix d'imposer les vecteurs propres ψ_n à une norme de 1 Eq. (C.5) implique deux résultats, à savoir que les vecteurs propres à l'ordre 0 sont aussi de norme 1 Eq. (C.6) et aussi que les vecteurs propres d'ordre 0 et ceux d'ordre 1 sont orthogonaux Eq. (C.8).

Maintenant, la perturbation (les trois hypothèses Eq. (C.1), Eq. (C.3) et Eq. (C.4)) est injectée dans l'équation de valeur propre Eq. (C.2). Après quelques développements, les puissances de δ sont identifiées et les deux équations suivantes sont alors obtenues,

$$Z^{(0)} j_n^{(0)} = \epsilon_n^{(0)} j_n^{(0)} \quad (\text{C.9})$$

$$Z^{(0)} j_n^{(1)} + Z^{(1)} j_n^{(0)} = \epsilon_n^{(0)} j_n^{(1)} + \epsilon_n^{(1)} j_n^{(0)} \quad (\text{C.10})$$

$$\dots = \dots + o(\delta)$$

De Eq. (C.9) nous en déduisons par identification le couple propre d'ordre 0 $\{\epsilon_n^{(0)}, j_n^{(0)}\} = \{\lambda_n, \Phi_n\}$. Ce résultat n'apporte pas d'information nouvelle et conforte l'approche mise en place précédemment.

Avant de poursuivre les calculs, nous rappelons que la matrice adjointe de $Z^{(0)}$ est la matrice $Z^{(0)H}$, ou autrement dit,

$$\left(Z^{(0)} u \middle| v \right) = \left(u \middle| Z^{(0)H} v \right) \quad \forall u, \forall v$$

et bien entendu $Z^{(0)H} \Phi_n = \overline{\lambda_n} \Phi_n$.

Nous allons déterminer $\epsilon_n^{(1)}$ la perturbation d'ordre 1 de la valeur propre, puis $j_n^{(1)}$ celle du vecteur propre. Pour cela nous allons utiliser Eq. (C.10).

Dans un premier temps, nous projetons Eq. (C.10) sur le vecteur Φ_n , ce qui donne,

$$\left(Z^{(0)} j_n^{(1)} \middle| \Phi_n \right) + \left(Z^{(1)} \Phi_n \middle| \Phi_n \right) = \lambda_n \left(j_n^{(1)} \middle| \Phi_n \right) + \epsilon_n^{(1)} \left(\Phi_n \middle| \Phi_n \right)$$

En utilisant les simplifications induites par les équations Eq. (C.6) et Eq. (C.8), et en remarquant que,

$$\left(Z^{(0)} j_n^{(1)} \middle| \Phi_n \right) = \left(j_n^{(1)} \middle| Z^{(0)H} \Phi_n \right) = \overline{\lambda_n} \left(j_n^{(1)} \middle| \Phi_n \right) = 0$$

la perturbation d'ordre 1 de la valeur propre devient,

$$\epsilon_n^{(1)} = \left(Z^{(1)} \Phi_n \middle| \Phi_n \right) \quad (\text{C.11})$$

Pour finir, nous cherchons $j_n^{(1)}$ la perturbation d'ordre 1 du vecteur propre tel que Eq. (C.10) soit vérifiée. La projection sur Φ_n a déterminé $\epsilon_n^{(1)}$, essayons de projeter Eq. (C.10) sur Φ_p pour p différent de n , i.e.,

$$\left(Z^{(0)} j_n^{(1)} \middle| \Phi_p \right) + \left(Z^{(1)} \Phi_n \middle| \Phi_p \right) = \lambda_n \left(j_n^{(1)} \middle| \Phi_p \right) + \epsilon_n^{(1)} \left(\Phi_n \middle| \Phi_p \right) \quad (\forall p \neq n)$$

et après simplification, il reste,

$$\lambda_p \left(j_n^{(1)} \middle| \Phi_p \right) + \left(Z^{(1)} \Phi_n \middle| \Phi_p \right) = \lambda_n \left(j_n^{(1)} \middle| \Phi_p \right) \quad (\forall p \neq n)$$

De plus, les vecteurs Φ_p forment une base orthonormée, nous en déduisons donc

$$j_n^{(1)} = \sum_{p \neq n} \frac{\left(Z^{(1)} \Phi_n | \Phi_p \right)}{\lambda_n - \lambda_p} \Phi_p \quad (\text{C.12})$$

Synthèse

Finalement nous avons caractérisé à l'ordre 1, les modes propres correspondant à l'impédance Z associée à la surface rugueuse. Ainsi, en substituant respectivement les deux résultats Eq. (C.11) et Eq. (C.12) dans les développements asymptotiques Eq. (C.3) et Eq. (C.4), nous avons à l'ordre 1,

$$\begin{aligned} Z\psi_n &= \mu_n \psi \\ \text{avec} \quad \mu_n &= \left(Z \Phi_n | \Phi_n \right) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\text{et} \quad \psi_n = \Phi_n + \sum_{p \neq n} \frac{\left(Z \Phi_n | \Phi_p \right)}{\lambda_n - \lambda_p} \Phi_p \quad (\text{C.14})$$

Eq. (4.23) n'est pas vraiment une surprise. Nous avons intuitivement proposé une telle valeur dans le préconditionneur M_1^{diag} (voir p. 137).

