

Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

Présentée et soutenue par :

Jérémy OMER

le mercredi 27 février 2013

Titre :

Modèles déterministes et stochastiques pour la résolution numérique
du problème de maintien de séparation entre aéronefs

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED AA : Mathématiques appliquées et Informatique

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA MOIS

Directeur(s) de Thèse :

M. Gérard VERFAILLIE (directeur de thèse)

M. Thomas CHABOUD (co-directeur de thèse)

Jury :

M. Christian ARTIGUES - Examineur

M. Didier DUMUR - Rapporteur

M. Jean-Loup FARGES - Examineur

M. Pierre FLENER - Rapporteur

M. François VANDERBECK - Examineur

M. Gérard VERFAILLIE - Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer ma plus profonde gratitude à Jean-Loup Farges. La rigueur et la précision de ses analyses ainsi que son immense culture scientifique ont toujours permis de relancer la réflexion dans les impasses, de questionner les raisonnements vacillants et de conforter la solidité des travaux aboutis.

Un très grand merci à Thomas Chaboud qui m'a soutenu pendant plus de trois ans et a toujours été disponible pour répondre à toutes mes questions, qu'elles touchent à l'informatique, aux mathématiques, au trafic aérien, ou à mes ruminations éthiques et existentielles. La consommation de carburant des avions, l'usage des pointeurs en C++ et la possibilité de fabriquer un engin spatial capable de se déplacer à la vitesse de la lumière sont autant de sujets complexes dont il est hautement nécessaire de débattre.

Je remercie aussi Gérard Verfaillie d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse et d'avoir toujours été une oreille attentive au cours de ces trois années.

Je tiens à vivement remercier Didier Dumur et Pierre Flener d'avoir accepté d'être mes rapporteurs et d'avoir manifestement consacré une part importante de leur temps à la lecture de mon mémoire. Merci également à Christian Artigues et François Vanderbeck d'avoir bien voulu participer au jury auprès de Jean-Loup Farges et Gérard Verfaillie.

Un grand merci aux membres du DCPS de l'ONERA Toulouse avec qui j'ai partagé mon quotidien pendant trois années. Merci pour les pauses café et pour les pauses tout court, pour les conseils et les services, pour les discussions et pour les blagues. En particulier, je regrette déjà les discussions polémiques avec Claire Sarrat, celles conflictuelles mais toujours drôles avec Franck Morel et Armand Oyzel, les coups de main de Sébastien Aubry, l'efficacité de Claire Dabin, et la précision de l'esprit critique de Thomas Rivière. Merci aussi aux membres de l'équipe RealOpt à Bordeaux avec qui j'ai passé les derniers mois de la rédaction. Merci notamment à Pierre Pesneau, sans l'aide de qui j'aurais eu beaucoup de mal à m'extirper de la préparation de mes cours pour mettre un point final à ce mémoire.

Je souhaite aussi remercier les collègues de l'ENAC pour avoir partagé leur vision et leur expertise sur le contrôle du trafic aérien. Je remercie chaleureusement Alexandre Gondran ; son propos est toujours à la fois éclairant, rassurant et drôle, qu'il soit recueilli à l'ENAC ou dans un bar. Merci à Sonia Cafieri et à Pascal Lézaud pour les matinées pendant lesquelles nous avons échangé sur mes travaux. Merci à Daniel Delahaye pour son soutien en début de thèse et pour sa participation à l'écriture du sujet de la thèse.

La tâche désormais achevée, j'aurais beau jeu de dire que les trente-neuf mois de travail qui ont abouti à l'écriture de ce mémoire sont passés vite, finalement. La vérité est toute autre : il faut bien reconnaître que cela m'a parfois semblé interminable. Je remercie donc du fond du cœur ma famille et mes amis qui m'ont soutenu dans les moments difficiles et m'ont fait adorer les jours plus joyeux. Un merci tout spécial à ma mère à qui ce manuscrit doit de ne pas comporter un bien plus grand nombre de coquilles, d'incohérences et d'erreurs de ponctuation. Un grand merci aussi à mes colocataires pour avoir accepté ma vie d'ermite pendant la période de rédaction. Enfin, merci à Sophie pour sa patience, pour sa compréhension, pour son amour de Jean-Philippe Toussaint, d'Anne Teresa de Keersmaecker et du fromage, et pour encore au moins mille autres raisons.

Table des matières

Table des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Nomenclature	xi
Introduction	1
1 État de l'art	3
1.1 Contexte opérationnel	4
1.1.1 La gestion du trafic aérien	4
1.1.2 Technologies et concepts pour l'amélioration de l'ATC	7
1.2 Modèles et méthodes de résolution en environnement déterministe	11
1.2.1 Méthodes réactives	12
1.2.2 Formulation par un problème de commande optimale	14
1.2.3 Résolution numérique par discrétisation de l'espace des commandes	17
1.2.4 Optimisation non linéaire	19
1.2.5 Programmation linéaire mixte	22
1.2.6 Simplification par décomposition du modèle	31
1.3 Modèles et méthodes de résolution en environnement incertain	35
1.3.1 Introduction sur les incertitudes dans l'ATC	35
1.3.2 Modélisation des erreurs de prédiction	36
1.3.3 Formulation analytique de la probabilité de conflit	42
1.3.4 Simulation numérique de trajectoires	48
1.3.5 Processus de résolution par horizon glissant	51
1.4 Programmation linéaire stochastique avec recours	53
1.4.1 Modèle de recours à deux étapes	53
1.4.2 Méthode d'approximation moyenne par échantillonnage	54
1.4.3 Résolution par décomposition de Benders	55
1.5 Discussion	57
1.5.1 Maintien de la séparation en environnement déterministe	57
1.5.2 Maintien de la séparation en environnement incertain	58
1.5.3 Annonce des contributions	59
I Modélisation et résolution du problème de séparation d'aéronefs sans incertitudes	61
2 Résolution de conflits aériens par la programmation non linéaire	63
2.1 Position du problème	64
2.1.1 Dynamique des mobiles	64
2.1.2 Manœuvres d'évitement	65

2.1.3	Critère	66
2.1.4	Formulation en temps continu	69
2.2	Discrétisation temporelle : le modèle TIME	69
2.2.1	Intégration du système dynamique	70
2.2.2	Bornes sur la vitesse et l'accélération	71
2.2.3	Contraintes de séparation valides sur tout l'intervalle de commande	73
2.2.4	Résumé du modèle TIME	76
2.3	Linéarisation de TIME pour l'initialisation de sa résolution	77
2.3.1	Bornes sur la vitesse et l'accélération	78
2.3.2	Contraintes de séparation	80
2.3.3	Linéarisation du critère	85
2.3.4	Résumé du modèle linéaire	85
2.4	Initialisation par la solution du modèle linéaire	86
2.4.1	Justification de la démarche	86
2.4.2	Déterminer rapidement une solution admissible du problème linéaire	88
2.5	Paramétrage et évaluation de l'algorithme hybride	91
2.5.1	Description des jeux de données	91
2.5.2	Paramétrage de l'algorithme	94
2.5.3	Résultats	97
2.6	Conclusion	98
3	Modélisations par la programmation linéaire mixte pour une étude comparative	103
3.1	Discrétisation temporelle à une commande : le modèle ONE	104
3.1.1	Modèle dynamique	104
3.1.2	Contraintes de séparation	105
3.1.3	Critère	107
3.1.4	Formulation complète du modèle ONE	109
3.1.5	Résolution par horizon glissant	109
3.2	Discrétisation spatiale : le modèle SPACE	110
3.2.1	Discrétisation spatiale du problème	110
3.2.2	Contraintes de séparation	112
3.2.3	Bornes sur les variables de commande	117
3.2.4	Critère	118
3.2.5	Formulation complète du modèle SPACE	120
3.3	Comparaison théorique	120
3.4	Comparaison expérimentale sur jeux de données artificiels	121
3.5	Conclusion	124
II	Modélisation et résolution du problème en environnement incertain	127
4	Adaptation du cas déterministe par élargissement des distances de séparation	129
4.1	Particularités du problème sous incertitudes	130
4.1.1	Sources d'incertitudes	130
4.1.2	Contraintes de séparation robustes	130
4.1.3	Manceuvres d'évitement	131
4.2	Formulation analytique de la probabilité de conflit	132
4.2.1	Calcul géométrique	132
4.2.2	Application à la résolution de conflits	133
4.3	Résolution par horizon glissant	133
4.3.1	Minimisation de l'aire sous les manœuvres	134

TABLE DES MATIÈRES

4.3.2	Minimisation de la consommation de carburant	136
4.4	Évaluation expérimentale	138
4.4.1	Étude du croisement de deux avions isolés	139
4.4.2	Analyse des résultats pour l'ensemble des scénarios	143
4.5	Conclusion	145
5	Modèle stochastique linéaire avec recours	147
5.1	Résolution de conflits à deux manœuvres	148
5.2	Modèle linéaire stochastique avec recours	150
5.2.1	Modélisation de la première étape	151
5.2.2	Modélisation de la seconde étape	151
5.3	Résolution du problème stochastique	155
5.4	Évaluation expérimentale	157
5.4.1	Performances de la décomposition de Benders	157
5.4.2	Comparaison des algorithmes de résolution en environnement incertain . .	158
5.5	Conclusion	161
	Bilan et perspectives	163
III	Annexes	169
A	Calcul des pénalités d'écart au contrat 4D	171
A.1	Pénalisation pour un modèle discrétisé temporellement	171
A.2	Discrétisation spatiale	173
B	Publications liées à ces travaux	175
	Bibliographie	I

Table des figures

1.1	Secteurs de contrôle européens	5
1.2	Normes de séparation pour le contrôle en route	6
1.3	Types de conflits aériens rencontrés dans le trafic en route	7
1.4	Méthodes et modèles en environnement déterministe	12
1.5	Système de coordonnées du modèle avion	15
1.6	Manœuvres de créneau et de point tournant	18
1.7	Linéarisation de la borne supérieure sur la vitesse	23
1.8	Effet de la non convexité des contraintes de séparation	25
1.9	Linéarisation des deux bornes sur la vitesse	26
1.10	Approximation d'un rectangle par l'intersection de deux disques	27
1.11	Conflit représenté dans le référentiel lié à l'un des aéronefs	28
1.12	Deux pas successifs d'une résolution par horizon glissant	33
1.13	Erreurs longitudinale et latérale sur la prédiction de position	36
1.14	Vitesses par rapport à l'air et au sol	38
1.15	Représentation du croisement entre A_i et A_j dans le repère (O, x_i, x_j)	43
2.1	Consommation de carburant par nautique parcouru	68
2.2	Approximation par un vecteur accélération constant	71
2.3	Approximation du calcul de τ par une fonction dérivable	76
2.4	Conflit dans le référentiel mobile : approximation du cercle par 4 tangentes	81
2.5	Approximation de la consommation par unité de temps avec quatre segments	85
2.6	Scénarios illustrant chaque type de jeux de données : les scénarios représentés sont les plus complexes parmi ceux utilisés lors des tests	92
2.7	Comparaison des algorithmes de résolution du modèle non linéaire	99
2.8	Trajectoires générées pour une instance de R-03	100
3.1	Manœuvres modélisées dans SPACE	112
3.2	Changement de cap à vitesse de virage constante	113
3.3	Approximation de la consommation par unité de distance avec quatre segments	119
3.4	Comparaison des algorithmes de résolution en environnement déterministe	122
3.5	Trajectoires générées par les MILP pour une instance de R-03	124
4.1	Comparaison entre deux estimations de la variance de la distance minimale	142
4.2	Trajectoires après résolution pour $\delta_{ij} = \frac{\pi}{3}$	142
4.3	Comparaison des algorithmes de résolution basés sur la probabilité de conflit	144
4.4	Trajectoires après la résolution du rond-point à 4 aéronefs	145
5.1	Résolution de conflit avec recours	149
5.2	Représentation d'un conflit pour une contrainte de séparation linéaire	154
5.3	Comparaison des algorithmes de résolution en environnement incertain	159
5.4	Plus grand nombre d'instructions de contrôle reçues par un même aéronef : la moyenne parmi les 1000 tirages est en trait plein et le maximum en pointillés	160

Liste des tableaux

1.1	Paramètres d'ajustement des corrélations des erreurs de prédiction du vent . . .	39
2.1	Paramètres d'optimisation et de performance des aéronefs	92
2.2	Caractéristiques des scénarios utilisés lors des tests	93
2.3	Résultats en fonction de la valeur de n_h	95
4.1	Manœuvres pour un croisement sans conflit prévu	140
4.2	Résolution de conflit à deux aéronefs pour trois angles de croisement	141
5.1	Comparaison des trois résolutions de l'équivalent déterministe	158
5.2	Manœuvres pour un croisement sans conflit prévu – évaluation du recours	158

Nomenclature

Notations mathématiques

\mathbf{v} :	vecteur décrivant un point, une vitesse, une accélération ou encore un vecteur de variables
\mathbf{A} :	matrice dont A_{ij} est l'élément situé sur la i^e ligne et la j^e colonne
\mathbf{A}^T :	transposée de la matrice \mathbf{A}
\mathbf{I}_n :	matrice identité de dimension n
$ \cdot $:	selon le contexte, valeur absolue d'un scalaire ou cardinal d'un ensemble
$\ \cdot\ $:	norme euclidienne d'un vecteur
$\langle \cdot \cdot \rangle$:	produit scalaire associé à la norme euclidienne
$\overrightarrow{\text{grad}}(\cdot)$:	gradient d'une fonction de plusieurs variables
$\mathbf{v}_{i,j}$:	si les indices i et j correspondent à des mobiles, $\mathbf{v}_{i,j}$ est un vecteur de vitesse, position ou accélération relative, soit $\mathbf{v}_{i,j} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$
$\mathbb{P}(\cdot)$:	probabilité d'un évènement
$\mathbb{P}(A B)$:	probabilité de A sachant B
\overline{A} :	si A est un évènement, \overline{A} est sa négation
$\mathbb{E}(\cdot)$:	fonction d'espérance mathématique d'une variable aléatoire
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$:	loi de probabilité normale de moyenne m et d'écart type σ
$\text{sgn}(\cdot)$:	fonction de signe, $\text{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, 0 si $x = 0$ et -1 si $x < 0$
$\text{azm}(\cdot)$:	argument d'un vecteur, soit l'angle orienté entre l'axe des abscisses et un vecteur
$\widehat{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$:	angle orienté de \mathbf{u} vers \mathbf{v}

Remarque : Afin de rester concis, la norme d'un vecteur vitesse ou accélération sera simplement désignée comme la vitesse ou l'accélération. Par souci de clarté, on précisera *vecteur vitesse* ou *vecteur accélération* en se référant aux vecteurs en question.

Abréviations et acronymes

Contexte opérationnel

ACARS :	<i>Aircraft Communications, Addressing and Reporting System</i>
ATC :	<i>Air Traffic Control</i> , contrôle du trafic aérien
ATM :	<i>Air Traffic Management</i> , gestion du trafic aérien
BADA :	<i>Base of Aircraft Data</i> , modèle de performances d'aéronefs d'Eurocontrol
CFMU :	<i>Central Flow Management Unit</i> , unité de gestion des flux de trafic d'Eurocontrol
CD&R :	<i>Conflict Detection and Resolution</i> , détection et résolution de conflit
FMS :	<i>Flight Management System</i> , système de gestion du vol
OACI :	Organisation de l'Aviation Civile Internationale
SESAR :	<i>Single European Sky ATM Research</i> , programme de recherche en ATM
1 NM :	1 nautique, unité de distance : $1 \text{ NM} \approx 1,852 \text{ km}$
1 kt :	1 nœud, unité de vitesse correspondant à 1 NM par heure

Modèles et méthodes

- MCMC : *Markov Chain Monte Carlo*, simulations de Monte-Carlo par chaîne de Markov
- MILP : *Mixed Integer Linear Program*, programme linéaire à variables mixtes
- MPC : *Model Predictive Control*, résolution par horizon glissant
- PNL : Programme Non Linéaire
- PM : Problème Maître de la décomposition de Benders
- SP : Sous-Problème de la décomposition de Benders

Introduction

Dans le domaine du transport aérien, l'espace aérien constitue une ressource limitée à partager entre un grand nombre d'utilisateurs. À titre d'exemple, le 1^{er} juillet 2011, journée la plus chargée de l'année, 33 617 avions ont survolé le territoire européen. Dans un espace aussi dense, le trafic aérien ne pourrait pas jouir de bonnes conditions de sécurité si chaque vol avait la liberté d'être opéré selon les seuls désirs des compagnies aériennes. Le trafic aérien est donc géré dans sa globalité, en tâchant d'optimiser les problématiques, toutes liées les unes aux autres, de sécurité, de ponctualité, de prédictibilité, de capacité, d'efficacité économique et d'impact environnemental. S'il n'est pas évident de quantifier l'impact d'une gestion coordonnée du trafic aérien, son utilité n'est pas remise en question en Europe alors que son assiette cumulée a atteint 6,1 milliards d'euros, entièrement payés par les usagers de l'espace aérien.

Pour assurer la sécurité des usagers, l'Organisation Internationale de l'Aviation Civile (OACI) impose des normes de séparation horizontale et verticale entre paires d'aéronefs [2]. Ainsi une des problématiques du contrôle aérien est de détecter des conflits entre aéronefs et de générer des manœuvres garantissant la séparation lorsqu'un conflit est détecté.

Les contrôleurs aériens sont responsables de la surveillance du trafic en temps réel et du maintien de la séparation entre aéronefs. En remplissant leur mission, les contrôleurs doivent gérer à la fois les incertitudes sur l'évolution future des aéronefs, la complexité des situations rencontrées dans un trafic aérien dense et le stress causé par les enjeux critiques de sécurité. L'espace aérien est découpé en volumes géographiques appelés secteurs, chaque secteur étant à la charge de deux contrôleurs. Afin d'éviter des situations à risque, les centres de contrôle estiment le nombre d'aéronefs qu'ils sont capables de superviser en donnant les capacités horaires de leurs secteurs. Les incertitudes sur les trajectoires des aéronefs sont quant à elles gérées en prenant des marges additionnelles par rapport aux normes de séparation. Il s'ensuit que le réseau aérien tout entier est contraint par la capacité de certains secteurs. Ainsi, une grande partie des retards des aéronefs vient du fait que des secteurs en route, c'est-à-dire des secteurs hors de la proximité des aéroports, ont atteint la saturation de leur capacité horaire. En Europe, approximativement 5 % des vols aux instruments sont retenus au sol plus de quinze minutes à cause des contraintes de capacité des secteurs en route.

Par conséquent, l'amélioration du contrôle aérien, notamment pour le trafic en route, est une condition nécessaire pour réduire les retards des vols et augmenter la capacité de l'espace aérien. Ce constat est d'autant plus important que les derniers rapports de prédiction de l'évolution du trafic à moyen et long terme publiés par Eurocontrol [5, 8] envisagent une croissance annuelle positive sur les vingt prochaines années allant de 1,6 à 3,9 % selon les scénarios considérés, soit une augmentation cumulée du trafic allant de 37 à plus de 100 % sur vingt ans.

L'une des voies d'amélioration du contrôle aérien est le développement de systèmes informatiques de détection et de résolution de conflits. Leur utilisation est ensuite envisagée dans le cadre d'une aide à la décision pour les contrôleurs ou d'une automatisation complète du contrôle. Cette seconde voie semble irréaliste dans le cadre opérationnel actuel pour diverses raisons. Il est par exemple difficile de déterminer qui endosserait la responsabilité dans le cas tragique où le système causerait un accident. La question de la certification d'un tel système est également délicate et reste encore en suspens. Quel que soit le contexte de l'utilisation d'un tel système informatique, le problème de détection et de résolution de conflits aériens est un thème de re-

cherche sur lequel les publications scientifiques ont été abondantes depuis le milieu des années 1990 du fait de ses enjeux économiques.

Ainsi ce travail de thèse consiste à développer une méthode de résolution du problème de maintien de séparation entre aéronefs pour le trafic en route, en incluant la gestion des incertitudes sur les trajectoires des aéronefs.

Pour cela, trois axes de recherche complémentaires, à savoir la modélisation, la résolution et la mise en œuvre du contrôle, sont suivis. Ces trois axes sont maintenus en tension par l'intérêt porté aux compromis nécessaires entre précision du modèle, rapidité d'exécution de la résolution et adéquation entre pratiques opérationnelles et stratégies de mise en œuvre.

L'un des objectifs de cette étude est de prendre en compte l'effet des incertitudes sur les trajectoires des aéronefs. Or, leur inclusion explicite dans le modèle engendre un saut de complexité du problème. La démarche consiste, dans un premier temps, à traiter le problème en environnement déterministe en se concentrant sur des modèles de programmation mathématique non linéaires et linéaires, pour lesquels des méthodes de résolution reconnues pour leur efficacité sont déjà implémentées dans des codes de calcul performants. Dans un second temps, les incertitudes, dont les causes principales sont les erreurs de prédictions météorologiques et les imprécisions des appareils de mesure, sont ajoutées au modèle. L'idée est d'abord d'adapter le modèle déterministe le plus pertinent avant d'introduire explicitement l'aspect aléatoire des données.

Dans le premier chapitre, un point sur l'état de l'art est effectué. Des éléments du contexte opérationnel, indispensables à la définition du problème y sont décrits. Les travaux pertinents déjà effectués sur le maintien de séparation entre aéronefs sont ensuite synthétisés en les organisant selon qu'ils prennent en compte les incertitudes ou non. Les chapitres 2 et 3 correspondent à la contribution de cette thèse sur le problème en environnement déterministe. Un modèle non linéaire, visant à représenter précisément les mécanismes mis en jeu lors du maintien de séparation, est d'abord développé et résolu selon une méthode dans laquelle une solution initiale est trouvée grâce à la linéarisation du modèle. Dans le chapitre 3, le modèle non linéaire est confronté à deux modèles linéaires simplifiés. L'enjeu est alors d'apprécier les variations dans la rapidité d'exécution des algorithmes et la qualité des solutions trouvées en fonction de la précision des modèles. La seconde partie du travail est également organisée en deux chapitres. Dans le chapitre 4, l'un des modèles simplifiés est adapté pour la prise en compte des incertitudes en augmentant les marges de séparation de façon cohérente avec un calcul approché des probabilités de conflit. Finalement, afin que le modèle coïncide mieux avec une procédure pertinente pour un contrôle aérien automatisé, les erreurs aléatoires sont explicitement incluses dans un modèle de programmation stochastique avec recours au chapitre 5.

Chapitre

1

État de l'art

Aperçu

1.1	Contexte opérationnel	4
1.1.1	La gestion du trafic aérien	4
1.1.2	Technologies et concepts pour l'amélioration de l'ATC	7
1.2	Modèles et méthodes de résolution en environnement déterministe	11
1.2.1	Méthodes réactives	12
1.2.2	Formulation par un problème de commande optimale	14
1.2.3	Résolution numérique par discrétisation de l'espace des commandes	17
1.2.4	Optimisation non linéaire	19
1.2.5	Programmation linéaire mixte	22
1.2.6	Simplification par décomposition du modèle	31
1.3	Modèles et méthodes de résolution en environnement incertain	35
1.3.1	Introduction sur les incertitudes dans l'ATC	35
1.3.2	Modélisation des erreurs de prédiction	36
1.3.3	Formulation analytique de la probabilité de conflit	42
1.3.4	Simulation numérique de trajectoires	48
1.3.5	Processus de résolution par horizon glissant	51
1.4	Programmation linéaire stochastique avec recours	53
1.4.1	Modèle de recours à deux étapes	53
1.4.2	Méthode d'approximation moyenne par échantillonnage	54
1.4.3	Résolution par décomposition de Benders	55
1.5	Discussion	57
1.5.1	Maintien de la séparation en environnement déterministe	57
1.5.2	Maintien de la séparation en environnement incertain	58
1.5.3	Annonce des contributions	59

Cette partie trace l'environnement dans lequel s'inscrit ce travail de thèse. Pour la bonne compréhension du problème et de ses enjeux, des éléments du contexte opérationnel du contrôle du trafic aérien sont d'abord présentés. Par la suite, une synthèse bibliographique centrée sur le problème mathématique de planification de trajectoires sans conflit est réalisée. Les objectifs poursuivis et les méthodes envisagées étant différents selon que les incertitudes sont négligées ou non, cette synthèse s'attache d'abord à donner une vue d'ensemble des approches proposées pour un environnement supposé déterministe, avant de décrire la façon dont les incertitudes ont été prises en compte dans la littérature. Finalement, une étude bibliographique de la programmation stochastique linéaire avec recours est effectuée parce qu'il s'agit d'un cadre intéressant pour le traitement des incertitudes bien qu'il n'ait pas encore été considéré pour ce problème.

1.1 Contexte opérationnel

Le contrôle du trafic aérien (ATC¹), aussi appelé *contrôle tactique*, est un ensemble de services rendus par les contrôleurs dans certaines portions de l'espace aérien. Il correspond à une action centralisée, effectuée depuis le sol, et qui consiste à organiser le trafic aérien en temps réel afin d'assurer sa sécurité et sa fluidité. Pour traiter son automatisation, il est nécessaire de préciser certaines pratiques actuelles et les contextes systémique et technologique de ce contrôle.

1.1.1 La gestion du trafic aérien

L'ATC ne constitue pas le seul niveau d'organisation et de supervision de la circulation aérienne. Il est précédé de plusieurs tâches anticipant le trafic effectif à plus ou moins long terme. L'ensemble des actions d'organisation du trafic aérien, incluant l'ATC, constitue la gestion du trafic aérien (ATM²). Ainsi l'espace aérien est fortement structuré et une activité régulière de gestion des flux est réalisée en Europe par la *Central Flow Management Unit* (CFMU³).

Structuration de l'espace

L'espace aérien est découpé en portions que l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI) a classées en fonction des autorisations de vol et du type de services rendus [3]. Les vols sont différenciés selon qu'ils obéissent aux règles de vol à vue ou aux instruments, et la classe d'espace aérien indique alors quels vols sont autorisés et quel contrôle est réalisé. Pour illustration, les classes A à E correspondent à des espaces contrôlés, tandis que les espaces classés F ou G ne sont pas contrôlés. En outre, la circulation civile est interdite de façon temporaire ou permanente dans certaines zones à statut particulier utilisées pour des besoins militaires ou pour empêcher le survol à basse altitude de grandes villes.

La structure de l'espace aérien se traduit par un étagement en *niveaux de vol* et le tracé de *couloirs aériens* formant un réseau aérien dont les nœuds correspondent à des balises radio ou à des points de passage virtuels. Le tracé du réseau de routes vise en partie à simplifier le contrôle du trafic. Les niveaux de vol sont des plans horizontaux séparés de 1000 pieds d'altitude, de sorte que deux aéronefs volant à des niveaux de vol différents ne sont jamais en conflit. La croisière des aéronefs est composée de segments à niveau de vol constant empruntant les couloirs aériens intercalés d'éventuels changements de niveau. En outre, la circulation sur les niveaux de vol suit un schéma d'orientation, par exemple de l'est vers l'ouest, et l'orientation des niveaux de vol est alternée. Cette procédure a été mise en place afin de ne pas avoir à résoudre de conflits frontaux entre deux aéronefs stabilisés en altitude.

L'espace contrôlé est divisé en volumes géographiques appelés *secteurs*, et chaque secteur est sous la responsabilité de deux contrôleurs. Ceux-ci communiquent avec les avions présents dans le secteur par le biais d'une fréquence radio propre au secteur ; une fréquence est donc associée à chaque secteur. On parle de secteurs d'*approche* lorsqu'ils sont situés à proximité d'un aéroport et de secteurs *en route* sinon. La figure 1.1⁴ illustre le découpage en secteurs sur l'Europe. Afin que les contrôleurs soient à même d'assurer la sécurité du trafic, une capacité est attribuée à chaque secteur en fonction de la densité et de la forme du réseau aérien. La capacité est exprimée en nombre d'aéronefs traversant le secteur par heure.

1. ATC est l'acronyme de *Air Traffic Control*

2. ATM est l'acronyme de *Air Traffic Management*

3. Le site Internet de la CFMU : http://www.cfm.eucontrol.int/cfm/public/subsite_homepage/homepage.html

4. Cette figure est tirée du site d'Eurocontrol <http://www.eurocontrol.int/articles/wallpapers>



Figure 1.1 — *Secteurs de contrôle européens*

Gestion des flux

La gestion des flux a pour objectif de garantir la sécurité et la fluidité du trafic en évitant la saturation des aéroports et des secteurs de contrôle. Elle veille notamment à ce que les flux permettent de respecter les capacités des secteurs en régulant le trafic. Ainsi, les pilotes déposent obligatoirement un plan de vol avant le départ. Le plan de vol contient toutes les informations importantes, dont : l'horaire de départ désiré, la route prévue et le niveau de vol de croisière. La route du plan de vol est donnée par un horaire de décollage souhaité, un horaire d'arrivée estimé et une séquence de points de passage. Elle est dessinée de façon à respecter des contraintes transmises par la CFMU en fonction des conditions de trafic et de météo. Aux heures de pointe et dans des régions où la densité du trafic est forte, certains vols peuvent être soumis à régulation. Les vols régulés se voient attribuer un créneau de décollage par la CFMU. En Europe, le calcul de ces créneaux est automatisé et il est réalisé de façon à respecter la capacité des aéroports et des secteurs en route traversés sur la base d'un principe de premier arrivé, premier servi [7].

Contrôle en route

Le contrôle en route s'attache aux secteurs situés en dehors de la proximité des aéroports. Dans ces secteurs, l'altitude des aéronefs est élevée et généralement peu variable. La surveillance y est effectuée par les contrôleurs à l'aide d'un écran radar, et les communications entre le sol et les pilotes se font par contacts radio. Les travaux de cette thèse portent sur le contrôle en route.

Pour assurer la sécurité des usagers, l'OACI impose des normes de séparations horizontale et verticale entre paires d'avions [2]. Une des tâches des contrôleurs est d'assurer qu'à chaque instant, chaque paire d'aéronefs soit séparée selon l'une ou l'autre de ces deux normes. Dans les conditions de l'en-route, la norme horizontale vaut 5 nautiques, *Nautical Miles* (NM) en anglais, et la norme verticale vaut 1000 pieds, ce qui correspond à des normes respectives d'environ 9,3 km et 300 m. Comme dessiné sur la figure 1.2, il peut aussi être utile de représenter la séparation par une zone cylindrique centrée sur chaque aéronef à l'intérieur de laquelle aucun autre aéronef ne doit pénétrer.

Définition 1.1. *Trajectoire de référence* : la trajectoire de référence d'un aéronef est la trajectoire qu'il est prévu qu'il suive lorsque la présence d'autres aéronefs n'est pas prise en compte.

Définition 1.2. *Conflit* : deux aéronefs sont en conflit sur un intervalle de temps lorsque la séparation entre leurs deux trajectoires de référence⁵ n'est pas maintenue à chaque instant de

5. Le terme de conflit est souvent utilisé comme un synonyme de perte de séparation dans le domaine aérien.

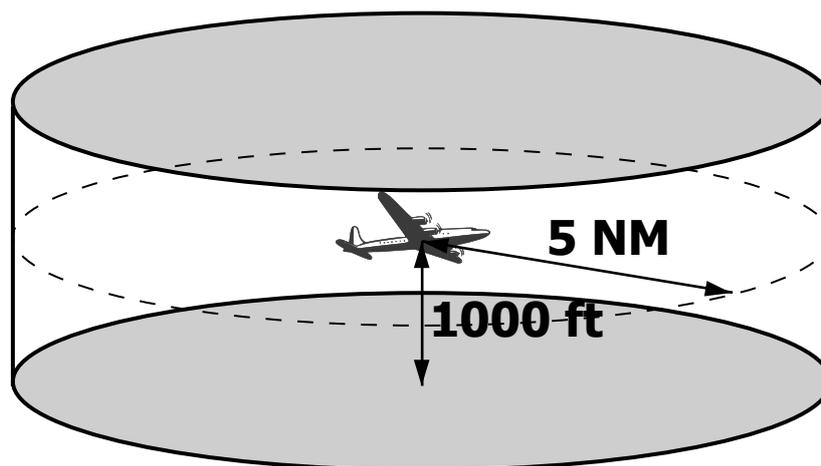


Figure 1.2 — Normes de séparation pour le contrôle en route

l'intervalle.

Conflit potentiel : de façon plus générale, des avions sont en conflit potentiel sur un intervalle de temps s'il existe un risque de perte de séparation entre leurs trajectoires, du fait d'aléas et d'éventuelles modifications de trajectoires demandées par les organismes de contrôle.

Comme représenté sur la figure 1.3, les conflits habituellement détectés par le contrôle en route peuvent être de *rattrapage*, de *croisement*, ou d'*insertion*. Ce dernier type est en fait dû à la structuration de l'espace en réseaux de routes. On peut en effet préférer gérer les aéronefs en ordonnant leur insertion sur un segment de vol pour ne pas avoir à résoudre des conflits de croisement à angle d'incidence faible, ou simplement pour préparer la gestion de l'approche en amont. Bien que tout soit fait pour éviter son occurrence, le conflit *frontal* a été ajouté à la figure 1.3 parce qu'il est nécessaire de le prendre en compte dans un contrôle automatisé. Finalement, les contrôleurs surveillent les paires d'aéronefs en conflit potentiel et, lorsqu'un conflit est détecté, ils le résolvent et délivrent aux pilotes concernés des instructions de vol implémentant cette résolution. Les instructions de vol délivrées aux pilotes par les contrôleurs sont appelées *clairances*.

Pour résoudre un conflit, les contrôleurs disposent de trois types de manœuvres d'évitement : les manœuvres en *vitesse*, en *cap* et en *altitude*. Une manœuvre en vitesse consiste à modifier la vitesse d'un aéronef, soit, en général, à le ralentir car les marges laissées à l'accélération sont faibles pour les vols en route. Les manœuvres en altitude sont habituellement demandées aux aéronefs en descente ou en montée : un aéronef stabilise son niveau de vol avant de reprendre son mouvement vertical, ou anticipe sa descente lorsqu'il est proche de l'arrivée. À l'inverse, les modifications de niveau de vol pendant la croisière sont peu appréciées des pilotes et leur supervision présente l'inconvénient d'être moins claire pour les contrôleurs. En effet, le trafic est visualisé en deux dimensions et l'altitude n'apparaît que sous la forme d'une étiquette attachée à chaque aéronef. Finalement, lors d'une manœuvre en cap, l'aéronef reçoit l'instruction de modifier sa direction, pour atteindre un cap donné, puis de conserver ce nouveau cap jusqu'à résolution du conflit. Le pilote doit alors modifier à nouveau son cap pour récupérer sa trajectoire initiale. Une étude a été réalisée dans [68] en collaboration avec des contrôleurs pour déterminer, sur un ensemble de scénarios, le type de manœuvre choisi en fonction de la configuration des conflits.

La définition donnée ici a été préférée parce qu'elle correspondait mieux à ce qui est généralement entendu par détection et résolution de conflit.

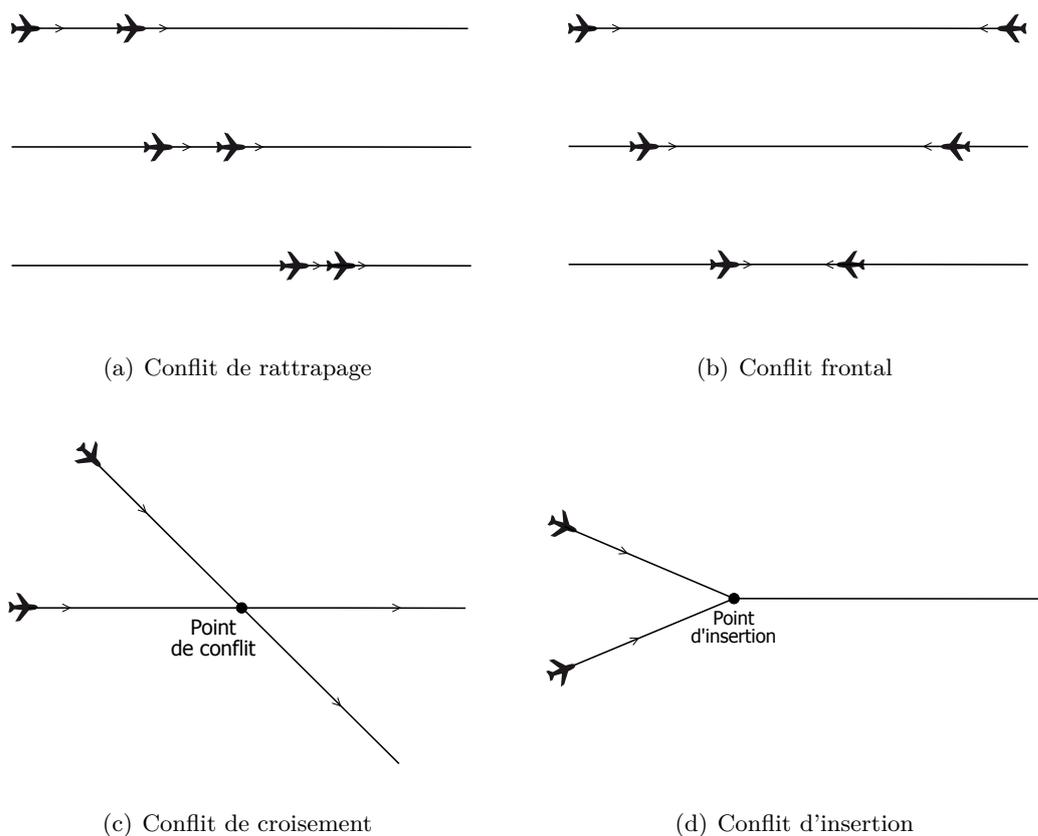


Figure 1.3 — *Types de conflits aériens rencontrés dans le trafic en route*

1.1.2 Technologies et concepts pour l'amélioration de l'ATC

L'amélioration de l'ATC, notamment pour le trafic en route, est une condition nécessaire pour réduire les retards des vols et augmenter la capacité de l'espace aérien. Sachant que les derniers rapports de prédiction de l'évolution du trafic à moyen et long termes publiés par Eurocontrol ([5, 8]) envisagent une forte croissance de la densité du trafic aérien, de petits ajustements du système actuel ne suffiront certainement pas. Les améliorations nécessaires passent donc par le développement et l'implémentation de nouvelles technologies et de nouveaux concepts de gestion du trafic. À mi-chemin entre les deux, figure le développement de systèmes informatiques automatisant la détection et la résolution de conflits, que leur utilisation soit ensuite envisagée dans le cadre d'une aide à la décision pour les contrôleurs ou d'une automatisation complète du contrôle.

L'échange de données numériques

Traditionnellement, et en pratique actuellement, les échanges entre contrôleurs et pilotes se font par la voix sur des bandes à haute ou très haute fréquence pour les communications à grande distance. Or, si l'on raisonne purement en terme d'efficacité, cette communication présente de nombreux désavantages. Le contrôleur ne peut recevoir des informations que d'un pilote à la fois, et il est impossible d'échanger des données plus volumineuses telles que l'ensemble des paramètres décrivant l'état de l'aéronef ou sa prédiction de trajectoire. En outre, le risque d'incompréhension force les deux parties à répéter les messages importants et limite la complexité de ces messages. Dans un scénario où la réponse à la densification du trafic passerait par l'accroissement du nombre de secteurs, le problème du nombre de canaux vocaux disponibles se poserait aussi.

L'alternative consiste en un échange de données numériques selon un protocole de communication entre le sol et le bord. Cet échange est plus connu sous le terme de *data link*. Les applications du *data link* utiles à l'ATM sont principalement

- en liaison montante : la transmission des dernières prédictions météorologiques pour limiter les erreurs de prédiction de trajectoire à bord, et les clairances des contrôleurs ;
- en liaison descendante : la communication de l'état de l'aéronef, des conditions météorologiques locales, la dernière prédiction de trajectoire réalisée à bord et la confirmation de l'exécution des clairances par les pilotes.

Le système de gestion de vol, ou *Flight Management System* (FMS)

Le FMS est un instrument automatisé moderne de planification et de navigation dont un grand nombre d'avions de ligne sont désormais équipés. Le FMS prend en entrée le plan de vol, les préférences de l'utilisateur pour la fonction de coût à minimiser et pour les niveaux de vol et les couloirs empruntés, un modèle de vol très performant pour l'appareil en question, un ensemble de données environnementales incluant des prédictions météorologiques, et les données de position, vitesse, température, pression, etc., délivrées par les capteurs embarqués. À partir de ces données, le FMS détermine la trajectoire optimale par rapport à la consommation de carburant et à la durée du trajet, pondérées pour refléter les préférences de l'utilisateur. De façon plus spécifique, le FMS délivre les consignes pour que le pilote, manuel ou automatique, puisse suivre cette trajectoire.

Du point de vue de l'ATM, le FMS présente de nombreux avantages. Il constitue d'abord un pas de géant vers l'automatisation du trafic aérien. De ce point de vue, le contexte opérationnel a progressé bien plus vite à bord qu'au sol ; néanmoins, le FMS favorise également le développement de l'automatisation du contrôle tactique et de la gestion de flux. Un système de guidage automatisé communique plus efficacement avec un système de contrôle automatisé. D'autre part, le FMS centralise toutes les données envoyées par les capteurs et les traite de façon à disposer de données directement utilisables. Combiné au *data link*, le FMS permet de communiquer en temps quasi réel les informations de vitesse, position et état de l'aéronef, vitesse et direction du vent, marges sur les vitesses, etc. Finalement, à condition que ses consignes soient effectivement appliquées par le pilote, le FMS est un outil de prédiction de trajectoire bien meilleur que ne le sont les outils au sol ; le FMS bénéficie en effet de données sur les paramètres de l'avion et sur les conditions extérieures locales bien plus précises que ce dont dispose le contrôle au sol.

La majorité des appareils sont encore équipés de *FMS 3D* dont la fonction de guidage est principalement géographique. Le guidage se concentre alors sur le suivi latéral et vertical de la trajectoire sans contraindre les temps de passage le long de celle-ci. Plus récemment, des systèmes de *FMS 4D* sont apparus. Leur guidage astreint l'aéronef à suivre une trajectoire en quatre dimensions, c'est-à-dire à passer par un ensemble de points géographiques à des instants pré-déterminés. Ces deux types de systèmes de gestion de vol, ainsi qu'une alternative ne contraignant les horaires de passage qu'en un nombre de points de passage limité, sont discutés en détail dans [1].

Le contrat 4D

Avec l'émergence de systèmes de guidage permettant de suivre des trajectoires 4D complexes, des concepts de *contrat 4D* ont fait leur apparition. L'idée est de déterminer avant le départ, au cours d'une négociation entre autorités ATM et utilisateurs, une trajectoire 4D que le pilote s'engage contractuellement à suivre au cours du vol. Le bénéfice d'un tel processus du côté de l'ATM est d'améliorer la prédictibilité du trafic pour permettre une meilleure gestion des flux, tant en route qu'à l'approche. Pour les utilisateurs, l'avantage est que l'ATM s'engage à ce que le vol ne soit pas dévié ni retardé pour soulager des secteurs congestionnés. Il leur garantit une heure d'arrivée à condition d'avoir suivi le contrat 4D.

L'implémentation de ce concept n'est pas encore évidente. Elle nécessite de savoir construire des trajectoires entières sans conflit et de pouvoir suivre précisément les contrats. Elle demande aussi l'acceptation des utilisateurs. La surconsommation de carburant due à l'asservissement de l'aéronef sur la trajectoire 4D est par exemple un défaut majeur de ce concept. Pour autant, la prédictibilité du trafic est essentielle pour améliorer l'ATM.

Le projet *Contract-based Air Transportation System* (CATS) propose une implémentation opérationnelle du concept de contrat 4D par un *contrat d'objectif* négocié selon un processus de prise de décision collaborative [32]. CATS remplace des points de passage 4D par un ensemble de fenêtres 4D correspondant à des intervalles de temps et d'espace. La taille et l'emplacement des fenêtres 4D dépendent du vol et de l'état du trafic dans son ensemble. Ils sont par exemple fixés en fonction de la ponctualité requise à destination, de la congestion des secteurs, et des performances de l'aéronef. Les fenêtres ménagent notamment des marges pour des manœuvres de résolution de conflit. Des simulations ont été réalisées pour valider l'acceptabilité du concept des contrats d'objectif auprès de contrôleurs en fonction [56].

Dans la suite, pour éviter les confusions, le terme de trajectoire se réfère à la courbe géographique en deux ou trois dimensions parcourue par l'aéronef. Lorsque la dimension temporelle sera aussi à considérer, on parlera systématiquement de trajectoire 4D ou de contrat 4D.

Distribution de la responsabilité de la séparation

L'ATC, tel qu'il est conçu aujourd'hui, supervise la circulation d'aéronefs de façon *centralisée*, c'est-à-dire qu'il est responsable du maintien de la séparation entre tous les aéronefs. Il s'oppose par exemple au concept *Autonomous Aircraft* [36], où la responsabilité de la détection et de la résolution des conflits est entièrement déléguée aux pilotes. Ce type de contrôle est surtout envisagé pour des zones de faible densité.

Automatisation de l'ATC

L'enjeu de la sécurité étant central pour l'ATC, l'utilisation d'outils informatiques d'aide à la décision a toujours été problématique, sans parler d'une automatisation globale, qui semble irréaliste dans le cadre opérationnel actuel pour des raisons tant techniques que sociales. De nombreux concepts et méthodes pour la détection et la résolution automatisées de conflits (CD&R⁶) ont pourtant été étudiés depuis la fin des années 1980 mais la plupart des projets d'automatisation financés par des organismes nationaux ont échoué [49]. Le projet européen ERASMUS [4] a dû nettement réduire les ambitions d'une résolution automatique pour convaincre les contrôleurs. L'action envisagée revient à proposer aux pilotes des changements de vitesse *subliminaux* pour résoudre des conflits avec une trentaine de minutes d'anticipation. Dans ce projet, un changement de vitesse est subliminal parce qu'il est suffisamment petit pour ne pas être nécessairement remarqué sur l'écran radar des contrôleurs.

L'automatisation reste pourtant l'une des voies d'amélioration poursuivies dans le très gros programme de recherche européen *Single European Sky ATM Research* (SESAR), lancé en 2005 et disposant de 2,1 milliards d'euros pour la seule phase de développement allant de 2009 à 2016 [6]. Par ailleurs, l'utilisation d'outils informatiques est déjà effective dans la gestion des situations d'urgence. Ces outils d'aide à la décision constituent un filet de sauvegarde présent au sol et à bord. Au sol, un système de détection avertit les contrôleurs lorsque la séparation entre deux aéronefs est sur le point d'être perdue, et à bord un outil calcule une manœuvre d'évitement de dernière minute. Des progrès ont également été réalisés pour les écrans radar des contrôleurs. Il est par exemple désormais possible de visualiser des prédictions de trajectoire à court terme ainsi que des conseils concernant les manœuvres de résolution [101]. La manipulation graphique

6. cette abréviation est récurrente dans la bibliographie pour désigner les méthodes de détection et résolution de conflits, elle vient du terme anglais *Conflict Detection and Resolution*.

des trajectoires par le contrôleur pour l'élaboration d'une résolution de conflit est également envisagée [16].

1.2 Modèles et méthodes de résolution en environnement déterministe

La recherche automatisée de manœuvres de résolution de conflits soulève des questions scientifiques difficiles auxquelles vient s'ajouter la gestion des incertitudes inhérentes au problème. Ainsi, une part prépondérante de la littérature sur le sujet s'est concentrée sur l'automatisation du contrôle aérien dans un environnement déterministe. Il est alors supposé que les prédictions de trajectoires et le suivi des manœuvres sont exacts. Cette section décrit les travaux réalisés dans ce paradigme, et la section suivante synthétise les études faites sur les incertitudes.

La résolution de conflits aériens est un cas particulier de planification de trajectoires de mobiles multiples avec évitement de collision. Il s'agit en effet de déterminer les trajectoires d'un ensemble de mobiles sur un horizon de temps donné de façon à maintenir une certaine séparation entre eux. Cette séparation peut représenter le volume exact occupé par les mobiles, mais elle est généralement définie de façon à ménager une marge additionnelle. Les trajectoires produites doivent en outre respecter des contraintes liées à la dynamique et aux performances de chaque mobile. Notons que d'autres applications de la planification de trajectoires de mobiles multiples ont été trouvées dans des domaines aussi variés que la robotique [71], la conduite de drones [20] ou d'automobiles automatisées [47], la simulation de foules de piétons [58] ou la navigation maritime [79].

L'une des difficultés majeures de l'automatisation est due à la complexité algorithmique de la planification coordonnée des trajectoires. En effet, dans le chapitre *Multiple Moving Objects* de [71], il est montré que ce problème a une complexité temporelle exponentielle en fonction du nombre de mobiles. Les travaux réalisés pour l'automatisation de l'ATC ont donc cherché à atteindre un compromis entre généralité des hypothèses, réalisme des modèles et rapidité des méthodes de résolution.

La bibliographie sur la résolution de conflits aériens est synthétisée de façon à faire apparaître l'équilibre trouvé entre ces trois facteurs. Des méthodes dites réactives, basées sur des analogies avec des phénomènes physiques, sont décrites dans un premier temps parce qu'elles semblent se détacher nettement de la démarche suivie par ailleurs (Section 1.2.1). En effet, ces dernières calquent le comportement des aéronefs sur celui de particules soumises à des forces physiques, tandis que les autres travaux modélisent, plus ou moins précisément, le système d'aéronefs. Parmi les approches par modélisation, la formulation en commande optimale est d'abord décrite, parce qu'elle permet la modélisation la plus complète et la plus fidèle du problème (Section 1.2.2). Les équations caractérisant le problème sont ainsi décrites avant que des approximations, explicites ou non, soient réalisées. Les solutions du modèle de commande optimale n'existant que pour des cas particuliers, la résolution du problème général a été abordée grâce à des méthodes numériques mettant en jeu des approximations de ce modèle. Des méthodes d'exploration d'arbres, heuristiques ou optimales, sont appliquées lorsque l'espace des variables de commandes est discrétisé (Section 1.2.3). Alternativement, le problème de commande optimale est mis sous la forme d'un programme non linéaire à variables continues en discrétisant l'horizon temporel par collocation directe (Section 1.2.4). D'autre part, sans que le lien avec la programmation non linéaire ne soit toujours explicitement fait, le problème a été traité dans le cadre de la programmation linéaire mixte après linéarisation des équations des contraintes et de l'objectif (Section 1.2.5). Indépendamment du modèle choisi, la complexité du problème a souvent été abordée en décomposant celui-ci grâce à un horizon glissant ou par découplage de la résolution des conflits (Section 1.2.6). Le graphique dessiné sur la figure 1.4 fait apparaître des liens explicites, en traits pleins, ou interprétés, en pointillés, entre les modélisations rencontrées dans la bibliographie. Les formes elliptiques se réfèrent autant aux formulations qu'aux méthodes de résolution, tandis que les formes droites désignent des processus de simplification. Les modules de plus grande taille

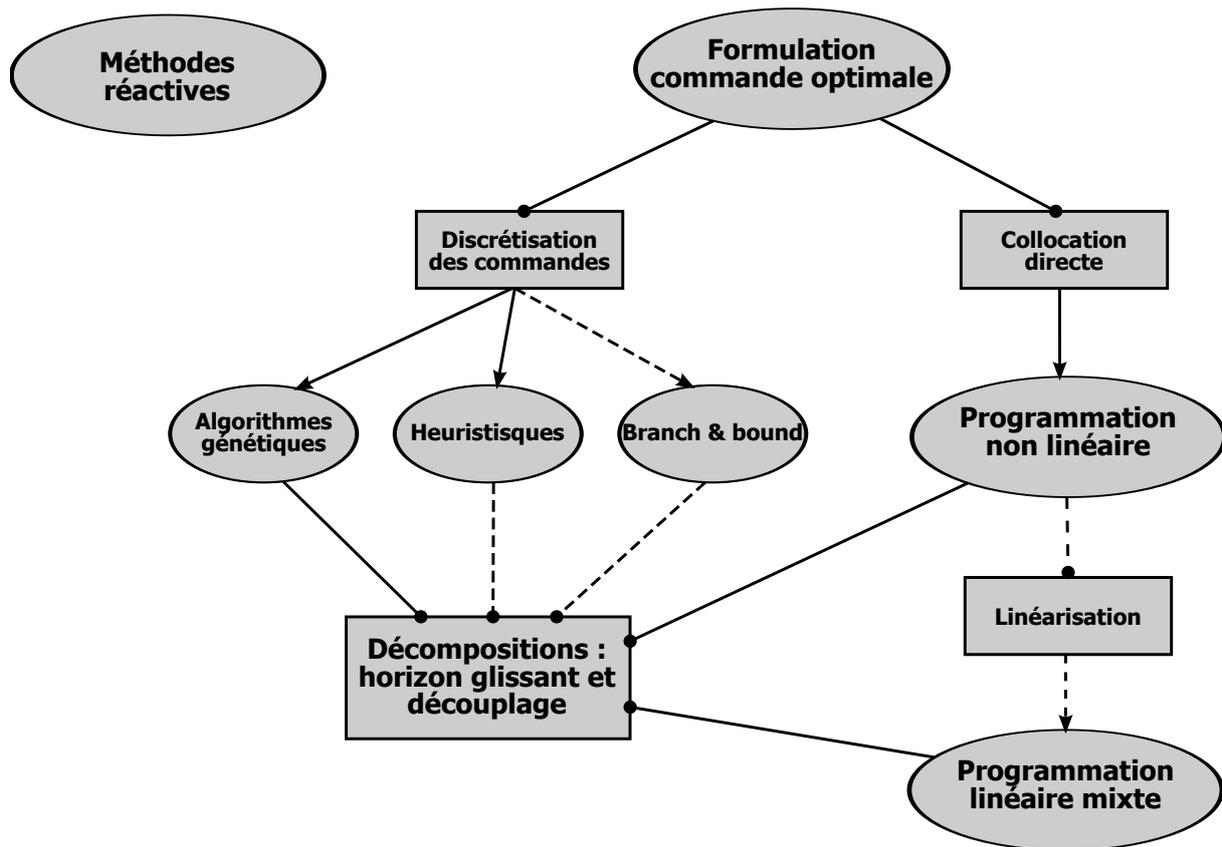


Figure 1.4 — Méthodes et modèles en environnement déterministe

correspondent à des sections numérotées.

Certaines notations seront systématiquement utilisées dans cette revue de littérature et dans la suite de la thèse. \mathcal{A} est l'ensemble des aéronefs contrôlés. Les vecteurs \mathbf{p}_i , \mathbf{v}_i et \mathbf{u}_i sont respectivement la position, la vitesse, et l'accélération d'un aéronef $A_i \in \mathcal{A}$. Ce sont des éléments de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 selon que le contrôle s'effectue dans le plan ou dans l'espace. Le contrôle aérien est réalisé sur un intervalle de temps $[0; T]$, avec de T de l'ordre de 10-15 minutes.

Définition 1.3. Ensemble des conflits potentiels : \mathcal{C} est l'ensemble des couples d'aéronefs (A_i, A_j) en conflit potentiel tels que $i < j$. La définition des conflits potentiels entraîne que, si $A_i \in \mathcal{A}$, $A_j \in \mathcal{A}$, $i < j$, et $(A_i, A_j) \notin \mathcal{C}$, alors le maintien de séparation entre A_i et A_j est assuré sur $[0; T]$ quelles que soient les manœuvres ordonnées aux aéronefs. L'ensemble \mathcal{C} est supposé donné.

1.2.1 Méthodes réactives

La majorité des approches ont en commun de modéliser, avec une précision variable, les phénomènes inhérents au problème. Plus précisément, des équations représentent la dynamique des mobiles en y faisant apparaître des grandeurs cinématiques observables, la contrainte de séparation correspond aux normes de séparation, etc. Les méthodes réactives procèdent quant à elles par analogie avec des forces physiques. Elles vont calquer par exemple le comportement de particules électriques ou de bandes élastiques sur le mouvement de mobiles en interaction.

Une approche classique dans ce domaine a été introduite par [67] pour l'évitement d'obstacles et consiste à supposer que les contraintes de séparation agissent sur les mobiles comme des forces de répulsion. À l'inverse, les destinations créent des forces d'attraction dirigées vers elles. Des applications au contrôle tactique dans un plan horizontal ont été développées par Zeghal dans

sa thèse [111] et par Kosecka *et al.* [70]. Ce dernier modèle est décrit ci-dessous.

Soit $\mathbf{p}_i^{\text{fin}} \in \mathbb{R}^2$, la position de la destination de l'aéronef $A_i \in \mathcal{A}$. L'attraction générée par la destination est représentée par un champ de potentiel

$$\Phi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i^{\text{fin}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^{\text{fin}}\|^2, \forall A_i \in \mathcal{A}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne d'un vecteur. La force d'attraction, dirigée de A_i vers sa destination, est égale au gradient du potentiel par rapport à \mathbf{p}_i :

$$\mathbf{F}_i^{\text{att}} = \overrightarrow{\text{grad}} (\Phi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i^{\text{fin}})), \forall A_i \in \mathcal{A}$$

La séparation entre les aéronefs est maintenue par deux forces obtenues à partir d'un même champ de potentiel : $\forall (i, j) : (A_i, A_j) \vee (A_j, A_i) \in \mathcal{C}$,

$$\Phi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \begin{cases} -\frac{(\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| - (D + \Delta_{i,j}))^2}{2\Delta_{i,j}}, & \text{si } D \leq \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq D + \Delta_{i,j} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}, \quad (1-1)$$

où D est la norme de séparation horizontale et $\Delta_{i,j}$ délimite la zone d'influence du potentiel de répulsion. La force de répulsion engendrée par A_j sur A_i vaut :

$$\mathbf{F}_{j,i}^{\text{rep}} = \overrightarrow{\text{grad}} (\Phi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)), \forall (i, j) : (A_i, A_j) \vee (A_j, A_i) \in \mathcal{C},$$

où le gradient est également relatif à \mathbf{p}_i . De plus, une force de *vortex*, $\mathbf{F}_{j,i}^{\text{vor}}$, orthogonale à la force de répulsion, est ajoutée pour que A_i et A_j tournent tous dans le même sens lors de la résolution du conflit.

Finalement, les forces permettent d'obtenir l'expression de la vitesse des aéronefs par les équations :

$$\mathbf{v}_i(t) = \frac{\mathbf{F}_i^{\text{att}}}{\|\mathbf{F}_i^{\text{att}}\|} + \sum_{(i,j):(A_i,A_j)\vee(A_j,A_i)\in\mathcal{C}} \alpha_i^{\text{rep}} \mathbf{F}_{j,i}^{\text{rep}} + \alpha_i^{\text{vor}} \mathbf{F}_{j,i}^{\text{vor}}, \forall A_i \in \mathcal{A}$$

où α_i^{rep} et α_i^{vor} sont des coefficients de pondération.

Remarque 1.1. *Le terme de forces a été employé ici pour reprendre la terminologie des publications citées. Il peut pourtant prêter à confusion puisque ces forces sont directement liées à la vitesse par une équation algébrique. Une analogie exacte avec la physique les aurait plutôt liées à l'accélération par le principe de Newton, comme cela a été fait dans [50] pour l'évitement d'obstacles par des robots.*

Le nom de ces méthodes vient du comportement qu'elles induisent. À chaque pas de temps, la commande d'un mobile ne dépend que de son état présent et de celui des autres mobiles proches. La valeur de l'accélération est donc déterminée en réaction à la situation présente. Ces méthodes ont rencontré un certain succès en robotique parce qu'elles s'adaptent très bien à une commande embarquée sans échange d'information entre les acteurs, à condition de pouvoir mesurer la position des mobiles voisins. En effet, la connaissance de ces positions suffit à un mobile pour déterminer l'accélération à appliquer. C'est aussi dans un contexte fictif de contrôle embarqué qu'un modèle par forces d'interaction a été appliqué à l'ATC par Zeghal [111].

Du fait que ces méthodes définissent un comportement plutôt qu'elles ne modélisent les contraintes intrinsèques au problème, la géométrie de ce dernier est nécessairement déformée. Le lien entre le comportement obtenu et les contraintes initiales n'est d'ailleurs pas évident. En particulier, les vitesses ou accélérations calculées par la méthode des potentiels doivent être considérées comme des consignes pour l'aéronef. Il se peut que les contraintes dynamiques de l'engin fassent que ces consignes ne soient pas réalisables. Par exemple, il a été prouvé dans [51]

que certaines forces d'interaction sont suffisantes pour maintenir la séparation entre deux ou trois mobiles, mais cette démonstration n'a pas été étendue au cas général. En outre, la forme et l'amplitude des forces en fonction de l'état des aéronefs influent sur la manière dont la séparation est réalisée. Le choix du paramètre $\Delta_{i,j}$ dans l'équation (1-1) est par exemple déterminant puisqu'il décide a priori de la distance de séparation à partir de laquelle des manœuvres doivent être réalisées. Pour ces raisons, il est aussi difficile de savoir dans quelle mesure les changements de vitesse sont réellement nécessaires à la séparation.

1.2.2 Formulation par un problème de commande optimale

Pour rester aussi près que possible de l'exécution réelle des manœuvres, il faut que les variables caractérisant les trajectoires des aéronefs soient des fonctions du temps. La modélisation la plus naturelle est donc un problème de commande optimale.

Des modèles avion point-masse capturent la plupart des effets dynamiques rencontrés dans l'aviation civile, et pour cette raison ils sont employés dans la majorité des travaux sur l'optimisation de trajectoires d'aéronefs. Le même modèle avion est utilisé dans les articles [24, 77, 89] traitant la résolution de conflits comme un problème de commande optimale. Il s'agit du modèle à trois degrés de liberté :

$$\frac{dp_x}{dt} = V \cos \gamma \cos \chi \quad (1-2)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = V \cos \gamma \sin \chi \quad (1-3)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = V \sin \gamma \quad (1-4)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{g_0}{V} (n \cos \phi - \cos \gamma) \quad (1-5)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{g_0 n \sin \phi}{V \cos \gamma} \quad (1-6)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F_P - F_T}{m} - g_0 \sin \gamma \quad (1-7)$$

La position de l'aéronef est donnée par les coordonnées cartésiennes (p_x, p_y, p_z) de son centre de gravité dans un repère local ; la coordonnée p_z correspond à son altitude et (p_x, p_y) donnent sa position dans un plan horizontal. L'aéronef se déplace à la vitesse V et les angles χ , ϕ et γ sont respectivement son cap, sa gîte et sa pente. Ces grandeurs cinématiques sont représentées sur la figure 1.5. F_P est la norme de la force de poussée créée par les moteurs, F_T est la traînée aérodynamique, m est la masse de l'avion et n est le facteur de charge. g_0 est la constante universelle de gravitation. Les trois degrés de liberté, ou variables de commande, sont F_P , n et ϕ .

L'état de chaque aéronef est contraint au début et à la fin de l'intervalle de temps pour refléter que l'état initial est une donnée, correspondant généralement à l'état présent, et qu'une position donnée doit être atteinte à l'instant T .

$$(p_x(0), p_y(0), p_z(0), V(0), \gamma(0), \chi(0)) = (p_x^{\text{ini}}, p_y^{\text{ini}}, p_z^{\text{ini}}, V^{\text{ini}}, \gamma^{\text{ini}}, \chi^{\text{ini}}) \quad (1-8)$$

$$(p_x(T), p_y(T), p_z(T)) = (p_x^{\text{fin}}, p_y^{\text{fin}}, p_z^{\text{fin}}) \quad (1-9)$$

Selon les approches, T est fixé à l'avance ou libre. Dans ce second cas, il est déterminé par l'équation (1-9).

Le réalisme des manœuvres est garanti par des bornes sur les variables d'état et de com-

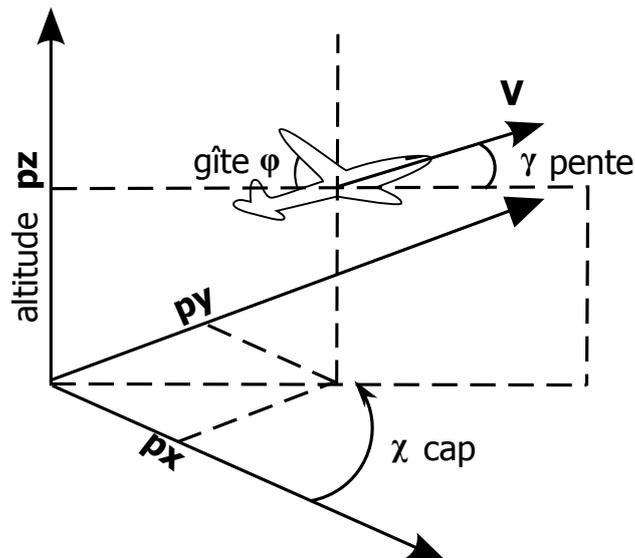


Figure 1.5 — Système de coordonnées du modèle avion

mande :

$$V^{\min} \leq V(t) \leq V^{\max}, \quad \forall t \in [0; T] \quad (1-10)$$

$$0 \leq F_P(t) \leq F_P^{\max}, \quad \forall t \in [0; T] \quad (1-11)$$

$$0 \leq n(t) \leq n^{\max}, \quad \forall t \in [0; T] \quad (1-12)$$

$$|\phi(t)| \leq \phi^{\max}, \quad \forall t \in [0; T] \quad (1-13)$$

$$|\gamma(t)| \leq \gamma^{\max}, \quad \forall t \in [0; T] \quad (1-14)$$

Remarque 1.2. Les bornes sur la vitesse permettent de respecter l'enveloppe de vol des aéronefs. Les valeurs par type d'avion sont recensées dans le manuel de BADA [9]. Par exemple, à 10 000 m d'altitude, la vitesse moyenne observée d'un A320 vaut environ 450kt, sa vitesse maximum 480 kt et sa vitesse minimum 320 kt. Dans [83], il est cependant spécifié que des diminutions de vitesse de plus 30 à 40 kt sont généralement peu appréciées des pilotes. Un intervalle de vitesse exprimé en pourcentage de variation autour d'une vitesse de référence est également le choix d'études pour le contrôle en vitesse dans le cadre du projet ERASMUS [4].

Remarque 1.3. Les bornes inférieures sur la force de poussée et le facteur de charge sont fixées à 0 dans [89], mais ce n'est pas réaliste au vu des véritables valeurs minimales pratiquées dans l'aviation civile.

Par ailleurs, des contraintes supplémentaires peuvent être ajoutées en exprimant le fait que l'aéronef ne peut être contrôlé qu'au travers de manœuvres pré-déterminées. Par exemple, il est possible de stipuler que les changements de vitesse et de cap se font respectivement à accélération constante et à vitesse de virage constante. Selon Paielli [83], cette hypothèse est généralement raisonnable. Il montre par ailleurs qu'elle constitue une nette amélioration par rapport à l'idéalisation, souvent rencontrée dans la littérature, selon laquelle les changements de vitesse sont instantanés. Il faut cependant noter que l'ajout de contraintes limitant les manœuvres possibles conduit à des formulations ne correspondant plus au cadre théorique de la commande optimale.

Le maintien de la séparation est ensuite assuré par une contrainte disjonctive pour chaque paire d'aéronefs A_i et A_j :

$$(p_{x,j}(t) - p_{x,i}(t))^2 + (p_{y,j}(t) - p_{y,i}(t))^2 \geq D^2 \quad \vee \quad |p_{z,j}(t) - p_{z,i}(t)| \geq H, \quad \forall t \in [0; T], \quad (1-15)$$

où D et H sont respectivement les normes de séparation horizontale et verticale. Le formalisme de la commande optimale nécessitant une conjonction de deux contraintes, [89] fait valoir que toute disjonction de contraintes

$$g_1(t) \geq 0 \quad \vee \quad g_2(t) \geq 0$$

s'écrit, à l'aide des variables additionnelles λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1(t)g_1(t) + \lambda_2(t)g_2(t) &\geq 0, \\ \lambda_1(t) + \lambda_2(t) &= b_\lambda \quad \text{et} \quad \lambda_1(t), \lambda_2(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (1-16)$$

où b_λ peut prendre n'importe quelle valeur strictement positive. Il est généralement fixé à 1 dans la littérature.

Finalement, la résolution automatique de conflits a pour objectif de déterminer les trajectoires d'un ensemble d'aéronefs \mathcal{A} satisfaisant les contraintes données ci-dessus en minimisant une fonction de coût. Plusieurs fonctions de coût différentes ont été choisies dans la littérature. Bicchi et Pallottino [24] ou Clements [30] minimisent la durée des trajectoires ou l'intégrale de la vitesse. En s'inspirant du travail de [61], Raghunathan *et al.* [89] optimisent une fonction d'énergie du système. Ainsi, dans ce dernier article, le problème de commande optimale se formule :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \int_0^T \left(\frac{dp_{x,i}(t)^2}{dt} + \frac{dp_{y,i}(t)^2}{dt} + \alpha_z \frac{dp_{z,i}(t)^2}{dt} + \alpha_{\gamma,i} \frac{d\gamma_i(t)^2}{dt} + \alpha_{\chi,i} \frac{d\chi_i(t)^2}{dt} \right) dt \\ \text{sous} \quad & (1-2)-(1-15) \\ & (p_{x,i}(t), p_{y,i}(t), p_{z,i}(t), \chi_i(t), \gamma_i(t)) \in \mathbb{R}^5, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t \in [0; T] \\ & (\phi_i(t), F_{P,i}(t), n_i(t)) \in \mathbb{R}^3, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t \in [0; T] \end{aligned} \quad (1-17)$$

Les coefficients de pondération $\alpha_{\gamma,i}$ et $\alpha_{\chi,i}$ permettent de donner la priorité à certains aéronefs qui auraient, par exemple, accumulé plus de retard que les autres. Le coefficient $\alpha_z (> 1)$ vient quant à lui pénaliser les manœuvres en altitude, jugées moins intéressantes que les autres types de manœuvres. Notons que beaucoup d'études simplifient le problème en tirant profit du fait qu'en croisière, les manœuvres en altitude sont peu appréciées des pilotes comme des contrôleurs. En rejetant les manœuvres en altitude et en considérant que les altitudes des aéronefs sont stables sur les secteurs en route, il est alors possible de se ramener à une planification de trajectoires en 2D, dans un plan horizontal. Cette hypothèse est faite dans [24], [30], [61] pour traiter le problème de commande en 2D.

Par ailleurs d'autres critères, tels que la consommation de carburant, peuvent être envisagés. Un modèle de consommation de carburant est donné dans [9]. Pour un appareil de type *jet*, type le plus courant aux altitudes concernées par le trafic en-route, la consommation par unité de temps de A_i à l'instant t vaut

$$C_{t,i}(t) = c_{1,i} \left(1 + \frac{V_i(t)}{c_{2,i}} \right) F_{P,i}(t), \quad (1-18)$$

où $c_{1,i}$ et $c_{2,i}$ dépendent du type de l'appareil. On aurait alors :

$$\min \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \int_0^T C_{t,i}(t) dt$$

Disposant d'une expression mathématique de la résolution de conflits, l'idéal serait désormais d'en trouver la solution analytique. La théorie de la commande optimale donne des conditions nécessaires d'optimalité par le Principe du Maximum de Pontriaguine (PMP) [103].

Bicchi et Pallottino [24] ont appliqué le PMP au cas du conflit à deux aéronefs se déplaçant à vitesse constante dans un plan horizontal. En étudiant séparément les arcs contraints, c'est-à-dire les intervalles de temps où $\|\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t)\| = D$, et les arcs non contraints, où $\|\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t)\| > D$, ils mettent en évidence des trajectoires composées de tronçons circulaires et de lignes droites satisfaisant les conditions nécessaires d'optimalité. Il n'a toutefois pas été possible de synthétiser tous les cas recensés pour en dégager une solution optimale. Ces informations ont été utilisées dans un algorithme sous-optimal de recherche de trajectoires sans conflit (voir section 1.2.3).

Les travaux de Durand [37] et de Hu *et al.* [61] ont permis de mettre en évidence une solution optimale pour un cas très simplifié. Pour cela, ils ont étudié le conflit entre deux aéronefs en mettant de côté les contraintes sur l'état (1-10)–(1-14). L'approche de Durand a appliqué le PMP en se limitant au cas en 2D. Hu *et al.* ont traité les cas 3D en s'appuyant sur le fait que pour un seul véhicule les trajectoires minimisant l'énergie

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left(\left(\frac{dp_x(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dp_y(t)}{dt} \right)^2 + \alpha_z \left(\frac{dp_z(t)}{dt} \right)^2 \right) dt$$

sont les courbes de plus courts chemins évitant d'éventuels obstacles fixes. Ils établissent alors l'équivalence entre le cas à deux aéronefs et le cas à un aéronef avec un obstacle cylindrique fixe. Les variables de commande sont directement les vecteurs vitesse des aéronefs. Dans les deux travaux, il n'a pas été possible d'étendre le calcul à plus de deux aéronefs. Ces trajectoires optimales sont supposées fournir de l'information sur la forme de bonnes trajectoires dans le cas général, bien que rien ne garantisse qu'elles soient réalisables.

Les difficultés rencontrées lors de la résolution analytique justifient d'approcher le problème par des méthodes numériques. La plupart des travaux sur la résolution de conflits aériens, et plus généralement sur la planification de trajectoires sans collision, se sont appliqués à développer des modèles et à les optimiser numériquement. L'enjeu de l'optimisation numérique est de trouver un compromis entre précision du modèle, optimalité des solutions et complexité informatique. Ainsi, il semble assez naturel que plus le modèle est complet et précis et plus sa résolution risque d'être longue ou de ne pas converger vers la solution optimale.

1.2.3 Résolution numérique par discrétisation de l'espace des commandes

Les évolutions des variables de commande de (1-17) sont des éléments de l'espace des fonctions de $[0; T]$ dans \mathbb{R}^3 . Cet espace est de dimension infinie. Il est donc nécessaire, pour résoudre (1-17) numériquement, de se ramener à un nombre fini de variables. Pour cela, il est par exemple habituel de discrétiser l'horizon temporel $[0; T]$; c'est d'ailleurs l'un des points importants de la section 1.2.4. Le nombre de variables de commande est alors fini, mais chacune d'entre elles prend ses valeurs dans un intervalle continu. Si, en outre, l'espace de chaque variable de commande est réduit à un ensemble fini de valeurs, la planification des trajectoires passe par la résolution d'un problème d'optimisation discrète. Plusieurs types de méthodes ont été appliquées pour explorer cet espace discret selon que l'optimum est recherché ou non.

Méthode d'exploration d'arbres

Dans [46], les actions sont une combinaison de ces deux types :

- un virage à gauche brusque suivi d'une ligne droite et d'un virage à droite, ou inversement ;
- une décélération brusque suivie d'une trajectoire à vitesse constante avant une nouvelle accélération.

L'état résultant d'une action est précalculé en fonction de l'état initial grâce à un modèle dynamique précis adaptable selon l'application. L'auteur décrit alors le problème d'optimisation

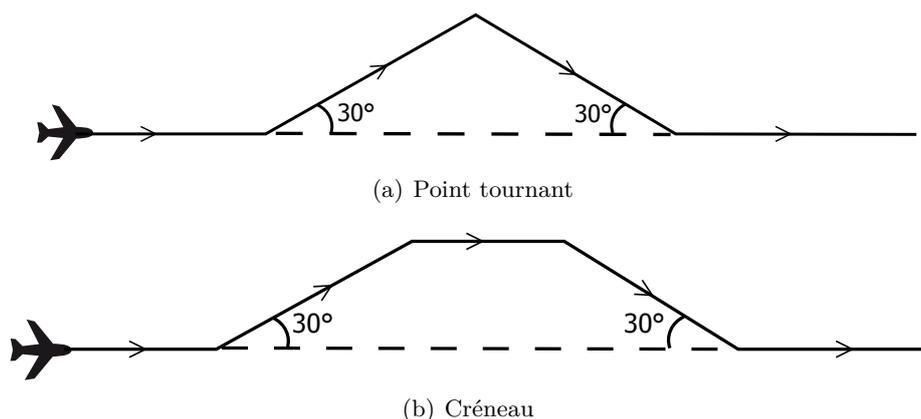


Figure 1.6 — Manœuvres de créneau et de point tournant

sous la forme d'un arbre dont chaque nœud représente l'historique des actions réalisées jusqu'ici. S'il y a N aéronefs, et que M manœuvres différentes sont possibles à chaque pas de temps, on dénombre déjà $(M^N)^k$ configurations possibles au k^e pas de temps. La taille de l'arbre justifie de se limiter à un petit nombre d'actions et d'utiliser un algorithme d'exploration d'arbre efficace. L'arbre est parcouru par une méthode de *branch and bound*. Un pré-calcul des bornes inférieures permet de trouver rapidement la solution optimale pour des petites instances à quatre véhicules.

Méthodes heuristiques

Dans les travaux de [24,37], le choix des actions a été guidé par l'étude théorique du problème de commande optimale discuté à la section 1.2.2. Puisque ces manœuvres satisfont les conditions nécessaires d'optimalité d'un problème simplifié à deux aéronefs, elles sont considérées comme de bonnes candidates pour être incluses dans la solution optimale du cas général.

Ainsi la méthode proposée dans [24] recherche des trajectoires sans conflit dont la somme des longueurs est minimale parmi des successions de lignes droites et d'arcs de cercle. Les solutions sont caractérisées par le nombre de points de contact entre trajectoires, un point de contact étant un point où la contrainte de séparation est active : $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| = D$. Dans l'algorithme heuristique proposé, des trajectoires sans conflit de longueur minimale sont d'abord cherchées parmi les ensembles de trajectoires entre lesquelles il n'existe qu'un seul point de contact. Si nécessaire, les aéronefs évitent les conflits en parcourant des cercles d'attente. Cet algorithme est ensuite répété en augmentant le nombre de points de contact jusqu'à ce qu'une solution dont la valeur du critère est plus grande qu'au pas précédent soit trouvée.

Algorithmes génétiques

Dans [37], Durand réduit l'espace des manœuvres à un ensemble fini de trajectoires formant un *point tournant* ou un *créneau*. Le point tournant a été choisi parce qu'il constitue la résolution optimale pour un conflit à deux aéronefs sans contrainte d'état lorsque seul l'un des aéronefs modifie sa trajectoire. Le créneau a été utilisé pour permettre les dépassements et la résolution des conflits frontaux. Les manœuvres choisies par Durand correspondent à des idéalizations de trajectoires supposant que les changements de direction sont instantanés. Les figures 1.6(a) et 1.6(b) illustrent respectivement un point tournant et un créneau lorsque l'aéronef dévie selon un angle de 30° de sa trajectoire initiale et récupère sa trajectoire par une déviation exactement symétrique.

Durand a implémenté un algorithme génétique pour la recherche des manœuvres d'évitement. L'algorithme génétique est une méthode de résolution approchée s'inspirant du mécanisme de l'évolution naturelle [76]. À partir d'une population de solutions, les meilleurs individus sont

sélectionnés avant d'être combinés et de subir des mutations. Chaque nouvelle génération doit ainsi donner naissance à de meilleurs individus du point de vue d'une fonction d'adaptation. Les mutations sont opérées de façon aléatoire afin de s'échapper des minima locaux. Dans [39], chaque aéronef effectue une unique manœuvre de point tournant ou de créneau décrite par l'instant auquel débute la manœuvre, la durée de la manœuvre, dont le signe est positif ou négatif selon la direction du changement de cap, et la durée du créneau, égale à 0 s'il s'agit d'un point tournant. Un individu de l'algorithme génétique est codé par les paramètres définissant l'ensemble des manœuvres, soit un espace de recherche de dimension $3 \times |\mathcal{A}|$ où $|\mathcal{A}|$ est le nombre d'aéronefs contrôlés. L'algorithme génétique ne converge en général pas vers un ensemble de trajectoires optimales, mais il s'est avéré être performant pour déterminer des trajectoires sans conflit sur des situations à vingt aéronefs apparemment inextricables [37].

1.2.4 Optimisation non linéaire

Discrétisation

Un Programme Non Linéaire (PNL) est un problème d'optimisation prenant la forme générique :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && f(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{sous} && g_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ & && x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où au moins l'une des fonctions $f, g_j, j = 1, \dots, m$, n'est pas linéaire. Notons que le problème peut très bien inclure des contraintes d'égalité exprimées à l'aide de deux inégalités de sens différents. La résolution d'un PNL se fait généralement par des méthodes itératives, telles que des méthodes de points intérieurs ou de Programmation Quadratique Séquentielle (SQP), convergeant vers des points satisfaisant les conditions nécessaires d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker. Le lecteur intéressé pourra se référer à [82] pour un exposé détaillé sur la programmation non linéaire.

Le processus consistant à convertir un problème de commande optimale de dimension infinie en un PNL exprimé grâce à un nombre fini de variables et de contraintes est habituellement appelé *transcription directe*. Pendant la transcription, l'horizon temporel $[0; T]$ est divisé en sous-intervalles $[t_k; t_{k+1}]$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_K = T$, et une méthode d'intégration numérique est appliquée pour résoudre le système dynamique (1-2)–(1-7) et intégrer la fonction de coût. Ainsi, dans [89] et [15], le système dynamique est intégré par *collocation* et sur chaque sous-intervalle $[t_k; t_{k+1}]$, les points de collocation sont les racines d'un polynôme appartenant à une famille de polynômes orthogonaux. Une description plus détaillée de cette transcription directe dite *pseudo-spectrale* est faite dans [90]. Dans la suite, l'ensemble des instants de discrétisation $\{t_k\}_{k=0, \dots, K}$ est noté \mathcal{T} et $\{t_k\}_{k=0, \dots, K-1}$ est noté \mathcal{T}^- .

L'interpolation par des polynômes de faible degré sur des sous-intervalles est aussi appelée *collocation locale* par opposition à la *collocation globale* dans laquelle la trajectoire complète est approchée par un polynôme de degré plus élevé [90]. Cette seconde option a été retenue par [110] pour la génération de trajectoires de mobiles, puis elle a été appliquée au contrôle aérien dans [87] et à la séparation de drones dans [23]. Ces études n'ont pas forcément été réalisées dans le cadre de la programmation non linéaire, mais il a été choisi de les intégrer à cette section pour mieux faire le parallèle entre les collocations locale et globale.

Peyronne décrit un modèle dans lequel les trajectoires sont modélisées par des B-splines de degré 3. Les polynômes sont alors déterminés par les états initiaux et finaux des aéronefs et par deux points de contrôle par trajectoire constituant les variables de décision. Berry *et al.* [23] parviennent à utiliser un modèle dynamique précis à six degrés de liberté en exprimant les variables dans une base de polynôme de Bézier d'ordre 6.

La collocation globale permet d'obtenir des trajectoires lisses avec un petit nombre de variables de décision. Cependant, le choix a priori d'une base contenant quatre à six polynômes constitue une décision marquée sur la forme des trajectoires recherchées. Sur le plan numérique, il n'y a pas encore eu de résultats probants par rapport à la collocation locale. Les contraintes d'état et de séparation exigent en fait de discrétiser l'horizon temporel pour être vérifiées à une fréquence suffisante.

