



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

---

**Présentée et soutenue par :**

**Donatien CORNETTE**

le vendredi 24 octobre 2014

**Titre :**

Optimisation aéroélastique des pales d'hélicoptères

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED MEGeP : Génie mécanique, mécanique des matériaux

**Unité de recherche :**

Institut Clément Ader

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Yves GOURINAT (directeur de thèse)

M. Guilhem MICHON (co-directeur de thèse)

**Jury :**

M. Olivier BRÜLS Professeur, Université de Liège - Rapporteur

M. Guillaume PUEL Maître de conférence HDR, Ecole Centrale Paris - Rapporteur

M. Patrice CARTRAUD Professeur, Ecole Centrale Nantes - Examineur

M. Philippe DESTUYNDER Professeur, CNAM Paris - Examineur

M. Yves GOURINAT Professeur, ISAE-SUPAERO - Directeur de thèse

M. Guilhem MICHON Professeur, ISAE-SUPAERO - Co-directeur de thèse



## Résumé

Les charges dynamiques transmises par le rotor au fuselage, par les vibrations qu'elles génèrent, dégradent la durée de vie des composants et le confort des passagers. Une méthode prometteuse mais encore non exploitée par les hélicoptéristes consiste à introduire des couplages flexion-torsion au sein des pales de façon à modifier les efforts aérodynamiques instationnaires qui les sollicitent.

Cette thèse étudie l'apport des couplages aéroélastiques sur les charges dynamiques. Pour cela, un modèle aéroélastique de rotor isolé est développé. Le modèle élastique est basé sur l'association de la formulation par repère flottant à la méthode des modes prescrits. La base de déformation considérée est issue de modèles éléments-finis hautes précisions. Le comportement aérodynamique du rotor est décrit à partir d'un modèle de vitesse induite multi-harmonique ainsi qu'un modèle de portance basé sur la théorie de l'élément de pale.

Le modèle aéroélastique est validé par comparaison avec un logiciel de calcul aéromécanique (HOST) ainsi que par comparaison avec des résultats expérimentaux issus d'essais en vol. Dans un second temps, une étude de l'influence des paramètres de définition du rotor sur les charges dynamiques est réalisée.

Pour finir, des couplages flexion-torsion sont introduits sur la pale à partir de l'anisotropie des pales composites ou encore de masses non structurelles déportées par rapport au centre de torsion des sections. Une étude analytique de ces couplages est réalisée, puis le modèle aéroélastique complet est utilisé pour évaluer leur apport sur les charges dynamiques transmises par le rotor. Des réductions significatives sont observées, démontrant ainsi le potentiel de cette technique et ouvrant la voie à des études expérimentales.

**Mots-clés :** Aéroélasticité, charges dynamiques, couplages battement-torsion, vibrations.

## Abstract

Vibrations generated by dynamic loads transmitted from rotor to fuselage degrade components' life and passenger comfort. A promising method not yet exploited in helicopters is introducing flexural-torsional couplings on the blade to correct unsteady aerodynamic forces.

To assess this method, an isolated rotor aeroelastic model is elaborated. The elastic model combines the floating frame approach with the prescribed mode method. The modal basis stems from high precision finite element models. The rotor's aerodynamic behaviour is described using a multi-harmonic induced velocity model and the blade element method. The aeroelastic model is validated first through comparison with software aeromechanics calculation (HOST) and experimental results from flight tests and second through a study of the influence of aerodynamic parameters on rotor dynamic loads.

Finally, bending-torsion couplings are made on the blade by introducing anisotropy of the composite blades or non-structural mass offset relative to the sections centre of torsion. An analytical study of these couplings is performed, followed by a full aeroelastic modelling to evaluate their contribution to dynamic loads transmitted by the rotor. Significant reductions are observed, demonstrating the potential of this technique and paving the way for experimental studies.

**Keywords :** Aeroelasticity, dynamic loads, bending-torsion couplings, vibrations.

---

## Remerciements

Cette thèse est le résultat d'une collaboration entre le département Mécanique des Structures et Matériaux de l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace et Airbus Helicopters au travers d'une convention CIFRE subventionnée par l'ANRT.

Mes premiers remerciements vont aux Professeurs Yves Gourinat et Guilhem Michon, qui ont dirigé cette thèse, pour leur confiance, leurs conseils et leur encadrement de qualité. Je remercie sincèrement M. Benjamin Kerdreux, Ingénieur au Service Vibrations d'Eurocopter, pour son encadrement, sa grande clairvoyance et sa bienveillance à mon égard tout au long des travaux. Je remercie vivement le Professeur Olivier Brüls de l'Université de Liège et le Professeur Guillaume Puel de l'Ecole Centrale de Paris, d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. J'adresse également mes remerciements au Professeur Philippe Destuynder du Conservatoire National des Arts et Métiers qui a aimablement accepté de présider le Jury de thèse, et au Professeur Patrice Cartraud de l'Ecole Centrale de Nantes de me faire l'honneur de participer au Jury.

Je tiens à remercier M. Franck Marrot pour son accueil et la confiance qu'il m'a accordée au sein du Service Vibrations et Bruit Interne d'Airbus Helicopters. Je remercie Yan et Paul, pour leur expertise et l'ensemble des réponses qu'il m'ont apportées. Merci également à Jérémy, pour son grand souci de limiter l'évolution de ma surcharge pondérale. Merci à Anne-Claire, Jonathan, Lucas, Hugo, Thibaut, Rémi et Victor pour leurs bonnes humeurs, leurs phobies administratives, leurs "fact checking abilities", leur passions pour les modèles de vitesses induites et leur ville d'origine. Mes remerciements vont également à l'ensemble de mes collègues du service Vibration et Bruit Interne, qui ont contribué à faire de ces années de thèse un moment agréable dans une atmosphère conviviale (cf. boquette).

Je remercie également les doctorants de l'ISAE, Teddy, Loïc et autres loubards, pour les bons moments passés sur Toulouse.

Mes derniers remerciements vont à ma maman et à Edith pour leur amour.



---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>I Contexte et problématique</b>	<b>9</b>
<b>1 Le rotor principal</b>	<b>11</b>
1 Aérodynamique du rotor . . . . .	12
1.1 Principe de sustentation des rotors . . . . .	12
1.2 Aérodynamique des profils . . . . .	14
1.3 Le vol d'avancement . . . . .	15
2 Mécanique du rotor . . . . .	16
2.1 Comportement cinématique des rotors . . . . .	16
2.2 Etude du battement . . . . .	19
2.3 Etude de la traînée . . . . .	24
3 Instabilités du rotor . . . . .	26
3.1 Instabilités aéroélastiques . . . . .	26
3.2 Couplages rotor/structure . . . . .	30
<b>2 Les charges dynamiques et leur maîtrise</b>	<b>33</b>
1 Origines et transmission des charges dynamiques . . . . .	34
1.1 Aérodynamique instationnaire . . . . .	34
1.2 Torseur tête rotor . . . . .	37
2 Systèmes de réduction des charges dynamiques . . . . .	41
2.1 Contrôle passif du rotor . . . . .	41
2.2 Contrôle actif du rotor . . . . .	42
3 Dimensionnement aéroélastique du rotor . . . . .	44
3.1 Adaptation dynamique de la pale . . . . .	44
3.2 Optimisation structurelle . . . . .	46
3.3 Couplages aéroélastiques . . . . .	47

<b>II</b>	<b>Modélisation aéroélastique du rotor</b>	<b>53</b>
<b>3</b>	<b>Modélisation élastique de la pale</b>	<b>55</b>
1	Généralités . . . . .	56
1.1	Modèles de poutre . . . . .	56
1.2	Méthodes éléments-finis . . . . .	57
2	Méthode des modes prescrits ( <i>Assumed mode method</i> ) . . . . .	59
2.1	Principe . . . . .	59
2.2	Formulation énergétique . . . . .	60
2.3	Projection sur la base de déformation . . . . .	61
2.4	Système matriciel . . . . .	62
3	Méthodes multicorps flexibles . . . . .	64
3.1	Etat de l'art . . . . .	64
3.2	Méthode des segments finis ( <i>Finite segment method</i> ) . . . . .	65
3.3	Théorie de l'élastodynamique linéaire . . . . .	66
3.4	Formulation par repère flottant ( <i>Floating frame of reference formulation</i> ) . . . . .	66
3.5	Éléments-finis non linéaires . . . . .	67
3.6	Choix d'une méthode . . . . .	68
4	Formulation par repère flottant . . . . .	68
4.1	Introduction . . . . .	68
4.2	Description cinématique de la pale . . . . .	69
4.3	Formulation énergétique . . . . .	72
4.4	Méthode de Lagrange . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Modélisation aérodynamique du rotor</b>	<b>77</b>
1	Flux induit : état de l'art . . . . .	78
1.1	Généralités . . . . .	78
1.2	Modèles de vitesses induites statiques . . . . .	78
1.3	Modèles de vitesses induites dynamiques . . . . .	79
1.4	Modèles de sillage . . . . .	81
1.5	Choix du modèle de flux induit . . . . .	82
2	Finite State Unsteady Wake model (FiSUW) . . . . .	83
2.1	Introduction . . . . .	83
2.2	Equations et hypothèses . . . . .	84
2.3	Résolution analytique de l'équation au Laplacien . . . . .	85
2.4	Equations différentielles de vitesse induite . . . . .	86
2.5	Bilan . . . . .	86
3	Théorie de l'élément de pale . . . . .	87
3.1	Généralités . . . . .	87
3.2	Actions mécaniques exercées sur le profil . . . . .	87
3.3	Tangage dynamique du profil . . . . .	88
3.4	Coefficients aérodynamiques tabulés . . . . .	89
4	Théorie de Theodorsen . . . . .	90

4.1	Généralités . . . . .	90
4.2	Fréquence réduite . . . . .	90
4.3	Modèle de portance . . . . .	91
4.4	Coefficient de déficience de portance . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Détermination de la réponse dynamique, des charges et de la stabilité du rotor</b>	<b>93</b>
1	Réponse dynamique du rotor . . . . .	94
1.1	Régime forcé . . . . .	94
1.2	Régime libre . . . . .	94
2	Equilibre de l'hélicoptère . . . . .	95
2.1	Dynamique du vol . . . . .	95
2.2	Algorithme de résolution . . . . .	96
3	Calcul des charges dynamiques . . . . .	99
3.1	Intégration des efforts aérodynamiques et inertiels . . . . .	99
3.2	Méthode modale . . . . .	99
3.3	Torseur tête rotor . . . . .	102
4	Etude de la stabilité aéroélastique du rotor . . . . .	102
4.1	Système linéaire tangent . . . . .	102
4.2	Développement en repère tournant . . . . .	102
4.3	Développement en repère fixe . . . . .	103
4.4	Calcul des valeurs et vecteurs propres . . . . .	105
<b>III</b>	<b>Etudes et simulations</b>	<b>107</b>
<b>6</b>	<b>Validation et études de sensibilité</b>	<b>109</b>
1	Validation . . . . .	110
1.1	Dynamique du rotor : comparaison avec <i>HOST</i> . . . . .	110
1.2	Base de déformation couplée : comparaison avec <i>MODPAL</i> . . . . .	114
1.3	Torseur tête rotor : comparaison avec l'identification expérimentale . . . . .	115
2	Influence des paramètres aérodynamiques du rotor . . . . .	120
2.1	Vrillage . . . . .	120
2.2	Corde . . . . .	122
2.3	Régime rotor . . . . .	126
2.4	Bilan . . . . .	129
3	Influence des paramètres d'adaptation dynamique . . . . .	130
3.1	Sensibilité des fréquences propres . . . . .	130
3.2	Influence du placement fréquentiel sur les charges dynamiques . . . . .	131
3.3	Bilan . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Couplages aéroélastiques</b>	<b>133</b>
1	Etude théorique des couplages aéroélastiques . . . . .	134
1.1	Système différentiel linéaire . . . . .	134

1.2	Etude analytique . . . . .	137
1.3	Synthèse . . . . .	143
2	Masse non structurale déportée . . . . .	147
2.1	Identification des modes prépondérants . . . . .	148
2.2	Balayage en envergure et en corde d'une masse non structurale . . . . .	151
2.3	Masse non structurale à 0.7R . . . . .	153
3	Raideur de battement-torsion . . . . .	158
3.1	Intensité du couplage élastique . . . . .	158
3.2	Couplage optimal entre le 2 <sup>ème</sup> mode de battement et le 1 <sup>er</sup> de torsion . . . . .	160
3.3	Couplage optimal entre le 3 <sup>ème</sup> mode de battement et le 1 <sup>er</sup> de torsion . . . . .	164
3.4	Etude paramétrique d'une combinaison de couplage élastique . . . . .	167
4	Couplages aéroélastiques : bilan . . . . .	171
<b>Conclusion</b>		<b>173</b>
<b>A La théorie de Floquet</b>		<b>177</b>
1	Matrice de monodromie . . . . .	177
1.1	Définitions & propriétés . . . . .	177
1.2	Calcul numérique de la matrice de monodromie . . . . .	178
2	Etude des valeurs propres . . . . .	179
2.1	Matrices des valeurs et vecteurs propres . . . . .	179
2.2	Détermination de la fréquence propre principale . . . . .	180
2.3	Analyse de la stabilité . . . . .	181
3	Réponse des systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques . . . . .	183
3.1	Résolution des systèmes à coefficients périodiques . . . . .	183
3.2	Réponse forcée d'un système à coefficients périodiques . . . . .	184
<b>B Compléments sur HOST</b>		<b>187</b>
1	Pale Rigide . . . . .	187
2	Pale Souple . . . . .	188
<b>C Compléments sur FiSUW</b>		<b>191</b>
<b>D Compléments sur la masse ponctuelle déportée</b>		<b>193</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>197</b>

---

# Table des figures

1	Repère hélicoptère . . . . .	4
2	Les débuts de la voilure tournante . . . . .	5
1.1	Disque sustentateur . . . . .	12
1.2	Profils aérodynamiques . . . . .	14
1.3	Aérodynamique du rotor en vol d'avancement . . . . .	15
1.4	Représentation simplifiée d'un rotor articulé . . . . .	16
1.5	Moyeu rotor et système de commande de pas de deux types différents . . . . .	17
1.6	Scénarios de Vol . . . . .	17
1.7	Sollicitations suivant les différents axes de la pale . . . . .	18
1.8	Les différentes architectures de rotor principal . . . . .	19
1.9	Liaison pas-battement . . . . .	21
1.10	Incidence et orientation du profil dans l'écoulement . . . . .	22
1.11	Adaptateurs de trainée . . . . .	25
1.12	Modèle 2ddl de profil en mouvement combiné pas-battement . . . . .	27
1.13	Couplage & déphasage entre battement et pas . . . . .	29
1.14	Diagramme de Campbell . . . . .	29
1.15	Résonance sol . . . . .	30
2.1	Cartographies d'incidence, de Mach et de flux induit sur le disque rotor en vol d'avancement . . . . .	35
2.2	Interactions pales-tourbillons pour deux types de pales . . . . .	36
2.3	Spectre du moment de flexion . . . . .	37
2.4	Le torseur tête rotor et ses conséquences vibratoires . . . . .	40
2.5	Antivibreux à pendules verticaux . . . . .	41
2.6	Dispositifs antivibratoires coplanaires . . . . .	42
2.7	Volets actifs de bord de fuite . . . . .	43
2.8	Placement fréquentiel des modes de pale . . . . .	44
2.9	Structure d'une section de pale . . . . .	45
2.10	Couplages élastiques obtenus suivant l'orientation des plis . . . . .	48
2.11	Programme expérimental <i>BERP IV</i> . . . . .	51
3.1	Géométrie d'une pale d'hélicoptère . . . . .	56
3.2	Maillage éléments-finis 1D d'une pale . . . . .	57
3.3	Déformées modales découplées d'une pale droite classique . . . . .	58
3.4	Déformées modales couplées d'une pale de nouvelle génération calculé à partir de Beam Advanced Model (BAM) . . . . .	59
3.5	Description cinématique de différentes méthodes multicorps . . . . .	67

3.6	Schéma de principe du modèle élastique de pale . . . . .	69
3.7	Description cinématique de la pale et des différents repères . . . . .	70
3.8	Position des points caractéristiques et orientation des sections une fois la pale déformée . . . . .	71
4.1	Modèles de sillage . . . . .	82
4.2	Actions mécaniques exercées par l'air sur un profil . . . . .	88
4.3	Amplitude et phase du coefficient de déficience de portance en fonction de la fréquence réduite . . . . .	92
5.1	Enveloppe décrite par la pale au cours de son mouvement dans le cas d'un battement collectif pur, d'un battement cyclique longitudinal pur et d'un battement ciseaux longitudinal pur . . . . .	95
5.2	Equilibre de l'hélicoptère . . . . .	96
5.3	Algorithme de résolution de l'équilibre du rotor isolé . . . . .	98
6.1	Cartographies aérodynamiques issues de <i>FLFR</i> . . . . .	111
6.2	Déformée en battement, trainée et torsion en bout de pale en fonction de l'azimuth . . . . .	112
6.3	Angles à l'articulation et participations des modes de déformations (équivalent à la déformée en bout de pale provenant du mode correspondant) en fonction de l'azimuth . . . . .	113
6.4	Comparaison des déformées modales issues de <i>MODPAL</i> avec celles recouplées à partir de la méthode des modes prescrits <i>AMM</i> . . . . .	116
6.5	Comparaison des différentes composantes des torseurs tête rotor calculé et identifié expérimentalement en fonction de la vitesse d'avancement . . . . .	118
6.6	Lois de vrillage . . . . .	120
6.7	Composantes collectives et cycliques des angles de pas, battement et trainée . . . . .	121
6.8	Cartographies aérodynamiques d'incidence [°] et de vitesse induite [m/s] . . . . .	121
6.9	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor . . . . .	122
6.10	Composantes collectives et cycliques des angles de pas, battement et trainée . . . . .	123
6.11	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la corde moyenne aérodynamique . . . . .	123
6.12	Simple effilement . . . . .	124
6.13	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor . . . . .	125
6.14	Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction de l'effilement . . . . .	125
6.15	Double effilement . . . . .	126
6.16	Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction du double effilement . . . . .	126
6.17	Composantes collectives et cycliques des angles de pas, de battement et de trainée en fonction du régime rotor . . . . .	127
6.18	Cartographies aérodynamiques d'incidence [°] . . . . .	127
6.19	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du régime de rotation . . . . .	128
6.20	Efforts exercés par une pale sur le moyeu en fonction du régime rotor . . . . .	128

6.21	Réponses dynamiques des deuxième et troisième modes de battement et du deuxième mode de trainée en fonction du régime rotor . . . . .	129
6.22	Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction des fréquences propres des modes de battement dans le vide . . . . .	132
6.23	Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction de la fréquence propre du deuxième mode de trainée dans le vide . . . . .	132
7.1	Diagrammes de Campbell en fréquence et amortissement en fonction de la déformée de torsion couplée, pour différents modes de battement ciblés . . . . .	146
7.2	Parties réelle et imaginaire de la réponse dynamique de la pale en battement pour les harmoniques 4, 5 et 6 . . . . .	149
7.3	Diagrammes des participations modales de battement (équivalent à la contribution de chaque mode à la déformée dynamique verticale en bout de pale) . . . . .	150
7.4	Efforts tranchants . . . . .	150
7.5	Positionnement en corde et rayon de la masse . . . . .	151
7.6	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 4kg . . . . .	151
7.7	Evolution des efforts verticaux transmis en pied de pale en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 4kg . . . . .	152
7.8	Evolution des caractéristiques dynamiques du troisième mode de battement en l'absence de déport de la masse non structurale ( $y_m = 0$ ) . . . . .	153
7.9	Déformées des modes de battement dans le vide pour $r_m = 0.7R$ et $\omega_{\theta_1} = 5.75\Omega$ . . . . .	154
7.10	Diagrammes de Campbell . . . . .	155
7.11	Evolution des composantes du torseur tête rotor et des efforts à l'articulation en fonction de la fréquence propre du premier mode de torsion et du positionnement en corde de la masse de 4kg, normalisées par rapport au cas d'une masse non déportée et d'une fréquence de torsion de $5.75\Omega$ . . . . .	156
7.12	Diagramme des efforts tranchants en $5\Omega$ . . . . .	156
7.13	Evaluation numérique des caractéristiques de rigidité d'une section de poutre sandwich en fonction de l'orientation du pli médian - Valeurs normalisées par rapport à la raideur en torsion de référence $[0v/45c/45c]$ . . . . .	158
7.14	Positionnement des tronçons . . . . .	159
7.15	Evolution du coefficient de couplage élastique $k_{\beta\theta}$ en fonction de la position radiale des différents tronçons . . . . .	159
7.16	Courbures des modes de battement et du premier mode de torsion . . . . .	160
7.17	Déformées des modes de battement dans le vide pour une fréquence propre du 1 <sup>er</sup> mode de torsion de $5.75\Omega$ . . . . .	161
7.18	Diagrammes de Campbell dans l'air en fonction de la fréquence propre du 1 <sup>er</sup> mode de torsion . . . . .	162
7.19	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor et des charges dynamiques verticales en repère tournant . . . . .	163

7.20	Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction de la fréquence propre du 1 <sup>er</sup> mode de torsion, pour trois amplitudes différentes de couplage élastique . . . . .	163
7.21	Efforts tranchants exercés par les 2 <sup>ème</sup> , 3 <sup>ème</sup> et 4 <sup>ème</sup> modes de battement respectivement en $4\Omega$ , $5\Omega$ et $6\Omega$ . . . . .	164
7.22	Déformées des modes de battement dans le vide pour une fréquence propre du 1 <sup>er</sup> mode de torsion de $5.75\Omega$ . . . . .	165
7.23	Diagrammes de Campbell dans l'air en fonction de la fréquence propre du 1 <sup>er</sup> mode de torsion . . . . .	166
7.24	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor . . . . .	167
7.25	Diagrammes des efforts tranchants en $4\Omega$ et $5\Omega$ pour différentes amplitudes de couplages élastiques et de fréquence propre du 1 <sup>er</sup> mode de torsion . . . . .	168
7.26	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la répartition de raideur de battement-torsion pour deux fréquence propres de torsion différentes . . . . .	169
A.1	$C_{rjn}$ pour j : Battement 2 . . . . .	182
A.2	Frontière de stabilité d'un mode de battement non amorti . . . . .	183
A.3	Participations modales harmoniques normées par mode . . . . .	185
B.1	Modèle générique de segments finis . . . . .	187
D.1	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 1kg . . . . .	193
D.2	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 2kg . . . . .	194
D.3	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 4kg . . . . .	195
D.4	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la position radiale de la masse ponctuelle pour trois valeurs distinctes de déport . . .	195
D.5	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la position radiale de la masse ponctuelle de 1kg pour trois valeurs distinctes de déport	196
D.6	Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la position radiale de la masse ponctuelle de 4kg pour trois valeurs distinctes de déport	196

---

# Liste des tableaux

2.1	Origine et transmission des charges dynamiques . . . . .	40
3.1	Comparaison des différentes méthodes multicorps en vue d'une application au modèle aéroélastique de rotor isolé d'hélicoptère . . . . .	68
4.1	Coefficients longitudinal et latéral issus des modèles de vitesse induite statique à répartition radiale linéaire et répartition azimuthale monoharmonique . . . . .	79
4.2	Coefficient de déficience de portance associés aux trois premiers modes de battement et au premier mode de torsion pour une pale de Super Puma . . . . .	92
6.1	Paramètres du cas test de comparaison . . . . .	110
6.2	Amplitude des coefficients issus de la décomposition de Fourier des efforts exercés par une pale au niveau de l'articulation [daN] . . . . .	113
6.3	Fréquences propres des modes collectifs, cycliques régressifs et cycliques progressifs du système linéarisé . . . . .	114
6.4	Amortissements réduits des modes collectifs, cycliques régressifs et cycliques progressifs du système linéarisé . . . . .	114
6.5	Comparaison des fréquences propres et amortissement réduits issus de <i>GAHEL</i> , <i>MODPAL</i> et de la méthode des modes prescrits <i>AMM</i> . . . . .	115
6.6	Influence de la distribution de raideur sur les fréquences propres dans le vide . . .	130
6.7	Influence de la distribution de masse sur les fréquences propres dans le vide . . .	131
7.1	Raideurs aérodynamiques de battement-torsion normalisée par rapport à la raideur généralisée du mode de battement initial pour une pale classique [%] . . . . .	144
7.2	Termes d'amortissement aérodynamique de battement-battement normalisés de façon à correspondre à des amortissements réduits équivalents . . . . .	145
7.3	Fréquences propres de la pale . . . . .	148
7.4	Amplifications dynamiques des modes pour les harmoniques 4, 5 et 6 . . . . .	148
7.5	Efforts tranchants modaux . . . . .	150
7.6	Gains issus de la masse non structurale suivant la configuration . . . . .	157
7.7	Configurations de couplages élastiques favorables pour la réduction de l'effort de pompage en repère fixe . . . . .	170
7.8	Configurations de couplages élastiques favorables pour la réduction des moments coplanaires en repère fixe . . . . .	170
A.1	Comparaison des fréquences propres obtenues par la théorie de Floquet et par les méthodes standard . . . . .	181



## Nomenclature et conventions

### Chapitre 1

$A$	Air du disque rotor	$i$	Incidence
$C_x$	Coefficient aérodynamique de traînée	$k$	Liaison pas-battement
$C_m$	Coefficient aérodynamique de moment	$\dot{m}$	Débit massique de fluide à travers le rotor
$C_z$	Coefficient aérodynamique de portance	$p_{dyn}$	Pression dynamique exercée par le fluide
$C_{z\alpha}$	Pente du coefficient de portance	$p_{0,1,2}$	Pression autour du disque rotor
$C_\delta$	Amortissement angulaire de traînée	$r$	Position en envergure
$I_p$	Inertie de la pale	$y_G$	Déport du centre de gravité
$I_\theta$	Inertie polaire de section	$y_{FA}$	Déport du foyer aérodynamique
$K_\beta$	Raideur angulaire de battement	$\Omega$	Vitesse de rotation du rotor
$K_\delta$	Raideur angulaire de traînée	$\alpha$	Angle d'écoulement
$\underline{M}$	Moment des actions mécaniques	$\alpha_\beta$	Amortissement réduit de battement
$M_s$	Moment statique de la pale	$\beta$	Angle de battement
$R$	Rayon du rotor	$\delta$	Angle de traînée
$T$	Poussée du rotor	$\underline{\delta}$	Moment dynamique
$U$	Vitesse de l'écoulement	$\theta$	Angle de pas
$V_a$	Vitesse d'avancement de l'hélicoptère	$\theta_v$	Vrillage de la pale
$V_h$	Vitesse verticale de l'hélicoptère	$\mu$	Ratio d'avancement $V_a/R\Omega$
$V_i$	Vitesse induite	$\rho$	Masse volumique de l'air
$V_P$	Vitesse perpendiculaire au profil	$\phi$	Angle d'écoulement
$V_T$	Vitesse tangentielle de l'écoulement	$\phi_\delta$	Angle de perte de l'adaptateur de traînée
$V_\infty$	Vitesse amont de l'hélicoptère	$\psi$	Azimuth de la pale
$c$	Corde	$\omega_\beta$	Fréquence propre de battement
$e$	Excentricité	$\omega_\delta$	Fréquence propre de traînée

## Chapitre 2

$\{\mathcal{D}\}$ Torseur dynamique	$\hat{F}$ Résultante du torseur tête rotor
$\{\mathcal{T}\}$ Torseur des actions mécaniques	$GJ$ Raideur en torsion de la section
$EI_B$ Raideur de battement de la section	$K_{z\theta}$ Raideur de battement-torsion
$EI_T$ Raideur de trainée de la section	$K_{y\theta}$ Raideur de trainée-torsion
$ES$ Raideur de traction de la section	$K_{u\theta}$ Raideur de traction-torsion
$F_x$ Effort radial exercé par une pale	$\hat{M}$ Moment du torseur tête rotor
$F_y$ Effort orthoradial exercé par une pale	$b$ Nombre de pales
$F_z$ Effort vertical exercé par une pale	