Eq. (4.23) est physiquement raisonnable. La correction apportait par l'ordre 1 correspond aux modes engendrés (couplés) par la surface rugueuse excitée par un mode de Floquet (ici le n -ième). De plus, les vecteurs propres d'ordre 1 ψ_n sont normés mais ils ne sont pas orthogonaux, car pour $n \neq m$,

$$\begin{aligned} \left(\psi_n | \psi_m \right) &= \left(\Phi_n | \Phi_m \right) + \sum_{p \neq n} \frac{\left(Z \Phi_n | \Phi_p \right)}{\lambda_n - \lambda_p} \left(\Phi_p | \Phi_m \right) + \sum_{q \neq m} \frac{\overline{\left(Z \Phi_m | \Phi_q \right)}}{\overline{\lambda_m - \lambda_q}} \left(\Phi_n | \Phi_q \right) \\ &= \frac{\left(Z \Phi_n | \Phi_m \right)}{\lambda_n - \lambda_m} - \frac{\overline{\left(Z \Phi_m | \Phi_n \right)}}{\overline{\lambda_n - \lambda_m}} \neq 0 \end{aligned}$$

Toutefois, pour obtenir ces résultats, l'écriture sous la forme d'un développement asymptotique est supposé. Cette supputation est cohérente avec les résultats obtenus dans le cadre de l'homogénéisation.

Résumé

Cette thèse traite de la diffusion par des surfaces rugueuses monodimensionnelles. Les surfaces présentant des petites échelles de variations nécessitent une discrétisation fine pour représenter les effets de diffusion sur le champ diffracté, ce qui augmente les coûts numériques. Deux aspects sont considérés : la réduction de la taille du problème en construisant une condition aux limites équivalente traduisant les effets des variations rapides et la réduction du nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le système linéaire issu de la méthode des moments par une méthode basée sur les sous-espaces de Krylov. En ce qui concerne la réduction de la taille du problème, une technique d'homogénéisation est utilisée pour transformer la condition aux limites posée sur la surface rugueuse par des paramètres effectifs. Ces paramètres sont déterminés par des problèmes auxiliaires qui tiennent compte des échelles fines de la surface. Dans le cas de surfaces parfaitement métalliques, la procédure est appliquée en polarisation Transverse Magnétique (TM) et Transverse Électrique (TE). Une impédance équivalente de Léontovich d'ordre 1 est déduite. Le processus est automatique et les ordres supérieurs sont dérivés pour la polarisation TM. La procédure d'homogénéisation est aussi appliquée pour des interfaces rugueuses séparant deux milieux diélectriques. En ce qui concerne la réduction du nombre d'itérations, un préconditionneur, basé sur des considérations physiques, est construit à partir des modes de Floquet. Bien que le préconditionneur soit initialement élaboré pour des surfaces périodiques, nous montrons qu'il est aussi efficace pour des surfaces tronquées éclairées par une onde plane. L'efficacité des deux aspects présentés dans cette thèse est numériquement illustrée pour des configurations d'intérêt.

Mots clés : *surface rugueuse, homogénéisation, préconditionneur physique, développement asymptotique, condition aux limites équivalente, modes de Floquet*

Abstract

This work is about the scattering by monodimensional rough surfaces. Surfaces presenting small scales of variations need a very refined mesh to finally capture the scattering field behaviour what increases the computational cost. Two aspects are considered : the reduction of the problem size through an effective boundary condition incorporating the effect of rapid variations and the reduction of the number of iterations to solve the linear system arising from method of moments by a method based on Krylov subspace. Firstly, an homogenization process is used to convert the boundary condition on the rough interface into effective parameters. These parameters are determined by the solutions of auxiliary problems which involve the detailed profile of the interface. In the case of perfectly metallic surfaces, the process is applied to the E- and H-polarization and an Leontovich impedance of order 1 is deduced. The process is automatic and higher orders are derived for E-polarization. The homogenization process is also applied to dielectric rough interfaces. Secondly, a physically-based preconditioner is built with Floquet's modes. Although the preconditioner has been designed for periodical surfaces, it was shown to be efficient in the case of truncated surfaces illuminated by a plane wave. The efficiency of both aspects is numerically illustrated for some configurations of interest.

Key words : *rough surfaces, homogenization, physically-based preconditioner, asymptotic expansion, effective boundary conditions, Floquet's modes*