Optimisation

Après transcription, le PNL est résolu par SQP dans [77] et par un algorithme de points intérieurs dans [89] et [15]. Cependant, le problème n'étant pas convexe, les algorithmes de résolution ne convergent que vers un minimum local. Il n'existe ainsi aucune garantie que les solutions aient un coût minimum ni même qu'un ensemble de trajectoires sans conflit soit trouvé.

Pour cette raison des techniques d'optimisation globale sont parfois utilisées. Peyronne [87] implémente par exemple un algorithme génétique pour la résolution numérique du problème. Afin d'éviter autant que possible les minima locaux, Eele et Richards [41] ont optimisé le problème par *branch and bound*. Seul le mouvement d'un mobile a été planifié dans un environnement encombré d'obstacles. L'arbre parcouru par *branch and bound* est construit en divisant l'espace de recherche en deux pour chaque obstacle rencontré. Chaque nœud créé correspond à un sens de manœuvre d'évitement, horaire ou anti-horaire. Un sous-problème correspond donc à la recherche d'une trajectoire sans conflit sachant que le sens de la manœuvre d'évitement de chaque obstacle a déjà été décidé. La convergence du *branch and bound* suppose alors que chaque sous-problème est résolu de façon optimale. Ce résultat n'est pas garanti car il s'agit encore d'un PNL non convexe, mais les auteurs font ici l'hypothèse qu'une fois les sens de résolution décidés, les minima restants sont globaux. Cela revient en fait à supposer que chaque minimum local du problème initial correspond en fait à une orientation particulière des manœuvres de résolution. S'il n'existe pas encore d'analyse sur la validité de cette intuition, cet algorithme permet d'obtenir des trajectoires évitant jusqu'à 60 obstacles. L'approche de Eele et Richards [41] n'a en revanche pas été appliquée au problème de résolution de conflits entre mobiles multiples.

Outre le risque de converger vers une solution de mauvaise qualité, sans connaissance a priori sur les solutions, la convergence est généralement lente. Il peut donc être utile de chercher des solutions, réalisables ou non, à partir desquelles débiter la résolution du PNL.

Initialisation de la résolution du PNL

Ragunathan *et al.* [89] emploient la méthode développée par Hu *et al.* [61] pour produire rapidement des trajectoires sans conflit afin de fournir un point initial à la résolution du PNL. Comme cela a été vu dans la section 1.2.2, Hu *et al.* ont calculé la solution analytique pour le conflit à deux aéronefs sans borne sur les variables d'état et de commande sans qu'il ait pour autant été possible de généraliser le raisonnement à plus de deux aéronefs. Ils ont donc proposé une méthode numérique de résolution en limitant l'espace des manœuvres à des trajectoires formées de deux segments joints au point de passage $\mathbf{p}(t^c)$ à l'instant t^c . La position $\mathbf{p}(t^c)$ est la commande et l'instant t^c est fixé a priori. Les trajectoires des aéronefs sont données par :

$$\mathbf{p}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_i^{\text{ini}} + \frac{t-t_i^{\text{ini}}}{t^c-t_i^{\text{ini}}} \mathbf{p}_i(t^c) & \text{si } t_i^{\text{ini}} \leq t \leq t^c \\ \mathbf{p}_i(t^c) + \frac{t_i^{\text{fin}}-t}{t_i^{\text{fin}}-t^c} \mathbf{p}_i^{\text{fin}} & \text{si } t^c \leq t \leq t_i^{\text{fin}} \end{cases}, \forall A_i \in \mathcal{A}$$

Les contraintes de séparation exprimées en fonction des variables de commande $\{\mathbf{p}_i(t^c)\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ sont non convexes. Pour être assurés de trouver une solution, les auteurs ont approché ces contraintes grâce à des plans tangents au cylindre de séparation dessiné sur la figure 1.2. Soit $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$. La trajectoire des aéronefs est représentée dans le référentiel mobile centré sur A_i . La droite joignant $\mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}}$ à $\mathbf{p}_j^{\text{fin}} - \mathbf{p}_i^{\text{fin}}$ coupe successivement le cylindre en deux points \mathbf{a} et

b. Le plan tangent au cylindre en \mathbf{a} et passant par $\mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}}$ est noté $\mathcal{P}_\mathbf{a}$, et le plan tangent \mathbf{b} et passant par $\mathbf{p}_j^{\text{fin}} - \mathbf{p}_i^{\text{fin}}$ est noté $\mathcal{P}_\mathbf{b}$. Chacun des plans divise l'espace en deux demi-espaces fermés. Soit alors $\mathcal{P}_\mathbf{a}^+$ et $\mathcal{P}_\mathbf{b}^+$, les demi-espaces délimités respectivement par $\mathcal{P}_\mathbf{a}$ et $\mathcal{P}_\mathbf{b}$ et ne contenant pas le cylindre. Hu *et al.* montrent que la contrainte

$$\mathbf{p}_j(t^c) - \mathbf{p}_i(t^c) \in \mathcal{P}_\mathbf{a}^+ \cap \mathcal{P}_\mathbf{b}^+ \quad (1-19)$$

garantit la séparation entre A_i et A_j . En outre, (1-19) s'exprime à l'aide d'un ensemble de contraintes linéaires. Le problème d'optimisation est ensuite formulé comme la minimisation de l'écart entre $\mathbf{p}_i(t^c)$ et \mathbf{p}_i^c , le point de passage optimal obtenu en relâchant les contraintes de séparation :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \|\mathbf{p}_i(t^c) - \mathbf{p}_i^c\| \\ \text{sous} \quad & (1-19) \text{ avec } \mathbf{p}_i(t^c) \in \mathbb{R}^3, \forall A_i \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (1-20)$$

où $\mathbf{p}_i^c = \mathbf{p}_i^{\text{ini}} + \frac{t^c - t_i^{\text{ini}}}{t_i^{\text{fin}} - t_i^{\text{ini}}} (\mathbf{p}_i^{\text{fin}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}})$. Dans (1-20), un objectif quadratique est minimisé sous un ensemble de contraintes linéaires. Un tel modèle est un programme quadratique. Des méthodes d'optimisation classiques permettent d'en trouver la solution optimale très rapidement, d'autant plus qu'il ne contient finalement qu'un vecteur de trois commandes par aéronef.

À partir de la solution optimale de (1-20), Raghunathan *et al.* [89] parviennent à se ramener à une trajectoire exprimée en fonction des variables discrétisées du modèle de commande optimale (1-17). Toutefois, le modèle (1-20) n'incluant pas les bornes sur les variables d'état et de commande, les trajectoires qu'il induit ne permettent pas forcément de construire une solution réalisable au sens de (1-17). En reprenant la formulation générale du PNL donnée en début de section, des variables d'écart e_j sont ajoutées pour chaque contrainte g_j non satisfaite :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & f(x_1, \dots, x_n) + \alpha_e \sum_{j \in \mathcal{V}} e_j \\ \text{sous} \quad & g_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{S} \\ & g_j(x_1, \dots, x_n) \leq e_j, \quad \forall j \in \mathcal{V} \\ & x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad e_j \geq 0, \forall j \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

où \mathcal{S} est l'ensemble des contraintes satisfaites par les trajectoires de Hu *et al.* et \mathcal{V} l'ensemble des contraintes non satisfaites. La donnée $\alpha_e > 0$ est une pénalité grande devant la fonction de coût f . Grâce à cette modification, la solution de (1-20) est transformée en une solution réalisable au sens de (1-17). La minimisation de l'objectif recherchera des solutions pour lesquelles $e_j = 0$, $j \in \mathcal{S}$, c'est-à-dire des solutions respectant les contraintes initiales $g_j \leq 0$, $j \in \mathcal{S}$.

Le processus développé par Raghunathan *et al.* repose en grande partie sur l'hypothèse que les trajectoires initiales sont proches de l'optimum. Borrelli *et al.* [28] ont suivi la même démarche en modifiant les contraintes non linéaires pour que le problème puisse être exprimé par un Programme Linéaire Mixte (MILP⁷) équivalent. Ils ont ainsi pu comparer les temps d'exécution des résolutions des deux modèles et quantifier l'écart entre le coût des solutions trouvées. Il a été constaté que la résolution du PNL prenait bien plus de temps que celle du MILP et que les temps d'exécution présentaient de fortes oscillations. En outre, les solutions du PNL sont 10 % à 20 % plus coûteuses. Les auteurs ont précisé que les résultats du PNL dépendaient pour beaucoup de l'initialisation et qu'ils pourraient certainement être améliorés en choisissant d'autres initialisations.

Notons que les modèles de programmation non linéaires [15, 23, 28, 61, 77, 89] intègrent tous des manœuvres en altitude, contrairement à [41, 87, 110]. Dans la suite, sauf mention particulière, les approches se sont limitées à un plan horizontal en deux dimensions.

7. cette abréviation fait référence au terme anglais *Mixed Integer Linear Program* ; il a été préféré à l'acronyme PLM pour clarifier la lecture, sachant la proximité de ce dernier avec l'acronyme de Programme Non Linéaire.

1.2.5 Programmation linéaire mixte

Depuis son invention par George Dantzig en 1947 pour traiter des problèmes d'ordonnancement de tâches dans le domaine militaire, la programmation linéaire a connu un véritable succès et a été appliquée pour un nombre impressionnant d'applications [35]. Cet engouement est notamment dû à l'efficacité des algorithmes de résolution dont le plus connu est le simplexe [33]. La recherche n'a ensuite jamais cessé et a été prolifique. Elle a donné lieu à de nombreuses extensions dont fait partie la programmation linéaire mixte, où les variables peuvent être discrètes ou continues.

L'un des résultats marquants de cette recherche tient dans le développement de codes informatiques extrêmement performants pour la résolution de tels problèmes. Parmi ceux-ci figurent notamment ILOG CPLEX [27] ou Gurobi [57]. Une vue d'ensemble des méthodes implémentées dans les principaux codes de résolution de MILP est donnée dans [72]. Elles sont généralement basées sur un algorithme de *branch and cut* qui combine l'exploration d'un arbre d'énumération par *branch and bound* avec la génération de plans coupants au fur et à mesure de cette exploration. Pour un exposé théorique sur ces méthodes, on pourra par exemple se référer à [109]. Grâce à ces codes génériques, la recherche sur les applications a pu se concentrer sur la tâche de modélisation.

Ces qualités justifient qu'un grand nombre de travaux sur la résolution de conflits se soient orientés vers des modèles linéaires. La difficulté de ces recherches est de parvenir à approcher le problème initial par un objectif et un ensemble de contraintes linéaires. Parmi celles-ci, la contrainte de séparation est non convexe et nécessite de prendre une décision parmi une disjonction de contraintes. De façon schématique, lorsque deux aéronefs se croisent, la première étape est de savoir quel aéronef doit passer devant l'autre. Il s'agit soit d'un avion, soit de l'autre, et dans chaque cas, les contraintes sont différentes. À l'inverse, un système d'équations linéaires constitue une conjonction de contraintes, et est par conséquent incapable de modéliser un tel processus décisionnel. C'est pourquoi l'automatisation de l'ATC a généralement fait appel au cadre de la programmation linéaire mixte. Puisqu'elle fait intervenir simultanément des variables continues et des variables entières, elle permet de modéliser les contraintes disjonctives grâce à des variables binaires.

Plusieurs approches distinctes ont été suivies pour traiter le contrôle aérien par la programmation linéaire mixte. Une façon de les classer est de les différencier en fonction de la manière dont les variables fonctionnelles du problème de commande optimale ont été discrétisées pour se ramener à un problème en dimension finie. Les approches détaillées dans la suite choisissent de paramétrer les trajectoires par les valeurs des commandes en un nombre fini d'instants, ou de lieux de l'espace définis par la proximité d'un conflit.

Discrétisation temporelle

Le paramétrage privilégié dans la littérature consiste à supposer les trajectoires entièrement décrites par les valeurs des variables en un ensemble fini d'instants \mathcal{T} séparés par un pas de temps de longueur h fixe [40, 81, 92, 96, 97]. On peut voir le modèle linéaire comme le résultat de la linéarisation de l'objectif et des contraintes d'un PNL obtenu par la démarche décrite à la section précédente, même s'il n'est généralement pas présenté de cette façon. La discrétisation temporelle à pas de temps de longueur fixe reste toutefois plus simple que la collocation directe, souvent utilisée dans les travaux réalisés dans le cadre de la programmation non linéaire.

Les premiers travaux décrivant un modèle complet discrétisé en temps ont été ceux de Schouwenaars *et al.* [97] et de Richards et How [92]. L'état d'un mobile $A_i \in \mathcal{A}$ à l'instant $t_k \in \mathcal{T}$ est décrit par les coordonnées de sa position $(p_{x,i}^k, p_{y,i}^k)$ et de sa vitesse $(v_{x,i}^k, v_{y,i}^k)$ dans un repère cartésien, et la commande est donnée par les coordonnées de l'accélération $(u_{x,i}^k, u_{y,i}^k)$. Ces vecteurs sont également notés \mathbf{p}_i^k , \mathbf{v}_i^k et \mathbf{u}_i^k . La dynamique des aéronefs est approchée par un

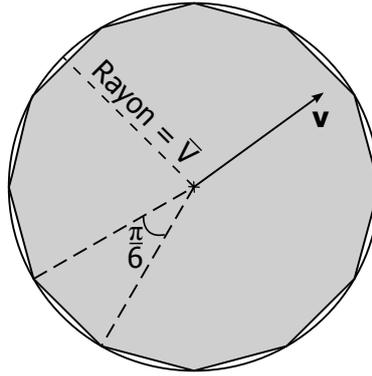


Figure 1.7 — Linéarisation de la borne supérieure sur la vitesse

double intégrateur discrétisé selon un pas de temps h :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_i^{k+1} \\ \mathbf{v}_i^{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i^k \\ \mathbf{v}_i^k \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^k \\ \mathbf{u}_i^k \end{pmatrix}, \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- \quad (1-21)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & h\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{h^2}{2}\mathbf{I}_2 \\ h\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Les contraintes sur l'état et la commande des aéronefs pris individuellement sont limitées à des bornes supérieures sur la vitesse et l'accélération :

$$\|\mathbf{v}_i^k\| \leq V^{\max} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}_i^k\| \leq U^{\max}, \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \quad (1-22)$$

Les contraintes (1-22) sont représentées de façon équivalente par un cercle centré sur l'origine et de rayon V^{\max} ou U^{\max} . Elles sont quadratiques mais il est possible de les approcher par un nombre de cordes du cercle ou de tangentes au cercle aussi grand que la précision souhaitée l'exige. La contrainte quadratique pour la vitesse et sa linéarisation à l'aide de 12 cordes sont représentées en figure 1.7. En utilisant respectivement N_v et N_u cordes et en introduisant les deux ensembles $\Theta_v = \{\frac{2\pi n}{N_v}\}_{n \in \{1, \dots, N_v\}}$ et $\Theta_u = \{\frac{2\pi n}{N_u}\}_{n \in \{1, \dots, N_u\}}$, les contraintes linéaires sur la vitesse et l'accélération s'écrivent

$$\left\langle \mathbf{v}_i^k \mid \mathbf{e}(\theta) \right\rangle \leq V^{\max} \cos\left(\frac{\pi}{N_v}\right), \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \forall \theta \in \Theta_v \quad (1-23)$$

$$\left\langle \mathbf{u}_i^k \mid \mathbf{e}(\theta) \right\rangle \leq U^{\max} \cos\left(\frac{\pi}{N_u}\right), \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-, \forall \theta \in \Theta_u \quad (1-24)$$

où $\mathbf{e}(\theta)$ est le vecteur unitaire constant de coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire entre deux vecteurs.

Remarque 1.4. Les équations relatives à l'approximation par des tangentes sont similaires aux équations (1-23) et (1-24) ; la seule différence est que le facteur $\cos(\frac{\pi}{N})$ n'apparaît pas dans le membre de droite. L'approximation par les cordes est suffisante mais pas nécessaire tandis que l'approximation par les tangentes est nécessaire mais pas suffisante. Schouwenaars [96, 97] et Richards et How [92] préfèrent utiliser l'approximation par les tangentes. L'approximation par les cordes (1-23)-(1-24) apparaît dans [40].

Pour maintenir la séparation entre mobiles, la contrainte (1-15) est ensuite exprimée en approchant la norme 2 par la norme 1. Pour deux aéronefs A_i et A_j , le maintien de la séparation à un instant t_k s'écrit alors comme la disjonction de deux contraintes :

$$|p_{x,j}^k - p_{x,i}^k| \geq D \quad \vee \quad |p_{y,j}^k - p_{y,i}^k| \geq D,$$

ou encore :

$$p_{x,j}^k - p_{x,i}^k \geq D \quad \vee \quad p_{x,i}^k - p_{x,j}^k \geq D \quad \vee \quad p_{y,j}^k - p_{y,i}^k \geq D \quad \vee \quad p_{y,i}^k - p_{y,j}^k \geq D.$$

Or, le problème d'optimisation doit être formulé comme la minimisation d'un objectif sous une conjonction de contraintes. C'est donc en modélisant les contraintes de séparation qu'il est nécessaire de sortir du cadre de la PL à variables continues. La disjonction est convertie en une conjonction à l'aide de 4 variables binaires $\delta_{ij}^{k,1}, \dots, \delta_{ij}^{k,4}$ intervenant dans les contraintes :

$$p_{x,j}^k - p_{x,i}^k \geq D - M\delta_{ij}^{k,1} \tag{1-25}$$

$$p_{x,i}^k - p_{x,j}^k \geq D - M\delta_{ij}^{k,2} \tag{1-26}$$

$$p_{y,j}^k - p_{y,i}^k \geq D - M\delta_{ij}^{k,3} \tag{1-27}$$

$$p_{y,i}^k - p_{y,j}^k \geq D - M\delta_{ij}^{k,4} \tag{1-28}$$

$$\delta_{ij}^{k,1} + \delta_{ij}^{k,2} + \delta_{ij}^{k,3} + \delta_{ij}^{k,4} \leq 3, \tag{1-29}$$

où M est choisi plus grand que la plus grande distance possible dans l'espace où les avions se déplacent. Lorsqu'une variable binaire est égale à 1, le membre de droite de l'inégalité correspondante est donc toujours plus petit que le membre de gauche. Ainsi, seules les contraintes où la variable binaire s'annule imposent une distance entre les deux mobiles. La satisfaction de la disjonction est finalement garantie par la contrainte (1-29), puisqu'elle équivaut à exiger qu'au moins l'une des variables binaires soit nulle. L'utilisation des variables binaires pour modéliser une disjonction est classique en programmation linéaire mixte. Du fait de l'utilisation de cette constante M , elle est souvent appelée méthode du *grand M*.

Des obstacles rectangulaires ont également été pris en compte par des contraintes tout à fait semblables à (1-25)-(1-29). Un obstacle o dont l'intérieur est défini par les inéquations $x_o^- \leq p_x \leq x_o^+$ et $y_o^- \leq p_y \leq y_o^+$ est inclus dans le modèle grâce aux contraintes, $\forall A_i \in \mathcal{A}$:

$$p_{x,j}^k \leq x_o^- + M\delta_{io}^{k,1} \tag{1-30}$$

$$p_{x,i}^k \geq x_o^+ - M\delta_{io}^{k,2} \tag{1-31}$$

$$p_{y,j}^k \leq y_o^- + M\delta_{io}^{k,3} \tag{1-32}$$

$$p_{y,i}^k \geq y_o^+ - M\delta_{io}^{k,4} \tag{1-33}$$

$$\delta_{io}^{k,1} + \delta_{io}^{k,2} + \delta_{io}^{k,3} + \delta_{io}^{k,4} \leq 3, \tag{1-34}$$

Il est important de noter que, sans les contraintes de séparation, le problème appartient à la classe des programmes linéaires et a donc une complexité polynomiale. En pratique, certains programmes linéaires faisant intervenir des centaines de milliers de variables sont résolus en quelques secondes. En revanche, avec les contraintes (1-25)-(1-34), le problème appartient à la classe de programmes linéaires mixtes dont la résolution est faite en parcourant un arbre. Malgré l'existence d'heuristiques, de techniques de coupes et d'algorithmes de *branch and bound* dont l'action coordonnée accélère radicalement le processus de résolution, la complexité de cette classe reste exponentielle en fonction du nombre de variables binaires.

Les contraintes (1-25)-(1-29) forcent la séparation entre les avions à l'instant t_k . Si un ensemble de contraintes est ajouté pour chaque élément de \mathcal{T} , la séparation est assurée à un nombre fini d'instants. Or, du fait que la fonction $t \mapsto -\|\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t)\|^2$ n'est pas convexe, la contrainte de séparation peut être satisfaite à deux instants consécutifs sans pour autant l'être à l'intérieur du sous-intervalle de temps (voir Figure 1.8). Schouwenaars [98] tient compte de la discrétisation du temps en substituant la norme de séparation horizontale D par $D^{\max} = D + hV^{\max}$ où V^{\max} est la vitesse maximum des avions. Cette nouvelle distance assure que la séparation est toujours maintenue, mais à moins que le pas d'intégration soit très petit, elle surestime beaucoup la

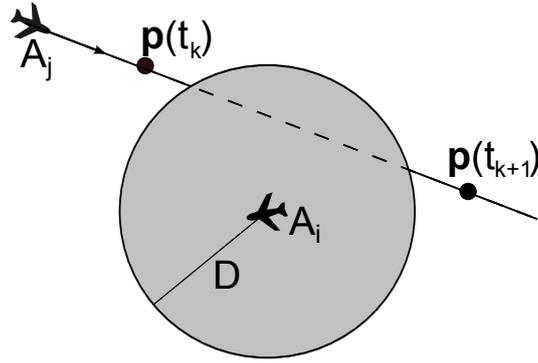


Figure 1.8 — Effet de la non convexité des contraintes de séparation

norme de séparation horizontale. Par exemple, si $h = 30$ s et $V^{\max} = 480$ kt, alors $D^{\max} \approx 9$ NM, ce qui correspond presque à doubler la norme de séparation.

Une alternative est proposée par Earl et D’Andrea [40] pour l’évitement d’obstacles polygonaux sur un intervalle de temps continu sans avoir à utiliser un pas de temps très petit. Ils appliquent une procédure itérative dans laquelle la séparation est d’abord forcée par des contraintes similaires à (1-30)–(1-34) pour un nombre réduit d’instant, en augmentant légèrement la taille des polygones. Après résolution de ce problème, l’évitement du véritable obstacle est vérifié sur l’horizon complet. Lorsqu’il s’avère que le mobile pénètre l’obstacle sur un intervalle $[t_a; t_b]$, le point milieu de l’intervalle est ajouté à la liste de points où la séparation est contrainte. Le processus est ensuite répété jusqu’à l’élimination de tous les conflits. Earl et D’Andrea décrivent un exemple où l’algorithme converge après seulement deux itérations en divisant initialement l’intervalle temporel en 10 sous-intervalles. La procédure n’a cependant pas été implémentée pour la résolution de conflits entre mobiles.

Dans sa thèse [96], Schouwenaars a apporté deux améliorations au modèle. Les bornes inférieures sur la vitesse ont été ajoutées alors qu’elles n’avaient généralement pas été considérées jusque-là. De façon analogue au traitement des bornes supérieures, il approche la contrainte circulaire définissant la vitesse minimum par un ensemble de N_v segments de droites (Figure 1.9). Toutefois, les contraintes sont cette fois en disjonction. Un nouvel ensemble de N_v variables binaires $\{\epsilon_i^{k\theta}\}$ est donc introduit pour chaque aéronef et chaque instant.

$$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T} :$$

$$\left\langle \mathbf{v}_i^k \mid \mathbf{e}(\theta) \right\rangle \geq V^{\min} - M' \epsilon_i^{k\theta}, \quad \forall \theta \in \Theta_v, \quad (1-35)$$

$$\sum_{\theta \in \Theta_v} \epsilon_i^{k\theta} \leq N_v - 1 \quad (1-36)$$

D’autre part, la vitesse de virage maximum 1-13 est prise en compte grâce à une contrainte rectangulaire délimitant une accélération latérale et une accélération longitudinale maximales, respectivement notées U_i^{lon} et U_i^{lat} . Or, cette contrainte dépend du cap de l’aéronef, lui-même variable ; l’écriture exacte de la contrainte fait donc intervenir le produit scalaire de l’accélération par la vitesse. Pour éviter ce produit de variables, la contrainte est approchée par l’intersection de deux disques de même rayon représentés sur la figure 1.10 :

$$\left\| \mathbf{u}_i^k - \alpha_i \frac{\mathbf{v}_i^k}{\|\mathbf{v}_i^k\|} \right\| \leq \beta_i, \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}$$

$$\left\| \mathbf{u}_i^k + \alpha_i \frac{\mathbf{v}_i^k}{\|\mathbf{v}_i^k\|} \right\| \leq \beta_i, \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}$$

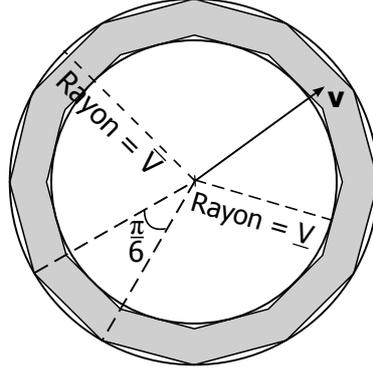


Figure 1.9 — Linéarisation des deux bornes sur la vitesse

où α_i et β_i sont déterminées en fonction de U_i^{lon} et U_i^{lat} en se référant à la figure 1.10 :

$$\alpha_i = \frac{(U_i^{lat})^2 - (U_i^{lon})^2}{2U_i^{lon}}$$

$$\beta_i = \frac{(U_i^{lat})^2 + (U_i^{lon})^2}{2U_i^{lon}}$$

Les deux contraintes sont ensuite linéarisées en approchant la norme de la vitesse de l'aéronef par sa vitesse nominale V_i^{nom} et en réalisant une approximation du cercle à l'aide de N_u cordes.

$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-, \forall \theta \in \Theta_u :$

$$\left\langle \mathbf{u}_i^k - \alpha_i \frac{\mathbf{v}_i^k}{V_i^{\text{nom}}} \middle| \mathbf{e}(\theta) \right\rangle \leq \beta_i \cos\left(\frac{\pi}{N_u}\right), \quad (1-37)$$

$$\left\langle \mathbf{u}_i^k + \alpha_i \frac{\mathbf{v}_i^k}{V_i^{\text{nom}}} \middle| \mathbf{e}(\theta) \right\rangle \leq \beta_i \cos\left(\frac{\pi}{N_u}\right), \quad (1-38)$$

Remarque 1.5. L'approximation de la norme de la vitesse n'est pas bonne en général. D'après la figure 1.10, les contraintes (1-37) et (1-38) permettent de majorer la valeur absolue de l'accélération longitudinale par :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \beta_i - \alpha \frac{\|\mathbf{v}_i\|}{V_i^{\text{nom}}} \\ &= \frac{1}{2U_i^{lon}} \left(\left(1 - \frac{\|\mathbf{v}_i\|}{V_i^{\text{nom}}}\right) (U_i^{lat})^2 \right) + \left(\left(1 + \frac{\|\mathbf{v}_i\|}{V_i^{\text{nom}}}\right) (U_i^{lon})^2 \right) \end{aligned}$$

L'approximation est donc d'autant moins bonne que le rapport entre U_i^{lat} et U_i^{lon} est grand, et en particulier \bar{U} est négative pour tout \mathbf{v}_i tel que

$$\frac{\|\mathbf{v}_i\|}{V_i^{\text{nom}}} \geq \frac{(U_i^{lat})^2 + (U_i^{lon})^2}{(U_i^{lat})^2 - (U_i^{lon})^2}$$

Si des valeurs correspondant au modèle de performance BADA [9] sont utilisées, c'est-à-dire $U_i^{lon} \approx 0,61 \text{ m.s}^{-2}$ et $U_i^{lat} \approx 6,87 \text{ m.s}^{-2}$, la contrainte $\bar{U} \geq 0$ impose $\mathbf{v}_i \leq 1,016 \times V_i^{\text{nom}}$, ce qui laisse très peu de marge pour augmenter la vitesse. À l'inverse, si $\mathbf{v}_i \leq V_i^{\text{nom}}$, \bar{U} prend rapidement des valeurs telles que cela revient à relâcher la borne sur l'accélération longitudinale.

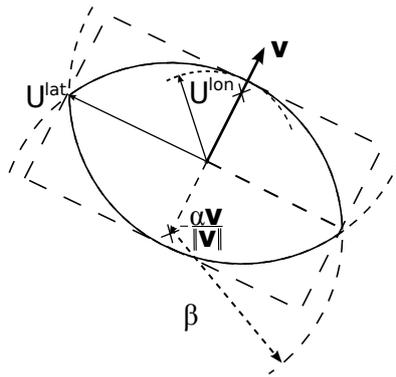


Figure 1.10 — Approximation d'un rectangle par l'intersection de deux disques

Le MILP complet est finalement exprimé comme la minimisation de la valeur absolue de l'accélération sous les contraintes données ci-dessus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min. \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{k=0}^{K-1} (|u_{x,i}^k| + |u_{y,i}^k|) \right) \\ \text{sous (1-21)–(1-38)} \\ \mathbf{p}_i^k, \mathbf{v}_i^k \in \mathbb{R}^2, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \\ \mathbf{u}_i^k \in \mathbb{R}^2, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- \\ \delta_{ij}^{kn} \in \{0, 1\}, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \forall n \in \{1, \dots, 4\}, \\ \delta_{io}^{kn} \in \{0, 1\}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall o, \forall t_k \in \mathcal{T}, \forall n \in \{1, \dots, 4\}, \\ \epsilon_i^{k\theta} \in \{0, 1\}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \forall \theta \in \Theta_v, \end{array} \right. \quad (1-39)$$

Ce problème contient notamment quatre variables binaires et quatre contraintes de *grand M* par conflit et par pas de temps ainsi qu'une variable binaire et N_v contraintes de *grand M* par pas de temps. Or, les méthodes de programmation linéaire mixte sont généralement peu efficaces lorsqu'un grand nombre de contraintes de *grand M* sont à prendre en compte. Cela vient du fait que, dans ce cas, la relaxation continue du MILP ne fournit pas une bonne borne inférieure de la valeur optimale du critère de ce dernier. Au final [97] rapporte une explosion du temps de calcul lorsque le nombre d'intervalles d'intégration augmente. C'est la raison pour laquelle il a mis en œuvre une procédure d'optimisation par horizon glissant discutée dans la section 1.2.6.

Niedringhaus [81] développe une heuristique pour déterminer à quel instant et dans quelle configuration les aéronefs vont se croiser. Par cette heuristique, les valeurs des variables binaires sont toutes fixées à l'avance. Niedringhaus se ramène donc à un PL qui peut être résolu en quelques secondes. Par contre, les solutions étant le résultat d'une décision prise a priori, elles sont sous-optimales.

En restant dans le cadre d'une résolution en MILP par horizon glissant, il est également possible de réduire l'horizon de commande. Le choix le plus radical revient à ne conserver qu'un seul ensemble de variables de commande pour l'instant initial de l'horizon de prédiction. Le modèle résultant, qui aboutit à un schéma de simplification particulier, est traité à part dans la section suivante.

Modélisations avec changement de vitesse unique

L'approche où la résolution de conflits est effectuée par le seul changement des vecteurs vitesse initiaux a été souvent utilisée parce qu'elle permet une formulation mathématique simple du problème et parce que sa résolution est rapide du fait du nombre réduit de variables [45, 84,

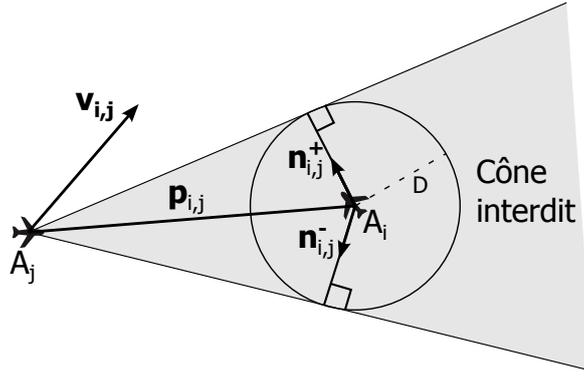


Figure 1.11 — *Conflit représenté dans le référentiel lié à l'un des aéronefs*

104, 107]. Pallottino *et al.* [84] limitent alternativement les commandes à des changements de cap sans changement de vitesse et à des changements de vitesse sans changement de cap, tandis que [45, 104, 107] considèrent toutes les manœuvres du plan. Notons que le modèle de Frazzoli *et al.* [45] est un cas particulier dans cette section parce qu'il conserve des contraintes et un objectif quadratiques.

Le principal avantage de cette modélisation est qu'en supposant les changements de vitesse instantanés, la contrainte de séparation s'exprime exactement comme la disjonction de deux contraintes linéaires. [45] met ce résultat en évidence en représentant un conflit $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ dans le référentiel mobile lié à A_i , tel que reproduit sur la figure 1.11. Les aéronefs restent séparés si le vecteur de vitesse relative $\mathbf{v}_{i,j} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$ reste en dehors du cône formé par les deux tangentes au cercle de rayon D centré sur A_i . Ainsi, les contraintes s'écrivent

$$\langle \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i | \mathbf{n}_{i,j}^+ \rangle \geq -M\delta_{i,j} \quad (1-40)$$

$$\langle \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i | \mathbf{n}_{i,j}^- \rangle \geq -M(1 - \delta_{i,j}) \quad (1-41)$$

où $\delta_{i,j}$ est une variable binaire et M une constante suffisamment grande. Pour la situation représentée sur la figure 1.11, on a donc $\delta_{i,j} = 0$ si A_j passe au-dessus du cône interdit, et $\delta_{i,j} = 1$ si A_j passe en dessous. Au final, le modèle n'inclut qu'une variable binaire par conflit. Le temps d'exécution permet une résolution en temps réel sur tous types d'instances. Un tel modèle a par exemple été utilisé dans [104] pour simuler des mouvements de foule. En répartissant la charge de la résolution entre les agents en conflit, ils parviennent à simuler le mouvement de plusieurs milliers d'humains.

Une limite de cette modélisation vient du fait qu'il est toujours nécessaire de faire plus d'un changement de vitesse puisqu'il est requis de rejoindre sa trajectoire initiale une fois la séparation garantie. Il n'est pas non plus possible de proposer des trajectoires rectilignes sans conflit pour toutes les situations. Il est donc nécessaire de répéter la résolution périodiquement et d'inclure dans l'objectif un terme pénalisant l'écart à la trajectoire prédite. Dans [45, 84], un vecteur vitesse préférentiel \mathbf{v}^{ref} est défini pour chaque mobile. \mathbf{v}^{ref} est dirigé vers le point de destination du mobile et sa norme est supposée minimiser une fonction de coût. L'objectif du problème d'optimisation est alors de minimiser la distance entre les vecteurs vitesse modifiés et les vitesses préférentielles :

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left\| \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^{\text{ref}} \right\|$$

Cette expression est linéarisée de façon immédiate dans [84] puisque la direction ou la norme du vecteur vitesse est fixée. Frazzoli *et al.* [45] minimisent en fait la somme des carrés des distances et sont amenés à résoudre un programme quadratique non convexe.

Vela *et al.* [107] minimisent la consommation de carburant, ce qui présente l'avantage de considérer une fonction de coût en lien étroit avec une réalité opérationnelle. La fonction de

consommation, dont l'expression est tirée du modèle de performances BADA [9], est linéarisée selon deux termes pénalisant les modifications de vitesse d'une part et l'allongement de la trajectoire d'autre part. Il est supposé que la trajectoire de référence des avions consiste à suivre la route directe entre leur position initiale et leur destination à une vitesse optimale du point de vue de la consommation de carburant. Cette fonction de coût pénalise aussi tout changement par rapport à la trajectoire de référence. Pour cela, Vela approche la norme de la vitesse par des variables liées entre elles par des contraintes *Special Ordered Set* de type II (SOS2). Des variables appartenant à un ensemble SOS2 sont non négatives et seules deux variables successives d'un même ensemble peuvent être non nulles. Les ensembles SOS permettent de spécifier l'intégralité des variables différemment, ce qui permet d'utiliser des stratégies de branchement basées sur des ensembles de variables plutôt que sur des variables isolées lors de la résolution du MILP par *branch and bound* [19]. En définissant un ensemble de N_v variables SOS2 $\lambda_{i,n}$, $n = 1, \dots, N_v$, pour chaque avion A_i , la norme de la vitesse est approchée par la variable V_i vérifiant :

$$v_{x,i} = V_i^{\max} \sum_{n=1}^{N_u} \lambda_{i,n} \cos \theta_{i,n}, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (1-42)$$

$$v_{y,i} = V_i^{\max} \sum_{n=1}^{N_u} \lambda_{i,n} \sin \theta_{i,n}, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (1-43)$$

$$V_i = V_i^{\max} \sum_{n=1}^{N_u} \lambda_{i,n}, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (1-44)$$

$$\sum_{i=1}^{N_u} \lambda_{i,n} \leq 1, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (1-45)$$

où les angles $\theta_{i,n}$, $n = 1, \dots, N_v$, sont symétriquement répartis autour du cap initial de A_i . L'angle minimal et l'angle maximal définissent donc un changement de cap maximum.

Remarque 1.6. Dans la publication [107], (1-45) est présentée sous la forme d'une contrainte d'égalité. Il doit s'agir d'une erreur typographique. En effet, cela conduirait à considérer que la vitesse est systématiquement égale à la vitesse maximale.

Cette approximation permet également de borner la norme de la vitesse par deux inégalités linéaires :

$$V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max} \quad (1-46)$$

Le calcul du coût s'appuie ensuite sur le fait que la fonction de consommation de carburant est convexe. En approchant cette dernière par un ensemble de N_f droites d'équations $y = \alpha_{i,n}x + \beta_{i,n}$, $n = 1, \dots, N_f$, un majorant de la consommation de carburant due au changement de vitesse est obtenu par :

$$z_{v,i} \geq \alpha_{i,n} V_i + \beta_{i,n}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, \dots, N_f\} \quad (1-47)$$

Pour l'estimation de l'allongement de trajectoire dû aux changements de cap, il est supposé que chaque avion effectue un second changement de cap pour récupérer sa destination lorsque le projeté de sa position sur la trajectoire de référence a parcouru une distance donnée. Le calcul de l'allongement de la trajectoire donne lieu à une expression non linéaire en fonction des variables de vitesse. Une seconde approximation convexe et linéaire par morceaux est réalisée pour calculer un majorant du coût de l'allongement de la trajectoire dû au changement de cap. Le majorant est noté $z_{l,i}$, $\forall A_i \in \mathcal{A}$. On reprend alors le modèle linéaire à une commande minimisant

la consommation de fuel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{A_i \in \mathcal{A}} z_{v,i} + z_{l,i} \\ \text{sous (1-40)–(1-47)} \\ (v_{x,i}, v_{y,i}, z_{v,i}, z_{l,i}, V_i) \in \mathbb{R}^5, \forall A_i \in \mathcal{A}, \\ \delta_{i,j} \in \{0, 1\}, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \\ \{\lambda_{i,n}\}_{n=1, \dots, N_v} \in \text{SOS2}, \forall A_i \in \mathcal{A} \end{array} \right. \quad (1-48)$$

Discrétisation spatiale

Une alternative à la discrétisation temporelle consiste à considérer uniquement quelques points remarquables de l'espace. Ce paramétrage s'appuie sur la structure figée du trafic en route où les avions sont sensés passer par des points géographiques en suivant des couloirs aériens prédéterminés. Si les trajectoires de référence suivent les plans de vol, il est clair que les points situés au niveau des points de passage des plans de vol et des croisements entre couloirs sont les plus importants. Un graphe est alors construit en associant un nœud à chacun de ces points et en créant un arc pour chaque trajet liant une paire de nœuds. L'ensemble des nœuds est noté \mathcal{N} et l'ensemble des arcs est noté \mathcal{Arcs} . L'arc (i, n_k, n_l) correspond au trajet de A_i entre les nœuds n_k et n_l . Les études ayant privilégié cette approche se sont généralement limitées à des manœuvres en vitesse [91] ou à des manœuvres en vitesse et en niveau de vol [13, 105].

Le problème en vitesse est entièrement décrit par \mathcal{N} , \mathcal{Arcs} et, pour tout arc (i, n_k, n_l) ,

- $\{T_i^k\}$: l'instant de passage de A_i au nœud k
- $\{t_i^{kl}\}$: la durée de parcours de l'arc (i, n_k, n_l) , soit $t_i^{kl} = T_i^l - T_i^k$
- $\{L_i^{kl}\}$: la longueur de l'arc (i, n_k, n_l)

Contrairement à la discrétisation temporelle, l'expression de la contrainte de séparation n'est pas immédiate dans ce cas. Considérons un conflit entre deux avions A_i et A_j dont les trajectoires se coupent selon un angle $\theta_{i,j}$ au nœud n_k . Les vecteurs vitesses \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j sont supposés constants, de normes respectives V_i et V_j . En prenant l'origine du repère au nœud n_k et en lui appliquant une rotation de sorte que \mathbf{v}_i soit aligné avec l'axe des abscisses, les positions des avions valent à chaque instant t :

$$\begin{aligned} p_{x,i}(t) &= V_i (t - T_i^k) \\ p_{y,i}(t) &= 0 \\ p_{x,j}(t) &= V_j \cos \theta_{i,j} \times (t - T_j^k) \\ p_{y,j}(t) &= V_j \sin \theta_{i,j} \times (t - T_j^k) \end{aligned}$$

Le carré de la distance entre A_i et A_j vaut donc :

$$\|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)\|^2 = V_i^2 (t - T_i^k)^2 + V_j^2 (t - T_j^k)^2 - 2V_i V_j \cos \theta_{i,j} \times (t - T_i^k) \times (t - T_j^k)$$

dont la dérivée s'annule en

$$t_{min} = \frac{T_i^k V_i^2 + T_j^k V_j^2 - 2(T_i^k + T_j^k) V_i V_j \cos \theta_{i,j}}{V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \theta_{i,j}}$$

Finalement, A_i et A_j sont séparés pour tout t si et seulement $\|\mathbf{p}_i(t_{min}) - \mathbf{p}_j(t_{min})\| \geq D$, ce qui équivaut à :

$$|T_j^k - T_i^k| \geq \frac{D}{V_i V_j |\sin \theta_{i,j}|} \sqrt{V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \theta_{i,j}} = S_{i,j}^k \quad (1-49)$$

Cette expression n'est pas linéaire puisque les vitesses ne sont pas connues à l'avance. Les valeurs extrêmes de $\Delta T_{i,j}^k$ sont atteintes aux bornes de V_i et V_j . En notant $\bar{S}_{i,j}^k$ le maximum de ces valeurs, on obtient une paire de contraintes suffisantes :

$$T_j^k - T_i^k \geq \bar{S}_{i,j}^k - M\delta_{i,j} \quad (1-50)$$

$$T_i^k - T_j^k \geq \bar{S}_{i,j}^k - M(1 - \delta_{i,j}) \quad (1-51)$$

avec $\delta_{i,j}$ variable binaire et M une constante suffisamment grande. Dans [13,91], la valeur de M a été ajustée afin d'être aussi petite que possible sans changer l'espace des solutions. L'intérêt du procédé est que le temps d'exécution du MILP est d'autant plus court que la variable M est petite. Cependant, il est nécessaire que pour toutes valeurs réalisables de T_i^k et T_j^k :

$$T_j^k - T_i^k \geq -M \quad \text{et} \quad T_j^k - T_i^k \geq -M$$

Pour ce qui est des contraintes cinématiques, dans [13] et [91], les bornes sur l'accélération et la vitesse sont alors simplement traduites en un ensemble de bornes sur les durées de parcours des arcs :

$$t_i^{kl} \leq t_i^{kl} \leq \bar{t}_i^{kl}, \quad \forall (i, n_k, n_l) \in \mathcal{Arcs} \quad (1-52)$$

Vela *et al.* [105] supposent la vitesse constante sur chaque arc et le changement de vitesse instantané ; ainsi ils explicitent les bornes par :

$$\frac{L_i^{kl}}{V_i^{\max}} \leq t_i^{kl} \leq \frac{L_i^{kl}}{V_i^{\min}}, \quad \forall (i, n_k, n_l) \in \mathcal{Arcs} \quad (1-53)$$

Les premières contraintes de bornes (1-52) possèdent le net avantage d'exploiter le fait que la vitesse et l'accélération des avions n'apparaissent qu'implicitement dans le modèle, par l'intermédiaire des durées de parcours. Ainsi, les bornes sur les durées peuvent être le résultat d'un calcul engageant des équations non linéaires. Peng et Akella [86] formulent la recherche de ces bornes sous la forme d'un problème de commande optimale dont ils donnent ensuite plusieurs niveaux d'approximation grâce auxquels le problème peut être résolu numériquement.

Vela *et al.* [105] et Alonso-Ayuso *et al.* [13] ajoutent également la possibilité de résoudre les conflits en positionnant les avions à des niveaux de vol différents. Dans [105], cette affectation n'est pas dynamique, elle correspond plutôt à un changement du niveau de vol donné dans le plan initial. À l'inverse, [13] permet des changements d'altitude dynamiques en limitant leur amplitude sur chaque arc. Ce type de manœuvres est ajouté grâce à des variables binaires pour chaque niveau autorisé et chaque arc.

Sous les contraintes données ci-dessus, différentes fonctions de coût sont considérées afin de minimiser la consommation de carburant [105], la durée des conflits restants [91], ou afin de pénaliser le fait de voler à un niveau de vol non désiré [13].

Aucune étude incluant des manœuvres en cap dans un MILP obtenu par discrétisation spatiale n'a été trouvée dans la littérature. Toutefois, dans sa thèse [37], N. Durand donne des équations modélisant une manœuvre en créneau selon un angle fixé à l'avance avec une discrétisation de l'espace. Les variables de commande à ajouter donnent la longueur de la mise en créneau de chaque avion à chaque conflit.

1.2.6 Simplification par décomposition du modèle

La planification de trajectoires sans conflit donne lieu à un problème complexe dont la résolution est souvent beaucoup plus longue que les besoins opérationnels ne le requièrent. En parallèle des efforts de modélisation synthétisés ci-dessus, le problème a souvent été décomposé afin de résoudre des sous-problèmes de taille réduite. Des approches où la planification des trajectoires est découpée sont d'abord décrites puis le processus de résolution par horizon glissant

est détaillé. Ce dernier n'est pas toujours vu comme une décomposition temporelle puisqu'il permet aussi de mettre à jour périodiquement le problème en fonction de nouvelles données sur le système. Par exemple, l'ensemble des aéronefs en conflit potentiel change en fonction de l'évolution du trafic. Toutefois, en environnement déterministe, les techniques d'horizon glissant ont généralement été utilisées pour accélérer la résolution [15, 21, 96, 97].

Découplage des planifications de trajectoires

La complexité du problème est principalement une conséquence du couplage causé par la contrainte de séparation. De façon plus formelle, on construit un graphe de conflits en ajoutant un nœud par vol et un arc entre chaque paire d'aéronefs en conflit potentiel. Il est alors nécessaire de planifier simultanément les trajectoires de tous les aéronefs appartenant à une même composante connexe du graphe de conflits, ou *cluster* d'avions [37]. Sans cela, des manœuvres d'évitement sont susceptibles d'entraîner d'autres conflits, dits secondaires. Pour un cluster de n avions, il faudra donc s'assurer d'éviter $\frac{n(n-1)}{2}$ conflits. Les techniques d'optimisation ayant généralement une complexité exponentielle en fonction du nombre de conflits, l'augmentation du nombre de conflits a un effet radical sur le temps d'exécution.

Une technique d'attribution de priorités, introduite par [42], réalise le découplage souhaité en traitant les mobiles séquentiellement selon leur priorité. Ainsi, le mobile ayant la plus grande priorité prend la route la plus directe, comme s'il était seul. La planification des mobiles suivants se fait ensuite en considérant les mobiles déjà traités comme des obstacles mobiles. Cette approche met ainsi deux sous-problèmes en interaction. Il faut d'une part trouver un bon, voire le meilleur, ordonnancement des résolutions et, d'autre part, optimiser la planification de trajectoires avec évitement d'obstacles mobiles.

Irvine a appliqué ce concept au trafic aérien en donnant la plus grande priorité aux avions les plus proches d'un conflit [65]. Un arbre contenant un ensemble de trajectoires calculés d'après le modèle de performances BADA [9] est alors parcouru. Si aucune manœuvre n'est trouvée, un renversement de priorité est effectué avec le second avion dans la file.

Quel que soit l'ordre de priorité, cette approche n'est toutefois pas capable de trouver les solutions optimales. L'illustration de ce dernier point se fait en étudiant le cas simple du conflit à deux aéronefs. Les études théoriques [24, 30, 37, 61] ont prouvé que la solution optimale engageait la participation des deux mobiles. Or, dans une gestion par priorité, seul le second mobile effectue une manœuvre. Durand exhibe en outre des exemples de conflits à trois avions seulement pour lesquels certains ordonnancements ne donnent aucune solution [38], chapitre *Méthode d'allocation de jetons et A**. La solution du problème d'ordonnancement est cruciale dans la décomposition alors que son optimisation est fortement combinatoire.

Les approches de [13, 86, 91, 105], où la résolution de conflits est uniquement effectuée par changement de vitesse, peuvent également être vues comme une décomposition du problème. La création des trajectoires de référence correspond en effet à un premier sous-problème lors duquel les planifications de trajectoire des aéronefs sont découplées en mettant de côté les contraintes de séparation. Le deuxième sous-problème consiste à modifier les vitesses des aéronefs pour résoudre les conflits. Ce formalisme a cependant été rendu inutile en supposant les trajectoires de référence connues. La résolution étant faite en boucle ouverte, sans remise en cause des trajectoires de référence après la détermination des vitesses, la décomposition est sous-optimale.

Résolution par horizon glissant

La résolution par horizon glissant ou MPC (*Model Predictive Control*) est une stratégie de mise en œuvre au moment de l'optimisation. Elle ne constitue pas une nouvelle méthode de résolution mais plutôt une approche transverse applicable pour la résolution de tous les modèles décrits dans cette section. En présence d'une information parfaite sur une durée aussi grande que l'on veut, un problème d'optimisation devrait être résolu sur un horizon temporel infini. La

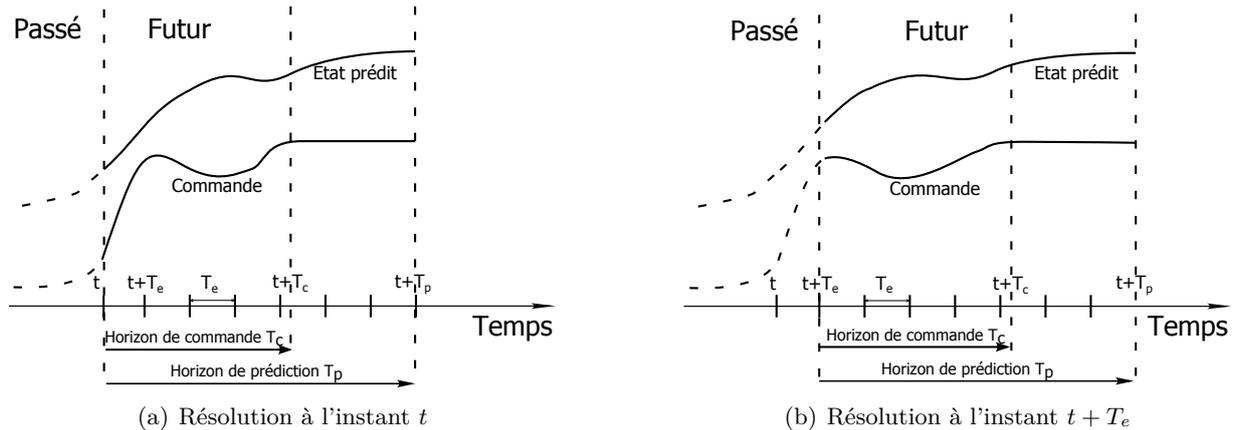


Figure 1.12 — Deux pas successifs d’une résolution par horizon glissant

MPC est au contraire un processus de résolution répétée sur un horizon fini, fondé sur le fait que le futur proche influence davantage les décisions que le futur lointain.

En reprenant la terminologie de [10], on définit une période d’échantillonnage T_e , un horizon de commande T_c et un horizon de prédiction T_p tels que $T_e \leq T_c \leq T_p$. La MPC consiste alors à lancer une résolution selon une période T_e . À l’instant t , le comportement du système est prédit sur l’horizon T_p et ses commandes sont déterminées sur l’horizon T_c de façon à minimiser le coût associé à l’état prédit. Les commandes sont généralement supposées constantes sur l’intervalle $[T_c; T_p]$. Une fois la prédiction faite, les commandes sont appliquées sur l’intervalle $t + T_e$ puis une nouvelle prédiction est effectuée. La figure 1.12 illustre deux résolutions successives.

L’application de la MPC à la résolution de conflits est intéressante pour plusieurs raisons. Étant établi que le temps d’exécution est problématique, il est important que le nombre de variables et de contraintes reste réduit. Pour des horizons de prédiction et de commande fixés, la seule manière de diminuer la taille du problème est d’augmenter la taille des pas de discrétisation, ce qui se traduit par un modèle nécessairement moins précis. La MPC donne l’alternative opposée consistant à réduire les horizons de résolution en conservant un modèle précis.

En outre, l’ATC se concentre sur une gestion du trafic à court terme (10 à 15 minutes). Il s’agit avant tout de séparer les aéronefs qui sont sur le point d’entrer en conflit, il n’est donc pas nécessaire d’inclure des informations sur un futur éloigné. Bien que ce soit plutôt l’objet du prochain chapitre, il faut aussi souligner que le trafic aérien est soumis à un grand nombre d’incertitudes. Dans ce contexte, il peut même être néfaste de prendre en compte un futur lointain dont les données sont certainement entachées d’erreurs. Il devient aussi très intéressant de résoudre le problème de façon répétée pour s’adapter aux écarts entre la prédiction et la réalisation des trajectoires. Dans le contexte déterministe, la MPC est éventuellement un outil pour adapter les décisions aux écarts dus aux approximations réalisées entre le modèle représentant le mouvement réel et le modèle utilisé lors de l’optimisation.

Une résolution par horizon glissant a par exemple été implémentée en l’associant à l’optimisation d’un PNL [15], d’un programme quadratique [45], d’un MILP [97] ou à une exploration par algorithme génétique [39]. Frazzoli *et al.* utilisent la MPC parce que l’horizon de commande ne contient qu’un seul pas de temps ; il est donc nécessaire de répéter la résolution, ne serait-ce que pour organiser la récupération des trajectoires initiales [45]. Dans [97] et [15], l’objectif de la MPC est prioritairement de réduire le temps de calcul. Il a toutefois été observé par [97] que cela entraînait une augmentation importante du coût des trajectoires. À nouveau la MPC crée un terrain de compromis entre optimalité et vitesse de résolution.

Ajoutons que le surcoût de la MPC est essentiellement dû au fait qu’elle est effectuée en boucle ouverte. Afin de compenser cet effet négatif, [21] ajoute un critère terminal dans l’objectif

pour l'évitement d'obstacles fixes. Pour cela, une carte de coût terminal est calculée de façon approximative en prétraitement. Cette carte associe à chaque point d'une grille une évaluation du chemin le plus court jusqu'à la destination finale. La pénalité correspond alors au coût terminal de l'état prédit en fin d'horizon de prédiction. Ainsi, la pénalité évitera de diriger le mobile vers une position non désirable, faute d'information sur le futur. Cette technique est spécialement conçue pour diriger un mobile à travers des environnements confinés où les obstacles forment éventuellement des impasses.

1.3 Modèles et méthodes de résolution en environnement incertain

1.3.1 Introduction sur les incertitudes dans l'ATC

Lors des études décrites dans la section précédente, les auteurs ont supposé que la planification de trajectoires était faite en environnement déterministe, ce qui revient à s'appuyer sur les deux hypothèses suivantes.

Prédictions fiables : les prédictions de trajectoire sont exactes. Si aucune manœuvre n'est demandée aux aéronefs, les conflits détectés donnent lieu à une perte de séparation, et la séparation entre deux aéronefs est maintenue lorsque aucun conflit n'est détecté entre eux.

Suivi des instructions : les instructions envoyées suite à la résolution automatique de conflits sont suivies exactement par les pilotes. Si l'optimisation a permis de construire un ensemble de trajectoires sans conflit, il est assuré que la séparation sera maintenue entre chaque paire d'aéronefs.

Dans ce contexte, la relation entre prédiction, détection et résolution de conflit est immédiate. Il suffit de comparer les trajectoires prédites entre elles pour savoir si des pertes de séparation vont avoir lieu puis, le cas échéant, il suffit de trouver des trajectoires sans conflit pour que la séparation soit effectivement maintenue entre les aéronefs.

Il apparaît cependant que l'évolution du trafic en route est incertaine. En effet, les prédictions de trajectoires reposent notamment sur des données météorologiques ou de performances avion entachées d'erreur. Par conséquent, la détection n'est pas toujours exacte et les manœuvres d'évitement ne sont pas suivies avec précision. La sécurité étant l'enjeu principal du contrôle aérien, il est essentiel de prendre en compte ces incertitudes et si possible de les intégrer dans le modèle d'optimisation. Ainsi, dans le contexte opérationnel actuel, le seuil à partir duquel l'interaction entre deux aéronefs n'est pas perçue comme dangereuse se situe entre 15 NM et 20 NM selon la géométrie de la situation [4]. Cette valeur, bien supérieure à la norme de séparation horizontale de 5 NM, reflète le jugement humain des effets potentiels de la réalisation des incertitudes.

Au niveau de l'automatisation du contrôle aérien, le degré de prise en compte des incertitudes est d'abord reflété par la façon dont les trajectoires sont prédites. Selon les principes énumérés dans [73], les prédictions de trajectoire sont réalisées selon l'un des trois schémas suivants.

Nominal : les aéronefs suivent exactement les trajectoires prévues par leur système de gestion de vol ou prédites par l'ATC à partir de leur plan de vol. Il s'agit de l'hypothèse d'environnement déterministe. Le résultat est obtenu immédiatement mais ne confère aucune robustesse vis-à-vis des incertitudes.

Ensembliste : l'ensemble des trajectoires rendues possibles par les incertitudes est pris en considération. Lors de la détection de conflit entre deux aéronefs, les deux trajectoires donnant lieu à la plus petite distance de séparation sont considérées. Ce point de vue augmente considérablement le nombre de conflits potentiels, et son utilisation réduit donc d'autant la capacité de l'espace aérien. Il possède cependant l'intérêt théorique de certifier la sécurité du trafic dans certaines conditions d'utilisation.

Probabiliste : la position d'un aéronef à un certain instant n'est plus ramenée à un point mais à une zone géographique dont la forme correspond à la dispersion opérée par les incertitudes. Les distributions de probabilité des erreurs sont utilisées lors de la détection de conflit en attribuant à chaque conflit une probabilité d'occurrence.

Les approches utilisant les prédictions nominales ont été le sujet de la section 1.2. La plupart des études décrites dans la suite ont mis en avant l'intérêt d'une prédiction probabiliste. Dans ce cadre, les prédictions des trajectoires de deux aéronefs servent à calculer la probabilité de conflit grâce à laquelle on est en mesure de quantifier à quel point une situation donnée est critique.

Après avoir fixé un seuil de sécurité acceptable \bar{P} , un conflit est détecté lorsque sa probabilité \mathbb{P}_C vérifie :

$$\mathbb{P}_C \geq \bar{P}$$

Les erreurs prises en compte lors des prédictions influent en outre sur la complexité des calculs. Lorsque les erreurs affectant les prédictions de trajectoire d'aéronefs différents sont indépendantes et que leur distribution est gaussienne, il est parfois possible d'obtenir une formulation analytique de la probabilité de conflit, alors qu'il est généralement nécessaire de réaliser un grand nombre de simulations pour des structures d'erreur plus réalistes. Ainsi, le choix du type de prédiction et des erreurs conditionne fortement celui de la méthode de CD&R.

Les erreurs de données étant la source des incertitudes, les manières dont elles ont été modélisées et simulées sont d'abord décrites en section 1.3.2. Un découpage de la littérature a ensuite été opéré entre les méthodes de CD&R tirant profit d'une expression analytique de la probabilité de conflit, présentées section 1.3.3, et celles procédant par simulation de trajectoires, présentées section 1.3.4. L'application de la résolution par horizon glissant à la gestion des incertitudes a été traitée isolément en section 1.3.5 parce que son implémentation ne dépend pas de ce découpage.

La littérature sur la résolution de conflits automatisée en environnement incertain est loin d'être aussi prolifique qu'en environnement déterministe. Cependant, le pas à franchir entre détection et résolution de conflits étant conceptuellement mince, le champ de cette synthèse bibliographique a été étendu à certaines études limitées à la détection de conflits.

1.3.2 Modélisation des erreurs de prédiction

Au niveau du contrôle en route, l'inexactitude des prédictions de trajectoire est attribuée majoritairement à des erreurs de modélisation et de prédiction du vent et, dans une moindre mesure, à des erreurs de navigation, de suivi et de commande [43]. Pour la détection et la résolution de conflit, ces erreurs ont été prises en compte par l'observation empirique de leur effet global sur le trafic ou par la modélisation des phénomènes en jeu.

Effet global des perturbations

Pour des vols stabilisés en altitude, l'effet des perturbations peut être caractérisé par ses deux composantes longitudinale et latérale. À un instant donné, l'erreur longitudinale Δ_{\parallel} est la distance entre la position prédite et la projection orthogonale de la position réelle sur la trajectoire prédite. L'erreur latérale Δ_{\perp} est la distance entre la position réelle et la trajectoire prédite. Les deux composantes sont distinguées parce qu'elles ne sont pas compensées de la même façon par le FMS. En effet, le système de gestion de vol fait en sorte que la trajectoire soit suivie avec précision alors que les erreurs longitudinales ne sont pas compensées sur le court terme. Pour des aéronefs équipés de FMS, [43] affirme que l'erreur latérale est inférieure à 0,5 NM.

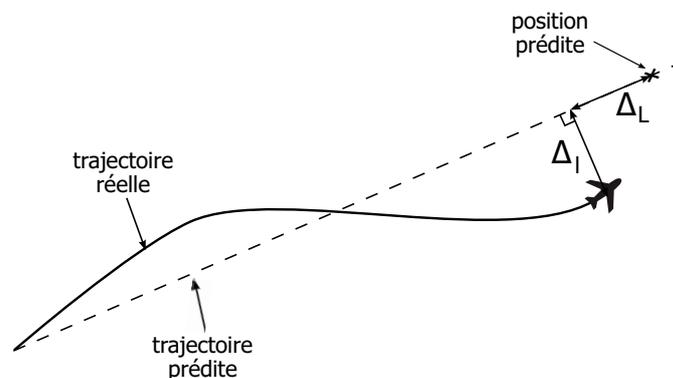


Figure 1.13 — Erreurs longitudinale et latérale sur la prédiction de position

Dans une étude traitant notamment de la séparation des aéronefs en route [17], Ballin et Erzberger ont quantifié l'erreur longitudinale pour des vols stabilisés en niveau. Les données de prédiction ont été obtenues par le logiciel utilisé, au moment de l'étude, au centre de contrôle de l'aéroport de Dallas Fort Worth, et elles ont été comparées à plus de quatre mille segments de vols réels. Il a résulté que, pour des prédictions inférieures à vingt minutes, la distribution de probabilité de l'erreur longitudinale était proche d'une loi normale centrée dont l'écart type croît en fonction de l'horizon de prédiction. Ainsi, en posant $t = 0$ à l'instant de la prédiction, l'erreur longitudinale sur la position à un instant $t \leq 20$ minutes peut être approché par une loi normale :

$$\Delta_{\parallel}(t) \sim \mathcal{N}\left(0, (\alpha_{\sigma}t)^2\right) \quad (1-54)$$

La valeur du taux de croissance α_{σ} dépend de la classe des appareils, mais une valeur typique de $0,25 \text{ NM}\cdot\text{min}^{-1}$ est habituellement retenue pour la détection et la résolution de conflit [18, 43, 64].

Irvine [63] a aussi traité l'effet des perturbations sur l'écart latéral. Il suppose que l'erreur latérale a initialement le même comportement que l'erreur longitudinale mais que l'action du FMS borne rapidement sa croissance. Ainsi, l'erreur latérale suit aussi une loi normale centrée dont l'écart type décroît exponentiellement avec l'horizon de prédiction :

$$\Delta_{\perp}(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \beta_{\sigma}^2 [1 - \exp(-t/\tau_{\sigma})]^2\right) \quad (1-55)$$

où β_{σ} et τ_{σ} sont deux constantes. En posant $\beta_{\sigma} = 1 \text{ NM}$ et $\tau_{\sigma} = 4 \text{ min}$, Irvine retrouve le taux de croissance typique du longitudinal de $0,25 \text{ NM}\cdot\text{min}^{-1}$ à $t = 0$.

Dans [12], les incertitudes sont simplement données par la plus grande valeur possible de la valeur absolue de l'erreur sur la vitesse. Il est supposé par ailleurs que les aéronefs sont toujours capables de maintenir leur cap. À l'instant initial, la position prédite de l'aéronef est donnée par un point puis, si sa trajectoire est rectiligne, elle est représentée par un segment dont les extrémités correspondent aux erreurs extrémales sur la vitesse. Les distances entre les segments correspondant aux différents aéronefs sont utilisées pour étudier l'augmentation du nombre de conflits détectés en fonction des erreurs pour une prédiction ensembliste. La conclusion est que, même pour des erreurs de quelques pour cent sur la vitesse, deux fois plus de conflits sont détectés dix minutes avant leur apparition que dans une prédiction nominale.

Modélisation des perturbations

Des travaux réalisés notamment dans le cadre du projet européen Hybride⁸ se sont attachés à la modélisation des perturbations prépondérantes plutôt que de leur effet global. Cela a été fait dans le but de développer des méthodes de prédiction probabiliste plus précises pour la détection et la résolution de conflits. Ainsi, les travaux de Lygeros et Prandini [73] et de Glover et Lygeros [54] décrivent des modèles pour la prise en compte du vent et de l'action compensatrice du FMS. Le modèle de vent est détaillé dans un premier temps.

Le déplacement d'un aéronef s'effectue par rapport à un champ de vent. Les commandes de l'aéronef sont calculées de façon à atteindre une vitesse désirée par rapport à l'air alors que sa destination, ses points de passage et les données dont disposent les organismes de contrôle du trafic se réfèrent à un référentiel terrestre. Si la vitesse du vent à l'instant t et à la position \mathbf{p} est donnée par $\mathbf{w}(\mathbf{p}, t)$, la vitesse au sol d'un aéronef s'obtient directement par la somme

$$\mathbf{v}_{sol}(t) = \mathbf{v}_{air}(t) + \mathbf{w}(\mathbf{p}(t), t),$$

où $\mathbf{p}(t)$ est la position de l'aéronef à l'instant t . Il vient qu'en absence de FMS une erreur constante $\tilde{\mathbf{w}}$ faite sur le vecteur de vent pendant une durée t entraîne une erreur $t \times \tilde{\mathbf{w}}$ sur la position de l'aéronef.

8. Site Web de Hybride : hosted.nlr.nl/public/hosted-sites/hybride/

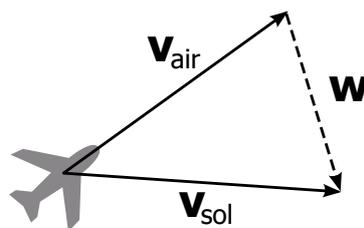


Figure 1.14 — Vitesses par rapport à l'air et au sol

Le vecteur de vent se décompose comme la somme du *vent nominal*, correspondant aux prédictions, et du *vent aléatoire*, correspondant à ses variations par rapport aux prédictions. La prise en compte du vent nominal n'est généralement pas une réelle difficulté pour la détection de conflit, puisqu'il s'agit seulement de faire une translation par un vecteur connu en fonction de la position du mobile. Le vent nominal a pourtant des effets complexes, notamment lorsqu'un aéronef effectue un virage sur l'horizon de prédiction. Glover et Lygeros [54] ont décrit mathématiquement l'effet du vent pendant un virage afin d'exprimer l'angle de gîte nécessaire pour suivre un virage à un rayon de courbure constant donné. Une majorité de publications ont cependant traité le vent nominal de façon très succincte [11, 73] ou l'ont supposé nul pour se concentrer sur le vent aléatoire [29, 74, 93]. Les contributions décrites dans la suite ayant été faites sur la gestion du vent incertain, la composante nominale est mise de côté et le vent aléatoire est simplement noté \mathbf{w} .

Le champ de vent aléatoire est une famille de vecteurs $\mathbf{w}(\mathbf{p}, t)$ variant en fonction de l'instant et du point de l'espace considéré. La composante verticale du vent étant petite devant la composante horizontale, elle a généralement été mise de côté. Les vecteurs $\mathbf{w}(\mathbf{p}, t)$ prennent donc leurs valeurs dans \mathbb{R}^2 et décrivent le vent horizontal. L'objectif d'une modélisation plus précise du vent aléatoire est de parvenir à quantifier non seulement son écart type mais aussi sa corrélation entre des instants et des points de l'espace différents. En effet, sans structure de covariance, [43, 64, 106] ont dû supposer les erreurs de prédiction indépendantes. Or, des aéronefs en conflit étant amenés à être proches les uns des autres, ils sont nécessairement soumis à des vecteurs de vent corrélés. Pour de meilleures détections et résolutions de conflits, il est donc important de disposer d'une expression de la corrélation des erreurs du vent.

Les études statistiques de Cole *et al.* [31] et de Schwartz *et al.* [99] ont permis de modéliser analytiquement la covariance du vent horizontal. Pour cela, ils ont utilisé des prédictions de vent fournies par le *Rapid Update Cycle*⁹ (RUC), un modèle météorologique fournissant des prédictions de trois heures sur les États-Unis. Ces prédictions ont ensuite été comparées à des données de vent directement transmises aux centres opérationnels des compagnies aériennes lors de vols commerciaux via le système de communication *Aircraft Communications, Addressing and Reporting System* (ACARS). Plus d'un million de mesure de vent, envoyées par des aéronefs survolant un secteur de 1 300 km de côté centré sur Denver et réparties pendant une année, ont été rendues disponibles.

Le vent horizontal n'ayant pas été supposé isotrope, les deux composantes est-ouest (x) et nord-sud (y) ont été traitées séparément. Pour chaque composante du vent, les auteurs s'intéressent à l'estimation de la covariance entre, d'une part, la valeur en un point \mathbf{p}_1 à un instant t_1 et, d'autre part, la valeur en un point \mathbf{p}_2 à un instant t_2 . Le vecteur \mathbf{r} des deux composantes

9. Site Web du *Rapid Update Cycle* : <http://ruc.noaa.gov/>

Tableau 1.1 — Paramètres d'ajustement des corrélations des erreurs de prédiction du vent

param.	f_x^t	f_y^t	$f_x^{X,Y}$	$f_y^{X,Y}$	f_x^Z	f_y^Z
a	0,76	0,79	0,75	0,91	0,96	1,25
b	156 (min)	284 (min)	311 (km)	363 (km)	153 (mb)	273 (mb)
c	0,14	0,10	0,05	-0,06	-0,16	-0,41

de la covariance a été mis sous la forme :

$$r_x(t_1, \mathbf{p}_1, t_2, \mathbf{p}_2) = \sigma_x(p_{z,1})\sigma_x(p_{z,2})f_x^t(|t_2 - t_1|)f_x^{XY} \left(\left\| \begin{array}{c} p_{x,2} - p_{x,1} \\ p_{y,2} - p_{y,1} \end{array} \right\| \right) f_x^Z(|p_{z,2} - p_{z,1}|) \quad (1-56)$$

$$r_y(t_1, \mathbf{p}_1, t_2, \mathbf{p}_2) = \sigma_y(p_{z,1})\sigma_y(p_{z,2})f_y^t(|t_2 - t_1|)f_y^{XY} \left(\left\| \begin{array}{c} p_{x,2} - p_{x,1} \\ p_{y,2} - p_{y,1} \end{array} \right\| \right) f_y^Z(|p_{z,2} - p_{z,1}|) \quad (1-57)$$

de façon à faire apparaître, dans un modèle multiplicatif, les fonctions de corrélation temporelle (f^t), horizontale (f^{XY}) et verticale (f^Z).

Les corrélations ont été calculées à partir des mesures ACARS puis elles ont été ajustées à des fonctions à décroissance exponentielle :

$$f(x) = a \exp(-x/b) + c.$$

Les paramètres d'ajustement a , b et c de [31] sont reproduits dans le tableau 1.1. Le paramètre b est une estimation de la longueur de corrélation, c'est-à-dire la valeur à partir de laquelle la corrélation est inférieure à $1/e$. Les valeurs de b mettent en évidence que, pour les échelles de temps et d'espace propres à l'ATC, soit une dizaine de minutes et une centaine de kilomètres, les erreurs restent fortement corrélées. La covariance temporelle présentant un caractère harmonique au-delà de 200 minutes, un terme sinusoïdal a aussi été ajouté pour la représenter sur de grandes échelles de temps. Ce dernier n'est toutefois pas nécessaire pour l'application à l'ATC.

Dans chacune des fonctions de corrélation, le terme initial $f(0) = a + c \neq 1$ témoigne des erreurs faites lors des mesures du vent ACARS et de l'imperfection des groupements de mesure pour le calcul des corrélations. En effet, le calcul des fonctions de corrélation nécessite que la séparation entre les points de mesure ne varie que selon une dimension, mais il a fallu supposer nulles des séparations faibles selon les autres dimensions afin de disposer de suffisamment de données. Après avoir pris en compte ces imprécisions, les fonctions de corrélation s'écrivent :

$$f(x) = (1 - c) \exp(-x/b) + c$$

Finalement, Schwartz *et al.* donnent l'expression de l'écart type vectoriel

$$\sigma(p_z) = \sqrt{(\sigma_x(p_z))^2 + (\sigma_y(p_z))^2}$$

après correction pour prendre en compte les erreurs de mesures ACARS. Pour les niveaux de vol de l'en route, l'écart type des erreurs de prédiction de vent du RUC vaut $\sigma = 5,77\text{m.s}^{-1}$.

Les travaux de [29, 62, 73, 75] sur la détection de conflit se sont appuyés sur les résultats de Cole et de Schwartz. Pour simplifier leurs modèles et accélérer les temps d'exécution de leurs simulations, ils ont supposé que le champ de vent était gaussien, centré, stationnaire et isotrope. Cela signifie que la distribution de chaque vecteur aléatoire $\mathbf{w}(\mathbf{p}, t)$ est normale et que pour tous $t_1, t_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$:

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}(\mathbf{p}_1, t_1)] = \mathbf{0} \quad (1-58)$$

$$\mathbb{E}[\langle \mathbf{w}(\mathbf{p}_1, t_1) | \mathbf{w}(\mathbf{p}_2, t_2) \rangle] = 2r(t_1, \mathbf{p}_1, t_2, \mathbf{p}_2) \quad (1-59)$$

L'hypothèse d'isotropie signifie que la distribution de probabilité du vent aléatoire est invariante par rotation. La covariance est donc décrite par une même fonction r pour deux composantes orthogonales quelconques :

$$r(t_1, \mathbf{p}_1, t_2, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2} \sigma(p_{z,1}) \sigma(p_{z,2}) f^t(|t_2 - t_1|) f^{XY} \left(\left\| \begin{array}{c} p_{x,2} - p_{x,1} \\ p_{y,2} - p_{y,1} \end{array} \right\| \right) f^Z(|p_{z,2} - p_{z,1}|)$$

Les valeurs prises dans [29] indiquent que les fonctions de corrélation mises en facteur dans l'expression de r ont été obtenues à partir de (1-56) et (1-57) en faisant une simple moyenne entre les paramètres d'ajustement de la table 1.1.

Hormis les erreurs de prédiction du vent, plusieurs autres sources d'incertitudes ont été intégrées, mais aucune ne bénéficie d'études statistiques aussi complètes. Chaloulos *et al.* [29] ajoutent par exemple des incertitudes causées par les imprécisions de la mesure de vitesse et par les erreurs de prédiction de la température de l'air. Chacune de ces incertitudes a un effet sur la vitesse longitudinale des aéronefs. Faute de plus d'informations, ces deux termes d'erreur ont été identifiés à des variables aléatoires normales centrées, indépendantes entre aéronefs et d'écart types respectifs 2 kt et 5 kt. Par ailleurs la forte corrélation temporelle des deux erreurs a conduit les auteurs à supposer qu'elles étaient constantes sur la durée des prédictions de trajectoire. Des erreurs sur la masse et d'autres paramètres physiques des aéronefs sont également évoquées dans [108], mais aucun détail n'est donné quant à leur modélisation.

En intégrant les erreurs décrites ci-dessus, il est possible d'effectuer une prédiction probabiliste de la trajectoire des aéronefs s'ils n'engagent aucune action pour compenser ces erreurs. Cependant, il a été vu que le FMS avait justement pour mission de maintenir l'aéronef sur sa trajectoire. Plutôt que de supposer le suivi de la trajectoire parfait ou d'ajouter un terme d'erreur déterminé empiriquement, Lygeros et Prandini [73] ont modélisé l'action du FMS 3D. Pour assurer le suivi de la trajectoire, le FMS calcule la vitesse de virage $\omega(t) = \frac{d\chi(t)}{dt}$ de l'aéronef de façon à minimiser l'écart latéral à la trajectoire $\Delta_{\perp}(t)$ et l'écart au cap de référence $\Delta_{\chi}(t)$. Cette action est modélisée par l'ajout d'une loi de commande par retour d'état linéaire :

$$\omega(t) = k_1 \Delta_{\perp}(t) + k_2 \Delta_{\chi}(t) \tag{1-60}$$

où k_1 et k_2 sont deux paramètres dépendant du FMS. Ce modèle a été repris dans les travaux sur la détection de conflit de [29, 75].

Simulation des erreurs aléatoires

La connaissance des distributions de probabilité des erreurs permet de simuler des trajectoires d'aéronefs à condition d'être capable de réaliser un tirage des erreurs. La simulation des trajectoires est nécessaire pour la détection probabiliste de conflits par des techniques de Monte-Carlo dont des implémentations sont décrites dans la section 1.3.4. Le tirage de variables suivant des lois de probabilité normale et multinormale est d'abord décrit en prenant pour référence le livre de Rubinstein [94].

Le tirage d'échantillons indépendants suivant une loi normale centrée peut être réalisé à partir de tirages aléatoires de loi uniforme en suivant la méthode Box-Muller.

Propriété 1.1. Soit u_1 et u_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$, alors les variables aléatoires n_1 et n_2 définies par

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{-2 \ln u_1} \sin(2\pi u_2) \\ n_2 &= \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2) \end{aligned}$$

sont indépendantes de loi normale centrée réduite. Pour obtenir des variables x_1 et x_2 de moyenne m et d'écart type σ il suffit ensuite de calculer

$$\begin{aligned}x_1 &= m + \sigma n_1 \\x_2 &= m + \sigma n_2\end{aligned}$$

La méthode Box-Muller suffit pour simuler des erreurs aléatoires supposées indépendantes telles que les erreurs dues aux imprécisions des mesures de vitesse. En revanche, le tirage des erreurs de vent corrélées correspond à la simulation d'une loi multinormale. La loi multinormale constitue une extension de la loi normale monovariée à un vecteur de variables aléatoires \mathbf{x} suivant une loi normale et caractérisées par un vecteur de moyennes \mathbf{m} et une matrice de covariance \mathbf{R} .

Propriété 1.2. Soit \mathbf{L} une matrice triangulaire inférieure obtenue par factorisation de Choleski de \mathbf{R} , c'est-à-dire une matrice triangulaire telle que $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{R}$. Soit \mathbf{n} un vecteur de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Le vecteur de variables aléatoires

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{L} \times \mathbf{n}$$

suit alors une loi multinormale de moyenne \mathbf{m} et de matrice de covariance \mathbf{R} .

À partir d'un tirage de k variables normales indépendantes par la méthode de Box-Muller, il est donc possible de simuler un ensemble de variables normales en respectant une structure de corrélation donnée.

Pour simuler le vent aléatoire, Lympelopoulos [74] discrétise le temps et chaque dimension de l'espace selon des pas respectifs h_t , h_x , h_y et h_z , obtenant ainsi N_t , N_x , N_y , et N_z points sur chacun des axes. Il serait possible de simuler un vecteur de vent aléatoire sur l'ensemble des $N_t \times N_x \times N_y \times N_z$ points de la grille ainsi formée grâce à la procédure décrite ci-dessus, mais cela serait très lourd à la fois du point de vue du temps de calcul et de celui de l'espace mémoire. Au lieu de cela, Lympelopoulos suggère un processus itératif permettant de simuler l'ensemble des erreurs de vent de la grille spatiale à chaque pas de temps en fonction des valeurs trouvées au pas de temps précédent.

Pour la description de la procédure, on note $\mathbf{W}_x(k)$ et le vecteur des composantes est-ouest du vent aléatoire à chaque point de la grille spatiale au même instant kh_t . $\mathbf{W}_x(k)$ est donc un vecteur à $N_x \times N_y \times N_z$ éléments. Par l'hypothèse d'isotropie, les deux composantes du vent ont la même distribution de probabilité donc le traitement de la composante nord-sud est identique. La matrice de covariance \mathbf{R} de $\mathbf{W}_x(k)$ est calculée à partir des fonctions de corrélation 1-56 et 1-57. Ainsi pour deux points de la grille de coordonnées (ih_x, jh_y, lh_z) et $(i'h_x, j'h_y, l'h_z)$, l'élément correspondant de la matrice \mathbf{R} ne dépend pas de k et vaut :

$$\begin{aligned}r(kh_t, \begin{pmatrix} ih_x \\ jh_y \\ lh_z \end{pmatrix}, kh_t, \begin{pmatrix} i'h_x \\ j'h_y \\ l'h_z \end{pmatrix}) = \\ \frac{1}{2} \sigma(lh_z) \sigma(l'h_z) f^t(0) f^{XY} \left(\sqrt{(i' - i)^2 h_x^2 + (j' - j)^2 h_y^2} \right) f^Z (|l' - l| h_z)\end{aligned}$$

Le premier vecteur $\mathbf{W}_x(0)$ suit une loi multinormale de moyenne nulle et de matrice de covariance \mathbf{R} . En se référant à la propriété 1.2, il est donc simulé en tirant un vecteur $\mathbf{n}_x(0)$ de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite et en effectuant la décomposition de Choleski $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$:

$$\mathbf{W}_x(0) = \mathbf{L} \times \mathbf{n}_x(0)$$

Ensuite, le tirage de $\mathbf{W}_x(k+1)$ est effectué à partir de $\mathbf{W}_x(k)$ par la formule de récurrence :

$$\mathbf{W}_x(k+1) = e^{-h_t/b_t} \mathbf{W}_x(k) + \sqrt{1 - (e^{-h_t/b_t})^2} \mathbf{L} \times \mathbf{n}_x(k)$$

où $\mathbf{n}_x(k)$ est un vecteur de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite, et b_t est le paramètre d'ajustement de la fonction de covariance temporelle. En faisant l'approximation $f_t(t) \approx e^{-h_t/b_t}$, Lympelopoulos prouve que le tirage décrit génère bien des échantillons respectant la structure de corrélation souhaitée.