## Chapitre 3

$A$ Centre de l'articulation	$y_T, z_T$ Position du centre de torsion de la section
$E_c$ Energie cinétique	$y_G, z_G$ Position du centre de gravité de la section
$E_d$ Energie de dissipation	$y_M, z_M$ Position d'un point au sein de la section
$E_p$ Energie potentielle	$q$ Participation modale du mode couplé
$F_C$ Force centrifuge	$q_{\beta,\delta,\theta}$ Participations modales de battement, trainée, torsion
$G$ Centre de gravité d'une section de la pale	$\phi_{\beta,\delta,\theta}$ Déformées modales de battement, trainée, torsion
$\mathcal{J}_{\beta,\delta}$ Invariant de battement, trainée	$\theta_x$ Angle de torsion de la section
$O$ Centre tête rotor	$\mu_{\beta,\delta,\theta}$ Masses modale de battement, trainée, torsion
$k_p$ Rayon de giration	$\mu_i$ Masse modale du mode couplé
$k_i$ Raideur modale	$\omega_{\beta,\delta,\theta}$ Fréquence propre de battement, trainée, torsion
$m_L$ Masse linéique de la pale	$\omega_i$ Fréquence propre du mode couplé
$m_\beta$ Moment statique de battement, trainée	
$r_{att}$ Rayon d'attache adaptateur	
$u_y$ Déplacement orthoradial de la section	
$u_z$ Déplacement vertical de la section	

## Chapitre 4

$C(k)$ Coefficient de déficience de portance	$v$ Vitesse d'une particule de fluide
$C_T$ Coefficient de portance	$\chi$ Angle de déflexion du sillage
$C_{M_x}$ Coefficient de moment de roulis	$\mu$ Ratio d'avancement
$C_{M_y}$ Coefficient de moment de tangage	$\mu_f$ Viscosité du fluide
$K_c$ Coefficient longitudinal de vitesse induite	$\lambda$ Ratio de flux induit
$K_s$ Coefficient latéral de vitesse induite	$\phi$ Potentiel d'accélération
$\underline{D}$ Tenseur des taux de déformation	$\phi^A$ Part circulaire du potentiel
$M_x$ Moment de roulis du rotor	$\phi^V$ Part non circulaire du potentiel
$M_y$ Moment de tangage du rotor	$v, \eta, \psi$ Coordonnées ellipsoïdaux
$V_{i0}$ Vitesse induite moyenne en stationnaire	$\underline{\underline{\sigma}}$ Tenseur des contraintes
$T$ Portance du rotor	$\alpha_j^r, \beta_j^r$ Coefficients de vitesse induite
$\underline{f}_d$ Forces volumiques externes	$\underline{\underline{\sigma}}$ Tenseur des contraintes
$k$ Fréquence réduite	$\underline{\underline{\tau}}_n^{m,c,s}$ Efforts généralisés de flux induit
$p$ Pression du fluide	

## Chapitre 5

$\underline{\Gamma}_M$ Accélération d'un point $M$ de la pale	$T_y^{\delta_j}$ Effort tranchant modal du $j^{\text{ème}}$ mode de trainée
$T_x$ Effort tranchant radial exercé par une pale sur le moyeu	$T_z$ Effort tranchant vertical exercé par une pale sur le moyeu
$T_y$ Effort tranchant horizontal exercé par une pale sur le moyeu	$T_z^{\beta_k}$ Effort tranchant modal du $k^{\text{ème}}$ mode de battement

## Chapitre 6

$R_p$ Rayon de début de partie profilée	$k_c$ Coefficient de pondération de corde
$R_{0.8}$ Rayon à $r = 0.8R$	$\Omega_N$ Régime nominal du rotor
$c_{\text{Aéro}}$ Corde moyenne aérodynamique	

## Chapitre 7

$\hat{()}$	Variable après couplage structural	$\mu_{\beta\theta}$	Terme de couplage inertiel
$\bar{()}$	Variable après couplage aérodynamique et structural	$k_{\beta\theta}$	Terme de couplage élastique et centrifuge
$\tilde{()}$	Variable après couplage aérodynamique et structural	$\lambda$	Valeur propre
$A_i^{n\Omega}$	Amplification dynamique du mode $i$ pour le $n^{\text{ième}}$ harmonique	$\sigma$	Partie réelle de la valeur propre
$m$	Masse de la masse non structurale	$\kappa$	Coefficient aérodynamique
$r_m$	Position en envergure de la masse non structurale	$\beta_I$	Mode de battement ciblé par le couplage
$y_{3c/4}$	Position en corde du point au trois-quarts de corde	$\beta_j$	Mode de battement non ciblé par le couplage
$y_m$	Position en corde de la masse non structurale	$\theta_K$	Mode de torsion ciblé par le couplage
		$\hat{W}_B$	Composante de battement du mode de torsion couplé
		$\hat{\tau}_B$	Composante de torsion du mode de battement couplé

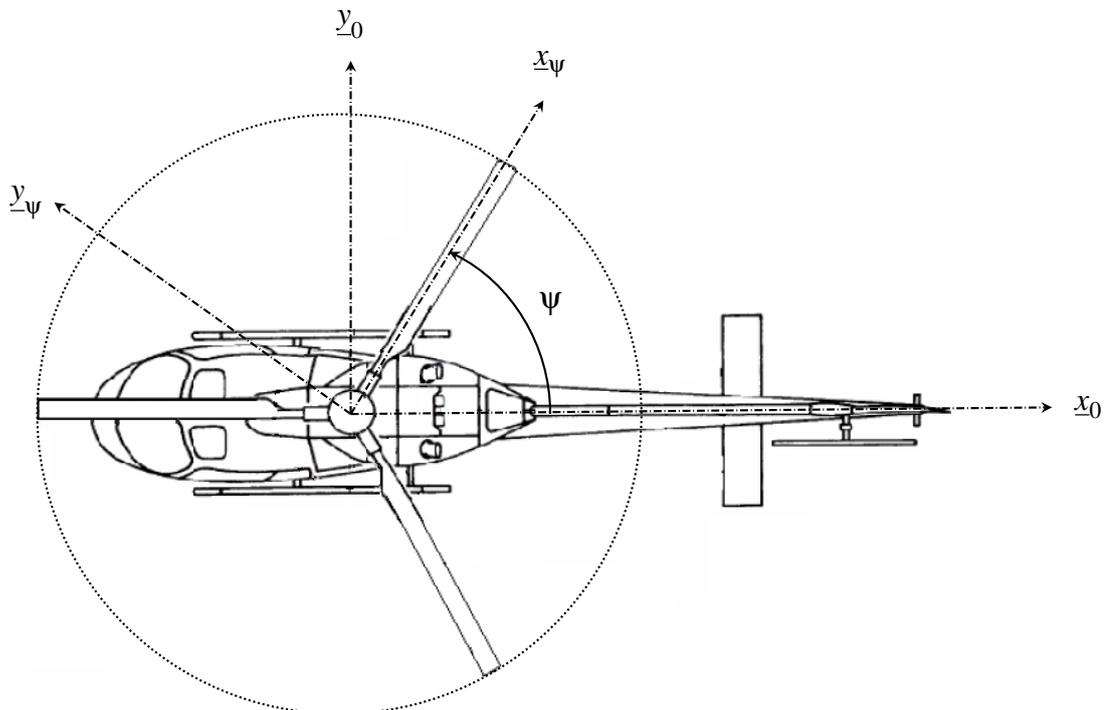


FIGURE 1: Repère hélicoptère

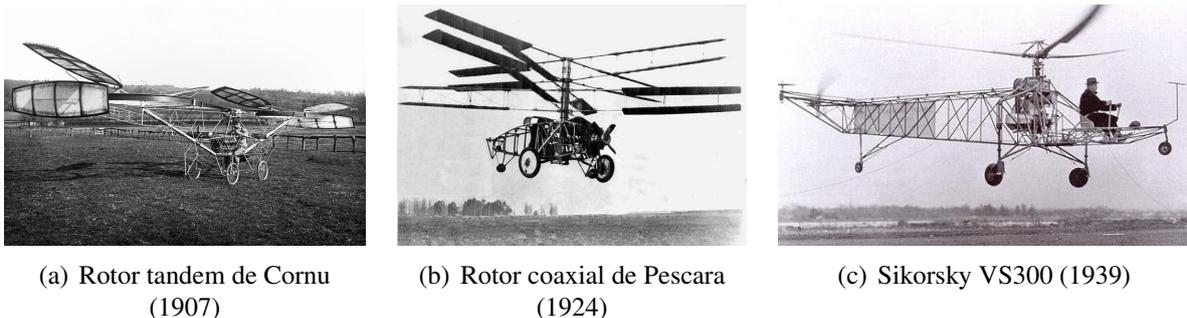
---

# Introduction

## Introduction générale

La sustentation de l'hélicoptère est assurée grâce à sa voilure animée d'un mouvement circulaire. Un écoulement se crée autour des profils aérodynamiques la composant, générant ainsi une poussée venant s'opposer à l'action mécanique de la gravité. Cette voilure tournante, appelée rotor, permet à l'hélicoptère de se diriger dans l'espace avec ou sans vitesse relative par rapport à l'air, le différenciant ainsi des aéronefs classiques à voilures fixes dont la sustentation n'est assurée qu'en présence d'une vitesse d'avancement. Cette aptitude au vol stationnaire lui a permis de se voir attribuer de nombreuses missions allant du secours à l'évacuation sanitaire en passant par la recherche ou le transport de personne. L'hélicoptère est aujourd'hui devenu un appareil indispensable pour de nombreux secteurs d'activité.

Avant d'acquiescer sa configuration actuelle, cet appareil a fait l'objet de nombreux développements. La problématique liée au couple de réaction généré par le rotor incita les inventeurs à considérer dans un premier temps des architectures composées de deux rotors contrarotatifs, Fig.2.a et Fig.2.b. Puis, Sikorsky proposa une architecture plus simple, composée d'un unique rotor principal et d'un rotor anticouple dont la poussée équilibre l'appareil en moment suivant l'axe de lacet, Fig.2.c. Celle-ci fait aujourd'hui office de consensus et est adoptée par la plupart des constructeurs.



**FIGURE 2:** Les débuts de la voilure tournante

Parallèlement à la recherche de cette configuration optimale, le rotor fut l'objet de nombreux développements techniques. Les difficultés liées à son contrôle nécessitèrent la conception d'organes de commandes spécifiques pour permettre au pilote de contrôler et orienter la portance. D'autre part, le caractère dissymétrique du vol d'avancement et les charges alternées qui en résultent furent au cœur des préoccupations initiales. Juan de la Cierva fut l'un des premiers à introduire des articulations en pied de pale, de façon à annuler les moments, et améliorer ainsi la

maniabilité de la machine et la durée de vie des pales.

Suite à cette première phase de mise au point architecturale, les ingénieurs ont continuellement cherché à optimiser les rotors. L'amélioration des profils aérodynamiques et des lois de vrillage a permis d'augmenter les performances aérodynamiques du rotor tandis que l'utilisation des matériaux composites a rendu possible l'augmentation de la durée de vie des pales ainsi que leur allègement. La baisse de rigidité inhérente à ce gain de masse favorisa l'émergence des problématiques liées à l'aéroélasticité du rotor. Les instabilités aéroélastiques ainsi que la maîtrise des charges dynamiques transmises par le rotor apparurent alors comme des sujets essentiels.

Ces charges dynamiques sont indissociables des voilures tournantes. Le chargement aérodynamique issu du caractère disymétrique du vol d'avancement et de la commande de pas cyclique, se traduit à l'articulation, par des efforts aérodynamiques et inertiels de fréquences multiples du régime de rotation (harmoniques). Lorsque la contribution de l'ensemble des pales est prise en compte, la géométrie axisymétrique du rotor associée au caractère périodique de ces charges dynamiques permet un filtrage de la plupart des harmoniques. Malgré tout, les composantes dont les fréquences sont multiples du nombre de pales et du régime de rotation ne s'annulent pas et sont à l'origine de vibrations nuisant au confort des passagers et à la durée de vie des composants. Plusieurs stratégies ont été développées pour limiter les niveaux vibratoires causés par ces charges dynamiques. L'utilisation de systèmes passifs ou actifs agissant sur les vibrations en cabine constitue une première approche. Elle est néanmoins palliative et présente une pénalité de masse non négligeable. Une seconde approche consiste à réduire le torseur dynamique à son origine, c'est à dire en repère tournant. La démarche la plus répandue consiste alors en un placement fréquentiel des modes propres de la pale évitant ainsi les réponses dynamiques excessives. Une méthode plus évoluée mais encore non appliquée sur les hélicoptères commercialisés, repose sur l'introduction de couplages entre les différents mouvements de la pale, de façon à jouer sur les chargements aérodynamiques et ainsi limiter la réponse du rotor et les charges dynamiques qui en découlent. C'est dans cette démarche d'optimisation aéroélastique du rotor, basée sur l'introduction de couplages aéroélastiques, que s'inscrivent les travaux de cette thèse.

L'objectif est à la fois d'appréhender l'influence de ces couplages sur les charges dynamiques, d'évaluer les bénéfices potentiels pouvant en être issus et d'acquérir une meilleure compréhension des mécanismes en jeu.

Une démarche analytico-numérique a été adoptée. Pour cela, un modèle de rotor isolé permettant d'évaluer le torseur des actions mécaniques exercés par le rotor sur le fuselage est développé. Ce modèle prend en compte l'ensemble des phénomènes aérodynamiques, inertiels et élastiques mis en jeu. Le code de calcul est validé par des résultats issus d'un logiciel de calcul aéromécanique et par des résultats expérimentaux. Il est ensuite utilisé pour étudier l'influence des couplages aéroélastiques et de divers paramètres de définition des pales sur les charges dynamiques.

## Objectifs et organisation de la thèse

L'objectif de cette thèse est d'évaluer la capacité des couplages aéroélastiques à agir sur les charges dynamiques transmises par le rotor au fuselage. Pour évaluer ces charges, le développement d'un modèle de rotor isolé de précision est nécessaire. Celui-ci doit permettre la prise en compte des différents couplages, qu'ils soient d'origines inertiels, centrifuges, élastiques ou aérodynamiques. Ce modèle doit en outre être en synergie avec les différents outils éléments-finis de pale disponibles chez Airbus Helicopters et permettre une description fidèle du riche contenu fréquentiel des effets aéroélastiques présents sur voilures tournantes. Le mémoire est articulé en trois parties distinctes.

La première partie, composée de deux chapitres, définit le contexte et la problématique de la recherche. Le fonctionnement du rotor principal d'hélicoptère est présenté dans le **chapitre 1**. Son comportement aéroélastique ainsi que les spécificités cinématiques qui le caractérise sont abordées. Le **chapitre 2**, dédié aux charges dynamiques générés par le rotor, présente leurs origines ainsi que leurs transmissions de la pale au fuselage. Une synthèse bibliographique des différentes approches permettant de les limiter est proposée. Les méthodes de dimensionnement aéroélastique avancée de pale sont notamment présentées. Ces deux chapitres placent le contenu de la thèse dans son contexte et positionnent les travaux de recherche par rapport à l'existant.

La deuxième partie est consacrée aux développements théoriques conduisant à la modélisation du rotor isolé en vol d'avancement. Dans chacun des trois chapitres qui la composent, une synthèse bibliographique succincte permet de justifier les choix de modélisation. Le **chapitre 3** présente le modèle de comportement cinématique adoptée pour la pale. Les équations du mouvement basées sur une formulation de type repère flottant associant les déformations souples de la pale aux grandes rotations provenant des articulations sont développées. Le **chapitre 4** quant à lui, expose la modélisation aéroélastique considérée. L'association de la théorie de l'élément de pale à un modèle de flux induit dynamique à nombre d'états finis est présentée. Enfin, le **chapitre 5** s'attache à décrire les méthodes de résolution permettant d'aboutir au calcul de la réponse dynamique du rotor, à sa stabilité et à l'évaluation des charges dynamiques.

La troisième partie est dédiée à la validation et à l'exploitation du modèle de rotor isolé. Le **chapitre 6** présente une comparaison des résultats issus de ce modèle avec un autre code de calculs aéromécaniques. Le torseur tête rotor calculé est également comparé à celui identifié expérimentalement. D'autre part, une étude de sensibilité sur différents paramètres de conception est réalisée. Le **chapitre 7** s'attache à la description et à la compréhension des couplages aéroélastiques. Une étude analytique servant de support pour l'analyse des résultats du modèle complet est dans un premier temps réalisée. Puis, des couplages aéroélastiques sont introduits sur une pale de référence et leur influence sur les charges dynamiques et sur la stabilité du rotor est étudiée.



# Première partie

## Contexte et problématique

---

*Dans cette partie introductive, le contexte de la dynamique du rotor d'hélicoptère et de l'environnement aérodynamique cyclique dans lequel il évolue sont tout d'abord abordés. Le comportement aérodynamique et cinématique du rotor, ainsi que les différentes instabilités qui le caractérisent, sont présentées. Dans un second temps, sa capacité à générer mais aussi à filtrer les charges dynamiques est étudiée. Enfin, il est question des systèmes additionnels existants et des différentes techniques d'optimisation aéroélastique des pales permettant une réduction des charges dynamiques à leurs sources.*

---



Dans ce premier chapitre, après avoir présenté le fonctionnement aérodynamique des rotors, une description des différentes architectures et éléments constitutifs est proposée. Puis, des modèles analytiques simples, facilitant la description du comportement cinématique et aérodynamique des pales, sont utilisés. Ils permettent d'appréhender les différentes spécificités du rotor en vol d'avancement. Ces modèles offrent une première description des phénomènes physiques à l'œuvre, mais ne sont pas utilisés tels quels dans le modèle aéroélastique complet développé dans les chapitres suivants.

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Aérodynamique du rotor</b> . . . . .	<b>12</b>
1.1	Principe de sustentation des rotors . . . . .	12
1.2	Aérodynamique des profils . . . . .	14
1.3	Le vol d'avancement . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Mécanique du rotor</b> . . . . .	<b>16</b>
2.1	Comportement cinématique des rotors . . . . .	16
2.2	Etude du battement . . . . .	19
2.3	Etude de la trainée . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Instabilités du rotor</b> . . . . .	<b>26</b>
3.1	Instabilités aéroélastiques . . . . .	26
3.2	Couplages rotor/structure . . . . .	30

---

# 1 Aérodynamique du rotor

## 1.1 Principe de sustentation des rotors

Au cours de son fonctionnement, le rotor transmet de l'énergie à une colonne d'air et la met en mouvement. Le flux ainsi généré est appelé flux "induit". La théorie de Froude décrit ce flux en considérant le rotor comme un disque de surface  $A$ , le fluide de masse volumique  $\rho$  comme parfait et la rotation de l'air négligeable [Lei06].

La figure 1.1 représente la discontinuité de pression  $p$  apparaissant de part et d'autre du disque rotor en vol axial de vitesse  $V_h$  et en vol d'avancement de vitesse  $V_\infty$  et d'inclinaison  $\alpha$ . Celle-ci génère une poussée  $T$ , une vitesse induite  $V_i$  au niveau du disque rotor et une vitesse induite  $w$  à l'infini aval.

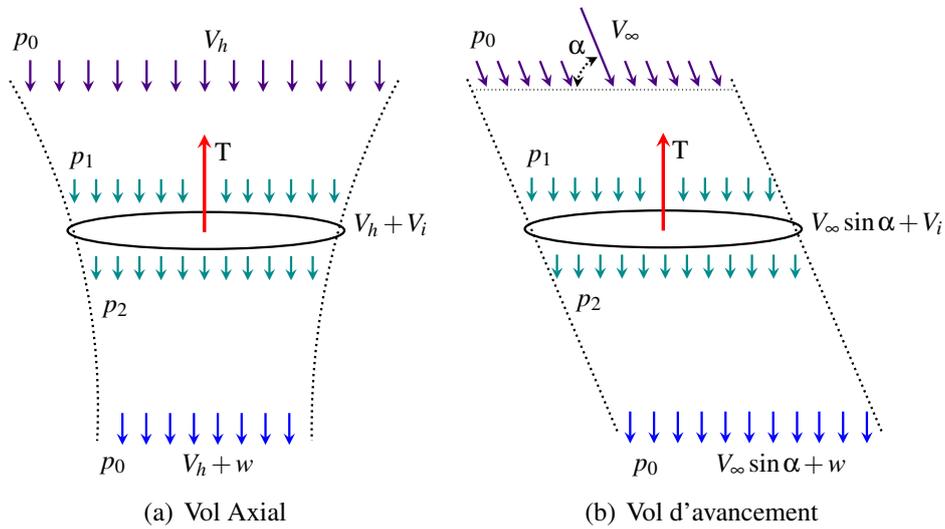


FIGURE 1.1: Disque sustentateur

### 1.1.1 Vol axial

La conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un débit  $\dot{m}$  à travers le disque rotor, donnent respectivement :

$$\dot{m} = \rho A (V_h + V_i) \quad T = \dot{m}(V_h + w) - \dot{m}V_h = \dot{m}w \quad (1.1)$$

Le théorème de Bernoulli donne, de part et d'autre du disque sustentateur :

$$\begin{cases} p_0 + \frac{1}{2}\rho V_h^2 & = p_1 + \frac{1}{2}\rho (V_h + V_i)^2 \\ p_0 + \frac{1}{2}\rho (V_h + w)^2 & = p_2 + \frac{1}{2}\rho (V_h + V_i)^2 \end{cases} \quad (1.2)$$

D'autre part, la portance est liée à la discontinuité de pression via :

$$T = A(p_2 - p_1) \quad (1.3)$$

En combinant 1.2 et 1.3 il vient :

$$\frac{T}{A} = \frac{1}{2}\rho (2V_h + w) w \quad (1.4)$$

En combinant avec 1.1, cela donne :

$$\frac{T}{A} = \rho (V_h + V_i) w \quad (1.5)$$

De 1.4 et 1.5 il est déduit :

$$w = 2V_i \quad (1.6)$$

Enfin, en injectant 1.6 dans 1.4, l'expression de la vitesse induite par un disque rotor dans le cas d'un vol axial est obtenue :

$$T = 2\rho A (V_h + V_i) V_i$$

Ce qui donne, pour le vol stationnaire ( $V_h = 0$ ) :

$$V_i = V_{i0} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A}} \quad (1.7)$$

### 1.1.2 Vol d'avancement

Dans ce cas, en supposant comme le montre le schéma, que la vitesse de l'écoulement à l'infini aval est verticale, les équations deviennent :

$$\dot{m} = \rho AU$$

Avec :

$$\begin{cases} U^2 = (V_\infty \cos \alpha)^2 + (V_\infty \sin \alpha + V_i)^2 \\ T = \dot{m}(V_\infty \sin \alpha + w) - \dot{m}V_\infty \sin \alpha = \dot{m}w \end{cases}$$

Le théorème de Bernoulli donne, de part et d'autre du disque sustentateur :

$$\begin{cases} p_0 + \frac{1}{2}\rho (V_\infty \sin \alpha)^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho (V_\infty \sin \alpha + V_i)^2 \\ p_0 + \frac{1}{2}\rho (V_\infty \sin \alpha + w)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho (V_\infty \sin \alpha + V_i)^2 \end{cases}$$

Par analogie, il vient à nouveau :

$$w = 2V_i$$

Et en injectant ce résultat dans l'expression de la portance :

$$T = 2\rho AUV_i$$

Il vient :

$$V_i = \frac{V_{i0}^2}{\sqrt{U^2}}$$

L'expression de la portance développée par le rotor en fonction de la vitesse induite, de la vitesse infini amont et de l'inclinaison du rotor, prend donc la forme :

$$T = 2\rho AV_i \sqrt{(V_\infty \cos \alpha)^2 + (V_i + V_\infty \sin \alpha)^2}$$

### 1.1.3 Remarques importantes

La vitesse induite dépend de la portance développée, de l'aire du disque rotor, de la masse volumique de l'air ainsi que de la vitesse du rotor. Elle est maximale en vol stationnaire et décroît avec la vitesse d'avancement.

Le modèle de vitesse induite de Froude décrit ci-dessus considère un écoulement moyen sur le disque rotor. Il ne prend donc pas en compte les variations radiales et azimuthales du flux induit. Il constitue une bonne approche pour le calcul d'équilibre de l'hélicoptère en vol stationnaire mais s'avère trop simplifiée pour les calculs d'équilibre en vol d'avancement, ainsi que pour les calculs de charges dynamiques appliquées sur le rotor. D'autres modèles plus représentatifs seront présentés dans le 4<sup>ème</sup> chapitre.

## 1.2 Aérodynamique des profils

Les pales d'hélicoptères sont constituées d'un empilement radial de profils aérodynamiques, Fig.1.2.a. Ceux-ci, une fois plongés dans un écoulement de vitesse  $U$ , subissent des effets de dépression sur leur extrados et de surpression sur leur intrados. Cela génère des efforts de portance  $F_z$ , de traînée  $F_y$  ainsi qu'un moment aérodynamique  $M_x$  dépendant de la pression dynamique  $p_{dyn}$ , de la surface alaire  $S$ , de la corde  $c$  et des coefficients aérodynamiques :

$$F_z = p_{dyn} \cdot S \cdot C_z \quad F_y = p_{dyn} \cdot S \cdot C_x \quad M_x = p_{dyn} \cdot c \cdot S \cdot C_m$$

avec :

$$p_{dyn} = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad \text{et} \quad S = c dr$$

Les coefficients aérodynamiques  $C_z$ ,  $C_x$  et  $C_m$  varient en fonction de l'incidence  $i$  et du nombre de Mach  $M$ , Fig.1.2.b. Les effets de compressibilité liés au nombre de Mach ainsi que les zones de décrochage pour de fortes incidences sont observables.

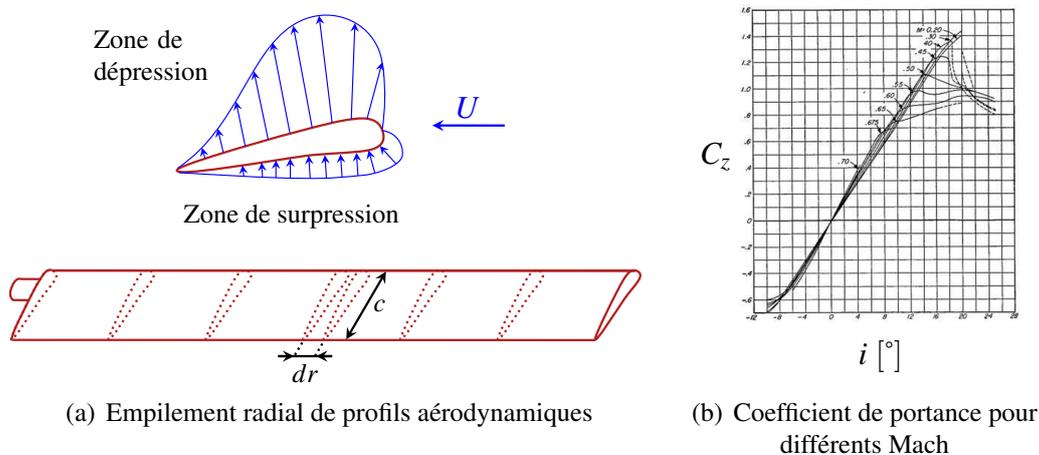


FIGURE 1.2: Profils aérodynamiques

Ces polaires aérodynamiques représentant l'évolution des coefficients  $C_z$ ,  $C_x$  et  $C_m$  en fonction de l'angle d'incidence et du nombre de Mach, sont obtenues par essais en soufflerie ou bien par simulations numériques, Fig.1.2.b. Leur identification est réalisée à un nombre de Mach donné et pour une évolution quasi-statique de l'incidence. Les caractéristiques instationnaires, résultant d'un mouvement de tangage dynamique du profil par exemple, ne sont donc pas prises en compte à travers ces coefficients. Il est d'usage de faire recours à des théories instationnaires telles que celle développée par Theodorsen [The35], de façon à palier ce problème. Elles permettent la prise en compte d'un déphasage entre les efforts aérodynamiques et l'incidence instantanée, traduisant l'influence du comportement dynamique de l'écoulement sur les coefficients aérodynamiques, ainsi que la prise en compte d'effets non circulatoires, correspondant à un effet "masse" du fluide.

### 1.3 Le vol d'avancement

En vol d'avancement, la vitesse relative de la pale par rapport à l'air dépend du rayon  $r$ , du régime de rotation  $\Omega$ , de la vitesse d'avancement  $V_a$  et varie cycliquement en fonction de l'azimut de la pale  $\psi$  :

$$V_{\text{Pale/Air}} = r\Omega + V_a \sin \psi \quad (1.8)$$

La figure 1.3.b illustre la composition des vitesses pour deux pales diamétralement opposées. Pour un azimut compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  la vitesse d'avancement de l'hélicoptère vient s'ajouter à la vitesse due à la rotation de la pale. On parle alors de pale "avançante". Dans le cas d'un azimut compris entre  $180^\circ$  et  $360^\circ$ , la vitesse d'avancement est opposée à celle provenant de la rotation de la pale. On parle dans ce cas de pale "reculante".

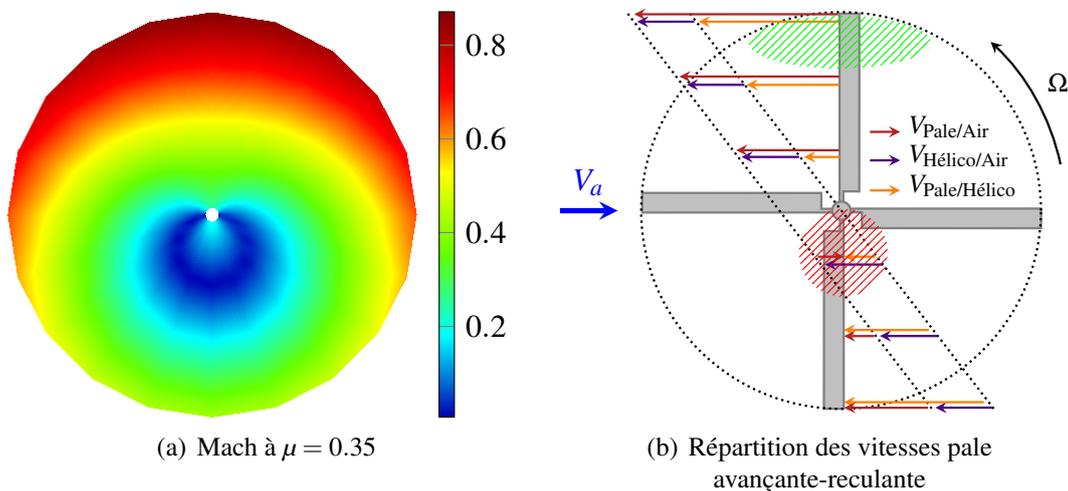


FIGURE 1.3: Aérodynamique du rotor en vol d'avancement

Dans le secteur avançant, les profils situés en bout de pale peuvent rencontrer des nombres de Mach élevés (hachures vertes de la figure 1.3.b) et donc des effets transsoniques importants. En partie reculante et pour de faibles rayons, la vitesse relative de la pale est négative. Dans cette zone, appelée cercle d'inversion (hachures rouges de la figure 1.3.b), l'écoulement se fait

du bord de fuite vers le bord d'attaque ce qui a pour conséquence de dégrader les performances aérodynamiques des profils. Le diamètre du cercle d'inversion dépend de la vitesse d'avancement. Le mach en bout de pale avançante et le diamètre du cercle d'inversion constituent des critères dimensionnant lors de la conception d'un rotor d'hélicoptère.

## 2 Mécanique du rotor

Compte tenu de ses spécificités cinématique, dynamique et aérodynamique, le rotor d'hélicoptère présente un comportement complexe. De façon à éclaircir son fonctionnement, les différents organes et architectures, ainsi que les axes de mouvement et leurs comportements, sont présentés. La figure 1.4 représente les différents éléments constitutifs d'un rotor principal. Le mât rotor transmet le couple provenant de la boîte de transmission principale aux pales de façon à les entrainer en rotation. Elles sont reliées au moyeu via les manchons et des articulations sont introduites de façon à les libérer suivant les angles de battement, trainée et pas. Enfin, la commande de l'angle de pas est assurée par des bielles en liaison avec le plateau de commande.

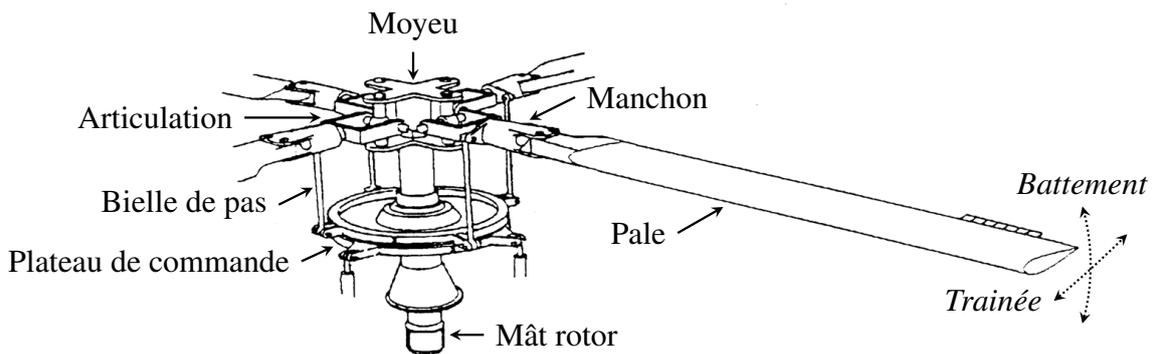


FIGURE 1.4: Représentation simplifiée d'un rotor articulé

### 2.1 Comportement cinématique des rotors

#### 2.1.1 Les différents axes de mouvement

Les mouvements des pales sont définis selon trois axes principaux, permettant d'assurer la portance du rotor ainsi que son contrôle : les axes de pas, battement et trainée Fig.1.4.

**L'axe de pas** L'axe de pas correspond à l'axe défini par l'envergure de la pale. Le mouvement autour de cet axe permet de maîtriser la portance développée par chaque pale en modifiant son incidence mécaniquement. Le système de commande Fig.1.5, composé de bielles de pas, d'un plateau cyclique (ou tournant), d'un plateau collectif (ou fixe) et de servocommandes, permet d'imposer un angle de pas dont l'évolution en fonction de l'azimut est de la forme suivante :

$$\theta = \theta_0 + \theta_c \cos \psi + \theta_s \sin \psi \quad (1.9)$$

Le pas est commandé par les bielles de pas en liaison rotule avec le plateau cyclique. Lorsqu'une translation est imposée au plateau collectif par les servocommandes, elle est transmise au plateau cyclique qui impose alors un angle de pas identique à l'ensemble des pales. Lorsqu'une inclinaison latérale ou longitudinale du plateau collectif est imposée en repère fixe, elle est également transmise au plateau cyclique, et se traduit, en repère tournant, par une variation cyclique du pas avec l'azimuth.

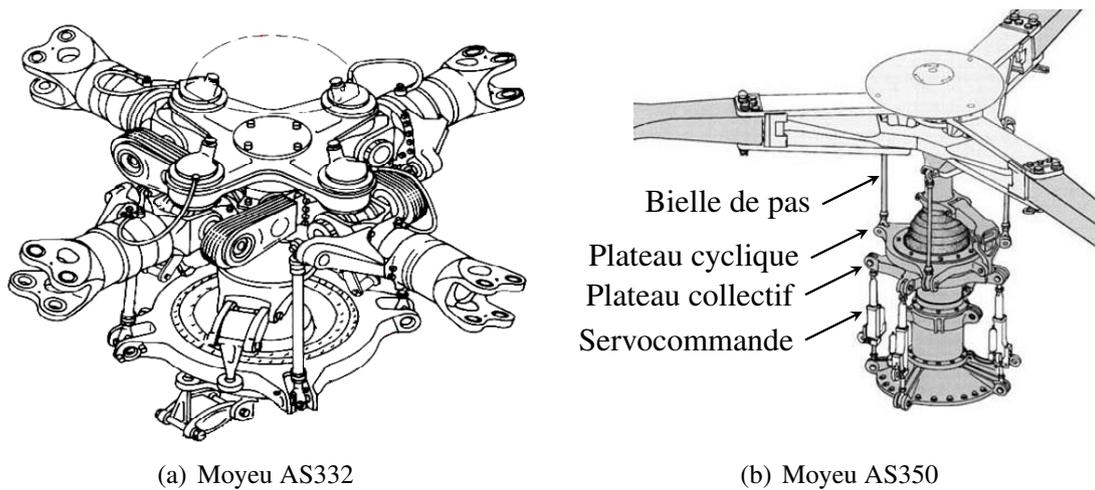


FIGURE 1.5: Moyeu rotor et système de commande de pas de deux types différents

Le pas collectif  $\theta_0$  assure la portance globale de l'hélicoptère tandis que le pas cyclique longitudinal  $\theta_c$  et le pas cyclique latéral  $\theta_s$  permettent d'orienter le plan du rotor et donc d'incliner sa poussée de façon à diriger l'appareil. L'orientation du plan rotor est rendue possible grâce au mouvement des pales suivant leur axe de battement.

**L'axe de battement** Au cours de son mouvement, la pale bat verticalement sous les actions combinées de l'effort centrifuge et des efforts aérodynamiques modulés cycliquement par la commande de pas, Fig.1.7.a. Les pales décrivent alors un cône pouvant être orienté. L'inclinaison du plan rotor, défini par l'extrémité des pales, permet de manœuvrer l'appareil suivant différents scénarios, Fig.1.6.

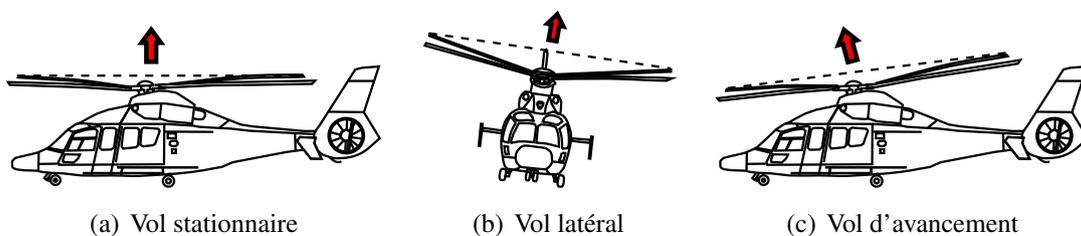


FIGURE 1.6: Scénarios de Vol

**L'axe de trainée** Lorsque la pale bat verticalement, la distance du centre de gravité de la pale à l'axe du mât rotor diminue. Par conservation du moment cinétique, il en résulte des efforts d'inertie, aussi appelés efforts de Coriolis, sollicitant la pale en flexion suivant l'axe de trainée, Fig.1.7.b. Dans le cas où la pale est animée d'un mouvement angulaire de battement  $\beta$  uniquement, cet effort prend la forme :

$$\underline{F}_{\text{Coriolis}} = -2\Omega \cdot \underline{z}_\psi \wedge \underline{V}_{\text{Pale/Moyeu}} = 2\Omega r \dot{\beta} \sin \beta \cdot \underline{y}_\beta$$

En vol d'avancement, le battement et sa dérivée première temporelle sont cycliques, générant des efforts de Coriolis eux aussi cycliques. Le pied de pale est alors en proie à des sollicitations alternées dans le plan.

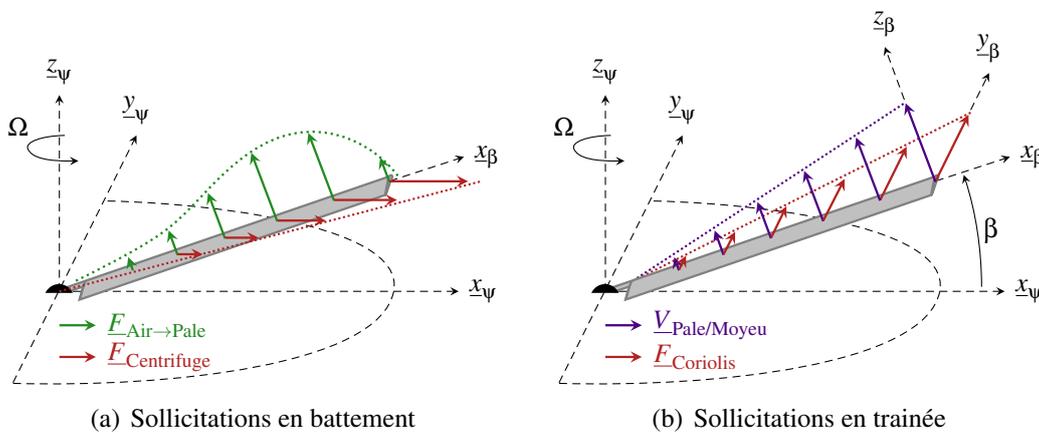


FIGURE 1.7: Sollicitations suivant les différents axes de la pale

### 2.1.2 Les différentes architectures de rotor

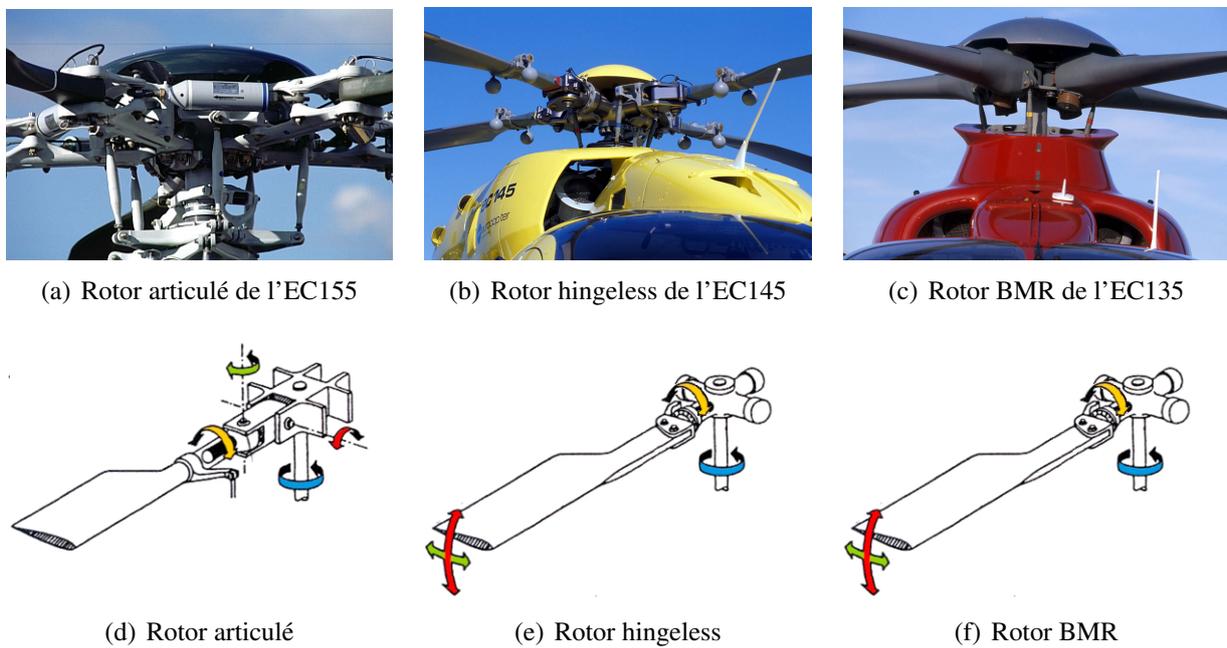
Dans le cas d'un rotor rigide, les moments de flexions issus des sollicitations aérodynamiques et inertielles exercées sur les pales sont maximums à l'emplanture. En vol d'avancement, ce moment de flexion maximal varie en fonction du temps du fait de la dissymétrie de portance provenant du caractère cyclique des vitesses relatives de l'air. La pale se trouve donc fortement sollicitée en fatigue suivant les axes de battement et trainée. D'autre part, cette dissymétrie de portance entraîne un moment de roulis sur l'appareil pouvant rendre l'équilibre de l'hélicoptère délicat.

De façon à palier ces problèmes, différentes architectures de rotor ont été conçues, Fig.1.8. Des articulations ont tout d'abord été introduites en battement et trainée de façon à annuler ce moment de flexion. Puis, avec la maîtrise des matériaux composites, des rotors dépourvus d'articulations et présentant une grande compacité ont vu le jour.

**Rotor articulé** Le rotor articulé est constitué de trois articulations distinctes en pas, battement et trainée. Les rotors modernes comme celui de l'EC155 utilisent une butée sphérique permettant de concentrer toutes les articulations au même point ce qui confère une grande compacité au rotor.

**Rotor hingeless** Le rotor hingeless comme celui de l'EC145, remplace les articulations de battement et de traînée par une souplesse en pied de pale. Le pas est quant à lui imposé par une articulation physique. Compte tenu de l'absence d'articulation de traînée, ce type de rotor ne nécessite aucun amortisseur de traînée.

**Bearingless Main Rotor (BMR)** Le rotor BMR, du type de l'EC135, ne comporte aucune articulation physique. Tous les degrés de liberté nécessaires à la commande du rotor sont libérés grâce au flexbeam, une pièce composite située en pied de pale et présentant une grande souplesse. Le pas est imposé via une pièce rigide, la manchette. D'autre part, un amortisseur de traînée reliant la manchette et le flexbeam permet d'amortir le mouvement de traînée.



**FIGURE 1.8:** Les différentes architectures de rotor principal

Compte tenu de la présence majoritaire de rotors articulés au sein de la flotte Airbus Helicopters, seule cette architecture sera traitée dans la suite.

## 2.2 Etude du battement

### 2.2.1 Battement de la pale dans le vide

L'équation différentielle régissant le comportement dynamique en battement de la pale dans le vide est obtenue en projetant le principe fondamental de la dynamique appliqué à la pale au niveau de l'articulation en moment suivant l'axe  $y_\beta$  (voir figure 1.7.b) :

$$\left[ \frac{\delta^A}{-pale/R_0} = \sum M_{ext \rightarrow pale}^A \right] \cdot y_\beta$$

La seule action mécanique extérieure sollicitant la pale provient de l'articulation en pied de pale, modélisée par une raideur angulaire  $K_\beta$ .

En supposant l'angle de battement petit et une fois linéarisée à l'ordre 1, l'équation précédente prend la forme :

$$I_p \ddot{\beta} + [I_p + eM_s] \Omega^2 \beta = -K_\beta \beta \quad (1.10)$$

L'inertie  $I_p$  et le moment statique  $M_s$  de la pale par rapport à l'articulation d'excentricité  $e$ , sont définis par :

$$I_p = \int_e^R (r-e)^2 dm \quad \text{et} \quad M_s = \int_e^R (r-e) dm$$

L'effet centrifuge joue le rôle de raideur dans l'équation différentielle de battement 1.10. Il tend donc à ramener la pale à plat.

Le mouvement de battement a pour pulsation propre :

$$\omega_\beta = \sqrt{\frac{K_\beta + [I_p + eM_s] \Omega^2}{I_p}} \quad (1.11)$$

Pour une répartition linéique de masse constante, et pour une raideur  $K_\beta$  faible, l'expression précédente peut être simplifiée :

$$\omega_\beta = \Omega \sqrt{1 + \frac{3e}{2(R-e)}}$$

Pour des valeurs usuelles d'excentricité  $e$  et de rayon rotor  $R$ , la pulsation propre de battement dans le vide est proche de  $\omega_\beta = 1.03\Omega$ .

Si la pale est sollicitée à proximité de cette fréquence, elle répondra alors comme tout système linéaire d'ordre deux excité à sa fréquence propre, c'est à dire avec une amplitude maximale et déphasé de  $90^\circ$  par rapport à l'excitation.

Dans l'air, pour une vitesse de rotation de  $\Omega$  rad/s et une variation cyclique du pas induisant des efforts aérodynamiques en  $1\Omega$ , la réponse de la pale sera donc déphasée de  $90^\circ$  par rapport à la commande de pas. Autrement dit, la levée maximale de la pale aura lieu  $90^\circ$  après l'azimuth de portance maximale.

### 2.2.2 Battement de la pale dans l'air

Dans l'air, l'équation différentielle du mouvement de battement vient s'enrichir de termes provenant du moment exercé par les efforts aérodynamiques sur la pale. Ces derniers sont ici modélisés par la théorie de l'élément de pale [Lei06], considérant un empilement radial de profils aérodynamiques bidimensionnels, indépendants les uns des autres :

$$\underline{M}_{air \rightarrow pale} \cdot \underline{y}_\beta = \frac{1}{2} \rho \int_0^R rcU^2 C_z(i) \cdot dr$$

Les polaires aérodynamiques de portance présentent un comportement linéaire sur une plage d'incidence couvrant quasiment la totalité de la plage d'incidence de fonctionnement du rotor (voir figure 1.2), il est donc supposé que :

$$C_z(i) = C_{z\alpha} \cdot i$$

D'autre part, la vitesse totale de l'écoulement est supposée égale à la vitesse tangentielle du profil :

$$U \approx V_T$$

L'incidence de la pale  $i$  est composée de l'angle de pas  $\theta$ , imposé par la cinématique de commande, du vrillage  $\theta_v$ , de l'angle imposé par la liaison pas-battement et de l'incidence provenant du mouvement relatif de la pale par rapport à l'air  $\phi$ , aussi appelée "angle d'écoulement" :

$$i = \theta_0 + \theta_c \cos \psi + \theta_s \sin \psi + \theta_v - k\beta - \phi$$

L'angle de vrillage  $\theta_v$  correspond à la variation de calage des profils le long de l'envergure. Dans le cas de pales classiques, il décroît linéairement de l'emplanture à l'extrémité de pale.

La liaison pas-battement quant à elle, aussi appelée liaison  $k$ , impose une variation d'angle de pas proportionnelle à l'angle de battement :

$$\Delta\theta = k.\Delta\beta \quad \text{avec} \quad k = -\tan(\delta_3)$$

Elle est assurée mécaniquement par un déport entre la position en envergure de l'articulation de battement (excentricité) et la position en envergure de la bielle de commande, Fig.1.9.a, ou encore par une articulation de battement dont l'axe n'est pas perpendiculaire à l'axe de pas, Fig.1.9.b. Ainsi, une variation angulaire de battement pour une position fixée dans le repère rotor de la bielle de pas, induit une variation angulaire de pas.

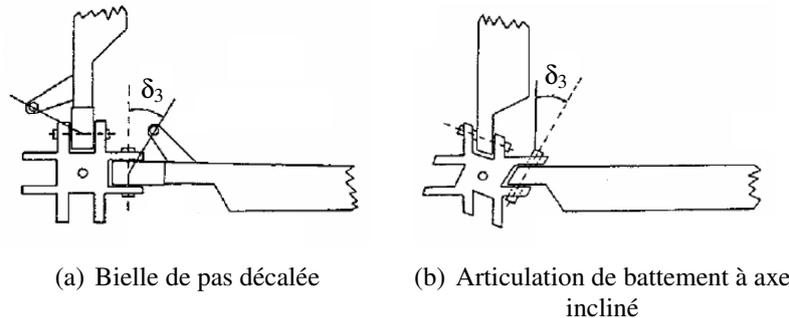


FIGURE 1.9: Liaison pas-battement

L'angle d'écoulement est calculé à partir du mouvement relatif de la pale par rapport à l'air. Il est de la forme :

$$\phi = \arctan \left[ \frac{V_P}{V_T} \right]$$

avec  $V_P$  et  $V_T$  correspondant respectivement à la composante perpendiculaire et à celle tangentielle du vecteur vitesse d'un point  $M$  de la pale dans son mouvement par rapport à l'air.

La vitesse perpendiculaire du profil est constituée de la vitesse due au battement, de la projection cyclique de la vitesse d'avancement dans le repère lié à la pale et de la vitesse induite  $V_i$ . La vitesse tangentielle est quant à elle constituée de la vitesse provenant de la rotation de la pale et de la part cyclique de la vitesse d'avancement.

$$\begin{cases} V_P = r\dot{\beta} + V_a\beta \cos \psi + V_i \\ V_T = r\Omega + V_a \sin \psi \end{cases}$$

La figure 1.10 illustre l'angle d'écoulement dans le cas où liaison  $k$  et vrillage sont négligés.

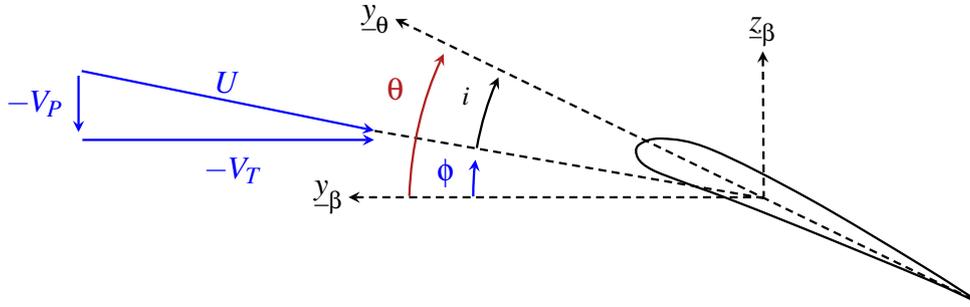


FIGURE 1.10: Incidence et orientation du profil dans l'écoulement

**Vol stationnaire et à faible vitesse d'avancement** La vitesse d'avancement est supposée nulle ( $V_a \approx 0$ ). L'équation de battement dans l'air prend alors la forme suivante :

$$I_p \ddot{\beta} + I_p \omega_\beta^2 \beta = \frac{1}{2} \rho \int_0^R r^3 \Omega^2 c C_{z\alpha} \left( \theta_0 + \theta_c \cos \psi + \theta_s \sin \psi - k\beta - \frac{r\dot{\beta} + V_i}{r\Omega} \right) . dr \quad (1.12)$$

L'influence du mouvement de battement au sein des efforts aérodynamiques se traduit dans l'équation homogène par un terme d'amortissement et par un terme de raideur aérodynamique :

$$I_p \ddot{\beta} + C_{aéro} \dot{\beta} + (I_p \omega_\beta^2 + K_{aéro}) \beta = \frac{1}{2} \rho \int_0^R r^3 \Omega^2 c C_{z\alpha} \left( \theta_0 + \theta_c \cos \psi + \theta_s \sin \psi - \frac{V_i}{r\Omega} \right) . dr \quad (1.13)$$

avec :

$$\begin{cases} C_{aéro} = \frac{1}{2} \rho \Omega \int_0^R C_{z\alpha} c r^3 . dr \\ K_{aéro} = \frac{k}{2} \rho \Omega^2 \int_0^R C_{z\alpha} c r^3 . dr \end{cases}$$

En supposant une corde et des profils aérodynamiques constants sur l'envergure ainsi qu'une pulsation propre de battement de  $\Omega$ , l'expression de l'amortissement réduit du mode de battement rigide est :

$$\alpha_\beta = \frac{\rho c C_{z\alpha} R^4}{16 I_p}$$

Le battement de la pale est donc naturellement amorti par les efforts aérodynamiques. Pour une pale classique, l'amortissement du mode rigide de battement se situe aux alentours de 50%.

L'influence de la liaison  $k$  se traduit par une raideur aérodynamique supplémentaire. Celle-ci, suivant le signe du couplage pas-battement, viendra augmenter ou diminuer la fréquence du mode de battement et introduira donc un déphasage supplémentaire par rapport aux  $90^\circ$  initiaux. La suite

des développements sera effectuée en l'absence de liaison  $k$ .

Le second membre de l'équation 1.13 est composé de l'influence du pas et de la vitesse induite. Si la vitesse induite est supposée constante avec l'azimuth, ce qui est réaliste à faible vitesse d'avancement, il varie à une fréquence de  $1\Omega$  (excitation jusqu'au 1<sup>er</sup> harmonique). La réponse forcée en battement est alors, elle aussi, en  $1\Omega$ . Il est donc supposé :

$$\beta = \beta_0 + \beta_c \cos \psi + \beta_s \sin \psi \quad (1.14)$$

Le battement de la pale est décomposé en un battement collectif  $\beta_0$ , un battement cyclique longitudinal  $\beta_c$  et un battement cyclique latéral  $\beta_s$ . Une fois cette expression injectée dans l'équation 1.12 et une fois la résolution du système d'équation obtenu en annulant les termes constants et les termes en cosinus et sinus, il vient, pour une fréquence de battement de  $1\Omega$  :

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{\rho}{2I_p} \int_0^R cC_{z\alpha} \left( \theta_0 - \frac{V_i}{r\Omega} \right) r^3 . dr \\ \beta_c = -\theta_s \\ \beta_s = \theta_c \end{cases} \quad (1.15)$$

L'inclinaison du rotor est directement reliée aux pas cycliques et un déphasage de  $90^\circ$  apparait entre la commande imposée et la réponse en battement.