En partant du principe qu'il n'est généralement pas nécessaire de connaître le vent sur tout le domaine en quatre dimensions, Glover et Lygeros [54] proposent une alternative pour ne simuler le vent aléatoire qu'à des points (p_x, p_y, p_z, t) où les aéronefs passent. L'algorithme part d'une variable $w_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma(p_z)^2)$. Pour cela, ils ont également mis au point un algorithme itératif au cours duquel une décomposition du type Choleski est réalisée séquentiellement à chaque tirage d'un nouvel échantillon. Au final, le vecteur de variables est donné par une formule du type $\mathbf{W} = \mathbf{L} \times \mathbf{n}$, où \mathbf{L} est une matrice triangulaire inférieure et \mathbf{n} un vecteur de variables indépendantes de loi normale centrée réduite. L'avantage de la procédure est qu'elle permet de simuler le vent au fur et à mesure de la connaissance de l'état des aéronefs. La position de l'aéronef à un instant $t + 1$ dépend du vent qu'il aura subi entre les instants t et $t + 1$, d'où la nécessité de simuler le vent aléatoire séquentiellement.

1.3.3 Formulation analytique de la probabilité de conflit

Méthodes géométriques

Les travaux décrits dans cette sous-section ont modélisé l'effet global des incertitudes par une erreur aléatoire gaussienne et indépendante entre aéronefs, c'est-à-dire que la corrélation du vent n'a pas été prise en compte. Par ailleurs, l'erreur sur la position latérale n'a pas été traitée ou a été supposée indépendante de l'erreur longitudinale. Dans ce cadre, la probabilité de conflit entre deux aéronefs se déplaçant dans un même plan à vitesse constante a pu être calculée [43, 63]. Les calculs d'Irvine [63] sont présentés ci-dessous. Ils reposent sur une interprétation géométrique du problème en traitant d'abord l'erreur longitudinale seule avant d'étendre son calcul à l'erreur latérale.

Calcul de la probabilité de conflit : Irvine considère deux aéronefs A_i et A_j se déplaçant à vitesses constantes V_i et V_j sur des trajectoires rectilignes se coupant au point O en formant un angle θ . Les abscisses curvilignes de A_i et A_j à l'instant t sont notées $x_i(t)$ et $x_j(t)$ en prenant O pour origine. Les positions initiales sont repérées par x_i^0 et x_j^0 .

Le calcul de la probabilité de conflit est basé sur l'expression de la distance minimum d^{\min} en fonction des vitesses, des positions initiales et de l'angle θ . Pour cela, il est d'abord noté que la distance $d(t)$ entre A_i et A_j à l'instant t vérifie

$$d(t)^2 = x_i(t)^2 + x_j(t)^2 - 2x_i(t)x_j(t) \cos \theta$$

Par conséquent, l'équation $d = d^{\min}$ représente une ellipse dans le repère (O, x_i, x_j) . La trajectoire des deux aéronefs étant rectiligne et uniforme, l'ensemble des points $(x_i(t), x_j(t))$ parcourus par les aéronefs dessine une droite de pente

$$m = \frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\frac{dx_j}{dt}}{\frac{dx_i}{dt}} = \frac{V_j}{V_i}.$$

Cette droite est tangente à l'ellipse d'équation $x_i(t)^2 + x_j(t)^2 - 2x_i(t)x_j(t) \cos \theta = (d^{\min})^2$ et son équation est donnée par

$$x_j = mx_i \pm \frac{d^{\min}}{\lambda}, \quad \text{où } \lambda = \frac{\sin \theta}{\sqrt{m^2 - 2m \cos \theta + 1}}$$

Il vient finalement que

$$d^{\min} = |\lambda(x_j^0 - mx_i^0)| \quad (1-61)$$

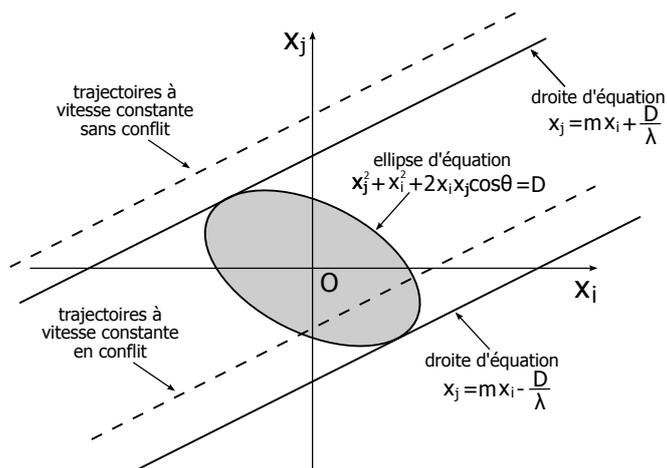


Figure 1.15 — Représentation du croisement entre A_i et A_j dans le repère (O, x_i, x_j)

Ainsi, les avions A_i et A_j sont en conflit si et seulement si $-D < \lambda(x_j^0 - m x_i^0) < D$, où D désigne la norme de séparation. La représentation graphique du croisement dans le repère (O, x_i, x_j) est dessinée sur la figure 1.15.

Irvine a alors cherché la probabilité de conflit entre deux avions en argumentant que, du point de vue d'une personne observant la situation à un instant $\tau > 0$, l'erreur sur la position longitudinale cumulée entre $t = 0$ et $t = \tau$ peut aussi bien être une erreur sur la position initiale des avions. En posant $\Delta_{\parallel,i}(\tau)$ et $\Delta_{\parallel,j}(\tau)$ les erreurs longitudinales cumulées par A_i et A_j entre $t = 0$ et $t = \tau$, la distance minimum entre les deux avions vaut désormais

$$d^{\min} = |\lambda(x_j^0 + \Delta_{\parallel,j}(\tau) - m x_i^0 - m \Delta_{\parallel,i}(\tau))|$$

Comme dans [43], les erreurs $\Delta_{\parallel,i}(\tau)$ et $\Delta_{\parallel,j}(\tau)$ sont supposées être deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale de moyenne nulle et d'écart type $\alpha_\sigma \tau$. Par conséquent $\lambda(x_j^0 + \Delta_{\parallel,j}(\tau) - m x_i^0 - m \Delta_{\parallel,i}(\tau))$ est également une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ_d et d'écart type σ_d où

$$\begin{aligned} \mu_d &= \lambda(x_j^0 - m x_i^0) \\ \sigma_d &= (\lambda \alpha_\sigma \tau) \sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

Finalement, la probabilité de conflit est la probabilité que

$$-D < \lambda(x_j^0 + \Delta_{\parallel,j}(\tau) - m x_i^0 - m \Delta_{\parallel,i}(\tau)) < D,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_C &= \frac{1}{\sigma_d \sqrt{2\pi}} \int_{-D-\mu_d}^{D-\mu_d} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_d^2}\right) du \\ &= \left(\Phi\left(\frac{D-\mu_d}{\sigma_d}\right) - \Phi\left(\frac{-D-\mu_d}{\sigma_d}\right) \right) \end{aligned} \quad (1-62)$$

où $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Pour le traitement des erreurs latérales, Irvine fait valoir que, pour déterminer la distance minimum, une erreur latérale $\Delta_{\perp,i}$ sur la position de A_i était équivalente à des erreurs longitudinales sur les positions de A_i et A_j de valeurs respectives $\frac{\Delta_{\perp,i}}{\tan \theta}$ et $\frac{\Delta_{\perp,i}}{\sin \theta}$ moyennant une convention de signe sur $\Delta_{\perp,i}$ et l'orientation de θ de \mathbf{v}_i vers \mathbf{v}_j . En appliquant le même raisonnement à A_j et en supposant les erreurs latérales indépendantes des erreurs longitudinales, il est alors possible de réitérer le calcul précédent pour trouver la probabilité de conflit.

Remarque 1.7. L'instant τ utilisé dans la démonstration d'Irvine n'est pas simple à interpréter. En effet, la formule $-D < \lambda(x_j^0 - mx_i^0) < D$ garantit, par construction, le maintien de séparation entre A_i et A_j à l'infini s'il n'y a pas d'erreur de prédiction. Or, l'expression de la probabilité de conflit (1-62) dépend de l'instant τ jusqu'auquel les erreurs sont cumulées. Si l'on note t^{\min} l'instant où la distance entre A_i et A_j est minimale, il est nécessaire que $\tau = t^{\min}$ pour que (1-62) soit exacte. Il est cependant impossible de déterminer t^{\min} a priori, sachant que les erreurs sont aléatoires. Ainsi, même si les trajectoires sont rectilignes et uniformes et que l'erreur suit la distribution supposée, (1-62) est une estimation approximative de la probabilité de conflit dans la mesure où l'on a une idée de l'instant t^{\min} .

Application à la résolution d'un conflit : Dans [64], Irvine a utilisé le résultat du calcul géométrique de la probabilité de conflit (1-62) pour effectuer une approximation déterministe de la résolution d'un conflit entre deux aéronefs A_i et A_j . L'idée est de déterminer la valeur minimum de $|\mu_d|$ garantissant que la probabilité de conflit reste sous un seuil de sécurité \bar{P} . Si l'on note \bar{D} cette valeur minimum, il est clair que \bar{D} doit être supérieure à la norme de séparation D . L'écart $\bar{D} - D$ constitue ainsi une marge additionnelle pour la prise en compte des incertitudes

Si l'on suppose sans perte de généralité que $\mu_d > D$ (plutôt que $\mu_d < -D$), alors le second terme de \mathbb{P}_C dans (1-62) prend des valeurs de l'ordre de 10^{-15} pour des valeurs typiques de vitesses et d'erreurs et un horizon de prédiction de dix minutes. En négligeant ce terme, la contrainte de séparation probabiliste s'écrit

$$\Phi\left(\frac{D - \mu_d}{\sigma}\right) \leq \bar{P}$$

ce qui est équivalent à

$$\mu_d \geq D - \sigma\Phi^{-1}(\bar{P}) = \bar{D}$$

La résolution de conflits se fait ensuite en déterminant des manœuvres d'évitement telles que les prédictions de trajectoires nominales soient séparées d'une distance \bar{D} . L'hypothèse implicite est que les manœuvres n'induisent pas de grand changement dans la valeur de la marge additionnelle $\bar{D} - D$. Irvine expose le principe d'une telle résolution mais n'en décrit pas d'implémentation.

Méthodes robustes dans un champ de vent constant

Alliot et Durand [11] ont étudié l'influence du vent sur la détection de conflit en supposant ce dernier constant. Leur approche a choisi un point de vue légèrement différent du calcul géométrique d'Irvine en déterminant, pour une position initiale connue de l'aéronef A_i , l'intervalle de positions initiales de A_j pour lesquelles un conflit est détecté. En étudiant le signe du discriminant de l'équation du second degré

$$x_i(t)^2 + x_j(t)^2 - 2x_i(t)x_j(t) \cos \theta = D^2,$$

il vient que A_i et A_j sont en conflit quand $x_j^0 \in [a, b]$ où

$$a = mx_i^0 - D/\lambda \tag{1-63}$$

$$b = mx_i^0 + D/\lambda \tag{1-64}$$

en reprenant les notations de la sous-section précédente.

Les auteurs ont ensuite ajouté un vent constant de vitesse W faisant un angle α avec la direction de A_i . En supposant que le FMS corrige instantanément l'erreur latérale, la vitesse des deux aéronefs vaut alors

$$\begin{aligned} V_i' &= V_i + W \cos \alpha \\ V_j' &= V_j + W \cos(\alpha + \theta) \end{aligned}$$

Alliot et Durand ont ensuite introduit les notations $\frac{V_j}{V_i} = 1 + \delta$ et $\frac{W}{V_i} = w$, en supposant δ et w petits du fait que c'est en général vérifié dans des conditions opérationnelles normales. Avec ces notations et en réalisant une approximation du premier ordre par rapport à w ,

$$\frac{V'_j}{V'_i} \approx 1 + \delta - 2w \sin(\alpha + \theta/2) \sin(\theta/2)$$

En faisant l'approximation du premier ordre

$$\sqrt{1 + \delta - 2w \sin(\alpha + \theta/2) \sin(\theta/2)} \approx 1 + \delta/2 - w \sin(\alpha + \theta/2) \sin(\theta/2),$$

le nouvel intervalle de détection de conflit est mis sous la forme

$$a' = x_i^0 (1 + \delta - 2w \sin(\alpha + \theta/2) \sin(\theta/2)) - \frac{D}{\cos(\theta/2)} (1 + \delta/2 - w \sin(\alpha + \theta/2) \sin(\theta/2))$$

$$b' = x_i^0 (1 + \delta - 2w \sin(\alpha + \theta/2) \sin(\theta/2)) + \frac{D}{\cos(\theta/2)} (1 + \delta/2 - w \sin(\alpha + \theta/2) \sin(\theta/2))$$

Finalement, les valeurs de W maximisant la taille de l'intervalle de prédiction ont été calculées, c'est-à-dire les deux valeurs telles que a' est minimal et b' est maximal. En supposant que l'on dispose d'une borne supérieure de la vitesse du vent W^{\max} , b' atteint son maximum pour $W = W^{\max}$ et $\alpha = \frac{3\pi - \theta}{2}$. La valeur minimale de a' dépend du signe de $x_i^0 - \frac{D}{2 \cos(\theta/2)}$. Mais si l'on s'intéresse aux cas les plus intéressants où A_i est suffisamment éloigné du point de conflit ($x_i^0 - \frac{D}{2 \cos(\theta/2)}$), alors a' atteint son minimum pour $W = W^{\max}$ et $\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$. Au final, les extrémités de l'intervalle sont données par

$$\min(a') = x_i^0 (1 + \delta) - \frac{D}{\cos(\theta/2)} (1 + \delta/2) + w^{\max} \sin(\theta/2) \left(2x_i^0 - \frac{D}{\cos(\theta/2)} \right)$$

$$\max(b') = x_i^0 (1 + \delta) + \frac{D}{\cos(\theta/2)} (1 + \delta/2) + w^{\max} \sin(\theta/2) \left(2x_i^0 + \frac{D}{\cos(\theta/2)} \right)$$

Cet intervalle est ensuite utilisé dans [11] de façon à quantifier le nombre de conflits supplémentaires qu'il est nécessaire de détecter pour prendre en compte les pires cas de vents aléatoires. Il apparaît alors que pour une gestion robuste aux erreurs de vent, il est nécessaire de détecter 30 % de conflits en plus.

Comparée à l'approche d'Irvine, la probabilité de conflit n'est pas calculée et seul un intervalle borné par deux cas extrêmes est pris en compte, mais il n'est par contre pas supposé que les erreurs sont indépendantes entre les aéronefs. L'hypothèse faite ici est l'hypothèse inverse puisque les aéronefs subissent un même vent constant sur l'horizon de prédiction, soit un vent totalement corrélé en espace et en temps.

Méthode de descente du gradient de la probabilité de conflit

Dans [88], un algorithme de descente de gradient a été développé à partir d'une expression analytique approchée de la probabilité de conflit entre deux aéronefs dans le plan. Il n'a pas été jugé utile de détailler ici le calcul de probabilité de conflit. En revanche, l'algorithme de résolution de conflits basée sur son expression est décrit ci-dessous.

L'horizon temporel est discrétisé selon un ensemble d'instant $\{t_k\}_{k=0, \dots, K}$ répartis selon un pas de longueur h fixe. À chaque pas de temps, le cap à suivre est calculé comme une combinaison du gradient de la probabilité de conflit \mathbb{P}_C^k et de la direction de la destination $\chi_{d,i}^k$. Un vecteur d'erreur sur la vitesse $\Delta_{v,i}^k$ est tiré aléatoirement à chaque instant t_k et pour chaque aéronef A_i de façon à respecter la distribution de probabilité d'erreur donnée par (1-54) et (1-55). Un angle de virage maximum β est par ailleurs défini. L'opérateur $\text{azm}(\cdot)$ désigne l'azimut d'un vecteur,

Algorithme 1.1 Résolution de conflit par descente de gradient

Antécédent : Les vecteurs position initiaux et de destination $\{\mathbf{p}_i^0\}_{i=1,2}, \{\mathbf{p}_i^d\}_{i=1,2}$, les directions initiales $\{\chi_i^0\}_{i=1,2}$ et les vitesses $\{V_i\}_{i=1,2}$

pour $k = 0$ à $K - 1$ **effectuer**

Calculer \mathbb{P}_C^k en fonction de V_i , $\{\mathbf{p}_i^k\}_{i=1,2}$, et $\{\chi_i^k\}_{i=1,2}$, $i = 1, 2$.

pour $i = 1, 2$ **effectuer**

$$\chi_{g,i}^k \leftarrow \text{azm} \left(\frac{\partial \mathbb{P}_C^k / \partial p_{x,i}^k}{\partial \mathbb{P}_C^k / \partial p_{y,i}^k} \right) \text{ et } \chi_{d,i}^k \leftarrow \text{azm}(\mathbf{p}_i^d - \mathbf{p}_i^k)$$

$$\bar{\chi}_i^k \leftarrow \mathbb{P}_C^k \chi_{g,i}^k + (1 - \mathbb{P}_C^k) \chi_{d,i}^k$$

$$\chi_i^k \leftarrow \begin{cases} \bar{\chi}_i^k, & \text{si } |\bar{\chi}_i^k - \chi_i^{k-1}| < \beta \\ \chi_i^{k-1} + \beta \text{sgn}(\bar{\chi}_i^k - \chi_i^{k-1}), & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = (V_i \cos \chi_i^k, V_i \sin \chi_i^k)$$

$$\mathbf{p}_i^{k+1} \leftarrow \mathbf{p}_i^k + (t_{k+1} - t_k)(\mathbf{v}_i^{k+1} + \Delta_{v,i}^{k+1})$$

c'est-à-dire l'angle orienté entre ce vecteur et l'axe des abscisses. L'algorithme 1.1 formalise la procédure.

L'algorithme 1.1 est ensuite étendu au cas à n avions. Les probabilités de conflit deux à deux sont calculées à chaque pas de temps, puis la direction $\chi_{g,i}^k$ est remplacée par la somme des gradients des probabilités de chaque conflit dans lequel l'aéronef A_i est impliqué, pondérés par la probabilité de conflit correspondante. Ceci conduit à substituer la valeur affectée à $\bar{\chi}_i^k$ dans l'algorithme 1.1 le résultat de :

$$\bar{\chi}_i^k = \frac{\sum_{j \neq i} \mathbb{P}_{C,i,j}^k \chi_{g,i,j}^k}{\sum_{j \neq i} \mathbb{P}_{C,i,j}^k} + (1 - \mathbb{P}_{C,i}^k) \chi_{d,i}^k,$$

où $\mathbb{P}_{C,i,j}^k$ est la probabilité de conflit entre A_i et A_j – calculée à l'instant t_k , et $\chi_{g,i,j}^k$ la direction du gradient associé. Finalement, $\mathbb{P}_{C,i}^k = \max_j (\mathbb{P}_{C,i,j}^k)$.

L'avantage de cette procédure est qu'elle permet de calculer les trajectoires en temps réel en exploitant directement la forme analytique de la probabilité de conflit. Cependant, que ce soit dans le cas à 2 ou à n avions, cette méthode n'offre ni des conditions nécessaires, ni des conditions suffisantes de séparation. Ainsi, les configurations à deux ou trois aéronefs donnent lieu à des séparations minimales allant de 8 NM à 13 NM, ce qui est nettement supérieur à la norme de séparation de 5 NM. Inversement, les configurations à 8 avions laissent environ 5 % de conflits non résolus.

En conclusion, cette méthode est une méthode réactive, du type de celles vues pour le contexte déterministe. Elle partage en effet deux des caractéristiques de ces dernières :

- utilisation de gradients répulsifs calculés à partir de la position des autres avions et d'une direction attractive calculée à partir de la position présente et de la destination ;
- calcul du cap désiré courant à partir de la position présente.

La différence principale est que le potentiel répulsif n'est plus une fonction déterminée de façon intuitive mais le résultat d'un calcul approché de probabilité de conflit.

Optimisation stochastique à deux niveaux avec recours

Une approche impliquant la minimisation de l'espérance du coût a été proposée par Vela *et al.* [106]. Un conflit entre deux aéronefs A_1 et A_2 a été considéré pour un mouvement dans le plan et des manœuvres uniquement en vitesse. La prise en compte des incertitudes est effectuée grâce à un modèle d'optimisation stochastique à deux niveaux avec recours. Il est supposé que le processus décisionnel consiste à envoyer des ordres de manœuvres en vitesse déterminées

au premier niveau suivies d'actions de recours de second niveau si la réalisation des données aléatoires indique que de nouvelles manœuvres sont requises pour conserver la séparation.

Plus généralement, les modèles avec recours ont émergé pour traiter des situations où une décision doit être prise sur-le-champ en présence d'incertitudes. Lorsque certaines conséquences de ces décisions ne peuvent plus être changées par la suite, quelle que soit la réalisation des incertitudes, il existe une double alternative entre une décision peu onéreuse mais risquée et une décision onéreuse mais robuste aux réalisations des incertitudes. Le recours permet de quantifier la valeur de toutes les solutions intermédiaires existant entre ces deux alternatives. Les conséquences de la réalisation des incertitudes sont ainsi mesurées en ajoutant la possibilité d'effectuer une action future pour compenser une décision optimiste. Plus précisément, si la décision prise à l'instant $t = 0$ s'avère insuffisante pour que les contraintes du système soient respectées, l'action de recours est réalisée à un instant $\tau > 0$ pour garantir le respect des contraintes à tout instant ultérieur. Les actions de recours ne bénéficiant pas de la même anticipation que les actions initiales, elles sont plus chères que ces dernières. Parmi les premiers travaux sur l'optimisation avec recours figurent ceux de Dantzig sur la programmation linéaire stochastique, introduits dans [34]. Cette classe de problème est abordée plus amplement dans la section 1.4.

Dans le modèle de Vela [106], la résolution de conflit entre deux avions A_1 et A_2 est modélisée par une contrainte de probabilité avec un seuil de sécurité \bar{P} . Il est supposé que l'erreur latérale est nulle et que l'erreur longitudinale est principalement due au vent aléatoire et qu'elle suit la loi normale (1-54). Le vent aléatoire subi par chaque avion est constant et la corrélation entre les erreurs créées sur la vitesse longitudinale est une donnée. En supposant par ailleurs que l'auto-corrélation du vent aléatoire est forte pour des prédictions à court terme, l'action longitudinale du vent aléatoire sur un avion suit elle-même une loi normale :

$$w_i \sim \mathcal{N}\left(0, \alpha_{\sigma,i}^2\right), \quad i = 1, 2$$

La probabilité de conflit est calculée en s'appuyant sur l'expression de la distance de séparation minimum (1-61) à partir de laquelle est déduit un intervalle $[m; \bar{m}]$ de valeurs interdites pour le rapport

$$m = \frac{V_2 + w_2}{V_1 + w_1},$$

où les vitesses des avions par rapport à l'air, V_1 et V_2 , sont les deux variables de décision du problème. La variable aléatoire m est donc le rapport de deux variables aléatoires normales corrélées. Le calcul d'une approximation f_m de la fonction de densité de la variable aléatoire m a été repris des travaux de Hinkley [60]. Bien que f_m soit une approximation, sa forme est complexe et elle n'est pas intégrable analytiquement.

Le recours est ensuite formulé de façon à toujours satisfaire la contrainte probabiliste. Si R est l'évènement associé au lancement d'une manœuvre de recours et C l'évènement associé à une perte de séparation entre les deux avions, la probabilité de conflit est donnée par

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(R) \mathbb{P}(C|R) + \mathbb{P}(\bar{R}) \mathbb{P}(C|\bar{R}).$$

Par construction du recours décrit dans [106], aucune perte de séparation ne peut avoir lieu sans recours, c'est-à-dire $\mathbb{P}(C|\bar{R}) = 0$. La contrainte $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(R) \mathbb{P}(C|R) \leq \bar{P}$ est alors remplacée par les contraintes suffisantes :

$$\mathbb{P}(R) \leq \sqrt{\bar{P}} \text{ et } \mathbb{P}(C|R) \leq \sqrt{\bar{P}}$$

Les manœuvres sont modélisées par des changements de vitesse instantanés et les actions de recours sont choisies de sorte à séparer les avions aussi vite que possible, c'est-à-dire :

$$\left(V_1 = V_1^{\min} \text{ et } V_2 = V_2^{\max}\right) \text{ ou } \left(V_1 = V_1^{\max} \text{ et } V_2 = V_2^{\min}\right).$$

Il est alors possible de déterminer, en fonction de la valeur de m , si une action de recours est effectuée ou non et si le conflit est évité en passant au-dessus ou en dessous du cercle de séparation. Une approximation par développement en série de Taylor à l'ordre 2 permet ensuite d'exprimer l'espérance de la consommation de carburant engendrée par une manœuvre sous la forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction de densité f_m . La résolution du problème d'optimisation est finalement opérée en explorant tout l'espace des commandes (V_1, V_2) préalablement discrétisé sur une grille. Pour chaque point de la grille, l'espérance de la consommation de fuel est évaluée par intégration numérique. L'instruction de contrôle tactique correspond au point de la grille pour lequel l'espérance est minimale.

1.3.4 Simulation numérique de trajectoires

Lorsque le problème est pris dans toute sa complexité, en modélisant notamment la corrélation du vent, et en ajoutant éventuellement l'action du FMS, un modèle dynamique avion point-masse et les autres sources d'incertitudes indiquées dans la section 1.3.2, il n'est plus possible d'obtenir de formule analytiquement close de la prédiction de conflit. La simulation de Monte-Carlo et l'abstraction par chaîne de Markov ont alors été utilisées pour estimer numériquement la probabilité de conflit et étudier des scénarios de résolution.

Simulation de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode statistique initialement développée pour traiter des équations différentielles émergent lors de l'étude de systèmes physiques complexes [78]. Elle permet d'estimer l'espérance d'une variable à partir de tirages indépendants de cette variable et peut être synthétisée de la façon suivante.

Soit \mathbf{x} un vecteur de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble Ω et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'objectif est d'estimer $z = \mathbb{E}(F(\mathbf{x}))$, où $\mathbb{E}(\cdot)$ est l'espérance mathématique d'une variable aléatoire. Supposons que l'on puisse simuler indépendamment N vecteurs de variables aléatoires $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ de même distribution conjointe que \mathbf{x} . $\{F(\mathbf{x}_n)\}_{0 \leq n \leq N}$ sont des variables aléatoires indépendantes de moyenne z et de variance $\sigma^2 = \text{Var}(F(\mathbf{x}))$. On pose

$$\hat{z}_N = \frac{1}{N} \sum_1^N F(\mathbf{x}_n)$$

Le théorème central limite implique que

$$\hat{z}_N \sim \mathcal{N}\left(z, \frac{\sigma^2}{N}\right)$$

Ainsi la moyenne empirique peut théoriquement servir à estimer la moyenne aussi précisément qu'on le souhaite en augmentant la taille N de l'échantillon. En pratique, la précision est limitée parce que l'écart type de l'erreur est inversement proportionnel à la racine carrée de la taille de l'échantillon : pour chaque nouvelle décimale significative il est nécessaire de multiplier le nombre de vecteurs simulés par 100. En revanche, la convergence de la méthode de Monte-Carlo ne dépend pas de la dimension du vecteur \mathbf{x} , ce qui la rend utile pour des problèmes de grande dimension malgré la vitesse de convergence en $1/\sqrt{N}$.

Si l'on applique cette méthode à la détection de conflit, le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$$

représente les états successifs du système des deux aéronefs (ζ) et de leur environnement météorologique (\mathbf{w}) à chaque pas de temps d'un horizon discrétisé. La loi de probabilité conjointe

de \mathbf{x} dépend des erreurs prises en compte et de leur modélisation. La fonction F dont on veut estimer l'espérance vaut 1 si les états décrits par \mathbf{x} conduisent à une perte de séparation sur l'horizon de prédiction et 0 sinon. Si pour N simulations, c pertes de séparation sont observées, alors la probabilité de conflit est estimée par $\frac{c}{N}$.

Prandini *et al.* [88] réalisent des simulations de Monte-Carlo afin d'utiliser un modèle légèrement plus raffiné que celui de [43, 63]. Les virages ne sont pas instantanés et les composantes latérales et longitudinales des erreurs sont corrélées par l'action du vent aléatoire. Leur algorithme permet notamment de fixer la précision et le niveau de confiance de l'estimation. Leurs résultats montrent que les améliorations apportées au modèle sont bénéfiques lorsque les trajectoires nominales des aéronefs sont complexes mais que le calcul géométrique de la probabilité de conflit a des performances similaires pour les trajectoires rectilignes.

Plus récemment, la détection de conflits a mis en jeu des systèmes complets où la dynamique avion, l'action du FMS, et la corrélation des erreurs sont modélisés [29, 75]. Chaloulos et Lygeros [29] ont étudié l'effet de la prise en compte de la corrélation du vent en réalisant 1 000 simulations de Monte-Carlo pour des conflits entre deux aéronefs situés au même niveau de vol. Ils ont fait varier l'angle de croisement des trajectoires et la distance minimum initialement prédite entre les aéronefs. Il a été observé que l'utilisation de modèles d'erreurs indépendantes induisaient des erreurs absolues sur la probabilité de conflit oscillant entre 10 % et 20 %. Lorsque les erreurs sont indépendantes, celles-ci ont tendance à se compenser alors qu'elles s'ajoutent lorsqu'elles sont fortement corrélées. L'hypothèse d'indépendance résulte donc en la surestimation de la probabilité de conflit lorsque la distance minimum prédite est proche de 0 et dans une sous-estimation de la probabilité de conflit lorsque la distance minimum est plus grande que la norme de séparation.

Abstraction par chaînes de Markov

Quelques éléments sur les chaînes de Markov sont d'abord rappelés en nous basant sur l'ouvrage de référence de Papoulis [85].

Définition 1.4. Soit \mathcal{E} un espace d'états dénombrables et $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathcal{E} . $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in \mathcal{E}$:

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}^k = \mathbf{e}_k | \mathbf{x}^{k-1} = \mathbf{e}_{k-1}, \dots, X_0 = \mathbf{e}_0) = \mathbb{P}(\mathbf{x}^k = \mathbf{e}_k | \mathbf{x}^{k-1} = \mathbf{e}_{k-1}) \quad (1-65)$$

Cette propriété équivaut à dire que le passé n'a d'influence sur le futur qu'au travers de l'état courant.

Si maintenant $\{\mathbf{x}^k\}_{0 \leq k \leq K}$ représente l'état d'un système sur un intervalle de temps $[0, T]$ discrétisé selon K instants $\{t_k\}_{0 \leq k \leq K}$, la séquence $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{x}^l$ représente l'évolution du système entre les instants t_k et t_l . La connaissance des évolutions possibles du système nécessite de connaître l'ensemble des probabilités conjointes $\mathbb{P}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N)$.

Supposons que \mathcal{E} soit un espace fini à N éléments, on pose

$$p_n^k = \mathbb{P}(\mathbf{x}^k = \mathbf{e}_n), \forall k \in \{0, \dots, K\}, \forall \mathbf{e}_m \in \mathcal{E}, \text{ et}$$

$$p_{n,m}^k = \mathbb{P}(\mathbf{x}^k = \mathbf{e}_n | \mathbf{x}^{k-1} = \mathbf{e}_m), \forall k \in \{0, \dots, K\}, \forall \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \in \mathcal{E}$$

à partir desquels les vecteurs de probabilités $\mathbf{p}^k = (p_1^k, \dots, p_N^k)^T$ et les matrices de transitions $\mathbf{P}^k = (p_{n,m}^k)$ sont formés pour $k \in \{0, \dots, K\}$. Par définition de la chaîne de Markov, la connaissance du vecteur de probabilité \mathbf{p}^l à un instant t_l et de l'ensemble des matrices de transition \mathbf{P}^k pour $l \leq k \leq K$ implique la connaissance des évolutions probables du système et de leur probabilité à partir de l'instant t_l .

L'abstraction par chaîne de Markov à temps discret a été appliquée à la détection de conflits aériens dans [62]. Les auteurs ont modélisé la dynamique du système d'aéronefs par des équations différentielles stochastiques prenant en compte la corrélation spatiale du vecteur de vent. Les éléments de la matrice de transition ont été choisis de façon à assurer la convergence faible de la chaîne de Markov vers la solution du système d'équations différentielles stochastiques lorsque le pas de discrétisation de l'espace d'état tend vers 0. Un avantage de cette approche est qu'à condition que les plans de vols ne soient pas changés, le calcul de la probabilité de conflit donne aussi la probabilité de conflit pour les instants futurs.

Une telle approche a aussi été appliquée au domaine de la sécurité des voitures autonomes [14]. Différentes options de commande ont été modélisées par un ensemble de matrices de transition. L'abstraction par chaînes de Markov a été confrontée à une simulation de Monte-Carlo pour la prédiction de trajectoires et la détection d'accidents. Les auteurs ont souligné que les erreurs induites par les deux méthodes sont de natures différentes. Les chaînes de Markov souffrent de la discrétisation des espaces d'états et de commande mais, une fois ces espaces supposés discrets, elles délivrent exactement la probabilité souhaitée. À l'inverse, la simulation de Monte-Carlo ne nécessite pas de discrétiser l'espace d'états mais produit une estimation dont l'erreur est inversement proportionnelle à la taille de l'échantillon. Les résultats obtenus ont montré que l'abstraction par chaînes de Markov produisait des prédictions de trajectoire plus précises et qu'elle était au moins aussi rapide que les simulations de Monte-Carlo. En revanche, la détection de conflits produite par chaînes de Markov est beaucoup moins précise à cause de la discrétisation de l'espace d'états.

Simulation de Monte-Carlo par chaînes de Markov

Parmi les méthodes de résolution de conflits décrites dans cette synthèse bibliographique, seul le modèle à deux niveaux avec recours de Vela [106] intègre l'incertitude de façon explicite dans un problème d'optimisation, mais pour des modèles d'erreurs et de manœuvres simplifiés. La méthode de résolution par descente de gradient [88] ne minimise pas un critère lié au coût des trajectoires, les méthodes géométriques [43,64] se ramènent à un problème déterministe en calculant a priori des conditions suffisantes de séparation, et la résolution par horizon glissant de [39] inscrit l'optimisation dans un processus d'adaptation à la réalisation des incertitudes (Section 1.3.5). Dans ces études, le but recherché lors de la prise de décision n'est jamais parfaitement défini et il est difficile de parler d'optimisation vis-à-vis des incertitudes.

Lecchini *et al.* [108] ont précisé la façon dont les incertitudes sont prises en compte dans l'objectif et les contraintes. Les trajectoires des aéronefs sont représentées par un vecteur de variables aléatoires \mathbf{x} dont la distribution de probabilités, notée $p_{\mathbf{u}}$, varie en fonction de paramètres de commande \mathbf{u} . L'ensemble des trajectoires satisfaisant les contraintes est noté \mathcal{X}_f . Ainsi, la probabilité que les contraintes soient respectées pour une commande \mathbf{u} donnée vaut

$$\mathbb{P}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_f} p_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) dx$$

La réalisabilité de trajectoires d'aéronefs soumises à des incertitudes est définie en termes probabilistes. Une manœuvre \mathbf{u} est réalisable si elle fait tomber la probabilité de non-satisfaction des contraintes en dessous du seuil de sécurité \bar{P} :

$$1 - \mathbb{P}(\mathbf{u}) < \bar{P}$$

Pour garantir la sécurité du système, \bar{P} doit nécessairement être proche de 0. La décision la meilleure vis-à-vis des incertitudes est définie comme celle maximisant l'espérance d'une fonction de performance $\text{perf}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ parmi l'ensemble des manœuvres satisfaisant la contrainte probabi-

liste. Ainsi, le problème d'optimisation est synthétisé par

$$\begin{aligned} & \max \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_f} \text{perf}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) dx \\ & \text{sous } 1 - \mathbb{P}(\mathbf{u}) < \bar{P} \end{aligned} \quad (1-66)$$

Cette expression générale recouvre en outre une modélisation très complète du système, reprise des travaux de Glover et de Lygeros [54,73]. La résolution du problème d'optimisation posé dans ces termes est une tâche difficile. Une simulation de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) a été développée pour y parvenir. Cette méthode permet de simuler une variable aléatoire lorsqu'il est long ou difficile d'y parvenir autrement. Pour cela, la MCMC s'appuie sur le fait que, sous certaines conditions de régularité, la distribution des états d'une chaîne de Markov tend vers une distribution stationnaire unique. En supposant que cette distribution stationnaire est celle que l'on souhaite simuler, il suffit donc de générer des états successifs de la chaîne de Markov. L'échantillon de Monte-Carlo est l'ensemble des états obtenus après avoir supprimé les premiers itérés précédant la convergence de la chaîne de Markov vers sa distribution stationnaire. L'algorithme de Metropolis-Hastings [59] donne une procédure étonnamment simple pour construire une telle chaîne de Markov. Pour plus de détails sur la MCMC, on pourra se référer à [52].

Pour appliquer cette technique à l'optimisation de manœuvres d'évitement, Lecchini *et al.* [108] ont modifié le problème de façon à l'exprimer comme la maximisation d'un objectif non contraint Z . Cette modification est effectuée en intégrant les contraintes à l'objectif sous la forme d'une pénalité sur leur non-respect à l'aide de la fonction

$$z(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \begin{cases} \text{perf}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \Lambda & \mathbf{x} \in \mathcal{X}_f \\ 1 & \mathbf{x} \notin \mathcal{X}_f \end{cases}$$

avec $\Lambda > 1$. Le problème d'optimisation sous contrainte est donc approché par la maximisation de la fonction

$$Z(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} z(\mathbf{u}, \mathbf{x}) dx \quad (1-67)$$

La MCMC est alors appliquée pour simuler la variable \mathbf{u} selon une distribution de probabilité proportionnelle à $Z(\mathbf{u})^N$, où N est un paramètre de résolution. Cette méthode d'optimisation, décrite dans [80], repose sur l'idée que, si la fonction critère $Z(\mathbf{u})^N$ est suffisamment « pointue », c'est-à-dire que les valeurs de $Z(\mathbf{u})^N$ sont nettement inférieures à la valeur maximale Z^* dès que \mathbf{u} s'éloigne de la valeur \mathbf{u}^* où Z^* est atteinte, alors des valeurs de \mathbf{u} simulées selon une distribution proportionnelle à $Z(\mathbf{u})^N$ sont concentrées autour de \mathbf{u}^* . Il vient que plus la valeur de N est grande, plus les simulations de \mathbf{u} résultant de ce processus sont concentrées autour de \mathbf{u}^* . Toutefois, chaque simulation de $Z(\mathbf{u})^N$ requiert N simulations de $Z(\mathbf{u})$ qui sont elles-mêmes le résultat de simulations de Monte-Carlo pour le calcul de l'intégrale sur le domaine de \mathbf{x} . La concentration des valeurs de \mathbf{u} autour des commandes optimales se fait donc au prix de longs calculs.

Cette approche a été implémentée pour un conflit à deux aéronefs en approche. La manœuvre d'approche du premier aéronef est fixée, et seuls deux paramètres de la manœuvre du second sont susceptibles d'être modifiés. Pour un paramètre $N = 100$, suffisant pour sélectionner précisément les manœuvres proches de l'optimum, les simulations ont nécessité près de vingt heures de calcul.

1.3.5 Processus de résolution par horizon glissant

Pour prendre en compte les incertitudes, Durand *et al.* [39] ont inclus leur algorithme génétique, décrit page 18, dans un processus de MPC. Leur objectif a été de trouver des trajectoires sans conflit et robustes aux incertitudes, tout en minimisant l'effort additionnel requis pour lutter contre ces incertitudes. Pour cela, ils ont souhaité minimiser à la fois le retard engendré par

la manœuvre et la durée de la manœuvre. L'idée en minimisant la durée de la manœuvre est que plus le début de la manœuvre est proche du conflit et plus les incertitudes sur les positions des aéronefs sont faibles pendant la résolution du conflit. Ce principe est d'ailleurs ancré dans le fonctionnement opérationnel de l'ATC puisque les conflits sont résolus pendant les dernières cinq à dix minutes avant leur occurrence, alors que des manœuvres de déviation très larges pourraient être planifiées à l'avance.

Pour satisfaire à ces exigences, il est nécessaire que l'objectif minimisé ne favorise pas des manœuvres débutant aussi tôt que possible. Cela est par exemple le cas lorsque la norme de l'accélération ou la longueur de la trajectoire est minimisée. Pour une manœuvre en cap par exemple, le changement de cap à effectuer pour réaliser une séparation donnée est en effet d'autant plus petit que la manœuvre est débutée plus tôt. Par conséquent, les auteurs ont intégré à leur fonction de coût un terme proportionnel à l'aire occupée par chaque manœuvre, c'est-à-dire l'aire comprise entre la trajectoire de référence et la trajectoire suivie lors d'une manœuvre en cap.

Comme dans [12], les prédictions de trajectoires reflètent les pires réalisations des incertitudes. La prédiction donne donc la position d'un aéronef en mouvement rectiligne par un segment dont la taille grandit avec l'horizon de prédiction. Le déroulement de la procédure d'horizon glissant qui en résulte est décrite ci-dessous pour un conflit à deux aéronefs. La période d'échantillonnage a été fixée à $T_e = 3$ minutes dans les expériences présentées dans [39], la procédure a été lancée vingt minutes avant l'instant prédit du conflit et les manœuvres sont calculées par algorithme génétique à chaque pas de temps.

Au premier pas d'échantillonnage ($t=0$), le conflit étant encore éloigné, la manœuvre de résolution est très ample puisqu'elle assure la séparation entre des segments très longs au point de croisement des trajectoires. Toutefois, grâce au choix de la fonction de coût, les manœuvres débutent à un instant $\tau > t + T_e$; elles ne sont donc pas mises en œuvre avant le pas d'échantillonnage suivant de l'horizon glissant. Le pas d'échantillonnage suivant ($t = T_e$) voit la création d'une manœuvre moins coûteuse du fait de la réduction des incertitudes, mais celle-ci n'est toujours pas effectuée puisqu'elle débute à $\tau > t + T_e$. La procédure se poursuit ainsi jusqu'au pas d'échantillonnage $t = kT_e$, où l'une des deux situations suivantes est rencontrée : soit la manœuvre décidée débute à un instant $kT_e \leq \tau < kT_e + T_e$, soit le conflit n'est plus détecté. Durand *et al.* [39] ont ainsi décrit un exemple où une manœuvre débutée trop tôt aurait résulté en une trajectoire coûteuse alors qu'il s'est finalement avéré inutile d'agir.

On note que Prandini *et al.* [88] ont aussi donné une interprétation de leur algorithme de descente de gradient correspondant à une résolution par horizon glissant. La taille des pas de temps est à la fois la période d'échantillonnage et l'horizon de contrôle, et l'intervalle sur lequel la probabilité de conflit est calculée est l'horizon de prédiction.

1.4 Programmation linéaire stochastique avec recours

Bien que l'approche développée par Vela *et al.* [106] reprenne certains principes de la programmation stochastique avec recours, aucun modèle linéaire avec recours n'a été trouvé dans la littérature relative à la résolution de conflits aériens. Cette approche semble pourtant pertinente pour prendre en compte des structures d'incertitudes complexes dans des modèles dont la résolution peut être envisagée dans un temps d'exécution raisonnable. Cette section s'attache à introduire de façon très synthétique le cadre de la programmation linéaire stochastique avec recours, et plus particulièrement les modèles à deux étapes. Elle est basée sur les manuels de programmation stochastique [26,95] et sur la thèse de Georges Kolomvos [69], auxquels le lecteur peut se référer pour plus de détails sur les méthodes discutées ou pour un exposé plus complet sur la programmation stochastique en général.

1.4.1 Modèle de recours à deux étapes

L'optimisation avec recours recherche une décision dont les effets sont immédiats en prenant en compte ses conséquences sur le système en fonction des réalisations probables d'aléas. Le recours représente la possibilité future d'effectuer des actions correctives plus chères afin de compenser la réalisation des incertitudes lorsqu'il s'avère que les décisions initiales étaient optimistes. Dans un modèle à deux étapes, les actions correctives ne sont possibles qu'à un instant futur. La première étape correspond à l'instant présent, et la seconde à cet instant futur auquel le recours peut avoir lieu. Les décisions de première étape sont donc déterminées de façon à minimiser le coût des actions immédiates ainsi que l'espérance du coût des actions correctives.

La programmation linéaire stochastique avec recours à deux étapes s'intéresse au problème :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbb{E}_{\xi}(Q(\mathbf{x}, \xi)) \\ \text{sujet à} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1-68}$$

où $Q(\mathbf{x}, \xi)$ est la valeur optimale du problème de seconde étape :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{q}(\xi)^T \mathbf{y} \\ \text{sujet à} \quad & \mathbf{T}(\xi)\mathbf{x} + \mathbf{W}(\xi)\mathbf{y} = \mathbf{h}(\xi) \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1-69}$$

ξ est le vecteur composé des variables aléatoires reflétant l'incertitude sur les événements pouvant se produire entre la première et la deuxième étape. On note $\Xi \subset \mathbb{R}^{N_{\xi}}$ le support de ce vecteur aléatoire, c'est-à-dire le plus petit sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^{N_{\xi}}$ tel que $\mathbb{P}(\xi \in \Xi) = 1$. Les matrices $\mathbf{W}(\xi)$ et $\mathbf{T}(\xi)$ sont respectivement appelées *matrice de recours* et *matrice de technologie*. Les éléments de données de la première étape – \mathbf{A} , \mathbf{b} et \mathbf{c} – sont déterministes parce qu'ils reflètent l'état et les paramètres du système à l'instant présent. À l'inverse, les différentes matrices intervenant dans le problème de seconde étape dépendent de ξ , puisque certaines informations relatives à la deuxième étape ne sont pas encore connues avec certitude. Ainsi, les solutions optimales $\mathbf{y}(\xi)$ du problème de seconde étape, qui sont justement calculées pour corriger les conséquences des réalisations de ces incertitudes, sont fonction de ξ , à la différence de \mathbf{x} . Le fait que \mathbf{x} ne dépend pas de ξ traduit la propriété de *non-anticipativité* de la prise de décision, c'est-à-dire que les décisions devant s'appliquer de suite ne peuvent pas varier en fonction d'informations qui ne sont pas encore disponibles.

Le problème de seconde étape peut être vu comme la pénalisation du terme de violation $\mathbf{h}(\xi) - \mathbf{T}(\xi)\mathbf{x}$ de la contrainte d'égalité, ce qui traduit bien l'idée de la correction des aléas par le recours. Ainsi, lorsque la matrice de recours \mathbf{W} et le vecteur de coût \mathbf{q} ne dépendent pas de ξ , les pénalités sont indépendantes de la réalisation des incertitudes. On parle alors de *recours fixe*.

On observe par ailleurs que la fonction de recours Q est mal définie si, pour certaines valeurs de \mathbf{x} , il existe une réalisation de $\boldsymbol{\xi}$ pour laquelle le problème de seconde étape n'est pas réalisable. Pour caractériser cette difficulté, on définit alors les concepts de recours complet et relativement complet.

Définition 1.5. *Si pour tout $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ et pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$, le problème de seconde étape est réalisable, alors le recours est complet.*

Si pour tout $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, et pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$, le problème de seconde étape est réalisable, alors le recours est relativement complet.

Un recours complet est nécessairement relativement complet. Dans les deux cas, la fonction de recours est bien définie sur l'ensemble des solutions réalisables vis-à-vis des contraintes de la première étape, ce qui est suffisant pour la résolution du modèle stochastique. En général, on suppose les contraintes de seconde étape construites de façon à se trouver dans le cas du recours complet. Certaines propriétés de la matrice de recours peuvent le garantir dans le cas d'un recours fixe [69]. On suppose dans la suite que le recours est complet.

Lorsque le recours est fixe et complet, des propriétés permettent de caractériser la forme de la fonction de recours relativement aux variations des différents éléments de la seconde étape. Ces propriétés, énoncées ci-dessous, sont démontrées dans [26].

Propriété 1.1

Pour un programme stochastique à recours fixe et complet, $Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est

1. une fonction linéaire par morceaux et convexe de (\mathbf{h}, \mathbf{T}) ;
2. une fonction linéaire par morceaux et concave de \mathbf{q} ;
3. une fonction linéaire par morceaux et convexe de \mathbf{x} .

Le point 3. de la propriété 1.1 est notamment utilisée dans [26] pour la justification de la méthode de résolution décrite dans la sous-section 1.4.3.

1.4.2 Méthode d'approximation moyenne par échantillonnage

En général, les méthodes numériques pour résoudre (1-68) sont basées sur des techniques déterministes traitant un nombre fini de réalisations de la variable aléatoire $\boldsymbol{\xi}$. Lorsque $\boldsymbol{\xi}$ est une variable aléatoire continue, le programme stochastique peut toutefois être résolu par la méthode d'*approximation moyenne par échantillonnage* (SAA), dont une étude théorique est réalisée dans [100]. L'idée de la méthode SAA est de se ramener à une distribution d'erreur discrète en tirant un échantillon $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^N$ du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$. L'espérance de la fonction de recours est ensuite approchée par sa moyenne empirique :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n)$$

L'approximation moyenne par échantillonnage de (1-68) est alors donnée par :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}}} \tilde{Z} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^n) \quad (1-70)$$

Soit Z^* la valeur optimale de l'objectif de (1-68) et \tilde{Z}^* celle de son approximation moyenne par échantillonnage. En supposant que l'échantillon $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^N$ est identiquement et indépendamment distribué (i.i.d.), il est démontré dans [100] que \tilde{Z}^* converge vers Z^* lorsque la taille de l'échantillon augmente. En outre, plusieurs résultats, également donnés dans [100], permettent de connaître la taille d'échantillon nécessaire pour assurer un certain niveau de confiance.

Pour estimer la solution optimale du problème (1-68), on tire alors un échantillon i.i.d. ξ^1, \dots, ξ^N de réalisations des erreurs. Pour chaque réalisation ξ^n , les matrices \mathbf{T}^n et \mathbf{W}^n et les vecteurs \mathbf{q}^n et \mathbf{h}^n , intervenant dans le problème de seconde étape, sont calculés. On parle alors du scénario n pour désigner le problème de second étape associé à ξ^n . Finalement, l'approximation de (1-68) peut s'exprimer comme un grand PL désigné comme la *formulation équivalente déterministe* :

$$\text{M1 : } \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{q}^n)^T \mathbf{y}^n \\ \text{sujet à} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \\ \mathbf{T}^n \mathbf{x} + \mathbf{W}^n \mathbf{y}^n = \mathbf{h}^n, \quad n = 1, \dots, N \\ \mathbf{y}^n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (1-71)$$

On note que le nombre de variables et de contraintes du second niveau augmente linéairement avec la taille N de l'échantillon de réalisations des erreurs. Le temps de résolution de (1-71) devient donc rapidement problématique lorsque N augmente. La prochaine sous-section décrit une méthode de résolution reposant sur sa structure particulière.

1.4.3 Résolution par décomposition de Benders

La construction du problème équivalent déterministe impose une structure de blocs particulière que l'on met en évidence en réécrivant sa matrice de contraintes sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}^1 & \mathbf{W}^1 & \mathbf{0} & \dots & \dots \\ \mathbf{T}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{W}^2 & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{T}^N & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{W}^N \end{pmatrix}$$

La structure de blocs indique que, si l'on fixe les variables \mathbf{x} à une valeur $\hat{\mathbf{x}}$, alors le problème de minimisation devient séparable par scénario. Cette observation traduit encore la propriété de non-anticipativité, puisque les variables \mathbf{x} représentant la décision immédiate sont couplantes pour l'ensemble des contraintes associées aux différents scénarios. Une fois \mathbf{x} fixé à $\hat{\mathbf{x}}$, il suffit donc de résoudre indépendamment les N problèmes suivants pour obtenir la solution du problème entier :

$$\begin{array}{l} \min \quad \frac{1}{N} (\mathbf{q}^n)^T \mathbf{y} \\ \text{sujet à} \quad \mathbf{W}^n \mathbf{y} = \mathbf{h}^n - \mathbf{T}^n \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{y} \geq 0, \end{array}$$

avec $n = 1, \dots, N$.

Pour exploiter cette propriété, il est naturel de résoudre le problème par *décomposition de Benders* [22]. Une implémentation spécifique à la programmation stochastique a été développée sous le nom de *méthode en L* dans [102]. La décomposition de Benders, appliquée à (1-71), considère un problème maître (PM) constitué des variables et contraintes de première étape et, pour chaque scénario $n = 1, \dots, N$, un sous-problème (SP_n) constitué des variables et des contraintes de la seconde étape. À chaque itération majeure, le PM est résolu pour déterminer sa solution optimale $\hat{\mathbf{x}}$, puis les $\{\text{SP}_n\}_{n=1, \dots, N}$ sont résolus en fixant la valeur de \mathbf{x} à $\hat{\mathbf{x}}$. Les variables duales optimales permettent alors de générer une coupe d'optimalité agrégée à ajouter au PM avant de lancer une nouvelle itération majeure. Cette décomposition correspond en fait à une technique de génération de contraintes. Si la valeur de $\hat{\mathbf{x}}$ conduit à la non-réalisabilité de certains sous-problèmes, la méthode prévoit d'ajouter une coupe de réalisabilité. Ici, le recours

étant supposé complet, les sous-problèmes sont toujours réalisables. La méthode de résolution par décomposition de Benders décrite ci-dessus est résumée par l'algorithme 1.2.

Algorithme 1.2 Résolution de l'équivalent déterministe par décomposition de Benders

Antécédent : $\hat{\mathbf{x}}_1 = \min_{\mathbf{x} \geq 0} \{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, $\theta_1 = 0$, $\text{tol} = 10^{-4}$

1: $L \leftarrow 1$

2: **tant que** 1 **effectuer**

3: **pour** $n = 1, \dots, N$ **effectuer**

4: Résoudre SP_n :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{y} \geq 0} \quad \frac{1}{N} (\mathbf{q}^n)^T \mathbf{y} \\ & \text{subject à} \quad \mathbf{W}^n \mathbf{y} = \mathbf{h}^n - \mathbf{T}^n \hat{\mathbf{x}}_L \end{aligned} \tag{1-72}$$

5: Soit \mathbf{y}_L^n la solution optimale de (1-72) et $(\boldsymbol{\pi}_L^n)^T$ la solution duale associée

6: $z_L \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{q}^n)^T \mathbf{y}_L^n$

7: **si** $\frac{z_L - \hat{\theta}}{z_L} \leq \text{tol}$ **alors**

8: **STOP**

9: **sinon**

10: Résoudre le PM :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \geq 0} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \theta \\ & \text{subject à} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \quad \theta \geq \sum_{n=1}^N \pi_l^n (\mathbf{h}^n - \mathbf{T}^n \mathbf{x}), \quad l = 1, \dots, L \end{aligned} \tag{1-73}$$

11: $L \leftarrow L + 1$

12: Soit $(\hat{\mathbf{x}}_L, \hat{\theta}_L)$ la solution optimale de (1-73)

13: **Résultat :** Le vecteur de décisions de première étape optimal, $\hat{\mathbf{x}}_L$, et le critère associé, $\mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_L + z_L$

À chaque itération majeure, le PM augmenté d'une contrainte et l'ensemble $\{\text{SP}_n\}_{n=1, \dots, N}$ sont résolus. Suite à la décomposition du problème, le temps de calcul nécessaire pour une itération majeure est nettement inférieur à celui nécessaire pour la résolution directe de l'équivalent déterministe. Il reste cependant possible qu'il faille un grand nombre d'itérations majeures avant de satisfaire le critère d'arrêt. Dans [48], la convergence de la décomposition de Benders est discutée de façon générale. Il y est notamment question de l'importance d'avoir un critère au PM représentant la majorité des coûts du problème initial. En effet, l'objet des coupes optimales étant de remonter de l'information sur le coût des SP vers le PM, la convergence de la décomposition est d'autant plus rapide que le premier PM détient d'informations. Cette observation suggère l'intérêt de remonter initialement des SP vers le PM toute la connaissance que l'on peut avoir a priori sur leur critère.

1.5 Discussion

1.5.1 Maintien de la séparation en environnement déterministe

Réalisme des trajectoires

Des systèmes dynamiques réalistes ont été proposés dans la littérature, notamment par [89], mais ils décrivent des trajectoires paramétrées par un grand nombre de points de collocation qui supposent qu'il est possible de donner de tels ordres de manœuvre aux aéronefs. Sachant qu'il n'est pas évident que de telles trajectoires puissent être suivies, et que les instructions de contrôle doivent rester simples, une modélisation aussi fine n'est pas utile dans ce contexte. À ce titre, il semble plus pertinent de supposer par exemple que les changements de vitesse se font à accélération constante. En exprimant les vecteurs d'état et de commande dans un repère cartésien, le système dynamique (1-2)-(1-7) peut être exprimé sous la forme d'un système linéaire semblable à (1-21).

Il apparaît par ailleurs que, dans ces modèles non linéaires, la satisfaction des contraintes n'est vérifiée qu'aux points de discrétisation de l'intervalle de temps. Or il est nécessaire que la contrainte de séparation soit satisfaite à chaque instant.

Vers une approche comparative en PNL et MILP

La littérature fait apparaître une grande hétérogénéité dans la façon dont la résolution de conflits a été traitée. La constante qui se détache est que le problème est trop difficile pour être abordé sans avoir à faire de compromis entre précision de la modélisation, optimalité de la recherche de solution et durée d'exécution de l'algorithme correspondant. La diversité des approches traduit par ailleurs qu'il n'y a pas encore de réel consensus sur le point qui mériterait d'être privilégié.

Les approches par la programmation non linéaire et par la programmation linéaire mixte ont l'avantage, lorsqu'elles sont regardées dans leur ensemble, de permettre des modélisations très complètes [15, 89], de produire des solutions optimales [40, 97], ou de présenter des temps d'exécution suffisamment courts pour une implémentation opérationnelle [84, 91, 107]. L'ensemble de ces bénéfices n'a toutefois pas encore été regroupé dans une même approche.

Une étude comparative entre programmation non linéaire et programmation linéaire mixte a été réalisée par Borrelli *et al.* [28], mais elle s'est concentrée sur la mise en compétition des résolutions sans confronter les possibilités des deux classes en termes de modélisation. En effet, dans cette étude, les modèles non linéaire et linéaire mixte sont deux formulations équivalentes du même problème, alors que des contraintes et un objectif non linéaires auraient pu être considérés dans le PNL. Ainsi, l'étude fournit des informations pertinentes sur l'adéquation entre le modèle choisi et les méthodes de résolution propres à chaque classe de problèmes, mais elle laisse de côté tous les bénéfices d'une modélisation non linéaire.

Il n'a par ailleurs pas été trouvé de mise en concurrence des différentes approches de programmation linéaire mixte entre elles.

Résolution des modèles de programmation non linéaire

Les travaux de Raghunathan *et al.* [89] insistent sur l'importance de l'initialisation lors de la résolution du PNL. Or la méthode qu'ils utilisent pour calculer des trajectoires initiales ne tient pas compte des contraintes sur l'état et recourt à des équations simplifiées pour la dynamique. Ainsi, les solutions initiales ne sont pas nécessairement réalisables et risquent par ailleurs de ne pas être dans le voisinage d'une bonne solution réalisable. Cela explique sans doute les oscillations du temps de calcul observées dans [28] lors de la résolution du PNL avec cette même initialisation.

Dans [28], la comparaison du PNL avec le MILP démontre clairement que les algorithmes de résolution de programmation linéaire mixte sont plus performants pour le traitement des contraintes disjonctives. Les auteurs évoquent la possibilité d'initialiser le PNL avec la solution du MILP mais, à notre connaissance, aucun travail n'a encore été publié sur ce sujet. Notons qu'une telle approche n'a d'intérêt que si le MILP et le PNL ne sont pas deux formulations équivalentes du même problème, puisque dans ce cas la solution du MILP est aussi le minimum global du PNL. La difficulté de la démarche est alors de trouver une approximation linéaire du PNL qui minimise un objectif similaire et produise des solutions réalisables pour le PNL.

Limites des modèles de programmation linéaire mixte

La discrétisation de l'horizon temporel pose la difficulté de la vérification de contraintes sur un intervalle continu. Les contraintes émergeant dans une discrétisation spatiale ou dans les modélisations à un seul changement de vitesse assurent la séparation sur tout l'intervalle, mais ce n'est pas le cas pour la discrétisation temporelle en général. Des solutions ont été proposées par Schouwenaars [98] et par Earle et D'Andrea [40]. Cependant, l'approche de Schouwenaars force à choisir entre la réduction du pas de temps d'intégration et la surestimation de la distance de séparation, tandis que celle d'Earle et D'Andrea nécessite de résoudre plusieurs fois le problème tant que les trajectoires ne sont pas séparées.

En outre, des solutions ont été proposées pour rendre les modèles plus complets, mais ces améliorations n'ont pas été incluses dans un même modèle. Ainsi Vela *et al.* [107] ont été les seuls à minimiser la consommation de carburant de façon à refléter un coût réel pour les compagnies. Par ailleurs, beaucoup de modèles linéaires [84, 104, 105, 107] font l'hypothèse que les changements de vitesse sont instantanés, alors que Paielli [83] a démontré que le fait de considérer les manœuvres instantanées induisait des erreurs importantes. Les contraintes sur l'accélération posent aussi une difficulté, puisque l'accélération longitudinale et la vitesse de virage doivent idéalement être considérées individuellement. Schouwenaars [96] a proposé une solution pour approcher ces deux contraintes, mais elle n'a pas encore été reprise dans d'autres modèles.

Par ailleurs, dans les modélisations par discrétisation spatiale [13, 91, 105], la séparation n'est effectuée que par des manœuvres en vitesse [91], auxquelles des manœuvres en altitude ont été ajoutées dans [13, 105]. Les manœuvres en cap n'ont toutefois pas été prises en compte alors que les instructions de contrôle en route consistent le plus souvent à ordonner des changements de cap. L'une des raisons pour lesquelles ces manœuvres ont été ignorées jusqu'ici est qu'elles complexifient nettement le modèle. En effet, la longueur des arcs ainsi que la durée de leur parcours varient toutes deux en fonction des changements de cap, ce qui pose problème pour obtenir des contraintes linéaires.

Finalement, les approches en MILP possèdent l'avantage de s'appuyer sur des codes très performants (Gurobi, CPLEX, etc.). Malgré cela, il a été constaté que les modèles les plus complets restaient longs à résoudre sur des instances avec une dizaine de mobiles ou un grand nombre d'obstacles [40, 97]. Outre la réduction de l'horizon temporel par MPC, peu de propositions ont été faites pour réduire ce temps d'exécution. La discussion menée par [13] et [91] sur la valeur du *grand M* n'a par exemple pas été retrouvée pour les discrétisations temporelles. Nous n'avons pas non plus trouvé de travaux cherchant à diminuer la taille de l'espace de recherche par l'ajout d'inégalités valides.

1.5.2 Maintien de la séparation en environnement incertain

Un algorithme basé sur le calcul de la probabilité de conflit

L'analyse de la littérature fait apparaître la rareté des travaux dans lesquels la résolution des conflits aériens prend en compte les incertitudes. Les modèles d'incertitudes qui y sont considérés

varient beaucoup, même si le modèle de champ de vent gaussien de [31] a été retenu dans un grand nombre de recherches récentes.

Les méthodes de résolution les plus prometteuses en temps de calcul reposent néanmoins sur des modèles d'erreurs plus simples. Le processus d'horizon glissant développé dans [39] est par exemple basé sur des prédictions de trajectoires ensemblistes, et le calcul géométrique de la probabilité de conflit de [64] considère des erreurs indépendantes entre aéronefs. Aucune tentative d'extension de ce calcul à une structure d'erreur proche de celle de [31] n'a été trouvée. En outre, [64] explique comment garantir la séparation entre aéronefs en environnement incertain grâce à la formulation analytique de la probabilité de conflit, mais il ne présente aucune implémentation.

Inclusion explicite des incertitudes dans le modèle d'optimisation

Les modèles dans lesquels l'incertitude est explicitement prise en compte sont résolus soit par des méthodes réactives, soit par des méthodes d'optimisation par discrétisation de la commande, soit par des méthodes de recherche aléatoire. La combinatoire intrinsèque à la deuxième méthode fait que son extension à plus de deux avions est difficile. Les méthodes de recherche aléatoire sont quant à elles caractérisées par leur lenteur. La programmation linéaire stochastique avec recours n'a pas été appliquée pour l'ATC. Pourtant elle semble avoir toutes les qualités pour permettre la prise en compte des incertitudes.

1.5.3 Annonce des contributions

Les limites apparues lors de l'analyse critique de l'état de l'art motivent les points développés dans ce mémoire.

Les premières contributions portent sur la séparation d'aéronefs en environnement déterministe. Afin d'être en mesure d'estimer l'écart entre les méthodes de résolution proposées et le problème initial, celui-ci est d'abord défini à l'aide d'une formulation en temps continu. Le critère de ce dernier est composé de la consommation de carburant des aéronefs ainsi que de l'écart final à un contrat 4D préalablement défini. Par un processus de transcription directe, cette formulation est ramenée en temps discret sous la forme d'un PNL. De nouvelles contraintes sont introduites pour garantir la séparation entre aéronefs à chaque instant.

Le PNL n'est pas convexe, notamment à cause des contraintes de séparation. Sa résolution par les solveurs génériques de programmation non linéaire ne garantit pas de trouver une solution réalisable, et si une telle solution est déterminée, il ne s'agit alors que d'un minimum local, potentiellement de mauvaise qualité. La résolution est également susceptible d'être particulièrement lente. Il est généralement reconnu qu'il est utile, tant du point de vue du temps d'exécution que de celui de la qualité de la solution, de fournir une solution initiale réalisable à partir de laquelle la recherche d'un minimum local du PNL est effectuée. Pour cela, le PNL est linéarisé à l'aide de variables binaires, de sorte qu'une solution soit réalisable pour le PNL. L'idée de notre méthode est que la résolution du modèle linéaire à variables mixtes prend en charge la combinatoire du problème, puis que celle du PNL réalise une optimisation locale.

La question traitée par la suite est celle du gain associé à une représentation fine du problème. Pour cela, deux simplifications menant à deux modélisations en programmation linéaire à variables mixtes sont considérées parce qu'elles engendrent des réductions importantes du temps de calcul. Ces MILP sont développés pour permettre une comparaison pertinente avec le modèle non linéaire. En particulier, ils garantissent la séparation à chaque instant, leur critère reflète à la fois la consommation de carburant et l'écart au contrat 4D, et les changements de vitesse se font à accélération constante. Les différents modèles sont ensuite comparés sur un large ensemble de jeux de données.

Lors du processus menant de la formulation en temps continu aux deux modèles simplifiés, une analyse théorique des approximations est menée et la qualité des contraintes est estimée. En outre, connaissant leur impact sur le temps d'exécution des algorithmes de résolution, les

valeurs minimales des constantes de *grand M* intervenant dans les contraintes disjonctives sont systématiquement recherchées.

Cette étude se concentre ensuite sur la prise en compte des incertitudes. Une structure d'erreur relativement complexe, composée d'erreurs aléatoires indépendantes entre les aéronefs et d'un champ de vent corrélé en temps et en espace, est considérée. L'un des MILP est adapté en modifiant les contraintes de séparation et l'algorithme de contrôle automatisé dans lequel il est inscrit. Pour cela, une approximation de la probabilité de conflit, reposant sur une hypothèse de vent constant, est calculée. Trois stratégies de mise en œuvre sont ensuite opposées de façon à apprécier l'impact du nombre de manœuvres et des instants auxquels elles interviennent.

Finalement, les erreurs aléatoires sont explicitement intégrées dans le modèle de résolution. L'intérêt est de calculer des manœuvres d'évitement en tenant compte de la possibilité d'ordonner d'autres manœuvres plus tard en fonction de la réalisation des erreurs. Le problème est ainsi modélisé sous la forme d'un programme stochastique linéaire à deux niveaux dont certaines variables du premier niveau sont binaires. Sa résolution est effectuée grâce à une décomposition de Benders. Une amélioration substantielle des performances de la décomposition est accomplie par l'ajout d'une contrainte au problème maître. L'idée de cet ajout est que la convergence de l'algorithme est d'autant plus rapide que le problème maître dispose d'information sur le coût total des solutions qu'il calcule.

Première partie

Modélisation et résolution du
problème de séparation d'aéronefs
sans incertitudes

Chapitre

2

Résolution de conflits aériens par la programmation non linéaire

Aperçu

2.1	Position du problème	64
2.1.1	Dynamique des mobiles	64
2.1.2	Manceuvres d'évitement	65
2.1.3	Critère	66
2.1.4	Formulation en temps continu	69
2.2	Discrétisation temporelle : le modèle TIME	69
2.2.1	Intégration du système dynamique	70
2.2.2	Bornes sur la vitesse et l'accélération	71
2.2.3	Contraintes de séparation valides sur tout l'intervalle de commande	73
2.2.4	Résumé du modèle TIME	76
2.3	Linéarisation de TIME pour l'initialisation de sa résolution	77
2.3.1	Bornes sur la vitesse et l'accélération	78
2.3.2	Contraintes de séparation	80
2.3.3	Linéarisation du critère	85
2.3.4	Résumé du modèle linéaire	85
2.4	Initialisation par la solution du modèle linéaire	86
2.4.1	Justification de la démarche	86
2.4.2	Déterminer rapidement une solution admissible du problème linéaire	88
2.5	Paramétrage et évaluation de l'algorithme hybride	91
2.5.1	Description des jeux de données	91
2.5.2	Paramétrage de l'algorithme	94
2.5.3	Résultats	97
2.6	Conclusion	98

Les travaux décrits dans cette partie se limitent à l'étude de la résolution de conflit dans un environnement supposé sans incertitudes. La démarche suivie consiste à développer un modèle aussi précis et complet que possible dans un premier temps, quitte à devoir se replier sur des alternatives performantes si des difficultés sont rencontrées au moment de l'implémentation. Pour cela, le problème de planification de trajectoires sans conflit est d'abord spécifié, puis un modèle d'optimisation non linéaire en dimension finie est dérivé par discrétisation de l'intervalle de temps. Afin d'améliorer la convergence de l'algorithme de résolution du modèle, ce dernier est linéarisé pour former un modèle dont la résolution fournit un point initial à l'optimisation du modèle non linéaire. L'algorithme hybride ainsi construit est testé sur des jeux de données artificiels de taille et de complexité variables.

Il se dégage de l'étude bibliographique que le problème de planification de trajectoires d'aéronefs sans conflit est un défi parce que la description du mouvement des aéronefs est complexe et que leur séparation requiert l'utilisation de contraintes couplantes non convexes. Il apparaît en outre qu'il est problématique de supposer que l'évolution des aéronefs est parfaitement prévisible à cause de nombreux facteurs tels que le vent, qui reste encore impossible à prédire avec suffisamment de précision. Ces travaux de thèse se sont néanmoins attachés dans un premier temps à la résolution de conflits dans un environnement où toutes les incertitudes sont négligées. Cette hypothèse majeure, conservée dans toute la première partie, revient à dire que, si aucune action n'est demandée aux pilotes par les contrôleurs, les aéronefs suivent exactement leur trajectoire prédite, et que, si une manœuvre est ordonnée, celle-ci est réalisée exactement. L'objectif en suivant cette hypothèse est de limiter la complexité du problème afin de mieux étudier les enjeux des choix de modélisation sur les trois points clés que sont la précision du modèle, le coût de la résolution de conflit et la rapidité d'exécution des algorithmes associés.

Le premier volet de cette évaluation cherche naturellement à traiter le problème de façon aussi précise que possible. Le référentiel par rapport auquel cette précision est évaluée est d'abord défini (Section 2.1). Un modèle de programmation non linéaire est ensuite développé pour résoudre numériquement le problème (Section 2.2). Sachant que la résolution des PNL non convexes converge vers des minima locaux et que la convergence vers une solution réalisable n'est pas garantie, le modèle est linéarisé en introduisant des variables binaires (Section 2.3). Le but poursuivi est de produire une solution initiale réalisable pour le PNL et potentiellement améliorable. Le paramétrage du processus d'initialisation et l'évaluation des performances de l'algorithme hybride ainsi constitué sont finalement réalisés sur des jeux de données construits dans le but de présenter des degrés de complexité variables (Section 2.5).

2.1 Position du problème

L'étude bibliographique fait apparaître la diversité des hypothèses et des modélisations proposées lors du traitement du problème de résolution de conflits aériens sans incertitude. Étant entendu qu'aucune définition du problème mathématique associé ne fait l'objet d'un consensus, la présente section a pour vocation de poser clairement le problème. L'objectif à ce stade est de rester aussi général que possible même si une voie de recherche a été écartée, puisque le mouvement des mobiles est limité dans un plan horizontal.

La résolution de conflits s'effectue pour un ensemble d'aéronefs et un horizon de commande donné. L'horizon de commande délimite l'intervalle de temps pendant lequel la séparation entre aéronefs doit être assurée. Par simplicité, l'instant initial de cet intervalle est $t^{\text{ini}} = 0$. On note

- \mathcal{A} : ensemble des aéronefs contrôlés ;
- \mathcal{C} : ensemble des paires d'aéronefs en conflit potentiel ;
- T_C : horizon de commande. $[0; T_C]$ est l'intervalle de commande ;
- $T_{P,i}$: horizon de prédiction, de $A_i \in \mathcal{A}$. $[0; T_{P,i}]$ est l'intervalle de prédiction de A_i .

Dans le cas général, \mathcal{C} est l'ensemble des paires d'éléments distincts de \mathcal{A} , mais il est parfois réduit lorsque la configuration des aéronefs le permet. L'horizon de commande est le même pour tous les aéronefs, tandis que l'horizon de prédiction peut varier selon les particularités des trajectoires des aéronefs. Leur signification est donnée dans la suite.

On cherche à déterminer l'ensemble des trajectoires des aéronefs de \mathcal{A} telles que chaque position initiale soit liée à la position finale associée par un trajet volable et sans conflit et telles qu'un critère de coût soit minimisé.

2.1.1 Dynamique des mobiles

Le mouvement des aéronefs s'effectue dans un plan horizontal. Il est décrit par le modèle dynamique point masse donné par les équations (1-2)–(1-7), mais celles-ci caractérisant un mou-

vement 3D, elles sont simplifiées en notant que la dérivée de l'altitude s'annule, ce qui équivaut à un angle de pente (γ) nul. Le système dynamique se réduit alors aux quatre équations suivantes :

$$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t \in [0; T_{P,i}] :$$

$$\frac{dp_{x,i}(t)}{dt} = V_i(t) \cos \chi_i(t) \quad (2-1)$$

$$\frac{dp_{y,i}(t)}{dt} = V_i(t) \sin \chi_i(t) \quad (2-2)$$

$$\frac{d\chi_i(t)}{dt} = \frac{g_0}{V_i(t)} \tan \phi_i(t) \quad (2-3)$$

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \frac{F_{P,i}(t) - F_{T,i}(t)}{m} \quad (2-4)$$

où le facteur de charge est lié à l'angle de gîte par la relation $n_i(t) \cos \phi_i(t) = 1$ et où $F_{T,i}(t)$ dépend de la vitesse selon une relation de la forme

$$F_{T,i}(t) = \alpha_{F_{T,i}} (V_i)^2 + \frac{\beta_{F_{T,i}}}{(V_i)^2} \quad (2-5)$$

avec α_{F_T} et β_{F_T} constantes lorsque la masse et l'altitude sont constantes. L'évolution du système est donc entièrement déterminée par son état initial et par l'évolution des deux commandes ϕ et F_P .

Le mouvement des avions est par ailleurs contraint par un ensemble de bornes sur les variables d'état et de commande. Considérant que la résolution de conflit sur un horizon de dix à quinze minutes ne constitue pas une gestion de situations d'urgence, des contraintes de confort ont été préférées aux contraintes techniques inhérentes à chaque type d'avions. Par simplicité, les avions sont donc traités de façon homogène par la contrainte :

$$V_i^{\min} \leq V(t) \leq V_i^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t \in [0; T_{P,i}], \quad (2-6)$$

avec $V_i^{\min} = 0,94 \times V_i^{\text{ref}}$ et $V_i^{\max} = 1,06 \times V_i^{\text{ref}}$, où V_i^{ref} est la vitesse prédite moyenne de A_i sur $[0; T_{P,i}]$. En outre, selon [83], les valeurs typiques d'accélération et d'angle de gîte choisies par égard au confort des passagers entraînent :

$$\left| \frac{d\chi_i(t)}{dt} \right| \leq \omega^{\max} \text{ et } \left| \frac{dV_i(t)}{dt} \right| \leq U^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t \in [0; T_{P,i}], \quad (2-7)$$

avec $U^{\max} = 0,4 \text{ kt.s}^{-1}$ et $\omega^{\max} = 0,88^\circ.\text{s}^{-1}$. Dans ce contexte, les bornes sur la poussée et l'angle de gîte sont toujours respectées. Cela induit que, si (2-1), (2-2) et (2-7) sont respectées, il est toujours possible, après l'optimisation, de trouver $F_{P,i}$, $F_{T,i}$ et $\phi_i(t)$ tels que (2-3) et (2-4) soient aussi respectées. Les contraintes (2-3) et (2-4) sont donc remplacées par

$$\frac{d\chi_i(t)}{dt} = \omega_i(t) \text{ et } \frac{dV_i(t)}{dt} = U_i(t), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t \in [0; T_{P,i}], \quad (2-8)$$

où ω_i et U_i sont respectivement la vitesse de virage et l'accélération longitudinale.

2.1.2 Manœuvres d'évitement

Le mouvement des avions se faisant dans des plans horizontaux, c'est-à-dire sans changement de niveau de vol, les manœuvres en altitude sont écartées *de facto*. Cette limitation n'est cependant pas abusive puisque ces manœuvres sont généralement peu appréciées des contrôleurs et des pilotes. La résolution de conflits est donc effectuée par des manœuvres en vitesse et des manœuvres en cap.

Dans un contrôle centralisé, les manœuvres sont calculées au sol avant que les instructions correspondantes soient envoyées aux pilotes. Les manœuvres n'étant pas décidées au sein même des aéronefs, il n'est pas possible, au moment du calcul, de savoir précisément la manière dont elles seront effectuées à moins de fournir les fonctions de commande sur toute la durée des manœuvres. Un tel fonctionnement paraît encore très irréaliste du point de vue opérationnel ; il a donc été choisi de rester proche de l'implémentation actuelle en décrivant les manœuvres par quelques paramètres simples aisément communicables par une *instruction de contrôle*.

Définition 2.1. Instruction de contrôle : *une instruction de contrôle est un quadruplet $(\Delta V, \Delta \chi, t_d, t_f)$ décrivant une manœuvre à effectuer, où ΔV est un changement de vitesse, $\Delta \chi$ un changement de cap, t_d et t_f les instants où la manœuvre débute et se termine.*

Remarque 2.1. *Cette définition de l'instruction de contrôle implique un contrôle plus directif que celui pratiqué aujourd'hui par les contrôleurs, puisqu'il n'est pas prévu de contraindre les instants auxquels la manœuvre doit être débutée et terminée. Par ailleurs, le fait de pouvoir faire varier à la fois V et χ induit des actions plus flexibles que celles généralement utilisées par les méthodes d'exploration d'arbres.*

L'horizon de commande définit l'intervalle de temps pendant lequel des manœuvres peuvent être initiées tandis qu'elles ne peuvent s'étendre au-delà de l'horizon de prédiction. Une manœuvre effectuée par $A_i \in \mathcal{A}$ est donc bornée dans le temps par

$$t_d \in [0; T_C] \quad \text{et} \quad t_f \in [t_d; T_{P,i}] \quad (2-9)$$

Deux hypothèses sont ensuite faites pour que l'état des aéronefs soit connu à chaque instant.

- H_1 : les changements de vitesse et de cap se font respectivement à accélération et à vitesse de virage constantes
- H_2 : entre deux manœuvres, le vecteur vitesse d'un aéronef est constant

H_2 spécifie simplement le comportement des aéronefs lorsque aucune manœuvre ne leur est demandée.

La définition 2.1 couplée à une dynamique à accélération et vitesse de virage constantes détermine la trajectoire de l'aéronef à chaque instant de la manœuvre. Ainsi, N_i instructions de contrôle $\{(\Delta V_i^n, \Delta \chi_i^n, t_{d,i}^n, t_{f,i}^n)\}_{n=1, \dots, N_i}$ décrivent la trajectoire de $A_i \in \mathcal{A}$ à l'aide des équations :

$$\begin{aligned} U_i(t) &= 0, \quad \forall t \in [0; t_{d,i}^1] \cup [t_{f,i}^1; t_{d,i}^2] \cup \dots \cup [t_{f,i}^{N_i-1}; t_{d,i}^{N_i}] \cup [t_{f,i}^{N_i}; T_{P,i}] \\ \omega_i(t) &= 0, \quad \forall t \in [0; t_{d,i}^1] \cup [t_{f,i}^1; t_{d,i}^2] \cup \dots \cup [t_{f,i}^{N_i-1}; t_{d,i}^{N_i}] \cup [t_{f,i}^{N_i}; T_{P,i}] \\ U_i(t) &= \frac{\Delta V^n}{t_{f,i}^n - t_{d,i}^n}, \quad \forall t \in [t_{d,i}^n; t_{f,i}^n], \forall n \in \{1, \dots, N_i\} \\ \omega_i(t) &= \frac{\Delta \chi^n}{t_{f,i}^n - t_{d,i}^n}, \quad \forall t \in [t_{d,i}^n; t_{f,i}^n], \forall n \in \{1, \dots, N_i\} \end{aligned} \quad (2-10)$$

Les commandes du système sont donc les instructions de contrôle. Notons qu'il est simple de prendre en compte d'éventuelles manœuvres irréversibles en cours à l'instant $t = 0$ par des contraintes similaires.

2.1.3 Critère

Lors du calcul de la trajectoire de référence, le coût d'un vol est quantifié par la somme de deux termes pondérés, proportionnels à la consommation de fuel et à la durée du vol. La pondération de ces deux termes représente les préférences de la compagnie. Au niveau du contrôle tactique, nous avons choisi de prendre ces deux termes en compte, mais en remplaçant la pondération par le concept de contrat 4D. Le critère à minimiser est donc la somme de la consommation de carburant et des pénalités sur le non-respect de points de passage 4D définissant le contrat.