D'autre part, après injection des équations 1.15 dans l'expression de l'incidence, il vient :

$$i = \theta_0 - \frac{V_i}{r\Omega}$$

Les variations de pas et les variations d'incidence dûes au battement se compensent. Il en résulte que le moment aérodynamique exercé sur une pale ne dépend pas de l'azimuth et vaut :

$$\underline{M}_{air \rightarrow pale}^A \cdot \underline{y}_\beta = I_p \beta_0 \Omega^2$$

**Vol d'avancement** Cette fois-ci la vitesse la vitesse d'avancement n'est plus négligée dans l'expression de la vitesse tangentielle de la pale :

$$V_T = r\Omega + V_a \sin \psi \quad (1.16)$$

La pression dynamique devient alors :

$$p_{dyn} = \frac{1}{2} \rho (r\Omega + V_a \sin \psi)^2 \quad (1.17)$$

D'autre part, la vitesse induite ne peut plus être supposée indépendante de l'azimuth et un modèle à un harmonique est considéré :

$$V_i = V_{i_0} + V_{i_c} \cos \psi + V_{i_s} \sin \psi \quad (1.18)$$

$V_{i_0}$  représente la composante moyenne,  $V_{i_c}$  la composante cyclique longitudinale et  $V_{i_s}$  la composante cyclique latérale de la vitesse induite. L'incidence devient alors :

$$i = \theta_0 + \theta_c \cos \psi + \theta_s \sin \psi - k\beta - \frac{r\dot{\beta} + V_a\beta \cos \psi + V_{i_0} + V_{i_c} \cos \psi + V_{i_s} \sin \psi}{r\Omega + V_a \sin \psi} \quad (1.19)$$

Les termes d'amortissement et de raideur aérodynamique prennent alors les formes suivantes :

$$\begin{cases} C_{aéro} = \frac{1}{2}\rho \int_0^R r^2 cC_{z\alpha}(r\Omega + V_a \sin \psi) .dr \\ K_{aéro} = \frac{1}{2}\rho \int_0^R cC_{z\alpha} r (r\Omega + V_a \sin \psi) (k[r\Omega + V_a \sin \psi] + V_a \cos \psi) .dr \end{cases} \quad (1.20)$$

Enfin, le second membre de l'équation différentielle de battement devient :

$$\frac{1}{2}\rho \int_0^R cC_{z\alpha} r (r\Omega + V_a \sin \psi)^2 \left( \theta_0 + \theta_c \cos \psi + \theta_s \sin \psi - \frac{V_{i_0} + V_{i_c} \cos \psi + V_{i_s} \sin \psi}{r\Omega + V_a \sin \psi} \right) .dr$$

La présence, dans la vitesse tangentielle, du terme cyclique provenant de la dissymétrie entre pale avançante et pale reculante entraîne l'apparition de termes d'harmonique deux dans la pression dynamique et d'harmonique trois dans le second membre. Les termes d'amortissement et de raideur aérodynamique résultants sont désormais périodiques, respectivement d'ordre un et deux. L'hypothèse formulée dans le cas des faibles vitesses d'avancement, selon laquelle la réponse de la pale est constituée d'un battement collectif et de battement cycliques d'ordre un est dès lors insuffisante. Le mouvement de battement de la pale, compte tenu des termes de raideurs et d'amortissements périodiques, est en fait périodique d'ordre  $n$  :

$$\beta = \beta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\beta_{nc} \cos n\psi + \beta_{ns} \sin n\psi] \quad (1.21)$$

En pratique, les amplitudes des coefficients décroissent très rapidement en fonction des harmoniques. Dans le cadre de la dynamique du vol, la série précédente peut être tronquée au deuxième ordre sans pour autant détériorer significativement la qualité des résultats. Néanmoins, pour le calcul de charges dynamiques, il est nécessaire, suivant le nombre de pales, de considérer des harmoniques du mouvement beaucoup plus élevés.

### 2.3 Etude de la traînée

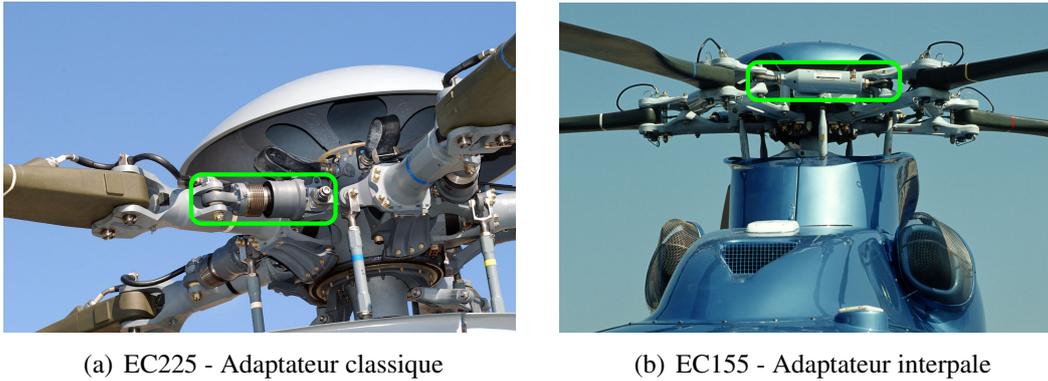
L'équation différentielle régissant le comportement dynamique en traînée de la pale est obtenue en projetant le principe fondamental de la dynamique appliqué à la pale à l'excentricité en moment suivant l'axe  $z_\beta$  (voir figure 1.7.b) :

$$\left[ \mathcal{G}_{pale/R_0}^A = \sum M_{ext \rightarrow pale}^A \right] \cdot z_\beta \quad (1.22)$$

La seule action mécanique extérieure sollicitant la pale en traînée dans le vide provient de l'adaptateur de traînée. Celui-ci a été introduit de façon à maîtriser les marges de stabilité lors de couplages rotor/structure type résonance sol et air. Il assure l'adaptation dynamique du mouvement

de trainée en le plaçant fréquemment et il lui apporte de l'amortissement.

Il existe différentes technologies d'intégration des adaptateurs de trainée au sein du rotor. Dans le cas de rotor articulés classiques, une des extrémités de l'adaptateur est reliée à la pale et l'autre au moyeu, Fig.1.11.a. Dans le cas des rotor avec adaptateurs de type "interpales", chaque extrémité de l'adaptateur est reliée à une pale, Fig.1.11.b.



**FIGURE 1.11:** Adaptateurs de trainée

### 2.3.1 Mouvement de trainée dans le vide

Dans le vide, le mouvement de trainée  $\delta$  de la pale est découplé de celui de battement puisque la conicité est nulle et les efforts de Coriolis aussi. L'adaptateur de trainée est modélisé par une raideur angulaire  $K_\delta$  et par un amortissement  $C_\delta$ . En supposant l'angle de trainée petit et une fois linéarisée au 1<sup>er</sup> ordre, l'équation 1.22 prend la forme :

$$I_p \ddot{\delta} + C_\delta \dot{\delta} + [K_\delta + eM_s \Omega^2] \delta = 0 \quad (1.23)$$

L'effet centrifuge apparaît, tout comme dans le cas du battement, comme une raideur pour le mouvement de trainée. La pulsation propre du mouvement de trainée non amorti vaut :

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{K_\delta + eM_s \Omega^2}{I_p}} \quad (1.24)$$

Pour caractériser la capacité de l'adaptateur de trainée à dissiper de l'énergie, on considère le facteur de perte défini par :

$$\tan \phi_\delta = \frac{C_\delta \omega_e}{K_\delta} \quad (1.25)$$

L'angle de perte  $\phi_\delta$  correspond au déphasage entre la réponse de l'adaptateur de trainée et l'effort qui lui est imposé à la fréquence  $\omega_e$ .

Les adaptateurs de trainée, qu'ils soient hydrauliques ou viscoélastiques, présentent des caractéristiques non linéaires dépendant à la fois de la fréquence et des amplitudes de déplacement auxquelles ils sont sollicités [Leb12]. L'angle de perte  $\phi_\delta$ , la raideur  $K_\delta$  et l'amortissement  $C_\delta$  varient donc en fonction de la fréquence d'excitation et des amplitudes rencontrées.

### 2.3.2 Mouvement de trainée dans l'air

Dans l'air, le mouvement de trainée est couplé à celui de battement via l'effet de Coriolis (voir figure 1.7). L'équation différentielle régissant le mouvement de trainée dans l'air prend alors la forme :

$$I_p \ddot{\delta} + C_\delta \dot{\delta} + [K_\delta + eM_s \Omega^2] \delta = 2I_p \Omega \beta \dot{\beta} + \underline{M}_{air \rightarrow pale}^A \cdot z_\delta \quad (1.26)$$

La dynamique du mouvement de battement a une forte influence sur la réponse en trainée de la pale.

D'une part, il apparait que plus la conicité est importante et plus l'effet de Coriolis sera marqué et sollicitera le mode trainée. Ainsi, plus le rotor sera chargé, et plus l'amplitude du mouvement de trainée sera importante.

D'autre part, pour une réponse en battement collectif et cyclique en  $1\Omega$  du type de l'équation 1.14, les non linéarités provenant des grandes rotations en battement, entraînent une réponse en trainée en au moins  $2\Omega$ . Ce raisonnement est généralisable au cas de vol à grande vitesse d'avancement au cours duquel le battement présente une évolution sur une infinité d'harmoniques du rotor (Eq.1.21). La trainée présentera donc le même type d'évolution en fonction de l'azimuth :

$$\delta = \delta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\delta_{nc} \cos n\psi + \delta_{ns} \sin n\psi] \quad (1.27)$$

En pratique, tout comme pour le battement, les amplitudes des coefficients de la série décroissent très rapidement en fonction de l'harmonique. Pour la dynamique du vol, il est donc possible de se contenter d'une description à deux harmoniques. Néanmoins, pour une évaluation correcte des charges dynamiques au sein de l'adaptateur, la prise en compte d'un nombre d'harmoniques allant au moins jusqu'au nombre de pale est nécessaire.

## 3 Instabilités du rotor

Le rotor articulé est un système dynamique sollicité par d'importantes sources d'énergies qu'il s'agisse de l'énergie mécanique provenant de l'air ou encore de celle provenant des moteurs. De plus, la complexité de la cinématique du rotor entraîne des couplages entre les différents mouvements des pales, ou encore, avec les mouvements de la structure. Cela favorise d'importants échanges d'énergies, qui, dans certaines configurations, peuvent aboutir à des phénomènes divergents.

### 3.1 Instabilités aéroélastiques

#### 3.1.1 Couplage pas-battement

Le couplage entre les mouvements de battement et pas de la pale peut provenir d'un déport de centre de gravité  $y_G$  ou encore d'un déport de foyer aérodynamique  $y_{FA}$ . La figure 1.12 illustre le couplage entre ces deux mouvements pour un profil. Les mécanismes à l'œuvre dans le cas d'une pale d'hélicoptère sont identiques à ceux d'une aile d'avion, à la différence près qu'il faut y

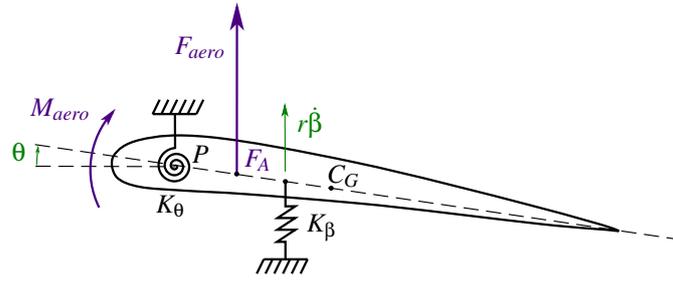


FIGURE 1.12: Modèle 2ddl de profil en mouvement combiné pas-battement

ajouter les effets centrifuges, contribuant au couplage et au raidissement des mouvements de pas et battement.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une pale animée d'un mouvement combiné de battement et de pas en vol stationnaire, une fois linéarisé au premier ordre, donne le système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants suivant :

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} + \underline{C}^{Aéro} \cdot \dot{\underline{q}} + [\underline{K} + \underline{K}^{Aéro}] \cdot \underline{q} = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} \beta \\ \theta \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Avec, pour une pale homogène :

$$\begin{cases} \underline{M} = \begin{pmatrix} I_p & -I_{\beta\theta} \\ -I_{\beta\theta} & I_{\Theta} \end{pmatrix} \\ \underline{K} = \begin{pmatrix} K_{\beta} + (I_p + eM_s)\Omega^2 & -\Omega^2 I_{\beta\theta} \\ -\Omega^2 I_{\beta\theta} & K_{\theta} + \Omega^2 I_{\Theta} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{K}^{Aéro} = -\gamma\Omega^2 \begin{pmatrix} k/8 & 1/8 \\ ky_{F_A}/6R & -y_{F_A}/6R \end{pmatrix} \\ \underline{C}^{Aéro} = -\gamma\Omega \begin{pmatrix} -1/8 & 0 \\ y_{F_A}/6R & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec :

$$I_{\beta\theta} = \int_0^R (r - e)y_G dm \quad I_{\Theta} = \int_0^R I_{\theta} dr \quad \gamma = \frac{\rho c C_{z\alpha} R^4}{I_p}$$

et pour distances algébriques :

$$\overline{PF_A} = y_{F_A} \quad \overline{PG} = y_G$$

Les couplages se traduisent par la présence de termes extradiagonaux dans les matrices du système. La présence d'un déport de centre de gravité entraîne des couplages inertiels et centrifuges. Le déport de foyer aérodynamique, de par le bras de levier qu'il introduit entre axe de pas et point d'application des efforts aérodynamiques, génère des couplages ainsi qu'un raidissement aérodynamique du mode de pas. Enfin, la liaison pas-battement induit elle aussi des couplages aérodynamiques.

**Divergence Statique** Ce type d'instabilité est appelée statique car l'amplitude des mouvements croît de façon constante, sans oscillations, et peut aboutir à la rupture de la pale.

Dans le cas d'un centre de gravité de la pale placé suffisamment en arrière de l'axe de pas, une

perturbation faisant battre la pale vers le haut entrainera des efforts inertiels générant un moment cabreur que la raideur en pas de la pale ne parviendra pas à compenser. Il en est de même dans le cas d'un foyer aérodynamique situé en avant de l'axe de pas, celui-ci engendrera un moment cabreur déstabilisateur pour la pale.

La stabilité du système statique est assurée lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\text{Det} \left[ \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}}^{\text{Aéro}} \right] > 0$$

Cela aboutit à des conditions à respecter pour les déports et pour la valeur de la liaison  $k$ .

**Flottement de pas-battement** Le flottement est une instabilité dynamique. Il a d'autant plus de chance d'apparaître que l'écart fréquentiel entre le mode de battement rigide découplé et le mode de pas découplé est faible. L'échange d'énergie mécanique entre les deux modes de mouvement est alors important.

Cette instabilité apparaît à partir du moment où l'énergie apportée par les actions mécaniques exercées par l'air sur la pale  $W_{\text{Aéro}}$  est déstabilisante, c'est à dire, pour un tour rotor :

$$W_{\text{Aéro}} = \int_0^{2\pi/\Omega} P_{\text{inst}} \cdot dt = \int_0^{2\pi/\Omega} \underline{F}_{\text{Aéro}} \cdot \underline{V}_{F_A} \cdot dt < 0$$

En présence de déport de foyer aérodynamique ou de centre de gravité, les deux modes initialement découplés se couplent, et présentent des mouvements à la fois de battement et de pas. Il est alors question du déphasage entre ces deux types de mouvement au sein d'un même mode. S'ils sont parfaitement en phase, l'énergie dépensée sur l'ensemble de la période est nulle. Il n'y a alors aucun effet stabilisateur ou déstabilisateur de l'air. Lorsque le pas est en retard de phase sur le battement, l'effort aérodynamique s'oppose plus longtemps au mouvement qu'il ne le favorise. L'énergie est donc globalement dépensée. Dans le cas contraire, si le pas est en avance de phase sur le battement, les forces aérodynamiques amplifient le mouvement et le système devient alors instable.

La figure 1.13 illustre les propos précédents dans le cas où les efforts aérodynamiques ne sont supposés dépendre que du pas, ce qui revient à négliger l'amortissement aérodynamique du mouvement de battement :

$$F_{\text{Aéro}} = \frac{1}{2} \rho c (r\Omega)^2 C_{z\alpha} \theta \quad V_{F_A} = r\dot{\beta}$$

Cette approximation facilite la compréhension du phénomène divergent mais n'est pas représentative de la physique car, en réalité, c'est précisément l'amortissement en battement qui, pour un mode donné, introduira un déphasage entre les deux mouvements et pourra aboutir à l'instabilité. Pour certains systèmes tournants, l'apport d'amortissement supplémentaire entrainera l'apparition de phénomènes divergents, ce qui peut paraître contre intuitif.

### 3.1.2 Flottement de flexion-torsion

Les phénomènes physiques illustrés précédemment sous l'hypothèse de pale rigide apparaissent également lorsque la souplesse de la pale est prise en compte et pour des mouvements

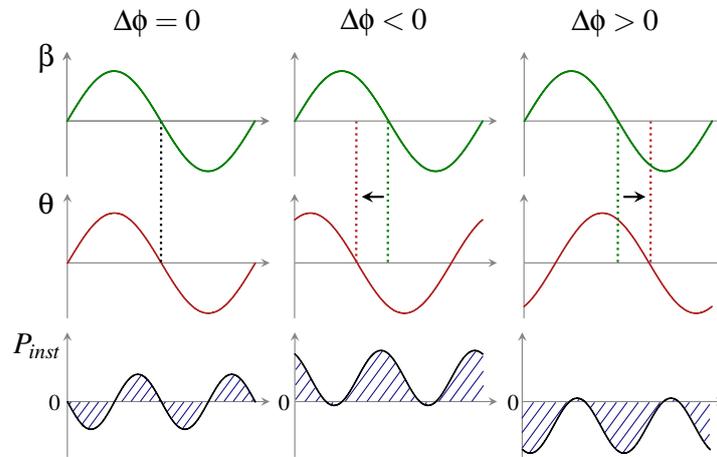


FIGURE 1.13: Couplage & déphasage entre battement et pas

combinés de flexion dans le plan, flexion hors plan et torsion. Le couplage se crée alors entre les modes de battement, les modes de trainée et les modes de torsion de la pale. Déports de foyer aérodynamique et de centre de gravité sont une fois de plus à l’origine des couplages. Viennent s’y ajouter des couplages structurels provenant de l’angle de vrillage et de la non coïncidence entre centres neutres, centres de torsion et centres de cisaillement des sections [Sk111].

Il est d’usage de considérer les diagrammes de Campbell en fréquences et amortissements de façon à faire apparaître les zones d’instabilité. L’augmentation de la vitesse de rotation du rotor entraîne une rigidification des modes de battement dont les fréquences peuvent alors croiser celles des modes de torsion, dont l’évolution est moins dépendante du régime rotor.

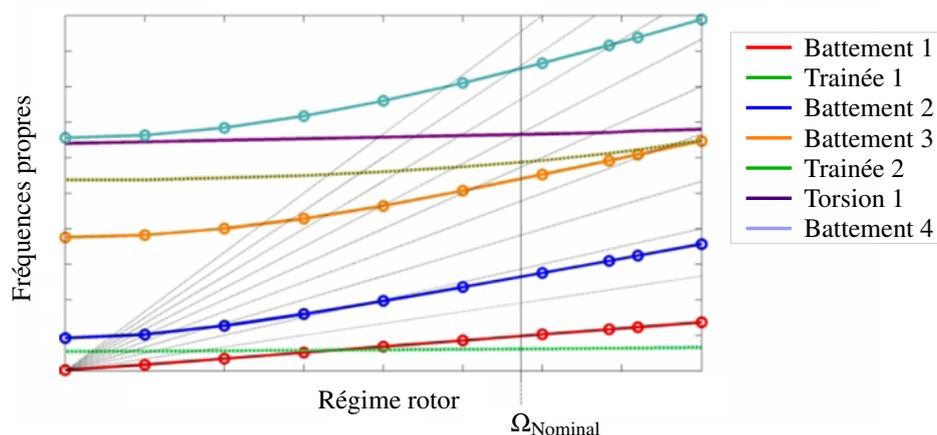


FIGURE 1.14: Diagramme de Campbell

Comme le montre la figure 2.8, pour une vitesse de rotation nettement supérieure au régime nominal, les fréquences propres du 1<sup>er</sup> mode de torsion et du 3<sup>ème</sup> mode de battement se rapprochent. Un couplage aéroélastique peut alors apparaître entre ces modes. En pratique, un écartement fréquentiel minimum est alors assurée entre les modes découplés notamment en raidissant le mode

de torsion, de façon à minimiser l'apparition de couplages.

L'utilisation de pale de géométries courbes de type BlueEdge™, de par les déports qu'elle introduit, amène à considérer avec attention ces problématiques de flottement.

## 3.2 Couplages rotor/structure

Pour certaines configurations, les mouvements de la pale viennent se coupler avec ceux de la structure. De tels couplages peuvent aboutir à la destruction totale de l'hélicoptère.

### 3.2.1 Résonance sol

Le phénomène de résonance sol résulte d'un couplage entre le mouvement de trainée cyclique des pales et celui de roulis de la machine [San11]. Lors de la montée en régime du rotor, la fréquence propre du premier mode de trainée cyclique en repère fixe, compte tenu du raidissement centrifuge, vient croiser la fréquence propre d'un des modes de roulis de la machine (figure 1.15.a). Le balourd créé par ce mouvement cyclique des pales génère un effort dans le plan rotor provoquant le mouvement de roulis de la machine (figure 1.15.b). Les pales sont alors sollicitées en déplacement au niveau de l'articulation assurant ainsi le couplage. Celui-ci peut être instable et entraîner la destruction complète de l'appareil.

Les mouvements de roulis et de trainée étant naturellement peu amortis, différentes sources d'amortissements sont introduites pour maîtriser ce phénomène. Côté rotor, les adaptateurs de trainée jouent ce rôle tandis que côté fuselage, ce sont les amortisseurs de trains.

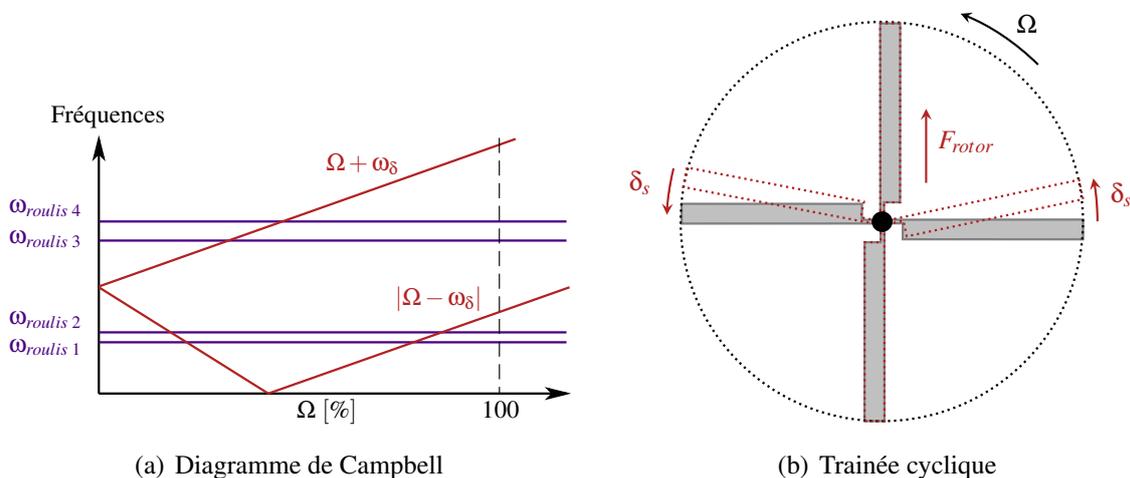


FIGURE 1.15: Résonance sol

### 3.2.2 Résonance air

La résonance air est un phénomène de couplage entre les mouvements de battement et de trainée de la pale et celui de roulis de l'appareil. En vol, le mouvement de roulis de l'appareil

entraîne un abaissement puis un soulèvement alternatif des pales. Sous l'action des efforts de Coriolis, il en résulte un mouvement de trainée cyclique se couplant, tout comme dans le cas de la résonance sol, avec le mouvement de roulis de la machine. Lorsque le roulis a lieu à une fréquence proche de celle du mode trainée en repère fixe, le couplage est très important et peut conduire à une divergence. Le domaine de vol de l'appareil s'en trouve alors limité.



---

# Les charges dynamiques et leur maîtrise

Le comportement aérodynamique et cinématique du rotor principal ayant été présenté dans le chapitre précédent, il est désormais question des charges dynamiques transmises par ce dernier au fuselage. Leur origine ainsi que leur transmission sont tout d'abord décrites. Dans un second temps, les différentes méthodes actives et passives visant à réduire ces charges par des systèmes additionnels en repère tournant sont présentées. Enfin, une étude bibliographique démontrant le potentiel des nouvelles méthodes de dimensionnement faisant appel, entre autres, aux couplages aéroélastiques, est proposée.

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Origines et transmission des charges dynamiques</b>	<b>34</b>
1.1	Aérodynamique instationnaire	34
1.2	Torseur tête rotor	37
<b>2</b>	<b>Systèmes de réduction des charges dynamiques</b>	<b>41</b>
2.1	Contrôle passif du rotor	41
2.2	Contrôle actif du rotor	42
<b>3</b>	<b>Dimensionnement aéroélastique du rotor</b>	<b>44</b>
3.1	Adaptation dynamique de la pale	44
3.2	Optimisation structurelle	46
3.3	Couplages aéroélastiques	47

---

# 1 Origines et transmission des charges dynamiques

En vol palier, les composantes statiques du torseur exercé par le rotor sur le fuselage assurent l'équilibre de la machine tandis que les composantes dynamiques génèrent des vibrations. Ces charges dynamiques trouvent leur origine dans les efforts aérodynamiques instationnaires ainsi que dans la réponse dynamique de la pale qui, une fois sollicitée par l'écoulement, transmet des actions mécaniques au moyeu rotor via l'articulation.

## 1.1 Aérodynamique instationnaire

Les charges aérodynamiques appliquées sur la pale présentent un caractère instationnaire trouvant son origine dans différents phénomènes.

### 1.1.1 Incidence et cinématique de la pale

L'origine première du caractère instationnaire des efforts aérodynamiques se trouve dans le comportement cinématique de la pale. Un nombre de Mach cyclique provenant de la dissymétrie de vitesse tangentielle de l'écoulement (Eq.1.16) et une incidence cyclique (Eq.1.19) provenant des mouvements de battement (Eq.1.21), trainée (Eq.1.27) et pas (Eq.1.9), entraînent une variation cyclique des efforts et moments aérodynamiques.

A ces excitations d'origines purement cinématiques viennent s'ajouter des phénomènes aérodynamiques complexes, décrits ci-après, enrichissant le contenu fréquentiel des charges aérodynamiques appliquées sur les pales.

### 1.1.2 Le flux induit

La vitesse induite, comme le montre le modèle du disque sustentateur de Froude (Eq.1.7), est directement liée à la portance développée par le rotor. A l'échelle du profil, l'écoulement génère une circulation à l'origine de la portance et du flux induit. Par conséquent, ce lien entre portance et vitesse induite est conservé et le flux induit varie en fonction de l'azimut et du rayon.

La vitesse induite jouant sur l'incidence des profils, son caractère instationnaire impact donc directement les efforts aérodynamiques.

### 1.1.3 Les effets de compressibilité

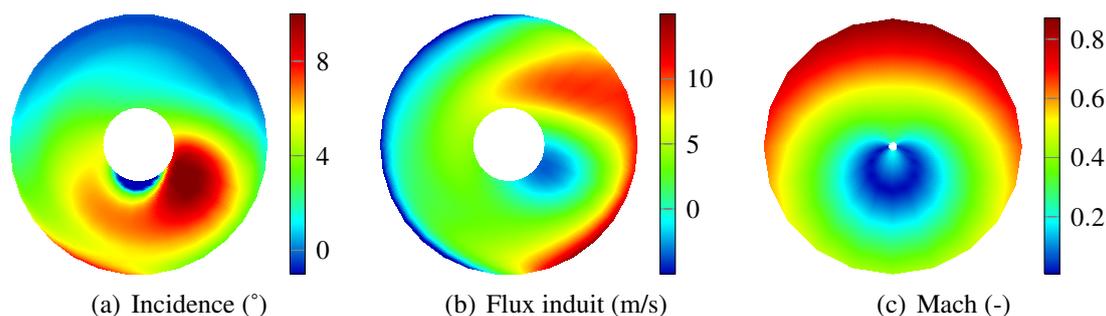
En vol de croisière, le Mach en bout de pale peut atteindre 0.9 (voir Fig.2.1.c). Des effets transsoniques apparaissent, modifiant le comportement aérodynamique des profils. Les polaires présentent alors des non-linéarités à l'origine de charges hauts harmoniques.