Consommation de carburant

À altitude et masse de l'avion constantes, la poussée est une fonction de la vitesse et de l'accélération. Par les équations (2-4) et (2-5), la consommation de $A_i \in \mathcal{A}$, donnée par (1-18), est mise sous la forme :

$$C_{t,i}(t) = c_{1,i} \left(1 + \frac{V_i(t)}{c_{2,i}} \right) \left(\alpha_{F_{T,i}} V_i(t)^2 + \frac{\beta_{F_{T,i}}}{V_i(t)^2} + m_i \frac{dV_i(t)}{dt} \right), \forall A_i \in \mathcal{A}.$$

Lors d'un trajet de durée T commençant à $t = 0$, le terme de consommation due à l'accélération,

$$c_{1,i} \left(1 + \frac{V_i(t)}{c_{2,i}} \right) \left(m_i \frac{dV_i(t)}{dt} \right),$$

engendre une consommation totale :

$$\begin{aligned} & \int_0^T c_{1,i} \left(1 + \frac{V_i(t)}{c_{2,i}} \right) \left(m_i \frac{dV_i(t)}{dt} \right) dt \\ &= m_i c_{1,i} \left(V_i(T) - V_i(0) + \frac{1}{c_{2,i}} (V_i(T)^2 - V_i(0)^2) \right) \end{aligned} \quad (2-11)$$

La vitesse à laquelle les avions volent initialement représente la préférence du bord. Il est donc raisonnable de supposer que cette vitesse sera récupérée après les manœuvres puisque celles-ci ne modifient pas leur plan de vol. Cela signifie que le terme (2-11) s'annule si l'on tient compte de l'influence des manœuvres sur le vol complet. Finalement, la fonction de consommation par unité de temps prise en compte dans la suite est définie par :

$$C_{t,i}(t) = c_{1,i} \left(1 + \frac{V_i(t)}{c_{2,i}} \right) \left(\alpha_{F_{T,i}} V_i(t)^2 + \frac{\beta_{F_{T,i}}}{V_i(t)^2} \right) \quad (2-12)$$

Dans l'aviation civile, le but étant de joindre des aéroports, la vitesse optimale des avions minimise la consommation par unité de distance C_d où

$$C_{d,i}(t) = \frac{C_{t,i}(t)}{V_i(t)}$$

Des courbes de consommation par nautique parcouru à 10 000 m d'altitude sont tracées pour quatre types d'appareils sur la figure 2.1. Les consommations ont été normalisées en les divisant par la valeur minimum de consommation. On observe nettement que la fonction de consommation est convexe et qu'elle atteint un minimum entre 450 kt et 500 kt selon les appareils.

Définition 2.2. Vitesse nominale : la vitesse nominale d'un avion stabilisé en altitude est la vitesse à laquelle sa consommation de carburant par unité de distance est minimale.

Pour simplifier les discussions, il a été supposé que les trajectoires de référence étaient parcourues à vitesse nominale. Les termes de vitesse de référence et de vitesse nominale sont donc utilisés de façon interchangeable dans la suite.

Contrat 4D

L'un des objectifs de cette étude est d'intégrer une forme de contrat 4D. L'adhésion à une trajectoire prédéterminée à chaque instant du vol semble peu réaliste sachant qu'un grand nombre de perturbations pourraient affecter les vols, y compris la nécessité de gérer un conflit. Une telle obligation pourrait aussi se révéler grandement inefficace en termes de consommation de

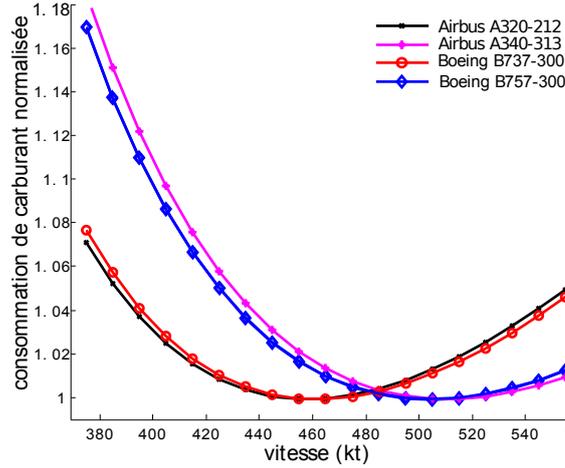


Figure 2.1 — Consommation de carburant par nautique parcouru

carburant et aurait donc peu de chance d'être acceptée par les compagnies. Le scénario retenu ici correspond plutôt à un contrat 4D discret avec marges modulables.

Le contrat 4D est donné par un ensemble réduit de points 4D. Ces points correspondent par exemple aux points et instants de passage donnés dans le plan de vol. Le contrat 4D peut donc être vu comme un ensemble de contraintes sur la position de l'aéronef à chaque instant de passage, ou encore comme un ensemble de contraintes sur l'instant de passage à chaque point de passage. Le suivi exact du contrat 4D n'étant ni réaliste ni nécessaire, ces contraintes décrivent des zones centrées sur un point 4D dont l'extension varie selon les besoins de l'ATM et de la compagnie.

Le concept du contrat 4D prévoit en outre que les organismes ATC participent au bon respect des trajectoires contractuelles. Le contrat 4D n'étant pas non plus censé entraver les possibilités des contrôleurs, seuls les points 4D devant être atteints après l'horizon de commande sont pertinents. Plus précisément, le premier point de passage 4D atteint après l'horizon de commande est pris en compte dans le problème en tâchant d'émettre des instructions de contrôle aussi favorables que possible à son respect. L'écart spatial à un point de passage est divisé selon les deux composantes longitudinale et latérale. Une marge est laissée pour l'écart longitudinal, tandis que l'écart latéral doit être nul après résolution des conflits. Ce deuxième point revient simplement à dire que les aéronefs doivent récupérer leur trajectoire en fin de manœuvre. La valeur de la marge pourra quant à elle être modulée en fonction de la distance à destination, de la densité du trafic et d'autres considérations relatives à la gestion du trafic ou aux intérêts de la compagnie.

Pour un aéronef donné, on note $(\mathbf{p}_i^{4D}, t_i^{4D})$ le point de passage 4D de A_i , et \mathbf{s}_i^{4D} et \mathbf{n}_i^{4D} deux vecteurs unitaires respectivement colinéaire et normal à la trajectoire de référence au point \mathbf{p}_i^{4D} . Les contraintes de contrat 4D sont formulées

$$\left| \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle \right| \leq \Delta_{\parallel,i}^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (2-13)$$

$$\left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{n}_i^{4D} \right\rangle = 0, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (2-14)$$

$$\left\langle \mathbf{v}_i(t_i^{4D}) \middle| \mathbf{n}_i^{4D} \right\rangle = 0, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (2-15)$$

où $\Delta_{\parallel,i}^{\max}$ est la marge longitudinale sur le respect du contrat. La contrainte (2-15) assure que le retour sur trajectoire est stable.

Il est également nécessaire que les points de passage 4D représentent une cible à atteindre lors de la construction des trajectoires sans conflit. Sans cela, il existe un risque que cette marge soit entièrement mise à profit pour réduire le coût des manœuvres, ce qui n'est pas la raison

pour laquelle elle a été ménagée. Ainsi, en plus d'être contraint par (2-13), l'écart longitudinal observé à l'instant t_i^{4D} est également pénalisé dans le critère à minimiser par un terme linéaire par morceaux :

$$z_i^{4D} = \begin{cases} \rho^+ \times \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle & \text{si } \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle \geq 0 \\ \rho^- \times \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle & \text{si } \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle < 0 \end{cases} \quad (2-16)$$

L'optimisation est sensible au choix des valeurs de ρ^+ et ρ^- : si elles sont trop grandes, tout est fait pour que le contrat 4D soit respecté et si elles sont trop faibles, celui-ci est négligé devant la consommation de carburant. Une solution intermédiaire est donnée dans l'annexe A en cherchant la trajectoire optimale d'un aéronef isolé volant en ligne droite à vitesse constante.

Finalement, \mathbf{p}_i^{4D} définit la position de destination de A_i au regard de la résolution de conflit et $[0, t_i^{4D}]$ est l'intervalle de prédiction, soit l'intervalle de temps sur lequel l'état des aéronefs est calculé. Le coût de la trajectoire est donc évalué à partir des états de A_i sur $[0, t_i^{4D}]$. Toutefois, le coût important est celui de la trajectoire liant la position initiale à la destination, quel que soit l'écart longitudinal. La quantité de carburant consommée pendant le parcours de cet écart est donc retirée du critère à minimiser. Le critère à minimiser lors de la recherche de trajectoires sans conflit est ainsi donné par :

$$Z_i = \int_0^{t_i^{4D}} (C_{t,i}(V_i(t))) dt - \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle C_{d,i} (V_i(t_i^{4D})) + z_i^{4D}, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (2-17)$$

2.1.4 Formulation en temps continu

Les spécifications données ci-dessus sont reprises dans un modèle en temps continu en insérant les contraintes de séparation et la contrainte d'état initial.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min. \sum_{A_i \in \mathcal{A}} Z_i \\ \text{sous (2-1) - (2-2), (2-6) - (2-10) et (2-13) - (2-17)} \\ (\mathbf{p}_i(0), V_i(0), \chi_i(0)) = (\mathbf{p}_i^{\text{ini}}, V_i^{\text{ini}}, \chi_i^{\text{ini}}), \forall A_i \in \mathcal{A} \\ \|\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t)\| \geq D, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t \in [0, T_C] \\ \forall A_i \in \mathcal{A} : \mathbf{p}_i^k : [0, t_i^{4D}] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ et } V_i, \chi_i, U_i, \omega_i : [0; t_i^{4D}] \rightarrow \mathbb{R}, \\ \forall A_i \in \mathcal{A} : N_i \in \mathbb{N}, \\ \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, \dots, N_i\} : (\Delta V_i^n, \Delta \chi_i^n, t_{d,i}^n, t_{f,i}^n) \in \mathbb{R}^4 \end{array} \right. \quad (2-18)$$

Aucune tentative n'a été faite pour trouver une solution analytique de (2-18), mais les travaux déjà effectués sur des modèles semblables ont indiqué que ces efforts seraient vains à moins de faire des hypothèses restrictives sur le problème. La voie suivie a plutôt été celle de la résolution numérique par le modèle non linéaire décrit dans la section suivante.

2.2 Discrétisation temporelle : le modèle TIME

Dans cette section, la résolution numérique de (2-18) est abordée par la programmation non linéaire à l'aide d'une discrétisation temporelle du modèle. Le modèle décrit ici a été développé avec l'intention de garantir la séparation sur tout l'intervalle de commande en réduisant aussi peu que possible le domaine réalisable du problème. La question de l'instabilité numérique est aussi traitée à l'aide de formulations alternatives des contraintes et de la fonction de coût.

L'intervalle de commande $[0; T_C]$ est discrétisé selon $K + 1$ instants $0 = t_0 < \dots < t_K = T_C$ tels que $t_k - t_{k-1} = h, \forall k \in \{1, \dots, K\}$. $\{t_k\}_{k=\{0, \dots, K\}}$ sont les instants de discrétisation et h la longueur du pas de temps. Un point de discrétisation t_i^{4D} supplémentaire correspondant au temps de passage du contrat 4D est ajouté pour chaque aéronef A_i . L'exposant k caractérise la valeur d'une variable à un instant t_k , *i.e.* $\mathbf{p}_i^k = \mathbf{p}_i(t_k)$.

L'objectif est de résoudre les conflits entre aéronefs par des manœuvres dont les instants de début et de fin coïncident avec des pas de temps successifs. Les manœuvres réalisées sur l'intervalle de commande ont donc une durée h et la dernière manœuvre dure $t_i^{4D} - T_C$. Il est important de souligner que cette dernière manœuvre ne correspond plus à la résolution de conflits à proprement parler puisque la séparation n'est assurée que sur l'intervalle de commande. Elle ne correspond donc pas nécessairement à une instruction de contrôle mais plutôt à une autorisation à récupérer la trajectoire prévue. Elle est en fait calculée ici pour estimer le coût engendré par la résolution de conflits, c'est pourquoi il n'est pas nécessaire de discrétiser d'avantage l'intervalle $[T_C, t_i^{4D}]$, $A_i \in \mathcal{A}$. Par ailleurs, le fait que la durée d'une manœuvre soit limitée à h n'empêche pas de grandes manœuvres puisqu'un changement de vitesse ou de cap peut aussi bien être obtenu par plusieurs manœuvres successives. Pour condenser les notations, les deux ensembles $\mathcal{T} = \{t_k\}_{k=0, \dots, K}$ et $\mathcal{T}^- = \{t_k\}_{k=0, \dots, K-1}$ sont introduits.

2.2.1 Intégration du système dynamique

Les manœuvres sont réalisées à accélération et vitesse de virage constantes, donc les fonctions U_i et ω_i , $A_i \in \mathcal{A}$ sont entièrement déterminées par les valeurs de $\{U_i^k\}_{k=0, \dots, K}$ et $\{\omega_i^k\}_{k=0, \dots, K}$. Ainsi, les variables donnant le cap, la vitesse et la position des aéronefs à chaque pas de discrétisation sont obtenues analytiquement par deux intégrations successives :

$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- :$

$$V_i^{k+1} = V_i^k + hU_i^k \quad (2-19)$$

$$\chi_i^{k+1} = \chi_i^k + h\omega_i^k \quad (2-20)$$

$$p_{x,i}^{k+1} = p_{x,i}^k + \frac{V_i^k}{\omega_i^k} \left(\sin(\chi_i^k + h\omega_i^k) - \sin(\chi_i^k) \right) + \frac{U_i^k}{(\omega_i^k)^2} \left(h\omega_i^k \sin(\chi_i^k + h\omega_i^k) + \cos(\chi_i^k + h\omega_i^k) - \cos(\chi_i^k) \right) \quad (2-21)$$

$$p_{y,i}^{k+1} = p_{y,i}^k + \frac{V_i^k}{\omega_i^k} \left(-\cos(\chi_i^k + h\omega_i^k) + \cos(\chi_i^k) \right) + \frac{U_i^k}{(\omega_i^k)^2} \left(-h\omega_i^k \cos(\chi_i^k + h\omega_i^k) + \sin(\chi_i^k + h\omega_i^k) - \sin(\chi_i^k) \right) \quad (2-22)$$

Dans la mesure où la longueur des pas de temps est choisie suffisamment petite, il est possible de simplifier les équations (2-21) et (2-22) en réalisant leur approximation par un développement limité d'ordre 2 par rapport à ωh .

$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- :$

$$p_{x,i}^{k+1} \approx p_{x,i}^k + hV_i^k \cos \chi_i^k + \frac{h^2}{2} \left(U_i^k \cos \chi_i^k - V_i^k \omega_i^k \sin \chi_i^k \right),$$

$$p_{y,i}^{k+1} \approx p_{y,i}^k + hV_i^k \sin \chi_i^k + \frac{h^2}{2} \left(U_i^k \sin \chi_i^k + V_i^k \omega_i^k \cos \chi_i^k \right)$$

On se ramène alors à un système dynamique linéaire en fonction des coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération des aéronefs :

$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- :$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_i^{k+1} \\ \mathbf{v}_i^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & h\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i^k \\ \mathbf{v}_i^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{h^2}{2}\mathbf{I}_2 \\ h\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i^k \\ \mathbf{a}_i^k \end{pmatrix} \quad (2-23)$$

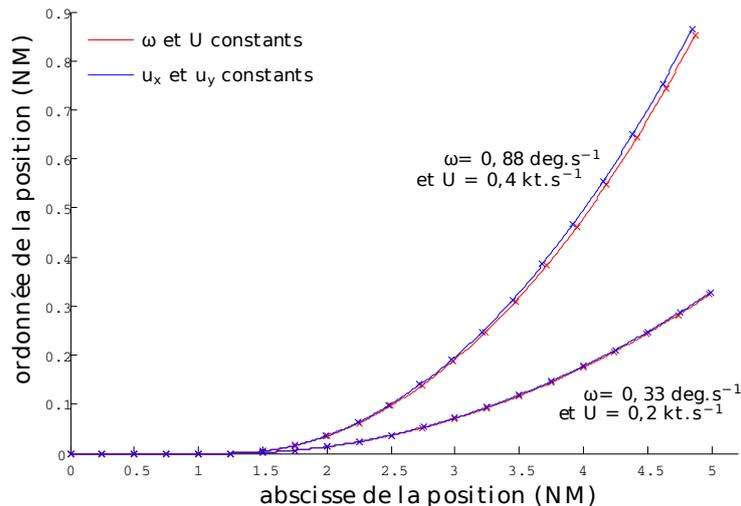


Figure 2.2 — Approximation par un vecteur accélération constant

où l'on retrouve les valeurs de V , χ , U et ω par

$$\mathbf{v}_i^k = \begin{pmatrix} V_i^k \cos(\chi_i^k) \\ V_i^k \sin(\chi_i^k) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_i^k = \begin{pmatrix} U_i^k \cos(\chi_i^k) - V_i^k \omega_i^k \sin(\chi_i^k) \\ U_i^k \sin(\chi_i^k) + V_i^k \omega_i^k \cos(\chi_i^k) \end{pmatrix}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}$$

Cette approximation revient à traiter de façon équivalente un mouvement à accélération et vitesse de virage constantes et un mouvement à vecteur accélération constant. Elle conserve la valeur du vecteur vitesse à chaque pas de temps mais elle induit une erreur sur la position. Les trajectoires correspondant aux deux types de manœuvres ont été tracées sur la figure 2.2 pour une manœuvre de durée $h = 30$ s, et pour des valeurs différentes de l'accélération et de la vitesse de virage. Les courbes du haut représentent une manœuvre à vitesse de virage et accélération maximales et celles du bas une manœuvre plus commune où un changement de cap de 10° est effectué. La manœuvre maximale fait apparaître une erreur sur la position inférieure à $0,03$ NM, tandis que les courbes sont presque confondues pour la manœuvre plus légère.

Outre la simplification des contraintes, l'approximation permet de traiter de façon plus homogène l'ensemble des modèles discrétisés en temps. Elle est par ailleurs nécessaire à la formulation de la contrainte de séparation décrite dans la section 2.2.3. La valeur du pas de temps h doit représenter un compromis entre le nombre d'instantants de discrétisation auxquels il donne lieu et les erreurs qu'il engendre au moment du passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes. Étant données les faibles erreurs apparaissant sur la figure 2.2, la valeur $h = 30$ s est conservée dans la suite de cette partie.

Le mouvement des avions sur l'intervalle $[T_C; t_i^{AD}]$, $A_i \in \mathcal{A}$, est obtenu par les mêmes contraintes mais en remplaçant h par $t_i^{AD} - T_C$. Cette remarque est aussi valable pour les bornes données dans la section suivante.

2.2.2 Bornes sur la vitesse et l'accélération

Les contraintes sur la vitesse sont vérifiées à chaque pas de temps, soit

$$\left(V_i^{\min}\right)^2 \leq \left\|\mathbf{v}_i^k\right\|^2 \leq \left(V_i^{\max}\right)^2, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T} \quad (2-24)$$

Par ces contraintes, il est possible que la borne inférieure de la vitesse soit violée à l'intérieur d'un intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, mais cette approximation est jugée acceptable du fait que la vitesse minimum définie par l'enveloppe de vol des avions est bien inférieure à la valeur de confort V^{\min} .

Les manœuvres étant réalisées à accélération constante, les bornes sur U et ω données par (2-7) sont équivalentes à

$$\left\| \mathbf{v}_i^{k+1} \right\| - \left\| \mathbf{v}_i^k \right\| \leq hU^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- \quad (2-25)$$

$$\left| \widehat{\left(\mathbf{v}_i^k, \mathbf{v}_i^{k+1} \right)} \right| \leq h\omega^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- \quad (2-26)$$

Le calcul de l'angle orienté dans (2-26) est explicité par l'expression équivalente

$$\left\langle \mathbf{v}_i^k \middle| \mathbf{v}_i^{k+1} \right\rangle \geq \left\| \mathbf{v}_i^k \right\| \left\| \mathbf{v}_i^{k+1} \right\| \cos(h\omega^{\max}), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- \quad (2-27)$$

Les contraintes (2-25) et (2-27) ont le défaut de faire nécessairement intervenir la fonction racine au moment du calcul de la norme des vecteurs. Cette fonction n'étant pas dérivable en 0, l'astuce généralement employée est d'ajouter un terme négligeable sous la racine pour éviter les instabilités numériques ou, ce qui est préférable, de borner les termes sous la racine lorsque cela est possible. Ici, rien n'indique que le terme $\left\| \mathbf{v}_i^{k+1} \right\| - \left\| \mathbf{v}_i^k \right\|$ n'est pas nul. Pour éviter d'ajouter un terme négligeable dont l'efficacité n'est pas garantie, les contraintes (2-24)-(2-26) sont remplacées par un ensemble de contraintes équivalentes.

Propriété 2.1

Dans la mesure où $h\omega^{\max} \leq \frac{\pi}{2}$, les contraintes (2-24), (2-25) et (2-27) sont respectées si et seulement si $\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}$, il existe \underline{v}_i^k et \bar{v}_i^k tels que :

$$\begin{aligned} (\underline{v}_i^k)^2 &\leq \left\| \mathbf{v}_i^k \right\|^2 \leq (\bar{v}_i^k)^2, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{T} \\ V_i^{\min} &\leq \underline{v}_i^k \leq V_i^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{T} \\ V_i^{\min} &\leq \bar{v}_i^k \leq V_i^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (2-28)$$

et

$$\underline{v}_i^{k+1} - \bar{v}_i^k \leq hU^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{T}^- \quad (2-29)$$

$$\bar{v}_i^{k+1} - \underline{v}_i^k \geq -hU^{\max}, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{T}^- \quad (2-30)$$

$$\left\langle \mathbf{v}_i^k \middle| \mathbf{v}_i^{k+1} \right\rangle \geq \bar{v}_i^k \underline{v}_i^{k+1} \cos(h\omega^{\max}), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{T}^- \quad (2-31)$$

Démonstration : Clairement, en posant $\underline{v}_i^k = \left\| \mathbf{v}_i^k \right\|$ et $\bar{v}_i^k = \left\| \mathbf{v}_i^k \right\|$ pour tout $A_i \in \mathcal{A}$ et $t_k \in \mathcal{T}$, on a

$$((2-24) \wedge (2-25) \wedge (2-27)) \implies ((2-29) \wedge (2-30) \wedge (2-31)).$$

Réciproquement, si de telles variables \underline{v}_i^k et \bar{v}_i^k existent, les inégalités (2-28) entraînent (2-24) et elles permettent en plus d'obtenir des bornes inférieures, \underline{v}_i^k , et supérieures, \bar{v}_i^k , de la vitesse à chaque instant. On a donc $\underline{v}_i^{k+1} - \bar{v}_i^k \leq \left\| \mathbf{v}_i^{k+1} \right\| - \left\| \mathbf{v}_i^k \right\|$ et $\bar{v}_i^{k+1} - \underline{v}_i^k \geq \left\| \mathbf{v}_i^{k+1} \right\| - \left\| \mathbf{v}_i^k \right\|$, pour tout $A_i \in \mathcal{A}$ et $t_k \in \mathcal{T}$ d'où

$$((2-29) \wedge (2-30)) \implies (2-25).$$

Finalement, sachant $h\omega^{\max} \leq \frac{\pi}{2}$, puisque $\bar{v}_i^k \geq \left\| \mathbf{v}_i^k \right\|$ et $\bar{v}_i^{k+1} \geq \left\| \mathbf{v}_i^{k+1} \right\|$, pour tout $A_i \in \mathcal{A}$ et $t_k \in \mathcal{T}$,

$$(2-31) \implies (2-26). \quad \blacksquare$$

Par la propriété 2.1, on dispose de contraintes quadratiques bornant les états et les commandes.

2.2.3 Contraintes de séparation valides sur tout l'intervalle de commande

Les contraintes de séparation n'étant pas convexes par rapport au temps, il n'est pas suffisant de les vérifier à chaque pas de temps pour qu'elles soient respectées sur tout l'intervalle de commande. Ces contraintes étant par ailleurs en dimension infinie, il n'est pas non plus envisageable de les intégrer telles quelles dans le modèle. Il est donc nécessaire de les remplacer par une approximation constituée d'un nombre fini de contraintes.

Définition 2.3. Discrétisation suffisante : soit $n, m, p, q \in \mathbb{N}$, \mathcal{I} un intervalle de \mathbb{R} et \mathcal{K} un ensemble fini d'éléments de \mathbb{N} . On pose :

- $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n : \forall t \in \mathcal{I}, h(\mathbf{x}(t), t) = 0\}$
- $g : \mathbb{R}^n \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathcal{I}$, $C(t) : \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t) \leq \mathbf{b}(t)$
- $\forall k \in \mathcal{K} : t_k \in \mathcal{I}$, $\tilde{g}_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{b}_k \in \mathbb{R}$ et $\tilde{C}_k : \tilde{g}_k(\mathbf{x}(t_k)) \leq \tilde{b}_k$

Les contraintes $\{\tilde{C}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ constituent une discrétisation suffisante des contraintes $\{C(t)\}_{t \in \mathcal{I}}$ sur \mathcal{X} , si et seulement si $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$[\tilde{g}_k(\mathbf{x}(t_k)) \leq \tilde{b}_k, \forall k \in \mathcal{K}] \Rightarrow [g(\mathbf{x}(t), t) \leq b(t), \forall t \in \mathcal{I}]$$

On dit aussi que l'ensemble de contraintes $\{\tilde{C}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ implique l'ensemble de contraintes $\{C(t)\}_{t \in \mathcal{I}}$. Si par ailleurs $\{C(t)\}_{t \in \mathcal{I}}$ implique $\{\tilde{C}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$, on dit que les deux ensembles de contraintes sont équivalents.

En pratique, les contraintes $h(\mathbf{x}(t), t) = 0$ se réfèrent au système dynamique (2-23) formulé en temps continu. La discrétisation par des contraintes suffisantes a pour effet de réduire le domaine réalisable du problème. Une discrétisation est d'autant meilleure qu'elle réduit peu le domaine réalisable, l'idéal étant évidemment de déterminer un ensemble fini équivalent de contraintes. Lorsque cela n'est pas possible, il est important d'arriver à caractériser la qualité de la discrétisation.

Définition 2.4. Facteur de qualité : soit $\{\tilde{C}_k : \tilde{g}_k(\mathbf{x}(t_k)) \leq \tilde{b}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ une discrétisation suffisante d'un ensemble des contraintes $\{C(t) : g(\mathbf{x}(t), t) \leq b(t)\}_{t \in \mathcal{I}}$ sur un ensemble \mathcal{X} . Supposons en outre que $\forall t \in \mathcal{I}$, $g(\mathbf{0}, t) = 0$ et $b(t) \neq 0$. On pose :

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \forall k \in \mathcal{K}, \tilde{g}_k(\mathbf{x}(t_k)) \leq \tilde{b}_k \text{ et } \exists k \in \mathcal{K}, \tilde{g}_k(\mathbf{x}(t_k)) = \tilde{b}_k\}$$

Le facteur de qualité de la discrétisation est alors défini par

$$Q = \max_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}} \left(\min_{t \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{b(t) - g(\mathbf{x}(t), t)}{|b(t)|} \right\} \right)$$

La grandeur $\min_{t \in \mathcal{I}} \left\{ \frac{b(t) - g(\mathbf{x}(t), t)}{|b(t)|} \right\}$ est en quelque sorte une mesure de la plus petite modification de la fonction \mathbf{x} pouvant l'amener à satisfaire au moins l'une des contraintes $\{C(t)\}_{t \in \mathcal{I}}$ à égalité. Pour tout élément de $\tilde{\mathcal{X}}$, cette plus petite modification est nulle vis-à-vis des $\{\tilde{C}_k\}_{k \in \mathcal{K}}$. C'est pourquoi Q permet de quantifier la diminution du domaine réalisable lors de l'approximation des contraintes. Par exemple, si l'approximation est réalisée par un ensemble de contraintes équivalentes, il est facile de montrer que le facteur de qualité est nul.

L'objectif de la présente section est de construire une discrétisation suffisante des contraintes de séparation par un nombre fini, si possible petit, de contraintes. Le facteur de qualité de cette discrétisation est en outre particulièrement important pour les contraintes de séparation, puisque en cas de conflit certaines contraintes de la discrétisation sont nécessairement actives à l'optimalité. Le facteur de qualité mesure donc aussi la sous-optimalité induite par la discrétisation.

Propriété 2.2

¹ Soit $\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^2$. On définit les deux fonctions $\mathbf{p} : [0; h] \rightarrow \mathbb{R}^2$, et $\tilde{\mathbf{p}} : [0; h] \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{u}_0 \frac{t^2}{2} \quad -73-$$

$$\tilde{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}_0 + \left(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0 \frac{h}{2} \right) t$$

Alors, en notant $\tau = -\frac{\langle \mathbf{v}_0 | \mathbf{p}_0 \rangle}{\|\mathbf{v}_0\|^2}$,

$$a) \|\tilde{\mathbf{p}}\| \text{ atteint son minimum à l'instant } \tilde{\tau} = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leq 0 \\ h & \text{si } \tau \geq h \\ \tau & \text{si } 0 \leq \tau \leq h \end{cases}$$

$$b) \|\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\tau})\| - \frac{h^2}{8} \|\mathbf{u}_0\| \leq \|\mathbf{p}(t)\| \leq \|\tilde{\mathbf{p}}(t)\| + \frac{h^2}{8} \|\mathbf{u}_0\|, \forall t \in [0, h]$$

$$c) \tilde{\mathbf{p}}(h) = \mathbf{p}(h), \tilde{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{p}(0) .$$

Démonstration : Le résultat a) s'obtient en dérivant $\|\tilde{\mathbf{p}}\|^2$ et en observant qu'il s'agit d'une fonction convexe.

Pour montrer b), on étudie

$$\Delta p(t) = \|\mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\| = \frac{1}{2}t(h-t) \|\mathbf{u}_0\|, \forall t \in [0; h]$$

Δp atteint son maximum pour $t = \frac{h}{2}$ et $\Delta p(\frac{h}{2}) = \frac{h^2}{8} \|\mathbf{u}_0\|$. En écrivant ensuite

$$\|\mathbf{p}(t)\| = \|\tilde{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\| \leq \|\tilde{\mathbf{p}}(t)\| + \|\mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\|, \forall t$$

$$\|\tilde{\mathbf{p}}(t)\| = \|\mathbf{p}(t) + \tilde{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{p}(t)\| \leq \|\mathbf{p}(t)\| + \|\mathbf{p}(t) - \tilde{\mathbf{p}}(t)\|, \forall t,$$

et en utilisant la valeur maximale de Δp , on déduit b).

Le résultat c) s'obtient en substituant t par 0 et par h dans les expressions de $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ et de $\mathbf{p}(t)$. ■

On définit alors les variables suivantes pour tout $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ et tout $k \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} \tau_{i,j}^k &= -\frac{\langle \mathbf{v}_j^k - \mathbf{v}_i^k | \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k \rangle}{\|\mathbf{v}_j^k - \mathbf{v}_i^k\|^2} \\ \tilde{\tau}_{i,j}^k &= \max(0, \min(h, \tau_{i,j}^k)) \\ \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^k &= \mathbf{v}_j^k - \mathbf{v}_i^k + \frac{h}{2} (\mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k) \end{aligned} \tag{2-32}$$

D'après l'inégalité de gauche de la propriété 2.2b), $\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-$,

$$\|\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t)\| \geq \|\mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k + \tilde{\tau}_{i,j}^k \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^k\| - \frac{h^2}{8} \|\mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k\|, \forall t \in [t_k, t_{k+1}]$$

Par conséquent, les contraintes

$$\|\mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k + \tilde{\tau}_{i,j}^k \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^k\|^2 \geq \left(D + \frac{h^2}{8} \|\mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k\| \right)^2, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- \tag{2-33}$$

garantissent la séparation entre les aéronefs en conflit pour tout $t \in [0; T_C]$. Ce sont donc des discrétisations suffisantes des contraintes de séparation intervenant dans (2-18).

Remarque 2.2. Étant donnée la propriété 2.2 c), le membre de gauche de la contrainte (2-33) correspond à $\|\mathbf{p}_j^{k+1} - \mathbf{p}_i^{k+1}\|$ lorsque $\tilde{\tau}_{i,j}^k = h$.

Dérivabilité des fonctions intervenant dans les contraintes

Les contraintes (2-32) sont problématiques du fait que la fonction $\tau \mapsto \max(0, \min(h, \tau))$ n'est pas continûment dérivable en 0 et en h . Aucune information ne permet en outre de borner les variables $\tau_{i,j}^k$ avant l'optimisation, et l'ajout d'une constante ne changerait pas grand-chose

au problème. Plusieurs fonctions dérivables alternatives à (2-32) ont été développées. Deux ensembles de contraintes faisant intervenir des fonctions dérivables sont décrites ici, sachant qu'elles pourraient s'avérer avantageuses.

Dans le premier ensemble de contraintes, la séparation est d'abord vérifiée à chaque pas de temps, c'est-à-dire

$$\left\| \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k \right\| \geq D, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}$$

La vérification entre deux pas de temps successifs t_k et t_{k+1} n'est nécessaire que si $0 \leq \tau_{i,j}^k \leq h$, ce qui se traduit par l'inclusion des contraintes disjonctives :

$$\left(\left\| \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k + \tau_{i,j}^k \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^k \right\|^2 - \left(D + \frac{h^2}{8} \left\| \mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k \right\| \right)^2 \geq 0 \right) \vee \left(-\tau_{i,j}^k \geq 0 \right) \vee \left(\tau_{i,j}^k - h \geq 0 \right).$$

En appliquant la méthode décrite dans l'état de l'art par les équations (1-16), la disjonction est exprimée à l'aide de fonctions différentiables par :

$$\begin{aligned} \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- : \\ \lambda_{i,j}^{k,1} \left(\left\| \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k + \tau_{i,j}^k \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^k \right\|^2 - \left(D + \frac{h^2}{8} \left\| \mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k \right\| \right)^2 \right) + \lambda_{i,j}^{k,2} \left(-\tau_{i,j}^k \right) + \lambda_{i,j}^{k,3} \left(\tau_{i,j}^k - h \right) \geq 0 \\ \lambda_{i,j}^{k,1} + \lambda_{i,j}^{k,2} + \lambda_{i,j}^{k,3} = 1 \\ \lambda_{i,j}^{k,1}, \lambda_{i,j}^{k,2}, \lambda_{i,j}^{k,3} \geq 0 \end{aligned} \tag{2-34}$$

On ajoute ensuite un terme quadratique

$$\alpha_\lambda \sum_{i,j,k} \left(\lambda_{i,j}^{k,1} \right)^2 + \left(\lambda_{i,j}^{k,2} \right)^2 + \left(\lambda_{i,j}^{k,3} \right)^2$$

à la fonction objectif pour assurer que le triplet $(\lambda_{i,j}^{k,1}, \lambda_{i,j}^{k,2}, \lambda_{i,j}^{k,3})$ soit unique, ce qui accélère généralement l'algorithme de résolution. Le coefficient de pondération α_λ est choisi suffisamment petit pour ne pas perturber la fonction de coût.

Une seconde alternative consiste à approcher la fonction $\tau \mapsto \max(0, \min(h, \tau))$ par

$$\tilde{f}: \tau \mapsto \frac{h}{1 + \exp\left(\frac{4}{h}(-\tau + \frac{h}{2})\right)}, \tag{2-35}$$

dont les paramètres ont été ajustés de telle sorte qu'elle ait même valeur et même pente que la fonction approchée au point milieu $\frac{h}{2}$. L'allure des courbes des deux fonctions est tracée sur la figure 2.3 avec $h = 30$ s. L'approximation pourrait être rendue plus précise au niveau de $\tau = 0$ et $\tau = h$ au prix d'un temps de calcul plus grand.

Qualité de la discrétisation

La qualité de la discrétisation réalisée à l'aide de (2-33) est estimée en cherchant un majorant de son facteur de qualité.

La définition du facteur de qualité et l'inégalité de droite de la propriété 2.2 b) appliquée à $t = \tilde{\tau}_{i,j}^k$ entraînent :

$$\begin{aligned} Q + 1 &\leq \max_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}} \left[\frac{1}{D} \left\| \mathbf{p}_j(\tilde{\tau}_{i,j}^k) - \mathbf{p}_i(\tilde{\tau}_{i,j}^k) \right\| \right] \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}} \left[\frac{1}{D} \left(\left\| \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k + \tilde{\tau}_{i,j}^k \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^k \right\| + \frac{h^2}{8} \left\| \mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k \right\| \right) \right] \end{aligned}$$

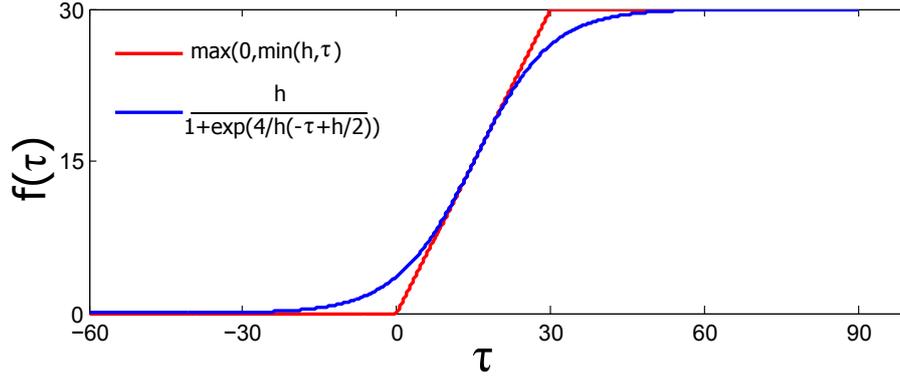


Figure 2.3 — Approximation du calcul de τ par une fonction dérivable

$\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ est caractérisé par le fait que (2-33) est active, soit :

$$\left\| \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k + \tilde{\tau}_{i,j}^k \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^k \right\| = D + \frac{h^2}{8} \left\| \mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k \right\|,$$

d'où

$$Q + 1 \leq 1 + \frac{h^2}{4D} \left\| \mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k \right\|.$$

Pour $h = 30$ s, on déduit des bornes sur l'accélération que $\frac{h^2}{4} \left\| \mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k \right\| < 0,5$ NM, d'où

$$Q < 0,1$$

On note par ailleurs que, si l'accélération des avions est nulle aux abords du conflit, les contraintes (2-33) donnent une condition nécessaire et suffisante de résolution des conflits.

Cette valeur de Q est à comparer avec le facteur de qualité des contraintes

$$\left\| \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k \right\| \geq D + hV^{\max}, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T},$$

utilisées dans [96]. Pour deux avions A_i et A_j en conflit sur $[0; T_C]$, il est possible de construire des trajectoires telles que la distance minimum est atteinte à un instant $t_k \in \mathcal{T}$. Dans ce cas, la contrainte de séparation ci-dessus est active à l'instant t_k et

$$\left\| \mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t) \right\| \geq D + hV^{\max}, \forall t \in [t_k; t_{k+1}]$$

Par conséquent, une borne inférieure de Q est donnée par $\frac{hV^{\max}}{D} \approx 0,8$ pour $h = 30$ s.

2.2.4 Résumé du modèle TIME

Pour ne pas complexifier inutilement le modèle, la consommation de carburant est approchée en supposant que la vitesse est constante sur chaque intervalle discrétisé $[t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathcal{T}$ et qu'elle est égale à sa moyenne sur l'intervalle, soit

$$\frac{1}{2} \left(\left\| v_i^k \right\| + \left\| v_i^{k+1} \right\| \right), \forall A_i \in \mathcal{A}$$

si les changements de vitesse se font à accélération constante. La consommation du fuel totalisée par l'ensemble des avions sur l'intervalle de prédiction vaut donc

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left(t_i^{4D} - T_C \right) C_t \left(\frac{1}{2} \left(\left\| v_i^K \right\| + \left\| v_i^{4D} \right\| \right) \right) + h \times \sum_{k=0}^K C_t \left(\frac{1}{2} \left(\left\| v_i^k \right\| + \left\| v_i^{k+1} \right\| \right) \right)$$

Par la technique développée dans la sous-section 2.2.2, on parvient également à donner une expression de la consommation plus stable numériquement. En s'appuyant sur le fait que la fonction $V \mapsto C_t(V)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[V^{\min}, V^{\max}]$, il vient qu'il est équivalent de minimiser le critère

$$z_{\text{conso}} = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} (t_i^{4D} - T_C) C_t \left(\frac{1}{2} (\bar{v}_i^K + \bar{v}_i^{4D}) \right) + h \times \sum_{k=0}^K C_t \left(\frac{1}{2} (\bar{v}_i^k + \bar{v}_i^{k+1}) \right) \quad (2-36)$$

Les contraintes dues au contrat 4D sont inchangées par rapport à la spécification du problème, (2-13)-(2-15) sont donc directement incluses dans le modèle. Pour le calcul des pénalités d'écart z_i^{4D} , $A_i \in \mathcal{A}$, la disjonction apparaissant dans (2-16) est évitée en introduisant les couples de variables $\Delta_{\parallel,i}^+ \geq 0$ et $\Delta_{\parallel,i}^- \leq 0$ telles que

$$\Delta_{\parallel,i}^- + \Delta_{\parallel,i}^+ = \left\langle \mathbf{p}_i^{4D} - \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (2-37)$$

Sachant que $\rho^- < 0$ et $\rho^+ > 0$ selon les calculs de l'annexe A, la minimisation du terme

$$z_i^{4D} = \left(\rho^+ \Delta_{\parallel,i}^+ + \rho^- \Delta_{\parallel,i}^- \right) \quad (2-38)$$

entraîne mécaniquement que

$$\begin{cases} \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle = \Delta_{\parallel,i}^- & \text{si } \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle \leq 0 \\ \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle = \Delta_{\parallel,i}^+ & \text{si } \left\langle \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) - \mathbf{p}_i^{4D} \middle| \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle \geq 0 \end{cases}$$

En incluant finalement la consommation de carburant sur le parcours de l'écart longitudinal et les contraintes d'état initial, le modèle de programmation, nommé **TIME** en référence à la discrétisation temporelle, est résumé par

$$\text{TIME} = \begin{cases} \min z_{\text{conso}} + \sum_{A_i \in \mathcal{A}} z_i^{4D} - (\Delta_{\parallel,i}^+ + \Delta_{\parallel,i}^-) \times C_d \left(\bar{v}_i^{4D} \right) \\ \text{sous (2-23), (2-28) - (2-33), (2-36) - (2-38) et (2-13) - (2-15)} \\ (\mathbf{p}_i^0, \mathbf{v}_i^0) = (\mathbf{p}_i^{\text{ini}}, \mathbf{v}_i^{\text{ini}}), \forall A_i \in \mathcal{A} \\ \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T} : \mathbf{p}_i^k, \mathbf{v}_i^k, \mathbf{u}_i^k \in \mathbb{R}^2, \\ \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T} : \tilde{\mathbf{v}}_{i,j}^k \in \mathbb{R}^2, \tau_{i,j}^k \in \mathbb{R}, t_k \leq \tilde{\tau}_{i,j}^k \leq t_{k+1} \\ \forall A_i \in \mathcal{A} : \Delta_{\parallel,i}^+ \geq 0, \Delta_{\parallel,i}^- \leq 0 \end{cases} \quad (2-39)$$

Dans la section suivante, le modèle (2-39) est approché par un MILP dans le but de fournir une solution initiale réalisable aussi bonne que possible. La démarche s'appuie sur le fait que des algorithmes de programmation linéaire mixte convergent vers la solution optimale.

2.3 Linéarisation de TIME pour l'initialisation de sa résolution

L'objectif, en linéarisant **TIME**, est de produire un modèle dont toute solution réalisable satisfait aussi les contraintes de (2-39) et dont le critère à minimiser est proche de celui de (2-39).

La majorité des techniques de linéarisation appliquées dans cette section ont déjà été vues dans la section 1.2.5 de l'état de l'art, et certaines contraintes sont directement reprises de (1-39). Le modèle développé ici se distingue toutefois par les bornes sur l'accélération, la contrainte de séparation et la fonction de coût. La formulation du problème est également améliorée en explicitant les valeurs des constantes *grand M* intervenant dans les contraintes disjonctives et en insérant des coupes valides.

Pour simplifier la présentation de certains calculs, il est supposé dans le reste de la thèse que la trajectoire de référence des aéronefs suit un segment de droite. Cette hypothèse n'est toutefois pas nécessaire aux modélisations développées, et les résultats pourraient être étendus pour traiter des trajectoires de référence plus complexes.

Notons d'abord que, parmi les contraintes de (2-39), le système dynamique (2-23), les bornes sur l'accélération (2-30)-(2-29) et les contraintes de contrat 4D (2-13)-(2-15) sont déjà linéaires. Celles-ci sont donc incluses telles quelles dans le modèle.

Pour le formalisme de la linéarisation des autres contraintes, les définitions (2.3) et (2.4) sont adaptées.

Définition 2.5. Approximation suffisante : soit $n_x, n_y, m_x, m_y, N \in \mathbb{N}$, on pose :

- $\mathbf{h}_x : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{m_x}$ et $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathbf{h}_x(\mathbf{x}) = 0\}$
- $\mathbf{h}_y : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{m_y}$ et $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y} : \mathbf{h}_y(\mathbf{y}) = 0\}$
- $g : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $C : g(\mathbf{x}) \leq b$
- $\forall n \in \{1, \dots, N\} : \tilde{g}_n : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{b}_n \in \mathbb{R}$ et $\tilde{C}_n : \tilde{g}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{b}_n$

Les contraintes $\{\tilde{C}_n\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$ constituent une approximation suffisante de la contrainte C sur \mathcal{X} et \mathcal{Y} , si et seulement si $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$

$$[\tilde{g}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{b}_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}] \Rightarrow [g(\mathbf{x}) \leq b]$$

Dans cette section, la contrainte C est la contrainte à linéariser et $\{\tilde{C}_n\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$ est l'ensemble de N contraintes linéaires correspondantes. Les variables \mathbf{y} sont ajoutées pour permettre la linéarisation et peuvent éventuellement être binaires, ce qui peut se spécifier par une contrainte du type $h_y(y) = y(y - 1) = 0$. Les contraintes $\mathbf{h}_x(\mathbf{x}) = 0$ permettent notamment de spécifier le système dynamique. Tout comme pour la discrétisation, on cherche à caractériser la qualité de l'approximation.

Définition 2.6. Facteur de qualité : soit $\tilde{C}_n : \tilde{g}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{b}_n$ une approximation suffisante d'une contrainte $C : g(\mathbf{x}) \leq b$ sur deux ensembles \mathcal{X} et \mathcal{Y} . Supposons en outre que $g(\mathbf{0}) = 0$ et $b \neq 0$. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, on définit

$$\tilde{\mathcal{Y}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \forall n \in \{1, \dots, N\}, g_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{b}_n\}$$

Soit ensuite

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \tilde{\mathcal{Y}}(\mathbf{x}) \neq \emptyset \text{ et } \exists n \in \{1, \dots, N\}, \forall \mathbf{y} \in \tilde{\mathcal{Y}}(\mathbf{x}), g_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{b}_n\}$$

Le facteur de qualité de l'approximation est alors défini par

$$Q = \max_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathcal{X}}} \left\{ \frac{b - g(\mathbf{x})}{|b|} \right\}$$

En reprenant la terminologie introduite, le but de cette section est de déterminer une approximation linéaire des contraintes de (2-39) dont le facteur de qualité soit aussi proche de zéro que possible.

2.3.1 Bornes sur la vitesse et l'accélération

Les bornes sur la vitesse sont linéarisées par les équations (1-23) et (1-35)-(1-36), décrites pages 23 et 25, en approchant respectivement la borne inférieure et la borne supérieure par un ensemble de tangentes et de cordes. Du point de vue opérationnel comme du point de vue de la minimisation du critère, il semble peu avantageux de suivre un cap très écarté du cap initialement prédit. Il est donc justifié, pour réduire le nombre de contraintes et de variables binaires ϵ , de

limiter a priori le changement de cap à $\pm\chi^{\max}$. Cette borne est obtenue en insérant les contraintes linéaires

$$\langle \mathbf{v}_i^k | \mathbf{v}_i^{\text{ref}} \rangle \geq \bar{v}_i^k \|\mathbf{v}_i^{\text{ref}}\| \cos(\chi^{\max}), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T} \quad (2-40)$$

où \bar{v}_i^k approche la valeur de $\|\mathbf{v}_i^k\|$ grâce aux équations (2-41) et (2-44) ci-dessous. Il n'est par conséquent nécessaire de contraindre la vitesse d'un aéronef $A_i \in \mathcal{A}$ qu'entre les angles $\chi_i^{\text{ref}} - \chi^{\max}$ et $\chi_i^{\text{ref}} + \chi^{\max}$, où χ_i^{ref} est le cap prévu de A_i . Soit N_v , le nombre de tangentes ou de cordes intervenant dans les contraintes sur la vitesse, et $\Theta_v = \{-(1 - \frac{2n-1}{N_v})\chi^{\max}\}_{n=1, \dots, N_v}$. Après introduction des variables \underline{v} et \bar{v} , permettant d'accéder à la norme de la vitesse pour les raisons vues dans la section 2.2.2, les bornes s'écrivent :

$$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \forall \theta \in \Theta_v :$$

$$\langle \mathbf{v}_i^k | \mathbf{e}(\chi_i^{\text{ref}} + \theta) \rangle \leq \bar{v}_i^k \cos\left(\frac{\chi^{\max}}{N_v}\right), \quad (2-41)$$

$$\langle \mathbf{v}_i^k | \mathbf{e}(\chi_i^{\text{ref}} + \theta) \rangle \geq \underline{v}_i^k - M_{v,i}^\theta \epsilon_i^{k\theta}, \quad (2-42)$$

$$\sum_{\theta \in \Theta_v} \epsilon_i^{k\theta} \leq N_v - 1, \quad (2-43)$$

$$\epsilon_i^{k\theta} \in \{0, 1\}, V_i^{\min} \leq \underline{v}_i^k \leq V_i^{\max}, V_i^{\min} \leq \bar{v}_i^k \leq V_i^{\max} \quad (2-44)$$

Propriété 2.3

Soit $A_i \in \mathcal{A}$, $\chi^{\max} \in [-\pi, \pi]$ tel que $2\chi^{\max} \leq \frac{\pi}{2}$, et \mathcal{V} un ensemble défini par

$$\mathcal{V} = \{(\mathbf{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : (\underline{v}, \|\mathbf{v}\|) \in [V_i^{\min}; V_i^{\max}]^2, \text{azm}(\mathbf{v}) \in [\chi_i^{\text{ref}} - \chi^{\max}; \chi_i^{\text{ref}} + \chi^{\max}]\}.$$

Soit $\theta \in \Theta_v$, le minimum, noté $M_{v,i}^\theta$, de l'ensemble

$$\{M \in \mathbb{R} : \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}(\chi_i^{\text{ref}} + \theta) \rangle \geq \underline{v} - M, \forall (\mathbf{v}, \underline{v}) \in \mathcal{V}\},$$

est donné par :

$$M_{v,i}^\theta = V_i^{\max} - V_i^{\min} \cos(\chi^{\max} + |\theta|) \quad (2-45)$$

Démonstration : On cherche $M_{v,i}^\theta = \max\{\underline{v} - \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}(\chi_i^{\text{ref}} + \theta) \rangle : (\mathbf{v}, \underline{v}) \in \mathcal{V}\}$.

L'hypothèse $2\chi^{\max} \leq \frac{\pi}{2}$ permet d'affirmer que $\langle \mathbf{v} | \mathbf{e}(\chi_i^{\text{ref}} + \theta) \rangle \geq 0$, d'où

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}(\chi_i^{\text{ref}} + \theta) \rangle &= \|\mathbf{v}\| \cos(\text{azm}(\mathbf{v}) - \chi_i^{\text{ref}} - \theta) \\ &\geq V_i^{\min} \max(\cos(\chi^{\max} - \theta), \cos(-\chi^{\max} - \theta)) \end{aligned}$$

et cette borne est atteinte pour $\|\mathbf{v}\| = V_i^{\min}$ et $\text{azm}(\mathbf{v}) = \chi_i^{\text{ref}} \pm \chi^{\max}$. Sachant en outre que $\max\{\underline{v} : (\mathbf{v}, \underline{v}) \in \mathcal{V}\} = V_i^{\max}$ et $\max(\cos(\chi^{\max} - \theta), \cos(-\chi^{\max} - \theta)) = \cos(\chi^{\max} + |\theta|)$, $M_{v,i}^\theta$ est bien déterminé par (2-45). ■

On déduit de la propriété 2.3 que les valeurs des constantes $M_{v,i}^\theta$ induisant la formulation la plus resserrée des contraintes (2-42)-(2-44) sont données par l'équation (2-45).

Le facteur de qualité de l'ensemble de contraintes (2-41)-(2-44), vu comme une approximation suffisante des contraintes non linéaires associées (2-28), vaut $1 - \cos\left(\frac{\chi^{\max}}{N_v}\right)$. Naturellement, plus l'arc de cercle correspondant aux contraintes quadratiques sur la vitesse est approché par un grand nombre de cordes ou de tangentes, meilleure est l'approximation. Dans les tests, χ^{\max} a été fixé à $\frac{\pi}{6}$ et $N_v = 6$, ce qui mène à un facteur de qualité inférieur à 0,4 %. La limitation du changement de cap permet de conserver la même qualité d'approximation en réduisant le nombre de cordes et de tangentes d'un facteur $\frac{2\pi}{\chi^{\max}}$.

Remarque 2.3. Les bornes sur le changement de cap ne s'appliquent qu'au modèle linéaire. Elles affectent donc la recherche d'une solution initiale mais n'ajoutent aucune décision a priori lors de la recherche de la solution du problème non linéaire. Le biais qu'elles induisent entre les deux modèles est difficile à quantifier théoriquement en fonction de χ^{\max} . La valeur de $\frac{\pi}{6}$ a été validée expérimentalement sur un ensemble de jeux de données réduits du type de ceux présentés dans la section 2.5.

L'introduction des variables \underline{v} et \bar{v} permet d'écrire les bornes (2-29)-(2-30) sur l'accélération, mais la contrainte sur la vitesse de virage (2-31) reste non linéaire. Pour borner linéairement la vitesse de virage, on écrit d'abord la norme de l'accélération en fonction de la dérivée de la norme de la vitesse, U , et de la vitesse de virage, ω , soit $\|\mathbf{u}\|^2 = U^2 + (\omega \|\mathbf{v}\|)^2$. Ainsi

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| \omega^{\max} \implies |\omega| \leq \omega^{\max}.$$

Il est donc suffisant de borner la norme de l'accélération en recourant à l'approximation par les cordes :

$$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- :$$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{u}_i^k \mid \mathbf{e}(\chi_i^{\text{ref}} + \theta) \right\rangle &\leq \bar{u}_i^k \cos\left(\frac{\pi}{N_u}\right), \forall \theta \in \Theta_u, \\ \bar{u}_i^k &\leq \omega^{\max} \underline{v}_i^k \end{aligned} \quad (2-46)$$

où \bar{u}_i^k a été ajouté afin d'avoir accès à un majorant de la norme de l'accélération qui sera utile pour les contraintes de séparation. La comparaison de (2-46) avec les contraintes non linéaires (2-31) n'est pas évidente en l'état, puisque des variables supplémentaires ont été incluses dans les contraintes linéaires. Pour se ramener à un cas intéressant, on calcule le facteur de qualité lorsque, pour un aéronef donné, la première contrainte de (2-46) est active et qu'il existe $n \in \{1, \dots, N_u\}$ tel que la seconde contrainte de (2-46) est active. C'est en effet le seul cas où la norme de l'accélération ne peut pas être augmentée sans violer l'une des contraintes. La situation où l'approximation de (2-31) est la plus grande advient lorsque $U = U^{\max}$, $\underline{v} = \|\mathbf{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{N_v}\right)$ et $\|\mathbf{u}\| = \omega^{\max} \underline{v} \cos\left(\frac{\pi}{N_u}\right)$. Il vient que

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega^{\max} - |\omega|}{\omega^{\max}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 - (U^{\max})^2}}{\|\mathbf{v}\| \omega^{\max}} \\ &\leq 1 - \sqrt{\left| \left(\cos\left(\frac{\pi}{N_u}\right) \cos\left(\frac{\pi}{N_v}\right) \right)^2 - \left(\frac{U^{\max}}{V_{\min \omega^{\max}}} \right)^2 \right|} \end{aligned}$$

Les bornes sur l'accélération ne sont pas aussi restrictives que celles sur la vitesse, donc un nombre moindres de cordes est pris, soit $N_u = 12$, ce qui donne $Q \approx 4\%$.

2.3.2 Contraintes de séparation

Contraintes valides sur tout l'intervalle de temps

Comme pour le modèle non linéaire, la difficulté ici est de trouver un petit nombre de contraintes garantissant la séparation sur l'intégralité de l'intervalle de commande tout en minimisant l'approximation à effectuer. Pour cela, un conflit entre A_i et A_j est représenté dans le référentiel mobile \mathcal{R}_i lié à A_i où la contrainte de séparation est matérialisée par un disque interdit de rayon D centré sur A_i . Cette représentation permet de généraliser les contraintes (1-25)-(1-29) trouvées dans la littérature pour avoir un traitement homogène vis-à-vis des bornes

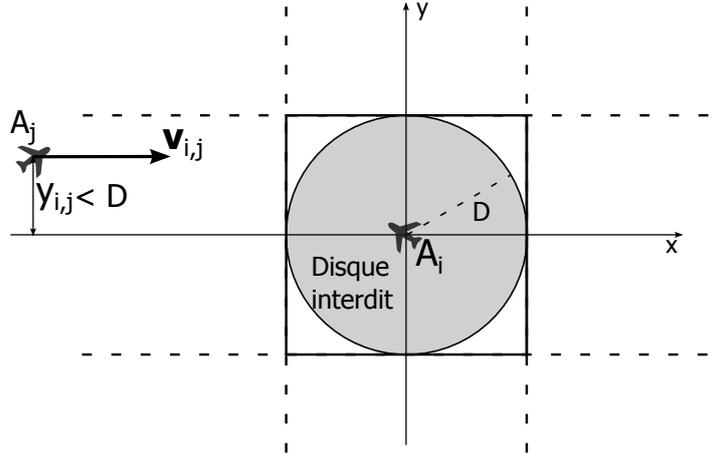


Figure 2.4 — Conflit dans le référentiel mobile : approximation du cercle par 4 tangentes

vues ci-dessus. Ainsi, l'approximation des contraintes de séparation quadratiques est réalisée en approchant le cercle délimitant la zone interdite par un ensemble de N_s tangentes. Lorsque les trajectoires prédites des deux avions sont des segments de droite, le référentiel mobile subit une rotation préalable telle que le vecteur vitesse relatif $\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$ soit colinéaire à l'axe des abscisses et orienté dans le même sens. Cette transformation permet de traiter tous les conflits de la même façon. Elle dispose aussi les tangentes avantageusement lorsque l'on n'en utilise que quatre, ce qui est le nombre minimum de tangentes à moins d'interdire tout un demi-plan de l'espace. Après rotation du référentiel, un conflit est détecté si l'ordonnée initiale de A_j est inférieure à D . Le conflit, représenté dans le référentiel \mathcal{R}_i est dessiné sur la figure 2.4 avec l'approximation par quatre tangentes.

La méthode suivie pour le modèle non-linéaire dans la sous-section 2.2.3 est aussi employée ici. Le principe est, pour $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ et $t_k \in \mathcal{T}^-$, de déterminer une contrainte assurant que les trajets liant \mathbf{p}_i^k et \mathbf{p}_j^k à \mathbf{p}_i^{k+1} et \mathbf{p}_j^{k+1} avec des vecteurs vitesse constants sont séparés puis d'utiliser la propriété 2.2 pour ajouter le terme garantissant aussi la séparation lorsque les vecteurs vitesse évoluent selon un vecteur accélération constant. Pour cela, on s'appuie sur la propriété triviale suivante.

Propriété 2.4

Soit $\mathbf{p}_1^1, \mathbf{p}_1^2, \mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_2^2$, quatre vecteurs de \mathbb{R}^2 , soit $D \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il existe $\theta \in [0; 2\pi]$ tel que :

$$\langle \mathbf{p}_2^1 - \mathbf{p}_1^1 | \mathbf{e}_\theta \rangle \geq D \text{ et } \langle \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_1^2 | \mathbf{e}_\theta \rangle \geq D$$

alors $\forall \lambda \in [0; 1]$

$$\langle (\mathbf{p}_2^1 + \lambda(\mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_2^1)) - (\mathbf{p}_1^1 + \lambda(\mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_1^1)) | \mathbf{e}_\theta \rangle \geq D$$

Ce résultat est une conséquence directe de la convexité de la fonction linéaire $t \mapsto \langle \mathbf{p} + t\mathbf{v} | \mathbf{e}_\theta \rangle$ où \mathbf{p} , \mathbf{v} et \mathbf{e}_θ sont des vecteurs de \mathbb{R}^2 quelconques. En l'appliquant à la séparation par des tangentes, il vient qu'il est suffisant, pour garantir la séparation sur un sous-intervalle $[t_k; t_{k+1}]$ lorsque les avions se déplacent à vitesse constante, de requérir le respect de la contrainte correspondant à une même tangente au pas t_k et au pas t_{k+1} . Le terme du membre de droite de (2-33), qui permet également de maintenir la séparation pour des accélérations constantes non nulles, est ensuite approché par un majorant dépendant uniquement des variables du problème

linéaire. Pour cela, on observe que, $\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-$:

$$\frac{h^2}{8} \|\mathbf{u}_j^k - \mathbf{u}_i^k\| \leq \frac{h^2}{8} \|\mathbf{u}_j^k\| + \|\mathbf{u}_i^k\| \leq \frac{h^2}{8} \bar{u}_j^k + \bar{u}_i^k.$$

Ainsi, en notant $\chi_{i,j}^{\text{ref}} = \text{azm}(\mathbf{v}_j^{\text{ref}} - \mathbf{v}_i^{\text{ref}})$, l'angle orienté entre l'axe des abscisses et le vecteur vitesse relatif prédit de A_j par rapport à A_i et en introduisant l'ensemble $\Theta_s = \{\frac{n}{2\pi}\}_{n=1, \dots, N_s}$, la séparation est maintenue sur tout l'intervalle de commande si les contraintes suivantes sont satisfaites.

$\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_{i,j}^{\text{ref}}) \rangle &\geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_i^k + \bar{u}_j^k) - M_{ij}^{k\theta} \delta_{ij}^{k\theta}, \forall \theta \in \Theta_s \\ \langle \mathbf{p}_j^{k+1} - \mathbf{p}_i^{k+1} \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_{i,j}^{\text{ref}}) \rangle &\geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_i^k + \bar{u}_j^k) - M_{ij}^{k+1,\theta} \delta_{ij}^{k\theta}, \forall \theta \in \Theta_s \\ \sum_{\theta \in \Theta_s} \delta_{ij}^{k\theta} &= N_s - 1 \\ \delta_{ij}^{k\theta} &\in \{0, 1\}, \forall \theta \in \Theta_s \end{aligned} \quad (2-47)$$

L'ajout de $\chi_{i,j}^{\text{ref}}$ à θ , dans $\mathbf{e}(\theta + \chi_{i,j}^{\text{ref}})$, traduit la rotation du repère lié à A_i .

Remarque 2.4. *L'évitement d'obstacles n'a pas été traité. Il aurait cependant été possible d'ajouter des contraintes similaires à (2-47) pour prendre en compte l'évitement d'obstacles polygonaux.*

Calcul du grand M

Le calcul de la valeur de $M_{ij}^{k\theta}$ menant à la formulation la plus resserrée de ces contraintes demande notamment d'être capable de borner supérieurement la valeur de $-\langle \mathbf{p}_{ij}^k \mid \mathbf{e}(\theta) \rangle$. Idéalement, cela demanderait de résoudre un MILP maximisant $-\langle \mathbf{p}_{ij}^k \mid \mathbf{e}(\theta) \rangle$ sous les contraintes de déplacement de A_i et A_j , mais sans résolution de conflits, soit

$$\begin{cases} \max - \langle \mathbf{p}_{ij}^k \mid \mathbf{e}_{\theta_n} \rangle \\ \text{sous (2-13) - (2-15), (2-23), (2-40) - (2-44), et (2-46)} \end{cases}$$

Sachant que ce MILP doit être résolu pour tous $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$, $t_k \in \mathcal{T}$ et $\theta \in \Theta_s$, cette procédure semble beaucoup trop lourde en comparaison du gain éventuel à en retirer. Il est toutefois possible d'obtenir des valeurs acceptables des constantes n'incluant que les bornes de la vitesse dans l'étude de $-\langle \mathbf{p}_{ij}^k \mid \mathbf{e}_{\theta_n} \rangle$.

Propriété 2.5

Soit $A_i \in \mathcal{A}, t_k \in \mathcal{T}, \chi^{\text{max}} \in [-\pi; \pi]$, et \mathcal{V} un ensemble défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \bar{u}_i, \bar{u}_j) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : &V_i^{\text{min}} \leq \|\mathbf{v}_i\| \leq V_i^{\text{max}}, V_j^{\text{min}} \leq \|\mathbf{v}_j\| \leq V_j^{\text{max}}, \\ &\text{azm}(\mathbf{v}_i) \in [\chi_i^{\text{ref}} - \chi^{\text{max}}; \chi_i^{\text{ref}} + \chi^{\text{max}}], \text{azm}(\mathbf{v}_j) \in [\chi_j^{\text{ref}} - \chi^{\text{max}}; \chi_j^{\text{ref}} + \chi^{\text{max}}], \\ &0 \leq \bar{u}_i \leq V_i^{\text{max}} \omega^{\text{max}}, 0 \leq \bar{u}_j \leq V_j^{\text{max}} \omega^{\text{max}}\} \end{aligned}$$

Soit $\theta \in \Theta_s$, le minimum, noté $M_{i,j}^{k\theta}$, de l'ensemble

$$\begin{aligned} \{M \in \mathbb{R} : \langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} + t_k \mathbf{v}_j - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} - t_k \mathbf{v}_i \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_{i,j}^{\text{ref}}) \rangle \\ \geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_i + \bar{u}_j) - M, \forall (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \bar{u}_i, \bar{u}_j) \in \mathcal{V}\} \end{aligned}$$

est donné par :

$$M_{i,j}^{k\theta} = D - \left\langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} \middle| \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle + t_k \times \left(\underline{V}_i^\theta \cos \underline{\chi}_i^\theta - \overline{V}_j^\theta \cos \overline{\chi}_j^\theta \right) + \frac{h^2}{8} \left(V_i^{\text{max}} \omega^{\text{max}} + V_j^{\text{max}} \omega^{\text{max}} \right), \quad (2-48)$$

où les grandeurs $\underline{\chi}_i^\theta$, $\overline{\chi}_j^\theta$, \underline{V}_i^θ et \overline{V}_j^θ sont définies par

$$\begin{aligned} \underline{\chi}_i^\theta &= \min \left\{ |\chi - \theta| : \chi \in [\chi_i^{\text{ref}} - \chi^{\text{max}}; \chi_i^{\text{ref}} + \chi^{\text{max}}] \right\} \\ \overline{\chi}_j^\theta &= \max \left\{ |\chi - \theta| : \chi \in [\chi_j^{\text{ref}} - \chi^{\text{max}}; \chi_j^{\text{ref}} + \chi^{\text{max}}] \right\} \\ \underline{V}_i^\theta &= \begin{cases} V_i^{\text{max}} & \text{si } \underline{\chi}_i^\theta \leq \frac{\pi}{2} \\ V_i^{\text{min}} & \text{si } \underline{\chi}_i^\theta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \overline{V}_j^\theta = \begin{cases} V_j^{\text{min}} & \text{si } \overline{\chi}_j^\theta \leq \frac{\pi}{2} \\ V_j^{\text{max}} & \text{si } \overline{\chi}_j^\theta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\chi - \theta \in [-\pi; \pi]$.

Démonstration : On cherche en fait $M_{v,i}^{k\theta}$ tel que

$$M_{v,i}^\theta = \max \left\{ -\left\langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} + t_k \mathbf{v}_j - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} - t_k \mathbf{v}_i \middle| \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle + D + \frac{h^2}{8} (\overline{u}_i + \overline{u}_j) : (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \overline{u}_i, \overline{u}_j) \in \mathcal{V} \right\}.$$

Le résultat est montré en décomposant le terme à maximiser selon les termes

$$\begin{aligned} &D - \left\langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} \middle| \mathbf{e}(\theta) \right\rangle \\ &+ t_k \left(-\|\mathbf{v}_j\| \cos(\text{azm}(\mathbf{v}_j) - \chi_{ij}^{\text{ref}} - \theta) + \|\mathbf{v}_i\| \cos(\text{azm}(\mathbf{v}_i) - \chi_{ij}^{\text{ref}} - \theta) \right) + \frac{h^2}{8} (\overline{u}_i + \overline{u}_j) \end{aligned}$$

Le maximum est alors obtenu grâce aux bornes définies par \mathcal{V} et en observant que $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{e}(\theta) \rangle$, par exemple, est d'autant plus grand que l'angle $|\text{azm}(\mathbf{v}_i) - \theta|$ est petit si $\text{azm}(\mathbf{v}_i) - \theta \in [-\pi; \pi]$. Le maximum est alors atteint pour $\|\mathbf{v}_i\| = V_i^{\text{max}}$ si le minimum de $|\text{azm}(\mathbf{v}_i) - \theta|$, $\underline{\chi}_i^\theta$, est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ et pour $\|\mathbf{v}_i\| = V_i^{\text{min}}$ si cet angle est supérieur à $\frac{\pi}{2}$. ■

Les valeurs des constantes $M_{ij}^{k\theta}$ données par l'équation (2-48) sont choisies pour obtenir une formulation plus resserrée des contraintes (2-47). Il s'agirait en fait de la formulation la plus resserrée si les changements de vitesse étaient instantanés et non contraints et s'il n'y avait pas de contrat 4D à respecter.

En reprenant les calculs qui ont servi pour la propriété 2.5, il est aussi possible d'obtenir des informations sur la satisfaction ou la non-satisfaction des contraintes de séparation a priori afin de simplifier d'emblée le problème. En définissant $\overline{\chi}_j^\theta$, $\underline{\chi}_j^\theta$, \overline{V}_j^θ et \underline{V}_j^θ de façon homologue à $\overline{\chi}_j^\theta$, $\underline{\chi}_i^\theta$, \overline{V}_j^θ et \underline{V}_i^θ de la propriété 2.5, il est possible d'encadrer $\left\langle \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k \middle| \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle$ en fonction des données du problème :

$$\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \forall \theta \in \Theta_s : :$$

$$\begin{cases} \left\langle \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k \middle| \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle \leq \left\langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} \middle| \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle + t_k \times \left(\underline{V}_j^\theta \cos \underline{\chi}_j^\theta - \overline{V}_i^\theta \cos \overline{\chi}_i^\theta \right) \\ \left\langle \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k \middle| \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle \geq \left\langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} \middle| \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle + t_k \times \left(\overline{V}_j^\theta \cos \overline{\chi}_j^\theta - \underline{V}_i^\theta \cos \underline{\chi}_i^\theta \right) \end{cases} \quad (2-49)$$

Ainsi, pour $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ et $t_k \in \mathcal{T}^-$, s'il existe $\gamma \in \Theta_s$ tel que

$$\begin{cases} \left\langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} \middle| \mathbf{e}(\gamma + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle + t_k \times \left(\overline{V}_j^\gamma \cos \overline{\chi}_j^\gamma - \underline{V}_i^\gamma \cos \underline{\chi}_i^\gamma \right) \geq D + \frac{h^2}{8} (V_i^{\text{max}} \omega^{\text{max}} + V_j^{\text{max}} \omega^{\text{max}}) \\ \left\langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} \middle| \mathbf{e}(\gamma + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle + (t_k + 1) \times \left(\overline{V}_j^\gamma \cos \overline{\chi}_j^\gamma - \underline{V}_i^\gamma \cos \underline{\chi}_i^\gamma \right) \geq D + \frac{h^2}{8} (V_i^{\text{max}} \omega^{\text{max}} + V_j^{\text{max}} \omega^{\text{max}}) \end{cases}$$

alors la séparation est assurée sur $[t_k, t_{k+1}]$ quelles que soient les trajectoires de A_i et A_j . L'ensemble des variables $\{\theta_{ij}^\theta\}_{\theta \in \Theta_s}$ ainsi que toutes les contraintes dans lesquelles elles interviennent

sont donc supprimées puisqu'elles ne sont pas utiles. Inversement, s'il existe $\gamma \in \Theta_s$ tel que

$$\left\langle \mathbf{p}_j^{\text{ini}} - \mathbf{p}_i^{\text{ini}} \mid \mathbf{e}(\gamma + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle + t_k \times \left(\underline{V}_j^\gamma \cos \underline{\chi}_j^\gamma - \overline{V}_i^\gamma \cos \overline{\chi}_i^\gamma \right) < D$$

alors il est nécessaire que la variable binaire associée vérifie $\delta_{ij}^{k\gamma} = 1$ pour que les contraintes de séparation soient satisfaites. Par conséquent, on pose $\delta_{ij}^{k\gamma} = 1$ et les deux contraintes de séparation dans lesquelles cette variable intervient sont supprimées.

Remarque 2.5. *Le facteur de qualité des contraintes de séparation est égal à $\cos(\frac{\pi}{N_s})$. Il faut toutefois ajouter que la mesure fournie par le facteur de qualité ne rend pas bien compte de la diminution de l'espace de recherche provoquée par le fait que la même contrainte de tangente doit être respectée à deux pas de temps successifs.*

Ajout d'inégalités valides

La linéarisation est effectuée afin de trouver une solution admissible pour le problème non linéaire. Néanmoins, l'obtention d'une telle solution peut être extrêmement longue pour des instances où il est nécessaire de résoudre un grand nombre de conflits. En effet, le nœud de la complexité du problème est l'utilisation de variables binaires pour le maintien de la séparation entre aéronefs. Afin d'augmenter les chances d'obtenir une solution admissible, et si possible optimale, des inégalités valides sont ajoutées au modèle moyennant une hypothèse supplémentaire sur le mouvement des aéronefs.

On considère alors l'ensemble $\mathcal{C}_{\text{cr}} \subset \mathcal{C}$ des conflits de croisement tels que l'angle de croisement entre les trajectoires des aéronefs en conflit est supérieur à 30° . Cette valeur de 30° est arbitraire et spécifie le fait que le croisement est net. La représentation d'un conflit de croisement entre A_i et A_j illustrée par la figure 2.4 est adoptée : on se place dans le référentiel lié à A_i et le repère associé est orienté de façon que le vecteur de vitesse relative initialement prévu $\mathbf{v}_{ij}^{\text{ref}}$ soit colinéaire à l'axe des abscisses et pointe dans la même direction. Ce repère est noté $(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ et les coordonnées dans ce repère sont signalées par une apostrophe.

On suppose alors que, pour tout $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}_{\text{cr}}$, l'abscisse de A_j dans le repère $(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ est croissante en fonction du temps. Cette hypothèse est évidemment vérifiée lorsque les vecteurs vitesse des aéronefs sont constants, et elle paraît raisonnable lorsque le conflit n'est pas proche du conflit de rattrapage. On choisit de plus N_s pair pour que $\{0, \pi\} \subset \Theta_s$, sachant que les tangentes correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ expriment respectivement les contraintes $p'_{x,j} \leq -D$ et $p'_{x,j} \geq D$. On note ensuite \mathcal{P} , la partie du plan définie par $-D < p'_{x,j} < D$. En dehors de \mathcal{P} , l'une des contraintes $p'_{x,j} \leq -D$ et $p'_{x,j} \geq D$ est satisfaite et, par croissance de $p'_{x,j}$, il est clair que, si le conflit est résolu, soit $p'_{y,j} > 0$ pour tout $\mathbf{p}'_j \in \mathcal{P}$, soit $p'_{y,j} < 0$ pour tout $\mathbf{p}'_j \in \mathcal{P}$. Deux ensembles sont alors introduits pour différencier les tangentes contraignant A_j à être en dessous du disque et celle le contraignant à être au-dessus, c'est-à-dire $\Theta_s^- = \{\theta \in \Theta_s : \sin(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) < 0\}$ et $\Theta_s^+ = \{\theta \in \Theta_s : \sin(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) > 0\}$. Il est alors possible de traduire ce qui vient d'être dit par l'ajout d'inégalités valides faisant intervenir de nouvelles variables binaires notées δ_{ij} :

$$\begin{aligned} \sum_{\theta \in \Theta_s^-} \delta_{ij}^{k\theta} &\leq \delta_{ij}, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}_{\text{cr}}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- \\ \sum_{\theta \in \Theta_s^+} \delta_{ij}^{k\theta} &\leq (1 - \delta_{ij}), \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}_{\text{cr}}, \forall t_k \in \mathcal{T}^- \\ \delta_{ij} &\in \{0, 1\}, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}_{\text{cr}} \end{aligned} \tag{2-50}$$

La variable δ_{ij} vaut 1 si A_j passe en dessous du disque et 0 s'il passe au-dessus. Cette inégalité introduit une variable par conflit, mais une fois sa valeur fixée, elle fixe également la valeur de $K \frac{N_s - 2}{2}$ variables binaires.

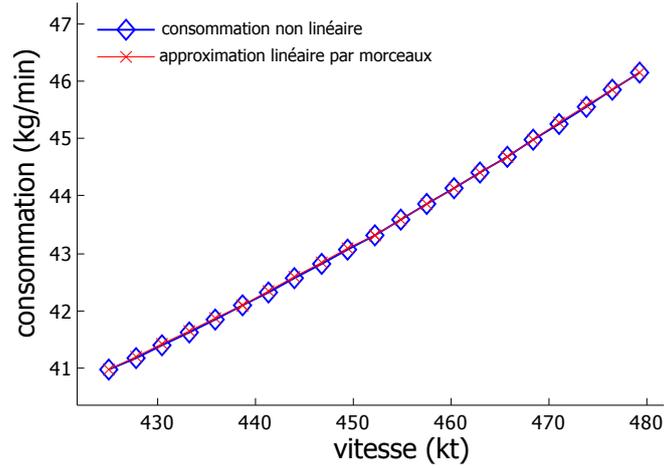


Figure 2.5 — Approximation de la consommation par unité de temps avec quatre segments

2.3.3 Linéarisation du critère

Le critère à minimiser de (2-39) n'est pas linéaire parce que les fonctions $V \mapsto C_t(V)$ et $V \mapsto C_d(V)$ ne sont pas linéaires. C_t est approchée par une fonction linéaire par morceaux composée de N_z segments inclus dans les droites d'équation $y = \alpha_c^n x + \beta_c^n$, $n \in \{1, \dots, N_z\}$. L'approximation linéaire est obtenue à partir de $N_z + 1$ valeurs de vitesse $\{V_n\}_{n=1, \dots, N_z}$ équiréparties sur $[V^{\min}, V^{\max}]$ en joignant les points successifs $(V_n, C_t(V_n))$ et $(V_{n+1}, C_t(V_{n+1}))$ pour $n = 1, \dots, N_z$. Cette procédure ne minimise pas l'écart entre l'approximation et C_t mais, d'une part, sachant C_t convexe, l'approximation linéaire par morceaux est elle aussi convexe et, d'autre part, $[V^{\min}, V^{\max}]$ étant centrée sur V^{nom} , en choisissant N_z pair, le point $(V^{\text{nom}}, C_t(V^{\text{nom}}))$ est à l'intersection de deux segments. Le second point donne une certaine cohérence à la fonction de coût puisque, en l'absence d'écart initial au contrat 4D et de conflit à résoudre, la trajectoire optimale est parcourue à vitesse nominale. La fonction de consommation non linéaire et son approximation par quatre segments de droite sont tracées sur la figure 2.5 pour un appareil de type Airbus A320 à 10 000 m d'altitude. La qualité, observée graphiquement, de l'approximation justifie de se satisfaire de quatre segments.

Par convexité de l'approximation linéaire, l'estimation de la consommation à l'aide de la fonction linéaire par morceaux se fait simplement en ajoutant N_z équations linéaires pour chaque coût à estimer :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i^k &\geq h \left(\frac{1}{2} \alpha_c^n (\bar{v}_i^k + \bar{v}_i^{k+1}) + \beta_c^n \right), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, \dots, N_z\} \\ \tilde{z}_i^{AD} &\geq (t_i^{AD} - T_C) \left(\frac{1}{2} \alpha_c^n (\bar{v}_i^k + \bar{v}_i^{k+1}) + \beta_c^n \right), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, \dots, N_z\} \end{aligned} \quad (2-51)$$

où \tilde{z}_i^k et \tilde{z}_i^{AD} prennent la valeur de la consommation lorsqu'elles sont minimisées dans le critère.

Concernant la consommation de fuel due au parcours de l'écart longitudinal, celle-ci est approchée en supposant que le parcours se fait à la vitesse nominale. Cette approximation est raisonnable dans la mesure où l'écart longitudinal maximum est faible. Dans les expériences, on pose $\Delta_{\parallel, i}^{\max} = V_i^{\max} \times 30$ secondes pour obtenir un intervalle de tolérance centré sur le point de passage 4D et dont la longueur est la longueur maximale parcourue en une minute.

2.3.4 Résumé du modèle linéaire

En reprenant les contraintes exposées ci-dessus, le modèle de programmation linéaire mixte est exprimé de la façon suivante :

$$\text{TMILP} : \left\{ \begin{array}{l} \min. \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left[\tilde{z}_i^k + \tilde{z}_i^{4D} - \left(\Delta_{\parallel, i}^+ + \Delta_{\parallel, i}^- \right) \times C_d(V_i^{\text{nom}}) + \rho^+ \Delta_{\parallel, i}^+ + \rho^- \Delta_{\parallel, i}^- \right] \\ \text{sous (2-13) - (2-15), (2-23), (2-40) - (2-44), (2-46) - (2-47), (2-50) - (2-51), \text{ avec} \\ (\mathbf{p}_i^0, \mathbf{v}_i^0) = (\mathbf{p}_i^{\text{ini}}, \mathbf{v}_i^{\text{ini}}), \forall A_i \in \mathcal{A} \\ \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T} : \mathbf{p}_i^k, \mathbf{v}_i^k, \mathbf{u}_i^k \in \mathbb{R}^2, \tilde{z}_i^k \geq 0 \\ \forall A_i \in \mathcal{A} : \Delta_{\parallel, i}^+ \geq 0, \Delta_{\parallel, i}^- \leq 0, \tilde{z}_i^{4D} \geq 0 \\ \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \forall n \in \{1, \dots, N_v\} : \epsilon_i^{kn} \in \{0, 1\} \\ \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}, \forall n \in \{1, \dots, N_s\} : \delta_{ij}^{kn} \in \{0, 1\} \end{array} \right. \quad (2-52)$$

2.4 Initialisation par la solution du modèle linéaire

2.4.1 Justification de la démarche

L'idée d'initialiser la résolution de TIME par la solution de TMILP vient du fait que la programmation linéaire mixte permet d'explorer le domaine admissible sans être arrêté par la rencontre de minima locaux. Il est ainsi probable que la solution de TMILP place la résolution du modèle linéaire dans le voisinage d'une bonne solution, voire, pourquoi pas, de la solution optimale. Il est toutefois nécessaire, pour que le processus ne rencontre pas les mêmes difficultés que celles mentionnées dans [28], de s'assurer qu'une solution admissible de TMILP est bien admissible pour TIME. Ce résultat est formalisé et discuté dans la suite en comparant les deux modèles. Néanmoins, la linéarisation a nécessité l'ajout des variables δ , δ , ϵ et \bar{u} , ce qui induit une différence entre les ensembles des variables d'optimisation des deux problèmes. L'opération consistant à réduire l'ensemble des variables du modèle linéaire est donc définie, et pour cela quelques termes déjà utilisés sont précisés.

Notation 2.1. Soit P un problème d'optimisation à n variables prenant leurs valeurs dans \mathbb{R} . Une solution $\zeta \in \mathbb{R}^n$ de P est un vecteur de valeurs prises par les variables de P . Le vecteur \mathbf{x} , noté sans indice ni exposant, est la partie de ζ décrivant les valeurs prises par les variables désignées par la lettre x .

Définition 2.7. Soit P un problème d'optimisation mis sous la forme

$$P : \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

Le domaine admissible de P , noté \mathcal{D}_P est défini par

$$\mathcal{D}_P\{\mathbf{x} : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

Une solution admissible de P est un élément de \mathcal{D}_P .

Définition 2.8. Soit P et P' deux problèmes d'optimisation tels que toute variable de P est aussi une variable de P' . Si ζ est une solution P' , la restriction de ζ aux variables de P , notée $\zeta|_P$ est le vecteur des composantes de ζ donnant les valeurs prises par les variables communes à P et P' . Par extension, la restriction du domaine admissible de P' aux variables de P est l'ensemble des solutions admissibles de P' restreintes aux variables de P , soit :

$$\mathcal{D}_{P'|P} = \{\zeta|_P : \zeta \in \mathcal{D}_{P'}\}$$

Théorème 2.1

Soit $\mathcal{D}_{\text{TIME}}$ le domaine admissible de TIME et $\mathcal{D}_{\text{TMILP}|_{\text{TIME}}}$ le domaine admissible de TMILP

restreint aux variables de *TIME*. Alors

$$\mathcal{D}_{\text{TMILP}}|_{\text{TIME}} \subset \mathcal{D}_{\text{TIME}}$$

Démonstration : Ce résultat découle directement de la construction de *TMILP*. Chaque ensemble de contraintes linéarisées étant une approximation suffisante des contraintes non linéaires correspondantes, une solution admissible de *TMILP* respecte nécessairement les contraintes de *TIME*. ■

On déduit de ce résultat que toute solution admissible de *TMILP* donne une solution admissible de *TIME* si l'on en prend la restriction aux variables de *TIME*. Cela justifie la démarche par laquelle la résolution du programme non linéaire est initialisée par une solution admissible, si possible de coût minimum, du modèle linéarisé. Soit alors F_{TIME} la fonction qui à une solution ζ de *TIME* associe la valeur du critère correspondante. Une conséquence directe du théorème (2.1) est que la résolution de *TMILP* fournit une borne supérieure de la valeur optimale du critère de *TIME*.

Corollaire 2.2

Soit Z_{TIME}^* la valeur optimale de l'objectif de *TIME* et ζ_{TMILP} une solution admissible de *TMILP* alors

$$Z_{\text{TIME}}^* \leq F_{\text{TIME}}(\zeta_{\text{TMILP}}|_{\text{TIME}})$$

Démonstration : D'après le théorème 2.1, $\zeta_{\text{TMILP}}|_{\text{TIME}} \in \mathcal{D}_{\text{TIME}}$ donc, par définition de Z_{TIME}^*

$$Z_{\text{TIME}}^* \leq F_{\text{TIME}}(\zeta_{\text{TMILP}}|_{\text{TIME}})$$

■

Ce corollaire a un intérêt évident si l'on ne se place pas dans la perspective d'une initialisation de la résolution de *TIME*. En effet, si une méthode quelconque est appliquée pour obtenir une solution de *TIME* de critère Z_{TIME} , il peut suffire de résoudre *TMILP* pour montrer qu'elle n'est pas optimale à condition que sa solution ζ_{TMILP} vérifie $Z_{\text{TIME}} > F_{\text{TIME}}(\zeta_{\text{TMILP}}|_{\text{TIME}})$.

Il est raisonnable de penser que la solution optimale de *TMILP* donne l'une des meilleures bornes de Z_{TIME}^* sachant que les fonctions objectif de *TIME* et *TMILP* sont très proches l'une de l'autre. Il n'est cependant pas vrai qu'elle fournit la meilleure borne supérieure de Z_{TIME}^* .

Pour mieux évaluer la qualité d'une solution de *TIME* et éventuellement se placer dans la perspective de son optimisation globale, il faudrait en outre disposer d'une borne inférieure de Z_{TIME}^* . Le calcul d'une borne inférieure n'a pas encore été implémenté mais le principe d'une méthode est ébauché. Il est à ce titre important de remarquer que les méthodes de linéarisation vues dans cette section peuvent également être appliquées pour construire un programme linéaire mixte *T_{INF}*, tel que les contraintes de *TIME* constituent une approximation suffisante de celle de *T_{INF}*. Pour cela, il suffit généralement de remplacer les approximations faites à l'aide de tangentes par des approximations faites à l'aide de cordes, et inversement. Si l'on considère plus particulièrement le maintien de la séparation, les tangentes sont remplacées par autant de cordes et la contrainte indiquant que la même contrainte de corde doit être satisfaite pour deux pas de temps successifs est par ailleurs supprimée. La problématique de la période d'échantillonnage déjà discutée dans l'état de l'art, à la page 24, doit alors être prise en compte pour déterminer une bonne borne inférieure de Z_{TIME}^* . En effet, si la longueur des pas de temps est trop grande, les contraintes ne permettent plus le maintien de la séparation. Par exemple, pour deux aéronefs en conflit frontal se déplaçant à 450 kt, la distance entre ces derniers varie de 15 NM par minute, il est donc possible qu'une collision ait lieu alors que des contraintes correspondant à une période d'échantillonnage de 1 minute sont toutes respectées. Sachant que la réduction de la période d'échantillonnage entraîne une augmentation importante du temps de résolution, il est très probable que l'obtention d'une bonne borne inférieure soit très coûteuse en temps de calcul.

2.4.2 Déterminer rapidement une solution admissible du problème linéaire

Relâchement des contraintes de séparation

L'objectif de la résolution de **TMILP** est de fournir une solution initiale à la résolution de **TIME** en un temps fixé de façon à être cohérent avec le contexte opérationnel. Le temps d'exécution total de l'algorithme associant la résolution de **TMILP** et de **TIME** ne devrait certainement pas dépasser la minute dans une implémentation opérationnelle. Même si, au stade de la recherche, il reste intéressant d'étudier les solutions obtenues dans un temps plus long, il n'est pour autant pas pertinent d'attendre la solution de **TMILP** plus de quelques minutes. La limite de temps de la résolution de **TMILP** est notée τ^{\max} . Dans ces circonstances, une difficulté advient lorsque aucune solution admissible n'a été trouvée avant τ^{\max} . Pour éviter cela, des variables d'écart, $s > 0$, sont ajoutées aux contraintes de séparation pour que celles-ci soient satisfaites quelles que soient les valeurs des variables binaires δ . Les contraintes de séparation s'écrivent alors

$$\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-, \forall \theta \in \Theta_s :$$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{p}_j^k - \mathbf{p}_i^k \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle &\geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_i^k + \bar{u}_j^k) - M_{ij}^{k\theta} \delta_{ij}^{k\theta} - s_{ij}^k, \\ \left\langle \mathbf{p}_j^{k+1} - \mathbf{p}_i^{k+1} \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle &\geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_i^k + \bar{u}_j^k) - M_{ij}^{k+1,\theta} \delta_{ij}^{k\theta} - s_{ij}^k \end{aligned} \quad (2-53)$$

Les variables d'écart sont ensuite ajoutées dans l'objectif avec une pénalité ρ_s très grande devant les autres termes de la fonction objectif pour que la résolution converge vers des solutions où les variables d'écart sont nulles. En pratique, ρ_s a été fixé à 10^6 . Ainsi, le critère devient

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left[\tilde{z}_i^k + \tilde{z}_i^{AD} - (\Delta_{\parallel,i}^+ + \Delta_{\parallel,i}^-) \times C_d (V_i^{\text{nom}}) + \rho^+ \Delta_{\parallel,i}^+ + \rho^- \Delta_{\parallel,i}^- \right] + \rho_s \times \sum_{(A_i, A_j) \in \mathcal{C}, t_k \in \mathcal{T}^-} s_{ij}^k \quad (2-54)$$

Définition 2.9. Une solution de **TMILP** est strictement admissible si et seulement si elle est admissible et $s_{ij}^k = 0, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-$.

Si la solution ζ de **TMILP** n'est pas strictement admissible, la même méthode est appliquée au modèle non linéaire pour que $\zeta|_{\text{TIME}}$ soit une solution admissible de **TIME**. Pour tous $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$, $t_k \in \mathcal{T}^-$, tels que $s_{ij}^k > 0$, une variable d'écart est ajoutée aux contraintes de séparation non linéaires (2-33) et un terme la pénalisant est ajouté dans la fonction objectif.

Décomposition du problème

La situation où aucune solution admissible n'a pu être trouvée étant peu souhaitable, un algorithme de décomposition a été développé pour traiter les plus grosses instances. Le principe de la décomposition est de résoudre un problème réduit, obtenu en multipliant la taille des pas de temps h par un facteur $n_h \in \mathbb{N}$, puis de résoudre à nouveau le problème initial en fixant les variables binaires de résolution aux valeurs suggérées par la résolution du problème réduit. La première phase sert à déterminer rapidement un vecteur δ tel qu'il existe une solution admissible dans laquelle les valeurs des variables binaires sont fixées à δ , et la seconde phase est nécessaire pour construire la solution complète.

Pour une description plus formelle, on note **TMILP**(n_h) le modèle linéaire obtenu en discrétisant l'intervalle de commande selon des pas de temps de longueur $n_h \times h$. Le problème initial, dont la longueur des pas de temps vaut h , est indifféremment noté **TMILP** ou **TMILP**(1). Par extension, tout ensemble ou variable se référant à **TMILP**(n_h) est différencié par l'ajout de (n_h). Soit ensuite $R(\text{TMILP}(n_h))$ la relaxation de **TMILP**(n_h) obtenue en mettant de côté les contraintes (2-42) et (2-46). Soit finalement **TMILP** $_{\delta}$, le problème obtenu à partir de **TMILP** en fixant les valeurs des variables $\{\delta_{ij}^{k\theta}\}$ à δ .

Propriété 2.6

Soit $n_h > 1$ et ζ_{n_h} une solution de $\text{TMILP}(n_h)$. Soit ζ une solution de TMILP obtenue par les opérations suivantes (en omettant les variables égales dans les deux modèles). Une solution admissible de $\text{R}(\text{TMILP})$ est déterminée à partir d'une solution strictement admissible de $\text{R}(\text{TMILP}(n_h))$ en calculant les valeurs des variables de TMILP de la façon suivante (les variables omises sont égales dans les deux modèles) :

$$\forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}(n_h), \forall k' \in \{0, \dots, n_h - 1\} :$$

$$\mathbf{u}_i^{n_h k + k'} = \mathbf{u}_i^k(n_h),$$

$$\mathbf{v}_i^{n_h k + k'} = \mathbf{v}_i^k(n_h) + k' h \mathbf{u}_i^k(n_h),$$

$$\mathbf{p}_i^{n_h k + k'} = \mathbf{p}_i^k(n_h) + k' h \mathbf{v}_i^k(n_h) + \frac{(k' h)^2}{2} \mathbf{u}_i^k(n_h),$$

$$\underline{v}_i^{n_h k + k'} = \underline{v}_i^k(n_h),$$

$$\bar{v}_i^{n_h k + k'} = \max_{\theta \in \Theta_s} \left\{ \left\langle \mathbf{v}_i^k(n_h) + k' h \mathbf{u}_i^k(n_h) \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_i^{\text{ref}}) \right\rangle \right\},$$

$$\bar{u}_i^{n_h k + k'} = \max_{\theta \in \Theta_s} \left\{ \left\langle \mathbf{u}_i^k(n_h) \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_i^{\text{ref}}) \right\rangle \right\},$$

$$\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-(n_h), \forall k' \in \{0, \dots, n_h - 1\} :$$

$$\epsilon_i^{n_h k + k', \theta} = \epsilon_i^{k \delta}(n_h),$$

$$\delta_{ij}^{n_h k + k', \theta} = \delta_{ij}^{k \theta}(n_h),$$

$$s_{ij}^{n_h k + k'} = \max \left(0, \bar{s}_{ij}^k(n_h) + \frac{h^2}{8} \left(\bar{u}_i^{n_h k + k'} + \bar{u}_j^k(n_h) \right) \right),$$

où, en notant $\bar{\theta}_{ij}^k$ l'unique $\theta \in \Theta_s$ tel que $\delta_{ij}^{k \theta}(n_h) = 0$, $\bar{s}_{ij}^k(n_h)$ est défini par

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ij}^k(n_h) = & D + \frac{(n_h h)^2}{8} \left(\bar{u}_i^k(n_h) + \bar{u}_j^k(n_h) \right) \\ & - \max \left(\left\langle \mathbf{p}_j^k(n_h) - \mathbf{p}_i^k(n_h) \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle, \left\langle \mathbf{p}_j^{k+1}(n_h) - \mathbf{p}_i^{k+1}(n_h) \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle \right). \end{aligned}$$

- a) si ζ_{n_h} est une solution admissible de $\text{TMILP}(n_h)$, alors ζ est une solution admissible de $\text{R}(\text{TMILP})$;
 b) si ζ_{n_h} est une solution strictement admissible de $\text{TMILP}(n_h)$ et que

$$\bar{s}_{ij}^k(n_h) \leq -\frac{h^2}{8} \left(\bar{u}_i^k(n_h) + \bar{u}_j^k(n_h) \right), \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-(n_h)$$

alors ζ est une solution strictement admissible de $\text{R}(\text{TMILP})$.

La fonction associant ζ à ζ_{n_h} est notée $\mathbf{f}_{n_h \rightarrow 1}$

Démonstration : Pour démontrer a), on observe d'abord que l'accélération est inchangée et que les vecteurs vitesse et position ont été posés de façon à satisfaire le système dynamique (2-23). Les contraintes de contrat 4D ne posent donc aucun problème. Les bornes supérieures sur la vitesse et l'accélération sont ensuite respectées parce que le domaine défini par les cordes est convexe et que le vecteur vitesse varie linéairement en fonction du temps. Pour les contraintes de séparation relâchées (2-53), on considère $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$, $t_k \in \mathcal{T}^-(n_h)$ et $\theta \in \Theta_s$. Si $\delta_{ij}^{k \theta}(n_h) = 1$, alors $\forall k' \in \{0, \dots, n_h - 1\}$:

$$\left\langle \mathbf{p}_j^{n_h k + k'} - \mathbf{p}_i^{n_h k + k'} \mid \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \right\rangle \geq D + \frac{h^2}{8} \left(\bar{u}_i^{n_h k + k'} + \bar{u}_j^{n_h k + k'} \right) - M_{ij}^{k \theta} \delta_{ij}^{k \theta} - s,$$

pour tout $s \geq 0$, c'est donc en particulier vrai pour $s = s_{ij}^{n_h k+k'}$. Si $\delta_{ij}^{k\theta}(n_h) = 1$, alors, par définition de $\bar{s}_{ij}^k(n_h)$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{p}_j^k(n_h) - \mathbf{p}_i^k(n_h) | \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \rangle \geq D + \frac{(n_h h)^2}{8} (\bar{u}_i^k(n_h) + \bar{u}_j^k(n_h)) - \bar{s}_{ij}^k(n_h) \\ \langle \mathbf{p}_j^{k+1}(n_h) - \mathbf{p}_i^{k+1}(n_h) | \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \rangle \geq D + \frac{(n_h h)^2}{8} (\bar{u}_i^k(n_h) + \bar{u}_j^k(n_h)) - \bar{s}_{ij}^k(n_h), \end{cases} \quad (2-55)$$

La propriété (2.2), page 73, implique donc que pour tout $k' \in \{0, \dots, n_h - 1\}$:

$$\langle \mathbf{p}_j^{n_h k+k'} - \mathbf{p}_i^{n_h k+k'} | \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \rangle \geq D - \bar{s}_{ij}^k(n_h).$$

d'où

$$\langle \mathbf{p}_j^{n_h k+k'} - \mathbf{p}_i^{n_h k+k'} | \mathbf{e}(\theta + \chi_{ij}^{\text{ref}}) \rangle \geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_i^{n_h k+k'} + \bar{u}_j^{n_h k+k'}) - s_{ij}^{n_h k+k'}.$$

Les contraintes de séparation de $\text{R}(\text{TMILP})$ sont donc satisfaites.

Le point $b)$ est une conséquence directe du $a)$. Si

$$\bar{s}_{ij}^k(n_h) \leq -\frac{h^2}{8} (\bar{u}_i^k(n_h) + \bar{u}_j^k(n_h)), \quad \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-(n_h)$$

alors $s_{ij}^k \geq 0$ pour tout $t_k \in \mathcal{T}^-$, ce qui entraîne que $\text{R}(\text{TMILP})$ est strictement admissible, sachant qu'il est admissible par $a)$. ■

Cette propriété ne donne pas tout à fait le résultat désiré puisque, d'une part, il ne garantit pas qu'il soit possible de trouver une solution strictement admissible de $\text{R}(\text{TMILP})$ à partir d'une solution strictement admissible de $\text{TMILP}(n_h)$ et, d'autre part, il ne dit rien pour les bornes inférieures de la vitesse (2-42) et les bornes de l'accélération (2-46). Le premier point est réglé grâce au $b)$ de la propriété. En définissant $\text{TMILP}'(n_h)$ tel que $\text{TMILP}'(n_h)$ ne diffère de $\text{TMILP}(n_h)$ que par le remplacement du facteur $(n_h^2)h^2$ par $(n_h^2 + 1)h^2$ des contraintes de séparation (2-53), la condition

$$\bar{s}_{ij}^k(n_h) \leq -\frac{h^2}{8} (\bar{u}_i^k(n_h) + \bar{u}_j^k(n_h)), \quad \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C}, \forall t_k \in \mathcal{T}^-(n_h)$$

est nécessairement remplie pour toute solution strictement admissible de $\text{TMILP}'(n_h)$. Par conséquent une solution strictement admissible ζ de $\text{R}(\text{TMILP})$ est obtenue en appliquant $\mathbf{f}_{n_h \rightarrow 1}$ à une solution strictement admissible $\zeta(n_h)$ de $\text{TMILP}'(n_h)$. Clairement, si δ est le vecteur des valeurs prises par les variables $\{\delta_{ij}^{k\theta}(1)\}$ dans ζ , alors ζ est également une solution admissible de $\text{R}(\text{TMILP}_\delta)$.

Concernant le second point, le problème $\text{R}(\text{TMILP})$ a été considéré à la place de TMILP dans la propriété 2.6 parce que le domaine défini par la borne inférieure de la vitesse est concave et qu'il n'est donc pas suffisant que cette borne soit respectée aux deux extrémités d'un intervalle de temps pour qu'elle le soit aussi à l'intérieur. Néanmoins, les contraintes du contrat 4D impliquent que tout retard engendré par les manœuvres doit être rattrapé par une augmentation de la vitesse. Sachant par ailleurs que le critère est minimum lorsque la vitesse est constamment égale à la vitesse nominale, les trajectoires où la vitesse est proche de la vitesse minimum semblent a priori plus coûteuses. Ainsi dans le cas général, une solution strictement admissible de $\text{TMILP}'(n_h)$ permet d'obtenir une solution strictement admissible de TMILP . Cela a d'ailleurs toujours été le cas pour les tests présentés à la section suivante.

En pratique, la solution de TMILP utilisée pour l'initialisation de la résolution du problème non linéaire n'est pas $\mathbf{f}_{n_h \rightarrow 1}(\zeta(n_h))$. Elle est obtenue en résolvant TMILP_δ où δ est le vecteur des valeurs des variables $\{\delta_{ij}^{k\theta}(1)\}$ dans $\mathbf{f}_{n_h \rightarrow 1}(\zeta(n_h))$. La résolution de TMILP_δ est rapide puisque les variables binaires les plus problématiques sont fixées et elle permet d'améliorer à moindre coût la solution de $\text{TMILP}'(n_h)$. En outre, si les contraintes (2-42) ou (2-46) ne sont pas satisfaites par $\mathbf{f}_{n_h \rightarrow 1}(\zeta(n_h))$, la résolution de TMILP_δ génère une solution admissible en augmentant si nécessaire la valeur des variables d'écart $\{s_{ij}^k\}$. L'ensemble de la procédure hybride associant la résolution du modèle linéaire mixte et celle du modèle non linéaire est récapitulée dans l'algorithme 2.1.

Algorithme 2.1 Algorithme hybride pour la résolution de conflits aériens

Antécédent : h tel que $\frac{T_c}{h} \in \mathbb{N}$, $n_h \in \{1, \dots, \frac{T_c}{h}\}$ et τ^{\max}

- 1: Résoudre $\text{TMILP}'(n_h)$ avec τ^{\max} pour limite de temps d'exécution
 - 2: $\zeta(n_h) \leftarrow$ solution de $\text{TMILP}'(n_h)$
 - 3: $\zeta \leftarrow \mathbf{f}_{n_h \mapsto 1}(\zeta(n_h))$
 - 4: $\delta \leftarrow$ composantes de ζ donnant les valeurs $\{\delta_{ij}^{k\theta}\}$
 - 5: Résoudre TMILP_δ {le temps d'exécution de TMILP_δ est petit car δ est fixé}
 - 6: $\zeta^{\text{ini}} \leftarrow$ solution de TMILP_δ
 - 7: **pour** $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$, $t_k \in \mathcal{T}^-$ **effectuer**
 - 8: **si** $s_{ij}^k > 0$ **alors**
 - 9: Ajouter une variable d'écart s_{ij}^k à la contrainte (2-33) de TIME
 - 10: Pénaliser cette variable en ajoutant le terme $\rho_s s_{ij}^k$ au critère de TIME
 - 11: Résoudre TIME à partir de ζ^{ini}
 - 12: **Résultat :** $\mathbf{v}_i^k, \mathbf{u}_i^k, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}$ {les autres variables ne sont pas utiles pour déterminer les instructions de contrôle}
-

2.5 Paramétrage et évaluation de l'algorithme hybride

Dans cette section, les résultats des tests de l'algorithme 2.1 sur des jeux de données artificiels sont présentés. Ces jeux sont dits artificiels parce qu'ils ne sont pas censés représenter des situations ayant effectivement dû être gérées dans l'espace aérien. Les configurations artificielles sont en effet suffisamment régulières pour être décrites par un petit nombre de paramètres, et la plupart d'entre elles mettent en scène des situations beaucoup trop denses et complexes pour qu'elles puissent se produire malgré les règles imposées par la gestion du trafic aérien. Ces jeux ont été construits pour tester les limites de l'algorithme dans plusieurs situations problématiques et sont décrits dans la sous-section 2.5.1. Des éléments ayant servi au paramétrage de l'algorithme 2.1 et, plus particulièrement, au choix du facteur n_h sont donnés dans la sous-section 2.5.2. Les résultats détaillés dans la sous-section 2.5.3 sont basés sur la comparaison de la résolution de TIME par l'algorithme 2.1 avec une résolution à partir d'une solution initiale alternative produite instantanément en prenant la trajectoire prédite des aéronefs. Cette solution initiale ne fournit pas d'indication sur les manœuvres nécessaires au maintien de la séparation mais elle reste admissible pour TIME une fois les variables d'écart ajoutées. Ce point de comparaison a été préféré à la résolution partant de zéro parce que cette dernière rencontre des problèmes de complexité informatique dans la plupart des cas traités.

2.5.1 Description des jeux de données

Trois types de jeux de données, baptisés *Trains*, *Grille* et *Rond-Point*, ont été considérés.

Définition 2.10. *Un train d'avions désigne une séquence d'aéronefs proches les uns des autres et suivant le même segment de vol à vitesses égales.*

Les jeux du type *Trains*, dont un exemple est représenté sur la figure 2.6(a), font se rencontrer deux trains d'avions suivant des segments de vol qui se coupent en formant un angle $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$. Les scénarios de ce type sont obtenus en modifiant le nombre d'aéronefs par train. Le type *Grille* peut être vu comme une généralisation du type *Trains*, excepté que les angles de croisement sont tous égaux à $\frac{\pi}{2}$: deux trains d'aéronefs suivant des segments parallèles à l'axe des abscisses croisent deux trains suivant des segments parallèles à l'axe des ordonnées. Ce type de jeu est illustré sur la figure 2.6(b) ; des scénarios de plus en plus complexes sont obtenus en augmentant le nombre d'aéronefs constituant les trains d'avion. Finalement le type du *Rond-Point* regroupe des jeux de données où les aéronefs sont initialement équirépartis sur un même cercle et se

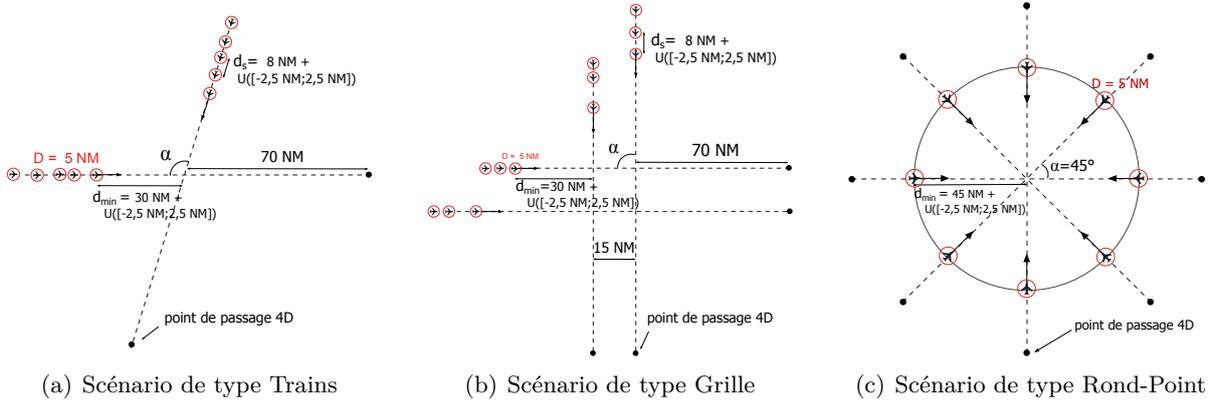


Figure 2.6 — Scénarios illustrant chaque type de jeux de données : les scénarios représentés sont les plus complexes parmi ceux utilisés lors des tests

dirigent vers le point diamétralement opposé. Un exemple est dessiné sur la figure 2.6(c) ; les différents scénarios de ce type sont générés en faisant varier le nombre d’aéronefs.

Par simplicité, il a été supposé que tous les aéronefs étaient les mêmes. Leurs performances, basées sur celle de l’Airbus A320 dans la base de données de BADA [9], sont récapitulées dans la table 2.1. Toutefois, les bornes sur la vitesse et l’accélération sont nettement plus contraignantes que celles du modèle BADA, puisqu’elles correspondent à des bornes acceptables par les pilotes plutôt qu’à des limites techniques. Les paramètres d’optimisation h et T_c ont également été inclus.

T_c	h	V^{nom}	V^{min}	V^{max}	U^{max}	ω^{max}
10 min	30 s	452 kt	425 kt	479 kt	0,4 kt.s ⁻¹	0,88°.s ⁻¹

Tableau 2.1 — Paramètres d’optimisation et de performance des aéronefs

Les scénarios sont construits pour maximiser la complexité des situations en minimisant la distance entre les aéronefs en conflit et en maximisant le nombre de conflits. Pour le type Rond-Point par exemple, cela est réalisé naturellement lorsque les aéronefs ont tous la même vitesse de référence. La position initiale des aéronefs sur leur segment est repérée par la distance au premier conflit. Celle-ci dépend du scénario et a été calculée pour permettre la résolution de tous les conflits dans les 10 minutes de l’intervalle de commande. La plus petite distance au premier conflit correspond à une anticipation du conflit allant de 3 à 6 minutes. La position finale des aéronefs sur leur segment de vol, c’est-à-dire le point de passage du contrat 4D, est à une distance de 70 NM du dernier conflit à résoudre, ce qui correspond à un peu moins de 10 minutes de vol. Cent instances sont ensuite générées pour chaque scénario en introduisant des variations aléatoires sur :

- la distance de séparation initiale entre chaque paire d’aéronefs successifs dans un même train d’avions ;
- la position initiale du premier aéronef de chaque train ;
- l’angle de croisement entre les deux segments de vol, uniquement pour les scénarios de type Trains.

La distance de séparation de référence est égale à 8 NM. Les variations aléatoires par rapport à cette distance de référence sont tirées indépendamment selon une loi uniforme dans l’intervalle $[-2,5 \text{ NM}; +2,5 \text{ NM}]$ sachant que chaque paire d’aéronefs donne lieu à un tirage indépendant. Les variations aléatoires sur la position initiale du premier aéronef de chaque train sont également tirées indépendamment selon une loi uniforme dans l’intervalle $[-2,5 \text{ NM}; +2,5 \text{ NM}]$.

Type	Scénario	$ \mathcal{A} $	$ \mathcal{C} $	$ \mathcal{C}_{\Delta} $	$ \mathcal{A}_x^1 $	$ \mathcal{A}_x^2 $	$ \mathcal{A}_y^1 $	$ \mathcal{A}_y^2 $	α	d_{\min} (NM)
Trains	T-01	2	1	1	1	-	1	-	$U(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$	$42,5+U([-2,5; 2,5])$
	T-02	4	4	2	2	-	2	-	$U(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$	$32,5+U([-2,5; 2,5])$
	T-03	6	9	3	3	-	3	-	$U(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
	T-04	8	16	4	4	-	4	-	$U(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
	T-05	10	25	5	5	-	5	-	$U(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
	T-06	12	36	6	6	-	6	-	$U(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3})$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
Grille	G-01	6	12	5	2	1	2	1	$\frac{\pi}{2}$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
	G-02	8	16	8	2	2	2	2	$\frac{\pi}{2}$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
	G-03	10	20	9	3	2	3	2	$\frac{\pi}{2}$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
	G-04	10	20	9	2	3	2	3	$\frac{\pi}{2}$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
	G-05	12	36	12	3	3	3	3	$\frac{\pi}{2}$	$27,5+U([-2,5; 2,5])$
Rond-Point	R-01	4	6	6	-	-	-	-	$\frac{\pi}{2}$	$42,5+U([-2,5; 2,5])$
	R-02	5	10	10	-	-	-	-	$\frac{2\pi}{5}$	$42,5+U([-2,5; 2,5])$
	R-03	6	15	15	-	-	-	-	$\frac{\pi}{5}$	$42,5+U([-2,5; 2,5])$
	R-04	7	21	21	-	-	-	-	$\frac{2\pi}{7}$	$42,5+U([-2,5; 2,5])$
	R-05	8	28	28	-	-	-	-	$\frac{\pi}{4}$	$42,5+U([-2,5; 2,5])$

Tableau 2.2 — Caractéristiques des scénarios utilisés lors des tests

Finalement, l'angle de croisement entre les deux segments de vol des scénarios de type Trains est tiré selon une loi uniforme dans l'intervalle $[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$.

Les caractéristiques des scénarios utilisés lors des tests sont résumées dans la table 2.2. Figurent dans la table : le nombre total d'aéronefs $|\mathcal{A}|$, le nombre total de conflits potentiels $|\mathcal{C}|$, le nombre de conflits $|\mathcal{C}_{\Delta}|$, le nombre d'aéronefs sur chaque train horizontal $|\mathcal{A}_x^1|$ et $|\mathcal{A}_x^2|$ et sur chaque train vertical $|\mathcal{A}_y^1|$ et $|\mathcal{A}_y^2|$, l'angle entre les segments de vol α et la plus petite distance au premier conflit d_{\min} . La distance de séparation est omise parce qu'elle a été fixée à 8 NM + $U([-2,5; 2,5])$ pour tous les scénarios, avec $U([a; b])$ qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.

On précise qu'un conflit potentiel est une paire d'aéronefs dont les trajectoires prédites se croisent sur l'intervalle de commande et, parmi ceux-ci, on parle de conflit lorsque la distance minimale prédite dans l'intervalle de commande entre les deux aéronefs est inférieure à la norme de séparation D . Une distinction a été faite entre le nombre de conflits et le nombre de conflits potentiels parce que les premiers ajoutent généralement plus de complexité au problème. En outre les aéronefs appartenant à un même train ou ceux appartenant à des trains parcourant des segments parallèles ne sont pas comptés parmi les conflits potentiels parce que la contrainte de séparation est grandement simplifiée dans ces deux cas. En supposant que A_1 précède A_2 sur un même train dont le segment de vol est horizontal et orienté dans le même sens que l'axe des abscisses, la séparation est maintenue grâce aux équations linéaires

$$\begin{cases} p_{x,1}^k - p_{x,2}^k \geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_1^k + \bar{u}_2^k), \forall t_k \in \mathcal{T}^- \\ p_{x,1}^{k+1} - p_{x,2}^{k+1} \geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_1^k + \bar{u}_2^k), \forall t_k \in \mathcal{T}^- \end{cases} \quad (2-56)$$

Si A_3 parcourt un segment parallèle situé au-dessus de celui de A_1 , la séparation entre ces deux aéronefs est maintenue grâce aux équations linéaires

$$\begin{cases} p_{y,3}^k - p_{y,2}^k \geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_2^k + \bar{u}_3^k), \forall t_k \in \mathcal{T}^- \\ p_{y,3}^{k+1} - p_{y,2}^{k+1} \geq D + \frac{h^2}{8} (\bar{u}_2^k + \bar{u}_3^k), \forall t_k \in \mathcal{T}^- \end{cases} \quad (2-57)$$

2.5.2 Paramétrage de l'algorithme

L'exécution de l'algorithme de décomposition 2.1 dépend fortement de la valeur du facteur par lequel la longueur des pas de temps est multipliée, à savoir n_h . En effet, le problème $\text{TMILP}(n_h)$ est constitué d'environ n_h fois moins de contraintes et de variables que TMILP , ce qui a des conséquences potentiellement importantes sur la durée de résolution et la qualité de l'approximation de TIME par $\text{TMILP}(n_h)$. L'objectif de cette section est de caractériser la valeur de n_h fournissant le meilleur compromis entre temps de résolution et qualité des solutions trouvées en fonction des paramètres des scénarios, c'est-à-dire en fonction du nombre d'aéronefs, de conflits et de conflits potentiels.

Dans tous nos travaux de thèse, les mêmes deux solveurs ont été utilisés pour résoudre les PNL et les MILP. Les PNL ont été résolus par SNOPT (pour *Sparse Nonlinear OPTimizer*) [53], un code générique de résolution de PNL basé sur un algorithme de SQP. Les MILP ont été résolus par le solveur Gurobi [57]. Dans sa configuration par défaut, Gurobi met en œuvre un algorithme de *branch and cut* au cours duquel les relaxations linéaires sont résolues par l'algorithme du simplexe dual. Des tests ont été réalisés pour évaluer l'impact de la modification de certaines options, mais aucune de ces modifications n'a abouti à une amélioration significative sur l'ensemble des scénarios. Les options par défaut des solveurs ont donc été conservées. Le langage de modélisation AMPL [44] a été utilisé pour la description des modèles et des données et pour l'appel aux solveurs. Tous les tests ont été réalisés avec un processeur Intel quatre cœurs à 2,5 GHz et 4 Go de mémoire vive.

Afin de ne pas trop s'éloigner des conditions d'une implantation réelle, la limite sur la durée de résolution de $\text{TMILP}(n_h)$ a été fixée à 2 minutes dans ce chapitre. Le paramétrage a été réalisé sur 10 instances de chacun des 16 scénarios. Pour cela, l'algorithme 2.1 a été lancé sur les 160 instances pour $n_h = 1, 2, 3$ et 4. Le cas où $n_h = 1$ revient à ne pas décomposer le problème. Sachant que $T_c = 10$ min et $h = 30$ s, la discrétisation temporelle divise l'intervalle de commande en 20 sous-intervalles. Pour $n_h = 3$, la période de commande a été étendue à 10,5 minutes pour que le nombre de pas de temps soit un multiple de 3. Lorsque $n_h = 4$, il ne reste plus que 5 sous-intervalles, c'est pourquoi il n'a pas été jugé nécessaire de tester les valeurs plus grandes de n_h .

La résolution numérique du problème initial en temps continu, par l'une des approximations linéaire ou non linéaire, fournit un ensemble de vecteurs vitesse et accélération, $\{\mathbf{v}_i^k\}$ et $\{\mathbf{u}_i^k\}$ exprimés dans un repère cartésien. Or, les instructions de contrôle à envoyer vers le bord sont des changements de vitesse ou de cap. Les trajectoires des aéronefs sont donc obtenues en calculant les instructions de contrôle $(\Delta V, \Delta \chi)$ par

$$\begin{aligned}\Delta V_i^k &= \|\mathbf{v}_i^{k+1}\| - \|\mathbf{v}_i^k\|, \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T} \\ \Delta \chi_i^k &= \text{azm}(\mathbf{v}_i^{k+1} - \mathbf{v}_i^k), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall t_k \in \mathcal{T}\end{aligned}$$

puis en intégrant les accélérations et vitesses de virage constantes correspondantes. La position à chaque instant est donnée par les équations (2-21) et (2-22). Les trajectoires obtenues sont appelées *trajectoires simulées*. Les distances de séparation minimales entre paires d'aéronefs en conflit et les consommations de carburant sont évaluées après l'optimisation à partir de ces trajectoires. Pour cela, l'intervalle de temps est discrétisé selon une période d'échantillonnage d'une seconde et la vitesse est supposée constante sur chaque petit sous-intervalle. Le coût total est obtenu en ajoutant les pénalités d'écart au contrat 4D correspondant aux positions finales des trajectoires simulées. C'est de ce coût associé aux trajectoires simulées qu'il est question dans la suite du chapitre.

Les résultats sont présentés dans la table 2.3 pour chaque scénario et pour chaque valeur de n_h . Les indices n_h et TMILP correspondent respectivement aux résolutions de $\text{TMILP}(n_h)$ et de TMILP_δ , et l'indice TIME est explicite. Pour chaque scénario, le nombre de solutions strictement admissibles obtenues à l'issue de la résolution des dix instances est donné par $|SA_{n_h}|$, $|SA_{\text{TMILP}}|$,

Tableau 2.3 — Résultats en fonction de la valeur de n_h

Scénario	n_h	$ CV_{n_h} $	$ SA_{n_h} $	$ SA_{\text{TMLP}} $	$ SA_{\text{TIME}} $	τ_{n_h}	τ_{TIME}	$Z_{n_h} _{SA}$	$Z_{\text{TMLP}} _{SA}$	$Z_{\text{TIME}} _{SA}$
T-01	1	10	10	10	10	1	0	2,8	2,8	1,6
	2	10	10	10	10	0	0	2,8	2,6	1,6
	3	10	10	10	10	0	0	3,5	2,9	1,6
	4	10	10	10	10	0	0	3,7	3,1	1,6
T-02	1	9	10	10	10	16	1	5,6	5,6	4,0
	2	10	10	10	10	1	1	6,4	6,2	4,3
	3	10	10	10	10	1	1	9,0	7,0	4,5
	4	10	10	10	10	0	1	10,2	6,6	4,0
T-03	1	8	10	10	10	61	2	10,2	10,2	7,4
	2	10	10	10	10	6	2	10,5	10,1	7,2
	3	10	10	10	10	3	2	14,6	11,4	7,6
	4	10	10	10	10	1	3	30,3	18,1	7,5
T-04	1	0	10	10	10	120	3	15,0	15,0	11,1
	2	8	10	10	10	60	4	14,5	14,5	10,0
	3	9	10	10	10	33	4	21,6	16,2	10,8
	4	10	10	10	10	9	5	36,9	23,5	10,9
T-05	1	0	9	9	10	120	11	23,4	23,4	15,3
	2	3	10	10	10	107	6	17,3	16,5	11,4
	3	9	10	10	10	61	7	23,2	17,1	12,1
	4	9	10	10	10	36	7	40,6	25,4	12,2
T-06	1	0	4	4	9	120	51	49,6	49,6	23,7
	2	0	10	10	10	120	11	26,6	24,2	17,4
	3	0	10	10	10	120	12	39,0	25,6	16,4
	4	6	9	10	10	86	16	49,2	33,6	16,7
G-01	1	6	10	10	10	80	2	9,4	9,4	6,7
	2	10	10	10	10	21	2	9,5	8,9	6,3
	3	10	10	10	10	7	2	12,0	10,7	6,2
	4	10	10	10	10	1	2	13,3	9,4	6,3
G-02	1	0	10	10	10	120	4	20,7	20,7	12,4
	2	1	10	10	10	113	4	13,6	12,4	9,2
	3	6	10	10	10	87	5	17,1	14,7	9,9
	4	10	10	10	10	7	4	18,5	14,3	8,9
G-03	1	0	6	6	10	120	16	33,1	33,1	20,3
	2	0	10	10	10	120	6	17,9	16,5	11,8
	3	3	10	10	10	106	8	23,8	20,0	12,3
	4	7	8	10	10	69	10	42,3	28,7	11,8
G-04	1	0	5	5	8	120	39	50,0	50,0	25,8
	2	0	10	10	10	120	7	21,6	20,1	14,0
	3	3	10	10	10	102	7	21,5	17,8	11,2
	4	6	8	10	10	68	9	49,0	33,9	15,9
G-05	1	0	0	0	8	120	77	—	—	—
	2	0	8	9	9	120	24	45,7	38,0	22,0
	3	1	9	10	10	120	15	40,5	32,1	17,4
	4	5	10	10	10	99	16	55,7	35,7	16,3
R-01	1	0	10	10	10	120	1	6,9	6,9	5,4
	2	10	10	10	10	27	1	7,7	7,2	5,4
	3	10	10	10	10	5	1	9,2	8,0	5,4
	4	10	10	10	10	2	1	11,4	7,8	5,4
R-02	1	0	10	10	10	120	2	14,7	14,7	10,9
	2	0	10	10	10	120	2	13,2	12,9	9,8
	3	1	10	10	10	110	2	16,1	13,1	9,3
	4	5	10	10	10	87	2	20,9	15,6	9,8
R-03	1	0	7	7	9	120	9	57,6	57,6	24,3
	2	0	10	10	10	120	2	22,2	20,6	16,1
	3	0	10	10	10	120	3	26,8	22,6	14,9
	4	0	10	10	10	120	3	34,4	24,6	15,1
R-04	1	0	0	0	7	120	31	—	—	—
	2	0	8	10	10	120	5	54,0	48,2	30,5
	3	0	10	10	10	120	4	44,9	36,7	24,5
	4	0	10	10	10	120	4	70,3	41,4	23,9
R-05	1	0	0	0	7	120	75	—	—	—
	2	0	2	2	5	120	59	65,2	59,1	36,0
	3	0	7	8	10	120	10	68,5	52,9	32,4
	4	0	4	9	10	120	11	119,6	68,9	36,0

et $|SA_{\text{TIME}}|$. Une solution de $\text{TMILP}(n_h)$ est soit la meilleure solution trouvée après deux minutes d'exécution, soit la solution optimale avec une tolérance de 5 % sur l'écart relatif entre le coût de la meilleure solution respectant les contraintes d'intégralité et celui de la meilleure solution obtenue en relâchant ces contraintes. Le nombre de cas où Gurobi a convergé avant la limite de temps, et donc garanti l'optimalité de la solution à une tolérance près, est noté $|CV_{n_h}|$. Les temps de résolution sont notés τ_{n_h} et τ_{TIME} ; pour ne pas surcharger un tableau déjà dense, le temps de résolution TMILP_δ a été omis parce qu'il est en général petit devant τ_{n_h} . Le coût d'une solution qui n'est pas strictement admissible n'est pas pertinent puisqu'il peut être inférieur à celui de la solution optimale si les contraintes de séparation ne sont pas respectées, ou exorbitant si les bornes sur l'écart au contrat 4D ou celles sur la vitesse maximale ne sont pas respectées. Nous souhaitons en outre comparer entre eux les coûts des solutions des différents modèles pour un même scénario et un même facteur n_h , il est donc nécessaire de ne considérer que les instances pour lesquelles les solutions de tous les modèles sont strictement admissibles. Cela ne permet pas de visualiser le coût moyen des solutions strictement admissibles de TIME , donnée finalement la plus importante, mais celle-ci sera étudiée en profondeur et pour un plus grand nombre d'instances à la sous-section suivante. Au final, les valeurs de coût $Z_{n_h|SA}$, $Z_{\text{TMILP}|SA}$ et $Z_{\text{TIME}|SA}$ sont les moyennes parmi les instances pour lesquelles une solution strictement admissible a été trouvée en résolvant chacun des trois modèles pour un n_h donné. Pour améliorer la lecture, la consommation de carburant correspondant aux trajectoires de référence a été retirée du coût total. Ces coûts sont donc équivalents à une surconsommation de carburant et sont donnés en kilogrammes.

Si l'on compare d'abord les résultats ligne par ligne, on observe que les nombres de solutions optimales et strictement admissibles sont ordonnés selon

$$|CV_{n_h}| \leq |SA_{n_h}| \leq |SA_{\text{TMILP}}| \leq |SA_{\text{TIME}}|, \quad (2-58)$$

ce qui était prévu théoriquement par la propriété 2.6 et le théorème 2.1. De même, les coûts des solutions respectent l'ordre

$$Z_{n_h|SA} \geq Z_{\text{TMILP}|SA} \geq Z_{\text{TIME}|SA} \quad (2-59)$$

On note tout de même que des exceptions auraient pu se produire parce que le coût des solutions est celui obtenu à partir des trajectoires calculées alors que la propriété 2.6 et le corollaire 2.2 font référence aux coûts calculés lors de l'optimisation.

L'analyse porte ensuite sur les différences causées par la modification du facteur n_h . On constate d'abord, en toute logique, que τ_{n_h} diminue et qu'à quelques exceptions près $|CV_{n_h}|$ et $|SA_{n_h}|$ augmentent lorsque n_h augmente. L'exception se produit lors de la résolution d'instances des scénarios T-06, G-03, G-04 et R-05 pour $n_h = 4$. Les instances de ces scénarios étant très complexes, la réduction du domaine admissible découlant de l'augmentation de la taille des pas de temps est alors préjudiciable à la recherche d'une solution admissible. Des tests où le temps d'exécution n'a pas été limité ont montré que, pour certaines instances de R-05, $\text{TMILP}(4)$ n'avait aucune solution strictement admissible. Du fait de cette même réduction du domaine admissible, le coût $Z_{n_h|SA}$ est généralement croissant lorsque n_h augmente. La situation inverse, constatée pour les scénarios les plus complexes, est simplement due au fait que la solution de $\text{TMILP}(1)$ ou de $\text{TMILP}(2)$ est encore très loin de la solution optimale au moment où la limite de temps est atteinte. En effet, l'on constate que pour toutes les diminutions de $Z_{n_h|SA}$, $|CV_{n_h}| = 0$ pour le n_h le plus petit.

La croissance de $|SA_{n_h}|$ avec n_h permet globalement d'augmenter le nombre de solutions admissibles de TMILP_δ et de TIME . Le résultat important à cet égard est que pour $n_h = 3$ et $n_h = 4$, il a toujours été possible de trouver une solution admissible de TIME , ce qui constitue l'objectif primaire de la résolution de conflits. En outre, pour un scénario donné, les temps d'exécution de TIME sont nettement plus grands pour les valeurs de n_h telles que les solutions de TMILP_δ ne sont pas toutes strictement admissibles. Cela permet également aux paramétrages

$n_h = 3$ et $n_h = 4$ de se distinguer positivement, en particulier pour les scénarios les plus complexes.

Concernant le coût des solutions de TMILP_δ et de TIME , et la façon dont ils sont liés entre eux et avec les coûts des solutions de $\text{TMILP}(n_h)$, l'interprétation des résultats est moins claire étant donnée l'irrégularité de ces derniers. On note que, dans la plupart des cas, pour $n_h, n'_h \in \{1, \dots, 4\}$:

$$(Z_{n_h|SA}(n_h) \leq Z_{n_h|SA}(n'_h)) \implies (Z_{\text{TMILP}|SA}(n_h) \leq Z_{\text{TMILP}|SA}(n'_h))$$

Une telle implication n'est en revanche plus vérifiée pour le passage au coût de la solution de TIME . Le coût $Z_{\text{TIME}|SA}$ est donc étudié isolément. Cela indique d'abord que le choix de n_h a très peu d'influence sur $Z_{\text{TIME}|SA}$ lors de la résolution des instances des scénarios pour lesquels $(|C| \leq 16) \wedge (|C_\Delta| \leq 6)$, c'est-à-dire pour $T - 01$ à $T - 04$, et pour $G - 01$ et $R - 01$. Au-delà de ces valeurs, le choix $n_h = 1$ devient nettement moins intéressant du point de vue du coût. Pour les autres scénarios, il est difficile de distinguer une tendance générale entre les trois valeurs de n_h restantes. On observe seulement que le coût est nettement moins bon lors de la résolution de G-05 et de R-04 lorsque $n_h = 2$ et que le coût des résolutions de G-04 et R-05 est nettement plus grand pour $n_h = 4$ que pour $n_h = 3$. Néanmoins, ces points ne sont peut-être pas significatifs étant donné que seules dix instances de chaque scénario ont été résolues.

En conclusion, il apparaît qu'il n'y aurait finalement que très peu d'intérêt à choisir $n_h = 1$ ou $n_h = 2$, même lors du traitement de scénarios pour lesquels une solution strictement admissible a toujours été trouvée. Ces choix entraînent alors une augmentation du temps d'exécution qui n'est pas contrebalancée par une diminution systématique du coût. La distinction entre $n_h = 3$ et $n_h = 4$ semble difficile à faire. Par simplicité, l'algorithme 2.1 sera donc toujours lancé avec la même valeur du paramètre n_h . Pour son choix, on note que, bien que certains cas aient été recensés où le coût est nettement supérieur quand $n_h = 4$, ce choix diminue largement le temps d'exécution pour la plupart des scénarios de type grille. Toutefois, le fait que $\text{TIME}(4)$ trouve moins de solutions strictement admissibles que $\text{TIME}(3)$ dans 4 cas alors que l'inverse n'est vrai que pour G-05 nous a fait préférer $n_h = 3$ dans l'espoir que cela confère plus de robustesse à l'algorithme.

2.5.3 Résultats

Les expérimentations présentées dans cette sous-section ont été réalisées sur cent instances de chacun des seize scénarios. Afin de mesurer l'intérêt de l'initialisation de TIME effectuée dans l'algorithme hybride 2.1, celui-ci est confronté à deux autres algorithmes de résolution du modèle non linéaire. Le premier est plutôt une absence d'algorithme puisqu'il s'agit simplement d'entrer le modèle dans SNOPT sans aucun point de départ puis de laisser le solveur se débrouiller. Dans une telle situation, SNOPT fixe toutes les valeurs des variables à 0 et commence par chercher une solution pour laquelle les contraintes linéaires sont réalisables. Le SQP est ensuite débuté à partir du point trouvé qui ne respecte donc ni les bornes quadratiques sur la vitesse et l'accélération, ni les contraintes de séparation. Dans le deuxième algorithme, on tire profit du fait qu'une solution admissible est initialement donnée. En effet, les trajectoires de référence satisfont nécessairement toutes les contraintes à part celles de séparation. Bien qu'il ait déjà été vu dans la sous-section précédente que l'initialisation par des solutions qui ne sont pas strictement admissibles conduit en général à des temps d'exécution plus longs et à un plus grand nombre d'échecs de la résolution de TIME , les trajectoires de référence représentent ce que l'on peut espérer de mieux sans calcul supplémentaire.

Les résultats de la confrontation entre les trois algorithmes sont synthétisés par les courbes en figure 2.7. Les scénarios ont été portés en abscisse des graphiques ; ils ont été ordonnés par coût moyen croissant en prenant les solutions de l'algorithme hybride pour référence. Les résultats obtenus à la fin de la résolution de TMILP_δ ont également été portés sur chaque graphique. Sur

la figure 2.7(a), le nombre de solutions strictement admissibles en fonction des scénarios a été tracé pour chaque algorithme. Les courbes en figure 2.7(b) donnent le coût moyen des solutions strictement admissibles. Cette fois la moyenne a été faite sur toutes les solutions strictement admissibles pour chaque algorithme. Même si cela biaise la comparaison lorsque les instances résolues avec succès ne sont pas les mêmes, il s'agit du seul moyen d'avoir suffisamment de données à comparer lorsque l'un des algorithmes n'obtient que très peu de solutions, voire aucune solution strictement admissible. Les points des graphiques où le coût est égal à 0 sont ceux où aucune solution strictement admissible n'a été trouvée. Finalement, les temps d'exécution moyens sont tracés sur la figure 2.7(c). Le temps d'exécution du MILP est donné par la somme des temps d'exécution de $\text{TMILP}(n_h)$ et de TMILP_δ , et celui de l'algorithme hybride est ensuite obtenu en ajoutant le temps d'exécution de TIME. Pour les deux autres algorithmes, le temps d'exécution se résume à celui passé dans la résolution de TIME.

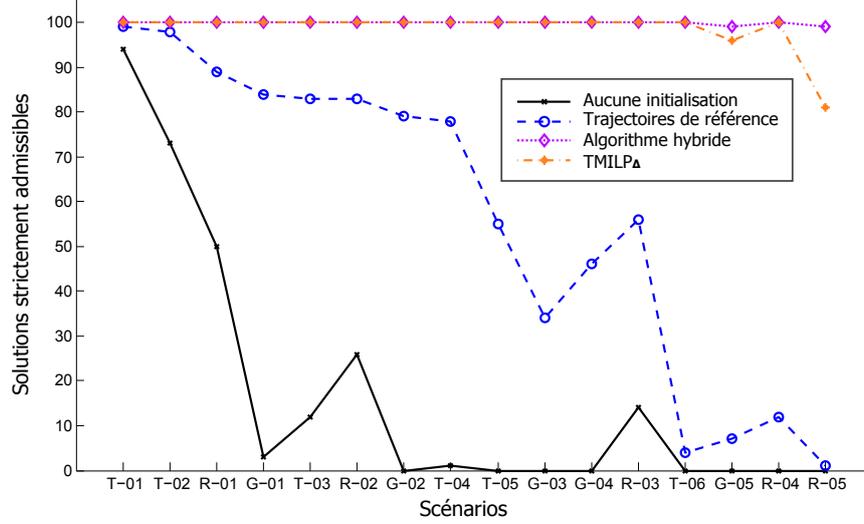
Les résultats mettent en évidence le bénéfice lié à l'utilisation de l'algorithme hybride 2.1 pour fournir un point de départ à la résolution de TIME. Sur tous les scénarios, l'algorithme hybride est à la fois celui pour lequel le plus de solutions strictement admissibles sont trouvées et celui dont les solutions strictement admissibles sont les moins chères en moyenne. Ces meilleurs résultats sont en outre obtenus pour des temps d'exécution comparables. La comparaison des résultats de TMILP_δ et de l'initialisation par les trajectoires de référence permet de justifier la supériorité de l'algorithme hybride. En effet, elle montre que le point de départ de la résolution du PNL dans l'algorithme hybride a en général un meilleur coût et qu'il est plus souvent strictement admissible que la solution finale de l'initialisation par les trajectoires de référence. Il est en outre essentiel de souligner que l'algorithme hybride a été capable de trouver des solutions admissibles pour pratiquement toutes les instances. Seule une instance n'a pas été résolue pour chacun des scénarios les plus complexes de types Grille et Rond-point, à savoir G-05 et R-05. L'importante diminution du nombre de solutions strictement admissibles lors de la résolution de G-05 par TMILP_δ semble toutefois indiquer que les limites de l'algorithme sont proches.

En se concentrant sur la résolution sans initialisation, il apparaît que celle-ci n'obtient aucune solution admissible pour huit des seize scénarios, que le coût moyen des solutions strictement admissibles est toujours le plus grand et que le temps d'exécution pour y parvenir est également supérieur à celui des autres algorithmes. Il est par ailleurs clair, au vu des résultats bien meilleurs de l'initialisation par les trajectoires de référence, qu'il est toujours profitable de fournir ce point de départ à la résolution du PNL puisque leur obtention ne requiert aucun calcul supplémentaire.

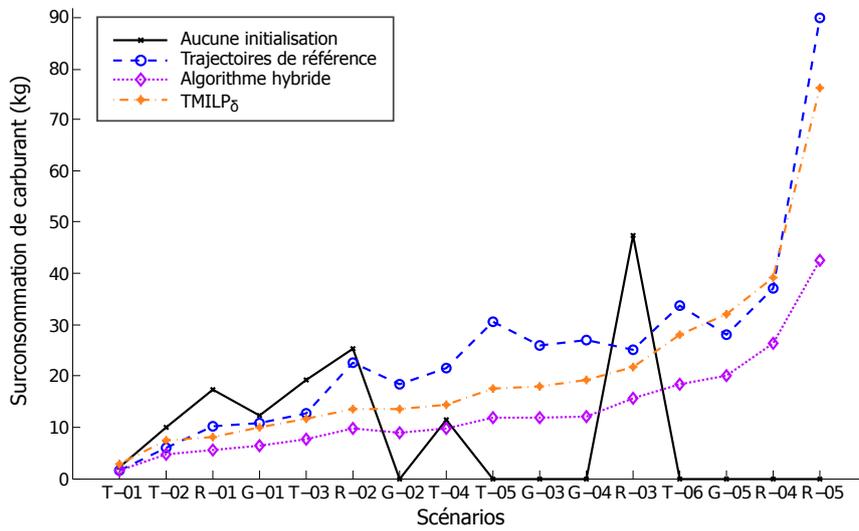
L'allure des trajectoires trouvées est illustrée pour une instance du scénario R-03 dont la seule spécificité est qu'une solution strictement admissible a été trouvée par chaque algorithme. Les trajectoires sans conflit engendrées par les trois algorithmes et la solution de TMILP_δ pour cette instance sont tracées sur la figure 2.8. Les coûts des solutions de TMILP_δ et de l'initialisation par les trajectoires de référence sont 30 % supérieurs à celui de l'algorithme hybride, et le coût de la solution sans initialisation est 5 fois supérieur à ce dernier. On constate que la résolution de TIME à partir de la solution de TMILP_δ laisse la forme générale de cette dernière inchangée. En particulier, lors de la résolution de chaque conflit, l'aéronef passant devant est toujours le même dans les deux solutions.

2.6 Conclusion

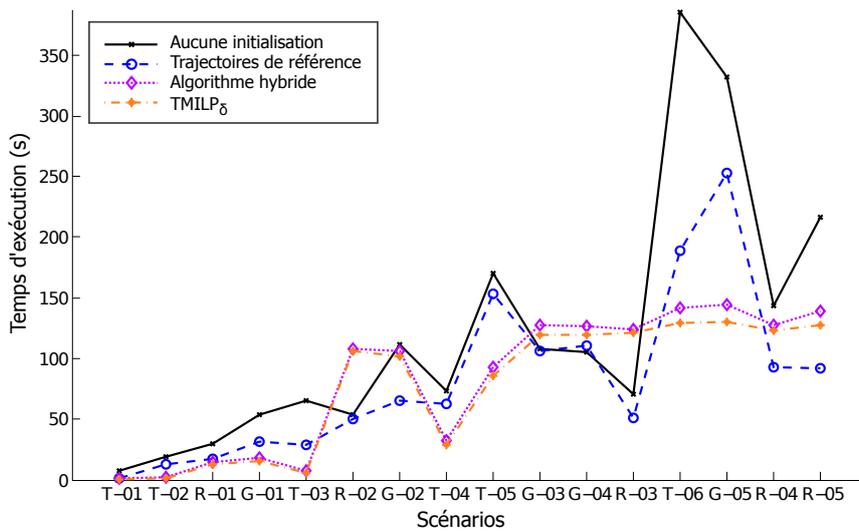
La spécification du problème de résolution de conflits aériens mène à une formulation en temps continu. Pour résoudre le problème numériquement, l'intervalle de temps a été discrétisé et les contraintes ont été reformulées de façon à obtenir un PNL non convexe. L'initialisation de la résolution étant généralement critique pour des PNL non convexes, ce modèle a été linéarisé en introduisant notamment des variables binaires. Lors du processus d'approximations successives du problème initial, il a par ailleurs été porté un soin particulier à la caractérisation de la qualité des approximations, à la réduction des instabilités numériques et au resserrement de



(a) Nombre de solutions strictement admissibles



(b) Coût moyen des solutions strictement admissibles



(c) Temps d'exécution moyen

Figure 2.7 — Comparaison des algorithmes de résolution du modèle non linéaire

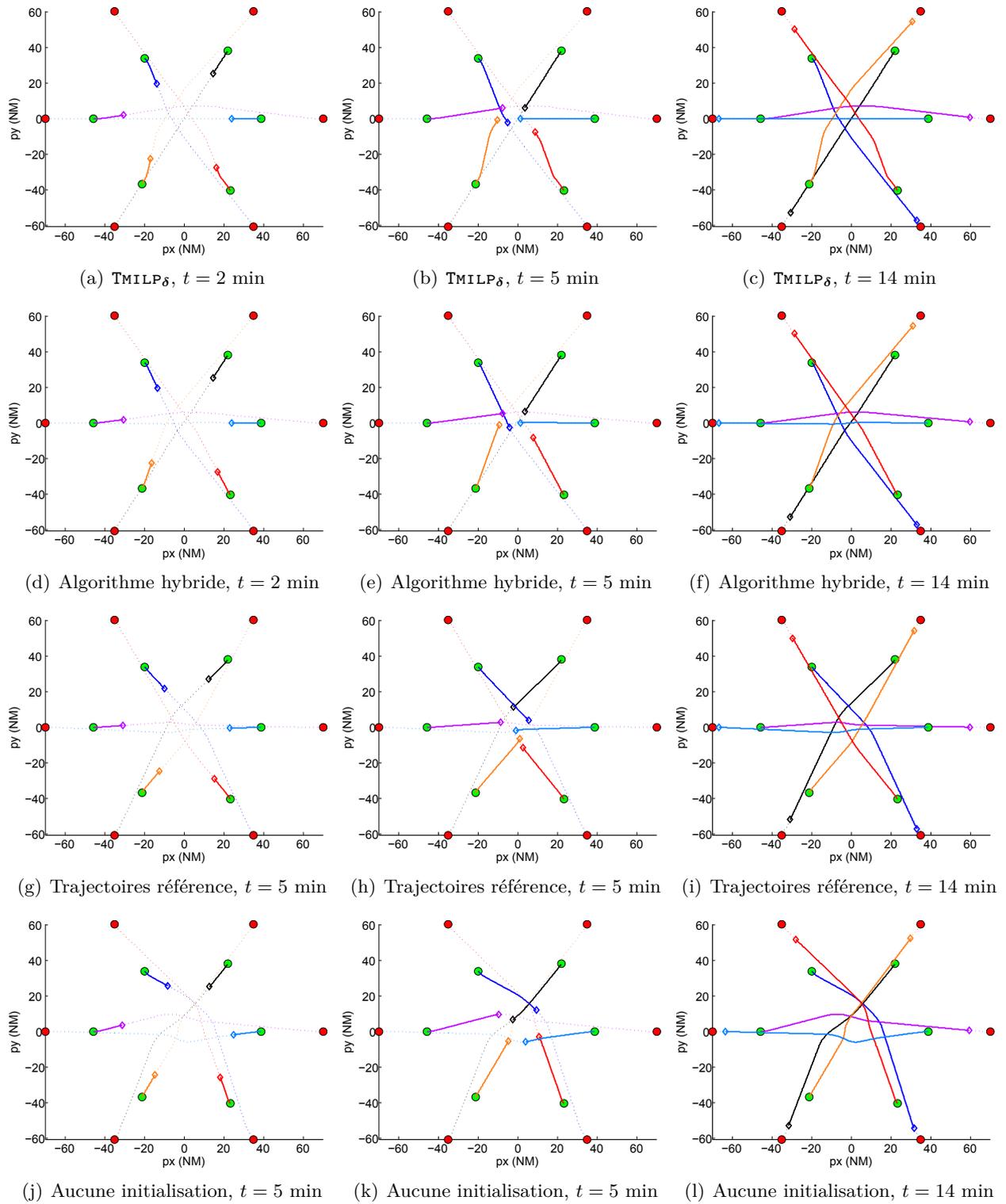


Figure 2.8 — Trajectoires générées pour une instance de R-03

la formulation en programmation linéaire mixte. Un algorithme de décomposition a ensuite été développé pour accélérer la résolution du MILP. Finalement, l'efficacité du processus d'initialisation par la résolution d'une approximation linéaire a été validée par des tests sur un grand nombre de jeux de données.

Les limites de cette modélisation apparaissent néanmoins lors du traitement des plus gros jeux de données. Pour le scénario R-05, dans 20 % des cas, la résolution du MILP ne parvient pas à fournir une solution strictement admissible avant que la limite de temps ne soit atteinte. Cela entraîne une nette augmentation du coût des solutions et l'apparition d'un cas où aucune solution strictement admissible n'est trouvée après résolution du PNL. Il est également important de noter que la résolution du MILP ne converge avant la limite de temps que pour de petites instances. Cette relative lenteur du processus exclut par exemple d'utiliser cet algorithme pour fournir très rapidement des trajectoires sans conflit aux contrôleurs. Par ailleurs, cela indique que cet algorithme n'est sans doute pas le meilleur si l'on souhaite prendre en compte les incertitudes, dans la mesure où leur inclusion est susceptible de grandement complexifier les modèles de programmation non linéaire et linéaire mixte.

Chapitre

3

Modélisations par la programmation linéaire mixte pour une étude comparative

Aperçu

3.1	Discrétisation temporelle à une commande : le modèle ONE	104
3.1.1	Modèle dynamique	104
3.1.2	Contraintes de séparation	105
3.1.3	Critère	107
3.1.4	Formulation complète du modèle ONE	109
3.1.5	Résolution par horizon glissant	109
3.2	Discrétisation spatiale : le modèle SPACE	110
3.2.1	Discrétisation spatiale du problème	110
3.2.2	Contraintes de séparation	112
3.2.3	Bornes sur les variables de commande	117
3.2.4	Critère	118
3.2.5	Formulation complète du modèle SPACE	120
3.3	Comparaison théorique	120
3.4	Comparaison expérimentale sur jeux de données artificiels	121
3.5	Conclusion	124

Lorsqu'un modèle précis est utilisé et résolu en programmation non linéaire, il s'avère parfois coûteux en temps de calcul de produire une solution réalisable. L'objet de ce chapitre est de développer des alternatives plus rapides mettant en jeu des modèles linéaires à variables mixtes. Pour cela, deux approches classiques, caractérisées respectivement par une commande unique et par une discrétisation spatiale des états et des commandes, ont été empruntées à la littérature. La finalité de l'étude étant de comparer les approches entre elles, les deux modèles linéaires sont adaptés de façon à constituer des approximations aussi fines que possible du modèle non linéaire. Des expériences sur des jeux de données construits artificiellement et sur des jeux issus de plans de vol avérés sont ensuite réalisées pour confronter les approches.

Dans le chapitre précédent, une formulation complète et précise du problème a été développée en programmation non linéaire pour le résoudre numériquement. L'objet de ce chapitre est de comparer ce modèle non linéaire à deux modélisations linéaires à variables mixtes obtenues par des simplifications classiques dans la littérature. L'enjeu de cette comparaison est double. Il s'agit dans un premier temps d'estimer théoriquement et expérimentalement la dégradation des solutions due aux simplifications et le gain engendré en termes de temps de calcul. La principale difficulté de cette approche est d'homogénéiser les formulations afin qu'elles modélisent autant que possible les mêmes types de manœuvres, les mêmes contraintes et le même objectif. Pour cela, le modèle en temps continu 2-18 est pris comme référence. Le second enjeu est de déterminer une alternative à la modélisation non linéaire pour prendre en compte les incertitudes lors de la résolution de conflits.

Dans la section 3.1, une première approximation linéaire du problème est réalisée en n'autorisant qu'une manœuvre par aéronef pour la résolution des conflits. La seconde approximation, décrite en section 3.2, est effectuée en discrétisant spatialement le problème. Les modèles sont ensuite comparés théoriquement en section 3.3. La comparaison expérimentale est quant à elle effectuée en section 3.4. Pour cela, les instances décrites dans la sous-section 2.5.1 du chapitre précédent sont à nouveau résolues après avoir été modélisées par les deux approximations linéaires.

3.1 Discrétisation temporelle à une commande : le modèle ONE

Dans cette section, l'horizon de commande est réduit à la première période d'échantillonnage, c'est-à-dire que chaque aéronef effectue au plus un changement de vecteur vitesse pour la résolution des conflits. La trajectoire complète est ensuite obtenue en résolvant à nouveau le problème à chaque pas de temps selon un processus d'horizon glissant. La formulation en programmation linéaire obtenue pour **TMILP** se simplifie alors nettement. Il devient notamment inutile de recourir à l'approximation par quatre tangentes ou plus pour maintenir la séparation, et le nombre de variables est évidemment divisé par le nombre de pas d'échantillonnage de l'intervalle de commande. Le MILP résultant est appelé **ONE**; il est similaire sur certains points au modèle de Vela [107] décrit dans la sous-section 1.2.5 de l'état de l'art. Il s'en distingue néanmoins par les trois points suivants.

Variations continues de la vitesse : Il n'est pas supposé que les changements de vitesse sont instantanés, les manœuvres sont modélisées avec un vecteur d'accélération constant.

Bornes sur l'accélération : Les composantes des vecteurs accélération sont bornées de façon à respecter les bornes supérieures sur l'accélération et la vitesse de rotation.

Modélisation du coût : Vela modélise la consommation de fuel avec des variables **SOS2** induisant des branchements supplémentaires pendant la résolution. Une modélisation du coût n'impliquant que des variables continues a été préférée pour **ONE** parce qu'elle permet de réduire la complexité informatique du modèle.

3.1.1 Modèle dynamique

Le modèle contient un vecteur de variables de commande \mathbf{u}_i pour chaque aéronef. La dynamique est donnée par la contrainte linéaire

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{\text{ini}} + h\mathbf{u}_i \quad (3-1)$$

En combinant les bornes de vitesse et celles d'accélération, il vient que la norme de la vitesse est bornée par

$$\max \left(V^{\min}, \left\| \mathbf{v}^{\text{ini}} \right\| - hU^{\max} \right) \leq \left\| \mathbf{v} \right\| \leq \min \left(V^{\max}, \left\| \mathbf{v}^{\text{ini}} \right\| + hU^{\max} \right)$$

Grâce aux approximations par des cordes et des tangentes, on obtient donc des contraintes similaires aux contraintes (2-41)-(2-44) du modèle **TMILP**, à la différence près que les bornes sur l'accélération sont directement incluses dans celles sur la vitesse. En outre, le changement de cap maximum est obtenu, sans avoir à faire d'hypothèse sur le mouvement des aéronefs, par $\chi^{\max} = h \times \omega^{\max}$.

$\forall A_i \in \mathcal{A}$:

$$\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{e}(\theta) \rangle \leq \bar{v}_i \times \cos\left(\frac{\pi}{N_v}\right), \forall \theta \in \Theta_v, \quad (3-2)$$

$$\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{e}(\theta) \rangle \geq \max\left(V_i^{\min}, \|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| - hU^{\max}\right) - M_{v,i}^{\theta} \epsilon_i^{\theta}, \forall \theta \in \Theta_v, \quad (3-3)$$

$$V_i^{\min} \leq \bar{v}_i \leq \min\left(V_i^{\max}, \|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| + hU^{\max}\right) \quad (3-4)$$

$$\sum_{\theta \in \Theta_v} \epsilon_i^{\theta} \leq N_v - 1, \quad (3-5)$$

$$\epsilon_i^{\theta} \in \{0, 1\}, \forall \theta \in \Theta_v, \quad (3-6)$$

Les contraintes (3-2)-(3-6) constituent une approximation suffisante des bornes sur la vitesse et sur l'accélération. On peut montrer par ailleurs qu'elles ont un facteur de qualité égal à $\cos\left(\frac{\pi}{N_v}\right)$. Les variables \bar{v} sont introduites pour les mêmes raisons que dans le chapitre précédent, sections 2.2 et 2.3. En revanche, les variables \underline{v} ne sont pas nécessaires.

Les valeurs des constantes *grand M* de (3-3) sont obtenues à partir de l'équation (2-48), en remplaçant V_i^{\min} par $\max(V_i^{\min}, \|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| - hU^{\max})$.

La vitesse initiale étant connue, la contrainte sur la vitesse de virage s'exprime linéairement en reprenant directement l'expression de la contrainte non linéaire (2-31) :

$$\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i^{\text{ini}} \rangle \geq \bar{v}_i \|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| \cos(h\omega^{\max}), \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (3-7)$$

Le facteur de qualité de ces contraintes vaut également $\cos\left(\frac{\pi}{N_v}\right)$.

3.1.2 Contraintes de séparation

Lorsque le changement de vitesse est instantané, la séparation entre aéronefs peut être représentée par un cône interdit, dessiné sur la figure 1.11, modélisé ensuite par deux contraintes linéaires (1-40)-(1-41). Pour une manœuvre à accélération constante, les équations des tangentes formant le cône interdit dépendent de la position en fin de manœuvre, qui dépend elle-même de la commande \mathbf{u}_i . Il n'est donc a priori pas possible de modéliser la séparation linéairement par la même approche.

Il est cependant possible, à partir d'un changement de vitesse réalisé avec un vecteur accélération constant sur un intervalle de temps donné, de se ramener à un changement de vitesse instantané.

Propriété 3.1

Soit $\mathbf{p}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^2$ et $h, T \in \mathbb{R}, h < T$. On définit les deux fonctions $\mathbf{p} : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, et $\tilde{\mathbf{p}} : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\mathbf{p}(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}_0 + \frac{t^2}{2}\mathbf{u}_0, & 0 \leq t \leq h \\ \mathbf{p}_0 + h\mathbf{v}_0 + \frac{h^2}{2}\mathbf{u}_0 + (t-h)(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0h), & t \geq h \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}_0, & 0 \leq t \leq \frac{h}{2} \\ \mathbf{p}_0 + \frac{h}{2}\mathbf{v}_0 + (t - \frac{h}{2})(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0h), & t \geq h/2 \end{cases}$$

alors, $\forall t \geq h : \mathbf{p}(t) = \tilde{\mathbf{p}}(t)$.

Démonstration : Le résultat est immédiat en observant que $\mathbf{p}(h) = \tilde{\mathbf{p}}(h)$ et que $\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}(t)}{dt}$, $\forall t \geq h$. ■

D'après la propriété 3.1, la trajectoire résultant d'une manœuvre à vecteur accélération constant réalisée sur $[0; h]$ est la même, à partir de l'instant h que celle résultant d'un changement de vitesse instantané effectué à l'instant $h/2$. On définit alors $\forall A_i \in \mathcal{A}$:

$$\tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}} = \mathbf{p}_i^{\text{ini}} + \frac{h}{2} \mathbf{v}_i^{\text{ini}}. \quad (3-8)$$

Considérons ensuite $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ dont la séparation est supposée garantie sur $[0; h]$. Les deux vecteurs unitaires normaux aux tangentes décrivant le cône interdit sont calculés en supposant que les positions initiales de A_i et A_j sont $\tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}}$ et $\tilde{\mathbf{p}}_j^{\text{ini}}$. En notant $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^-$ ces deux vecteurs, les contraintes

$$\langle \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle \geq -M_{i,j} \delta_{ij} \quad (3-9)$$

$$\langle \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^- \rangle \geq -M_{i,j} (1 - \delta_{ij}) \quad (3-10)$$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\} \quad (3-11)$$

garantissent la séparation de A_i et A_j pour $t \geq h/2$ s'ils effectuent un changement de vitesse instantané à $t = h/2$. Elles garantissent donc aussi la séparation de A_i et A_j pour $t \geq h$ s'ils effectuent une manœuvre équivalente à vecteur accélération constant sur $[0; h]$.

Sur l'intervalle $[0; h]$, la séparation n'est pas garantie en général par les équations (3-9) et (3-10). Ces contraintes ne sont par exemple pas valides lorsque $\tilde{\mathbf{p}}_j^{\text{ini}}$ est dans le cercle interdit de A_i . Il est donc important qu'aucune modification de l'accélération ne soit faite lorsque la distance minimum doit être atteinte dans la prochaine période d'échantillonnage. Cela suppose que des manœuvres d'évitement ont déjà été effectuées et qu'aucun conflit n'est prévu si les vitesses sont inchangées. C'est le cas si le processus d'horizon glissant décrit dans la section (3.1.5) anticipe suffisamment les conflits.

Dans le contexte d'une résolution de conflit par une manœuvre unique faite à accélération constante, les contraintes (3-9) et (3-10) sont équivalentes aux contraintes de séparation non linéaires en temps continu du modèle (2-18) pour tout $t \geq h$. Aucune approximation n'est donc requise à ce stade parce que le domaine admissible a déjà été grandement réduit du fait des hypothèses constitutives de ce modèle.

Remarque 3.1. *Les contraintes de séparation (3-9) et (3-10) sont également valides pour des aéronefs appartenant à un même train d'avions, mais elles sont alors inefficaces puisqu'elles requièrent des vecteurs vitesse garantissant la séparation à l'infini. Comme pour le modèle TIME, ce cas est donc traité à part grâce à une contrainte linéaire n'impliquant que des variables continues, comme dans (2-56).*

Pour le calcul de $M_{i,j}$, on note que

$$\langle \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle \geq -(\|\mathbf{v}_i\| + \|\mathbf{v}_j\|)$$

Ainsi, une bonne valeur de $M_{i,j}$ est obtenue par :

$$M_{i,j} = V_i^{\max} + V_j^{\max}, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C} \quad (3-12)$$

Une meilleure valeur de $M_{i,j}$ aurait pu être trouvée en considérant aussi l'orientation et la norme initiales des vecteurs vitesse, mais cela ne mène en pratique qu'à une faible diminution de la constante. C'est pourquoi ce calcul n'est pas donné ici.

3.1.3 Critère

La définition d'un critère pose problème parce que l'unique commande ne permet pas de construire des trajectoires allant de la position initiale au point objectif du contrat 4D. Pour remédier à cela, des variables supplémentaires sont ajoutées afin de simuler un retour sur trajectoire. Ces variables ne sont pas des variables de décision puisqu'elles ne correspondent pas à des manœuvres qui seront effectivement réalisées. Elles permettent seulement d'effectuer une approximation de la récupération du contrat 4D. Ces variables modélisent un changement de vitesse instantané réalisé une fois le conflit dépassé et permettant de rejoindre directement le point de passage du contrat 4D. La première étape consiste à estimer l'instant à partir duquel les aéronefs peuvent débiter la manœuvre de récupération du contrat 4D. Le calcul du coût à proprement parler est traité dans un second temps.

Manœuvre de récupération du contrat 4D

Propriété 3.2

Soit A_i et A_j deux aéronefs en conflit dont les trajectoires se croisent en formant un angle $\theta_{i,j}$. Soit \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_j les positions des aéronefs à $t = 0$ et supposons que les aéronefs se déplacent à vitesses constantes \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j .

La séparation entre A_i et A_j est garantie pour tout $t \geq \tau_{i,j} = \min(\tau_{i,j}^i, \tau_{i,j}^j)$ où

$$\tau_{i,j}^i = \frac{v_{x,j}(p_{y,i} - p_{y,j}) - v_{y,j}(p_{x,i} - p_{x,j})}{v_{x,i}v_{y,j} - v_{y,i}v_{x,j}} + \frac{D}{\sin \theta_{i,j} \|\mathbf{v}_i\|}$$

$$\tau_{i,j}^j = \frac{v_{x,i}(p_{y,j} - p_{y,i}) - v_{y,i}(p_{x,j} - p_{x,i})}{v_{y,i}v_{x,j} - v_{y,j}v_{x,i}} + \frac{D}{\sin \theta_{i,j} \|\mathbf{v}_j\|}$$

$\tau_{i,j}$ est l'instant de résolution du conflit (A_i, A_j) .

Démonstration : Soit O le point de croisement entre les trajectoires de A_i et A_j . Les instants $t_{i,j}^i$ et $t_{i,j}^j$ auxquels les aéronefs atteignent O sont calculés en résolvant le système

$$\mathbf{p}_i + t_{i,j}^i \mathbf{v}_i = \mathbf{p}_j + t_{i,j}^j \mathbf{v}_j$$

soit

$$t_{i,j}^i = \frac{v_{x,j}(p_{y,i} - p_{y,j}) - v_{y,j}(p_{x,i} - p_{x,j})}{v_{x,i}v_{y,j} - v_{y,i}v_{x,j}}$$

$$t_{i,j}^j = \frac{v_{x,i}(p_{y,j} - p_{y,i}) - v_{y,i}(p_{x,j} - p_{x,i})}{v_{y,i}v_{x,j} - v_{y,j}v_{x,i}}$$

Un point situé à une distance l_i de O sur la trajectoire de A_i est à une distance $l_i \sin \theta_{i,j}$ de la trajectoire de A_j . Ainsi tout point situé à une distance $l_i \geq \frac{D}{\sin \theta_{i,j}}$ de O sur la trajectoire de A_i est nécessairement à une distance supérieure à D de la trajectoire de A_j . Considérant que le parcours d'une telle longueur dure $\frac{D}{\sin \theta_{i,j} \|\mathbf{v}_i\|}$, on déduit l'expression de $\tau_{i,j}^i$. Le même raisonnement appliqué à A_j donne l'expression de $\tau_{i,j}^j$. ■

Soit $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$. En appliquant la propriété 3.2, une approximation $\tilde{\tau}_{i,j}$ de l'instant de résolution de (A_i, A_j) est calculée en prenant $\tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}}$ et $\tilde{\mathbf{p}}_j^{\text{ini}}$ comme positions initiales et en supposant que A_i et A_j se déplacent à vitesse constante $\mathbf{v}_i^{\text{ini}}$ et $\mathbf{v}_j^{\text{ini}}$. Finalement, l'instant $\tilde{\tau}_i^{4D}$ à partir duquel un aéronef peut commencer à récupérer sa trajectoire 4D est donné par le plus grand instant de résolution des conflits dans lesquels il est engagé, c'est-à-dire

$$\tilde{\tau}_i^{4D} = \max\{\tilde{\tau}_{i,j} : (A_i, A_j) \in \mathcal{C} \vee (A_j, A_i) \in \mathcal{C}\}, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (3-13)$$

En tâchant de récupérer le contrat 4D dès $\tilde{\tau}_i^{4D}$, un aéronef débute sa manœuvre aussi tôt que possible, ce qui constitue généralement la démarche la plus efficace.

Remarque 3.2. Le caractère approximatif du calcul de $\tilde{\tau}_i^{4D}$ est dû au fait que les instants de résolution sont modifiés si des changements de vitesse sont réalisés. Soulignons cependant que les erreurs d'approximation n'auront d'impact que sur la valeur de l'objectif puisque ces manœuvres de récupération ne seront pas exécutées ; les contraintes de séparation garantissent qu'un retour vers le contrat 4D ne soit pas exécuté trop tôt. Par ailleurs, l'approximation devient négligeable dès le deuxième pas de temps de la résolution par horizon glissant décrite dans la section 3.1.5, car les plus gros changements de vitesse sont faits au premier pas de temps de la résolution.