### 1.1.4 Le cercle d'inversion

En pale reculante et pour de faibles rayons, la vitesse d'avancement peut être supérieure à la vitesse provenant de la rotation du rotor. L'écoulement autour du profil est alors inversé, dégradant

ainsi les performances aérodynamiques des pales. Sur cette zone restreinte en azimuth, le comportement aérodynamique des profils est radicalement différent, induisant ainsi des variations de portance très localisées. Néanmoins, le cercle d'inversion est située dans une zone où la pression dynamique de la pale est très faible, limitant ainsi son influence.

Les polaires aérodynamiques évaluées de  $-180^\circ$  à  $180^\circ$  d'incidence, traduisent l'effet du cercle d'inversion sur les coefficients aérodynamiques  $C_z$ ,  $C_x$  et  $C_m$ .



**FIGURE 2.1:** Cartographies d'incidence, de Mach et de flux induit sur le disque rotor en vol d'avancement

### 1.1.5 Décrochage dynamique

Le décrochage dynamique apparaît pour de grandes vitesses d'avancement et pour de fortes poussées rotor, par exemple, lors de manœuvres dynamique de l'hélicoptère, virage ou "pull-up". C'est un phénomène instationnaire fortement non linéaire qui touche à la fois la zone de pale reculante à proximité du cercle d'inversion et la zone pale avançante dans le cas de décrochage du tourbillon de bord d'attaque.

Ce phénomène génère de fortes charges dynamiques sur les pales, les bielles de pas ainsi que les servo-commandes de plateau cyclique. Il est donc à l'origine de la limitation du domaine de vol. Au cours du décrochage dynamique, l'association d'une forte incidence et d'une vitesse de rotation de pas positive conserve le profil hors du décrochage et un tourbillon se forme en bord d'attaque. Mais, pour des conditions de fonctionnement particulières, le tourbillon de bord d'attaque se détache générant une brusque variation de moment aérodynamique. Tant que le tourbillon traverse le profil, la portance continue d'augmenter, mais c'est au moment où le tourbillon quitte le bord de fuite que le décrochage se produit, diminuant la portance. Il s'en suit une période au cours de laquelle l'écoulement se rattache progressivement au profil [DNC07]. Ce phénomène se traduit dans les polaires aérodynamiques le prenant en compte, par d'importantes boucles d'hysteresis.

L'effet du décrochage dynamique sur l'équilibre de l'hélicoptère et sur les charges dynamiques a notamment été étudié dans les travaux de Laxman et al. [LV09] dans lesquels il est démontré que pour de fortes vitesse d'avancement, le décrochage dynamique augmente significativement la réponse en torsion de la pale et qu'il introduit un nombre élevé d'harmonique dans les charges dynamiques.

De nombreuses recherches sont réalisées pour maîtriser ce phénomène que ce soit par le dimensionnement de profils présentant un angle de décrochage dynamique très élevés [ABB01], par le développement de modèles de décrochages dynamiques prédictifs [FB01, DNC07] ou par l'introduction de couplages élastiques pour limiter son apparition [Flo00].

### 1.1.6 Interactions pales-tourbillons (*Blade vortex interaction*)

Les interactions pales-tourbillons apparaissent notamment à faible vitesse d'avancement et lors des manœuvres de descente. Le tourbillon de bout de pale généré par la pale précédente vient frapper le bord d'attaque de la pale suivante [Con95]. Il en résulte un accroissement des charges dynamiques, ainsi qu'une augmentation du niveau acoustique externe émis par l'appareil. Les pales type BlueEdge™ [PR11], grâce à leur géométrie à double flèches, limitent l'interaction pale-tourbillon en réduisant l'interaction parallèle entre le tourbillon et la pale. Ces pales nouvelles générations permettent notamment un gain en terme d'acoustique externe.

Ce phénomène, bien que très pénalisant à basse vitesse d'avancement, n'est pas présent en vitesse

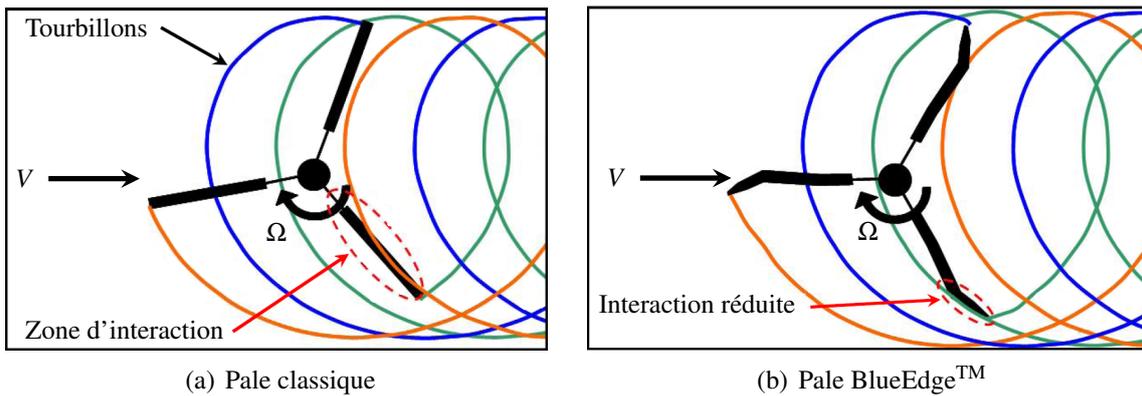


FIGURE 2.2: Interactions pales-tourbillons pour deux types de pales

de croisière car les tourbillons de bout pale sont évacués dans le flux induit hors de la zone rotor et ne percutent plus les pales du rotor principal.

### 1.1.7 Caractère périodique du chargement aérodynamique

En vol d'avancement stabilisé, ou vol palier, les phénomènes instationnaires suscités sont périodiques. Autrement dit, chaque pale rencontre le même environnement aérodynamique pour un même azimuth et ce, révolutions après révolutions du rotor. Les efforts aérodynamiques prennent donc la forme :

$$F_z^{Aero} = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(r) \cos(n\Omega t + \Phi_n)]$$

$A_n(r)$  correspond à la distribution radiale d'effort aérodynamique pour le  $n^{\text{ème}}$  harmonique. Les pales sont donc excitées aérodynamiquement sur un grand nombre d'harmoniques du rotor. Cela est visible en identifiant expérimentalement le spectre de fréquence du moment de flexion en

battement en un rayon donné de la pale Fig.2.3. Le signal obtenu est composé de pics situés aux harmoniques de la vitesse de rotation du rotor. Leur amplitude décroît rapidement avec leur rang.

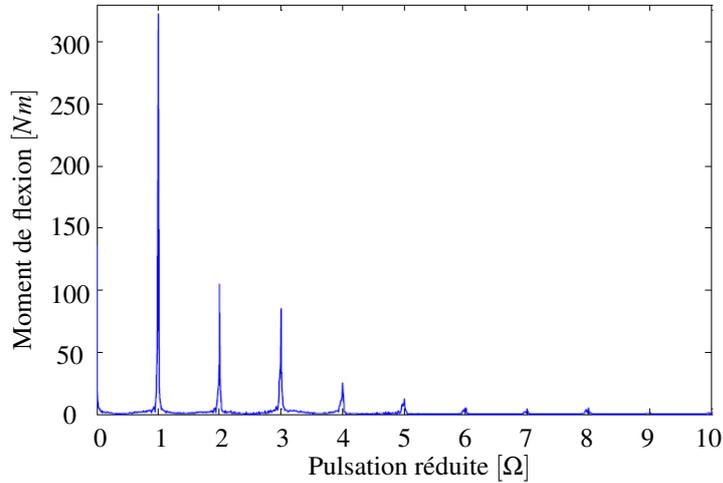


FIGURE 2.3: Spectre du moment de flexion

## 1.2 Torseur tête rotor

Le torseur tête rotor est le torseur des actions mécaniques exercées par l'ensemble des pales sur le moyeu rotor. Il est donc constitué de la somme des torseurs exercés individuellement par chaque pale sur le moyeu.

### 1.2.1 Torseur exercé par une pale sur le moyeu

Le torseur des actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu est constitué des efforts aérodynamiques et des efforts inertiels provenant du mouvement de la pale. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la pale donne :

$$\{\mathcal{T}_{pale \rightarrow moyeu}\} = \{\mathcal{T}_{air \rightarrow pale}\} - \{\mathcal{D}_{pale/R_0}\}$$

Dans le cas d'un rotor articulé pour lequel une raideur de commande  $K_\theta$  est considérée et après simplifications sur les termes en moments, le torseur des actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu est :

$$\{\mathcal{T}_{pale \rightarrow moyeu}\} = \left\{ \begin{array}{cc} F_x & K_\theta \cdot \theta \\ F_y & K_\beta \cdot \beta \\ F_z & K_\delta \cdot \delta + C_\delta \cdot \dot{\delta} \end{array} \right\}_{A, R_\psi}$$

Le torseur précédent est ensuite déplacé au centre tête rotor de façon à faciliter la sommation sur l'ensemble de pales. Il vient :

$$\{\mathcal{T}_{pale \rightarrow moyeu}\} = \left\{ \begin{array}{cc} F_x & K_\theta \cdot \theta \\ F_y & K_\beta \cdot \beta - eF_z \\ F_z & K_\delta \cdot \delta + C_\delta \cdot \dot{\delta} + eF_y \end{array} \right\}_{O, R_\psi}$$

En pratique, les termes de moments liés aux raideurs angulaires de battement et trainée sont négligeables devant ceux liés au pompage  $F_z$  et à l'effort coplanaire  $F_y$ . Le moment de commande suivant l'axe de la pale constitue quant à lui un critère de dimensionnement de la chaîne de commande et notamment des bielles de pas.

D'autre part, compte tenu du comportement périodique du rotor, les composantes de ce torseur peuvent être développées en série de la forme :

$$F^k = \sum_n F^n e^{in\Omega(t+\Delta t_k)}$$

où  $F^n$  est complexe,  $k$  et  $n$  correspondent respectivement au numéro de la pale et à l'harmonique considérée et  $\Delta t_k$  correspond au décalage temporel entre la pale de référence et la  $k^{\text{ième}}$  pale :

$$\Delta t_k = \frac{2\pi}{b\Omega} \cdot (k-1)$$

On définit alors l'azimuth de la pale  $k$  par :

$$\psi_k = \Omega(t + \Delta t_k)$$

Cela donne finalement, dans le repère lié au rotor  $R_\psi$  :

$$\{\mathcal{T}_{pale\ k \rightarrow moyeu}\} = \sum_n e^{in\psi_k} \left\{ \begin{array}{cc} F_x^n & 0 \\ F_y^n & -eF_z^n \\ F_z^n & eF_y^n \end{array} \right\}_{O, R_\psi}$$

### 1.2.2 Sommation sur l'ensemble des pales

Le torseur tête rotor caractérise les sollicitations de l'ensemble des pales sur le moyeu dans le repère de l'hélicoptère. Après projection du repère tournant  $R_\psi$  vers le repère fixe  $R_0$  puis sommation sur les  $b$  pales, il vient :

$$\{\mathcal{T}_{rotor \rightarrow moyeu}\} = \sum_{k=1}^b \sum_n e^{in\psi_k} \left\{ \begin{array}{cc} F_x^n \cos \psi_k - F_y^n \sin \psi_k & eF_z^n \sin \psi_k \\ F_y^n \cos \psi_k + F_x^n \sin \psi_k & -eF_z^n \cos \psi_k \\ F_z^n & eF_y^n \end{array} \right\}_{O, R_0}$$

**Sollicitations dans l'axe rotor** La projection du torseur tête rotor suivant l'axe  $\underline{z}_0$  donne l'effort de pompage  $\hat{F}_z$  et le moment de torsion du mât rotor  $\hat{M}_z$ .

$$\begin{aligned} \hat{F}_z &= \sum_{k=1}^b \sum_n F_z^n e^{in\psi_k} \\ \Leftrightarrow \hat{F}_z &= \sum_n F_z^n e^{in\Omega t} \cdot \sum_{k=1}^b e^{in\frac{2\pi}{b} \cdot (k-1)} \end{aligned}$$

où l'on retrouve la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $q$  :

$$\hat{F}_z = \sum_n F_z^n e^{in\Omega t} \cdot \sum_{k=1}^b q^{(k-1)} \quad \text{avec} \quad q = e^{in\frac{2\pi}{b}} \quad (2.1)$$

Cette dernière vaut :

$$\sum_{k=1}^b \left( e^{in\frac{2\pi}{b}} \right)^{(k-1)} = \begin{cases} \frac{1-q^b}{1-q} = \frac{1-e^{in2\pi}}{1-e^{in\frac{2\pi}{b}}} = 0 \text{ pour } n \neq kb \\ b \text{ pour } n = kb \end{cases}$$

Finalement, l'équation 2.1 se simplifie pour ne conserver que les harmoniques multiples du nombre de pale :

$$\hat{F}_z = b \sum_k F_z^{kb} e^{ikb\Omega t} \quad (2.2)$$

Il en va de même pour le moment de torsion du mât rotor :

$$\hat{M}_z = be \sum_k F_y^{kb} e^{ikb\Omega t}$$

**Sollicitations dans le plan rotor** La projection du torseur tête rotor dans le plan rotor  $(x_0, y_0)$  donne les efforts  $\hat{F}_y, \hat{F}_x$  et la moments  $\hat{M}_x, \hat{M}_y$ . Les développements seront conduits uniquement pour l'effort  $\hat{F}_x$  :

$$\begin{aligned} \hat{F}_x &= \sum_{k=1}^b \sum_n e^{in\psi_k} (F_x^n \cos \psi_k - F_y^n \sin \psi_k) \\ \hat{F}_x &= \sum_{k=1}^b \sum_n \left( \frac{F_x^n}{2} [e^{i(n+1)\psi_k} + e^{i(n-1)\psi_k}] - \frac{F_y^n}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} [e^{i(n+1)\psi_k} - e^{i(n-1)\psi_k}] \right) \\ \hat{F}_x &= \sum_{k=1}^b \sum_n \left( e^{i(n+1)\Omega t} \left[ \frac{F_x^n}{2} - \frac{F_y^n}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \right] \left[ e^{i(n+1)\frac{2\pi}{b}} \right]^{(k-1)} + e^{i(n-1)\Omega t} \left[ \frac{F_x^n}{2} + \frac{F_y^n}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \right] \left[ e^{i(n-1)\frac{2\pi}{b}} \right]^{(k-1)} \right) \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement sur les suites géométriques que précédemment, l'expression précédente se simplifie pour devenir :

$$\hat{F}_x = \frac{b}{2} \sum_k e^{ikb\Omega t} \left( F_x^{kb-1} + e^{i\frac{\pi}{2}} F_y^{kb-1} + F_x^{kb+1} + e^{-i\frac{\pi}{2}} F_y^{kb+1} \right)$$

Pour les autres composantes dans le plan, il vient, par analogie :

$$\begin{cases} \hat{F}_y = \frac{b}{2} \sum_k e^{ikb\Omega t} \left( F_y^{kb-1} + e^{-i\frac{\pi}{2}} F_x^{kb-1} + F_y^{kb+1} + e^{i\frac{\pi}{2}} F_x^{kb+1} \right) \\ \hat{M}_x = e \frac{b}{2} \sum_k e^{ikb\Omega t} \left( e^{-i\frac{\pi}{2}} F_z^{kb-1} + e^{i\frac{\pi}{2}} F_z^{kb+1} \right) \\ \hat{M}_y = -e \frac{b}{2} \sum_k e^{ikb\Omega t} \left( F_z^{kb-1} + F_z^{kb+1} \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les actions mécaniques coplanaires dans le repère fixe sont donc aussi de fréquences multiples du nombre de pale fois la vitesse de rotation du rotor. Elles sont issues, dans le repère tournant, des excitations coplanaires en  $(kb - 1)\Omega$  et  $(kb + 1)\Omega$ .

### 1.2.3 Transmission des charges dynamiques : Bilan

Les résultats précédents ont permis de démontrer que le rotor agit comme un filtre<sup>1</sup>. Compte tenu de l'axisymétrie du rotor et de son comportement périodique, la plupart des composantes harmoniques exercées par chaque pale sur le moyeu se compensent.

En repère tournant, seuls les harmoniques en  $(kb \pm 1)\Omega$  et  $kb\Omega$  se cumulent pour former, en repère fixe, des excitations en  $kb\Omega$ . Le tableau 2.1 illustre le lien entre origine et fréquences des excitations dans le repère tournant, et nature et fréquences des excitations en repère fixe.

Repère Tournant		Repère Fixe	
Mouvement de la pale associé	Fréquences	Effort Transmis	Fréquences
Battement	$kb\Omega$	Pompage : $\hat{F}_z$	$kb\Omega$
	$(kb \pm 1)\Omega$	Moments Coplanaires : $\hat{M}_x, \hat{M}_y$	$kb\Omega$
Trainée	$kb\Omega$	Couple : $\hat{M}_z$	$kb\Omega$
	$(kb \pm 1)\Omega$	Effort Coplanaires : $\hat{F}_x, \hat{F}_y$	$kb\Omega$

TABLE 2.1: Origine et transmission des charges dynamiques

La figure 2.4 représente les composantes du torseur tête rotor dans les axes appareil ainsi que le spectre des vibrations mesurées en cabine pour un rotor 4 pales. Les composantes en  $kb\Omega$  sont nettement majoritaires devant celles issues de l'anisotropie du rotor et des efforts aérodynamiques exercées sur le fuselage.

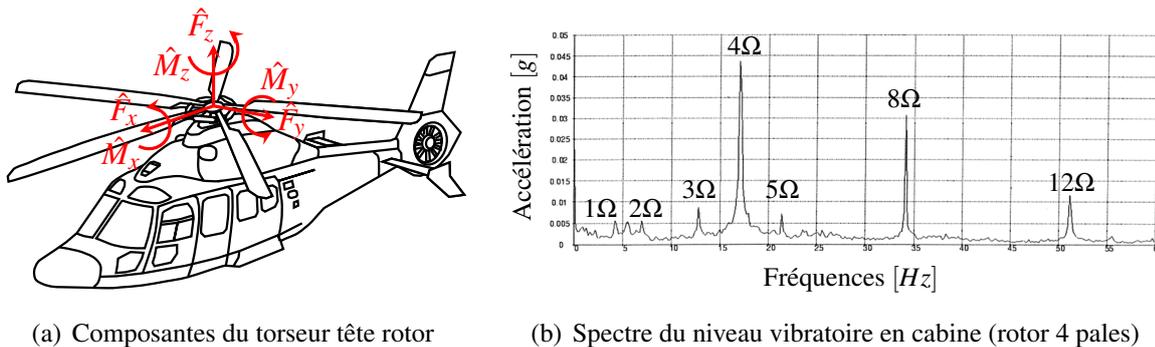


FIGURE 2.4: Le torseur tête rotor et ses conséquences vibratoires

1. Pour une démonstration prenant en compte à la fois un décalage angulaire entre l'origine du repère rotor et l'origine du repère fixe ainsi que le cas d'un rotor tournant en sens horaire, se référer à [Cra05].

## 2 Systèmes de réduction des charges dynamiques

Seuls sont considérés les systèmes additionnels agissant directement sur le torseur tête rotor en repère tournant. Les systèmes antivibratoires en repère fixe, du type suspensions (*SARIB*) ou contrôle actif de réponse de structure (*ACSR*), n'agissent pas sur la cause (le torseur tête rotor) mais soit sur la transmission des charges vibratoires, soit sur les conséquences (les vibrations) et ne sont donc pas abordés.

Le contrôle des charges par un dimensionnement optimisé du rotor est présenté dans la partie suivante.

### 2.1 Contrôle passif du rotor

#### 2.1.1 Antivibreux de tête à pendules verticaux

Ce dispositif antivibratoire est constitué de masses battantes en liaison pivot d'axe  $y_\psi$  avec la pale. Le comportement dynamique des pendules est donc traduit par les mêmes équations que celles décrivant le battement de la pale dans le vide. En jouant sur leur masse, la longueur du pendule et leur position en envergure, il est possible de les positionner fréquentiellement. Ainsi, si l'objectif est de réduire les charges transmises en  $n\Omega$  en repère tournant, il suffit de concevoir un pendule de fréquence propre  $n\Omega$ . Celui-ci est excité par la pale à sa fréquence propre et présente alors un mouvement de grande amplitude générant un effort inertiel en opposition de phase avec l'effort transmis par la pale.

Les pendules sont généralement utilisés dans le cas des rotor 4 pales de façon à limiter le moment

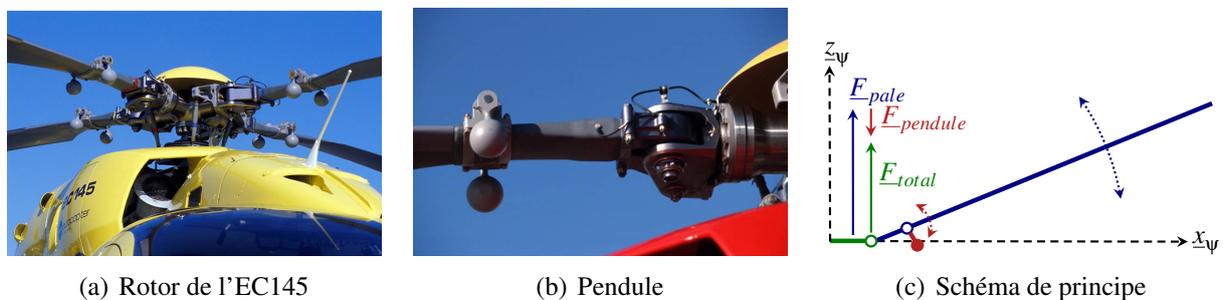


FIGURE 2.5: Antivibreux à pendules verticaux

coplanaire en  $3\Omega$  en repère tournant. Leur fréquence propre est donc proche de  $3\Omega$ . La masse des pendules peut varier de 2kg à 10kg par pale et ce dispositif permet une réduction significative des niveaux vibratoires en cabines. D'autre part, la dynamique du pendule étant régie par l'effet centrifuge, ce système est capable de s'adapter à des modifications de vitesse de rotation rotor.

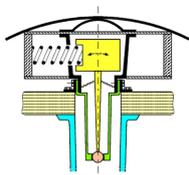
#### 2.1.2 Antivibreux de tête coplanaires

Ces dispositifs sont constitués soit d'une masse située au centre tête rotor, soit de pendules dans le plan rotor. Dans les deux cas, les masses se déplacent dans le plan  $(x_\psi, y_\psi)$ . Le principe

est sensiblement le même que pour les pendules verticaux puisque raideurs et masses sont dimensionnées de façon à faire coïncider la fréquence propre du système avec les harmoniques à réduire en repère tournant. Les efforts inertiels générés s'opposent alors aux efforts coplanaires provenant des pales.

Ces dispositifs sont généralement utilisés dans le cas des rotors trois pales de façon à diminuer les efforts tranchant coplanaires  $\hat{F}_x$  et  $\hat{F}_y$  en  $2\Omega$  en repère tournant. Ces efforts tranchants sont très importants dans le cas d'un tripale car la réponse du 1<sup>er</sup> mode de trainée en  $2\Omega$  présente une forte amplitude en raison de l'effet de Coriolis provenant du mouvement de battement en  $1\Omega$  (voir Eq.1.26).

Contrairement aux pendules coplanaires, le résonateur coplaire ne s'adapte pas à des modifications de régimes de rotation du rotor.



(a) Schéma de principe du résonateur coplaire



(b) Résonateur coplaire de l'AS355



(c) Pendules coplanaires

FIGURE 2.6: Dispositifs antivibratoires coplanaires

## 2.2 Contrôle actif du rotor

L'utilisation du contrôle actif pour optimiser le comportement dynamique du rotor et limiter les charges dynamiques transmises fait l'objet de nombreuses recherches. L'objectif est de générer des efforts aérodynamiques instationnaires dont la phase est asservie de façon à minimiser les charges dynamiques. Ce type de système n'est pas commercialisé.

### 2.2.1 Contrôle multi-cyclique (*Higher Harmonic Control*)

Les plateaux fixe et cyclique classiques sont conçus de façon à transmettre des commandes de pas collective et cyclique en  $1\Omega$  du repère fixe vers le repère tournant. Le contrôle multi-cyclique vise quant à lui, à imposer des commandes de pas hautes harmoniques de façon à modifier les efforts aérodynamiques instationnaires appliqués sur la pale [MC08].

Les actionneurs dédiés au contrôle multicyclique imposent des déplacements en  $b\Omega$  au plateau de commande, aboutissant à des efforts aérodynamiques et inertiels instationnaires en  $(b-1)\Omega$ ,  $b\Omega$  et  $(b+1)\Omega$  en repère tournant.

Lorsque la phase du contrôle est correctement imposée, ce type de système aboutit à de fortes réductions des charges dynamique mais au dépend de la masse puisqu'il nécessite un apport d'énergie hydraulique très important.

### 2.2.2 Contrôle individuel de pale (*Individual Blade Control*)

A la différence du contrôle multi-cyclique, chaque pale est commandée indépendamment des autres. D'autre part, il est possible d'imposer directement des variations de pas en  $(b - 1)\Omega$ ,  $b\Omega$  et  $(b + 1)\Omega$  offrant une meilleure maîtrise des efforts aérodynamiques instationnaires.

Classiquement, ce type de contrôle fait appel à des actionneurs placés entre le plateau cyclique et le pied de pale. Il a été testé en soufflerie mais s'avère compliqué à mettre en oeuvre sur des hélicoptères commerciaux, notamment à cause de la nécessité d'un apport d'énergie du repère fixe vers le repère tournant.

D'autres architectures de contrôle individuel de pale existent et sont au stade de développement.

**Volets actifs de bord de fuite** L'utilisation de volets actifs de bord de fuite fait l'objet de nombreuses études. Chaque pale est équipée de volets commandés via des cellules piezoélectriques ou des actionneurs hydrauliques. Ces volets sont soit placés en bout de pale de façon à maximiser leur efficacité, soit intégrés au sein de la pale. L'utilisation de servoflap non intégrés entraîne néanmoins une augmentation significative de la traînée aérodynamique et peut aboutir à une augmentation de la puissance requise en vol.

Cranga et al. [CA08] présentent des résultats prometteurs sur la technologie Blue Pulse, constituée de plusieurs volets actifs intégrés, commandés par des cellules piezoélectriques. Des essais en vol ont été réalisés sur BK117 et EC145, et, après identification expérimentale d'une matrice de transfert permettant un contrôle optimal, une réduction importante du pompage et des moments coplanaires en  $4\Omega$  a été obtenue.

Milgram et Chopra [MI95] ont étudié dans le cadre d'un rotor quatre pales articulés, l'influence d'un contrôle en boucle ouverte des déflexions en  $3\Omega$  et  $4\Omega$  de volets actifs intégrés. Les réductions du torseur tête rotor proviennent principalement d'une modification des réponses du troisième mode de battement et de la torsion.

Enfin, Ganguli et al. [GV04] ont démontré, dans le cas d'un rotor quatre pales équipé de volets actifs animés de mouvement en  $3\Omega$ ,  $4\Omega$  et  $5\Omega$ , l'importance de la position radiale des volets ainsi que la plus grande efficacité des systèmes constitués de plusieurs petits volets.

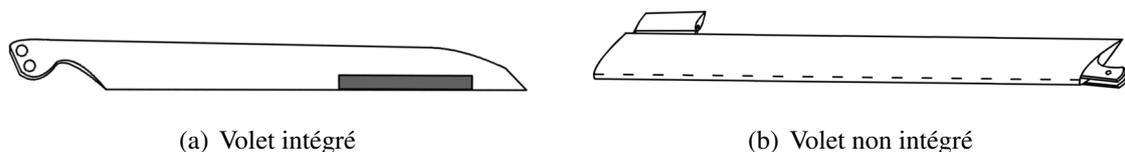


FIGURE 2.7: Volets actifs de bord de fuite

**Contrôle actif de vrillage** Des recherches sur l'utilisation d'actionneurs intégrés au sein même de la pale permettant de maîtriser son vrillage, sont également réalisées. Ce type de technologie requiert l'utilisation de fibres composites actives, de macro-fibres composites ou d'actionneurs piezoélectriques [WMWTY<sup>+</sup>02].