Il est désormais possible de calculer la manœuvre de récupération. La position des aéronefs à l'instant $\tilde{\tau}_i^{4D}$ est

$$\mathbf{p}_i(\tilde{\tau}_i^{4D}) = \tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}} + (\tilde{\tau}_i^{4D} - \frac{h}{2})\mathbf{v}_i, \forall A_i \in \mathcal{A}$$

Ainsi, en notant \mathbf{v}_i^{4D} la vitesse de A_i pendant la récupération de son contrat 4D, il vient que

$$\mathbf{p}_i(t_i^{4D}) = \mathbf{p}_i(\tilde{\tau}_i^{4D}) + (t_i^{4D} - \tilde{\tau}_i^{4D})\mathbf{v}_i^{4D}, \forall A_i \in \mathcal{A}$$

La récupération du contrat 4D est alors gouvernée par les contraintes sur la position à l'instant t_i^{4D} , $\forall A_i \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{L,i}^- + \Delta_{L,i}^+ &= \left\langle \mathbf{p}_i^{4D} - \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) \mid \mathbf{s}_i^{4D} \right\rangle \\ \Delta_{L,i}^+ - \Delta_{L,i}^- &\leq \Delta_{\parallel,L}^{\max,i} \\ \left\langle \mathbf{p}_i^{4D} - \mathbf{p}_i(t_i^{4D}) \mid \mathbf{n}_i^{4D} \right\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3-14)$$

Linéarisation de la fonction de coût

En résumé, la trajectoire d'un aéronef A_i , telle que modélisée lors de l'optimisation de ONE, est composée, dans l'ordre chronologique, de :

1. un segment initial, parcouru en un temps $h/2$, joignant les positions $\mathbf{p}_i^{\text{ini}}$ et $\tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}}$ à vitesse constante $\mathbf{v}_i^{\text{ini}}$;
2. un segment de résolution, parcouru en un temps $\tilde{\tau}_i^{4D} - h/2$, joignant les positions $\tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}}$ et $\mathbf{p}_i(\tilde{\tau}_i^{4D})$ à vitesse constante \mathbf{v}_i ; et
3. un segment de récupération, parcouru en un temps $t_i^{4D} - \tilde{\tau}_i^{4D}$, joignant les positions $\mathbf{p}_i(\tilde{\tau}_i^{4D})$ et $\mathbf{p}_i(t_i^{4D})$ à vitesse constante \mathbf{v}_i^{4D} ;

La consommation de fuel de A_i est donc donnée par

$$\frac{h}{2} C_t \left(\left\| \mathbf{v}_i^{\text{ini}} \right\| \right) + \left(\tilde{\tau}_i^{4D} - \frac{h}{2} \right) C_t \left(\left\| \mathbf{v}_i \right\| \right) + \left(t_i^{4D} - \tilde{\tau}_i^{4D} \right) C_t \left(\left\| \mathbf{v}_i^{4D} \right\| \right) + \Delta_{L,i} C_d \left(\left\| \mathbf{v}_i^{4D} \right\| \right)$$

L'expression de cette fonction est non linéaire mais il a été vu au chapitre précédent, section 2.3.3, qu'elle pouvait être approchée à l'aide d'une fonction linéaire par morceaux. Des contraintes semblables à (2-51) sont donc ajoutées :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i &\geq \left(\tilde{\tau}_i^{4D} \right) \left(\alpha_c^n \bar{v}_i + \beta_c^n \right), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, \dots, N_Z\} \\ \tilde{z}_i^{4D} &\geq \left(t_i^{4D} - \tilde{\tau}_i^{4D} - \frac{h}{2} \right) \left(\alpha_c^n \bar{v}_i^{4D} + \beta_c^n \right), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, \dots, N_Z\} \end{aligned} \quad (3-15)$$

où le majorant de la vitesse de récupération du contrat 4D est obtenu grâce aux contraintes

$$\begin{aligned} \forall A_i \in \mathcal{A} : \quad \left\langle \mathbf{v}_i^{4D} \mid \mathbf{e} \left(\frac{2n\pi}{N'_v} \right) \right\rangle &\leq \bar{v}_i^{4D} \times \cos \left(\frac{\pi}{N} \right), \forall n \in \{1, \dots, N'_v\} \\ \bar{v}_i^{4D} &\leq V^{\max} \end{aligned} \quad (3-16)$$

avec $N'_v \in \mathbb{N}$. L'approximation déjà réalisée pour TMILP est également faite ici pour estimer le coût du parcours de l'écart latéral. Plus précisément, ce coût est calculé comme si l'écart était parcouru à vitesse nominale.

3.1.4 Formulation complète du modèle ONE

En ajoutant les pénalités de respect du contrat à la consommation de carburant, on est finalement en mesure de résumer le modèle ONE :

$$\text{ONE : } \left\{ \begin{array}{l} \min. \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left[\tilde{z}_i + \tilde{z}_i^{4D} + \frac{h}{2} C_t \left(\|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| \right) + \left(\Delta_i^+ + \Delta_i^- \right) \times C_d \left(V_i^{\text{nom}} \right) + \rho^+ \Delta_i^+ + \rho^- \Delta_i^- \right] \\ \text{sous les contraintes (3-1) – (3-7), (3-9) – (3-10) et (3-14) – (3-16) avec} \\ \forall A_i \in \mathcal{A} : \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i^{4D} \in \mathbb{R}^2, \\ \forall A_i \in \mathcal{A} : \bar{v}_i \geq 0, \bar{v}_i^{4D} \geq 0, \Delta_i^+ \geq 0, \Delta_i^- \leq 0, \tilde{z}_i \geq 0 \\ \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, \dots, N_v\} : \epsilon_i^n \in \{0, 1\} \\ \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C} : \delta_{ij} \in \{0, 1\} \end{array} \right. \quad (3-17)$$

3.1.5 Résolution par horizon glissant

La résolution de ONE produit au plus un changement de vitesse par aéronef, réalisé par un vecteur accélération constant pendant une durée h . En effet, le second changement de vitesse permettant de revenir vers le contrat 4D n'est inclus dans le modèle que pour estimer le coût. Il ne donne donc pas lieu à une instruction de contrôle immédiate. L'instruction de contrôle correspondante n'est envoyée qu'une fois que tous les conflits potentiels dans lesquels un aéronef est impliqué sont dépassés. Ainsi, les manœuvres de retour ne peuvent pas donner lieu à de nouveaux conflits.

Afin d'obtenir des trajectoires complètes comparables aux solutions de TIME, il est nécessaire de répéter la résolution à chaque pas de temps $t_k \in \mathcal{T}$. L'algorithme associé correspond à un horizon glissant dont la période d'échantillonnage et l'horizon de commande valent h . À chaque itération, la prédiction de la trajectoire de $A_i \in \mathcal{A}$ est réalisée jusqu'à l'instant t_i^{4D} . Le processus de résolution par horizon glissant est récapitulé dans l'algorithme 3.1.

L'instruction conditionnelle des lignes 6-7 permet de garantir la validité des contraintes de séparation (3-9)-(3-10). En effet, il a été noté en sous-section 3.1.2 que ces contraintes n'étaient valides que si l'accélération d'aéronefs en conflit était nulle pendant l'intervalle de commande où la distance minimum entre ces aéronefs est atteinte. Ainsi, pour tout $t_k \in \mathcal{T}^-$ et tout $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$, si l'intervalle de commande courant est $[t_k; t_k + h]$ et que la distance minimum entre A_i et A_j est atteinte à $t_{i,j}^{\min}$ tel que $t_{i,j}^{\min} \in [t_k; t_k + h]$, on pose $\mathbf{u}_i = 0$ et $\mathbf{u}_j = 0$.

L'instruction conditionnelle formée par les lignes 10-12 permet de changer de mode à partir du moment où tous les conflits dans lesquels un aéronef est engagé sont résolus. Le changement de vitesse de l'aéronef est alors utilisé pour récupérer son contrat 4D, ce qui rend la variable \mathbf{v}_i^{4D} inutile. Toutefois, sachant que la dernière manœuvre des aéronefs débute au plus tard au dernier instant d'échantillonnage t_K , alors, en posant $\tilde{\tau}_i^{4D} = t_K$ et en ajoutant la contrainte $\langle \mathbf{v}_i^{4D} | \mathbf{n}^{4D} \rangle = 0$, la variable \mathbf{v}_i^{4D} permet de prévoir la stabilisation de la vitesse à la fin de l'intervalle de prédiction.

À chaque période d'échantillonnage $t_k \in \mathcal{T}$ une solution optimale ζ_{ONE}^k de ONE est produite. Une fois toutes les résolutions de l'horizon glissant effectuées, on peut donc construire une solution complète ζ_{ONE} à partir de l'ensemble de solutions optimales $\{\zeta_{\text{ONE}}^k\}_{t_k \in \mathcal{T}^-}$. Les instructions de contrôle, et les trajectoires qui en résultent, sont ensuite construites à partir de ζ_{ONE} . Dans la suite, cette solution est simplement désignée comme la solution complète de ONE, ou encore comme la solution de l'algorithme 3.1.

Algorithme 3.1 Processus de résolution par horizon glissant

Antécédent : les états initiaux $\{(\mathbf{p}_i^{\text{ini}}, \mathbf{v}_i^{\text{ini}})\}_{A_i \in \mathcal{A}}$, les points 4D $\{(\mathbf{p}_i^{4D}, t_i^{4D})\}_{A_i \in \mathcal{A}}$

- 1: **pour** $k = 0$ à $K - 1$ **effectuer**
 - 2: **pour** $A_i \in \mathcal{A}$ **effectuer**
 - 3: $\tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}} \leftarrow \mathbf{p}_i^{\text{ini}} + \frac{h}{2} \mathbf{v}_i^{\text{ini}}$
 - 4: **pour** $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ **effectuer**
 - 5: calculer $t_{i,j}^{\text{min}}$, $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+$, $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^-$ et $\tilde{\tau}_{i,j}$
 - 6: **si** $t_k \leq t_{i,j}^{\text{min}} \leq t_k + h$ **alors**
 - 7: ajouter les contraintes $\mathbf{u}_i = 0$ et $\mathbf{u}_j = 0$ pour cette résolution de ONE
 - 8: **pour** $A_i \in \mathcal{A}$ **effectuer**
 - 9: $\tilde{\tau}_i^{4D} \leftarrow \max\{\tilde{\tau}_{i,j} : (A_i, A_j) \in \mathcal{C} \vee (A_j, A_i) \in \mathcal{C}\}$
 - 10: **si** $\tilde{\tau}_i^{4D} \leq 0$ **alors**
 - 11: $\tilde{\tau}_i^{4D} \leftarrow t_K$
 - 12: ajouter la contrainte $\langle \mathbf{v}_i^{4D} \mid \mathbf{n}^{4D} \rangle = 0$ à ONE
 - 13: résoudre ONE : les solutions sont décrites par $(\mathbf{v}_i)_{A_i \in \mathcal{A}}$
 - 14: **pour** $A_i \in \mathcal{A}$ **effectuer**
 - 15: $\mathbf{p}_i^{\text{ini}} \leftarrow \tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}} + \frac{h}{2} \mathbf{v}_i$
 - 16: $\mathbf{v}_i^{\text{ini}} \leftarrow \mathbf{v}_i$
-

3.2 Discrétisation spatiale : le modèle SPACE

Dans cette section, le problème est discrétisé spatialement selon le principe décrit dans l'état de l'art, pages 30-31. L'originalité principale du modèle développé ici, **SPACE**, par rapport aux modèles semblables de la littérature, est qu'il autorise la résolution des conflits par des manœuvres en cap. Afin de préciser la difficulté que cela entraîne, le concept de *point de conflit* est d'abord défini.

Définition 3.1. Point de conflit : soit $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ tel que les trajectoires des deux aéronefs ne sont pas colinéaires. Le point de conflit de (A_i, A_j) est le point du plan où la trajectoire de A_i coupe celle de A_j . Si A_i et A_j sont en conflit frontal, le point de conflit est le point où A_i et A_j sont à distance minimum l'un de l'autre ; cette distance est nulle si les trajectoires des aéronefs sont confondues.

Le point de conflit n'est connu qu'une fois les manœuvres de cap déterminées. Ce dont on dispose a priori n'est qu'un point de conflit prédit, correspondant au point où les trajectoires de référence se coupent. Tant que seules les normes des vitesses des aéronefs sont modifiées, les points de conflit de croisement restent à leur position prédite, mais si, au contraire, les aéronefs changent de cap, les points de conflit sont mobiles. Cela engendre des difficultés de modélisation discutées dans la suite.

En outre, par souci d'homogénéité des modélisations développées dans ce mémoire, les variations de la vitesse sont faites selon un vecteur accélération constant, l'accélération et la vitesse de virage sont bornées, et le critère à minimiser correspond à la consommation de carburant. Pour satisfaire le même besoin d'homogénéité, les manœuvres en altitude n'ont pas été prises en compte mais rien n'aurait empêché de les inclure d'une façon similaire à [13, 105].

3.2.1 Discrétisation spatiale du problème

Pour un trafic donné, la discrétisation amène à considérer un graphe de conflit. L'ensemble \mathcal{N} du graphe est l'union de

- \mathcal{N}_d : l'ensemble des nœuds de départ, situés à la position initiale de chaque aéronef ;
- \mathcal{N}_c : l'ensemble des nœuds de conflit, correspondant à chacun des points de conflit ;

– \mathcal{N}_a : l'ensemble des nœuds d'arrivée, situés au niveau des points de passage du contrat 4D.

Les nœuds successifs par lesquels passe un aéronef sont reliés deux à deux par des arcs orientés allant de son nœud de départ à son nœud d'arrivée. Un arc est donc un triplet (A_i, n_k, n_p) représentant la jonction du nœud n_k au nœud n_p par l'aéronef A_i . L'ensemble des arcs est noté $Arcs$.

Les trajectoires prédites des aéronefs sont caractérisées par les données

- \hat{O}^k : position du nœud n_k
- \hat{L}_i^{kp} : longueur parcourue par A_i entre les points \hat{O}_k et \hat{O}_p
- \hat{T}_i^k : instant de passage de A_i au point \hat{O}_k

Le signe chapeau « $\hat{}$ » distingue les valeurs prédites grâce aux trajectoires de référence des valeurs calculées pendant l'optimisation. Pour chaque aéronef $A_i \in \mathcal{A}$, on suppose que la vitesse prédite est la même sur tous les arcs et qu'elle vaut V_i^{nom} .

Cette discrétisation du problème, associée à la volonté de le traiter par la programmation linéaire mixte, fait que SPACE procure une flexibilité de manœuvres différente de celle de TIME et ONE. La portée d'une manœuvre n'est plus contrainte par la période d'échantillonnage, en revanche elle est réduite à un arc et elle appartient à l'un des deux types suivants.

Créneau de vitesse : à partir de sa vitesse de référence, l'aéronef accélère ou décélère jusqu'à atteindre une vitesse souhaitée, maintient cette vitesse, puis retourne à sa vitesse de référence avant le nœud final de l'arc. Les changements de vitesse sont faits à accélération maximale.

Créneau de cap : l'aéronef modifie son cap selon un angle donné, maintient son cap sur une longueur donnée, puis reprend son cap initial avant la fin de l'arc. Les changements de cap sont faits à vitesse de virage maximale.

Un créneau de cap et un créneau de vitesse sont respectivement représentés dans le plan (x,y) et (t,V) sur les figures 3.1(a) et 3.1(b). Ces deux manœuvres sont obtenues à partir de deux instructions de contrôle correspondant aux changements de cap ou de vitesse du début et de la fin des manœuvres. Il faut noter qu'aux créneaux de cap et de vitesse correspondent des variables cumulatives d'écart temporel et d'écart latéral à la trajectoire de référence. Ils peuvent donc être interprétés comme des demi-créneaux latéral et temporel. Si un seul écart latéral ou temporel à la trajectoire de référence permet de résoudre deux conflits consécutifs, il serait contre-productif de forcer l'aéronef à retourner sur sa trajectoire immédiatement après la résolution du conflit.

Remarque 3.3. *Au lieu de créneaux de cap et de vitesse, il est également possible d'envisager des demi-créneaux de cap, de vitesse ou de cap et vitesse. Le choix des créneaux entiers permet de maintenir un vecteur vitesse constant autour des points de conflit. Cette contrainte réduit le domaine réalisable, mais il semble que cette réduction soit moindre que celle engendrée par la prise en compte des pires cas relatifs à la méconnaissance de la vitesse lors du conflit.*

Un triplet de variables de décision $(t_{v,i}^{kp}, l_i^{kp}, \chi_i^{kp})$ permet de commander les manœuvres sur chaque arc $(A_i, n_k, n_p) \in Arcs$. χ_i^{kp} est le changement de cap effectué au début du créneau et l_i^{kp} la longueur sur laquelle χ_i^{kp} est suivi. Pour caractériser les trajectoires calculées, les positions des nœuds des trajectoires de référence sont projetées sur les trajectoires réelles. Ainsi, pour tout $(A_i, n_k, n_p) \in Arcs$, on note :

O_i^k : projection orthogonale de \hat{O}^k sur la trajectoire de A_i

L_i^{kp} : longueur parcourue par A_i entre les points O_i^k et O_i^p

T_i^k : instant de passage de A_i au point O_i^k

Dans la suite, on se réfère aussi simplement à L_i^{kp} et T_i^k comme à la longueur de l'arc (A_i, n_k, n_p) et à l'instant de passage de A_i au nœud n_k . La variable $t_{v,i}^{kp}$ est le différentiel de temps de parcours créé par le créneau en vitesse : si la longueur totale parcourue entre les nœuds n_k et n_p vaut

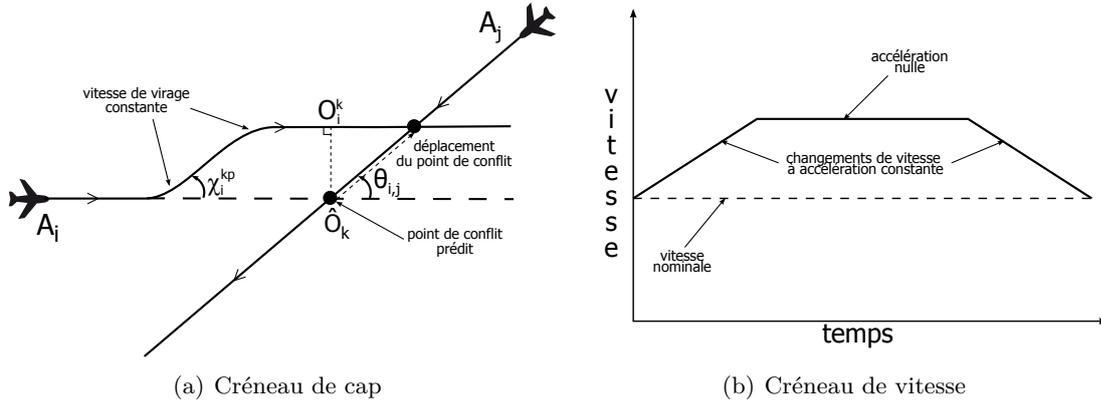


Figure 3.1 — Manœuvres modélisées dans SPACE

L_i^{kp} , que la vitesse nominale de A_i vaut V_i^{nom} et que la vitesse moyenne de l'aéronef est notée \bar{V}_i^{kp} , alors

$$t_{v,i}^{kp} = \frac{L_i^{kp}}{\bar{V}_i^{kp}} - \frac{L_i^{kp}}{V_i^{\text{nom}}}$$

3.2.2 Contraintes de séparation

Bien que les contraintes soient les mêmes que celles de TIME et ONE, leur formulation mathématique est bien moins naturelle. La formulation des bornes sur les variables dépend de celle des contraintes de séparation, c'est pourquoi l'expression de ces dernières est donnée en premier lieu. Par ailleurs, la rigidité du graphe de conflit ne permet pas de traiter tous les conflits de la même manière. Les conflits de croisement, de rattrapage et frontaux sont traités séparément. Pour la discrétisation spatiale, l'ensemble des conflits potentiels est redéfini et décomposé pour différencier les types de conflit.

Définition 3.2. Soit A_i et A_j deux aéronefs en conflit potentiel et $\theta_{i,j}$ l'angle orienté entre le vecteur vitesse de référence de A_i et celui de A_j .

Conflit de croisement : si $\theta_{i,j} \not\equiv 0 [\pi]$, et n_k est le nœud associé au point de conflit correspondant, alors A_i et A_j sont en conflit de croisement et ce conflit potentiel est désigné par le triplet (A_i, A_j, n_k) . L'ensemble de ces triplets est noté \mathcal{C}_C .

Conflit frontal : si $\theta_{i,j} \equiv \pi [2\pi]$ et n_k est le nœud associé au point de conflit correspondant, alors A_i et A_j sont en conflit frontal et ce conflit potentiel est désigné par le triplet (A_i, A_j, n_k) . L'ensemble de ces triplets est noté \mathcal{C}_F .

Conflit de rattrapage : si $\theta_{i,j} \equiv 0 [2\pi]$, A_i et A_j sont en conflit de rattrapage. Pour tout nœud n_k parcouru par A_i et A_j , le triplet (A_i, A_j, n_k) désigne un conflit potentiel. L'ensemble de ces triplets est noté \mathcal{C}_R .

Calcul de l'effet d'un créneau de cap

Afin d'ajouter la possibilité de réaliser des créneaux de cap, l'effet d'une telle manœuvre est d'abord étudié. Le fait que la vitesse ne soit pas connue et éventuellement variable pendant les virages empêche de modéliser le problème par des équations linéaires. C'est pourquoi, dans les calculs à venir, la vitesse des aéronefs au cours du virage est approchée par leur vitesse nominale. La vitesse nominale a été choisie pour l'approximation parce qu'elle est au centre de l'intervalle de valeurs de la vitesse. Cette approximation a généralement peu d'impact dans la mesure où les virages sont effectués à vitesse de virage maximale.

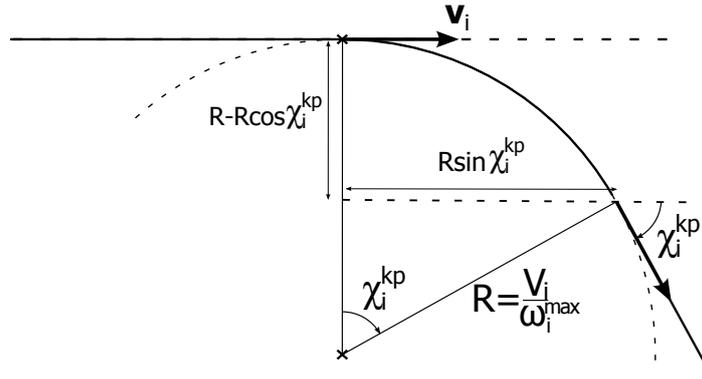


Figure 3.2 — *Changement de cap à vitesse de virage constante*

Soit $(A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs}$ tel que A_i réalise un créneau de cap caractérisé par les commandes χ_i^{kp} et l_i^{kp} entre les nœuds n_k et n_p . Le changement de cap initial du créneau est dessiné sur la figure 3.2. En se référant aux figures 3.1(a) et 3.2, on calcule l'écart latéral créé lors du créneau :

$$\Delta_{\perp,i}^{kp} = 2 \operatorname{sgn}(\chi_i^{kp}) \frac{V_i^{\operatorname{nom}}}{\omega_{\max}} (1 - \cos \chi_i^{kp}) + l_i^{kp} \sin \chi_i^{kp} \quad (3-18)$$

et la distance parcourue entre les points O_i^k et O_i^p :

$$L_i^{kp} = \hat{L}_i^{kp} + 2 \frac{V_i^{\operatorname{nom}}}{\omega_{\max}} (|\chi_i^{kp}| - |\sin \chi_i^{kp}|) + l_i^{kp} (1 - \cos \chi_i^{kp}) \quad (3-19)$$

Précisons alors la signification de la variable $t_{v,i}^{kp}$. Celle-ci représente la différence entre la durée du parcours de L_i^{kp} à la vitesse prédite, c'est-à-dire V_i^{nom} , et la durée du parcours en prenant en compte le créneau en vitesse. À l'aide de $t_{v,i}^{kp}$, l'instant de passage de A_i en O_i^p s'exprime sous la forme :

$$T_i^p = T_i^k + t_{v,i}^{kp} + \frac{L_i^{kp}}{V_i^{\operatorname{nom}}}, \quad \forall (A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs} \quad (3-20)$$

Les variables χ_i^{kp} apparaissent non linéairement dans les expressions de $\Delta_{\perp,i}^{kp}$ et L_i^{kp} . Afin de linéariser ces équations, il est nécessaire de discrétiser l'espace des commandes χ_i^{kp} en un ensemble de N_χ valeurs notées $\{\chi_n\}_{n \in \{1, \dots, N_\chi\}}$. La discrétisation est réalisée à l'aide des variables binaires $\{\epsilon_{i,n}^{kp}\}_{n \in \{1, \dots, N_\chi\}}$ telles que

$$\epsilon_{i,n}^{kp} = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi_i^{kp} = \chi_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour que χ_i^{kp} soit bien défini, on impose que la somme des variables binaires soit inférieure à 1 :

$$\sum_{n=1}^{N_\chi} \epsilon_{i,n}^{kp} \leq 1, \quad \forall (A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs} \quad (3-21)$$

La somme vaut 0 lorsque aucune manœuvre en cap n'est effectuée sur cet arc. Pour connaître la valeur du changement de cap, il suffit alors de calculer :

$$\chi_i^{kp} = \sum_{n=1}^{N_\chi} \epsilon_{i,n}^{kp} \chi_n, \quad \forall (A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs} \quad (3-22)$$

Les variables χ_i^{kp} ne sont plus mentionnées dans la suite ; les variables de commande liées au changement de cap sont désormais les variables binaires $\epsilon_{i,n}^{kp}$ et l'ensemble $\{\chi_n\}_{n \in \{1, \dots, N_\chi\}}$ est

connu et fixé par l'utilisateur. Grâce à ces nouvelles variables, les valeurs de $\Delta_{\perp,i}^{kp}$ et L_i^{kp} sont déterminées par les équations :

$$\begin{aligned}\Delta_{\perp,i}^{kp} &= \sum_{n=1}^{N_\chi} \epsilon_{i,n}^{kp} \times \left[2 \operatorname{sgn}(\chi_n) \frac{V_i^{\text{nom}}}{\omega_{\max}} (1 - \cos \chi_n) + l_i^{kp} \sin \chi_n \right] \\ L_i^{kp} &= \hat{L}_i^{kp} + \sum_{n=1}^{N_\chi} \epsilon_{i,n}^{kp} \times \left[2 \frac{V_i^{\text{nom}}}{\omega_{\max}} (|\chi_n| - |\sin \chi_n|) + l_i^{kp} (1 - \cos \chi_n) \right]\end{aligned}$$

où un produit de variables est encore effectué entre l_i^{kp} et $\epsilon_{i,n}^{kp}$, $n = 1, \dots, N_\chi$. La linéarisation de ces expressions nécessite l'introduction des variables $l_{i,n}^{kp} \geq 0$, $n \in \{1, \dots, N_\chi\}$, avec

$\forall (A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs}$:

$$\begin{aligned}l_{i,n}^{kp} &\leq \frac{\hat{L}_i^{kp} - 2 \frac{V_i^{\min}}{\omega_{\max}} |\sin \chi_n|}{\cos \chi_n} \epsilon_{i,n}^{kp}, \quad \forall n \in \{1, \dots, N_\chi\} \\ \sum_1^{N_\chi} l_{i,n}^{kp} &= l_i^{kp}\end{aligned}\tag{3-23}$$

où la longueur $\hat{L}_i^{kp} - 2 \frac{V_i^{\min}}{\omega_{\max}} |\sin \chi_n|$ est une borne supérieure de la longueur sur laquelle le cap modifié de χ_n peut être suivi. Cette borne est déduite du fait que la manœuvre doit être réalisée entre O_k et O_p et que chaque mise en cap entraîne au moins le parcours d'une distance $\frac{V_i^{\min}}{\omega_{\max}} |\sin \chi_n|$. À partir des contraintes (3-23) et (3-21), on déduit que, $\forall n \in \{1, \dots, N_\chi\}$:

$$l_{i,n}^{kp} = \begin{cases} l_i^{kp} & \text{si } \epsilon_{i,n}^{kp} = 1 \\ 0 & \text{si } \epsilon_{i,n}^{kp} = 0 \end{cases}$$

Ce qui conduit aux expressions linéaires suivantes de $\Delta_{\perp,i}^{kp}$ et L_i^{kp} :

$\forall (A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs}$:

$$\Delta_{\perp,i}^{kp} = \sum_{n=1}^{N_\chi} \left[2 \epsilon_{i,n}^{kp} \times \operatorname{sgn}(\chi_n) \frac{V_i^{\text{nom}}}{\omega_{\max}} (1 - \cos \chi_n) + l_{i,n}^{kp} \sin \chi_n \right]\tag{3-24}$$

$$L_i^{kp} = \hat{L}_i^{kp} + \sum_{n=1}^{N_\chi} \left[2 \epsilon_{i,n}^{kp} \times \frac{V_i^{\text{nom}}}{\omega_{\max}} (|\chi_n| - |\sin \chi_n|) + l_{i,n}^{kp} (1 - \cos \chi_n) \right]\tag{3-25}$$

L'écart latéral au nœud n_p est finalement obtenu par :

$$\Delta_{\perp,i}^p = \Delta_{\perp,i}^k + \Delta_{\perp,i}^{kp}, \quad \forall (A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs}\tag{3-26}$$

Conflits de croisement

Soit $(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_R$ et $\theta_{i,j} (\neq 0[\pi])$ l'angle orienté entre le vecteur vitesse de A_i et celui de A_j . Dans la littérature, la limitation des manœuvres à des changements de vitesse permet d'exprimer la séparation entre deux aéronefs à l'aide d'une borne sur l'écart entre leur instant de passage au point de conflit. Cette nouvelle borne de séparation est notée $\bar{S}_{i,j}^k$ et son expression est donnée dans l'état de l'art par le maximum du membre de gauche de l'équation (1-49). Les contraintes associées sont reproduites ci-dessous.

$$\begin{aligned}T_i^k - T_j^k &\geq \bar{S}_{i,j}^k - M \delta_{ij}, \\ T_j^k - T_i^k &\geq \bar{S}_{i,j}^k - M(1 - \delta_{ij}), \\ \delta_{ij} &\in \{0, 1\}\end{aligned}\tag{3-27}$$

Pour inclure des manœuvres en cap, on observe qu'un écart latéral $\Delta_{\perp,i}^k$ de A_i au point de conflit équivaut à déplacer ce point d'une distance $\frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\tan \theta_{i,j}}$ le long de la trajectoire de A_i et d'une distance $\frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\sin \theta_{i,j}}$ le long de la trajectoire de A_j . En appliquant le même raisonnement pour un écart latéral de A_j , il vient que des écarts latéraux modifient les contraintes (3-27) de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \forall(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_C : \\ T_i^k + \frac{1}{V_i^{\text{nom}}} \left(\frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\tan \theta_{i,j}} - \frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\sin \theta_{i,j}} \right) - T_j^k - \frac{1}{V_j^{\text{nom}}} \left(-\frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\tan \theta_{i,j}} + \frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\sin \theta_{i,j}} \right) &\geq \bar{S}_{i,j}^k - M_{i,j}^1 \delta_{ij}, \\ T_j^k + \frac{1}{V_j^{\text{nom}}} \left(-\frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\tan \theta_{i,j}} + \frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\sin \theta_{i,j}} \right) - T_i^k - \frac{1}{V_i^{\text{nom}}} \left(\frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\tan \theta_{i,j}} - \frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\sin \theta_{i,j}} \right) &\geq \bar{S}_{i,j}^k - M_{i,j}^2 (1 - \delta_{ij}), \\ \delta_{ij} &\in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3-28)$$

Les contraintes 3-28 ne sont valides que si les aéronefs suivent le cap prédit à vitesse nominale à l'abord du conflit. C'est pourquoi il a été choisi de résoudre les conflits aériens par des manœuvres en créneau. *L'abord du conflit* est défini par le voisinage du point de conflit où la distance entre les trajectoires est inférieure à D . Il s'agit donc des points de chaque trajectoire situés à une distance inférieure à $\frac{D}{\sin \theta_{i,j}}$ du point de conflit. En incluant par ailleurs le mouvement du point de conflit sur la trajectoire de A_i , il vient que l'aéronef doit suivre le cap prédit à vitesse nominale entre les points situés à des distances algébriques $s_{i,j}^{k-}(A_i)$ et $s_{i,j}^{k+}(A_i)$ du point O_i^k , où

$$\begin{aligned} s_{i,j}^{k-}(A_i) &= \left(\frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\tan \theta_{i,j}} - \frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\sin \theta_{i,j}} \right) - \frac{D}{\sin \theta_{i,j}}, \quad \forall(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_C \\ s_{i,j}^{k+}(A_i) &= \left(\frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\tan \theta_{i,j}} - \frac{\Delta_{\perp,i}^k}{\sin \theta_{i,j}} \right) + \frac{D}{\sin \theta_{i,j}}, \quad \forall(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_C \end{aligned} \quad (3-29)$$

Un intervalle similaire est obtenu pour A_j . Ces valeurs influent sur les bornes des commandes puisqu'elles modifient la distance que les manœuvres sont susceptibles d'occuper. Les bornes qui en résultent sont explicitées dans la sous-section 3.2.3. Par ailleurs, les aéronefs étant stabilisés à leur vitesse nominale autour du point de conflit, la borne de séparation temporelle peut être réduite pour prendre la valeur :

$$\bar{S}_{i,j}^k = \frac{D}{V_i^{\text{nom}} V_j^{\text{nom}} |\sin \theta_{i,j}|} \sqrt{(V_i^{\text{nom}})^2 + (V_j^{\text{nom}})^2 - 2V_i^{\text{nom}} V_j^{\text{nom}} \cos \theta_{i,j}}, \quad \forall(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_C \quad (3-30)$$

Pour le calcul des constantes *grand* M , on suppose $-\chi^{\max} \leq \chi_n \leq \chi^{\max}$, $\forall n \in \{1, \dots, N_\chi\}$ et on note \hat{L}_i^k la longueur parcourue par un aéronef A_i jusqu'à un nœud n_k dans sa trajectoire de référence. Pour tout $A_i \in \mathcal{A}$ et tout nœud n_k parcouru par A_i , il est alors possible de borner T_i^k et $\Delta_{\perp,i}^k$ par :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{L}_i^k}{V_i^{\max}} \leq T_i^k \leq \frac{\hat{L}_i^k}{\cos \chi^{\max} V_i^{\min}}, \\ -\frac{\hat{L}_i^k}{\sin \chi^{\max}} \leq \Delta_{\perp,i}^k \leq \frac{\hat{L}_i^k}{\sin \chi^{\max}} \end{aligned} \quad (3-31)$$

La valeur des constantes $M_{i,j}^1$ et $M_{i,j}^2$ est alors obtenue en bornant les membres de gauche des équations (3-28).

Conflits de rattrapage

Les dépassements ne sont pas pris en compte dans ce modèle. Si un même arc est survolé par plusieurs aéronefs, il est nécessaire d'assurer que le second aéronef ne rattrape pas le premier.

Ce cas de figure est évité grâce à une contrainte située à chaque extrémité de l'arc. Soit A_i et A_j deux aéronefs qui parcourent un même arc liant les deux nœuds n_k et n_p et supposons, sans perte de généralité, que A_i devance A_j . A_i et A_j sont simultanément sur l'arc pour tout instant $t \in [T_j^k, T_i^p]$. Les aéronefs sont séparés lorsque A_j entre sur l'arc si et seulement si A_i a déjà parcouru une distance D sur l'arc. Pour que la séparation soit assurée à T_j^k pour toute valeur de la vitesse de A_i , il suffit que :

$$T_i^k + \frac{D}{V_i^{\min}} \leq T_j^k.$$

De même, les aéronefs sont séparés à l'instant T_{i,n_2} si :

$$T_j^p - \frac{D}{V_j^{\max}} \geq T_i^p$$

Pour tout $(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_R$, ces deux contraintes se résument plus simplement par une contrainte unique :

$$T_j^k \geq T_i^k + \frac{D}{\min(V_i^{\min}, V_j^{\max})} \quad (3-32)$$

En théorie, cette contrainte n'est pas suffisante pour que A_i et A_j soient séparés sur toute la longueur des arcs. Pour cela soit le cas, il faudrait par exemple que la vitesse relative entre A_i et A_j soit constante. Cette condition n'est clairement pas remplie à cause des changements de cap et de vitesse ayant lieu pendant le parcours de l'arc. Une vérification rigoureuse de ces contraintes est possible mais requiert des contraintes pour chaque phase de manœuvre, ce qui réduit significativement, et en général inutilement, le domaine réalisable. On explique que ces contraintes ne sont pas nécessaires par le fait que, en pratique, les contrats 4D ne sont pas destinés à prévoir que des aéronefs parcourent une même trajectoire avec une séparation proche de la norme de séparation horizontale. En outre, les instants de début et de fin des manœuvres en cap ne sont pas entièrement déterminés par les commandes du système. Il existe donc une marge de liberté pour ajuster les trajectoires après l'optimisation de façon à éviter les conflits de rattrapage. En dernier ressort, si des conflits non détectés par les contraintes (3-32) se produisaient, l'optimisation serait relancée en augmentant la norme de séparation pour les arcs concernés. Cette mesure n'a cependant jamais été nécessaire lors des expériences présentées dans la section 3.4.

Conflits frontaux

Les conflits frontaux sont particuliers parce qu'ils ne sont pas censés advenir dans le réseau aérien actuel. Pour la discrétisation spatiale, leur prise en compte est différente des autres types de conflit puisque des contraintes sur les instants de passage aux nœuds du graphe de conflit ne sont pas suffisantes. Il est nécessaire d'ajouter une contrainte de séparation géographique. En effet, pour que deux aéronefs suivant une même trajectoire en sens inverses soient séparés, il faut d'une part qu'ils soient écartés d'une distance D au moment où ils se croisent et d'autre part qu'ils ne reviennent pas sur l'axe de leur trajectoire de référence tant que la collision est encore possible. Soit $(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_F$, on impose un écart :

$$|\Delta_{\perp,i}^k - \Delta_{\perp,j}^k| \geq D$$

Cette contrainte est formulée linéairement grâce à un ensemble de variables binaires $\{\delta_{ij}\}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp,i}^k - \Delta_{\perp,j}^k &\geq D - M_{i,j}\delta_{ij}, \quad \forall (A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_F \\ \Delta_{\perp,j}^k - \Delta_{\perp,i}^k &\geq D - M_{i,j}(1 - \delta_{ij}), \quad \forall (A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_F \end{aligned} \quad (3-33)$$

Pour le calcul de $M_{i,j}$, il suffit d'appliquer directement les bornes sur les variables $\Delta_{\perp,i}^k$ et $\Delta_{\perp,j}^k$ données par (3-31).

En outre, le point de conflit frontal se déplace aussi sur la trajectoire des aéronefs en fonction des manœuvres réalisées plus tôt. Calculons donc l'instant t_C où la projection orthogonale de la position de A_i sur la trajectoire A_j est confondue avec la position de A_j . Soit un instant t tel que les aéronefs suivent le cap de référence à vitesse nominale sur les intervalles $[t, T_i^k]$ (ou $[T_i^k, t]$) et $[t, T_j^k]$ (ou $[T_j^k, t]$). À l'instant t , la distance algébrique entre A_i et O_i^k , orientée dans le sens de la vitesse de A_i , vaut $V_i^{\text{nom}}(t - T_i^k)$, et la distance algébrique entre A_j et O_j^k , orientée dans le sens de la vitesse de A_j , vaut $V_j^{\text{nom}}(t - T_j^k)$. En notant que la projection orthogonale de O_i^k sur la trajectoire de A_j est O_j^k , il vient que t_C vérifie

$$V_j^{\text{nom}}(T_j^k - t_C) = V_i^{\text{nom}}(t_C - T_i^k) \implies t_C = \frac{V_i^{\text{nom}}T_i^k + V_j^{\text{nom}}T_j^k}{V_i^{\text{nom}} + V_j^{\text{nom}}}$$

Pour que les contraintes (3-33) soient valides, il faut que A_i ait un décalage latéral $\Delta_{\perp,i}^k$ à l'instant t_C et qu'il ne réalise aucune manœuvre pendant le parcours de l'intervalle de longueur D centré sur sa position à l'instant t_C . Comme pour les conflits de croisement, on obtient deux distances algébriques $s_{i,j}^{k-}(A_i)$ et $s_{i,j}^{k+}(A_i)$ prises à partir de O_i^k entre lesquelles aucune manœuvre ne doit avoir lieu :

$$\forall(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_F :$$

$$\begin{aligned} s_{i,j}^{k-}(A_i) &= (T_j^k - T_i^k) \frac{V_i^{\text{nom}}V_j^{\text{nom}}}{V_i^{\text{nom}} + V_j^{\text{nom}}} - \frac{D}{2}, \\ s_{i,j}^{k+}(A_i) &= (T_j^k - T_i^k) \frac{V_i^{\text{nom}}V_j^{\text{nom}}}{V_i^{\text{nom}} + V_j^{\text{nom}}} + \frac{D}{2} \end{aligned} \quad (3-34)$$

Le même calcul s'applique aussi à A_j .

3.2.3 Bornes sur les variables de commande

Les bornes sur les variables de commande associées à un arc donné sont exprimées en fonction de la longueur des manœuvres, c'est-à-dire la longueur parcourue entre le début et la fin d'un créneau de vitesse ou de cap. Cette longueur est elle-même bornée par la longueur calculée de l'arc, à laquelle il faut retrancher les intervalles centrés sur les points de conflit où les manœuvres sont interdites. La longueur d'un créneau en vitesse réalisé sur l'arc(A_i, n_k, n_p) est notée \bar{L}_i^{kp} . Sa borne supérieure est obtenue grâce aux contraintes suivantes.

$$\forall(A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs} :$$

$$\begin{aligned} s_i^{k+} &\geq s_{i,j}^{k+}(A_i), \forall(A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_C \cup \mathcal{C}_F \\ s_i^{p-} &\leq s_{i,j}^{p-}(A_i), \forall(A_i, A_j, n_p) \in \mathcal{C}_C \cup \mathcal{C}_F \\ \bar{L}_i^{kp} &\leq L_i^{kp} - s_i^{k+} + s_i^{p-}, \\ s_i^{k+} &\geq 0 \text{ et } s_i^{p-} \leq 0 \end{aligned} \quad (3-35)$$

On calcule alors la borne de $t_{v,i}^{kp}$.

Propriété 3.3

Soit un aéronef A réalisant un créneau en vitesse. Supposons que le créneau s'étend sur une longueur L , que les changements de vitesse sont faits avec une accélération de valeur absolue U pour passer de V^{nom} à V et inversement. Alors la différence entre la durée du créneau et le temps de parcours prévu vaut

$$t_v = \begin{cases} \frac{L}{V} - \frac{L}{V^{\text{nom}}} - \frac{(V^{\text{nom}} - V)^2}{UV} & \text{si } V \leq V^{\text{nom}} \\ \frac{L}{V} - \frac{L}{V^{\text{nom}}} + \frac{(V^{\text{nom}} - V)^2}{UV} & \text{si } V \geq V^{\text{nom}} \end{cases}$$

Démonstration : Les deux changements de vitesse sont faits avec une accélération constante U , donc ils durent chacun

$$\frac{|V^{\text{nom}} - V|}{U}$$

En intégrant deux fois l'accélération sur les intervalles où les changements de vitesse sont réalisés, on trouve que l'aéronef parcourt

$$\frac{|(V^{\text{nom}})^2 - V^2|}{2U}$$

sur chaque intervalle. L'aéronef parcourt donc la distance restante à la vitesse V , d'où la durée de parcours, notée T :

$$\begin{aligned} T &= 2 \frac{|V^{\text{nom}} - V|}{U} + \frac{1}{V} \left(L - \frac{|(V^{\text{nom}})^2 - V^2|}{U} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{L}{V} - \frac{(V^{\text{nom}} - V)^2}{UV} & \text{si } V \leq V^{\text{nom}} \\ \frac{L}{V} + \frac{(V^{\text{nom}} - V)^2}{UV} & \text{si } V \geq V^{\text{nom}} \end{cases} \end{aligned}$$

On déduit l'expression de t_v en soustrayant à T le temps de parcours de L à la vitesse V^{nom} . ■

Sachant que les valeurs extrêmes de $t_{v,i}^{kp}$ sont nécessairement obtenues lorsque le créneau permet d'atteindre les vitesses V_i^{min} et V_i^{max} , la propriété 3.3 entraîne que $\forall (A_i, n_k, n_p) \in \text{Arcs}$:

$$\frac{\bar{L}_i^{kp}}{V_i^{\text{max}}} - \frac{\bar{L}_i^{kp}}{V_i^{\text{nom}}} + \frac{(V_i^{\text{nom}} - V_i^{\text{max}})^2}{U_i^{\text{max}} V_i^{\text{max}}} \leq t_{v,i}^{kp} \leq \frac{\bar{L}_i^{kp}}{V_i^{\text{min}}} - \frac{\bar{L}_i^{kp}}{V_i^{\text{nom}}} - \frac{(V_i^{\text{nom}} - V_i^{\text{min}})^2}{U_i^{\text{max}} V_i^{\text{min}}}, \quad (3-36)$$

Les bornes de $l_{i,n}^{kp}$, $n = 1, \dots, N_\chi$, c'est-à-dire la longueur sur laquelle le cap modifié est suivi pendant le créneau de cap, sont déduites de l'étude réalisée dans la section 3.2.2. Notamment, si l'on projette orthogonalement le créneau de cap sur la trajectoire prédite, alors la longueur de la projection doit être inférieure à $\hat{L}_i^{kp} - s_i^{k+} + s_i^{k-}$. On peut donc déduire de (3-25) que $\forall (A_i, n_k, n_p) \in \text{Arcs}$:

$$l_{i,n}^{kp} \cos \chi_n \leq \hat{L}_i^{kp} - s_i^{k+} + s_i^{k-} - 2\epsilon_{i,n}^{kp} \frac{V_i^{\text{nom}}}{\omega_{\text{max}}} (|\sin \chi_n|), \quad \forall n \in \{1, \dots, N_\chi\} \quad (3-37)$$

3.2.4 Critère

Linéarisation du critère

La fonction de consommation de carburant est aussi non linéaire par rapport aux variables du modèle. La difficulté traitée dans cette section est d'en développer une approximation linéaire. Pour cela, un schéma comparable à celui décrit dans la section 3.1.3 est suivi.

SPACE étant discrétisé spatialement, la consommation de fuel est calculée grâce à la fonction de consommation par unité de distance C_d . Afin d'obtenir une expression linéaire du critère, on approche la quantité de carburant consommée pendant les créneaux de vitesse en supposant la vitesse de l'aéronef constante. Cela revient à supposer que la quantité de carburant consommée pendant le créneau est la même que celle consommée pendant un créneau produisant le même différentiel sur la durée de parcours, mais avec des changements de vitesse instantanés. La vitesse atteinte lors du créneau équivalent avec changements de vitesse instantané sur l'arc (A_i, n_k, n_p) est notée \tilde{V}_i^{kp} . Sur cet arc, une distance \bar{L}_i^{kp} est parcourue à \tilde{V}_i^{kp} et le reste est parcouru à V_i^{nom} , ce qui engendre une consommation

$$Z_i^{kp} = \bar{L}_i^{kp} C_d (\tilde{V}_i^{kp}) + (\bar{L}_i^{kp} - \bar{L}_i^{kp}) C_d (V_i^{\text{nom}})$$

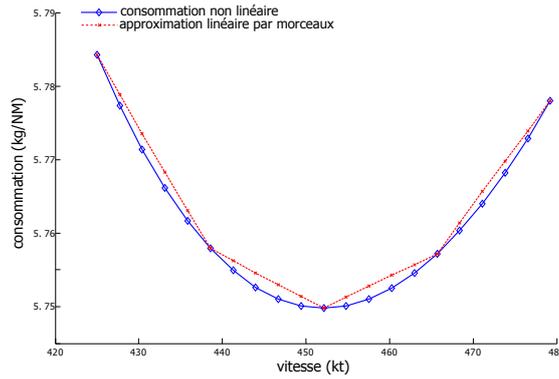


Figure 3.3 — Approximation de la consommation par unité de distance avec quatre segments

Dans la suite, une approximation de la consommation est calculée à l'aide d'une variable \tilde{Z}_i^{kp} variant linéairement en fonction des autres variables du modèle.

La consommation est d'abord exprimée en fonction des variables du modèle grâce à la relation

$$t_{v,i}^{kp} = \bar{L}_i^{kp} \left(\frac{1}{\tilde{V}_i^{kp}} - \frac{1}{V_i^{\text{nom}}} \right), \text{ ou encore } \tilde{V}_i^{kp} = \frac{1}{\frac{t_{v,i}^{kp}}{\bar{L}_i^{kp}} + \frac{1}{V_i^{\text{nom}}}}$$

D'où

$$Z_i^{kp} = \bar{L}_i^{kp} C_{d,i} \left(\frac{1}{\frac{t_{v,i}^{kp}}{\bar{L}_i^{kp}} + \frac{1}{V_i^{\text{nom}}}} \right) + (L_i^{kp} - \bar{L}_i^{kp}) C_{d,i}(V_i^{\text{nom}})$$

Une approximation linéaire par morceaux et convexe de

$$t \mapsto C_{d,i} \left(\frac{1}{t + \frac{1}{V_i^{\text{nom}}}} \right)$$

est ensuite réalisée à l'aide de N_f segments inclus dans les droites d'équations $y = \alpha_i^n x + \beta_i^n$, $n \in \{1, \dots, N_f\}$. Soit \tilde{C}_d cette approximation. Alors par convexité de \tilde{C}_d ,

$$\tilde{C}_{d,i} \left(\frac{t_{v,i}^{kp}}{\bar{L}_i^{kp}} \right) = \max_{n \in \{1, \dots, N_f\}} \alpha_i^n \frac{t_{v,i}^{kp}}{\bar{L}_i^{kp}} + \beta_i^n$$

Donc, en ajoutant les contraintes linéaires suivantes pour tout $A_i, n_k, n_p \in \text{Arcs}$:

$$\tilde{Z}_i^{kp} \geq \alpha_i^n t_{v,i}^{kp} + \beta_i^n \bar{L}_i^{kp} + (L_i^{kp} - \bar{L}_i^{kp}) C_{d,i}(V_i^{\text{nom}}), \quad \forall n \in \{1, \dots, N_f\}, \quad (3-38)$$

la minimisation de \tilde{Z}_i^{kp} entraîne :

$$\tilde{Z}_i^{kp} = \tilde{C}_{d,i} \left(\frac{t_{v,i}^{kp}}{\bar{L}_i^{kp}} \right) + (L_i^{kp} - \bar{L}_i^{kp}) C_{d,i}(V_i^{\text{nom}})$$

La consommation non linéaire Z et son approximation par \tilde{Z} à l'aide de quatre segments de droite sont tracées sur la figure 3.3 pour un appareil de type Airbus A320 à 10 000 m d'altitude.

Contrat 4D

À la différence des modèles discrétisés en temps, SPACE construit des trajectoires allant des positions initiales aux points de passage 4D de chaque aéronef. Les contraintes (3-38) permettent donc de quantifier la consommation de carburant jusqu'aux destinations souhaitées. Le respect du contrat 4D est par ailleurs représenté par l'écart temporel entre l'instant de passage spécifié par le contrat et l'instant de passage au nœud associé tel qu'il est calculé lors de l'optimisation. Si $\Delta_{\parallel, T}^{\max} i$ est l'écart temporel maximum accepté pour A_i , les contraintes du contrat 4D sont

$$-\Delta_{\parallel, T}^{\max} i \leq T_i^k - t_i^{AD} \leq \Delta_{\parallel, T}^{\max} i \quad (3-39)$$

Le non-respect du contrat est pénalisé grâce à deux variables $\Delta_{T,i}^-$ et $\Delta_{T,i}^+$ telles que

$$\begin{aligned} T_i^k - t_i^{AD} &= \Delta_{T,i}^- + \Delta_{T,i}^+ \\ \Delta_{T,i}^- &\leq 0, \Delta_{T,i}^+ \geq 0, \end{aligned} \quad (3-40)$$

en ajoutant le terme suivant à la fonction objectif

$$\rho^+ \Delta_{T,i}^+ + \rho^- \Delta_{T,i}^-$$

Les pénalités ρ^+ et ρ^- n'ont pas les mêmes valeurs que dans les modèles discrétisés en temps. Leur calcul est donné dans l'annexe A.

3.2.5 Formulation complète du modèle SPACE

En résumé, le problème issu d'une discrétisation spatiale est donné par :

$$\text{SPACE : } \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{(A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs}} \tilde{Z}_i^{kp} + \sum_{A_i \in \mathcal{A}} [\rho^+ \Delta_{T,i}^+ + \rho^- \Delta_{T,i}^-] \\ \text{sous les contraintes (3-18) – (3-26), (3-28) – (3-29) et (3-32) – (3-40) avec} \\ \forall (A_i, n_k, n_p) \in \mathcal{Arcs} : \\ \quad (t_{v,i}^{kp}, T_i^p) \in \mathbb{R}^2, (l_i^{kp}, L_i^{kp}, \bar{L}_i^{kp}) \in (\mathbb{R}^+)^3, \\ \quad (\Delta_{\perp,i}^{kp}, \Delta_{\perp,i}^p) \in \mathbb{R}^2, s_i^{k+} \in \mathbb{R}^+, s_i^{p-} \in \mathbb{R}^-, \tilde{Z}_i^{kp} \in \mathbb{R}^+, \\ \quad \epsilon_{i,n}^{kp} \in \{0, 1\}, l_{i,n}^{kp} \forall n \in \{1, \dots, N_\chi\}, \\ \forall (A_i, A_j, n_k) \in \mathcal{C}_C \cup \mathcal{C}_F : \\ \quad \delta_{ij} \in \{0, 1\}, (s_{i,j}^{k-}(A_i), s_{i,j}^{k+}(A_i), s_{i,j}^{p-}(A_i), s_{i,j}^{p+}(A_i)) \in \mathbb{R}^4, \\ \forall A_i \in \mathcal{A} : \Delta_{T,i}^- \in \mathbb{R}^-, \Delta_{T,i}^+ \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (3-41)$$

3.3 Comparaison théorique

L'idéal serait d'être capable d'ordonner a priori les critères des solutions optimales de ONE, SPACE, TIME et TMILP comme cela a déjà été fait entre TIME et TMILP par le corollaire 2.2. De même que TMILP, le modèle ONE a été construit de façon à ce que ces contraintes constituent une approximation suffisante de celles de TIME. On en déduit que les solutions complètes de ONE donnent une borne supérieure de la valeur optimale du critère de TIME :

Théorème 3.1

Soit Z_{TIME}^* la valeur optimale de l'objectif de TIME, ζ_{ONE} la solution complète de ONE et $\zeta|_{\text{TIME}}$

sa restriction aux variables de *TIME*. Alors

$$Z_{TIME}^* \leq F_{TIME}(\zeta|_{TIME})$$

Les résultats du corollaire 2.2 et du théorème 3.1 constituent cependant le seul classement valide en général entre les valeurs optimales des critères des quatre modèles. **TMILP** par exemple donne une formulation plus complète du problème que **ONE**, mais il nécessite d'approximer les contraintes de séparation par des tangentes choisies a priori. À l'inverse, dans **ONE**, les tangentes de l'instant t_k sont calculées en fonction de la position des aéronefs à cet instant : elles donnent donc une condition nécessaire et suffisante de séparation à condition qu'une seule manœuvre soit effectuée. Le modèle **SPACE**, quant à lui, permet moins de flexibilité dans le choix des manœuvres, ce qui le rend a priori moins capable de produire des solutions de bonne qualité. Il n'est toutefois pas possible de le comparer avec les autres modèles parce que l'intervalle de temps n'a pas été discrétisé. Par conséquent, les manœuvres ne sont pas contraintes à débuter et à terminer à l'un des instants de discrétisation. La comparaison expérimentale conduite dans la prochaine section est donc nécessaire pour en savoir plus.

Soulignons par ailleurs qu'il existe une nette différence entre les simplifications réalisées pour construire le modèle **SPACE** et celles réalisées pour les modèles linéaires discrétisés temporellement. À la différence de **ONE** et **TMILP**, peu d'approximations ont été nécessaires pour construire un modèle linéaire après la discrétisation spatiale. En revanche, les manœuvres ont d'emblée été limitées à des créneaux de cap ou de vitesse et les changements de cap ont été discrétisés. En outre, les bornes (3-35) et (3-37) sur les longueurs des manœuvres incluent un terme forçant à stabiliser la vitesse des aéronefs dans un intervalle $[s_i^{k-}; s_i^{k+}]$ autour de chaque point de conflit. Cet intervalle est théoriquement nécessaire mais il diminue fortement l'amplitude des manœuvres et peut s'avérer limitant si le trafic est dense. Finalement, il a été vu dans la sous-section (3.2.2), que les contraintes de séparation des conflits de croisement ne sont en général pas suffisantes, ce qui nécessite de les valider expérimentalement.

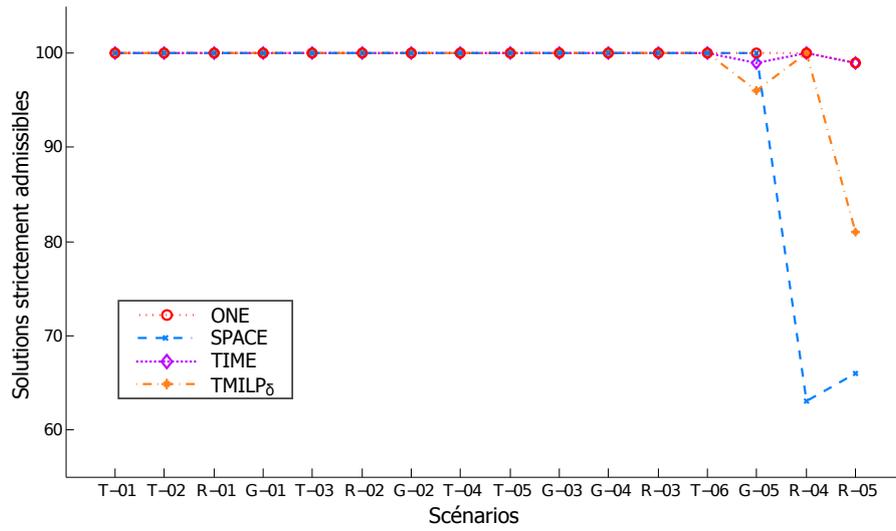
3.4 Comparaison expérimentale sur jeux de données artificiels

Les tests sont réalisés selon le même plan d'expérience que celui décrit au chapitre précédent, en section 2.5. Cent instances de chacun des seize scénarios du tableau 2.2 sont traitées, et les deux modèles linéaires **ONE** et **SPACE** sont résolus par des appels au solveur Gurobi. Les résultats sont ensuite comparés à ceux décrits dans la section 2.5.3, obtenus pour **TMILP δ** et **TIME** lors de l'exécution de l'algorithme hybride 2.1. Le nombre de solutions strictement admissibles, le coût moyen des solutions strictement admissibles et le temps de résolution des modèles sont respectivement tracés en fonction des scénarios sur les figures 3.4(a), 3.4(b) et 3.4(c). Les résultats relatifs au modèle **ONE** correspondent aux solutions complètes obtenues à la fin de l'algorithme 3.1.

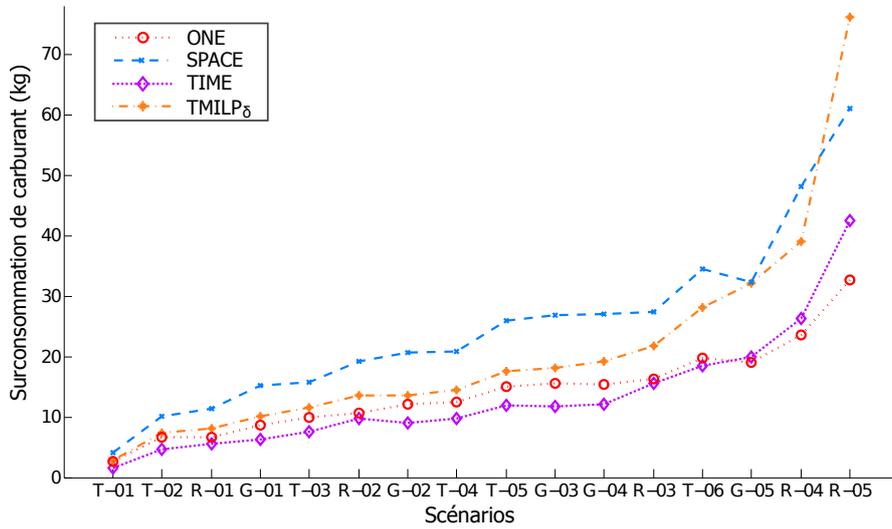
Sur le plan du temps d'exécution, l'ordre suivant est toujours respecté

$$\tau_{SPACE} \leq \tau_{ONE} \leq \tau_{TMILP\delta} \leq \tau_{TIME},$$

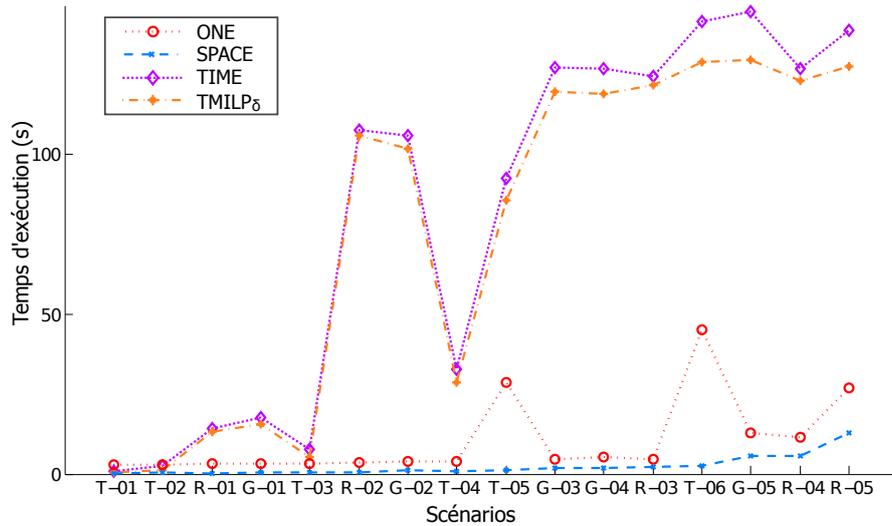
où τ est le temps d'exécution et où les indices sont explicites. Les temps de résolution de **ONE** et **SPACE** correspondent au temps qu'a pris Gurobi pour converger alors que la résolution de **TMILP**(n_h) est arrêtée au bout de 120 secondes dans l'algorithme 2.1. Ainsi, τ_{ONE} n'excède jamais les 45 secondes tandis que τ_{SPACE} est toujours inférieur à 10 secondes. L'écart entre ces deux valeurs est toutefois à pondérer en revenant sur la façon dont les solutions de **ONE** sont obtenues. En effet, il a été vu à la sous-section 3.1.5 qu'un algorithme d'horizon glissant était appliqué lors de la résolution de **ONE**; le problème résolu à chaque période d'échantillonnage permettant de déterminer les manœuvres à réaliser à l'instant correspondant. τ_{ONE} est donc la somme des



(a) Nombre de solutions strictement admissibles



(b) Coût moyen des solutions strictement admissibles



(c) Temps d'exécution moyen

Figure 3.4 — Comparaison des algorithmes de résolution en environnement déterministe

temps d'exécution de vingt résolutions de ONE, effectuées au cours de l'exécution de l'algorithme. Sachant que les instructions de contrôle pourraient être envoyées au fur et à mesure de leur calcul, cela entraîne que seul le temps de résolution du premier problème est contraignant du point de vue opérationnel. Dans ces conditions, autant ONE que SPACE semblent donc adaptés à une implémentation opérationnelle du point de vue du temps d'exécution.

Dans les quatre cas, une solution strictement réalisable est trouvée pour toutes les instances des scénarios autres que G-05, R-04 et R-05. Les limites des différents algorithmes s'observent à partir de ce point. Les résolutions de ONE et de SPACE permettent par exemple de trouver une solution strictement admissible aux cent instances de G-05 alors que ce n'est pas le cas pour TIME et a fortiori pour TMILP_δ . De plus, SPACE rencontre de grandes difficultés lors de la résolution des instances des deux scénarios les plus complexes, à savoir R-04 et R-05, puisque aucune solution strictement admissible n'est trouvée pour environ 35 % des instances. Pour toutes ces instances, il est important de noter que la résolution de SPACE a bien convergé mais qu'elle a conclu qu'aucune solution strictement admissible n'existait. Cela montre que les simplifications effectuées lors de la conception de SPACE ont nettement plus réduit le domaine admissible que celles effectuées pour les discrétisations temporelles. En comparaison, la résolution de ONE, qui a elle aussi toujours convergé, a conclu qu'il n'existait pas de solution strictement admissible pour une seule instance de R-05.

Si l'on s'intéresse maintenant au coût moyen des solutions, l'ordre suivant est respecté pour tous les scénarios, à l'exception de G-05, R-04 et R-05 :

$$Z_{\text{TIME}} \leq Z_{\text{ONE}} \leq Z_{\text{TMILP}_\delta} \leq Z_{\text{SPACE}} \quad (3-42)$$

Cet ordre n'était que partiellement attendu. Il est logique que TIME fournisse de meilleures solutions et que SPACE soit le moins performant parce qu'il offre aussi le moins de flexibilité aux manœuvres. En revanche, il a été surprenant de constater que les valeurs du critère associées aux solutions de ONE sont meilleures que celles des solutions de TMILP_δ . D'après ce résultat, la linéarisation des contraintes de séparation par les tangentes a eu un effet négatif supérieur à ce qui était attendu, et la procédure par horizon glissant 3.1 s'est au contraire révélée très performante. L'avantage de ONE s'explique aussi par le fait que les solutions de TMILP_δ , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme 2.1, ne sont en général pas des solutions optimales de TMILP .

Finalement, lors du traitement des trois instances G-05, R-04 et R-05, l'ordre entre Z_{TIME} et Z_{ONE} est inversé. Cette rupture correspond aux scénarios pour lesquels le point initial de la résolution de TIME devient de moins bonne qualité, ce qui s'observe en comparant l'évolution de Z_{TMILP_δ} à celle de Z_{SPACE} . La solution locale de TIME est alors elle aussi beaucoup moins bonne. Au contraire, la résolution du modèle ONE permet toujours de trouver la solution optimale, et, pour cette raison, l'évolution de la valeur du critère est plus robuste à l'augmentation de la complexité des instances.

Une illustration des trajectoires calculées par les algorithmes ONE et SPACE est donnée en figure 3.5. L'instance résolue est la même que celle utilisée pour dessiner la figure 2.8. Pour faciliter la comparaison, les trajectoires trouvées par l'algorithme hybride ont été reproduites. Les trajectoires calculées par SPACE laissent clairement apparaître deux créneaux de cap chacune tandis que, comme pour l'algorithme hybride, celles calculées par ONE ont une allure plus proche du point tournant. On note par ailleurs que le sens du changement de cap est inversé entre l'algorithme hybride et ONE pour les trajectoires bleue et rouge. Ici, la solution de ONE est 15 % moins chère que celle de TIME, la solution de SPACE est quant à elle 40 % plus chère. Le coût supérieur de la solution de SPACE correspond au prix de la stabilisation des vecteurs vitesse autour du point de conflit. La solution de ONE est moins chère parce que les contraintes de séparation de ce modèle sont exactes alors que celles de TMILP dérivent d'une approximation du cercle de séparation par quatre tangentes.

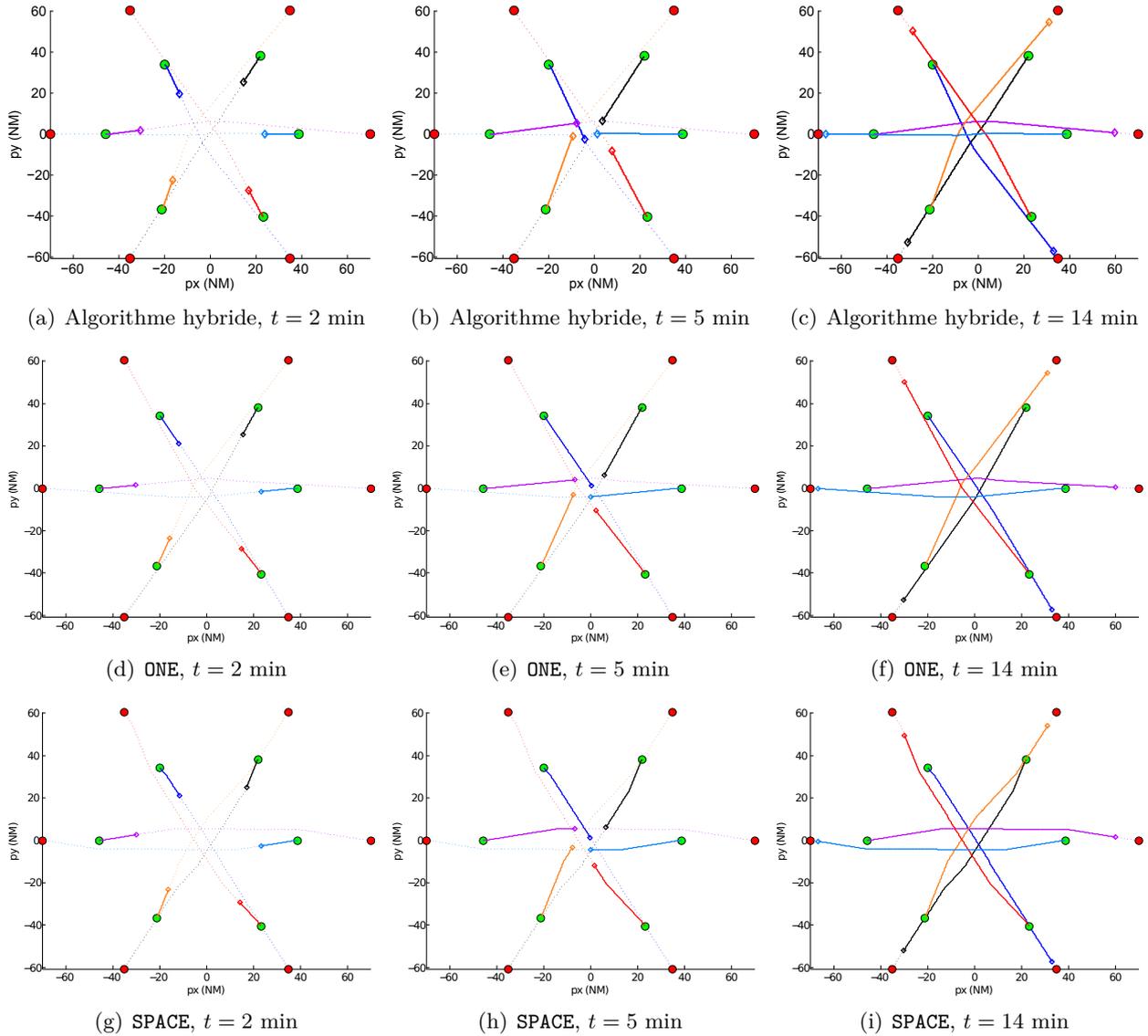


Figure 3.5 — Trajectoires générées par les MILP pour une instance de R-03

3.5 Conclusion

Deux modèles linéaires à variables mixtes ont été développés en simplifiant le problème spécifié dans le chapitre précédent. Le premier modèle, ONE, recherche des trajectoires sans conflit en n'autorisant qu'une seule manœuvre par avion. Les trajectoires complètes sont ensuite obtenues en résolvant périodiquement le problème selon un processus d'horizon glissant. Le second modèle, SPACE, est basé sur une discrétisation spatiale, et sa conception repose sur la réduction des manœuvres à des créneaux de vitesse et de cap. Dans les deux cas, une solution admissible de ces modèles est réalisable au sens de la spécification initiale du problème, ce qui permet une comparaison cohérente avec les modèles TIME et $TMILP_{\delta}$, développés dans le chapitre précédent.

Une étude comparative théorique a montré que le coût d'une solution optimale de ONE était nécessairement plus grand que celui d'une solution optimale de TIME. Il n'est cependant pas possible d'établir une relation d'ordre total entre le coût des solutions optimales des quatre modèles TIME, $TMILP_{\delta}$, ONE et SPACE.

Les modèles ont ensuite été comparés expérimentalement sur les scénarios choisis dans le

chapitre précédent. Ces tests ont d'abord montré que, à la différence de **TIME** et **TMILP δ** , les modélisations **ONE** et **SPACE** étaient compatibles avec une implémentation opérationnelle s'il est nécessaire de produire des trajectoires sans conflit en quelques secondes. Les limites de cette discrétisation spatiale ont par ailleurs été observées. D'une part, le coût des solutions de **SPACE** est toujours nettement moins bon que celui des solutions de **TIME** et **ONE**. D'autre part, le domaine réalisable est fortement réduit en limitant les manœuvres à des formes prédéfinies et en forçant les vitesses des avions à être stabilisées autour des points de conflit. De ce fait, la résolution de **SPACE** a conclu que le problème n'était pas réalisable pour environ 35 % des instances des deux scénarios les plus complexes. Finalement, la confrontation des résultats de **ONE** avec les autres modèles a permis de mettre cette modélisation en valeur. Bien que le temps de résolution de **ONE** ait été massivement réduit par rapport à celui de **TIME**, le coût des solutions reste quant à lui très proche. En outre, ce modèle est plus robuste à l'augmentation de la complexité des instances traitées. Ainsi, la résolution de **ONE** a généré plus de solutions strictement admissibles que **TIME** pour le scénario G-05, et la valeur du critère associée aux solutions de G-05, R-04 et R-05 est en moyenne plus petite.

Deuxième partie

Modélisation et résolution du problème en environnement incertain

Chapitre

4

Adaptation du cas déterministe par élargissement des distances de séparation

Aperçu

4.1	Particularités du problème sous incertitudes	130
4.1.1	Sources d'incertitudes	130
4.1.2	Contraintes de séparation robustes	130
4.1.3	Manœuvres d'évitement	131
4.2	Formulation analytique de la probabilité de conflit	132
4.2.1	Calcul géométrique	132
4.2.2	Application à la résolution de conflits	133
4.3	Résolution par horizon glissant	133
4.3.1	Minimisation de l'aire sous les manœuvres	134
4.3.2	Minimisation de la consommation de carburant	136
4.4	Évaluation expérimentale	138
4.4.1	Étude du croisement de deux aéronefs isolés	139
4.4.2	Analyse des résultats pour l'ensemble des scénarios	143
4.5	Conclusion	145

L'étude du problème en environnement déterministe a permis d'identifier un algorithme de résolution performant à la fois en termes de temps de calcul et en termes de coût des trajectoires produites. L'objet de ce chapitre est d'adapter le modèle de résolution à une commande pour prendre en compte des incertitudes dues à la fois à des erreurs de prédiction du vent, corrélées temporellement et spatialement, et à des imprécisions lors de la mesure de la vitesse des aéronefs. On s'appuie pour cela sur un calcul analytique d'une approximation de la probabilité de conflit et sur un processus de résolution par horizon glissant. L'instant du début des manœuvres et le nombre de manœuvres réalisées ayant un fort impact sur la résolution de conflits, trois algorithmes sont développés afin d'identifier le meilleur compromis.

L'étude de la littérature a mis en évidence la nécessité de prendre en compte les incertitudes dans un contrôle automatisé du trafic aérien. Parmi les sources d'incertitude ayant un fort impact sur les prédictions de trajectoires figurent notamment les erreurs de prédiction du vent. Celles-ci étant fortement corrélées temporellement et spatialement, l'hypothèse d'indépendance entre les perturbations des trajectoires d'aéronefs en conflit à court terme ne semble pas pertinente. Une structure de corrélation du vent, plus complexe, est donc considérée.

L'objectif de ce chapitre est d'adapter une méthode de résolution de conflits développée pour un environnement déterministe afin de prendre en compte de telles incertitudes sans pour autant expliciter la nature aléatoire des données dans le modèle. L'étude comparative menée dans le chapitre 3 a montré que le modèle ONE fournissait des trajectoires dont le coût est proche de celles trouvées par le modèle non linéaire, et que sa résolution était nettement plus rapide. En outre, le fait que seule une manœuvre soit ordonnée à chaque optimisation simplifie le modèle, ce qui laisse plus de flexibilité pour d'éventuelles additions nécessaires à la prise en compte des incertitudes. Le modèle ONE a par conséquent été choisi comme socle commun aux algorithmes développés dans les deux chapitres consacrés à la résolution de conflits en environnement incertain.

Les spécifications du problème déterministe, données dans la section 2.1, sont conservées dans cette partie. Des précisions relatives aux incertitudes sont toutefois apportées dans la section 4.1. Une approximation de la probabilité de conflit est calculée, et la formule analytique trouvée est appliquée à la résolution de conflits dans la section 4.2. Deux autres algorithmes s'appuyant sur cette expression analytique dans un processus d'horizon glissant sont ensuite développés dans la section 4.3. En section 4.4, les trois méthodes sont finalement comparées sur un sous-ensemble des scénarios utilisés dans les chapitres précédents.

4.1 Particularités du problème sous incertitudes

4.1.1 Sources d'incertitudes

Les modèles de perturbations décrits dans la section 1.3.2 de l'état de l'art sont utilisés. Deux sources d'incertitudes sont prises en compte :

- les erreurs de prédiction du vent ;
- les erreurs sur la vitesse longitudinale dues aux imprécisions des prédictions de la température de l'air et des capteurs de mesure de vitesse à bord.

Pour chaque aéronef $A_i \in \mathcal{A}$, les perturbations causées par la seconde source d'incertitudes sont modélisées par une variable aléatoire ϵ_i de distribution normale centrée et de variance σ_ϵ , venant modifier la vitesse longitudinale. Ce terme d'erreur est supposé indépendant entre aéronefs et constant pour la durée de la résolution de conflits.

Les erreurs de prédiction du vent résultent en un champ de vecteurs de vent aléatoires $\mathbf{w}(\mathbf{p}, t)$. Ce champ est supposé gaussien centré, stationnaire et isotrope. Sa structure de covariance est obtenue par les relations (1-58) et (1-59) où l'écart-type à l'altitude à laquelle évoluent les aéronefs est noté σ_w .

Il est supposé que l'action du FMS permet de négliger les écarts latéraux dus au vent mais ne corrige pas la vitesse longitudinale. Ainsi, un vecteur de vent aléatoire \mathbf{w} modifie la vitesse longitudinale d'un aéronef A_i d'une valeur $\frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|}$. En outre, l'action du vent nominal n'a pas été prise en compte.

4.1.2 Contraintes de séparation robustes

En environnement incertain, les contraintes de séparation garantissent idéalement qu'il n'y a pas de perte de séparation quelle que soit la réalisation des incertitudes. Toutefois, les incertitudes étant modélisées par des variables aléatoires dont les distributions ont un support infini, cet objectif est impossible à atteindre théoriquement. C'est pourquoi ces contraintes dures sont

remplacées par des contraintes probabilistes. Un seuil de sécurité \bar{P} est défini, et il est alors nécessaire que pour tout $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$, la probabilité de conflit résultant des manœuvres soit inférieure à \bar{P} . La contrainte de séparation sur un intervalle de temps $[0; T]$ se formule donc :

$$\mathbb{P} \left(\min_{t \in [0; T]} \|\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_i(t)\| < D \right) \leq \bar{P}, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C} \quad (4-1)$$

4.1.3 Manœuvres d'évitement

Du fait de l'ajout des incertitudes, il est possible que des trajectoires sans conflit optimales calculées à un moment donné ne soient plus optimales ou fassent apparaître des conflits quelques minutes plus tard. La réalisation des incertitudes peut donc amener le contrôle à remettre en cause des trajectoires calculées plus tôt et à envoyer de nouvelles instructions de contrôle. Afin d'éviter que des mesures d'urgence soient prises, on impose qu'aucune manœuvre ne soit ordonnée à un aéronef à partir des deux minutes précédant son entrée dans une *zone de conflit* telle que définie ci-dessous.

Définition 4.1. Zone de conflit : soit $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ et $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$, les vecteurs vitesse de A_i et A_j . Soit \mathcal{R}_i le référentiel mobile lié à A_i ayant subi une rotation telle que le vecteur vitesse relatif $\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$ soit colinéaire à l'axe des abscisses et orienté dans le même sens. A_i et A_j sont dans la zone de conflit de (A_i, A_j) si l'abscisse de la position de A_j dans \mathcal{R}_i , notée $p_{i,j,x}$, vérifie :

$$-D \leq p_{i,j,x} \leq D$$

Par définition de la norme de séparation horizontale, un conflit entre deux aéronefs A_i et A_j ne peut se produire que s'ils se trouvent dans la zone de conflit associée. Si l'angle d'incidence entre les trajectoires est suffisamment grand et que les erreurs sur la vitesse sont faibles, ce qui est vérifié en pratique, l'abscisse de la position de A_j dans \mathcal{R}_i est croissante avec le temps. Pour \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j fixés, il est donc possible de définir un instant d'entrée dans la zone de conflit τ_{ij}^{in} et un instant de sortie de la zone τ_{ij}^{out} . S'il y a perte de séparation entre A_i et A_j , alors celle-ci se produit à un instant $t \in [\tau_{ij}^{\text{in}}; \tau_{ij}^{\text{out}}]$. Ainsi, l'intervalle de temps à l'intérieur duquel A_i est susceptible de ne pas être séparé de tous les aéronefs est $[\tau_i^{\text{in}}; \tau_i^{\text{out}}]$, avec

$$\begin{aligned} \tau_i^{\text{in}} &= \min \left(\min_{(A_i, A_j) \in \mathcal{C}} \tau_{ij}^{\text{in}}, \min_{(A_j, A_i) \in \mathcal{C}} \tau_{ji}^{\text{in}} \right) \\ \tau_i^{\text{out}} &= \max \left(\max_{(A_i, A_j) \in \mathcal{C}} \tau_{ij}^{\text{out}}, \max_{(A_j, A_i) \in \mathcal{C}} \tau_{ji}^{\text{out}} \right) \end{aligned} \quad (4-2)$$

Au final, il est requis qu'aucune manœuvre d'évitement ne soit ordonnée à A_i après $\tau_i^{\text{in}} - \tau^{\text{urg}}$, où τ^{urg} est de l'ordre de deux minutes. En pratique, τ_{ij}^{in} dépend des manœuvres d'évitement et de la réalisation des incertitudes. Il n'est donc pas possible de connaître sa valeur exacte à l'avance. Il est toutefois possible d'en faire une bonne estimation à l'aide des vitesses courantes des aéronefs, en ne prenant pas les incertitudes en compte. L'ordre de récupération de la trajectoire de référence est quant à lui envoyé à A_i une fois τ_i^{out} dépassé.

La remise en cause des manœuvres peut également avoir pour conséquence, dans un contexte d'automatisation, de produire un grand nombre d'instructions de contrôle, envoyées périodiquement du sol vers le bord. En effet, la réalisation des erreurs n'étant pas connue à l'avance, il est clair que les trajectoires résultant d'optimisations lancées à deux instants différents ne sont jamais les mêmes. Ainsi, à chaque fois qu'une remise en cause des manœuvres est permise, de nouvelles instructions de contrôle sont effectivement produites. Sachant qu'un tel fonctionnement ne semble pas bénéfique du point de vue des pilotes comme de celui des contrôleurs, une préférence est à accorder aux méthodes limitant le nombre de manœuvres d'évitement par aéronef. Il a néanmoins été supposé que l'envoi simultané des instructions de contrôle à plusieurs

aéronefs ne posait pas de difficulté. Cette hypothèse suppose que les instructions sont produites automatiquement et qu'elles sont envoyées du sol vers le bord par *data-link*.

Par ailleurs, les durées de l'exécution de l'optimisation, de la prise de décision des contrôleurs, de la communication sol-bord et de la préparation à l'exécution des manœuvres ont été négligées. Cela a pour conséquence que, si l'optimisation conclut à la nécessité de débiter des manœuvres dès l'instant présent, la réalisation d'incertitudes entre le début des calculs et le début des manœuvres n'est pas prise en compte.

4.2 Formulation analytique de la probabilité de conflit

4.2.1 Calcul géométrique

Dans cette section, le calcul géométrique de la probabilité de conflit, présenté pages 42-44 de l'état de l'art, est adapté à la structure d'incertitudes plus complexe choisie dans cette étude. Pour cela, on suppose également que les vitesses des deux avions en conflit sont constantes et qu'une bonne estimation de l'instant où la distance minimum est atteinte est connue. Afin d'obtenir une forme analytique de la probabilité de conflit, le calcul est en outre effectué pour un vecteur de vent gaussien, constant pour la durée de la résolution de conflit. Cette dernière hypothèse simplifie la structure de corrélation du vent mais, sachant que les corrélations temporelle et spatiale sont très fortes pour des distances de quelques dizaines de nautiques et pour des durées inférieures à 10 minutes, elle est pertinente pour la résolution d'un conflit à court terme.

Soit $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ tel que la distance minimum est atteinte à l'instant τ_{ij} en l'absence d'incertitudes. En reprenant les calculs et les notations des pages 42-44, une fois les erreurs cumulées sur $[0; \tau_{ij}]$ ajoutées, la distance minimum entre A_i et A_j vaut :

$$d^{\min} = \left| \lambda \times \left(x_j^0 + \Delta_{\parallel,j}(\tau_{ij}) - mx_i^0 - m\Delta_{\parallel,i}(\tau_{ij}) \right) \right|,$$

où x_i^0 et x_j^0 sont les distances algébriques initiales entre les avions et le point de croisement des trajectoires, $\Delta_{\parallel,j}(\tau_{ij})$ et $\Delta_{\parallel,i}(\tau_{ij})$ les erreurs longitudinales cumulées sur $[0; \tau_{ij}]$. L'instant τ_{ij} s'obtient par :

$$\tau_{ij} = \frac{(x_j^0 + mx_i^0) \cos \theta_{ij} - (x_i^0 + mx_j^0)}{\|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| (1 - 2m \cos \theta_{ij} + m^2)},$$

où $\mathbf{v}_i^{\text{ini}}$ et $\mathbf{v}_j^{\text{ini}}$ sont les vecteurs vitesse des avions et $\theta_{ij} = \left(\widehat{\mathbf{v}_i^{\text{ini}}, \mathbf{v}_j^{\text{ini}}} \right)$.

Soit \mathbf{w} , le vecteur de vent constant et ϵ_i, ϵ_j , les erreurs constantes sur la vitesse de A_i et A_j . L'erreur cumulée par les avions sur $[0; \tau_{ij}]$ est :

$$\begin{aligned} d^{\min} &= \left| \lambda \times \left(x_j^0 + \tau_{ij}\epsilon_j + \tau_{ij} \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v}_j^{\text{ini}} \rangle}{\|\mathbf{v}_j^{\text{ini}}\|} - mx_i^0 - m\tau_{ij}\epsilon_i - m\tau_{ij} \frac{\langle \mathbf{w} | \mathbf{v}_i^{\text{ini}} \rangle}{\|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\|} \right) \right| \\ &= \left| \lambda \times \left(x_j^0 - mx_i^0 \right) + \lambda\tau_{ij} \times \left(\epsilon_j - m\epsilon_i + \left\langle \mathbf{w} \left| \frac{\mathbf{v}_j^{\text{ini}}}{\|\mathbf{v}_j^{\text{ini}}\|} - m \frac{\mathbf{v}_i^{\text{ini}}}{\|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\|} \right. \right) \right| \end{aligned} \quad (4-3)$$

Par isotropie du champ de vent gaussien, la distribution de probabilité de son produit scalaire avec un vecteur \mathbf{v} constant quelconque est normale, de moyenne nulle et de variance $(\sigma_w \|\mathbf{v}\|)^2$. Le terme situé à l'intérieur de la valeur absolue dans l'équation (4-3) est donc une variable aléatoire suivant une distribution normale, de moyenne μ_d et de variance σ_d données par :

$$\begin{aligned} \mu_d &= \lambda \left(x_j^0 - mx_i^0 \right) \\ \sigma_d^2 &= \lambda^2 \tau_{ij}^2 \left((1 + m^2) \times \sigma_\epsilon^2 + (1 + m^2 - 2m \cos \theta_{ij}) \sigma_w^2 \right) \end{aligned} \quad (4-4)$$

La probabilité de conflit étant la probabilité que $d^{\min} < D$, celle-ci est calculée par :

$$\mathbb{P}_C = \Phi\left(\frac{D - \mu_d}{\sigma_d}\right) - \Phi\left(\frac{-D - \mu_d}{\sigma_d}\right) \quad (4-5)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

4.2.2 Application à la résolution de conflits

Il est possible d'utiliser l'équation (4-5) pour assurer que la probabilité de conflit est sous un seuil donné \bar{P} à condition que les simplifications faites dans la sous-section précédente soient valides. En reprenant le calcul effectué à la page 44 de l'état de l'art, il suffit pour cela d'ajouter une marge d'erreur à la norme de séparation D et d'effectuer la résolution de conflit par rapport à la distance \bar{D}_{ij} ainsi obtenue. Cette nouvelle distance de séparation vaut :

$$\bar{D}_{ij} = D - \sigma_d \times \Phi^{-1}(\bar{P}) \quad (4-6)$$

De cette façon, il est possible de prendre en compte les incertitudes en n'apportant qu'un changement mineur au modèle. Il suffit pour cela de modifier le calcul des deux vecteurs $\tilde{\mathbf{n}}_{ij}^+$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{ij}^-$, intervenant dans les contraintes de séparation (3-9) et (3-10), pour qu'ils correspondent au cercle centré sur A_i , de rayon \bar{D}_{ij} . Le modèle correspondant est noté $\text{ONE}_{\bar{D}}$.

Remarque 4.1. *Lors du calcul de σ_d , on suppose que les deux avions vont continuer à voler avec des vecteurs vitesse constants $\mathbf{v}_i^{\text{ini}}$ et $\mathbf{v}_j^{\text{ini}}$ et que τ_{ij} est l'instant où la distance entre les trajectoires correspondantes est minimum si l'on néglige les incertitudes. Sachant que des changements de vitesse vont être ordonnés et que τ_{ij} va être perturbé, il est clair que \bar{D} n'est qu'une approximation de la distance de séparation nécessaire et suffisante pour garantir une probabilité de conflit égale à \bar{P} .*

Grâce à l'approximation de la probabilité de conflit, on est capable de construire un algorithme permettant la résolution de conflits dans un environnement incertain par au plus une manœuvre par avion. On définit pour cela une durée d'anticipation τ^{avt} de l'entrée des avions dans une zone de conflit. Par souci de cohérence avec l'algorithme d'horizon glissant 3.1 qui est repris dans la suite, on suppose que l'optimisation ne peut être lancée qu'à un nombre fini de pas de temps échantillonnés selon une période h . $\text{ONE}_{\bar{D}}$ est donc résolu une seule fois au premier pas de temps tel que le premier avion entrant dans une zone de conflit le fera dans un temps strictement inférieur à $\tau^{\text{avt}} + h$. Finalement, une instruction de retour sur trajectoire est envoyée à un avion A_i dès que τ_i^{out} est passé. L'algorithme 4.1 récapitule ce processus.

4.3 Résolution par horizon glissant

Lorsque les incertitudes ne sont pas prises en compte, la procédure d'horizon glissant apparaît comme un moyen de décomposer un problème, dont la taille dépend d'un horizon de commande, en plusieurs sous-problèmes portant sur des horizons de commande plus petits. Dans le contexte de ce chapitre, la résolution par horizon glissant est utilisée pour permettre d'adapter les manœuvres d'évitement aux réalisations des incertitudes. Dans un premier temps, la méthode de minimisation de l'aire sous les manœuvres, décrite dans la sous-section 1.3.5 de l'état de l'art, est adaptée au modèle ONE pour déterminer l'instant auquel les manœuvres doivent être débutées. Un second algorithme est ensuite développé pour la minimisation de la consommation de carburant sans limite sur le nombre de manœuvres effectuées par chaque avion.

Algorithme 4.1 Résolution par une manœuvre d'évitement unique

- 1: $t \leftarrow 0$
 - 2: **répéter**
 - 3: Mettre à jour les positions observées $\{\mathbf{p}_i^{\text{ini}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ et les instants $\{\tau_i^{\text{in}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$
 - 4: **si** $t + \tau^{\text{avt}} + h > \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$ **alors**
 - 5: Résoudre $\text{ONE}_{\overline{D}}$
 - 6: Envoyer les instructions de contrôle résultant de l'optimisation
 - 7: $t \leftarrow t + h$
 - 8: **jusqu'à** $t + \tau^{\text{avt}} > \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$
 - 9: **répéter**
 - 10: Mettre à jour les positions observées $\{\mathbf{p}_i^{\text{ini}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ et les instants $\{\tau_i^{\text{out}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$
 - 11: **pour** $A_i \in \mathcal{A} : \tau_i^{\text{out}} \leq t < \tau_i^{\text{out}} + h$ **effectuer**
 - 12: Envoyer une instruction de retour sur trajectoire à A_i
 - 13: $t \leftarrow t + h$
 - 14: **jusqu'à** $t \geq \max_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{out}}$
-

4.3.1 Minimisation de l'aire sous les manœuvres

La minimisation de la consommation de carburant a généralement pour effet de rendre préférables des manœuvres débutant aussi tôt que possible puisque ces dernières entraînent des trajets moins longs jusqu'au point de conflit. À l'inverse, des manœuvres minimisant l'aire entre la trajectoire calculée lors de l'optimisation et la trajectoire de référence débutent aussi tard que possible. L'avantage de ce second critère est que la distance de séparation \overline{D}_{ij} est d'autant plus grande que les manœuvres sont commencées longtemps avant le conflit. En contrepartie, les trajectoires calculées ne sont pas optimales vis-à-vis du coût réel, qui dépend de la consommation de carburant et de la durée du trajet.

Calcul du critère à minimiser

Soit $A_i \in \mathcal{A}$ dont la vitesse de référence est $\mathbf{v}_i^{\text{ini}}$. Pour ne pas alourdir inutilement les calculs, l'aire sous les manœuvres est calculée en supposant le changement de vitesse instantané. On note $\mathbf{v}_{\parallel,i}^{\text{ini}} = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$ et $\mathbf{v}_{\perp,i}^{\text{ini}}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\mathbf{v}_{\parallel,i}^{\text{ini}}$. Si la manœuvre d'évitement consiste à voler avec un vecteur vitesse \mathbf{v}_i pendant une durée τ , alors l'aire sous la manœuvre est donnée par :

$$\frac{1}{2} \tau^2 \left| \left\langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_{\parallel,i}^{\text{ini}} \right\rangle \times \left\langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_{\perp,i}^{\text{ini}} \right\rangle \right|$$

Il est possible de se passer de la valeur absolue en introduisant la variable intermédiaire $u_{\perp,i}$, et en la contraignant par :

$$u_{\perp,i} \geq \left\langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_{\perp,i}^{\text{ini}} \right\rangle \quad \text{et} \quad u_{\perp,i} \geq -\left\langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_{\perp,i}^{\text{ini}} \right\rangle, \quad (4-7)$$

Il suffit ensuite de minimiser le produit suivant :

$$\frac{1}{2} \tau^2 \left\langle \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_{\parallel,i}^{\text{ini}} \right\rangle \times u_{\perp,i},$$

positif pour tout changement de cap inférieur à $\pi/2$. Or, cette fonction des variables $u_{\parallel,i}$, $v_{x,i}$ et $v_{y,i}$ n'est ni linéaire ni convexe, ce que l'on souhaite éviter. Par conséquent, une approximation linéaire de l'aire est minimisée. Cette dernière est obtenue en remarquant que, pour des changements de cap petits, le produit scalaire $\left\langle \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^{\text{ini}} \mid \mathbf{v}_{\parallel,i}^{\text{ini}} \right\rangle$ est négligeable devant

$\langle \mathbf{v}_i^{\text{ini}} | \mathbf{v}_{\parallel,i}^{\text{ini}} \rangle = \|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\|$. On minimise donc le terme linéaire :

$$\text{Aire}_{\perp,i} = \frac{1}{2} \tau^2 \|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| \times u_{\perp,i} \quad (4-8)$$

Le changement de vitesse est effectué dès l'instant initial, et le vecteur vitesse est ensuite constant jusqu'à ce que la manœuvre de récupération du contrat 4D puisse être débutée. Ainsi $\tau = \tau_i^{\text{out}}$, où τ_i^{out} est donné par l'équation (4-2).

L'aire sous la courbe ne constitue pas à elle seule un critère pertinent lorsque la vitesse des aéronefs n'est pas constante. En effet, si des aéronefs changent de vitesse sans pour autant changer de cap, l'aire sous la trajectoire est nulle. En minimisant seulement l'aire, les changements de vitesse ne sont donc pas pris en compte dans le critère. Pour éviter cela, un terme $A_{\parallel,i}$, pénalisant un changement de vitesse longitudinale, est ajouté. Une autre variable intermédiaire $u_{\parallel,i}$ est introduite, et elle est contrainte par :

$$u_{\parallel,i} \geq \langle \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^{\text{ini}} | \mathbf{v}_{\parallel,i}^{\text{ini}} \rangle \quad \text{et} \quad u_{\parallel,i} \geq -\langle \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^{\text{ini}} | \mathbf{v}_{\parallel,i}^{\text{ini}} \rangle \quad (4-9)$$

Le terme linéaire à minimiser vaut alors :

$$\text{Aire}_{\parallel,i} = \frac{1}{2} \alpha_A \tau^2 \|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| \times u_{\parallel,i}, \quad (4-10)$$

où α_A est une constante de pondération permettant d'orienter les manœuvres plutôt vers les changements de cap ou vers les changements de vitesse.

Finalement, le problème de résolution de conflits associé à ce critère, noté AIRE, est obtenu à partir de $\text{ONE}_{\overline{D}}$ en remplaçant la fonction objectif par :

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}} \text{Aire}_{\perp,i} + \text{Aire}_{\parallel,i} \quad (4-11)$$

Les contraintes liées à la récupération du contrat 4D sont également supprimées parce qu'il n'y a pas de raison que les trajectoires de récupération soient calculées de façon à minimiser l'aire sous la courbe. En effet, il a été supposé que le bord était libre de choisir la façon dont le contrat 4D est récupéré, et, pour ce dernier, la minimisation de la consommation de carburant a nettement plus de sens. Ce dernier point entraîne que les trajectoires calculées ne tiennent pas compte du contrat 4D.

Détermination de l'instant de début des manœuvres

Le fait de choisir le critère donné par (4-11) n'est intéressant que si l'instant auquel les manœuvres sont débutées n'est pas fixé à l'avance. Or, la résolution de AIRE, comme celle de ONE, entraîne nécessairement le lancement des manœuvres dès l'instant initial. À chaque période d'échantillonnage de l'horizon glissant, deux résolutions de AIRE sont donc effectuées en parallèle. La première résolution, notée AIRE(0), suppose que les changements de vitesse sont en effet tous débutés tout de suite, tandis que la seconde résolution, notée AIRE(h), produit des manœuvres débutées à la prochaine période d'échantillonnage de l'horizon glissant. Dès lors, si le critère minimal de AIRE(0) est inférieur à celui de AIRE(h), il n'est pas intéressant d'attendre pour envoyer les instructions de contrôle, tandis que dans le cas opposé il est préférable d'attendre et d'observer la réalisation des incertitudes avant d'agir. Ainsi, aucune manœuvre n'est réalisée tant que le critère minimal de AIRE(h) est supérieur à celui de AIRE(0), à moins que l'entrée des aéronefs dans les zones de conflit soit imminente.

Pour obtenir AIRE(h) à partir de AIRE(0), il suffit de modifier le calcul de $\tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}}$ donné par l'équation (3-8) en prenant en compte le fait que la vitesse initiale des aéronefs est inchangée pendant une durée h :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i^{\text{ini}} = \mathbf{p}_i^{\text{ini}} + \frac{3h}{2} \mathbf{v}_i^{\text{ini}}, \quad \forall A_i \in \mathcal{A}.$$

Pour chaque conflit $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$, les vecteurs unitaires $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^-$ sont ensuite modifiés en conséquence. Il est toutefois essentiel que la distance de séparation \bar{D}_{ij} soit la même que pour AIRE(0) puisque les trajectoires suivies par les aéronefs pendant la première période de durée h sont également susceptibles d'être perturbées.

Le processus de résolution de conflits décrit ci-dessus est résumé par l'algorithme 4.2.

Algorithme 4.2 Détermination de l'instant de début des manœuvres par minimisation de l'aire

```

1:  $t \leftarrow 0$ 
2: répéter
3:   Mettre à jour les positions observées  $\{\mathbf{p}_i^{\text{ini}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$  et les instants  $\{\tau_i^{\text{in}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ 
4:   Résoudre AIRE(0) et mettre à jour  $Z_0$  le critère optimal associé
5:   si  $t + \tau^{\text{urg}} + h \leq \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$  alors
6:     Résoudre AIRE( $h$ ), mettre à jour  $Z_h$  le critère optimal associé
7:     si  $Z_0 < Z_h$  ou  $t + \tau^{\text{urg}} + h > \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$  alors
8:       Envoyer les instructions de contrôle calculées par AIRE(0)
9:        $t \leftarrow t + h$ 
10:  jusqu'à  $Z_0 < Z_h$  ou  $t + \tau^{\text{urg}} > \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$ 
11: répéter
12:   Mettre à jour les positions observées  $\{\mathbf{p}_i^{\text{ini}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$  et les instants  $\{\tau_i^{\text{out}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ 
13:   pour  $A_i \in \mathcal{A}$  :  $\tau_i^{\text{out}} \leq t < \tau_i^{\text{out}} + h$  effectuer
14:     Envoyer une instruction de retour sur trajectoire à  $A_i$ 
15:      $t \leftarrow t + h$ 
16:  jusqu'à  $t \geq \max_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{out}}$ 

```

4.3.2 Minimisation de la consommation de carburant

Si l'on minimise la consommation de carburant, un processus similaire à l'algorithme 4.2 est inutile. En revanche, si l'on ne se limite pas à une seule manœuvre, la question de l'instant auquel la première manœuvre est débutée est moins cruciale. En effet, si à un pas de temps de l'horizon glissant donné, le modèle $\text{ONE}_{\bar{D}}$ est optimisé en sachant que d'autres manœuvres pourront être ordonnées aux aéronefs aux pas de temps suivants, il n'est pas nécessaire d'ajouter une marge aussi grande lors du calcul des distances de séparation \bar{D}_{ij} .

Plus précisément, on considère $(A_i, A_j) \in \mathcal{C}$ avec τ_{ij} l'instant où il est prévu que la distance soit minimum entre les aéronefs et τ_i^{in} , τ_j^{in} les estimations des instants d'entrée de A_i et A_j dans une zone de conflit. A_i et A_j ne sont donc pas autorisés à manœuvrer après $\tau_i^{\text{in}} - \tau^{\text{urg}}$, $\tau_j^{\text{in}} - \tau^{\text{urg}}$. En supposant que les erreurs sont suffisamment petites pour toujours pouvoir être compensées par des manœuvres, il est seulement nécessaire de prendre en compte les incertitudes sur les positions de A_i et A_j cumulées respectivement entre $\tau_i^{\text{in}} - \tau^{\text{urg}}$ et τ_{ij} , et entre $\tau_j^{\text{in}} - \tau^{\text{urg}}$ et τ_{ij} . En reprenant les calculs menant à la variance de la distance minimum entre A_i et A_j dans l'équation (4-4), on trouve :

$$\begin{aligned}
\sigma_d^2 = \lambda^2 \times & \left[\left((\tau_{ij} - \tau_i^{\text{in}} + \tau^{\text{urg}})^2 + m^2 (\tau_{ij} - \tau_i^{\text{in}} + \tau^{\text{urg}})^2 \right) \times \sigma_e^2 \right. \\
& + \left((\tau_{ij} - \tau_i^{\text{in}} + \tau^{\text{urg}})^2 + m^2 (\tau_{ij} - \tau_j^{\text{in}} + \tau^{\text{urg}})^2 \right. \\
& \left. \left. - 2m (\tau_{ij} - \tau_i^{\text{in}} + \tau^{\text{urg}}) \times (\tau_{ij} - \tau_j^{\text{in}} + \tau^{\text{urg}}) \cos \theta_{ij} \right) \times \sigma_w^2 \right]
\end{aligned} \tag{4-12}$$

La valeur de \bar{D}_{ij} est ensuite déduite de σ_d .

Lors du processus de résolution répétée de $\text{ONE}_{\bar{D}}$, les manœuvres les plus grandes sont toujours faites à l'issue de la première optimisation, puisqu'elles doivent tout de même aboutir à

des trajectoires sans conflit pour la norme \bar{D}_{ij} . À chaque période d'échantillonnage ultérieure, les manœuvres tendront plutôt à s'opposer de façon systématique à la réalisation des erreurs. Comme cela a été discuté dans la sous-section 4.1.3, la prolifération des manœuvres qui en résulte n'est pas souhaitable. Deux modifications sont donc apportées au modèle $\text{ONE}_{\bar{D}}$ pour réduire le nombre d'instructions de contrôle envoyées aux aéronefs.

Réduction du nombre de manœuvres

L'opposition systématique à la réalisation des erreurs a deux causes. D'une part, toute perturbation sur une trajectoire modifie la façon dont le contrat 4D doit être récupéré pour minimiser la consommation de carburant. D'autre part, toute perturbation s'opposant à la résolution d'un conflit entraîne la nécessité de nouvelles manœuvres, puisque l'optimisation du critère produit en général des trajectoires séparées exactement d'une distance \bar{D}_{ij} .

Pour éviter les petites manœuvres permettant un gain – généralement faible – sur la consommation de carburant, le critère minimisé est modifié dès la seconde période d'échantillonnage du processus d'horizon glissant. Considérant que les changements de vitesse décidés à l'issue de la première résolution donnent lieu à des consommations de carburant satisfaisantes, il est pertinent, lors des optimisations suivantes, de minimiser l'écart à ces vitesses. Pour cela, la norme de l'accélération des aéronefs est minimisée en introduisant des variables \bar{u}_i similaires à celles utilisées dans TMILP . Ces variables sont contraintes par :

$$\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{e}(\theta) \rangle \leq \bar{u}_i \times \cos\left(\frac{\pi}{N_u}\right), \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall \theta \in \Theta_u, \quad (4-13)$$

Le critère à minimiser est ensuite :

$$Z_{\bar{u}} = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \bar{u}_i \quad (4-14)$$

Remarque 4.2. *Il aurait également été possible de proscrire les petites manœuvres qui ne servent pas à résoudre des conflits en pénalisant chaque instruction de contrôle par un coût fixe. Cependant, le coût fixe se serait également appliqué lorsque des pertes de séparation doivent être évitées. Il aurait alors eu pour effet de mettre toute la charge de la résolution des conflits sur un nombre d'avions aussi petit que possible. Dans cette étude, il a été jugé préférable, en termes d'équité et d'optimalité des coûts globaux, de répartir la responsabilité des résolutions de conflits entre tous les aéronefs concernés.*

Pour traiter la seconde cause, l'idée est de forcer la résolution des conflits à être effectuée selon une distance de séparation légèrement supérieure à \bar{D}_{ij} . De cette façon, seules les perturbations ayant un effet grave sur la séparation d'aéronefs en conflit potentiel entraînent de nouvelles manœuvres. La procédure à mettre en place est donc la suivante :

- des instructions de contrôle ne sont envoyées que si certains conflits sont détectés vis-à-vis de la norme \bar{D}_{ij} ;
- si un aéronef effectue une manœuvre, alors il doit être séparé de tous les aéronefs avec lesquels il est en conflit potentiel d'une distance $\bar{D}'_{ij} > \bar{D}_{ij}$.

Les distances de séparation étendues \bar{D}'_{ij} sont calculées en retranchant h aux valeurs de τ_i^{in} et τ_j^{in} dans l'équation (4-12). Ainsi, la procédure évite le plus souvent d'envoyer des instructions de contrôle à deux pas de temps successifs.

Pour que la résolution du modèle traduise la procédure décrite ci-dessus, deux ensembles de variables binaires $\{\delta_i^h\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ et $\{\delta_{ij}^h\}_{(A_i, A_j) \in \mathcal{C}}$ sont ajoutées. Les variables δ_i^h indiquent si l'aéronef A_i modifie sa vitesse, et les variables δ_{ij}^h indiquent si le conflit (A_i, A_j) doit être résolu avec une distance de séparation \bar{D}'_{ij} ou \bar{D}_{ij} . L'accélération de A_i est d'abord contrainte à être nulle lorsque $\delta_i^h = 0$ par :

$$\bar{u}_i \leq \sqrt{(U^{\text{max}})^2 + (V_i^{\text{max}} \times \omega^{\text{max}})^2} \delta_i^h, \forall A_i \in \mathcal{A} \quad (4-15)$$

Le terme en facteur de δ_i^h assure que \bar{u}_i n'est pas sur-contraint lorsque $\delta_i^h = 1$. La variable binaire δ_{ij}^h est ensuite contrainte à valoir 1 si au moins l'un des deux aéronefs A_i ou A_j manœuvre par :

$$\delta_{ij}^h \geq \delta_i^h \quad \text{et} \quad \delta_{ij}^h \geq \delta_j^h, \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C} \quad (4-16)$$

Finalement, la séparation entre A_i et A_j est contrainte à être supérieure à \bar{D}'_{ij} dès que l'un des deux aéronefs modifie sa vitesse :

$$\langle \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+(h) \rangle \geq -M_{i,j}(\delta_{ij} + 1 - \delta_{ij}^h), \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C} \quad (4-17)$$

$$\langle \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^-(h) \rangle \geq -M_{i,j}(1 - \delta_{ij} + 1 - \delta_{ij}^h) \forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C} \quad (4-18)$$

où $\mathbf{n}_{i,j}^+(h)$ et $\mathbf{n}_{i,j}^-(h)$ correspondent au cercle centré sur A_i et de rayon \bar{D}'_{ij} . Les contraintes (4-17) et (4-18) ne forcent une séparation \bar{D}'_{ij} que quand $\delta_{ij}^h = 1$. Par les contraintes (4-15) et (4-16), la séparation $\bar{D}_{ij} + d$ est donc imposée quand A_i ou A_j manœuvre, tandis qu'elle n'est pas nécessaire quand leur vitesse est inchangée.

Le modèle obtenu à partir de $\text{ONE}_{\bar{D}}$ en ajoutant les contraintes (4-15)-(4-18) est noté MPC. L'algorithme 4.3 résume la résolution par horizon glissant décrite dans cette section.

Algorithme 4.3 Horizon glissant sans limite sur le nombre de manœuvres

- 1: $t \leftarrow 0$
 - 2: **répéter**
 - 3: **pour** $A_i \in \mathcal{A}$ **effectuer**
 - 4: Mettre à jour la position observée $\mathbf{p}_i^{\text{ini}}$ et les instants τ_i^{in} et τ_i^{out}
 - 5: **si** $t + \tau^{\text{urg}} > \tau_i^{\text{in}}$ **alors**
 - 6: Fixer $\bar{u}_i = 0$ dans MPC {pas de manœuvre juste avant l'entrée en zone de conflit}
 - 7: **si** $t \leq \max_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$ **alors**
 - 8: Résoudre MPC
 - 9: Envoyer les instructions de contrôle calculées
 - 10: **si** $t = 0$ **alors**
 - 11: Remplacer le critère de MPC par $Z_{\bar{u}}$ tel que défini dans (4-14)
 - 12: **pour** $A_i \in \mathcal{A} : \tau_i^{\text{out}} \leq t < \tau_i^{\text{out}} + h$ **effectuer**
 - 13: Envoyer une instruction de retour sur trajectoire à A_i
 - 14: $t \leftarrow t + h$
 - 15: **jusqu'à** $t \geq \max_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{out}}$
-

4.4 Évaluation expérimentale

Les trois algorithmes 4.1, 4.2 et 4.3, aussi désignés par $\text{ONE}_{\bar{D}}$, AIRE et MPC en référence aux modèles résolus, sont testés sur des jeux de données similaires à ceux décrits dans la section 2.5.1.

Lors de la simulation des trajectoires des aéronefs, le tirage des valeurs du vent aléatoire est effectué en suivant la méthode développée par Lymperopoulos [74], décrite à la page 41 de l'état de l'art. Les erreurs constantes sur la vitesse sont simplement tirées indépendamment par la méthode de Box-Muller. Les valeurs des écarts-types caractérisant les deux termes d'erreur sont les mêmes que celles mentionnées dans [29], soit, une fois converties en nœuds, $\sigma_\epsilon \approx 5,4$ kt et $\sigma_w \approx 7,9$ kt. Les trois algorithmes sont ensuite appliqués pour traiter chaque instance pour 1000 tirages indépendants des perturbations.

Remarque 4.3. *La structure de corrélation du vent aléatoire $\mathbf{w}(\mathbf{p}, t)$ considérée pour la simulation est différente de celle utilisée pour le calcul des distances de séparation intervenant dans*

les trois modèles. L'approximation qui a été faite pour ce calcul revient à faire l'hypothèse que les fonctions de corrélation f_x^t, f_y^t, f_x^{XY} et f_y^{XY} sont constantes et égales à 1. Le biais introduit par cette approximation est discuté dans l'analyse des résultats.

Sachant que les perturbations aléatoires créent déjà de la diversité dans les configurations, seule une instance de chaque scénario a été considérée. Pour les scénarios de type Train, trois angles de croisement différents, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$, ont été testés pour étudier l'influence de cet angle lorsque les incertitudes sont prises en compte. Les tests n'incluent toutefois pas les deux plus gros scénarios de chaque type, à savoir T-05, T-06, G-04, G-05, R-04 et R-05. Ce choix a été fait pour que le temps d'exécution total reste raisonnable. En outre, la complexité des conflits simulés dans ces scénarios est bien supérieure à ce que l'ATC pourrait être amené à gérer dans les projections à 30 ans les plus optimistes. Ces scénarios ont été utiles pour mettre en évidence les limites des modèles dans le cas déterministe, mais ils ne sont pas indispensables pour l'étude de la prise en compte des incertitudes.

Lors du calcul de la marge sur la distance de séparation, le seuil acceptable sur la probabilité de conflit a été fixé à $\bar{P} = 1\%$. La période d'échantillonnage du processus d'horizon glissant a quant à lui été étendu à $h = 1$ minute. Chaque MILP est résolu par le solveur Gurobi.

L'analyse des résultats se concentre dans un premier temps sur le scénario le plus simple dans lequel deux avions isolés sont en conflit potentiel. Ce cas simple permet d'observer clairement la qualité des approximations réalisées lors du calcul de la probabilité de conflit, ainsi que les différences de comportement induites par les variations entre les trois algorithmes. L'ensemble des instances est traité dans un second temps.

4.4.1 Étude du croisement de deux avions isolés

Croisement sans conflit prévu

Dans un premier temps, les tests ont porté sur le cas où aucune perte de séparation n'est prévue entre les deux avions. Plus précisément, les trajectoires de référence des deux avions se coupent perpendiculairement et la distance minimum les séparant est égale à 7,5 NM. Pour l'algorithme $\text{ONE}_{\bar{D}}$, la durée d'anticipation a été fixée à une valeur assez grande, soit $\tau^{\text{avt}} = 10$ minutes, afin de mettre en relief les différences de comportement entre les trois approches. L'instant τ^{urg} est quant à lui fixé à 2 minutes pour l'ensemble des tests.

Parmi les 1000 tirages d'erreurs, 63 ont donné lieu à une perte de séparation lorsque aucune instruction de contrôle n'est envoyée aux avions. L'analyse s'est concentrée sur la capacité des différents algorithmes à prévenir ces conflits sans envoyer d'instructions de contrôle inutiles. Les résultats sont récapitulés dans le tableau 4.1. La colonne intitulée IC correspond au nombre de tirages pour lesquels au moins une instruction de contrôle a été envoyée. La colonne IC^+ donne le nombre de tirages pour lesquels au moins une instruction de contrôle a été envoyée alors que cela n'était pas nécessaire, et la colonne IC^- donne le nombre de tirages pour lesquels aucune instruction de contrôle n'a été envoyée alors qu'il aurait été nécessaire de demander une manœuvre. $|C^0|$ rappelle le nombre de pertes de séparation lorsque aucune instruction n'est envoyée, et $|C|$ est le nombre de pertes de séparation observées après résolution ; $\|\mathbf{p}_{ij}\|^{\min}$ donne alors la plus petite distance de séparation observée sur les 1000 tirages. Finalement, Z est le coût moyen des trajectoires, en termes de consommation de carburant et de pénalité d'écart au contrat.

La colonne IC indique qu'au moins une instruction de contrôle a toujours été envoyée pendant l'exécution de l'algorithme $\text{ONE}_{\bar{D}}$. Cela vient du fait que la distance de séparation \bar{D}_{ij} , calculée par (4-6), est supérieure à la distance de séparation prévue. En effet, le calcul donne $\bar{D}_{ij} \approx 9 \text{ NM} > 7,5 \text{ NM}$. Dans 937 cas sur 1000, les manœuvres ont donc été inutiles parce qu'elles ont été décidées trop tôt. La minimisation de l'aire plutôt que de la consommation de carburant compense en grande partie cet effet négatif de l'anticipation du conflit puisque seuls

Tableau 4.1 — *Manœuvres pour un croisement sans conflit prévu*

Algorithme	IC	IC^+	IC^-	$ C^0 $	$ C $	$\ \mathbf{p}_{ij}\ ^{\min}$	Z
$\text{ONE}_{\overline{D}}$	1000	937	0	63	10	3,2	0,80
AIRE	115	52	0	63	10	4,8	0,13
MPC	115	52	0	63	3	4,8	0,10

115 tirages ont donné lieu à des manœuvres. En fait, lorsque des instructions de contrôle ont été envoyées pendant l'exécution de l'algorithme AIRE, celles-ci ont presque toujours été envoyées au dernier pas de temps permis, c'est à dire 2 à 3 minutes avant l'entrée des aéronefs dans la zone de conflit, alors que les instructions de $\text{ONE}_{\overline{D}}$ ont été envoyées 7 à 8 minutes plus tôt. Cette attente a permis de ne pas intervenir dans la grande majorité des cas où aucune perte n'aurait eu lieu en l'absence de contrôle. La résolution de conflit sans limite sur le nombre de manœuvres a eu exactement le même effet : 115 tirages d'erreurs, dont il a été vérifié qu'il s'agissait bien des mêmes, ont donné lieu à des manœuvres. Ce résultat est parfaitement cohérent avec le fait que le calcul de \overline{D}_{ij} effectué pour MPC est le même que celui effectué pour AIRE au pas de temps où les instructions de contrôle ont été envoyées. Le nombre de manœuvres inutiles ordonnées en résolvant $\text{ONE}_{\overline{D}}$ explique la différence de coût moyen des trajectoires.

Si l'on s'intéresse maintenant à la colonne $|C|$, il apparaît que 10 conflits sur les 63 qui se seraient produits sans contrôle ne sont résolus ni par $\text{ONE}_{\overline{D}}$ ni par AIRE. Les dix conflits restants à l'issue de l'exécution de $\text{ONE}_{\overline{D}}$ découlent du fait que la distance de séparation \overline{D}_{ij} est calculée pour garantir une probabilité de conflit égale à 1 %. Sachant que la résolution du modèle $\text{ONE}_{\overline{D}}$ produit des trajectoires entre lesquelles la distance de séparation est exactement égale à \overline{D}_{ij} , il est logique que dix pertes de séparation soient observées sur les 1000 tirages d'erreur. Ces dix mêmes cas, correspondant apparemment aux réalisations des incertitudes les plus défavorables au maintien de la séparation, ont aussi donné lieu à des conflits à l'issue de la résolution de AIRE. On observe toutefois, d'après la colonne $\|\mathbf{p}_{ij}\|^{\min}$, que l'attente a permis d'augmenter significativement la plus petite distance de séparation survenue lorsqu'il y avait conflit. Ainsi, pour les dix conflits non prévenus par AIRE, la distance de séparation est comprise entre 4,8 NM et 5 NM, alors qu'une distance de séparation de 3,2 NM a été mesurée après l'exécution de $\text{ONE}_{\overline{D}}$, ce qui constitue un conflit grave. L'exécution de MPC a quant à elle permis de prévenir six de ces conflits du fait qu'une marge additionnelle est ajoutée à la distance de séparation minimale dans les contraintes (4-17)-(4-18) lorsque des manœuvres sont effectuées.

Finalement, la colonne IC^- indique que des instructions de contrôle ont toujours été envoyées lorsque des conflits étaient effectivement sur le point de se produire. Cela aurait pu ne pas être le cas lors des exécutions de AIRE ou de MPC si de grandes variations des erreurs avaient été simulées. Il semble donc que les algorithmes AIRE et MPC garantissent la détection des conflits pour des perturbations fortement corrélées dans le temps.

Croisement où un conflit est prévu

Les algorithmes sont encore testés pour le croisement de deux aéronefs, mais cette fois une perte de séparation est prévue entre les deux aéronefs, et les trois angles de croisement $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont considérés. Pour ne pas avoir des configurations trop symétriques, les positions initiales des aéronefs ont été ajustées de façon à obtenir une distance de séparation minimale prévue égale à 2 NM. Par ailleurs, la durée d'anticipation a été réduite à $\tau^{\text{avt}} = 7$ minutes du fait qu'une trop grande durée d'anticipation semble plutôt préjudiciable à la résolution de conflits d'après l'étude du cas sans conflit. Ces 7 minutes reviennent en fait à débiter les manœuvres cinq minutes avant l'instant à partir duquel les manœuvres sont considérées comme de la gestion d'urgence. Les résultats sur lesquels s'est concentrée l'analyse sont regroupés dans le tableau 4.2. $|IC|$ est la moyenne du plus grand nombre d'instructions de contrôle envoyées à l'un des deux avions, à l'exclusion des instructions de retour sur trajectoire, et $|IC|^{\max}$ est le maximum de ces

Tableau 4.2 — Résolution de conflit à deux aéronefs pour trois angles de croisement

θ_{ij}	Algorithme	$ IC $	$ IC ^{\max}$	$\ \mathbf{p}_{ij}\ ^{\min}$	$\ \mathbf{p}_{ij}\ ^{\text{moy}}$	$\ \mathbf{p}_{ij}\ ^{\max}$	$ C $	Z
$\frac{\pi}{3}$	ONE \bar{D}	1,0	1,0	4,4	7,7	11,0	11	5,2
	AIRE	1,0	1,0	4,5	5,9	7,0	21	18,6
	MPC	1,4	6,0	4,8	6,4	9,4	7	3,6
$\frac{\pi}{2}$	ONE \bar{D}	1,0	1,0	4,3	7,7	11,6	7	5,2
	AIRE	1,0	1,0	4,6	5,9	6,9	7	11,0
	MPC	1,4	5,0	4,8	6,3	10,0	4	2,7
$\frac{2\pi}{3}$	ONE \bar{D}	1,0	1,0	4,6	7,3	10,1	5	3,8
	AIRE	1,0	1,0	5,0	5,7	6,5	0	7,6
	MPC	1,4	5,0	4,9	6,1	8,7	1	2,8

valeurs parmi les 1000 tirages. $\|\mathbf{p}_{ij}\|^{\min}$, $\|\mathbf{p}_{ij}\|^{\text{moy}}$ et $\|\mathbf{p}_{ij}\|^{\max}$ sont respectivement les valeurs maximale, moyenne et minimale de la plus petite distance de séparation entre les deux aéronefs. $|C|$ et Z ont la même signification que précédemment.

Les colonnes $|IC|$ et $|IC|^{\max}$ permettent de juger de l'efficacité des techniques de réduction du nombre de manœuvres ajoutées dans le modèle MPC. La moyenne du nombre maximum de manœuvres ordonnées pendant l'exécution de MPC, soit $|IC| = 1,4$, montre que la modification du critère et l'ajout des contraintes (4-15)-(4-18) permettent de n'envoyer qu'une seule instruction de contrôle dans la majorité des cas. En comparaison, sans ces modifications, une instruction aurait été envoyée à chaque pas de temps. Ici, les algorithmes ont été lancés avec une durée d'anticipation de cinq minutes, ce qui signifie que six instructions de contrôle auraient été envoyées aux aéronefs quel que soit le tirage des erreurs. La seconde colonne, $|IC|^{\max}$, montre toutefois qu'il existe toujours des cas où une manœuvre est effectuée à chaque pas de temps, quand $\theta_{ij} = \frac{\pi}{3}$, ou à chaque pas de temps sauf un pour les deux autres angles de croisement. Par définition des algorithmes ONE \bar{D} et AIRE, la résolution du problème d'optimisation n'est lancée qu'une fois, donc une manœuvre au plus est lancée. Sachant qu'un conflit est prévu et que la variance des erreurs n'est pas suffisamment forte pour que ces dernières permettent de résoudre le conflit à elles seules, il est naturel que des manœuvres aient été ordonnées pour tous les tirages.

La colonne $\|\mathbf{p}_{ij}\|^{\text{moy}}$ permet de quantifier la marge moyenne prise par rapport à la norme de séparation horizontale. Pour ONE \bar{D} et AIRE, elle correspond à peu de choses près à la distance de séparation moyenne \bar{D}_{ij} calculée au pas de temps où l'instruction de contrôle a été envoyée. On observe notamment que cette distance diminue avec l'augmentation de l'angle de croisement. La résolution de AIRE amenant à envoyer des instructions de contrôle au plus tard, la marge calculée est à peine égale à 1 NM. En comparaison, les contraintes (4-15)-(4-18) ajoutées au modèle MPC donnent lieu à une plus grande distance de séparation moyenne.

Si l'on se concentre maintenant sur la résolution de conflits, il apparaît d'abord que la distance minimale entre les aéronefs, $\|\mathbf{p}_{ij}\|^{\min}$, est toujours supérieure à 4,3 NM, y compris pour la résolution par ONE \bar{D} . Les conflits les plus graves ont donc toujours été prévenus.

La colonne $|C|$ indique ensuite que, dans tous les cas sauf un, le nombre de conflits restant est très proche de 1 % ou inférieur à ce seuil. Le nombre de conflits décroît par ailleurs lorsque l'angle de croisement augmente. Pour l'interprétation de ce constat, la variance de la distance minimum entre deux aéronefs évoluant à vitesse constante a été tracée sur la figure 4.1 pour différentes valeurs de l'angle de croisement et pour une durée d'anticipation de sept minutes. La distance initialement prévue entre ces aéronefs est égale à 7,5 NM ; la courbe rouge donne le résultat du calcul (4-4) et la courbe bleue est le résultat d'une simulation sans contrôle sur 1000 tirages indépendants des erreurs. Il ressort que la variance calculée est très proche de la variance simulée entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ et qu'elle a tendance à la surestimer pour des angles plus grands. Cela explique le fait qu'il reste moins de conflits que prévu pour $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_{ij} = \frac{2\pi}{3}$.

Pour expliquer le grand nombre de conflits résiduels à l'issue de l'exécution de AIRE pour

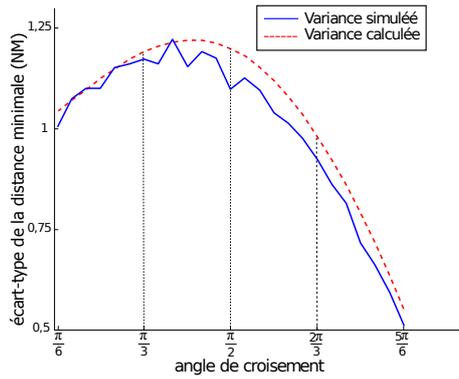
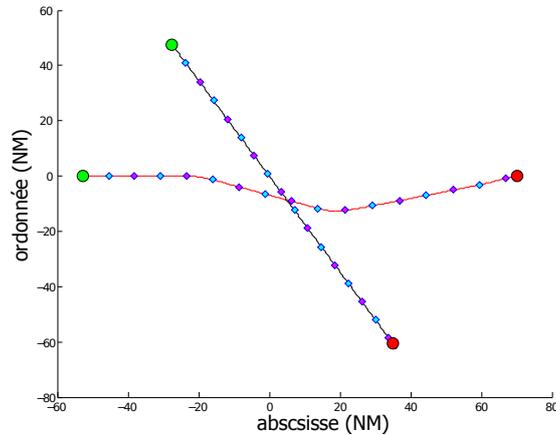
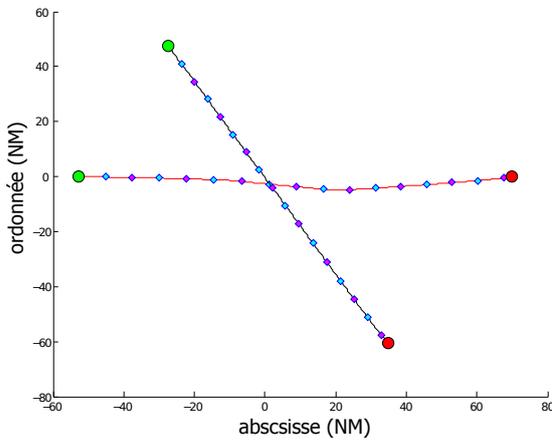


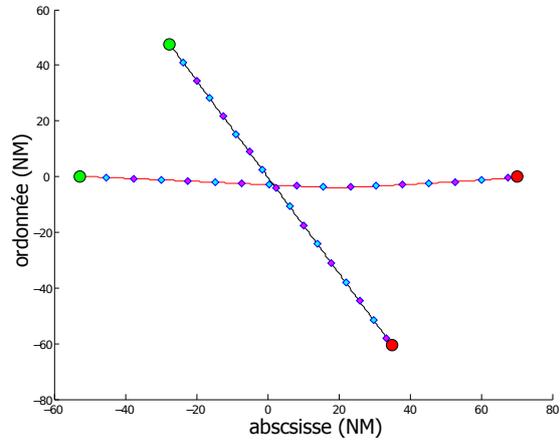
Figure 4.1 — Comparaison entre deux estimations de la variance de la distance minimale



(a) Résolution par AIRE



(b) Résolution par $ONE_{\overline{D}}$



(c) Résolution par MPC

Figure 4.2 — Trajectoires après résolution pour $\delta_{ij} = \frac{\pi}{3}$

$\theta_{ij} = \frac{\pi}{3}$, il est nécessaire de se référer à la forme des trajectoires obtenues après manœuvres. Celles-ci ont été tracées sur la figure 4.2 pour les trois algorithmes. Les points verts signalent les positions initiales, et les points rouges, les positions finales. Les petits losanges de couleurs alternées donnent les positions des avions à chaque minute. On observe sur la figure 4.2(a) que la résolution par AIRE mène à un changement de direction nettement plus grand que $ONE_{\overline{D}}$ et MPC, et que l'angle de croisement diminue. Cela entraîne une augmentation significative de l'instant auquel la distance de séparation minimale est atteinte. Dans ce cas particulier, au moment de

l'optimisation, il est prévu que la distance minimale sera atteinte 3,1 minutes plus tard alors qu'elle l'a finalement été 4,2 minutes après le début de la manœuvre. Le calcul de la distance de séparation \bar{D}_{ij} dépendant linéairement de la durée avant conflit, un nombre de conflits plus grand que prévu est observé.

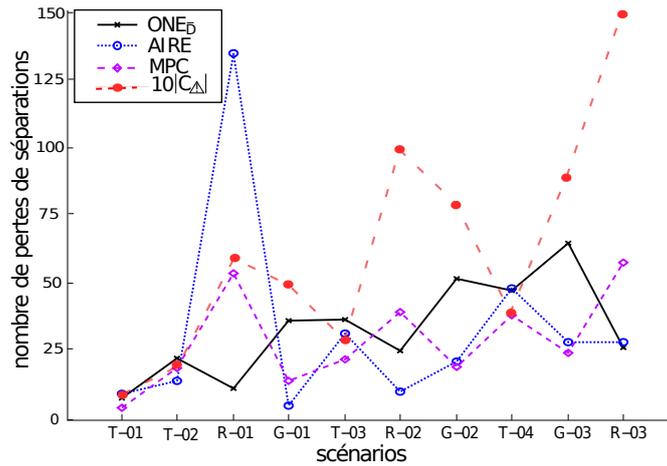
Finalement, le coût des trajectoires est en moyenne plus petit après la résolution par MPC du fait que le nombre de manœuvres n'est pas limité. Par ailleurs, le coût des trajectoires produites par AIRE est deux à trois fois supérieur à celui des trajectoires produites par $\text{ONE}_{\bar{D}}$. Cela souligne la limite majeure de l'algorithme AIRE : bien qu'il soit généralement apte à résoudre les conflits et qu'il se comporte mieux que $\text{ONE}_{\bar{D}}$ pour les situations où aucun conflit n'est prévu, il minimise un critère qui ne correspond pas à un coût réel. Cela entraîne une consommation de carburant bien plus grande.

4.4.2 Analyse des résultats pour l'ensemble des scénarios

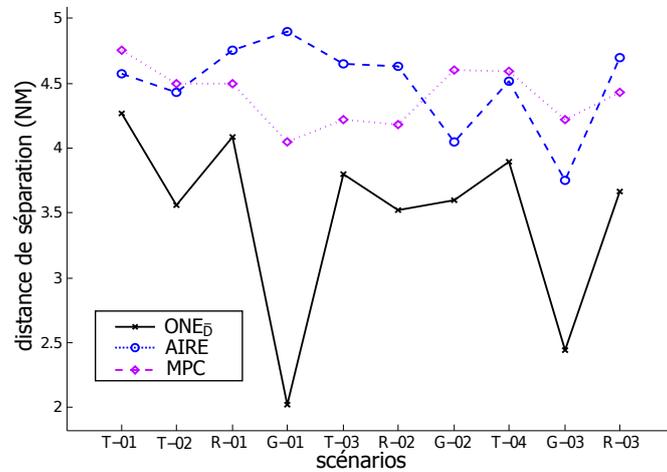
L'ensemble des tests réalisés est commenté dans cette section. L'analyse s'est concentrée sur le nombre de conflits restants après manœuvres et sur le coût des trajectoires produites par les algorithmes. Ces deux données sont respectivement récapitulées sous la forme de graphiques sur les figures 4.3(a) et 4.3(c). Le graphe rouge tracé en pointillé sur 4.3(a) correspond au nombre de conflits initialement prévus multiplié par dix, soit 1 % de l'ensemble des conflits prévus pour les 1000 simulations. Afin de quantifier la gravité des pires conflits, la figure 4.3(b) représente quant à elle la plus petite distance de séparation observée à l'issue des 1000 tirages d'erreurs. Les noms des scénarios sont les mêmes que dans les chapitres précédents, et leurs caractéristiques peuvent être retrouvées dans le tableau 2.2. Les résultats des scénarios de type Train correspondent à la moyenne des résultats trouvés pour les trois angles de croisement $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$. Le classement des scénarios en abscisse a été choisi de façon à rendre croissante la courbe de coût de l'algorithme $\text{ONE}_{\bar{D}}$. Le temps d'exécution n'a pas été représenté parce qu'il reste de l'ordre de la seconde dans tous les cas.

Les performances comparées des trois algorithmes sont dans leur globalité cohérentes avec ce qui a déjà été observé pour les conflits à deux aéronefs. Plus précisément, les algorithmes MPC et AIRE préviennent en général quelques conflits de plus que $\text{ONE}_{\bar{D}}$. Par ailleurs le coût des trajectoires produites par MPC est 10 à 30% inférieur à celui des trajectoires produites par $\text{ONE}_{\bar{D}}$, tandis que le coût de celles trouvées par AIRE est 40 à 200 % supérieur. De façon plus générale, le nombre de conflits restants croît avec la complexité des scénarios mais, à part pour R-01, celui-ci reste inférieur à 1 % des conflits initialement prévus.

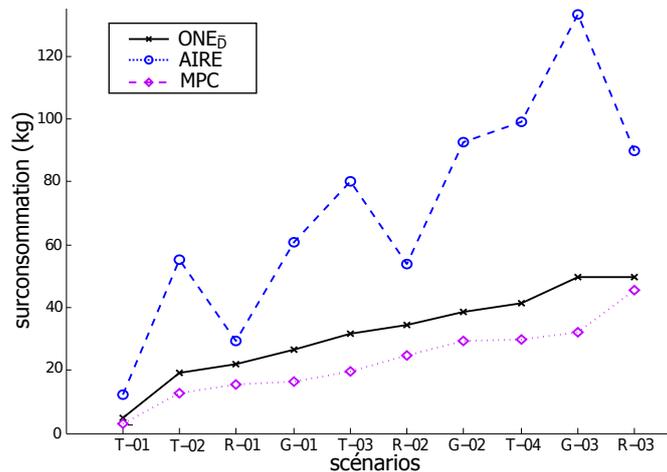
Une nette irrégularité apparaît sur la figure 4.3(a) au niveau du scénario R-01. En effet, la résolution de AIRE laisse plus de 120 conflits se produire et celle de MPC est cinq fois moins efficace que celle de $\text{ONE}_{\bar{D}}$. Dans ce scénario, quatre aéronefs, équirépartis sur un cercle, cherchent à rejoindre le point diamétralement opposé. Deux conflits frontaux sont par conséquent initialement prévus. Or, le calcul de la variance de la distance de séparation minimale donne une valeur nulle lorsque $\theta_{ij} = \pi$, et cette valeur croît rapidement au moindre changement d'angle de croisement. La résolution des conflits induisant un changement d'angle de croisement, particulièrement grand lors de l'exécution de AIRE, la marge calculée pour prendre en compte les incertitudes n'est pas suffisante. Ce problème ne s'est pas posé pour $\text{ONE}_{\bar{D}}$ parce que les manœuvres effectuées pour résoudre simultanément les six conflits du scénario en respectant la distance \bar{D}_{ij} ont entraîné une distance de séparation plus grande que 5 NM pour les conflits frontaux ; les trajectoires après manœuvre sont en outre quasiment colinéaires. Les trajectoires correspondant à un cas où un conflit frontal s'est à la fois produit après les exécutions de AIRE et MPC, mais pas après celle de $\text{ONE}_{\bar{D}}$, sont tracées sur la figure 4.4. Soulignons que ces pertes de séparation en conflit frontal sont extrêmement minces ; en réduisant de 5 NM à 4,95 NM la distance de séparation à partir de laquelle un conflit est détecté, le nombre de pertes de séparation est ramenée à 19 pour MPC et AIRE tandis qu'il en reste toujours 10 pour $\text{ONE}_{\bar{D}}$.



(a) Nombre de pertes de séparation



(b) Distance de séparation minimale



(c) Coût moyen des trajectoires

Figure 4.3 — Comparaison des algorithmes de résolution basés sur la probabilité de conflit

Par ailleurs, la même situation est rencontrée dans une moindre mesure pour le scénario R-03 où trois conflits frontaux doivent également être résolus. Toutefois, dans ce cas, la résolution par ONE \bar{D} et AIRE des autres conflits engage des manœuvres séparant d'emblée les aéronefs en conflit frontal. Seules quelques légères pertes de séparation en conflit frontal subsistent après l'exécution

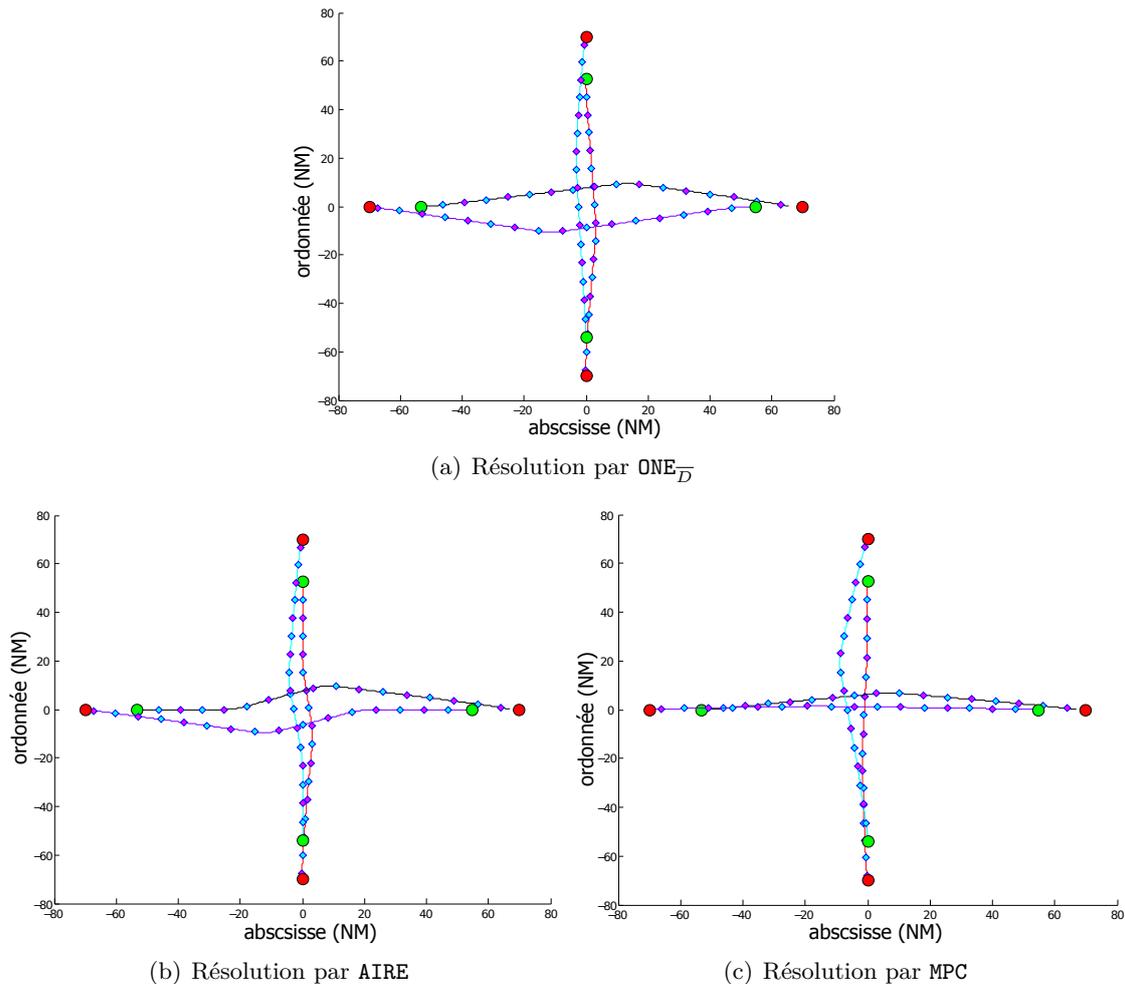


Figure 4.4 — Trajectoires après la résolution du rond-point à 4 aéronefs

de MPC.

Le graphique 4.3(b) montre ensuite la limitation principale d’une action anticipée unique telle que celle simulée par $ONE_{\overline{D}}$. Si le nombre de conflits restants n’est pas clairement plus grand, les pires conflits survenus sont nettement plus graves que lorsque des instructions de contrôle sont envoyées peu de temps avant les conflits. Ce point s’illustre tout particulièrement sur les scénarios G-01 et G-03. Pour les scénarios de type Grille, les derniers conflits à prévenir sont espacés de plusieurs minutes des premiers. La durée d’anticipation étant calculée par rapport à la première entrée dans une zone de conflit, cela signifie que les derniers conflits sont bien trop anticipés. Cela donne finalement lieu à des distances de séparation proches de 2 NM.

4.5 Conclusion

La prise en compte d’incertitudes dues à des erreurs sur les prédictions de vent et les mesures de vitesse s’est basée sur le calcul approché de la probabilité de conflits entre deux aéronefs. Le modèle déterministe ONE a ainsi été adapté de trois façons se distinguant notamment par le nombre de manœuvres d’évitement et l’instant auquel elles sont effectuées. Les algorithmes $ONE_{\overline{D}}$ et $AIRE$ donnent lieu à au plus une instruction de contrôle par aéronef, mais celle-ci est envoyée avec une durée d’anticipation fixée pour $ONE_{\overline{D}}$ tandis que $AIRE$ attend l’instant auquel les manœuvres minimisent l’aire entre la trajectoire réelle et la trajectoire de référence. Dans l’algorithme MPC , aucune restriction sur le nombre d’instructions n’a été imposé, mais le modèle

résolu a été modifié de façon à éviter les manœuvres qui ne sont pas indispensables pour le maintien de la séparation.

Les tests expérimentaux ont été réalisés sur dix instances et mille réalisations indépendantes des erreurs ont été simulées pour chacune d'entre elles. Ils ont montré que l'algorithme AIRE est nettement moins performant que les deux autres parce qu'il entraîne des manœuvres trop tardives et que celles-ci ne minimisent pas la consommation de carburant. D'autre part, ONE \overline{D} produit quant à lui des instructions trop anticipées dans bien des cas. Toutefois, réduire la durée d'anticipation de façon arbitraire pourrait nuire au traitement de certaines situations complexes et entraîner des changements de vitesse trop grands, comme certains exemples l'ont indiqué pour AIRE. L'algorithme MPC constitue par conséquent une bonne alternative mais sa limite vient du fait qu'il amène à envoyer un grand nombre d'instructions de contrôle dans certains cas. En outre, à chaque pas de l'horizon glissant, les instructions sont calculées comme si les conflits devaient être résolus à l'aide d'au plus une manœuvre par aéronef. Pour représenter plus fidèlement ce processus de contrôle, il faudrait inclure dans le modèle des variables et des contraintes liées aux manœuvres futures et prendre explicitement en compte les erreurs dont ces manœuvres dépendent.

Chapitre

5

Modèle stochastique linéaire avec recours

Aperçu

5.1	Résolution de conflits à deux manœuvres	148
5.2	Modèle linéaire stochastique avec recours	150
5.2.1	Modélisation de la première étape	151
5.2.2	Modélisation de la seconde étape	151
5.3	Résolution du problème stochastique	155
5.4	Évaluation expérimentale	157
5.4.1	Performances de la décomposition de Benders	157
5.4.2	Comparaison des algorithmes de résolution en environnement incertain .	158
5.5	Conclusion	161

Un algorithme de résolution de conflits en environnement déterministe a été adapté au cas avec incertitudes grâce au calcul approché de la probabilité de conflit entre deux avions. L'objectif de ce chapitre est d'inclure explicitement l'aspect aléatoire des données dans le modèle d'optimisation afin qu'il coïncide mieux avec la situation réelle. Il est notamment important d'intégrer le fait que des instructions de contrôle peuvent être envoyées dès la fin de l'optimisation mais aussi plus tard. Pour cela, un contrôle faisant intervenir au plus deux manœuvres par avion est considéré, et l'on modélise le problème par un programme stochastique avec recours. Le modèle obtenu étant de grande taille, une méthode de résolution par décomposition de Benders est développée afin de conserver des temps de calculs raisonnables.

Les méthodes développées dans le chapitre précédent, basées sur le calcul d'une approximation de la probabilité de conflit, reviennent à adapter la résolution de conflits en environnement déterministe en ajoutant une marge variable sur la distance de séparation. Sachant que les erreurs n'interviennent pas explicitement dans le modèle, la variation du vent subi en fonction des manœuvres d'évitement ou de retour sur trajectoire n'y est pas prise en compte. Par ailleurs, lors de l'optimisation du modèle, il n'est pas possible d'introduire le fait que des instructions de contrôle pourront être envoyées ultérieurement si la réalisation des erreurs tendait à générer de nouveaux conflits.

Dans ce chapitre, on souhaite réduire la marge prise sur la norme de séparation tout en limitant le nombre de manœuvres d'évitement. La limite sur le nombre de manœuvres a été fixée à deux ; la première a pour objectif de résoudre la majorité des conflits de façon anticipée, et la seconde est effectuée seulement quelques minutes avant le conflit, lorsque la réalisation des erreurs s'est en quelque sorte opposée aux premières manœuvres. Pour cela, les incertitudes sont explicitement incluses dans le modèle en se plaçant dans le cadre de la programmation linéaire stochastique avec recours. Après avoir décrit l'implémentation du contrôle à deux manœuvres en section 5.1, le modèle stochastique est développé en section 5.2. Ce dernier contient un très grand nombre de variables et de contraintes du fait de la multiplicité des scénarios nécessaires pour décrire l'aspect aléatoire des erreurs. Sa résolution est donc accélérée par une procédure de décomposition de Benders décrite en section 5.3. Les performances de la méthode sont finalement évaluées expérimentalement dans la section 5.4 en les comparant notamment aux résultats des algorithmes du chapitre précédent.

5.1 Résolution de conflits à deux manœuvres

Algorithme 5.1 Résolution de conflits à l'aide d'au plus deux manœuvres

```

1:  $t \leftarrow 0$ 
2: répéter
3:   Mettre à jour les positions observées  $\{\mathbf{p}_i^{\text{ini}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$  et les instants  $\{\tau_i^{\text{in}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ 
4:   si  $t + \tau^{\text{avt}} + h > \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$  alors
5:     Résoudre M1
6:     Envoyer les instructions de contrôle résultant de l'optimisation
7:      $t \leftarrow t + h$ 
8:   jusqu'à  $t + \tau^{\text{avt}} > \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$ 
9: répéter
10:  Mettre à jour les positions observées  $\{\mathbf{p}_i^{\text{ini}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$  et les instants  $\{\tau_i^{\text{in}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ 
11:  si  $t + \tau^{\text{urg}} + h > \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$  alors
12:    Résoudre M2
13:    Envoyer les instructions de contrôle résultant de l'optimisation
14:     $t \leftarrow t + h$ 
15:  jusqu'à  $t + \tau^{\text{urg}} > \min_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{in}}$ 
16: répéter
17:  Mettre à jour les positions observées  $\{\mathbf{p}_i^{\text{ini}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$  et les instants  $\{\tau_i^{\text{out}}\}_{A_i \in \mathcal{A}}$ 
18:  pour  $A_i \in \mathcal{A} : \tau_i^{\text{out}} \leq t < \tau_i^{\text{out}} + h$  effectuer
19:    Envoyer une instruction de retour sur trajectoire à  $A_i$ 
20:     $t \leftarrow t + h$ 
21:  jusqu'à  $t \geq \max_{A_i \in \mathcal{A}} \tau_i^{\text{out}}$ 

```

L'algorithme 5.1 donne une vue générale du contrôle automatisé implémenté dans ce cha-

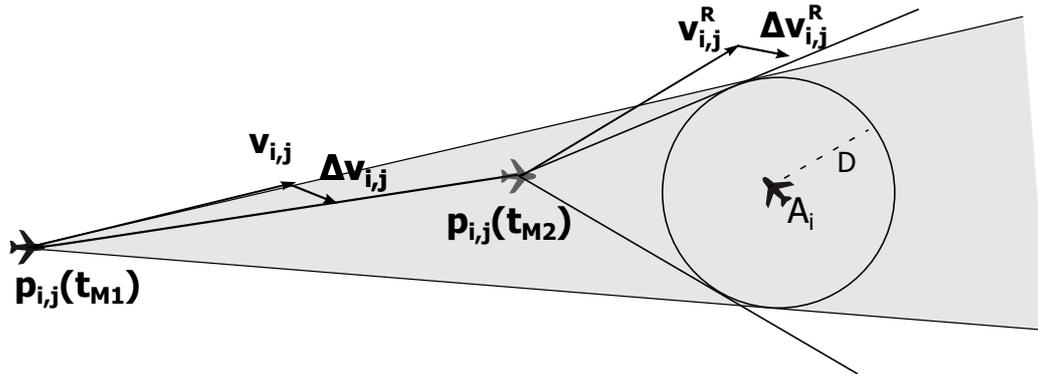


Figure 5.1 — Résolution de conflit avec recours

pitre. Outre l’instruction de récupération du contrat 4D, deux instructions de contrôle au plus sont envoyées à chaque aéronef. Cette procédure fait intervenir la résolution de deux problèmes d’optimisation différents, M1 et M2. Un premier ensemble d’instructions de contrôle est envoyé à la suite de la résolution de M1 en anticipant les conflits d’une durée au moins égale à τ^{avt} , comprise entre cinq et dix minutes. Ensuite chaque aéronef est susceptible de recevoir une seconde instruction de contrôle calculée en résolvant M2 en anticipant les conflits selon une durée τ^{urg} , de l’ordre de deux minutes. Les instants auxquels M1 et M2 sont résolus sont respectivement notés t_{M1} et t_{M2} . Le second ensemble d’instructions de contrôle correspond en fait à des actions venant corriger la réalisation des incertitudes lorsqu’elle génère des conflits qui auraient dû être résolus par les premières manœuvres. On parle aussi de *manœuvre de recours* ou simplement de *recours* pour désigner cette seconde manœuvre.

La figure 5.1 illustre le contrôle suggéré par l’algorithme 5.1. La résolution d’un conflit (A_i, A_j) y est représentée dans le référentiel mobile lié à A_i . Le vecteur de vitesse relative $\mathbf{v}_{i,j}$ correspond à la première manœuvre, tandis que $\mathbf{v}_{i,j}^R$ correspond à la seconde manœuvre, $\Delta\mathbf{v}_{i,j}$ et $\Delta\mathbf{v}_{i,j}^R$ sont des vecteurs d’erreur moyenne sur ces vitesses, et $\mathbf{p}_{i,j}(t_{M1})$ et $\mathbf{p}_{i,j}(t_{M2})$ sont les positions relatives au moment de la première et de la seconde optimisation.

Calcul de la première instruction de contrôle : le modèle M1

Le modèle M1 doit prendre en compte le fait qu’il est possible d’envoyer une seconde instruction de contrôle dans les minutes suivantes. Pour cela, il est utile d’inclure explicitement les incertitudes dans M1. Un modèle stochastique avec recours est développé à cet effet dans la section 5.2.

Calcul de la seconde instruction de contrôle : le modèle M2

Le modèle M2, puisqu’il correspond à une résolution de conflits par une seule manœuvre, est proche du modèle $\text{ONE}_{\overline{D}}$ développé dans le chapitre précédent. La seule différence se situe dans la fonction objectif. Une discussion semblable à celle menée en section 4.3.2 au sujet du modèle MPC met en évidence le fait que la réalisation des erreurs survenant entre la résolution de t_{M1} et t_{M2} entraîne nécessairement la sous-optimalité des instructions envoyées plus tôt. Si l’on résout simplement $\text{ONE}_{\overline{D}}$ pour le calcul des secondes manœuvres d’évitement, de nouvelles instructions de contrôle sont systématiquement envoyées à chaque aéronef, ne serait-ce que pour une récupération plus efficace du contrat 4D. Pour éviter ce comportement, le critère à minimiser est modifié pour privilégier l’inaction en l’absence de conflits.

Pour le modèle MPC, le critère a simplement été remplacé par la minimisation de la somme des accélérations. Bien que cette modification soit aussi pertinente ici, l’interaction avec le modèle M1 rend préférable de conserver un terme faisant intervenir la consommation de carburant et

l'écart au contrat 4D. L'idée est donc de borner inférieurement le coût de chaque trajectoire par le coût qu'elle aurait si aucune manœuvre de recours n'était réalisée. Ainsi, il n'est pas utile, en termes de coût, d'effectuer de manœuvres de recours lorsque aucun conflit ne doit être résolu.

Pour obtenir cette borne, il suffit de résoudre une première fois le modèle $\text{ONE}_{\overline{D}}$ en fixant les variables \mathbf{v}_i à leur valeur courante $\mathbf{v}_i^{\text{ini}}$ et en supprimant toutes les contraintes qui ne sont pas liées au calcul de la récupération du contrat 4D. Le modèle obtenu est un PL de petite taille, sa résolution est donc très rapide. Soit Z_i^0 le coût de la trajectoire de l'aéronef A_i sans manœuvre de recours. En se référant à l'expression du critère de (3-17), on ajoute la contrainte suivante au modèle M2 :

$\forall A_i \in \mathcal{A} :$

$$\tilde{z}_i + \tilde{z}_i^{4D} + \frac{h}{2} C_t \left(\|\mathbf{v}_i^{\text{ini}}\| \right) + \left(\Delta_i^+ + \Delta_i^- \right) \times C_d(V_i^{\text{nom}}) + \rho^+ \Delta_i^+ + \rho^- \Delta_i^- \geq Z_i^0 \quad (5-1)$$

Grâce à la contrainte (5-1), les manœuvres de recours n'entraînent pas de diminution du coût lorsqu'elles ne sont pas nécessaires. Il n'y a toutefois pas de raison pour que les vitesses des aéronefs ne soient pas modifiées malgré tout. Pour assurer que la vitesse courante soit optimale quand aucun conflit n'est apparu depuis la résolution de M1, l'accélération est légèrement pénalisée par l'ajout du terme suivant dans la fonction objectif de M2 :

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}} C_u \times \bar{u}_i \quad (5-2)$$

où C_u est une constante petite par rapport aux consommations de carburant, et \bar{u}_i approche la norme de l'accélération par les contraintes (4-13).

5.2 Modèle linéaire stochastique avec recours

Lors du calcul des premières instructions de contrôle, il est important d'inclure la possibilité de réaliser des manœuvres de recours et de minimiser la somme du coût engendré par les manœuvres à effectuer tout de suite et de celui engendré par les manœuvres de recours. Ces dernières manœuvres ne sont pas décidables a priori puisqu'elles dépendent de la réalisation des erreurs. On choisit donc de minimiser l'espérance du coût des manœuvres de recours pris comme une fonction des aléas. Cela revient à résoudre un programme linéaire stochastique à deux étapes de la forme (1-68) tel que décrit au paragraphe 1.4.1 de l'état de l'art. Les variables de première étape correspondent alors aux manœuvres à réaliser immédiatement ; ce sont elles qui traduisent les décisions à prendre à l'issue de l'optimisation. Le problème de seconde étape correspond à la minimisation du coût des manœuvres qui seront exécutées plus tard en fonction de la réalisation des erreurs ξ . En particulier, la seconde manœuvre d'évitement ainsi que la récupération du contrat 4D sont modélisées dans la seconde étape. La séparation devant être assurée par l'ensemble des deux manœuvres d'évitement, les contraintes de séparation apparaissent également dans la seconde étape.

On note que la forme du problème (1-68) est différente de celle des modèles considérés jusqu'ici. En particulier, les variables sont toutes positives et les contraintes sont des égalités. Ces deux points ne posent pas de difficulté car il est toujours possible d'exprimer un PL sous cette forme. Une différence significative apparaît cependant du fait que la modélisation des contraintes de séparation et des bornes inférieures sur la vitesse implique des variables binaires alors que le cas traité dans la section 1.4 considère des variables continues. Il s'avère que les points discutés dans la section 1.4 se généralisent aisément au cas où des variables de la première étape sont binaires. En revanche, la présence de variables binaires dans le problème de deuxième étape rend la résolution de (1-68) beaucoup plus compliquée. Ce dernier point est discuté lors de la modélisation de la seconde étape, dans la sous-section 5.2.2.

Le vecteur ξ correspond aux erreurs survenues entre l'instant t_{M1} où les premières instructions de contrôle sont envoyées et l'instant t_{M2} où le modèle M2 est résolu pour calculer les manœuvres de recours. Il s'agit donc de l'ensemble des données permettant de calculer l'état des aéronefs à l'instant t_{M2} pour une certaine réalisation des erreurs. Lors de la résolution du second niveau, on se projette ainsi dans la situation qui devra être gérée à l'instant t_{M2} en fonction des variables de premier niveau \mathbf{x} et du vecteur d'erreurs ξ . On remarque en particulier que ξ ne contient aucune donnée sur les erreurs survenant au-delà de t_{M2} puisque celles-ci ne seront pas connues lors du calcul des instructions liées au recours.

Remarque 5.1. *De manière générale, en programmation stochastique avec recours, le résultat de l'optimisation ne fournit que les décisions à appliquer aussi tôt que possible, c'est-à-dire celle qui ne sont pas soumises à d'éventuelles réalisations des aléas. Le dessein du second niveau n'est pas de fournir un plan conditionnel pour des actions futures mais plutôt d'estimer les coûts futurs moyens imputables à une décision immédiate donnée. Ainsi, pour la résolution de conflits aériens, la solution optimale du programme stochastique avec recours n'est utilisée que pour un premier ensemble d'instructions de contrôle à envoyer dès la fin de l'optimisation. Les instructions envoyées ultérieurement sont le résultat d'une autre optimisation.*

Afin d'utiliser des méthodes performantes pour la résolution de (1-68), on souhaite modéliser le problème par un MILP dont les variables binaires n'apparaissent qu'à la première étape. La modélisation des deux étapes est décrite dans les sous-sections 5.2.1 et 5.2.2. Comme cela a été vu dans la section 4.1, les erreurs sont modélisées par des variables aléatoires dont la distribution est continue.

5.2.1 Modélisation de la première étape

Le problème de première étape est modélisé linéairement en reprenant une partie des variables et des contraintes du modèle ONE. Plus précisément, le vecteur de variables \mathbf{x} se compose des vecteurs vitesse $\{\mathbf{v}_i\}_{A_i \in \mathcal{A}}$, des bornes supérieures sur la vitesse $\{\bar{v}_i\}_{A_i \in \mathcal{A}}$, des variables binaires intervenant dans la borne inférieure de la vitesse $\{\epsilon_i^n\}_{A_i \in \mathcal{A}, n \in \{1, \dots, N_v\}}$ et des consommations de carburant $\{\tilde{z}_i\}_{A_i \in \mathcal{A}}$. Les contraintes correspondent ensuite aux bornes sur les vitesses et sur les changements de vitesse (3-2)-(3-7), ainsi qu'à la linéarisation de la fonction de coût (3-15). Pour $A_i \in \mathcal{A}$, le vecteur vitesse \mathbf{v}_i est maintenu jusqu'à la seconde manœuvre, c'est-à-dire entre les instant t_{M1} et t_{M2} . Les contraintes (3-15) sont donc ajustées pour refléter cette durée. Notons qu'à ce stade la valeur de t_{M2} n'est pas connue, elle est seulement estimée en fonction des prédictions de trajectoire.

Le problème (1-68) se réécrit :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \tilde{z}_i + \mathbb{E}_\xi(Q(\mathbf{x}, \xi)) \\ \text{sous les contraintes} \quad & (3-2) - (3-7), \text{ et } (3-15) \text{ avec} \\ & \forall A_i \in \mathcal{A} : \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^2, \bar{v}_i \geq 0, \tilde{z}_i \geq 0 \\ & \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall n \in \{1, \dots, N_v\} : \epsilon_i^n \in \{0, 1\} \end{aligned} \tag{5-3}$$

Dans la suite, pour plus de concision, les contraintes linéaires de la première étape sont mises sous la forme matricielle générale du problème (1-68). Les contraintes de positivités ainsi que celles traduisant le fait que certaines variables sont entières sont résumées par $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

5.2.2 Modélisation de la seconde étape

La seconde étape simule le calcul ultérieur des instructions de contrôle du recours. Idéalement, il reprend donc le modèle M2 en se distinguant uniquement par la façon dont les états des aéronefs à l'instant t_{M2} sont obtenus. En effet, au moment de la résolution de M2, les états des aéronefs

sont des données mesurées, tandis qu'à la seconde étape de M1 ils sont calculés en fonction du vecteur de réalisation des erreurs et des variables de premier niveau. Ainsi la seconde étape calcule une résolution de conflits à l'aide d'une manœuvre par avion vis-à-vis de distances de séparation \bar{D}_{ij} . Les méthodes de résolution les plus efficaces pour les problèmes de la forme (5-3) s'appliquent essentiellement lorsque la seconde étape est un PL [26]. En considérant une réalisation d'erreurs ξ donnée, l'objectif de cette section est de modéliser le problème de seconde étape sous la forme d'un PL. Les variables liées à la réalisation ξ sont notées avec un exposant ξ afin de les distinguer des variables du premier niveau.

Le vecteur d'erreurs ξ correspond à la donnée d'une erreur constante ϵ_i^ξ pour chaque avion A_i ainsi que d'un champ de vent \mathbf{w}^ξ . Pour des raisons pratiques d'implémentation, ce champ n'est donné que pour un nombre fini d'instants $t_{M1} = t_0, \dots, t_K = t_{M2}$ et de points de l'espace. Pour obtenir la valeur du champ en tout autre point, on suppose d'une part qu'il est constant entre deux pas de temps consécutifs et, d'autre part, qu'il évolue linéairement entre les points de la grille spatiale. En outre, dans le modèle de seconde étape, le vecteur de vent aléatoire $\mathbf{w}_i^\xi(t_k)$ subi par A_i à un instant t_k est approché par celui qu'il subira s'il suit exactement sa trajectoire de référence. Ce vent subi est également supposé constant entre deux pas de temps successifs, ce qui néglige les variations de vent sur la distance parcourue entre les deux pas de temps.

Au final, un avion évoluant à vitesse constante \mathbf{v}_i entre t_{M1} et t_{M2} subit un vent moyen :

$$\bar{\mathbf{w}}_i^\xi = \frac{1}{t_{M2} - t_{M1}} \sum_{k=0}^{K-1} (t_{k+1} - t_k) \times \langle \mathbf{w}_i^\xi(t_k) | \mathbf{v}_i \rangle \times \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \quad (5-4)$$

Bornes sur la vitesse et l'accélération du recours

On introduit pour chaque $A_i \in \mathcal{A}$ les vecteurs de variables \mathbf{v}_i^ξ et \mathbf{u}_i^ξ représentant les vecteurs vitesse obtenu suite à la manœuvre de recours et le vecteur accélération associé. L'instruction de contrôle correspondante est envoyée à l'instant t_{M2} , et la manœuvre est faite avec un vecteur accélération \mathbf{u}_i^ξ constant pendant une durée h . Comme dans la section 3.1, on se ramène à la manœuvre instantanée équivalente, effectuée à $t_{M2} + \frac{h}{2}$.

Dans le modèle ONE, l'expression des bornes sur la vitesse et le changement de vitesse s'appuie sur la connaissance du vecteur vitesse initial. Or, le vecteur vitesse de l'avion A_i au moment du recours, \mathbf{v}_i , est une variable. Les contraintes du modèle ONE (3-2)-(3-7) ne sont par conséquent pas adaptées en l'état. On note néanmoins que les manœuvres de recours ne sont par essence pas grandes puisqu'elles ne constituent qu'une correction de la vitesse en fonction de la réalisation des incertitudes. On garantit donc que l'accélération reste dans le domaine réalisable par l'approximation suffisante :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_i^\xi | \mathbf{e}(\theta) \rangle &\leq \bar{u}_i^\xi \times \cos\left(\frac{\pi}{N_u}\right), \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall \theta \in \Theta_u, \\ \bar{u}_i^\xi &\leq U^{\max}, \quad \forall A_i \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (5-5)$$

Ces contraintes limitent le changement de cap mais assurent le respect de la borne sur l'accélération longitudinale.