Contrairement aux volets actifs, ce système n'augmente pas la traînée aérodynamique des profils

au cours de son fonctionnement. Il nécessite néanmoins plus d'énergie pour fonctionner puisque l'ensemble de la pale dans son envergure est sollicitée.

Des expériences ont été réalisées sur des maquettes de rotor quatre pales et il a été observé une forte influence du contrôle sur le niveau du torseur tête rotor, pour des amplitudes de vrillage dynamique allant de  $1.1^\circ$  à  $1.4^\circ$ .

### 3 Dimensionnement aéroélastique du rotor

Les systèmes additionnels de réduction des charges dynamiques représentent une pénalité de masse non négligeable. De plus, la plupart des systèmes actifs nécessitent un apport d'énergie du repère fixe vers le repère tournant. Une méthode alternative consiste à dimensionner la pale de façon à limiter les charges dynamiques transmises au fuselage.

Différents niveaux de dimensionnement sont envisageables :

1. Adaptation dynamique de la pale
2. Optimisation structurelle
3. Introduction de couplages aéroélastiques

#### 3.1 Adaptation dynamique de la pale

Actuellement chez Airbus Helicopters, une adaptation dynamique des pales est réalisée de façon à éviter des réponses excessives du rotor sur les harmoniques d'intérêt.

##### 3.1.1 Placement fréquentiel

De façon à limiter les charges dynamiques transmises du rotor vers le fuselage, un placement fréquentiel des modes de pales est réalisé. Les diagrammes de Campbell permettent de visualiser l'évolution des fréquences en fonction de la vitesse de rotation du rotor (voir figure 2.8.a).

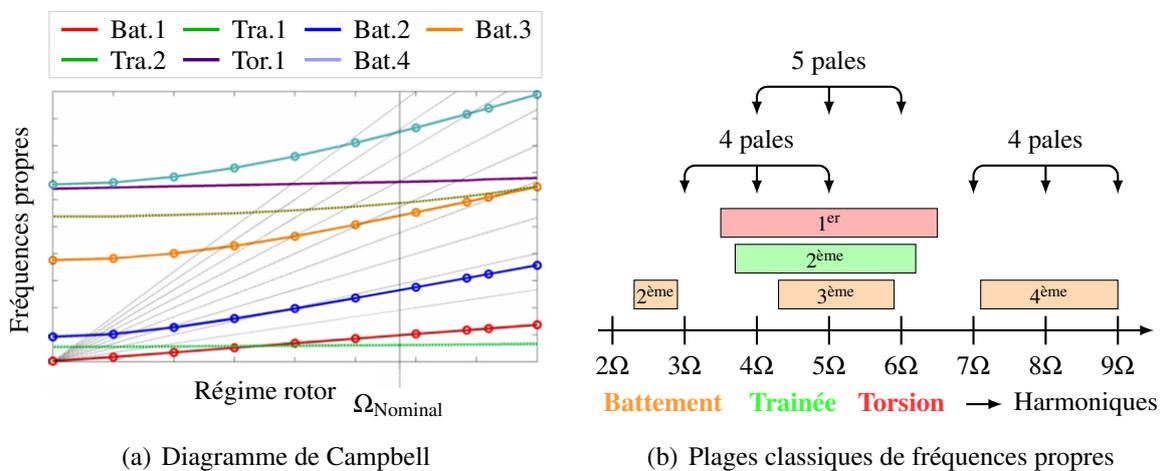


FIGURE 2.8: Placement fréquentiel des modes de pale

Les fréquences propres des modes de battement sont très sensibles à la vitesse de rotation car, comme le montre le cas de la pale rigide (voir Eq.1.11), l'effet centrifuge joue un rôle prépondérant dans la dynamique de ces modes. Cela est moins marqué pour les modes de trainée, pour lesquels l'évolution des fréquences propres en fonction du régime de rotation est moins marquée (voir Eq.1.24). Les modes de torsion quant à eux, présentent des fréquences propres quasiment constantes car leurs comportements dynamiques est principalement régis par la raideur de torsion. Le réseau de droites passant par l'origine correspond aux harmoniques d'excitation aérodynamique. De façon à éviter une réponse excessive des modes, un écart fréquentiel standard minimum de  $0.2\Omega$  entre harmoniques et fréquences propres des pales est assuré au régime nominal. La figure 2.8.b représente le placement fréquentiel classique des différents modes de battement, trainée et torsion par rapport aux harmoniques aérodynamiques générant des vibrations en repère fixe dans les cas de rotors quatre et cinq pales.

### 3.1.2 Mise en œuvre

Pour influencer sur les fréquences propres des pales, les ingénieurs modifient leurs caractéristiques structurales. Une pale est composée d'un longeron, d'un arêtier de bord de fuite, d'une nervure, d'un revêtement permettant de conserver une forme de profil aérodynamique et de mousses assurant le remplissage, Fig.2.9.

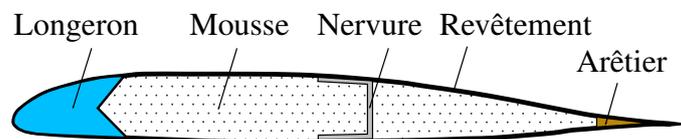


FIGURE 2.9: Structure d'une section de pale

En agissant sur les dimensions de ces différents éléments et sur les matériaux qui les constituent, il est possible de modifier les fréquences propres.

Les modes de battement, compte tenu de l'importance de l'effet centrifuge sur leur comportement, sont adaptés dynamiquement en jouant principalement sur la distribution de masse. Des boîtiers pouvant accueillir des masses non structurales sont prévus à cet effet en différentes sections de la pale. Il est également possible de jouer sur la raideur de battement  $EI_B$  via l'ajout de plis composites à  $0^\circ/90^\circ$  sur le revêtement de la pale.

Les modes de trainée sont quant à eux adaptés d'une part, en jouant sur la distribution de raideur structurale  $EI_T$ , pour laquelle l'arêtier de bord de fuite joue un rôle prépondérant, et d'autre part, en modifiant les caractéristiques de l'adaptateur de trainée.

Enfin, le placement fréquentiel des modes de torsion est assuré soit en jouant sur les plis composites à  $\pm 45^\circ$  composant le revêtement et influençant la raideur en torsion  $GJ$ , soit en jouant sur la raideur torsionnelle de la chaîne de commande (bielle de pas, manchon).

Dans tous les cas, un compromis doit être trouvé car chacun de ces paramètres de conception a une influence sur l'ensemble des modes.

## 3.2 Optimisation structurelle

La seule adaptation dynamique, basée sur la conservation d'un écart empirique entre fréquences propres et harmoniques rotor, n'est en général pas suffisante pour assurer un niveau vibratoire acceptable en cabine. Grâce à l'amélioration des outils de prédiction, de nombreuses études faisant appel à des processus d'optimisation structurelle ont vu le jour. Celles-ci ont recours à des codes aéroélastiques en mesure de déterminer la réponse du rotor en vol d'avancement. Ainsi, en réalisant une optimisation sur les différentes caractéristiques de section (voir Fig.2.9), sur la position et la valeur de masses non structurelles ainsi que sur les paramètres du plan de forme, il est possible de minimiser le torseur tête rotor.

### 3.2.1 Etat de l'art numérique

Lim et Chopra [LC89] ont présenté l'optimisation structurelle d'un rotor quatre pales non articulé de façon à réduire les charges vibratoires tout en conservant le même niveau de stabilité en vol d'avancement. Les variables de conception considérées sont la distribution radiale de masses non structurelles, la position en corde des centres de gravité des sections ainsi que les différentes raideurs. Une étude de sensibilité de la réponse de la pale, des charges dynamiques et des valeurs propres par rapport aux variables de conception est réalisée via une approche analytique. En jouant sur les raideurs et les masses non structurelles, une réduction comprise entre 60% et 90% des composantes du torseur tête rotor est obtenu.

Ganguli et Chopra [GC96c] quant à eux, ont réalisé des études de sensibilité pour un rotor non articulé de quatre pales. Les influences de masses non structurelles et de leur position, des raideurs, et de la géométrie de la pale sont étudiées. Ces calculs de sensibilité sont reliés à un processus d'optimisation ayant pour fonction objectif une fonction scalaire regroupant les six composantes du torseur tête rotor. L'optimum obtenu permet une réduction de 25% à 60% de la fonction objectif.

Plus récemment, de nombreuses études ont été menées sur l'utilisation de méthodes d'optimisation avancées pour déterminer des designs aboutissant à une réduction des vibrations. Les codes aéroélastiques étant assez lourds à mettre en œuvre au sein d'outils d'optimisation classiques (algorithme génétique, méthodes de gradients), le recours à des surfaces de réponse permet de limiter le temps de calcul.

Ganguli [Gan02] a ainsi couplé des outils d'analyses aéroélastiques à des méthodes d'approximation basés sur les surfaces de réponse de façon à évaluer rapidement une fonction objectif représentative des charges vibratoires. L'algorithme d'optimisation appliqué à des surfaces de réponses polynômiales du second ordre construites à partir du design de référence, a permis de trouver un optimum assurant une réduction de 30% de la fonction objectif.

Glaz et al. [GFL08, GFL09] ont également montré le potentiel des méthodes d'optimisation basées sur les surfaces de réponses. Des méthodes de krigeage sont utilisées pour générer la fonction objectif sur l'ensemble de l'espace d'étude puis la surface approchée est utilisée avec succès pour trouver un optimum global.

### 3.2.2 Etat de l'art expérimental

Wilbur [Wi91] a mené une campagne d'essais en soufflerie pour étudier l'influence d'une masse non structurale sur les charges vibratoires. Les mesures ont été réalisées pour dix positions radiales différentes d'une masse équivalente à 8.7% de la masse totale de la pale et pour des ratios d'avancement allant de 0.1 à 0.35. Il a ainsi été démontré qu'un positionnement correcte de la masse aboutit à des réductions de 25% de l'amplitude de certaines composantes, mais que cela dépend des conditions de vol.

Young et Tarzanin [YJ91] quant à eux, ont testé en soufflerie deux rotors quatre pales présentant des plans de forme, des vrillages et des profils aérodynamiques identiques. L'un est dimensionné par une adaptation dynamique classique et l'autre via un processus d'optimisation analytique. Les paramètres d'optimisation considérés sont la répartition radiale de masse, de raideurs en battement, trainée et torsion, de position du centre de gravité, les fréquences propres et la flèche. La fonction objectif est définie comme une moyenne pondérée des charges dynamiques en repères fixes. Viennent s'ajouter des contraintes sur les propriétés matériaux et sur les relations entre masse et raideurs. Une corrélation entre essais et analyses est réalisée et montre le bon fonctionnement du processus d'optimisation. Néanmoins, la prédiction du torseur tête rotor présente des lacunes provenant des modèles de sillage considérés.

## 3.3 Couplages aéroélastiques

La notion de "couplage aéroélastique" fait référence aux couplages entre mouvements de flexion, traction et torsion, permettant une meilleure maîtrise des efforts aérodynamiques, notamment instationnaires, sollicitant la pale. Lorsqu'ils sont maîtrisés, ils peuvent aboutir à une augmentation des performances, de la stabilité ou encore à une réduction des amplitudes de réponse de la pale limitant les charges dynamiques.

La maîtrise des couplages aéroélastiques passe par l'introduction de couplages purement structuraux, d'origines inertielle ou élastique. Les couplages inertiels apparaissent lorsque un déport entre centre de gravité et centre de torsion des sections existe. Ils sont présents sur des pales standards et peuvent être maîtrisés via l'ajout des masses non structurales déportées. Les couplages élastiques quant à eux, proviennent de l'anisotropie des pales composites. Ils ont jusqu'à présent été inexploités sur les hélicoptères commercialisés.

### 3.3.1 Anisotropie des pales composites

Le revêtement de la pale est composé de plis composites à  $0^\circ/90^\circ$  par rapport à l'axe de pas, assurant la rigidité de battement, et de deux plis à  $\pm 45^\circ$ , assurant la rigidité en torsion. Cela permet d'assurer un comportement purement isotrope. En modifiant l'orientation de ces plis, et en jouant sur les symmétries entre intrados et extrados, il est possible de générer des couplages élastiques. La figure 2.10 illustre une poutre caisson représentative d'une pale. Les couplages battement-torsion sont obtenus lorsque intrados et extrados présentent des orientations de fibres parallèles, Fig.2.10.a. Ainsi, lorsque la pale fléchit vers le haut, l'intrados est sollicité en traction tandis que l'extrados est sollicité en compression. Compte tenu de l'orientation des fibres, cela génère des contraintes de cisaillement de sens opposés aboutissant à un moment de torsion. Lorsque les

fibres présentent des orientations opposés entre intrados et extrados, Fig.2.10.b, une sollicitation en traction générera des efforts tranchants de sens opposés. Il s'agit alors de couplage en traction-torsion. Enfin, pour générer des couplages trainée-torsion, il ne faut plus jouer sur les plis de l'intrados et l'extrados, mais sur ceux composant les faces avant et arrière du longeron, Fig.2.10.c.

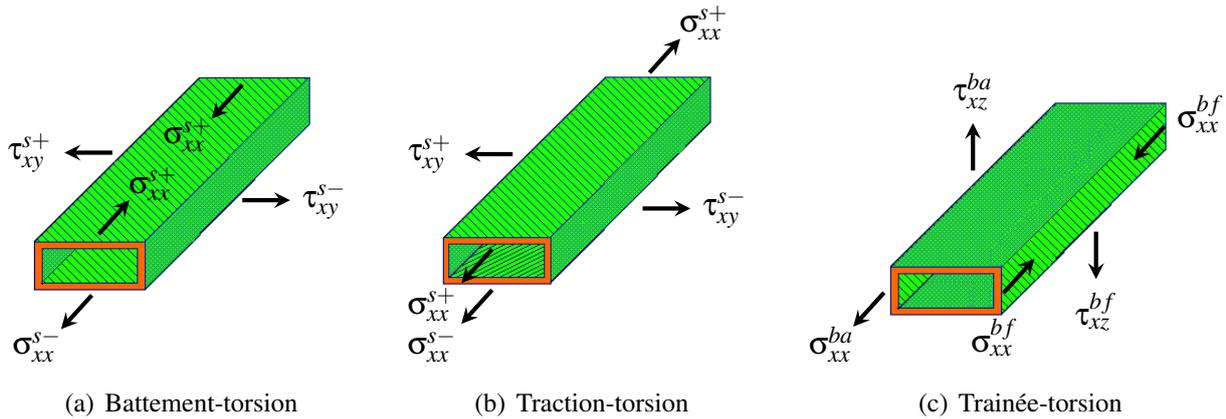


FIGURE 2.10: Couplages élastiques obtenus suivant l'orientation des plis

L'ouvrage de Gay [Gay05] constitue une référence pour la description du comportement anisotrope des matériaux composites. Pour ce qui est des applications aux pales, Piatak [Pia97] a étudié les limites physiques des couplages élastiques ainsi que leurs effets sur les caractéristiques de rigidités. Il a démontré qu'une modification de l'orientation des plis favorisant le couplage entraîne une chute de la rigidité effective de flexion et torsion. Des études paramétriques faisant intervenir la corde, la longueur du longeron, l'orientation et le ratio des plis ainsi que les matériaux utilisés ont été menées. Il a ainsi évalué les limites théoriques des rigidités élastiques couplées adimensionnées en battement-torsion, trainée-torsion et traction-torsion et a démontré qu'une orientation des plis à  $22.5^\circ$  au sein du revêtement permet de maximiser les couplages élastiques.

### 3.3.2 Etat de l'art : Analyses numériques

La présence de couplages élastiques permet de maîtriser le comportement dynamique de la pale en modifiant les efforts aérodynamiques appliqués sur celle-ci via la torsion induite par le mouvement de battement. A partir du moment où les outils de prédiction du comportement dynamique des rotors ont permis la prise en compte de ces couplages aéroélastiques, de nombreuses analyses ont été menées de façon à évaluer leurs apports sur la stabilité et la réduction du torseur tête rotor.

Smith et Chopra [SC93] ont étudié les gains apportés par les pales composites couplées, en termes de stabilité et de réduction des charges dynamiques d'un rotor non articulé. Leur analyse a montré d'une part, l'augmentation des marges de stabilité grâce aux couplages trainée-torsion ainsi que la légère augmentation des charges dynamiques. Et d'autre part, que les couplages battement-torsion et traction-torsion n'ont pas d'influence sur la stabilité mais permettent une réduction de certaines composantes du torseur tête rotor.

Ganguli et Chopra [GC96b, GC96a] ont présenté une optimisation aéroélastique d'un rotor non articulé constitué de pales conçues à partir de longerons à deux caissons. Les pales sont découpées en cinq tronçons de longueurs égales. Les différentes orientations de fibre composite au sein des longerons, constituent les paramètres d'optimisation du processus. La fonction objectif est définie par la somme des normes de chacune des six composantes du torseur tête rotor. Il est ainsi démontré que l'introduction de couplages élastiques optimisés permet de réduire de 5% à 28% la fonction objectif pour une vitesse d'avance de  $\mu = 0.3$ . A contrario, les couplages trainée-torsion ont très peu d'influence sur les charges dynamiques.

Ils ont ensuite présentés le même type d'étude avec cette fois-ci la prise en compte de la position en corde de masses non structurelles ainsi que la flèche, le dièdre et la répartition en corde dans le processus d'optimisation [GC97]. Des réductions comprises entre 40% et 60% des composantes du torseur tête rotor sont obtenues.

Yuan et Friedmann [YF98] ont également appliqués des méthodes d'optimisation aéroélastique similaires de façon à dimensionner des rotors non articulés 4 pales. Il a ainsi été démontré qu'utiliser la composante de pompage en tant que fonction objectif aboutit à des réductions pouvant aller de 30% à 40% de cette composante mais également à une augmentation des autres composantes. Enfin, Floros [Flo00] a réalisé des études numériques portant sur la capacité des couplages élastiques à agir sur la réponse de la pale, les charges et le décrochage dynamique dans le cas des rotor articulés et non articulés. Une étude de sensibilité démontrant la grande influence de la fréquence propre du deuxième mode de battement et de l'amplitude des couplages élastiques sur le vrillage induit a été réalisée. Il a été démontré que les couplages élastique permettent une réduction de 2° de l'angle d'incidence maximum du côté pale reculante, évitant le décrochage dynamique et assurant une redistribution de la portance sur le rotor. Le décrochage est évité grâce au comportement dynamique du deuxième mode de battement couplé. D'autre part, les couplages ne permettent pas une réduction simultanée de l'ensemble des composantes du torseur tête rotor.

De nombreux travaux ont également été réalisés sur les convertibles. Ces appareils présentent un mode de fonctionnement "hélicoptère" et un mode "avion". Le régime rotor varie d'environ 15% entre ces deux configurations. Cela rend envisageable les couplages traction-torsion permettant l'optimisation du vrillage suivant le cas de vol. Pour le dimensionnement dynamique du rotor, ces deux configurations de vol se traduisent par la prise en compte de deux séries d'harmoniques d'excitation à éviter. D'autre part, les résonances et croisements de mode lors de la transition d'un mode de fonctionnement à l'autre sont à proscrire. Le flottement gyroscopique, provenant d'un couplage entre le rotor, la nacelle le supportant et l'aile du convertible, constitue la principale instabilité aéroélastique à prendre en compte.

Nixon et al. [Nix93, NPCP99] ont étudié la capacité des pales composites couplées en battement-torsion et traction-torsion à améliorer les performances et la stabilité aéroélastique des convertibles. Les outils analytiques mis en place ont permis de démontrer que, pour atteindre des niveaux suffisant de couplage traction-torsion aboutissant à une amélioration des performances, l'ajout de masse en bout de pales est nécessaire. Celui-ci entraîne une diminution de la fréquence propre de torsion de l'aile réduisant les marges de stabilité au flottement gyroscopique. Une augmentation de la raideur en torsion de l'aile peut palier ce problème. D'autre part, il est démontré que les couplages flexion-torsion peuvent augmenter les marges de stabilité et n'influencent pas de façon

significative les performances.

### 3.3.3 Etat de l'art expérimental

Bien que de nombreuses analyses aéroélastiques ont démontrées les bénéfiques potentiels provenant de couplages élastiques au sein des pales composites, assez peu d'études expérimentales ont été menées.

Lake et al. [LNW<sup>+</sup>92] ont démontré la faisabilité du contrôle passif de vrillage sur rotor de convertible via des couplages élastiques type traction-torsion. Des maquettes de rotor à faible vrillage ont été testées en vol stationnaire. Les variations de vrillage induits par le couplage ont été mesurées en fonction de la vitesse de rotation. Des différences de vrillage de  $5.24^\circ$  avec pales lestées et  $2.54^\circ$  avec pales non lestées ont été observées.

Chopra et al. [CNBB04] ont quant à eux conçu et testé en soufflerie cinq maquettes de rotor 4 pales présentant différentes répartitions de couplage élastique battement-torsion. Deux d'entre elles présentent des répartitions uniformes avec le rayon, deux autres non uniformes et une dernière ne présente pas de couplage. Une amplitude de couplage élastique de 33% de la raideur en torsion est utilisée. Les mêmes fréquences des modes rotors ont été conservées de façon à ne pas masquer les effets des couplages sur la réponse vibratoire. Différentes vitesses de rotation, ratios d'avancement et niveaux de poussée sont testés. Les couplages permettent une diminution de l'effort de pompage en  $4\Omega$  (entre 1% et 58%) pour toutes les configurations testées. Néanmoins, suivant les cas, une augmentation de l'amplitude des autres composantes apparaît.

**British Experimental Rotor Program** Le projet *BERP* est un programme expérimental britannique mené par Agusta-Westland sur l'AW101 depuis les années 70, et ayant pour objectif d'optimiser les performances, le comportement dynamique et la fabrication de pales composites [SG09, HSH08]. Une approche multidisciplinaire faisant intervenir les métiers de l'aérodynamique, de la dynamique, de la tenue mécanique, des procédés et des matériaux composites a été mise en place de façon à optimiser la pale au plus tôt lors de sa conception. Les différents programmes *BERP* se sont articulés autour des thèmes suivants :

1. *BERP I* : conception, fabrication et caractérisation des pales composites
2. *BERP II* : développement des procédés de fabrication et des profils aérodynamiques
3. *BERP III* : augmentation de la portance et des performances en vol à grande vitesse d'avancement
4. *BERP IV* : nouveaux profils, bout de pale détachable, bouclier non métallique et augmentation du vrillage de  $6^\circ$  à  $16^\circ$  pour améliorer les performances en vol stationnaire et vol d'avancement

Les évolutions de la pale *BERP IV* ont permis la réduction de la puissance nécessaire en vol stationnaire et d'avancement ainsi que la conservation du même niveau vibratoire que la pale *BERP III*. Ce dernier point a notamment été rendu possible par l'utilisation d'algorithme d'optimisation structurelle et l'introduction de couplages aéroélastiques.

L'optimisation structurelle de la pale *BERP IV* est intervenue sur différents paramètres de section de la pale, tels que l'épaisseur du bord d'attaque, l'épaisseur des plis composites au sein du

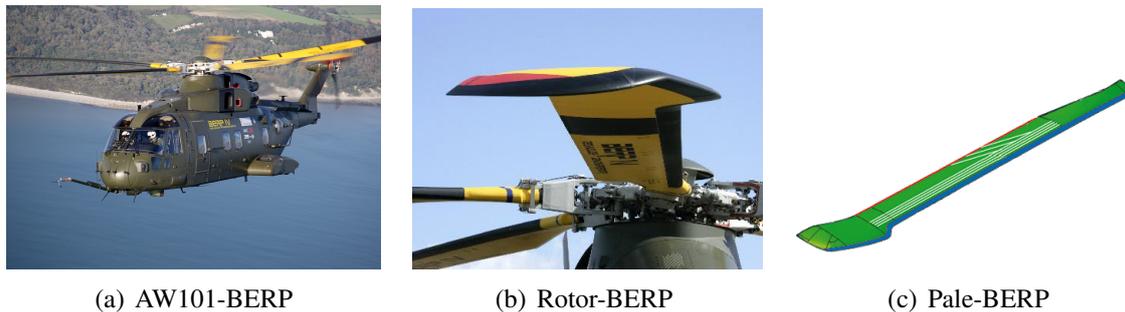


FIGURE 2.11: Programme expérimental *BERP IV*

longeron, ainsi que l'épaisseur et la largeur de l'arétier de bord de fuite. Deux critères de minimisation sont considérés pour mener le processus. L'un basé sur un indice égal à la somme quadratique des niveaux vibratoires en différents points de la cabine et du cockpit. Ce critère oriente l'optimisation vers une réduction des composantes du torseur tête rotor plutôt qu'un rephasage, rendant le processus d'optimisation plus robuste. L'autre basé sur les efforts de commandes dans les bielles de pas.

Un code aéroélastique de bas niveau, basé sur des théories aérodynamiques bidimensionnelles stationnaires, est utilisé pour assurer l'optimisation. L'optimum obtenu est ensuite validé à l'aide d'un code aéroélastique de haut niveau, faisant intervenir des modèles de sillages évolués.

L'optimisation est réalisée à grande vitesse d'avancement de façon à faire intervenir de nombreuses composantes du torseur tête rotor dans les mécanismes vibratoires. Le processus d'optimisation agit alors sur plusieurs composantes simultanément et offre un optimum plus robuste. De plus, cette phase de vie est prépondérante pour les hélicoptères.

En parallèle de l'optimisation structurelle intervenant sur les paramètres "classiques", des couplages élastiques ont été introduits. C'est la première fois que de tels mécanismes sont utilisés sur des pales d'hélicoptères. Afin de juger de leur faisabilité, des études analytiques, des essais de caractérisation matériau et des tests en soufflerie ont été réalisés.

Deux mécanismes de couplages aéroélastiques distincts ont été considérés : l'un inertiel provenant d'un décalage des centres de gravité de sections par rapport à leurs centres de torsion et l'autre purement élastique, provenant de l'orientations des plis composites.

Le projet *BERP* ayant débuté sur un rotor 4 pales, les modes ayant été identifiés comme principalement responsables des charges dynamiques sont le deuxième mode de battement en  $3\Omega$  et le troisième en  $4\Omega$ . Pour le projet *BERP IV*, l'AW101 étant doté de cinq pales, seul le troisième mode de battement en  $6\Omega$  a été ciblé. Compte tenu de la faible réponse du fuselage en  $6\Omega$ , les couplages aéroélastiques n'ont pas été utilisés pour une réduction du niveau vibratoire mais uniquement pour une limitation des efforts dynamiques de contrôle.

## Démarche adoptée pour la suite de l'étude

Le potentiel des couplages aéroélastiques et de façon général, d'une optimisation aéroélastique de la pale, a clairement été identifié dans de nombreuses études. Les profits pouvant être tirés de telles méthodes de dimensionnement en termes de réduction des charges dynamiques, mais également en termes de gain de stabilité, sont importants et méritent de s'y intéresser.

Pour évaluer les gains potentiels issus de ces couplages, la prédiction du comportement dynamique du rotor en leur présence est nécessaire. Un outil de calcul aéroélastique doit donc être développé. Il doit prendre en compte le comportement élastique et inertiel de la pale, ainsi que les spécificités aérodynamiques instationnaires du rotor d'hélicoptère. Les hypothèses et limites du domaine d'étude sont présentées ci-dessous.

**Choix du rotor** Le rotor considéré pour la suite est un rotor articulé doté de pales droites. Bien que les développements soient valables pour d'autres architectures, l'ensemble des applications numériques seront réalisées sur un rotor cinq pales. Cela permet de cristalliser l'ensemble des difficultés de modélisation. En effet, les charges dynamiques transmises par un rotor cinq pales proviennent du comportement dynamique des pales jusqu'au sixième harmonique et nécessite de prendre en considération des modèles aérodynamiques suffisamment avancés.

**Cas de vol** La phase de vie principale pour laquelle les vibrations nuisent au confort des passagers et à la durée de vie des composants est le vol de croisière. Le cas de vol considéré est donc un vol palier, pour lequel l'hélicoptère se déplace en translation rectiligne uniforme. Les hypothèses suivantes peuvent alors être formulées :

- Le décrochage dynamique apparaissant pour des phases de vol à très haute vitesse d'avancement n'est pas pris en compte.
- Les tourbillons de bord de fuite et de bout de pale sont éjectés hors de la zone rotor. Les interactions pales-tourbillons sont donc supposées inexistantes.
- Le vol est stabilisé et le comportement du rotor est périodique.

**Couplages aéroélastiques** Les couplages aéroélastiques considérés dans la suite de l'étude proviennent de l'anisotropie des pales composites et de l'ajout de masses non structurales dont le centre de gravité est déportée par rapport au centre de torsion des sections. Les couplages provenant d'un déport de foyer aérodynamique ne sont pas étudiés car il est difficile de les modifier sans avoir d'influence sur d'autres paramètres.

## Deuxième partie

# Modélisation aéroélastique du rotor

---

*Le contexte et la problématique de l'étude étant désormais fixé, le modèle aéroélastique de rotor isolé destiné au calcul des charges dynamiques et aux études de stabilité est maintenant présenté. Le comportement élastique du rotor est décrit par une formulation de type repère flottant associée à la méthode des modes prescrits. Le comportement aérodynamique du rotor, quant à lui, est décrit par un modèle de vitesse induite dynamique multiharmonique et par la théorie de l'élément de pale. Enfin, l'équilibre du rotor est obtenu par une méthode d'équilibre harmonique.*

---



---

# Modélisation élastique de la pale

Dans ce chapitre, il est question de la description élastique et cinématique de la pale. Les outils éléments-finis permettant de générer des bases de déformation sont dans un premier temps présentés. Puis, la méthode des modes prescrits, utilisée pour projeter les petits déplacements de la pale sur cette base, est décrite. Enfin, l'association de cette méthode à une formulation issue des méthodes multicorps flexibles, permet de prendre en compte les grandes rotations de l'articulation, et permet d'établir les équations différentielles de mouvements de la pale.

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Généralités</b> . . . . .	<b>56</b>
1.1	Modèles de poutre . . . . .	56
1.2	Méthodes éléments-finis . . . . .	57
<b>2</b>	<b>Méthode des modes prescrits (<i>Assumed mode method</i>)</b> . . . . .	<b>59</b>
2.1	Principe . . . . .	59
2.2	Formulation énergétique . . . . .	60
2.3	Projection sur la base de déformation . . . . .	61
2.4	Système matriciel . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Méthodes multicorps flexibles</b> . . . . .	<b>64</b>
3.1	Etat de l'art . . . . .	64
3.2	Méthode des segments finis ( <i>Finite segment method</i> ) . . . . .	65
3.3	Théorie de l'élastodynamique linéaire . . . . .	66
3.4	Formulation par repère flottant ( <i>Floating frame of reference formulation</i> ) . . . . .	66
3.5	Eléments-finis non linéaires . . . . .	67
3.6	Choix d'une méthode . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Formulation par repère flottant</b> . . . . .	<b>68</b>
4.1	Introduction . . . . .	68
4.2	Description cinématique de la pale . . . . .	69
4.3	Formulation énergétique . . . . .	72
4.4	Méthode de Lagrange . . . . .	73

---

# 1 Généralités

Les pales d'hélicoptères présentent une géométrie élancée, Fig.3.1, amenant naturellement à considérer les théories de poutres pour étudier leur comportement mécanique. Le caractère unidimensionnel de ces théories s'avère avantageux en temps de calcul comparativement aux modèles tridimensionnels issus de la mécanique des milieux continus.

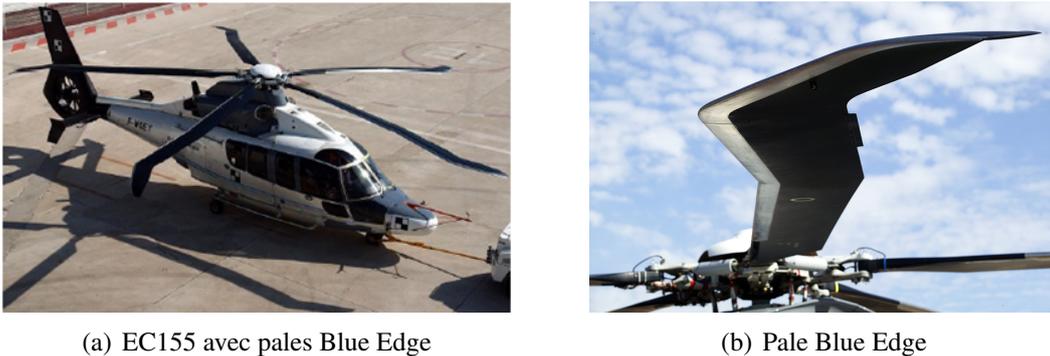


FIGURE 3.1: Géométrie d'une pale d'hélicoptère

## 1.1 Modèles de poutre

Le comportement élastique des pales est donc étudié à travers les théories classiques de type Euler-Bernoulli ou encore Timoshenko. La rotation du rotor nécessite notamment la prise en compte des effets gyroscopiques, du raidissement centrifuge ainsi que du travail des forces centrifuges. D'autre part, les spécificités géométriques des pales, que ce soit à travers le vrillage ou encore les plans de forme de nouvelles générations, génèrent de nombreux couplages entre les modes de déformations.

Les travaux de Hodges [DH74] ou encore de Houbolt & Brooks [HB57] apparaissent comme précurseurs en ce qui concerne la modélisation élastiques des pales d'hélicoptères. Ils sont basés sur un développement non linéaire en déformation permettant notamment la prise en compte de l'influence de la contrainte axiale sur la raideur de la pale. Des éléments-finis de poutre non linéaire sont ainsi développés et permettent la modélisation de pales non homogènes de géométries complexes.

L'utilisation de ces théories de poutres nécessite la détermination des caractéristiques mécaniques des sections. Les pales d'hélicoptère étant fabriquées en matériaux composites, Fig.3.1, il est nécessaire d'homogénéiser les propriétés par section, de façon à déterminer les rigidités équivalentes en traction, flexion et torsion, la masse linéique et la matrice d'inertie de la section ainsi que les coefficients de cisaillement. Différentes méthodes d'homogénéisation existent dont certaines ont recours aux éléments de frontière ou encore à la méthode des éléments finis [Sk11]. Le logiciel CPAO est ainsi utilisé chez Airbus Helicopter pour la détermination de ces caractéristiques. Il est basé sur une approche par éléments-finis [BS].

Les modèles de poutres permettent une description du comportement cinématique de la pale en petit déplacement. Toutefois, l'articulation en pied de pale entraîne des angles de battement pouvant aller jusqu'à  $10^\circ$ , dépassant ainsi le cadre des petites déformations. Les modèles classiques de poutres s'avèrent alors insuffisant pour prendre en compte ces grandes rotations. Il est donc nécessaire de faire appel à des modèles non linéaires en grand déplacement, notamment issues des théories multicorps flexibles, de façon à décrire avec précision la cinématique de la pale.

## 1.2 Méthodes éléments-finis

Compte tenu de la géométrie des pales et du caractère non homogène de leurs caractéristiques de section, l'étude analytique de leur comportement élastique est impossible. C'est pourquoi l'utilisation des méthodes éléments-finis s'est naturellement imposée.

Ces méthodes sont basées sur une interpolation géométrique à l'aide des fonctions de formes. Le solide est décrit par des éléments délimités par des nœuds et l'ensemble des éléments forment le maillage, Fig.3.2. Celui-ci doit représenter le plus fidèlement possible le solide.



FIGURE 3.2: Maillage éléments-finis 1D d'une pale

A chaque nœuds sont associés des degrés de liberté, ici en déplacement et rotation, et de nouvelles fonctions de formes sont utilisées de façon à les interpoler au sein des éléments.

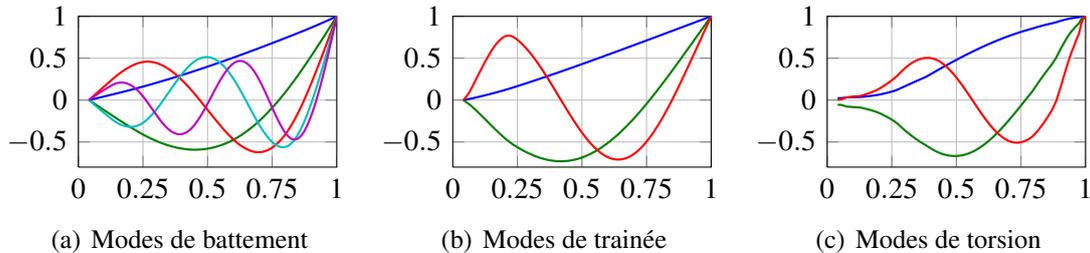
Une fois ces fonctions de formes choisies, il est possible de calculer des matrices élémentaires de raideur et de masse qui, une fois assemblées pour l'ensemble des éléments du maillage, forment les matrices globales du modèle éléments-finis.

Ces modèles permettent de calculer la déformation de la pale sous un chargement donné, ou encore de déterminer ses caractéristiques dynamiques. Différents outils permettant le calcul d'une base modale dans le vide sont disponibles au sein du service vibrations et bruit interne d'Airbus Helicopters. Certains déterminent une base découplée, c'est à dire une base pour laquelle les différents modes présentent des déformées en battement pure, trainée pure ou torsion pure. D'autres permettent le calcul de bases couplées, c'est à dire des bases pour lesquelles les modes présentent des déformées mixtes, battement-trainée-torsion.

### 1.2.1 Base modale éléments-finis découplée (GAHEL)

Un outil éléments-finis a été développé par Cranga pour déterminer une base modale découplée dans le vide [Cra05]. Les déformées modales classiques obtenues sont représentées sur les graphiques de la figure 3.3. Le 1<sup>er</sup> mode de battement et le 1<sup>er</sup> de trainée sont appelés "quasi-rigides" car, compte tenu des faibles raideurs angulaires de battement et trainée à l'articulation,

leurs déformées s'apparentent à celles de solides rigides articulés. Ce n'est pas le cas pour la torsion car la raideur de commande peut être très élevée.



**FIGURE 3.3:** Déformées modales découplées d'une pale droite classique

Dans cet outil, vrillage, cisaillement, gauchissement et inertie de rotation en flexion des sections sont négligés. D'autre part, les déports entre centre de torsion et centre de gravité se traduisent dans les moments d'inertie de pale en torsion mais ne génèrent pas de couplages de type flexion-torsion.

Cet outil éléments-finis permet de déterminer les caractéristiques modales suivantes :

- Les fréquences propres des modes  $\omega_i$
- Les masses modales  $\mu_i$
- Les amortissements modaux  $\alpha_i$  (issus de l'amortissement de l'adaptateur de trainée)
- Les déformées modales  $\phi_i$

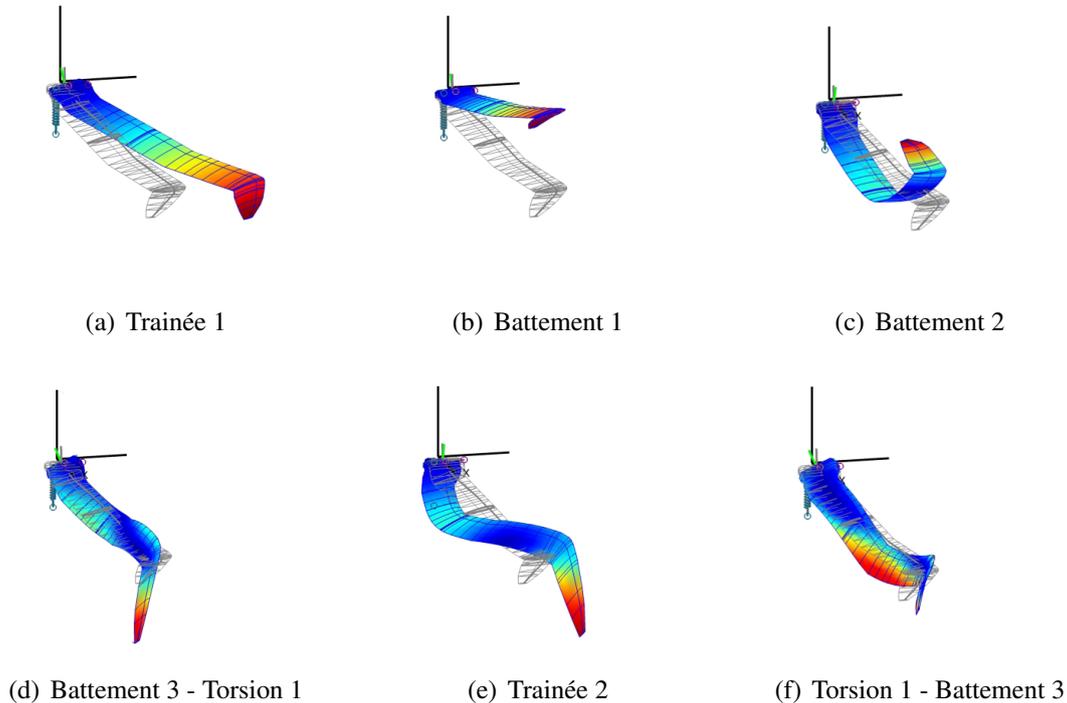
Ces données sont nécessaires pour le placement fréquentiel par rapport aux harmoniques aérodynamiques, pour la limitation des efforts tranchants modaux transmis, pour les problèmes de couplage rotor structure ainsi que pour l'estimation expérimentale du torseur tête rotor [Cra05].

### 1.2.2 Bases modales éléments-finis couplées (BAM-MODPAL)

Des outils éléments-finis ont également été développés pour déterminer des bases modales couplées dans le vide. Les modes présentent alors des déformées à la fois en battement, trainée et torsion, Fig.3.4.

BAM est un outil éléments-finis de haute précision, développé par Skladanek, et destiné aux pales d'hélicoptères à géométries complexes [Sk11]. Les effets de cisaillement, d'inertie de rotation section, de déports entre centre neutre, centre de gravité et centre de torsion ainsi que l'influence du vrillage sont pris en compte. Ce modèle est donc particulièrement adapté aux pales de nouvelles générations présentant des plans de forme à doubles flèches.

MODPAL est un autre logiciel éléments-finis permettant la détermination de modes couplés. Le cisaillement est négligé et les caractéristiques de section sont définies à partir de l'axe de pas.



**FIGURE 3.4:** Déformées modales couplées d'une pale de nouvelle génération calculé à partir de Beam Advanced Model (BAM)

## 2 Méthode des modes prescrits (*Assumed mode method*)

De façon à développer un modèle de rotor isolé en synergie avec les différents outils éléments-finis disponibles au sein du service vibrations et bruit interne d'Airbus Helicopters, il a été décidé d'utiliser la méthode des modes prescrits. Elle permet notamment une projection des mouvements de la pale sur une base de déformation calculée au préalable.

### 2.1 Principe

La méthode des modes prescrits consiste à approcher la déformation de la pale par une superposition de fonctions linéairement indépendantes [ABB01]. Ces dernières doivent satisfaire les conditions aux limites du problème et il est préférable qu'elles se rapprochent des déformées modales attendues. Pour l'étude du comportement aéroélastique du rotor, les bases modales éléments-finis calculées dans le vide, de type GAHEL, BAM ou MODPAL, se montrent donc particulièrement adaptées. De plus, elles apportent un sens physique supplémentaire bienvenu pour l'analyse des résultats.

Une fois le champ de déformation de la pale projeté sur la base choisie, les équations de Lagrange sont développées de façon à coupler les modes de déformation entre eux si nécessaire.

Cette méthode est très répandue car elle permet de réduire le nombre de degrés de liberté et de leur apporter une signification physique. Néanmoins, les résultats dépendent fortement du choix

de la base de déformation et son utilisation dans le cadre d'un problème non linéaire ne garantit pas la convergence des résultats [BG93].

## 2.2 Formulation énergétique

Le développement des équations différentielles régissant le comportement de la pale est basée sur une approche énergétique pour laquelle les expressions des énergies cinétiques, de déformation et de dissipation sont nécessaires.

### 2.2.1 Energie de déformation

L'expression de l'énergie de élastique d'une pale non uniforme et vrillée, se déformant en battement  $u_z$ , trainée  $u_y$  et torsion  $\theta_x$  est donnée dans les références [HB57, DH74]. Elle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 E_p = \frac{1}{2} \int_e^R \{ & EI_B [u_y'' \sin \theta_e - u_z'' \cos \theta_e]^2 + EI_T [u_y'' \cos \theta_e + u_z'' \sin \theta_e]^2 + [GJ + EI_{PP} \theta_e'^2] \theta_x'^2 \\
 & + F_c [u_z'^2 + u_y'^2 + k_p^2 (\theta_x'^2 + 2\theta_e' \theta_x')] \\
 & - 2\theta_e' \theta_x' [EI_{ZP} (u_z'' \cos \theta_e - u_y'' \sin \theta_e) + EI_{YP} (u_y'' \cos \theta_e + u_z'' \sin \theta_e)] \\
 & + 2K_{z\theta} [u_z'' \cos \theta_e - u_y'' \sin \theta_e] \theta_x' + 2K_{y\theta} [u_y'' \cos \theta_e + u_z'' \sin \theta_e] \theta_x' \} dr
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

L'énergie de déformation se décompose en quatre contributions distinctes (une par ligne de l'expression 3.1) :

- La première correspond à l'influence des raideurs structurales de poutre en flexion et torsion.
- La seconde traduit l'effet de la précontrainte centrifuge sur le comportement élastique de la section.
- La troisième regroupe les termes de couplages flexion-torsion issus du vrillage. Ces derniers sont négligeables dans le cas d'une pale classique.
- La dernière contient les termes de couplages flexion-torsion provenant du caractère anisotrope des plis composites, se traduisant par la présence de raideurs de battement-torsion et trainée-torsion.

L'influence du vrillage et notamment du taux de vrillage est visible sur les couplages entre modes de déformation.

L'expression 3.1 fait intervenir les différentes caractéristiques de section :

$EI_B = \int Ez^2 dS$  : Rigidité en battement

$EI_T = \int Ey^2 dS$  : Rigidité en trainée

$GJ$  : Rigidité en torsion

$ES = \int EdS$  : Rigidité en traction

$k_p^2 = (EI_B + EI_T)/ES$  : Rayon de giration pondéré par le module d'Young

- $EI_{YP} = \int y(y^2 + z^2)EdS$  : Moment d'ordre 3 pondéré par le module d'Young  
 $EI_{ZP} = \int z(y^2 + z^2)EdS$  : Moment d'ordre 3 pondéré par le module d'Young  
 $EI_{PP} = \int (y^2 + z^2 - k_p^2)^2 EdS$  : Moment d'ordre 4 pondéré par le module d'Young  
 $F_C = \Omega^2 \int_r^R x dm$  : La force centrifuge appliquée à la section  
 $K_{z\theta}$  : Raideur de battement-torsion  
 $K_{y\theta}$  : Raideur de trainée-torsion  
 $\theta_e = \theta_v + \theta_0$  : L'angle de section total (vrillage et pas)

### 2.2.2 Energie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique d'une pale au cours de son mouvement est donnée par l'expression :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^R \left[ \underline{V}_{G \in S/R_0}^2 m_L + \underline{\Omega}_{S/R_0} \cdot \underline{I}_G(S) \cdot \underline{\Omega}_{S/R_0} \right] . dr \quad (3.2)$$

C'est à travers l'énergie cinétique que sont retrouvés les termes de couplages inertiels et centrifuges provenant notamment des déports entre centres de gravité et centres de torsion des sections.

### 2.2.3 Energie de dissipation

L'amortissement structurel étant négligeable, dans le vide, la seule source de dissipation d'énergie provient de l'adaptateur de trainée. Selon la modélisation linéaire ou angulaire considérée pour ce dernier, l'expression de l'énergie de dissipation vaut respectivement :

$$E_d = \frac{1}{2} C_\delta^{lin} [\dot{u}_y(r = r_{att})]^2 \quad \text{ou} \quad E_d = \frac{1}{2} C_\delta^{ang} [\dot{u}_y'(r = e)]^2 \quad (3.3)$$

avec  $r_{att}$  la position en envergure de l'extrémité de l'adaptateur sur la pale et  $e$  la position en envergure de l'articulation.

Bien que l'adaptateur présente un comportement fortement non linéaire en fréquence et déplacement, son amortissement est considéré comme constant. L'étude portant ici sur les effets des couplages battement-torsion sur les charges dynamiques, ce modèle simple d'amortisseur de trainée se montre adapté.

## 2.3 Projection sur la base de déformation

Dans la méthode des modes prescrits, les déformations en battement  $u_z$ , trainée  $u_y$  et torsion  $\theta_x$  sont approchées par une superposition linéaire de modes de déformation pondérées par des participations modales. Cela donne, suivant la nature de la base considérée :

$$\text{Base découplée : } \begin{cases} u_z = \sum_i \phi_{\beta_i} q_{\beta_i} \\ u_y = \sum_j \phi_{\delta_j} q_{\delta_j} \\ \theta_x = \sum_k \phi_{\theta_k} q_{\theta_k} \end{cases} \quad \text{Base couplée : } \begin{cases} u_z = \sum_i \phi_{\beta}^i q_i \\ u_y = \sum_i \phi_{\delta}^i q_i \\ \theta_x = \sum_i \phi_{\theta}^i q_i \end{cases}$$

avec :

- Pour le cas découplé :  $\phi_{\beta_i}$  et  $q_{\beta_i}$  respectivement la déformée et la participation modale du  $i^{\text{ème}}$  mode de battement découplé,  $\phi_{\delta_j}$  et  $q_{\delta_j}$  respectivement la déformée et la participation modale du  $j^{\text{ème}}$  mode de trainée découplé et  $\phi_{\theta_k}$  et  $q_{\theta_k}$  respectivement la déformée et la participation modale du  $k^{\text{ème}}$  mode de torsion découplé
- Pour le cas couplé :  $\phi_{\beta}^i$ ,  $\phi_{\delta}^i$ ,  $\phi_{\theta}^i$  et  $q_i$  respectivement les déformées en battement, trainée, torsion et la participation modale du  $i^{\text{ème}}$  mode couplé

Les expressions des déformations sont ensuite injectés au sein des énergies cinétiques, de déformation et de dissipation et un système d'équations différentielles linéaires est construit à partir de la méthode de Lagrange.

$$L = E_c - E_p$$

Pour chacun des degrés de liberté  $q_i$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Finalement, le système d'équations linéaires suivant est obtenu :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}. \underline{\underline{\ddot{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}. \underline{\underline{\dot{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}. \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad (3.4)$$

## 2.4 Système matriciel

Les vecteurs de la base de déformation considérés provenant d'un calcul modal, les matrices du système linéaire précédent peuvent être simplifiées en tirant profit de la propriété d'orthogonalité des modes propres. D'autre part, elles prennent des formes différentes suivant que le calcul modal initial prend ou non en compte l'ensemble des couplages inertiels, centrifuges ou élastiques entre les modes de déformations.

### 2.4.1 Base de déformation découplée

Le vecteur des degrés de liberté souples est constitué des participations modales de battement  $q_{\beta_i}$ , trainée  $q_{\delta_j}$  et torsion  $q_{\theta_k}$ . Il prend la forme suivante :

$$\underline{\underline{q}} = (q_{\beta_1}, q_{\beta_2}, \dots, q_{\delta_1}, q_{\delta_2}, \dots, q_{\theta_1}, q_{\theta_2}, \dots)^T \quad (3.5)$$

Lorsque la base modale est issue d'un calcul GAHEL, l'influence du vrillage, du déport de centre de gravité et des raideurs de battement-torsion ou trainée-torsion n'est pas prise en compte. C'est à travers la méthode des modes prescrits et le développement des équations de Lagrange qu'est retrouvée l'influence de ces termes ainsi que les couplages qu'ils entraînent.

Les effets de Coriolis, le cisaillement, ainsi que les inerties de section sont négligés. Les matrices de masse et de raideur sont symétriques et prennent alors les formes suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\beta\beta} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\beta\delta} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\beta\theta} \\ \cdot & \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\delta\delta} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\delta\theta} \\ \cdot & \cdot & \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\beta\beta} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\beta\delta} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\beta\theta} \\ \cdot & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\delta\delta} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\delta\theta} \\ \cdot & \cdot & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

avec, compte tenu de la propriété d'orthogonalité des modes propres vis à vis des opérateurs de masse et de raideur :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i_1 i_2}^{\beta\beta} &= \begin{cases} \mu_{\beta_{i_1}} \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{i_1 i_2}^{\beta\beta} = \begin{cases} \mu_{\beta_{i_1}} \omega_{\beta_{i_1}}^2, & \text{pour } i_1 = i_2 \\ 0, & \text{pour } i_1 \neq i_2 \end{cases} \\ \mathbf{M}_{j_1 j_2}^{\delta\delta} &= \begin{cases} \mu_{\delta_{j_1}} \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{j_1 j_2}^{\delta\delta} = \begin{cases} \mu_{\delta_{j_1}} \omega_{\delta_{j_1}}^2, & \text{pour } j_1 = j_2 \\ 0, & \text{pour } j_1 \neq j_2 \end{cases} \\ \mathbf{M}_{k_1 k_2}^{\theta\theta} &= \begin{cases} \mu_{\theta_{k_1}} \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{k_1 k_2}^{\theta\theta} = \begin{cases} \mu_{\theta_{k_1}} \omega_{\theta_{k_1}}^2, & \text{pour } k_1 = k_2 \\ 0, & \text{pour } k_1 \neq k_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Les couplages inertiels entre battement et trainée étant absents :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\beta\delta} = \underline{\underline{0}}$$

D'autre part, les couplages élastiques entre battement et trainée proviennent du vrillage :

$$\mathbf{K}_{i_1 j_1}^{\beta\delta} = \frac{1}{2} \int_e^R [EI_T - EI_B] \sin 2\theta_e \phi_{\beta_{i_1}}'' \phi_{\delta_{j_1}}'' dr$$

Les couplages inertiels entre modes de déformations sont issus des déports entre centre de gravité et centre de torsion et se traduisent dans la matrice de masse par les termes extradiagonaux suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{i_1 k_1}^{\beta\theta} = \int_e^R [y_G \cos \theta_e - z_G \sin \theta_e] \phi_{\beta_{i_1}} \phi_{\theta_{k_1}} dm \\ \mathbf{M}_{j_1 k_1}^{\delta\theta} = - \int_e^R [y_G \sin \theta_e + z_G \cos \theta_e] \phi_{\delta_{j_1}} \phi_{\theta_{k_1}} dm \end{cases}$$

Ces mêmes déports génèrent des couplages centrifuges se traduisant par des termes extradiagonaux dans la matrice de raideur auxquels viennent s'ajouter les contributions des raideurs de battement-torsion et trainée-torsion provenant du comportement anisotrope des plis composites :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{i_1 k_1}^{\beta\theta} = \int_e^R \left\{ \Omega^2 [y_G \cos \theta_e - z_G \sin \theta_e] r \phi_{\beta_{i_1}}' \phi_{\theta_{k_1}}' m_L + K_{z\theta} \phi_{\beta_{i_1}}'' \phi_{\theta_{k_1}}' \right\} dr \\ \mathbf{K}_{j_1 k_1}^{\delta\theta} = \int_e^R \left\{ \Omega^2 [y_G \sin \theta_e + z_G \cos \theta_e] [\phi_{\delta_{j_1}} - r \phi_{\delta_{j_1}}'] \phi_{\theta_{k_1}} m_L + K_{y\theta} \phi_{\delta_{j_1}}'' \phi_{\theta_{k_1}}' \right\} dr \end{cases}$$

La matrice d'amortissement quant à elle, n'influence que les modes de trainée et ne bénéficie pas de la propriété d'orthogonalité. Elle prend donc la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\delta\delta} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Suivant le type de modélisation considéré pour l'adaptateur de trainée, elle vaut :

$$\mathbf{C}_{j_1 j_2}^{\delta\delta} = \begin{cases} C_{\delta}^{ang} \phi_{\delta_{j_1}}'(e) \phi_{\delta_{j_2}}'(e) \\ C_{\delta}^{lin} \phi_{\delta_{j_1}}(r_{att}) \phi_{\delta_{j_2}}(r_{att}) \end{cases}$$

### 2.4.2 Base de déformation couplée

Dans ce cas, le vecteur des degrés de liberté souples est constitué des participation modales  $q_i$  des différents modes couplés. Il prend la forme suivante :

$$\underline{q} = (q_1, q_2, \dots)^T \quad (3.7)$$

Les outils de calcul de modes couplés actuels (BAM, MODPAL) ne prennent pas en compte les raideurs en battement-torsion et trainée-torsion. Il est donc nécessaire de recoupler partiellement ces modes de façon à bien prendre en compte la part d'énergie de déformation apportée par ces mécanismes anisotropes.