Concernant les bornes sur la vitesse, les bornes supérieures déjà vues pour les modèles linéaires sont ajoutées :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_i^\xi | \mathbf{e}(\theta) \rangle &\leq \bar{v}_i^\xi \times \cos\left(\frac{\pi}{N_v}\right), \quad \forall A_i \in \mathcal{A}, \forall \theta \in \Theta_v, \\ \bar{v}_i^\xi &\leq V_i^{\max}, \quad \forall A_i \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (5-6)$$

Les bornes inférieures en revanche ne sont pas incluses dans le modèle parce qu'elles feraient intervenir des variables binaires. Cette liberté prise dans la modélisation se justifie par des raisons déjà mentionnées. En effet, les bornes inférieures ne sont pas de réelles contraintes techniques

et, dans un contexte où le contrat 4D doit être rattrapé en fin d'horizon, les aéronefs ont plutôt tendance à augmenter leur vitesse que l'inverse lors de la résolution de conflits. En outre, ce qui est plus important, le calcul du recours n'a pas pour objet de donner lieu à l'envoi des instructions de contrôle associées. De faibles violations des contraintes sont donc acceptables.

Contraintes de séparation

Les contraintes de séparation posent la même difficulté que les bornes ci-dessus. En effet, en utilisant la même expression que pour le modèle ONE, la séparation entre deux aéronefs A_i et A_j se formule :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_{i,j}^\xi \mid \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^{+, \xi} \rangle &\geq -M_{i,j} \delta_{ij}^\xi \\ \langle \mathbf{v}_{i,j}^\xi \mid \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^{-, \xi} \rangle &\geq -M_{i,j} (1 - \delta_{ij}^\xi) \\ \delta_{ij}^\xi &\in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^{+, \xi}$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^{-, \xi}$ sont des vecteurs normaux aux tangentes au cercle de séparation passant par la position relative $\mathbf{p}_{i,j}^\xi$ de A_j par rapport à A_i à l'instant t_{M2} . Or $\mathbf{p}_{i,j}^\xi$ dépend des vecteurs de variables de première étape \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j . Ces contraintes ne sont donc pas linéaires en fonction des variables du problème. En outre, elles nécessitent l'utilisation de variables binaires que l'on souhaite éviter dans le problème de seconde étape.

Pour éliminer les variables binaires du second niveau, on fait l'hypothèse que, dans ce contexte de contrôle à deux manœuvres, les premières manœuvres doivent être suffisantes pour éviter les pertes de séparation en l'absence d'erreurs. Cela revient à ajouter au premier niveau les variables δ_{ij} et les contraintes (3-9)-(3-10) pour tout conflit (A_i, A_j) . Dans la mesure où l'effet des erreurs est petit entre les premières et les secondes manœuvres, on suppose alors que la valeur des variables binaires δ_{ij} ne peut pas être remise en cause par le recours. Autrement dit, la tangente du côté de laquelle la résolution de chaque conflit s'opère est choisie au premier niveau et les manœuvres de recours assurent que la contrainte associée est satisfaite après réalisation des erreurs.

On souhaite ensuite formuler linéairement la contrainte de séparation pour un conflit (A_i, A_j) , d'une façon similaire à (3-9)-(3-10). On se place alors dans le référentiel mobile lié à A_i . L'idée est de laisser de côté les vecteurs $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^{+, \xi}$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^{-, \xi}$, qui dépendent non linéairement des variables \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j , et de ne se référer qu'au cône de séparation calculé à la première étape et caractérisé par les vecteurs $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^-$. Plutôt qu'une contrainte assurant nécessairement la séparation entre A_i et A_j , on estime les manœuvres de recours qui devront être faites pour compenser l'effet des erreurs sur la position de A_j par rapport à ce cône. Le principe de ce recours est dessiné sur la figure 5.2. Pour le calcul des contraintes, on note τ^R la durée prédite entre l'instant de la première manœuvre et l'instant du recours, soit, en se référant à l'algorithme 5.1 :

$$\tau^R = t_{M2} - t_{M1} \approx \tau^{\text{avt}} - \tau^{\text{urg}} \quad (5-7)$$

Supposons que, comme dessiné sur la figure 5.2, les manœuvres initiales ont pour objectif de résoudre le conflit en faisant passer A_j au-dessus du cercle de séparation. La contrainte de séparation de la seconde étape traduit l'idée que, pour maintenir la séparation entre A_i et A_j , il faut que l'aéronef A_j soit sorti du cône interdit avant d'atteindre le cercle de séparation. En se référant à la figure 5.2, l'écart entre A_j et la tangente du dessus à l'instant du recours est mesuré par :

$$\left(\tau^R - \frac{h}{2} \right) \times \langle \mathbf{v}_{i,j} + \Delta \mathbf{v}_{i,j} \mid \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle = \langle \mathbf{p}_{i,j}^\xi - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^{\text{ini}} \mid \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle,$$

où $\Delta \mathbf{v}_{i,j}$ est la variation moyenne du vecteur de vitesse relative due aux erreurs. Le terme $\frac{h}{2}$ prend en compte la durée de la manœuvre à accélération constante. Pour compenser cet écart

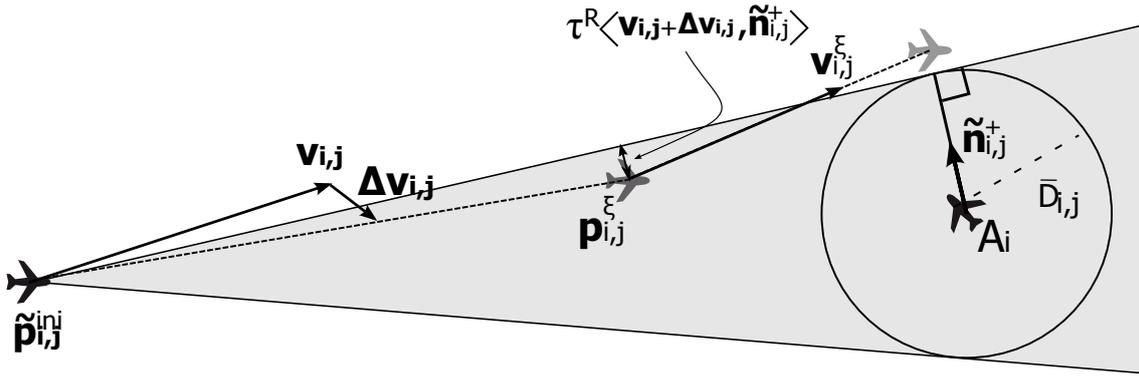


Figure 5.2 — Représentation d'un conflit pour une contrainte de séparation linéaire

par une manœuvre de recours effectuée à accélération constante et menant à une vitesse relative $\mathbf{v}_{i,j}^\xi$, conservée pendant une durée τ , il faut que :

$$\left(\tau - \frac{h}{a}\right) \times \langle \mathbf{v}_{i,j}^\xi | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle + \langle \mathbf{p}_{i,j}^\xi - \mathbf{p}_{i,j}^{ini} | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle \geq 0 \quad (5-8)$$

Le défaut de cette formulation est qu'il n'est pas possible de déterminer a priori une bonne valeur pour cette durée τ . La propriété 5.1 indique une bonne valeur pour τ en supposant les valeurs de $\mathbf{v}_{i,j}$, de $\Delta \mathbf{v}_{i,j}$ et de $\mathbf{v}_{i,j}^\xi$ connues.

Propriété 5.1

Soit $\mathbf{p}_{i,j}(t)$ la position relative de A_j par rapport à A_i à l'instant t , et supposons que l'instant τ_{ij} défini par

$$\tau_{ij} = \arg \min \{ \|\mathbf{p}_{i,j}(t)\| : 0 \leq t \leq T \}$$

est unique. Supposons ensuite que

$$\left(\langle \mathbf{p}_{i,j}(\tau_{ij}) - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^{ini} | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle \geq 0 \right) \vee \left(\langle \mathbf{p}_{i,j}(\tau_{ij}) - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^{ini} | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^- \rangle \geq 0 \right),$$

alors $\|\mathbf{p}_{i,j}(t)\| \geq \bar{D}_{ij}$ pour tout $t \in [0; T]$.

Démonstration : Dans le repère mobile lié à A_i , les vecteurs $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^-$ et $\tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+$ sont les vecteurs unitaires orthogonaux aux tangentes au cercle centré sur l'origine A_i et de rayon \bar{D}_{ij} qui passent par le point $\tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^{ini}$. Ces deux vecteurs sont donc également les deux vecteurs unitaires \mathbf{n} définis par $\langle \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^{ini} | \mathbf{n} \rangle = \bar{D}_{ij}$.

Supposons par exemple

$$\langle \mathbf{p}_{i,j}(\tau_{ij}) - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^{ini} | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle \geq 0$$

Alors

$$\langle \mathbf{p}_{i,j}(\tau_{ij}) | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \rangle \geq \bar{D}_{ij},$$

d'où $\|\mathbf{p}_{i,j}(\tau_{ij})\| \geq \bar{D}_{ij}$. Par définition de τ_{ij} , on en déduit que $\|\mathbf{p}_{i,j}(t)\| \geq \bar{D}_{ij}$ pour tout $t \in [0; T]$.

On obtient le même résultat en supposant $\langle \mathbf{p}_{i,j}(\tau_{ij}) - \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^{ini} | \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^- \rangle \geq 0$, ce qui donne le résultat souhaité. ■

Les conditions du contrôle automatisé impliquent que, pour un conflit potentiel, l'instant τ_{ij} est bien défini et qu'il survient après t_{M2} . Il n'est toutefois pas possible de le calculer avant l'optimisation et il n'est pas non plus possible de choisir avant l'optimisation un autre instant τ tel qu'un résultat semblable à celui de la propriété 5.1 est vrai. Malgré cela, la formulation (5-8) est retenue en estimant τ_{ij} par l'instant où la distance entre les trajectoires de référence de A_i et A_j est minimale. Il a en effet été jugé qu'une bonne estimation de la contrainte de séparation

était suffisante sachant que les manœuvres calculées dans le problème de seconde étape ne sont pas destinées à être exécutées. Il reste cependant que l'expression de la position à l'instant t_{M2} n'est pas linéaire en fonction de $\mathbf{v}_{i,j}$.

On calcule la position de A_i à l'instant de l'exécution du recours t_{M2} . D'après l'expression du vent moyen subi par A_i (5-4), on a :

$$\mathbf{p}_i^\xi = \mathbf{p}_i^{\text{ini}} + \tau^R \times \left(1 + \frac{\epsilon_i^\xi}{\|\mathbf{v}_i\|} \right) \times \mathbf{v}_i + \sum_{k=0}^{K-1} (t_{k+1} - t_k) \times \left\langle \mathbf{w}_i^\xi(t_k) \mid \mathbf{v}_i \right\rangle \times \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \quad (5-9)$$

Une bonne approximation linéaire de \mathbf{p}_i^ξ peut être calculée en considérant que le changement de vitesse réalisé pendant la manœuvre est petit du fait que la durée d'anticipation est relativement grande. Pour cela, on effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 de \mathbf{p}_i^ξ , pris comme une fonction de \mathbf{v}_i , au point $\mathbf{v}_i^{\text{ini}}$. L'approximation obtenue est notée $\tilde{\mathbf{p}}_i^\xi$.

Au final, les contraintes de séparation de seconde étape sont données par :

$$\forall (A_i, A_j) \in \mathcal{C} :$$

$$\begin{aligned} \left(\tau_{ij} - t_{M2} - \frac{h}{2} \right) \times \left\langle \mathbf{v}_{i,j}^\xi \mid \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^\xi - \mathbf{p}_{i,j}^{\text{ini}} \mid \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^+ \right\rangle &\geq -M_{i,j} \delta_{ij} \\ \left(\tau_{ij} - t_{M2} - \frac{h}{2} \right) \times \left\langle \mathbf{v}_{i,j}^\xi \mid \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^- \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{p}}_{i,j}^\xi - \mathbf{p}_{i,j}^{\text{ini}} \mid \tilde{\mathbf{n}}_{i,j}^- \right\rangle &\geq -M_{i,j} (1 - \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (5-10)$$

Critère

Comme pour M2, la fonction objectif est la somme du critère habituel, lié à la consommation de carburant et à l'écart au contrat 4D, et d'un terme pénalisant l'accélération des aéronefs. La borne (5-1) est également ajoutée pour que des manœuvres de recours ne soient effectuées que pour l'évitement de conflits.

Finalement le problème de seconde étape est un PL de la forme (1-69). On note de plus que le vecteur de coût et la matrice de recours, c'est à dire la matrice des coefficients des variables de seconde étape dans les contraintes, ne dépendent pas de ξ . Le recours est donc fixe. Afin que le recours soit également complet, les contraintes de séparation sont relâchées de la même façon qu'au paragraphe 2.4.2.

5.3 Résolution du problème stochastique

Sachant que la distribution des erreurs est continue, la méthode d'approximation moyenne par échantillonnage décrite au paragraphe 1.4.2 de l'état de l'art est appliquée pour se ramener à un nombre fini de scénarios. Le problème stochastique (1-68) est alors approché par le problème équivalent déterministe de la forme (1-71). On souhaite ensuite résoudre le grand PL obtenu par l'algorithme de décomposition de Benders résumé par l'algorithme 1.2.

Sachant que le PM est proche du modèle ONE, dont il a été vu au chapitre 3 que la résolution pouvait être de l'ordre de la seconde, il est important que l'algorithme 1.2 converge en peu d'itérations majeures. Or, le découpage actuel entre première et seconde étape place la plus grande partie du coût des trajectoires dans le critère de seconde étape. Cela signifie que toute l'information relative au coût des parties de la trajectoire correspondant à la manœuvre de recours et à la récupération du contrat 4D doit être remontée des SP au PM par des coupes d'optimalité. Sachant que le découpage entre PM et SP est imposé par la façon dont la procédure de contrôle a été définie, la formulation ne peut pas être revue en profondeur. Pour inclure un terme lié au coût des manœuvres de recours et de récupération du contrat 4D dans l'objectif du PM, on se base sur la proposition suivante.

Proposition 5.1

On considère un programme linéaire stochastique à recours fixe tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\xi) &= \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_\lambda(\xi) \\ \mathbf{h}(\xi) &= \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_\lambda(\xi) \end{aligned} \quad -155-$$

où \mathbf{T}_0 et \mathbf{h}_0 sont fixes, et où \mathbf{T}_λ et \mathbf{h}_λ sont linéaires en fonction de ξ . Alors, pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$:

$$\mathbb{E}(Q(\mathbf{x}, \xi)) \geq Q(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi)) \quad (5-11)$$

Démonstration : Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Par l'inégalité de Jensen [66] appliquée à la fonction $Q_\xi : \xi \mapsto Q(\mathbf{x}, \xi)$, on obtient le résultat souhaité à condition que Q_ξ soit convexe.

Il reste donc à prouver que Q_ξ est convexe. Pour cela, on commence par réécrire $Q(\mathbf{x}, \xi)$ sous la forme d'un problème d'optimisation en faisant apparaître les dépendances par rapport au vecteur d'erreur, c'est-à-dire :

$$Q(\mathbf{x}, \xi) = \min_{\mathbf{y} \geq 0} \{ \mathbf{q}^T \mathbf{y} : \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h}_0 - \mathbf{T}_0 \mathbf{x} + \mathbf{h}_\lambda(\xi) - \mathbf{T}_\lambda(\xi) \mathbf{x} \} \quad (5-12)$$

Soit alors ξ_1 et ξ_2 deux réalisations de l'erreur, et soit \mathbf{y}_1^* et \mathbf{y}_2^* les solutions optimales des problèmes de minimisation correspondant respectivement à $Q(\mathbf{x}, \xi_1)$ et $Q(\mathbf{x}, \xi_2)$. En se référant à (5-12) et en s'appuyant sur la linéarité de \mathbf{T}_λ et de \mathbf{h}_λ , on vérifie que, pour $\lambda \in [0; 1]$, $\lambda \mathbf{y}_1^* + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2^*$ est une solution réalisable de

$$\min_{\mathbf{y} \geq 0} \{ \mathbf{q}^T \mathbf{y} : \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{h}(\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2) - \mathbf{T}(\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2) \mathbf{x} \}$$

de coût $\lambda Q(\mathbf{x}, \xi_1) + (1 - \lambda) Q(\mathbf{x}, \xi_2)$. On en déduit que

$$Q(\mathbf{x}, \lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2) \leq \lambda Q(\mathbf{x}, \xi_1) + (1 - \lambda) Q(\mathbf{x}, \xi_2), \quad \forall \lambda \in [0; 1]$$

ce qui prouve la convexité de Q_ξ . ■

L'étude des contraintes de seconde étape permet de vérifier que les conditions de la proposition 5.1 sont satisfaites par le modèle M1. Cela indique que l'inégalité $\mathbb{E}(Q(\mathbf{x}, \xi)) \geq Q(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi))$ est valide pour le problème initial (1-68). Pour améliorer la convergence de la décomposition de Benders, l'idée est donc d'ajouter la contrainte basée sur la moyenne empirique de $\mathbb{E}(Q(\mathbf{x}, \xi))$, soit

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{q}^T \mathbf{y}^n \geq Q(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad (5-13)$$

en notant que le vecteur aléatoire ξ est de moyenne nulle.

Pour le calcul de $Q(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, il faut déterminer les manœuvres de recours et de récupération du contrat 4D optimales lorsque la réalisation des erreurs est nulle. Par construction de la seconde étape, aucune manœuvre de recours n'est nécessaire en l'absence d'erreur. Le coût de la récupération du contrat 4D s'obtient ensuite en ajoutant à la première étape les variables et les contraintes associées du modèle ONE, telles qu'elles sont décrites dans la section 3.1.3. Au final, en se référant à l'objectif de (3-17), l'inégalité (5-13) est équivalente à :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{q}^T \mathbf{y}^n \geq \sum_{A_i \in \mathcal{A}} \left[\frac{t_{M2} - \tau_i^{\text{out}}}{t_{M2} - t_{M1}} \tilde{z}_i + \tilde{z}_i^{AD} + (\Delta_i^+ + \Delta_i^-) \times C_d(V_i^{\text{nom}}) + \rho^+ \Delta_i^+ + \rho^- \Delta_i^- \right] \quad (5-14)$$

lorsque l'on minimise $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{q}^T \mathbf{y}^n$. Le terme $\frac{t_{M2} - \tau_i^{\text{out}}}{t_{M2} - t_{M1}} \tilde{z}_i$ diffère du terme semblable dans (3-17) parce que \tilde{z}_i correspond ici à la consommation de carburant entre la manœuvre initiale et le recours. La vitesse étant inchangée par le recours lorsque la réalisation de l'erreur est nulle, la consommation de carburant entre la manœuvre de recours et la récupération du contrat 4D est proportionnelle à \tilde{z}_i . Le membre de droite de (5-14) est noté Q_0 .

La contrainte (5-14) permet alors de prendre en compte l'intégralité de la trajectoire dans le premier niveau en minorant θ par Q_0 . On obtient la formulation suivante du PM à l'itération

majeure L :

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \theta \\
 & \text{sujet à} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \quad \theta \geq \sum_{n=1}^N \pi_l^n (\mathbf{B}^n \mathbf{x} + \mathbf{d}^n), \quad l = 1, \dots, L \\
 & \quad \theta \geq Q_0
 \end{aligned} \tag{5-15}$$

5.4 Évaluation expérimentale

L'algorithme 5.1, noté **RECOURS**, est testé dans les mêmes conditions que les algorithmes du chapitre 4. L'algorithme est appliqué à une instance de chacun des dix scénarios auxquels utilisés dans cette partie, et, pour chaque instance, 1000 tirages indépendants des erreurs sont réalisés. Les instants auxquels les instructions de contrôle sont envoyées sont fixés par des durées d'anticipation $\tau^{\text{avt}} = 7$ minutes et $\tau^{\text{urg}} = 2$ minutes. En outre, les instances sont construites de sorte que l'instant initial $t = 0$ corresponde à l'instant où les premières instructions sont envoyées, c'est-à-dire $t_{M1} = 0$. Cet ajustement a été fait afin de ne résoudre le programme stochastique M1 qu'une seule fois par instance. Les variations entre les réalisations d'erreurs différentes n'interviennent donc que pour $t > t_{M1}$.

Lors de la résolution du programme stochastique M1, la distribution de probabilité des erreurs a été discrétisée en tirant un échantillon i.i.d. de 100 réalisations d'erreurs.

La première analyse de cette section se concentre sur la méthode de résolution de l'équivalent déterministe M1. L'algorithme **RECOURS** est ensuite comparé à **ONE \overline{D}** et à **MPC**; **AIRE** est quant à lui laissé de côté du fait de ses moins bonnes performances.

5.4.1 Performances de la décomposition de Benders

Pour l'ensemble des instances testées, la résolution de M1 est effectuée à l'aide de trois méthodes différentes. Dans un premier temps, puisqu'il s'agit d'un MILP, le modèle est directement résolu par Gurobi. La méthode de décomposition de Benders, décrite par l'algorithme (1.2), est ensuite exécutée sans la contrainte (5-14), puis avec. Les résultats sont consignés dans le tableau 5.1. La taille des problèmes résolus est caractérisée par le nombre de variables et de contraintes, $|\text{var}_{\text{SP}}|$ et $|\text{con}_{\text{SP}}|$, de chaque sous-problème associé à l'une des cent réalisations d'erreurs de l'échantillon. La durée de résolution est donnée pour chaque méthode, et le nombre d'itérations majeures effectuées pendant la décomposition de Benders apparaît pour les deux variantes. La décomposition pour laquelle la contrainte (5-14) est ajoutée au problème maître est notée **Benders $^+$** . La résolution a été arrêtée après 3 600 secondes.

Le premier constat est que, pour la plupart des instances, la résolution directe entraîne des temps d'exécution incompatibles avec une implémentation opérationnelle. La première décomposition de Benders permet de nettement réduire les temps de calcul pour sept des dix instances, mais il reste cinq instances pour lesquelles la résolution dure bien plus d'une minute. Deux plus, parmi ces cinq instances, G-02 et G-03 présentent des temps de calcul bien plus élevés avec Benders qu'avec la méthode directe. En revanche, on lit dans la colonne **Benders $^+$** que l'ajout de la contrainte (5-14) ramène toutes les durées d'exécution à moins de vingt secondes.

Ces résultats illustrent l'efficacité de la décomposition de Benders pour des problèmes présentant la structure propre aux programmes stochastiques avec recours lorsque le problème maître contient une quantité suffisante d'information relative au coût. On voit ainsi, dans les deux dernières colonnes du tableau, que l'ajout de la contrainte (5-14) au problème permet de réduire radicalement le nombre d'itérations majeures effectuées dans l'algorithme 1.2.

Tableau 5.1 — Comparaison des trois résolutions de l'équivalent déterministe

Scénario	var _{SP}	con _{SP}	CPU			Itérations	
			Directe	Benders	Benders ⁺	Benders	Benders ⁺
T-01	68	129	4,0	0,6	0,3	5	3
T-02	138	261	27,5	4,2	1,1	14	5
T-03	210	397	156,7	35,8	2,3	52	5
T-04	284	537	558,7	351,5	10,5	177	10
G-01	210	397	109,2	53,9	2,3	69	5
G-02	284	537	309,9	889,8	5,6	312	6
G-03	360	681	1660,7	3605,9	17,5	453	13
R-01	140	265	92,7	21,3	3,2	52	10
R-02	178	336	1644,9	231,5	2,2	223	4
R-03	216	409	3602,6	3603,7	3,2	723	4

Tableau 5.2 — Manœuvres pour un croisement sans conflit prévu – évaluation du recours

Algorithme	IC	IC ⁺	IC ⁻	C ⁰	C	p _{ij} ^{min}	Z
ONE _D	1000	937	0	63	10	3,2	0,80
MPC	115	52	0	63	3	4,8	0,10
RECOURS	115	52	0	63	3	4,9	0,03

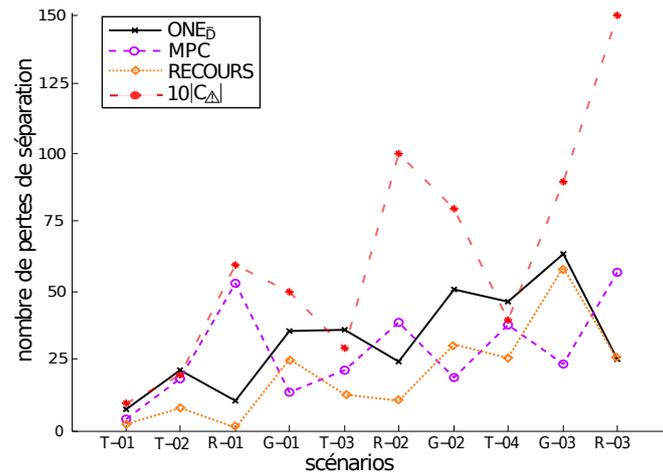
5.4.2 Comparaison des algorithmes de résolution en environnement incertain

La comparaison de l'algorithme RECOURS à ONE_D et MPC a plusieurs objectifs. Elle vise, par la confrontation avec ONE_D, à quantifier le gain réalisé en autorisant une manœuvre de recours lors du maintien de la séparation. L'analyse comparée des résultats de RECOURS et MPC doit permettre d'estimer la valeur ajoutée d'une prise en compte explicite des incertitudes ainsi que l'intérêt de ne pas mettre de limite sur le nombre de manœuvres.

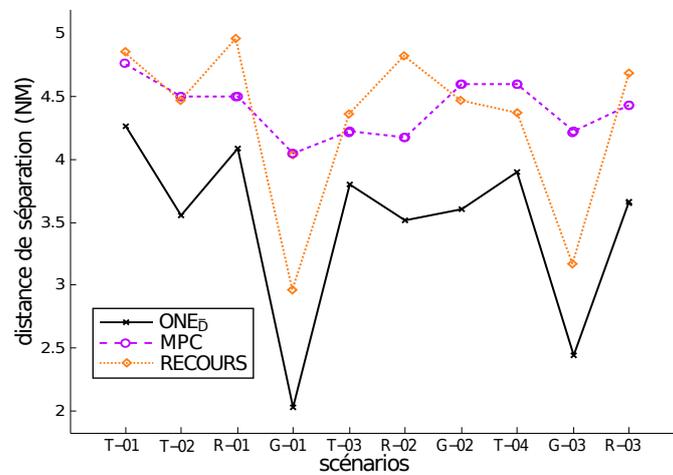
On reprend dans un premier temps l'étude du croisement de deux avions sans conflit prévu, faite dans la sous-section 4.4.1. Les résultats trouvés pour l'algorithme de recours sont présentés avec ceux de ONE_D et MPC dans le tableau 5.2. L'algorithme RECOURS a un comportement très proche de celui de MPC, et il entraîne même une légère diminution du coût Z et une augmentation de la pire distance minimum entre les avions, $||\mathbf{p}_{ij}||^{\min}$. Le déroulement des exécutions de RECOURS peut être décrite de la façon suivante :

1. Sachant que la distance minimale entre les avions prévue à l'instant t_{M1} est confortable, la résolution de M1 conclut pour toutes les réalisations qu'il est optimal de ne pas modifier les vitesses des avions à l'instant t_{M1} .
2. Entre t_{M1} et t_{M2} , la trajectoire des avions est simulée en fonction des réalisations d'erreurs, ce qui entraîne une variation de la distance de séparation prédite.
3. Pour 885 réalisations, la distance minimale prédite à l'instant t_{M2} est supérieure à \bar{D}_{ij} donc aucune instruction de contrôle n'est envoyée aux avions.
4. Dans les 115 cas restants, cette distance est inférieure à \bar{D}_{ij} donc une instruction de contrôle est envoyée. Parmi ces instructions, 52 n'étaient pas nécessaires parce que la distance de séparation aurait quand même été supérieure à D sans instruction. En revanche, les instructions n'ont pas été suffisantes pour le maintien de séparation dans 3 des 63 cas restants.

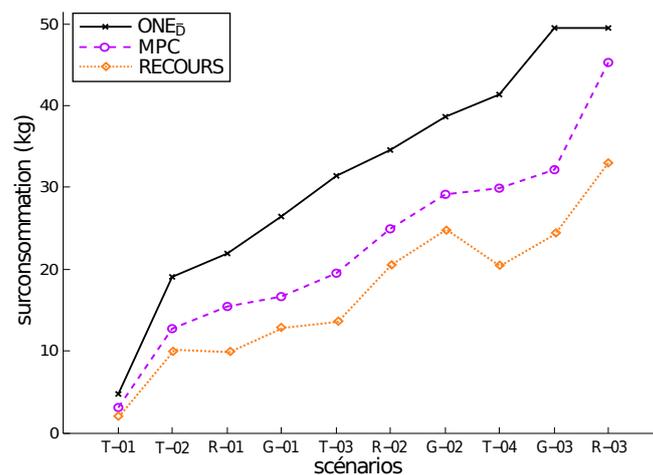
Remarque 5.2. *Il est utile d'observer que, si la façon dont RECOURS gère cette situation sans conflit est satisfaisante, ce comportement est très peu lié à la modélisation en programmation stochastique. En effet, la résolution de M1, comme celle de MPC, n'entraîne jamais de manœuvre à l'instant t_{M1} . Ainsi, les trajectoires des avions ne sont modifiées qu'à l'issue de la résolution de M2 qui n'est pas un modèle de programmation stochastique.*



(a) Nombre de pertes de séparation



(b) Distance de séparation minimale



(c) Coût moyen des trajectoires

Figure 5.3 — Comparaison des algorithmes de résolution en environnement incertain

Les résultats pour l'ensemble des instances, testées chacune avec 1000 réalisations d'erreurs différentes, sont présentées sous forme de graphique sur la figure 5.3. On donne le nombre total de pertes de séparation en figure 5.3(a), la plus petite distance de séparation en figure 5.3(b) et la moyenne des coûts en figure 5.3(c).

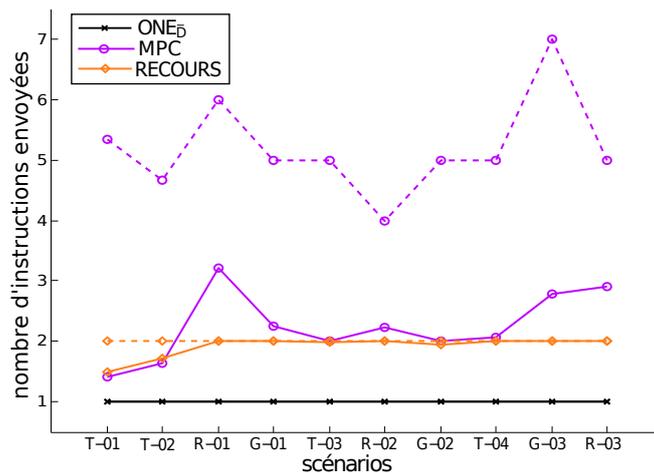


Figure 5.4 — Plus grand nombre d'instructions de contrôle reçues par un même aéronef : la moyenne parmi les 1000 tirages est en trait plein et le maximum en pointillés

Ces résultats mettent d'abord en évidence l'enjeu de l'ajout d'une manœuvre de recours. Ce mode de contrôle représente une modification marquée des pratiques opérationnelles puisqu'il suppose que les premières instructions ne suffisent pas nécessairement à la résolution des conflits. Dans un tel fonctionnement, les contrôleurs devraient donc rester en permanence vigilants à l'évolution de situations déjà traitées. En revanche, il offre une perspective d'amélioration importante, tant du point de vue du coût des trajectoires que de celui du maintien de séparation. En effet, la comparaison des courbes de $ONE_{\bar{D}}$ et RECOURS montre que le recours permet toujours de diminuer le nombre de conflits restants pour un coût global moindre. Pour tous les scénarios à l'exception de R-03 et G-03, le nombre de pertes de séparation est même divisé par un facteur proche de deux. En outre, les pires conflits restants sont nettement moins graves..

Si l'on oppose maintenant l'algorithme MPC à RECOURS, l'on observe que ce dernier entraîne une réduction systématique du coût allant de 15 à 30 %. Le contrôle avec recours permet également de réduire le nombre de pertes de séparation pour les scénarios de types Train et Rond-Point. Concernant ce dernier point ainsi que la gravité des pires conflits restants, RECOURS enregistre en revanche de moins bons résultats pour les scénarios de type Grille. Il apparaît notamment sur les figures 5.3(a) et 5.3(b) que, lors du traitement de G-03, RECOURS laisse près de deux fois plus de pertes de séparation se produire, et que les pires conflits surviennent avec une distance de séparation proche de 3 NM pour G-02 et G-03. Ce comportement s'explique par le fait que, dans ces scénarios, les aéronefs croisent successivement deux trains d'aéronefs alors que le recours n'est effectué qu'une fois, avant le croisement du premier train.

Pour illustrer un avantage majeur de RECOURS par rapport à MPC, on dessine deux indicateurs relatifs au nombre d'instructions de contrôle sur la figure 5.4. On observe d'abord que, à l'exception de T-01 et T-02, RECOURS donne toujours lieu à deux instructions de contrôle pour au moins l'un des aéronefs. Cela signifie que le recours est toujours nécessaire pour le maintien de la séparation. Pour ces mêmes cas, de deux à trois instructions sont envoyées en moyenne à l'un des aéronefs lors de la résolution de MPC, et, dans les pires cas, certains aéronefs peuvent recevoir de quatre à sept instructions pour la résolution d'une seule situation de conflit. Sachant que, malgré ces manœuvres supplémentaires, les résultats de MPC ne sont pas meilleurs que ceux de RECOURS pour les scénarios de type Train et Rond-Point, le contrôle avec recours constitue indiscutablement la meilleure pratique lorsque la zone de conflit n'est pas trop étendue. Il devrait néanmoins être adapté pour que les situations de type Grille ne posent pas de difficulté, en ajoutant par exemple un recours avant le croisement du second train d'avions.

5.5 Conclusion

La procédure de contrôle automatisé étudiée dans ce chapitre consiste à envoyer au plus deux instructions aux avions : la première anticipe les conflits de cinq à dix minutes et la seconde intervient deux à trois minutes avant le conflit. Dans un tel cadre, la formulation explicite des incertitudes permet de mieux tenir compte de la structure de corrélation des erreurs, et donne la possibilité d'introduire des manœuvres futures dépendant de la réalisation des erreurs lors du calcul de la première instruction. Un modèle stochastique linéaire à deux étapes contenant des variables binaires à la première étape a été développé avec cette intention. Pour cela, les contraintes de seconde étape ont été linéarisées et les variables binaires ont été remontées à la première étape en supposant que le sens des manœuvres pouvait être décidé dès la première étape. La distribution des erreurs a ensuite été discrétisée par simulations de Monte-Carlo.

Malgré la grande taille du MILP obtenu, sa structure se prête bien à l'application de la méthode de décomposition de Benders. Un algorithme de décomposition a donc été implémenté. Une inégalité, dont il a été prouvé qu'elle était valide pour la distribution continue d'erreurs, a ensuite été ajoutée au problème maître afin qu'il contienne plus d'informations sur le coût des solutions.

Lors des tests sur les mêmes jeux de données qu'au chapitre précédent, l'efficacité de l'algorithme de décomposition a pu être montrée. La résolution avec recours a en outre été confrontée aux algorithmes MPC et $ONE_{\overline{D}}$. Les résultats ont indiqué que RECOURS offre un moyen de limiter le nombre de manœuvres pour des performances globalement meilleures. Sachant que le modèle M2 est très proche des modèles $ONE_{\overline{D}}$ et MPC, le gain ne vient pas du calcul des manœuvres de recours elle-même mais de la prise en compte de celles-ci par la programmation stochastique.

Finalement, les résultats suggèrent qu'il est intéressant de prendre en compte, lors du calcul des premières instructions, la possibilité d'envoyer d'autres instructions dans le futur. L'inclusion explicite des incertitudes dans le problème d'optimisation M1 était nécessaire pour y parvenir.

Bilan et perspectives

Résumé des contributions

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la programmation mathématique appliquée à la séparation d'aéronefs stabilisés en altitude. L'objectif est le développement d'algorithmes permettant une automatisation efficace d'une partie de l'ATC, à savoir la résolution des conflits. L'enjeu est d'augmenter la capacité des secteurs en route afin de diminuer les retards et d'autoriser un plus grand nombre d'aéronefs à suivre leur trajectoire optimale. Les principales contributions des travaux réalisés pour répondre à cette problématique se déclinent selon quatre thématiques complémentaires.

Mise en œuvre du contrôle automatisé

L'automatisation de l'ATC représente une coupure nette avec le fonctionnement actuel. Plusieurs processus de contrôle sont proposés afin de faciliter son implémentation tout en restant aussi cohérent que possible avec la réalité opérationnelle actuelle pour ne pas élargir inutilement ce fossé.

Les modifications de trajectoire nécessaires au maintien de la séparation sont conçues de façon à pouvoir être transcrites en un ensemble d'instructions de contrôle simples. Chaque instruction consiste en un changement de cap, un changement de vitesse et l'instant auquel ces changements doivent être effectués.

Un cadre opérationnel est proposé pour l'introduction du concept de contrat 4D dans l'ATM. La difficulté est alors de faire en sorte que l'ATC ne s'oppose pas à l'effort de suivi du contrat 4D produit par les aéronefs. Le contrôle automatisé est donc conçu de façon à favoriser le retour sur la trajectoire contractuelle après les manœuvres.

Pour la gestion des incertitudes, un contrôle avec recours est décrit. L'idée est de profiter des avantages d'une anticipation des conflits en ordonnant un premier ensemble de manœuvres cinq à dix minutes à l'avance sans pour autant imposer de trop grandes marges sur la distance de séparation. Une deuxième manœuvre est donc permise deux à trois minutes avant le conflit pour compenser les réalisations des incertitudes les plus défavorables. Ce type de contrôle limite les interventions des contrôleurs tout en promettant une gestion efficace des incertitudes.

Modélisation

Une part importante des travaux s'attache à décrire des modélisations pertinentes du problème de séparation d'aéronefs. Il a notamment été observé que le critère à minimiser, pour être en accord avec les calculs de trajectoires des compagnies, devait inclure la consommation de carburant et la durée du parcours; en outre, le réalisme de la dynamique des avions est nécessaire.

Un modèle non linéaire, *TIME*, est conçu de façon à satisfaire ces exigences. Le critère minimisé contient un terme non linéaire correspondant à la consommation de carburant et un second terme pénalisant l'écart final à la trajectoire contractuelle. Ce terme tient à la fois compte des contraintes de suivi du contrat 4D et du coût lié à la durée du parcours. Les manœuvres

sont modélisées par des changements de vitesse et de cap à vecteur accélération constante, et les bornes sur ce vecteur sont découplées entre ses composantes longitudinale et latérale. Finalement, des contraintes sont construites pour garantir la séparation entre les aéronefs à tout instant de l'horizon de contrôle.

Afin de disposer de modèles dont la solution optimale peut être rapidement calculée, le critère et les contraintes non linéaires sont linéarisés pour former trois MILP différents. Les modèles **TMILP** et **ONE** sont des discrétisations temporelles du problème initial. **TMILP** est une linéarisation directe de **TIME**, tandis que **ONE** n'autorise qu'une manœuvre d'évitement à l'instant initial et simule un retour sur trajectoire. Le modèle **SPACE** est une discrétisation spatiale du problème initial dont le point original est qu'il inclut la possibilité d'effectuer des changements de cap. Malgré les hypothèses simplificatrices, les trois formulations sont construites pour que toute solution respecte l'ensemble des contraintes définies initialement pour le problème en temps continu. Le progression du travail de modélisation est accompagnée d'une étude théorique des approximations réalisées à chaque simplification. Une mesure de la qualité des contraintes permet ainsi la comparaison des différentes alternatives.

À la frontière entre modélisation et méthode de résolution, la formulation des MILP est améliorée par la recherche des meilleures constantes de *grand-M* intervenant dans les contraintes disjonctives, et par l'ajout de coupes valides.

En environnement incertain, un modèle d'erreur complexe, composé à la fois d'erreurs indépendantes entre aéronefs et d'un champ de vent corrélé en espace et en temps, est considéré pour la première fois dans une formulation de ce problème en programmation linéaire mixte. Les incertitudes sont alors prises en compte en adaptant **ONE** par un élargissement de la distance de séparation justifié grâce au calcul d'une approximation des probabilités de conflit. D'autres modifications sont également apportées à **ONE** pour donner lieu à deux types de contrôle bien distincts. D'une part, dans **AIRE**, le critère mesure l'aire entre la trajectoire de référence et la trajectoire réelle pour qu'une seule manœuvre d'évitement soit envoyée aussi tard que possible. D'autre part, dans **MPC**, le critère et la contrainte de séparation sont modifiés pour qu'une résolution répétée du modèle ne donne pas systématiquement lieu à de nouvelles instructions.

Un nouveau modèle de programmation stochastique est conçu pour le contrôle avec recours. Les erreurs sont alors explicitement incluses dans le modèle afin de prendre en compte la possibilité d'ordonner des manœuvres de recours lorsque la réalisation des erreurs engendre de nouveaux conflits. La distribution des erreurs est discrétisée par simulation de Monte-Carlo. Une analyse du processus et un ensemble d'approximations permettent ensuite de développer un modèle de programmation stochastique linéaire à deux étapes dont seules certaines variables de première étape sont binaires.

Méthodes de résolution

La résolution à proprement parler du PNL et des MILP est réalisée par appel aux solveurs génériques SNOPT et Gurobi. Des méthodes d'initialisation et de décomposition constituent néanmoins des apports importants de cette étude.

Le modèle non linéaire est non convexe et sa résolution risque de rester bloquée dans des minima locaux. Un moyen de mettre la résolution de **TIME** dans de bonnes conditions est de fournir une bonne solution initiale. Des résultats théoriques justifient l'utilisation du modèle **TMILP** pour calculer une première solution admissible de **TIME**. La résolution de **TMILP** est en outre accélérée par une procédure au cours de laquelle le pas de discrétisation temporelle est augmenté pour calculer des valeurs convenables pour les variables binaires. Le pas est ensuite rétabli et une relaxation linéaire de **TMILP** est résolue pour construire le reste de la solution.

Concernant le contrôle avec recours, la taille de l'échantillon de Monte-Carlo conduit à un modèle de dimension importante. Sa résolution directe, bien que possible, n'est en général pas compatible avec une implémentation opérationnelle. Une méthode de décomposition de Benders,

classique en programmation stochastique linéaire à deux étapes, est implémentée pour une résolution plus rapide. Le point original de nos travaux est l'ajout d'une contrainte remontant vers le problème maître la plus grande partie de l'information sur le coût des solutions. La validité de l'inégalité est prouvée pour le problème à distribution continue. La justification de l'ajout de cette contrainte se base sur le fait que la fonction de recours est convexe par rapport aux incertitudes. Ceci est valable lorsque pour tout problème stochastique à recours fixe dont la matrice de technologie et le membre de droite des contraintes de seconde étape sont des fonctions affines des incertitudes. Il est fort probable qu'un grand nombre de problèmes de recherche opérationnelle puissent être modélisés de cette manière. Cette contribution dépasse donc le cadre applicatif du maintien de la séparation entre aéronefs.

Études expérimentales

Les modèles et les méthodes de résolution sont tous évalués expérimentalement sur un grand nombre de jeux de données. Seize scénarios complexes, impliquant deux à douze aéronefs et simulant trois types de configurations différentes, sont construits. Dans l'étude en environnement déterministe, cent instances de chaque scénario sont générées aléatoirement en faisant varier les positions initiales des aéronefs. Lorsque les incertitudes sont ajoutées, seule une instance de chacun des dix scénarios les moins complexes est considérée, et l'impact des incertitudes est estimé en simulant mille réalisations indépendantes des erreurs.

La comparaison de la résolution de **TIME** par initialisation avec **TMILP** à deux autres résolutions, sans initialisation et avec une initialisation plus archaïque, met en évidence l'efficacité de cette méthode. Pour tous les scénarios, l'initialisation par **TMILP** permet de trouver un bien plus grand nombre de trajectoires sans conflit et le coût de ces dernières est moindre. En outre, le temps d'exécution est plus petit dans la majorité des cas.

L'homogénéité des contraintes et du critère apparaissant dans le PNL et dans les MILP permet une comparaison pertinente des modèles. Une contribution importante de ces tests est de montrer que le modèle **ONE**, bien qu'il corresponde à une simplification du processus de contrôle, obtient des résultats comparables à ceux de **TIME** en termes de coût des solutions et de nombre de trajectoires sans conflit. En outre la résolution de **ONE** est nettement plus rapide que celle de **TIME** et semble plus adaptée à une implémentation opérationnelle. Les performances de **SPACE** sont en revanche en dessous parce que sa modélisation a nécessité une trop grande réduction de l'espace de recherche.

Les tests effectués en environnement incertain se concentrent d'abord sur l'impact du nombre de manœuvres et de l'instant auquel elles sont exécutées. Ils indiquent qu'il n'est généralement pas bénéfique d'attendre le dernier moment pour modifier la trajectoire des conflits. Ils confirment également l'idée logique selon laquelle il est meilleur de réaliser plusieurs manœuvres, s'adaptant aux erreurs au fur et à mesure de leur réalisation, qu'une manœuvre unique.

L'évaluation du modèle avec recours met d'abord en évidence l'efficacité de la décomposition de Benders lorsque l'inégalité valide proposée est ajoutée au problème maître. Certaines instances, dont l'optimum n'est pas trouvé après une heure de calcul sans cette contrainte, sont ensuite résolues en quelques secondes. En outre, malgré la limitation à deux manœuvres par aéronef, les résultats du modèle avec recours sont meilleurs que ceux de **MPC** pour la majorité des instances. Ce constat assoit l'intérêt de la prise en compte, d'une part, de l'aspect aléatoire des données directement dans le modèle et, d'autre part, des instructions qui pourront être envoyées dans le futur.

Sur l'ensemble des tests réalisés, les gains de carburant réalisés grâce aux différents algorithmes restent modestes par rapport à la consommation des aéronefs sur des trajets dont la longueur se compte en centaine ou en milliers de nautiques. La comparaison des algorithmes en termes de gains de carburant est donc plus intéressante du point de vue théorique que du point de vue opérationnel. Ainsi, l'algorithme le plus pertinent doit probablement être choisi en se

basant uniquement sur le nombre et la gravité des conflits résiduels ainsi que sur la simplicité d'implémentation.

Discussion et perspectives

Le bilan des travaux réalisés pour cette thèse ouvre plusieurs voies de recherche.

Au niveau de la modélisation, les changements de vitesse à accélération constante sont un premier pas vers plus de précision, mais il reste que la dynamique des aéronefs est nettement plus compliquée. Outre le risque d'une explosion du temps de calcul, la complexification du modèle pose le problème de sa pertinence. En effet, l'entité calculant les manœuvres d'évitement et celle qui est responsable de les exécuter n'étant pas les mêmes, il faudrait que les instructions de contrôle portent par exemple sur la poussée ou sur l'angle de gîte pour qu'un modèle plus précis ait un sens. En outre, cela nécessiterait une connaissance bien plus fine de tous les paramètres des aéronefs. Ces exigences n'étant pas réalistes, même à moyen terme, une étude future pourrait s'attacher à la prise en compte des erreurs de modélisation sous la forme de nouvelles erreurs aléatoires sur la prédiction de trajectoire. Un autre terme d'incertitudes pourrait également représenter la connaissance approximative des instants de début et de fin des manœuvres. Finalement, l'incertitude sur les préférences des compagnies en ce qui concerne le rapport entre les coûts associés au carburant et au retard pourrait également être incluse.

Les tests réalisés en environnement déterministe mettent en évidence la qualité des trajectoires calculées par ONE et la rapidité de leur obtention. Il a de plus été montré que les solutions de ONE étaient des solutions admissibles de TIME. Ces deux résultats indiquent clairement une voie d'amélioration de l'algorithme hybride de résolution de TIME. Plutôt que d'utiliser TMILP pour l'initialisation, il serait probablement plus fructueux de partir de la solution optimale de ONE.

Les scénarios utilisés pour les tests permettent d'examiner le comportement des différentes méthodes de résolution pour des instances très complexes mais relativement petites. De plus, les conflits sont très concentrés dans la plupart des scénarios, ce qui ne permet pas d'apprécier la réaction des algorithmes pour des conflits plus espacés. Une diversification des jeux de données allant dans ce sens serait donc bénéfique pour une meilleure évaluation des modèles; d'autant plus que le trafic réel présente plutôt ce type de configuration. Concernant les tests sur des jeux de données réels, ceux-ci ont un intérêt limité si l'objectif du contrôle automatisé est de changer la physionomie du trafic en augmentant la capacité des secteurs et en mettant moins de contraintes sur l'élaboration des plans de vol. En effet, le trafic est actuellement organisé de manière à pouvoir être géré par deux contrôleurs affectés à chaque secteur, et dont la tâche ne se résume pas à la résolution de conflits. La complexité des situations rencontrées dans le trafic actuel n'est donc pas suffisante pour valider des algorithmes de contrôle automatisé. Pour des tests plus pertinents, il faudrait simuler un trafic plus dense, et dans lequel la contrainte des couloirs aériens serait au moins partiellement levée.

Pour la prise en compte des incertitudes, l'étude du contrôle avec recours souligne l'intérêt d'une telle approche. De nombreux points n'ont toutefois pas pu être approfondis à ce stade. L'impact de la taille de l'échantillon tiré pour discrétiser la distribution des erreurs n'a été évalué que superficiellement du fait de l'explosion du temps de calcul constatée lorsqu'elle augmente. Il serait néanmoins possible de discrétiser plus précisément la distribution d'erreurs grâce à des méthodes de réduction de la variance. L'échantillonnage d'importance [55] permet par exemple de mieux sélectionner les scénarios retenus dans le modèle. L'idée est alors de modifier le mécanisme d'échantillonnage afin de tirer avec une plus grande probabilité les réalisations d'erreurs qui auront un plus grand impact sur la résolution.

D'autre part, dans la mesure où le modèle avec recours se base sur un échantillonnage des erreurs, on pourrait éventuellement lever l'hypothèse Gaussienne et se baser sur des distributions à support borné plus cohérentes avec les phénomènes réels. Dans ce contexte, on pourrait

abandonner les contraintes probabilistes et s'intéresser au problème d'optimisation robuste :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \max_{\xi} (Q(\mathbf{x}, \xi) : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}) \}$$

Les contraintes de séparation présentes à la seconde étape exigeraient alors que la séparation soit maintenue pour toute réalisation d'erreurs. Dans une application telle que l'ATC, pour laquelle la sécurité est au cœur des préoccupations, une telle approche correspond probablement plus aux attentes opérationnelles.

Finalement, on observe sur les jeux de type Grille que le contrôle avec recours rencontre des difficultés lorsque plusieurs conflits doivent être traités successivement. Ces difficultés seraient certainement réduites en donnant la possibilité d'envoyer une nouvelle instruction de contrôle quand des conflits espacés doivent être résolus. Le problème serait alors un programme stochastique multi-étape que l'on pourrait par exemple résoudre à l'aide d'une version plus élaborée de la décomposition de Benders, appelée décomposition de Benders imbriquée [25].

Troisième partie

Annexes

Annexe

A

Calcul des pénalités d'écart au contrat 4D

Pour que les points de passage 4D représentent une cible pour les trajectoires déterminées lors de l'optimisation, il est nécessaire de pénaliser l'écart à ce point. La valeur de cette pénalisation doit en outre être raisonnable, il ne s'agit en effet pas d'ajouter une très grande pénalité dont l'effet serait de donner la priorité absolue au respect du contrat. À l'inverse, une pénalité petite devant la consommation de carburant est inutile. Selon que le modèle est obtenu par discrétisation temporelle ou spatiale, l'écart au contrat 4D se traduit par une distance au point de passage ou par une différence sur l'instant de passage. Ces deux cas sont donc traités séparément. Toutefois, le principe du calcul est le même : on cherche à déterminer des pénalités cohérentes avec le comportement d'un aéronef qui n'est pas impliqué dans des conflits et doit rattraper un écart au contrat 4D lors d'un parcours rectiligne à vitesse constante.

A.1 Pénalisation pour un modèle discrétisé temporellement

Propriété A.1

Soit un aéronef A volant en ligne droite, à vitesse constante V pendant une durée T et ayant initialement un écart longitudinal $\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}$ à son contrat 4D tel que $TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}} > 0$. Soit Z le coût de la trajectoire de A , défini par :

$$Z = \begin{cases} TC_t(V) - \Delta_{\parallel} C_d(V) + \rho^- \times \Delta_{\parallel} & \text{si } \Delta_{\parallel} < 0 \\ TC_t(V) - \Delta_{\parallel} C_d(V) + \rho^+ \times \Delta_{\parallel} & \text{si } \Delta_{\parallel} > 0 \end{cases}$$

où Δ_{\parallel} est l'écart longitudinal final, dont la valeur dépend de l'écart initial $\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}$ et de V . Alors, en posant

$$\rho^- = - \left(V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} \right) \frac{dC_d(V^{4D+})}{dV} \quad \text{et} \quad \rho^+ = - \left(V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} \right) \frac{dC_d(V^{4D-})}{dV}, \quad (\text{A-1})$$

où V^{4D-} et V^{4D+} sont données telles que $V^{\text{min}} < V^{4D-} < V^{\text{nom}} < V^{4D+} < V^{\text{max}}$. La vitesse optimale de A est alors donnée par :

$$V = \begin{cases} V^{4D+} & \text{si } \Delta_{\parallel}^{\text{ini}} \leq T(V^{\text{nom}} - V^{4D+}) \\ V^{4D-} & \text{si } \Delta_{\parallel}^{\text{ini}} \geq T(V^{\text{nom}} - V^{4D-}) \\ V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} & \text{si } T(V^{\text{nom}} - V^{4D+}) \leq \Delta_{\parallel}^{\text{ini}} \leq T(V^{\text{nom}} - V^{4D-}) \end{cases}$$

Démonstration : La trajectoire contractuelle est parcourue à la vitesse V^{nom} , donc l'écart final vaut

$$\Delta_{\parallel} = \Delta_{\parallel}^{\text{ini}} + T(V - V^{\text{nom}})$$

En notant de plus que $C_t(V) = VC_d(V)$, il vient que

$$TC_t(V) - \Delta_{\parallel} C_d(V) = (TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}) C_d(V)$$

Ainsi le critère s'exprime en fonction de V de la façon suivante :

$$Z(V) = \begin{cases} (TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}) C_d(V) + \rho^+ (\Delta_{\parallel}^{\text{ini}} + T(V - V^{\text{nom}})) & \text{si } V \geq V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} \\ (TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}) C_d(V) + \rho^- (\Delta_{\parallel}^{\text{ini}} + T(V - V^{\text{nom}})) & \text{si } V < V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} \end{cases}$$

Z est continue, dérivable partout sauf en $V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T}$ et sa dérivée vaut :

$$\frac{dZ(V)}{dV} = \begin{cases} (TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}) \frac{dC_d(V)}{dV} + T\rho^+ & \text{si } V > V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} \\ (TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}) \frac{dC_d(V)}{dV} + T\rho^- & \text{si } V < V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} \end{cases}$$

Or, en remplaçant ρ^+ par la valeur donnée dans (A-1), la fonction

$$V \mapsto (TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}) \frac{dC_d(V)}{dV} + T\rho^+$$

s'annule pour $V = V^{4D-}$. Par convexité de C_d , la dérivée de cette fonction est en outre strictement positive sur \mathbb{R}^{*+} pour $TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}} > 0$. Ainsi,

$$Z^+(V) : \begin{array}{ll} [TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ V & \mapsto (TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}) \frac{dC_d(V)}{dV} + T\rho^+ \end{array}$$

atteint son minimum en $V = V^{4D-}$ si $V^{4D-} > TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}$ et en $V = TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}$ sinon. En suivant le même raisonnement sur l'intervalle $]0, TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}[$, on démontre que la fonction

$$Z^-(V) : \begin{array}{ll}]0, TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}] & \rightarrow \mathbb{R} \\ V & \mapsto (TV^{\text{nom}} - \Delta_{\parallel}^{\text{ini}}) \frac{dC_d(V)}{dV} + T\rho^- \end{array}$$

atteint son minimum en $V = V^{4D+}$ si $V^{4D+} < V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T}$ et en $V = V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T}$ sinon. Sachant en outre que $V^{4D-} < V^{4D+}$, on obtient finalement que Z a un unique minimum sur \mathbb{R}^{*+} et qu'il est atteint pour

$$V = \begin{cases} V^{4D+} & \text{si } V^{4D+} < V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} \\ V^{4D-} & \text{si } V^{4D-} > V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} \\ V^{\text{nom}} - \frac{\Delta_{\parallel}^{\text{ini}}}{T} & \text{si } T(V^{\text{nom}} - V^{4D+}) \leq \Delta_{\parallel}^{\text{ini}} \leq T(V^{\text{nom}} - V^{4D-}) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Considérons un aéronef n'ayant aucune manœuvre d'évitement à effectuer et volant en ligne droite, à vitesse constante sur l'intervalle de temps $[0, t^{4D}]$, où t^{4D} correspond à un instant de passage du contrat 4D. Posons comme principe de bon sens que l'aéronef ajuste sa vitesse pour respecter le contrat 4D à l'instant t^{4D} en autant que cela ne crée pas un différentiel trop grand par rapport à sa vitesse nominale. Alors, si $[V^{4D-}, V^{4D+}]$ est l'intervalle de vitesse à l'intérieur duquel l'utilisateur est disposé à fixer la vitesse de l'aéronef pour réduire l'écart au contrat 4D, la propriété A.1 suggère une pénalisation de l'écart longitudinal telle que ce principe est respecté. Sachant que le même critère doit s'appliquer à tous les aéronefs, la planification de trajectoires sans conflit minimise :

$$Z = \begin{cases} \int_0^{t^{4D}} (C_t(V(t))) dt - \Delta_{\parallel} C_d(V(t^{4D})) + \rho^- \times \Delta_{\parallel} & \text{si } \Delta_{\parallel} < 0 \\ \int_0^{t^{4D}} (C_t(V(t))) dt - \Delta_{\parallel} C_d(V(t^{4D})) + \rho^+ \times \Delta_{\parallel} & \text{si } \Delta_{\parallel} > 0 \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

où ρ^- et ρ^+ sont donnés par (A-1). Ce critère permet de favoriser le respect strict du contrat 4D tout en définissant un intervalle de vitesse acceptable au regard de cette contrainte.

On note par ailleurs que, C_d étant convexe et la vitesse nominale étant définie comme le minimum de C_d :

$$\frac{dC_d(V^{4D+})}{dV} < 0 \text{ et } \frac{dC_d(V^{4D-})}{dV} > 0$$

Pour un horizon de commande typique de l'ordre de 10 minutes, la borne supérieure sur l'écart au contrat induit que $\frac{\Delta_T^{\text{ini}}}{T} \leq \frac{V^{\text{nom}}}{10}$, par conséquent les pénalités sont telles que $\rho^- < 0$ et $\rho^+ > 0$

A.2 Discrétisation spatiale

Si le modèle est discrétisé spatialement, la situation pertinente à considérer est la même que celle de la section précédente, excepté que le calcul est réalisé en fixant la distance du parcours de l'aéronef plutôt que sa durée. Soit L cette distance parcourue. Cette fois, le critère à minimiser est donné par

$$Z = \begin{cases} LC_d(V) + \rho^- \times \Delta_T, & \text{si } \Delta_T < 0 \\ LC_d(V) + \rho^+ \times \Delta_T, & \text{si } \Delta_T > 0 \end{cases}$$

où $\Delta_T = \Delta_T^{\text{ini}} + L(\frac{1}{V} - \frac{1}{V^{\text{nom}}})$ est homogène à une durée. Le critère est simplifié du fait que la destination est atteinte quels que soient la vitesse et l'écart initial.

En répétant le raisonnement développé dans la démonstration de la propriété (A.1), il vient que les pénalités suivantes conviennent :

$$\rho^- = (V^{4D-})^2 \frac{dC_d(V^{4D-})}{dV} \text{ et } \rho^+ = (V^{4D+})^2 \frac{dC_d(V^{4D+})}{dV} \quad (\text{A-3})$$

Annexe

B

Publications liées à ces travaux

Revue internationale avec comité de lecture

1. J. OMER ET J.-L. FARGES : Hybridisation of nonlinear and mixed integer linear programming for aircraft separation with trajectory recovery. *IEEE Transaction on Intelligent Transportation*, dernière soumission après révisions mineures le 18 janvier 2013.

Conférences internationales avec comité de lecture

1. J. OMER ET T. CHABOUD : Automated conflict-free planning : experiments on real air traffic data. In *International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS)*, septembre 2012.
2. J. OMER ET J.-L. FARGES : Automating air traffic control through nonlinear programming. In *International Conference on Research in Air Transportation (ICRAT)*, disponible en ligne : <http://www.icrat.org>, mai 2012.
3. J. OMER ET T. CHABOUD : Tactical and post-tactical air traffic control methods. In *9th Innovative Research Workshop & Exhibition (INO)*, décembre 2010.

Conférences nationales avec comité de lecture - articles courts

1. J. OMER ET T. CHABOUD : Amélioration de la gestion du trafic aérien sous incertitudes par le contrôle automatisé du trafic. In *Conférence ROADEF*, avril 2012.
2. J. OMER ET T. CHABOUD : Méthodes tactique et post-tactique de contrôle du trafic aérien. In *Conférence ROADEF*, mars 2011.

Bibliographie

- [1] PHARE : EFMS phase 1b. Rapport technique DOC 96-70-15, EUROCONTROL, 1996.
- [2] Procedures for air navigation services - Rules for the air and traffic services. Rapport technique, ICAO, 1996.
- [3] Réglementation de la circulation aérienne. Rapport technique, SIA, 2008.
- [4] ERASMUS final report v1.1. Rapport technique D4.6, ERASMUS project, 2009.
- [5] Eurocontrol long-term forecast : IFR flight movements 2010-2030. Rapport technique, Eurocontrol - STATFOR, 2010.
- [6] Rapport sur les comptes annuels de l'entreprise commune SESAR pour l'exercice clos le 31 décembre 2009, accompagné des réponses de l'entreprise commune. Rapport technique, Journal officiel de l'Union Européenne, 2010.
- [7] Basic CFMU handbook, General & CFMU systems, 2011.
- [8] Eurocontrol medium-term forecast : IFR flight movements 2011-2017. Rapport technique, Eurocontrol - STATFOR, 2011.
- [9] User manual for the Base of Aircraft Data (BADA). Rapport technique 11/03/08-08, Eurocontrol, 2011.
- [10] F ALLGOWER, R FINDEISEN et ZK NAGY : Nonlinear model predictive control : From theory to application. *Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers*, 35(3):299–315, 2004.
- [11] J.-M. ALLIOT et N. DURAND : A mathematical analysis of the influence of wind uncertainty on mtcd efficiency. *Revue de l'IFATCA, The controller*, 2011.
- [12] J.-M. ALLIOT, N. DURAND et G. GRANGER : A statistical analysis of the influence of vertical and ground speed errors on conflict probe. *In ATM Conference*, 2001.
- [13] A. ALONSO-AYUSO, L. ESCUDERO, P. OLASO et C. PIZARRO : Conflict avoidance : 0-1 linear models for conflict detection & resolution. *TOP, Springer*, pages 1–20, 2011.
- [14] M. ALTHOFF et A. MERGEL : Comparison of Markov Chain abstraction and Monte-Carlo simulation for the safety assessment of autonomous cars. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 12:1237–1247, 2011.
- [15] J. ARRIETA-CAMACHO, L. BIEGLER et D. SUBRAMANIAN : Trajectory control of multiple aircraft : an NMPC approach. *In ASSESSMENT AND FUTURE DIRECTIONS OF NONLINEAR MODEL PREDICTIVE CONTROL*, éditeur : R. Findeisen, F. Allgöwer et L. Biegler, volume 358 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 629–639. Springer Berlin/Heidelberg, 2007.
- [16] R. AZUMA, H. NEELY III, M. DAILY et R. GEISS : Visualization tools for free flight air-traffic management. *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 20:32–36, 2000.
- [17] M. G. BALLIN et H. ERZBERGER : An analysis of landing rates and separations at dallas/ft. worth airport. Memorandum TM-110397, NASA, 1996.

- [18] A. BASHLLARI, N. KACIROTI, D. NACE et A. FUNDO : Conflict probability estimations based on geometrical and Bayesian approaches. *In IEEE Intelligent Transportation Systems Conference*, pages 479–84. IEEE, 2007.
- [19] E. M. L. BEALE et J. TOMLIN : Special facilities in general mathematical programming system for non-convex problems using ordered sets of variables. *In J. LAWRENCE, éditeur : 5th IFORS Conference*, pages 447–454. Tavistock, 1970.
- [20] R. W. BEARD : Multiple UAV cooperative search under collision avoidance and limited range communication constraints. *In IEEE CDC*, pages 25–30, 2003.
- [21] J. BELLINGHAM, A. RICHARDS et J. P. HOW : Receding horizon control of autonomous aerial vehicles. *In American Control Conference*, pages 3741–3746, 2002.
- [22] J. BENDERS : Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4:238–252, 1962.
- [23] A. J. BERRY, J. HOWITT, D.-W. GU et I. POSTLETHWAITE : A continuous local motion planning framework for unmanned vehicles in complex environments. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 66:477–494, 2012.
- [24] A. BICCHI et L. PALLOTTINO : Optimal cooperative conflict resolution for air traffic management systems. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, pages 100–109, 2000.
- [25] J. R. BIRGE : Decomposition and partitioning methods for multistage stochastic linear programs. *Operations Research*, 33:989–1007, 1985.
- [26] J.R. BIRGE et F. LOUVEAUX : *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, 2011.
- [27] R. E. BIXBY : Solving real-world linear programs : a decade and more of progress. *Operations Research*, 50:3–15, 2002.
- [28] F. BORRELLI, D. SUBRAMANIAN, A. U. RAGHUNATHAN et L. T. BIEGLER : MILP and NLP techniques for centralized trajectory planning of multiple unmanned air vehicles. *In American Control Conference*, volume 1-12, pages 5763–5768, 2006.
- [29] G. CHALOULOS et J. LYGEROS : Effect of wind correlation on aircraft conflict probability. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30:1742–1752, 2007.
- [30] J.C. CLEMENTS : Optimal simultaneous pairwise conflict resolution maneuvers in air traffic management. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 25:815–818, 2002.
- [31] R. E. COLE, C. M. RICHARD, S. K. KIM et D. B. BAILEY : An assessment of the 60 km Rapid Update Cycle (RUC) with near real-time aircraft reports. Rapport technique Project Report NASA/A-1, MIT Lincoln Laboratory, Lexington, MA, 1998.
- [32] CATS CONSORTIUM : CATS state of the art. Rapport technique CATM-WP113-ERC-OSED-D113-V0110, 2007.
- [33] G. B. DANTZIG : The general simplex method for minimizing a linear form under inequality constraints. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:183–195, 1955.
- [34] G. B. DANTZIG : Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1:197–206, 1955.
- [35] G. B. DANTZIG : Linear programming (Reprinted). *Operations Research*, 50:42–47, 2002.
- [36] V. N. DUONG, E. HOFFMAN et J.-P. NICOLAON : Initial results of investigation into autonomous aircraft concept. *In 1st ATM R& D Seminar*, 1997.
- [37] N. DURAND : *Optimisation de trajectoires pour la résolution de conflits en route*. Thèse de doctorat, INPT, 1996.
- [38] N. DURAND : Algorithmes génétiques et autres outils d’optimisation appliqués à la gestion de trafic aérien. HDR de l’Institut Polytechnique de Toulouse, 2004.

- [39] N. DURAND, J.-M. ALLIOT et J. NOAILLES : Automatic aircraft conflict resolution using genetic algorithms. *In Symposium on Applied Computing*, 1996.
- [40] M. G. EARL et R. D'ANDREA : *Multi-vehicle cooperative control using mixed integer linear programming*, volume Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems, chapitre 10, pages 231–259. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [41] A. EELE et A. RICHARDS : Path-planning with avoidance using nonlinear branch-and-bound optimization. *Journal of Guidance and Dynamics*, 32:384–394, 2009.
- [42] M. ERDMANN et T. LOZANNO-PÉREZ : On multiple moving objects. *Algorithmica*, 2:477–521, 1987.
- [43] H. ERZBERGER, R. A. PAIELLI, D. R. ISAACSON et M. M. ESHOW : Conflict detection and resolution in the presence of prediction error. *In 1st USA/Eur. Air Traffic Management Research Development Seminar*, 1997.
- [44] R. FOURER, D. M. GAY et B. W. KERNIGHAN : *AMPL : A Modeling Language for Mathematical Programming*. Duxbury Press, 2002.
- [45] E. FRAZZOLI, E. FERON, Z. H. MAO et J. H. OH : Resolution of conflicts involving many aircraft via semidefinite programming. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 24:79–86, 2001.
- [46] C. FRESE : Cooperative motion planning using branch and bound methods. *In J. BEYERER et M. HUBER, éditeurs : Joint Workshop of Fraunhofer IOSB and Institute for Anthropomatics, Vision and Fusion Laboratory*, pages 187–201, 2009.
- [47] C. FRESE et J. BEYERER : A comparison of motion planning algorithms for cooperative collision avoidance of multiple cognitive automobiles. *In IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pages 1156–1162, 2011.
- [48] M. GAMACHE et A. MERCIER : *Planification intégrée des itinéraires d'avion et des horaires d'équipage*, chapitre Méthode de décomposition de Benders, pages 195–204. Presses Internationales Polytechnique, sept. 2005.
- [49] J.-M. GAROT et N. DURAND : Failures in the automation of air traffic control. *In Colloque de l'AAA*, 2005.
- [50] S. S. GE et Y. J. CUI : Dynamic motion planning for mobile robots using potential field methods. *Autonomous Robots*, 13:207–222, 2002.
- [51] R. GHOSH et C. TOMLIN : Maneuver design for multiple aircraft conflict resolution. *In American Control Conference*, numéro 6, pages 672–676 vol. 1, sep 2000.
- [52] W.R. GILKS, S.RICHARDSON et D.J. SPIEGELHALTER : *Markov chain Monte Carlo in practice*, chapitre Introducing Markov chain Monte Carlo, pages 1–19. London : Chapman & Hall, 1995.
- [53] Philip E. GILL, Walter MURRAY et Michael A. SAUNDERS : SNOPT : An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization. *SIAM Review*, 47:99–131, 2005.
- [54] W. GLOVER et J. LYGEROS : Simplified multi-aircraft models for conflict detection and resolution algorithms. Rapport technique, HYBRIDGE D1.4, sept. 2004.
- [55] P. W. GLYNN et D. L. IGLEHART : Importance sampling for stochastic simulations. *Management Science*, 35:1367–1392, 1989.
- [56] S. GUIBERT et L. GUICHARD : 4D Trajectory management through contract of objectives. *In Innovative Research Workshop & Exhibition*, 2010.
- [57] Inc. GUROBI OPTIMIZATION : Gurobi optimizer reference manual, 2012.
- [58] Stephen J. GUY, Ming C. LIN et Dinesh MANOCHA : Modeling collision avoidance behavior for virtual humans. *In 9th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pages 575–582, 2010.

- [59] W. K. HASTINGS : Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57:97–109, 1970.
- [60] D. V. HINKLEY : On the ratio of two correlated normal random variables. *Biometrika*, 56:635–639, 1969.
- [61] J. HU, M. PRANDINI et S. SASTRY : Optimal coordinated maneuvers for three dimensional aircraft conflict resolution. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25:888–900, 2002.
- [62] Jianghai HU, Maria PRANDINI et Shankar SASTRY : Aircraft conflict prediction in the presence of a spatially correlated wind field. *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, 6:326–340, 2005.
- [63] R. IRVINE : A geometrical approach to conflict probability estimation. *Air Traffic Control Quarterly*, 10:85 – 113, 2002.
- [64] R. IRVINE : Target miss distance to achieve a required probability of conflict. *In FAA/Eurocontrol R&D Seminar*, 2003.
- [65] R. IRVINE : Comparison of pair-wise priority-based resolution schemes through fast-time simulation. *In Innovative Research Workshop & Exhibition*, pages 37–45, 2009.
- [66] J. JENSEN : Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, 30(1):175–193, 1906.
- [67] O. KHATIB : Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *In Robotics and Automation. Proceedings. 1985 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 500–505, 1985.
- [68] B. KIRWAN et M. FLYNN : Identification of air traffic controller conflict resolution strategies for the cora project. *In ATM Seminar*, 2001.
- [69] G. KOLOMIVOS : *Résolution de grands problèmes stochastiques multi-étapes : application à un problème de dimensionnement de capacités et de gestion de flux et de stocks*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2007.
- [70] Jana KOSECKA, Claire TOMLIN, George PAPPAS et Shankar SASTRY : Generation of conflict resolution maneuvers for air traffic management. *In International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pages 1598–1603, 1997.
- [71] J.-C. LATOMBE : *Robot motion planning*. Kluwer international series in engineering and computer science : Robotics. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [72] A. LODI et J. T. LINDEROTH : Milp software. *Encyclopedia for Operations Research and Management Science*, Wiley, 2011.
- [73] John LYGEROS et Maria PRANDINI : Aircraft and weather models for probabilistic collision avoidance in air traffic control. *In IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas*, pages 2427–2432, 2002.
- [74] I. LYMPEROPOULOS : *Sequential Monte Carlo methods in air traffic management*. Thèse de doctorat, ETH Zürich, 2010.
- [75] I. LYMPEROPOULOS et J. LYGEROS : Sequential Monte Carlo methods for multi-aircraft trajectory prediction in air traffic management. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 24:830–849, octobre 2010.
- [76] KF MAN, KS TANG et S KWONG : Genetic algorithms : concepts and applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 43:519–534, 1996.
- [77] P. K. MENON, G. D. SWERIDUK et B. SRIDHAR : Optimal strategies for free flight air traffic conflict resolution. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 22:202–211, 1997.
- [78] N. METROPOLIS et S. ULAM : The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44:335–341, 1949.

- [79] A. MIELE, T. WANG, C. S. CHAO et J. B. DABNEY : Optimal control of a ship for collision avoidance maneuvers. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103:495–519, 1999.
- [80] P. MÜLLER, B. SANSÓ et M. DE IORIO : Optimal bayesian design by inhomogeneous Markov chain simulation. *Journal of the American Statistical Association*, 99:788–798, 2004.
- [81] W.P. NIEDRINGHAUS : Stream Option Manager (SOM) : Automated integration of aircraft separation, merging, stream management, and other air traffic control functions. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 25:1269–1280, 1995.
- [82] J. NOCEDAL et S.J. WRIGHT : *Numerical optimization*. Springer series in operations research. Springer, 2nd edition édition, 2006.
- [83] R. A. PAIELLI : Modeling maneuver dynamics in air traffic conflict resolution. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26:407–415, 2003.
- [84] L. PALLOTTINO, E.M. FERON et A. BICCHI : Conflict resolution problems for air traffic management systems solved with mixed integer programming. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 3:3 –11, 2002.
- [85] A. PAPOULIS : *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill Companies, 3rd édition, 1991.
- [86] J. PENG et S. AKELLA : Coordinating multiple robots with kinodynamic constraints along specified paths. *The International Journal of Robotics Research*, 24:295–310, 2005.
- [87] C. PEYRONNE, D. DELAHAYE et L. LAPASSET : Conflict-free trajectory optimization using b-splines and genetic algorithm. In *9th Innovative Research Workshop & Exhibition*, pages 213–218, 2010.
- [88] M. PRANDINI, J. HU, J. LYGEROS et S. SASTRY : A probabilistic approach to aircraft conflict detection. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 1:199 –220, 2000.
- [89] A. U. RAGHUNATHAN, V. GOPAL, D. SUBRAMANIAN, L. T. BIEGLER et T. Samad (0731-5090) vol. 27 no. 4 : Dynamic optimization strategies for three-dimensional conflict resolution of multiple aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(4):586–594, 2004.
- [90] A. V. RAO : A survey of numerical methods for optimal control a survey of numerical methods for optimal control. *Advances in the Astronautical Sciences*, 135, suppl. 1:487–528, 2009.
- [91] D. REY, C. RAPINE, R. FONDACCI et N.-E. EL FAOUZI : Potential air conflicts minimization through speed regulation. In *TRB 91st Annual Meeting Compendium of Papers*, 2012.
- [92] A. RICHARDS et J.P. HOW : Aircraft trajectory planning with collision avoidance using mixed integer linear programming. In *American Control Conference*, volume 3, pages 1936–1941, 2002.
- [93] G. P. ROUSSOS, G. CHALOULOS, K. J. KYRIAKOPOULOS et J. LYGEROS : Control of multiple non-holonomic air vehicles under wind uncertainty using model predictive control and decentralized navigation functions. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [94] R. Y. RUBINSTEIN : *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley & Sons, Inc., 1st édition, 1981.
- [95] A.P. RUSZCZYŃSKI et A. SHAPIRO : *Stochastic Programming*. Handbooks in operations research and management science. Elsevier, 2003.

- [96] T. SCHOUWENAARS : *Safe Trajectory Planning of Autonomous Vehicles*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, Department of Aeronautics and Astronautics, Cambridge MA, 2006.
- [97] T. SCHOUWENAARS, B. DEMOOR, E. FERON et J. HOW : Mixed integer programming for multi-vehicle path planning. *In European Control Conference*, pages 2603–2608, 2001.
- [98] T. SCHOUWENAARS, J. HOW et E. FERON : Decentralized cooperative trajectory planning of multiple aircraft with hard safety guarantees. *In AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, pages 2004–5141, 2004.
- [99] B. SCHWARTZ, S. BENJAMIN, S. GREEN et M. JARDIN : Accuracy of RUC-1 and RUC-2 wind and aircraft trajectory forecasts by comparison with ACARS observations. *Weather and Forecasting*, 15:316–326, 2000.
- [100] A. SHAPIRO : Monte carlo sampling methods. *In STOCHASTIC PROGRAMMING*, éditeur : A. Ruszczyński et A. Shapiro, volume 10 de *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 353 – 425. Elsevier, 2003.
- [101] R. SLATTERY et S. GREEN : Conflict-free trajectory planning for air traffic control automation. Rapport technique Technical Memorandum 108790, NASA, 1994.
- [102] R. M. Van SLYKE et Roger WETS : L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17:638–663, 1969.
- [103] E. TRÉLAT : *Contrôle optimal : théorie et applications*. Vuibert, 2008.
- [104] J. van den BERG, S. GUY, M. LIN et D. MANOCHA : Reciprocal n-body collision avoidance. *In C. PRADALIER, R. SIEGWART et G. HIRZINGER, éditeurs : Robotics Research*, volume 70 de *Springer Tracts in Advanced Robotics*, pages 3–19. Springer Berlin / Heidelberg, 2011.
- [105] A. VELA, S. SOLAK, W. SINGHOSE et J.-P. CLARKE : A mixed integer program for flight-level assignment and speed control for conflict resolution. *In Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, pages 5219–5226, 2009.
- [106] A.E. VELA, E. SALAUN, S. SOLAK, E. FERON, W. SINGHOSE et J.-P. CLARKE : A two-stage stochastic optimization model for air traffic conflict resolution under wind uncertainty. *In IEEE/AIAA Digital Avionics Systems Conference*, pages 2.E.5–1–2.E.5–13, 2009.
- [107] A.E. VELA, S. SOLAK, J.B. CLARKE, W.E. SINGHOSE, E.R. BARNES et E.L. JOHNSON : Near real-time fuel-optimal en route conflict resolution. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 11:826–837, 2010.
- [108] A. VISINTINI LECCHINI, W. GLOVER, J. LYGEROS et J. MACIEJOWSKI : Monte Carlo optimization for conflict resolution in air traffic control. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 7:470–482, 2006.
- [109] L. A. WOLSEY : *Integer Programming*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, 1998.
- [110] B. YU, S. H. KIM, T. BAILEY et R. GAMBOA : Curve-based representation of moving object trajectories. *In International Database Engineering and Applications Symposium (IDEAS '04)*, pages 419–425, 2004.
- [111] K. ZEGHAL : *Vers une théorie de la coordination d'actions, application à la navigation aérienne*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1994.

Modèles déterministes et stochastiques pour la résolution numérique du problème de maintien de séparation entre aéronefs

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la programmation mathématique appliquée à la séparation d'aéronefs stabilisés en altitude. L'objectif est le développement d'algorithmes de résolution de conflits aériens ; l'enjeu étant d'augmenter la capacité de l'espace aérien afin de diminuer les retards et d'autoriser un plus grand nombre d'aéronefs à suivre leur trajectoire optimale. En outre, du fait de l'imprécision des prédictions relatives à la météo ou à l'état des aéronefs, l'incertitude sur les données est une caractéristique importante du problème. La démarche suivie dans ce mémoire s'attache d'abord au problème déterministe dont l'étude est nettement plus simple. Pour cela, quatre modèles basés sur la programmation non linéaire et sur la programmation linéaire à variables mixtes sont développés en intégrant notamment un critère reflétant la consommation de carburant et la durée de vol. Leur comparaison sur un ensemble de scénarios de test met en évidence l'intérêt d'utiliser un modèle linéaire approché pour l'étude du problème avec incertitudes. Un champ de vent aléatoire, corrélé en temps et en espace, ainsi qu'une erreur gaussienne sur la mesure de la vitesse sont ensuite pris en compte. Dans un premier temps, le problème déterministe est adapté en ajoutant une marge sur la norme de séparation grâce au calcul d'une approximation des probabilités de conflits. Finalement, une formulation stochastique avec recours est développée. Ainsi, les erreurs aléatoires sont explicitement incluses dans le modèle afin de tenir compte de la possibilité d'ordonner des manœuvres de recours lorsque les erreurs observées engendrent de nouveaux conflits.

Mots-clés : programmation linéaire à variables mixtes, programmation non linéaire, optimisation stochastique, contrôle du trafic aérien, conflits aériens.

Deterministic and stochastic models for the numerical resolution of the aircraft separation problem

This thesis belongs to the field of mathematical programming, applied to the separation of aircraft stabilised on the same altitude. The primary objective is to develop algorithms for the resolution of air conflicts. The expected benefit of such algorithm is to increase the capacity of the airspace in order to reduce the number of late flights and let more aircraft follow their optimal trajectory. Moreover, meteorological forecast and trajectory predictions being inexact, the uncertainty on the data is an important issue. The approach that is followed focuses on the deterministic problem in the first place because it is much simpler. To do this, four nonlinear and mixed integer linear programming models, including a criterion based on fuel consumption and flight duration, are developed. Their comparison on a benchmark of scenarios shows the relevance of using an approximate linear model for the study of the problem with uncertainties. A random wind field, correlated in space and time, as well as speed measures with Gaussian errors are then taken into account. As a first step, the deterministic problem is adapted by computing a margin from an approximate calculation of conflict probabilities and by adding it to the reference separation distance. Finally, a stochastic formulation with recourse is developed. In this model, the random errors are explicitly included in order to consider the possibility of ordering recourse actions if the observed errors cause new conflicts.

Keywords : mixed integer programming, nonlinear programming, stochastic optimization, air traffic control, air conflicts.