La matrice de masse est diagonale et est constituée des masses généralisées directement issues du calcul modal :

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} \mu_i, & \text{pour } i = j \\ 0, & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (3.8)$$

La matrice d'amortissement prend la même forme que pour la base découplée :

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{cases} C_{\delta}^{ang} \phi_{\delta}^{i'}(e) \phi_{\delta}^{j'}(e) \\ C_{\delta}^{lin} \phi_{\delta}^i(r_{att}) \phi_{\delta}^j(r_{att}) \end{cases} \quad (3.9)$$

et la matrice de raideur est constituée des raideurs généralisées issues du calcul modal sur sa diagonale et des termes de couplages élastiques anisotropes sur ses termes extradiagonaux :

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mu_i \omega_i^2, & \text{pour } i = j \\ \int_e^R [K_{z\theta} \phi_{\beta}^{i''} \phi_{\theta}^{j'} + K_{y\theta} \phi_{\delta}^{i''} \phi_{\theta}^{j'}] dr, & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (3.10)$$

## 3 Méthodes multicorps flexibles

La méthode des modes prescrits décrite précédemment, permet de modéliser les petits déplacements de la pale. Cependant, elle ne permet pas une prise en compte correcte des grandes rotations provenant de l'articulation.

Les outils développés pour l'étude des systèmes multicorps permettent notamment l'analyse des non linéarités purement géométriques telles que celles rencontrées au niveau de l'articulation. Ces outils, à l'origine destinés à la description des systèmes de solides rigides, ont peu à peu évolués pour prendre en compte le caractère déformable des solides. Ils peuvent être associées à la méthode des modes prescrits décrites précédemment, de façon à apporter une description mécanique des solides déformables présentant de grandes rotations ou déplacements, tels que la pale souple articulée.

### 3.1 Etat de l'art

La dynamique des systèmes multicorps flexibles fait référence aux stratégies de calculs utilisées afin de déterminer la réponse dynamique des systèmes de solides déformables sous l'effet de

chargements extérieurs : “Forward Dynamics” ; ou, a contrario, aux méthodes permettant d’évaluer les efforts à appliquer sur un système multicorps afin d’obtenir les mouvements désirés : “Inverse Dynamics”.

Cette branche de la mécanique appliquée est largement utilisée car elle trouve des applications dans de nombreux domaines : la robotique, les structures spatiales, la biomécanique, les machines-outils, les moyens de transports : automobiles, trains, hélicoptères. . .

Wasfy et Noor réalisent un récapitulatif intéressant des différentes stratégies de modélisation utilisées dans la dynamique des systèmes multicorps flexibles [WN03]. Ils traitent des différents modèles de déformations considérés, de la prise en compte des contraintes entre corps, des techniques de résolution, des stratégies de contrôle ainsi que des développements à venir. Cet article donne une vue globale et fournit en référence des différentes méthodes rencontrées dans ce domaine.

L’ouvrage de référence de A.A.Shabana [Sha08] fournit quant à lui les éléments théoriques nécessaires à la compréhension des modèles multicorps. Les outils de cinématique nécessaires à la description des systèmes de solides connectés les uns aux autres sont dans un premier temps traités. Puis, les outils analytiques basés sur la méthode de Lagrange sont développés de façon à obtenir les équations décrivant la dynamique des systèmes de solides. La flexibilité des solides est introduite à travers une première approche superposant des petites déformations à des mouvements globaux, puis, le traitement des grandes déformations est abordé à travers des méthodes éléments-finis basées sur une description en coordonnées absolues.

Les méthodes de calculs multicorps flexibles se décomposent en quatre familles, apparues chronologiquement :

1. Méthode de segments finis
2. Théorie de l’élastodynamique linéaire
3. Théorie du repère flottant
4. Méthodes éléments-finis non linéaires

### 3.2 Méthode des segments finis (*Finite segment method*)

La méthode des segments finis [Sha97] assimile le solide déformable à un ensemble de solides rigides reliés les uns aux autres via des raideurs, Fig.3.5.a. Le positionnement dans l’espace de chaque segment est assuré via des coordonnées cartésiennes et des angles d’Euler. D’autre part, l’élasticité du système est modélisée à partir des raideurs équivalentes pouvant être issues de calculs éléments finis. Cette méthode est aussi connue sous le nom d’approche de type Myklestad. Cette formulation présente l’avantage de tirer profit des techniques de résolution utilisées dans les codes de calculs pour corps rigides. L’algorithme de Newton-Euler récursif est couramment utilisé [Ver94]. Celui-ci consiste en un premier parcours cinématique dit “ascendant”. Il a pour objectif de transmettre les déplacements, vitesses et accélérations, tant en translation qu’en rotation, d’un corps à l’autre, en partant de la base du modèle. Une fois cette étape réalisée, il est possible de calculer les réactions d’inertie des différents éléments. Un parcours en effort, dit “descendant”,

transmet alors les efforts calculés depuis le sommet de la structure vers la base.

Une fois ces deux parcours réalisés, il est possible de déterminer les résidus associés aux paramètres d'état. Ces résidus traduisent la différence entre les efforts généralisés qu'il faudrait appliquer pour obtenir l'état cinématique calculé et les efforts généralisés effectivement appliqués notamment à travers les différentes raideurs de chaque tronçon. Un processus itératif est ensuite réalisé de façon à minimiser ces résidus et converger vers la solution.

Les inconvénients de cette approche résident principalement dans le choix du nombre, de la position et de la taille des différents segments rigides.

Cette méthode est notamment utilisée dans le modèle pale souple de HOST, logiciel d'aéromécanique interne développé par Airbus Helicopters [TAFV96, GBRR11].

### 3.3 Théorie de l'élastodynamique linéaire

Cette théorie associe la dynamique des corps rigides à la théorie de l'élasticité linéaire en petites déformations [Sha97]. Le problème est tout d'abord résolu en supposant un système de solides rigides. Cela permet d'obtenir des efforts d'inertie et de réaction qui sont ensuite introduits dans un problème d'élasticité linéaire. Le mouvement total des solides déformables présentant des grands déplacements est alors obtenu en superposant le mouvement global de corps rigide et les petits déplacements issus du calcul en déformation linéaire, Fig.3.5.b.

Les mouvements de corps rigides et les déformations ne sont pas calculées simultanément. Les déformations élastiques sont supposées n'avoir aucune influence sur le mouvement global du solide. Le couplage rigide/déformable n'est donc pas mutuel.

### 3.4 Formulation par repère flottant (*Floating frame of reference formulation*)

L'approche par "repère flottant" est actuellement la méthode la plus répandue dans la simulation des systèmes multicorps flexibles. Elle est implantée dans de nombreux codes commerciaux et universitaires tels que SIMPACK ou encore MSC ADAMS.

Dans cette formulation [Sha08], la description cinématique du solide déformable est assurée par un repère de référence permettant, d'une part, la définition des grands déplacements ou grandes rotations du corps, et d'autre part assurant le rôle de référence pour l'expression des déplacements élastiques, Fig.3.5.b. Ces derniers sont supposés petits et peuvent être modélisés directement par les méthodes classiques d'expression des déformations en petits déplacements. Ainsi, le caractère linéaire des déformations souples est superposé au caractère non linéaire des mouvements du repère de référence. Lorsque les déformations sont négligées, cette formulation donne le mouvement exact du corps rigide.

La différence entre cette approche et la théorie de l'élastodynamique linéaire provient du fait qu'un véritable couplage inertiel est opéré entre degrés de liberté du repère de référence et degrés de liberté élastiques. Les caractéristiques inertiels du corps rigides sont altérés par les déformations et la dynamique du repère de référence s'en trouve affectée. Autrement dit, il y a apparition de couplages non linéaires entre mouvement rigide et déformations.

L'un des avantages de cette méthode est le recours aux techniques de superpositions modales

[WN03]. Le passage de coordonnées nodales à des coordonnées modales permet de réduire considérablement la taille du problème et donc de réduire le temps de calcul [Sha08]. D'autre part, cela facilite l'interprétation des résultats et constitue une approche pragmatique pour l'ingénieur. Le choix de la base de déformation est très important et c'est d'elle dont dépend la qualité des résultats obtenus.

### 3.5 Éléments-finis non linéaires

De nombreuses méthodes ont été développées pour simuler le comportement non linéaire des structures ou bien des systèmes de solides en grand déplacements ou grandes déformations. Les méthodes des segments finis, de l'élastodynamique linéaire et du repère flottant décrites précédemment, peuvent être vues comme des extensions des formalismes utilisées pour décrire la dynamique des systèmes multicorps rigide. Une autre famille de formulation trouve son origine dans les méthodes éléments-finis. Cette fois-ci l'objectif n'est plus de superposer la déformation aux déplacements rigides, mais plutôt de décrire directement les grandes déformations à partir d'outils non linéaires ou bien par des méthodes incrémentales. Aucune distinction n'est alors réalisée entre déformation et mouvement rigide du corps.

L'approche par repère inertiel ("Inertial frame approach") est basée sur des coordonnées nodales absolues de translation et de rotation définis par rapport à un unique repère inertiel [Sha08]. Aucune distinction n'est réalisée entre coordonnées élastiques et rigides et les relations non linéaires entre déformations et coordonnées généralisées requièrent l'utilisation d'une théorie de l'élasticité non linéaire. Contrairement aux approches décrites précédemment, les non linéarités apparaissent alors via l'opérateur de raideur et non pas via l'opérateur de masse.

La formulation éléments-finis corotationnelle introduite par Criesfield [Cri97] quant à elle, permet la prise en compte de grands déplacements et de petites déformations directement au sein de l'élément-fini. Le mouvement d'un élément est décomposé en un mouvement de solide rigide et un mouvement déformant. Le premier n'entraîne aucune contrainte ni aucune déformation dans l'élément et permet de prendre en compte les mouvements d'ensemble du solide. Il correspond en fait au mouvement du repère corotationnel, qui, dans le cas d'un éléments de poutre, peut être représenté par le vecteur connectant les 2 nœuds ou bien l'axe moyen de l'élément. Le second mouvement, dit déformant, génère des contraintes internes et participe à la mise en équilibre du système. En utilisant l'hypothèse des petits déplacements dans le repère corotationnel, la théorie classique de l'élasticité linéaire est retrouvée.

Cette méthode a été mise en œuvre dans la thèse de Skladanek sur la modélisation éléments-finis des pales de géométrie complexe [Sk11].

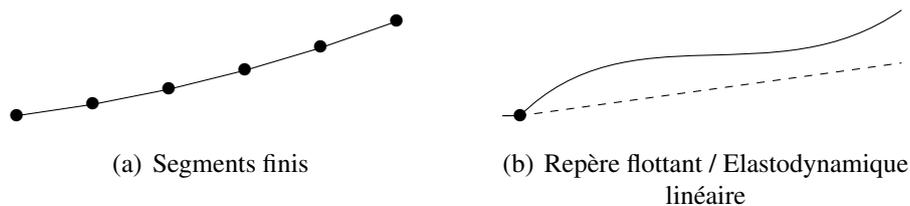


FIGURE 3.5: Description cinématique de différentes méthodes multicorps

### 3.6 Choix d'une méthode

Le tableau 3.1 répertorie le classement des différentes méthodes multicorps précédemment présentées selon différents critères (précision de la description cinématique, synergie avec les outils disponibles, temps de calcul, formulation analytique simple) :

	Segments finis	Elastodyn. lin.	Repère flottant	EF non linéaires
Précision	=	-	+	+
Synergie	+	+	+	-
Temps de calcul	=	+	=	-
Formulation	=	+	+	-

TABLE 3.1: Comparaison des différentes méthodes multicorps en vue d'une application au modèle aéroélastique de rotor isolé d'hélicoptère

L'objectif étant de réaliser des calculs représentatifs à moindre coûts, la formulation de type repère flottant est la plus appropriée. Elle permet de prendre en compte les non linéarités géométriques de manière simple, tout en faisant appel à des outils éléments-finis de hautes précisions, décrivant avec fidélité le comportement élastique de la pale. D'autre part, le caractère analytique de cette formulation, notamment lorsqu'elle est associée à la méthode des modes prescrits, permet de conserver une compréhension physique des résultats, ce qui facilite l'analyse. Enfin, la méthode des modes prescrits permettant de traiter les différents couplages indépendamment de la base de déformation initiale, son association avec la méthode du repère flottant permet de réaliser des études paramétriques sans recalculer systématiquement une base de déformation.

## 4 Formulation par repère flottant

### 4.1 Introduction

Dans l'approche par repère flottant, le comportement cinématique du solide est décrit à partir d'un ensemble de coordonnées rigides et de coordonnées élastiques. Les coordonnées rigides définissent la position et l'orientation dans l'espace d'un système de coordonnées reliés au solide, servant de référence pour la description de sa déformation via les coordonnées élastiques. Ces dernières peuvent prendre la forme de degrés de liberté nodaux issus de calculs élément-finis, ou encore de coordonnées généralisées issues de calculs modaux.

Ici, les coordonnées élastiques sont les participations modales liées à la base de déformation issue de la méthode des modes prescrits présentée précédemment. Quelle que soit la base initiale de déformation, cette méthode permet un recouplage inertiel, centrifuge ou élastique, si nécessaire, entre les modes, permettant ainsi d'aboutir à une base de déformation couplée en entrée de la formulation de type repère flottant.

La figure 3.6 illustre le fonctionnement du modèle élastique de pale articulée développé. Une base modale est calculée à partir des outils éléments-finis disponibles. Elle sert de base de projection pour la méthode des modes prescrits qui elle-même fait office d'entrée de la formulation de type repère flottant. Les développements analytiques de cette approche sont présentés ci-après.

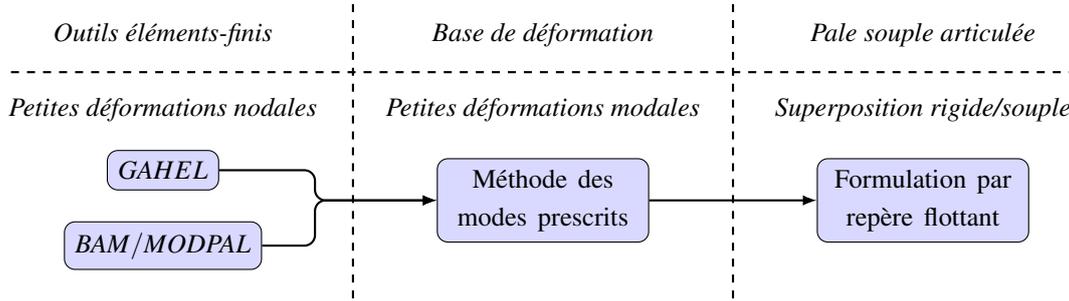


FIGURE 3.6: Schéma de principe du modèle élastique de pale

## 4.2 Description cinématique de la pale

La pale étant articulée, le choix du repère de référence se fait assez naturellement. Son origine est confondu avec l'articulation de la pale et son orientation au sein du repère tournant est directement définie par les angles à l'articulation, Fig.3.7. Il y a donc confusion entre le repère de référence et le repère qui serait associé à la pale pour étudier son comportement indéformable. L'angle de pas étant imposé par le mécanisme de commande, le vecteur des degrés de liberté de référence est constitué uniquement des angles de battement et de trainée :

$$\underline{q}_r = (\beta, \delta)^T$$

La partie élastique est quant à elle décrite à partir de la méthode des modes prescrits. Les coordonnées élastiques correspondent donc aux coordonnées généralisées liées à la base de déformation. Le vecteur des coordonnées élastiques prend la forme suivante :

$$\underline{q}_e = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$$

Les modes de déformation couplés sont superposés aux mouvements globaux du repère de référence. La position géométrique de l'axe de pas après orientation et déformation souple de la pale est définie par :

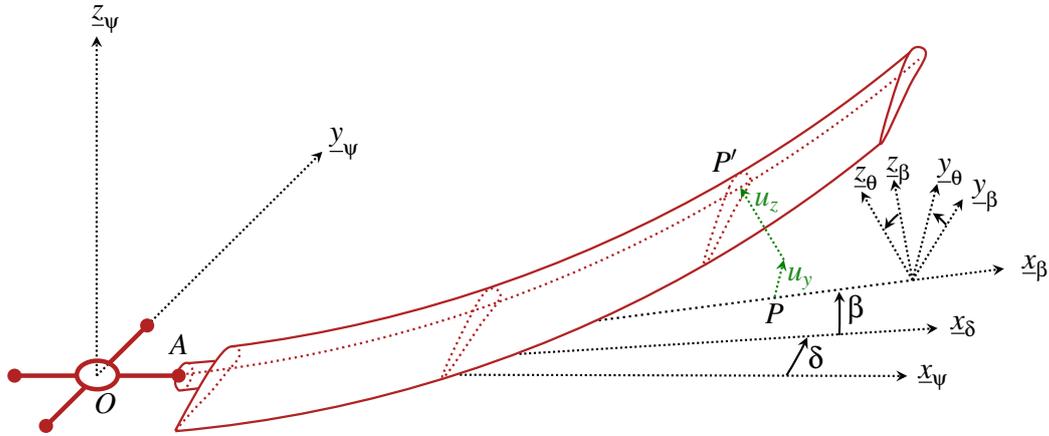
$$\underline{OP}' = \underline{OA} + \underline{AP} + \underline{PP}' = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\psi} + \begin{bmatrix} r-e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\beta} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\theta} \quad (3.11)$$

avec :

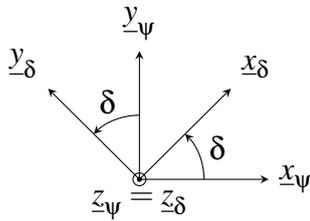
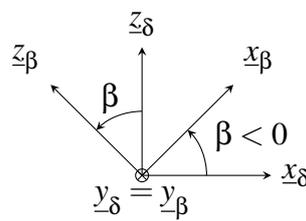
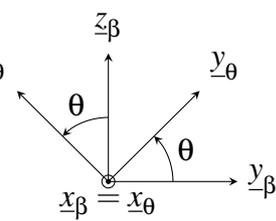
$$u_y = \sum_i \phi_\delta^i q_i \quad \text{et} \quad u_z = \sum_i \phi_\beta^i q_i$$

Une fois la position de l'axe de pas déterminée, et compte tenu des hypothèses de poutre d'Euler-Bernoulli selon lesquelles les sections droites restent perpendiculaires à la fibre neutre au cours du mouvement, la section doit être orientée selon les angles issus de la flexion de la pale :

$$\theta_y = -\sum_i \phi_\beta^{i'} q_i \quad \text{et} \quad \theta_z = \sum_i \phi_\delta^{i'} q_i$$



(a) Description géométrique de la pale et orientation du repère de référence

(b) Orientation des repères rotor  $\mathcal{R}_\psi$  et de trainée  $\mathcal{R}_\delta$ (c) Orientation des repères de trainée  $\mathcal{R}_\delta$  et de battement  $\mathcal{R}_\beta$ (d) Orientation des repères de battement  $\mathcal{R}_\beta$  et de pas  $\mathcal{R}_\theta$ **FIGURE 3.7:** Description cinématique de la pale et des différents repères

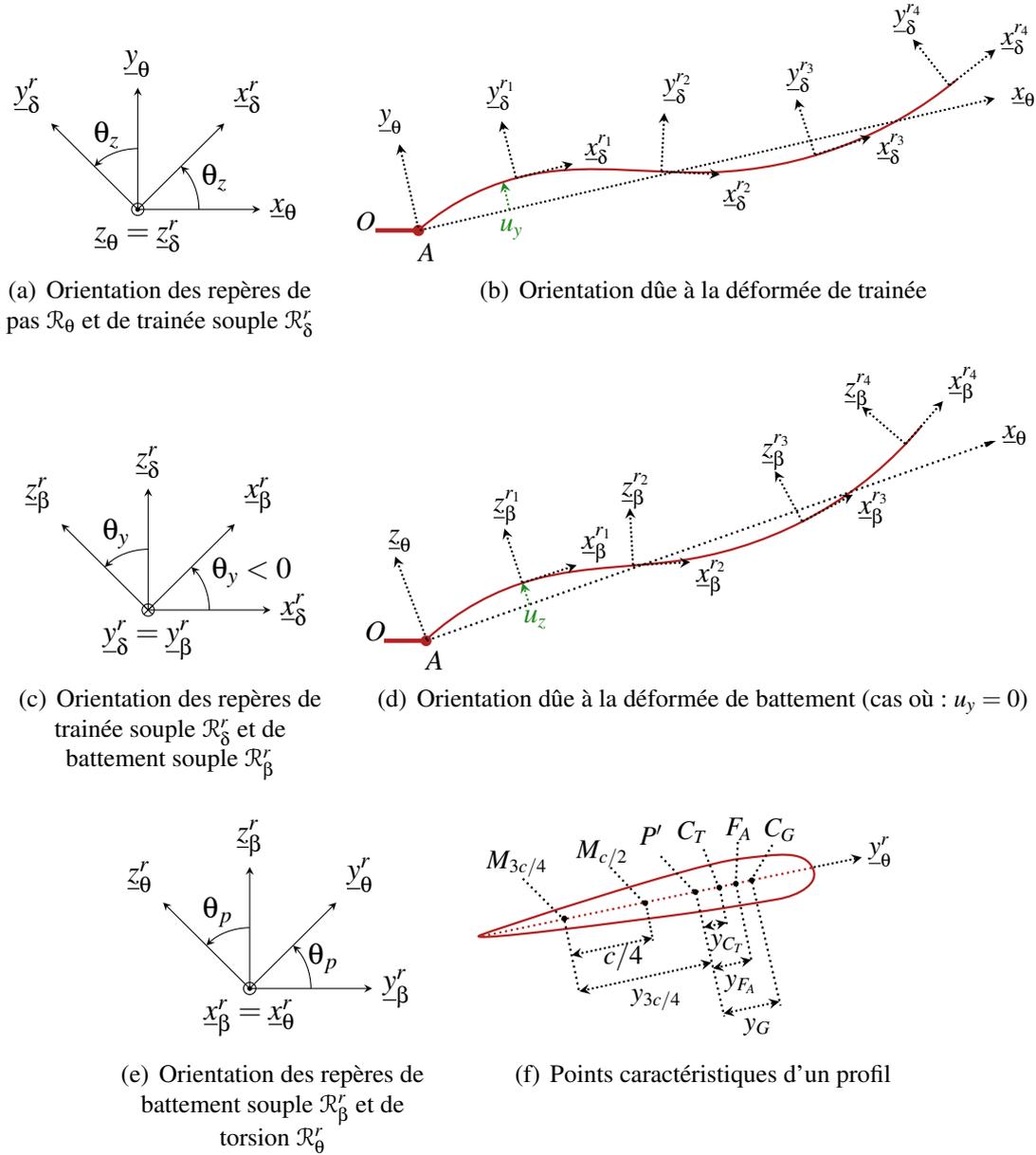
Une fois la section orientée successivement suivant les angles de trainée souple  $\theta_z$  puis de battement souple  $\theta_y$ , Fig.3.8, la torsion et le vrillage de la section peuvent être considérées. Ces deux angles sont appliqués autour du centre de torsion, même si, en pratique, centre de vrillage et de torsion sont distincts :

$$\theta_p = \theta_x + \theta_v = \sum_i \phi_\theta^i q_i + \theta_v$$

Il est ensuite possible de déterminer la position géométrique d'un point quelconque au sein de la section. Les différents points caractéristiques d'un profil aérodynamique sont (Fig.3.8.f) :

1. L'axe de pas  $P'$
2. Le centre de gravité  $C_G$
3. Le centre de torsion  $C_T$
4. Le foyer aérodynamique  $F_A$
5. Le point à mi-corde  $M_{c/2}$
6. Le point au trois-quart de corde  $M_{c/4}$

Dans le cas des pales droite classiques, le centre de torsion, l'axe de pas et le foyer aérodynamique sont quasiment confondus avec le point au quart de corde (par rapport au bord d'attaque). La



**FIGURE 3.8:** Position des points caractéristiques et orientation des sections une fois la pale déformée

proximité du foyer aérodynamique et de l'axe de pas permet de limiter le moment exercé par les efforts aérodynamiques et ainsi de limiter les efforts de commandes au niveau des bielles de pas. La position d'un point quelconque  $M$  au sein de la section, est défini par :

$$\underline{P'M} = \underline{P'C_T} + \underline{C_TM} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\theta} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_M - y_T \\ z_M - z_T \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\theta^r} \quad (3.12)$$

### 4.3 Formulation énergétique

La même formulation énergétique basée sur les énergies cinétique, potentielle et de dissipations que celle décrite dans la méthode des modes prescrits est utilisée.

#### 4.3.1 Energie cinétique

L'énergie cinétique est calculée à partir du comportement cinématique de la pale. Chaque section est considérée comme un solide rigide. La vitesse du centre de gravité d'une section dans son mouvement par rapport au sol est donnée par :

$$\underline{V}_{G \in S/R_0} = \left[ \frac{d\underline{OG}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_\psi} + \underline{\Omega}_{\mathcal{R}_\psi/R_0} \wedge \underline{OG} \quad (3.13)$$

et la vitesse angulaire d'une section :

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}_{S/R_0} &= \underline{\Omega}_{\mathcal{R}_\psi/R_0} + \underline{\Omega}_{\mathcal{R}_\delta/\mathcal{R}_\psi} + \underline{\Omega}_{\mathcal{R}_\beta/\mathcal{R}_\delta} + \underline{\Omega}_{\mathcal{R}_\theta/\mathcal{R}_\beta} + \underline{\Omega}_{\mathcal{R}'_\delta/\mathcal{R}_\theta} + \underline{\Omega}_{\mathcal{R}'_\beta/\mathcal{R}'_\delta} + \underline{\Omega}_{\mathcal{R}'_\theta/\mathcal{R}'_\beta} \\ \underline{\Omega}_{S/R_0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{\Omega} + \underline{\delta} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\psi} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\dot{\beta}} \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\delta} + \begin{bmatrix} \underline{\dot{\theta}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\beta} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{\dot{\theta}}_z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_\theta} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\dot{\theta}}_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}'_\delta} + \begin{bmatrix} \underline{\dot{\theta}}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}'_\beta} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique vaut alors :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^R \left[ \underline{V}_{G \in S/R_0}^2 \rho S + \underline{\Omega}_{S/R_0} \cdot \underline{I}_G(S) \cdot \underline{\Omega}_{S/R_0} \right] \cdot dr \quad (3.14)$$

avec la matrice d'inertie d'une section :

$$\underline{I}_G(S) = \begin{pmatrix} \iint (y^2 + z^2) \rho dS & 0 & 0 \\ 0 & \iint z^2 \rho dS & -\iint yz \rho dS \\ 0 & -\iint yz \rho dS & \iint y^2 \rho dS \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'_\theta}$$

en considérant, pour un point quelconque  $M$  de la section :

$$\underline{GM} = y\underline{y}'_\theta + z\underline{z}'_\theta$$

#### 4.3.2 Energie de dissipation

La seule source de dissipation d'énergie provient de l'adaptateur de trainée, supposé angulaire. L'expression de l'énergie de dissipation vaut donc :

$$E_d = \frac{1}{2} C_\delta \left[ \underline{\delta} + \sum_i \Phi_\delta^{i'}(e) \dot{q}_i \right]^2 \quad (3.15)$$

La déformée angulaire en pied de pale fait intervenir l'angle rigide de trainée ainsi que les déformées angulaires de trainée des différents modes.

### 4.3.3 Énergie potentielle

L'énergie potentielle est issue de la déformation de la pale et des raideurs angulaires à l'articulation :

$$E_p = \frac{1}{2} \left[ K_\beta \beta^2 + K_\delta \delta^2 + \sum_i k_i q_i^2 \right]$$

L'énergie de déformation de la pale est exprimée directement à partir des raideurs modales  $k_i = \mu_i \omega_i^2$  provenant du calcul de base modale couplée issue de la méthode des modes prescrits.

## 4.4 Méthode de Lagrange

Les équations différentielles du système sont obtenues par application de la méthode de Lagrange :

$$L = E_c - E_p$$

et pour chacun des degrés de liberté  $q_k$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Le système dynamique suivant est obtenu :

$$\boxed{\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{q}}} + \left( \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C}}_G \right) \cdot \underline{\underline{\dot{q}}} + \left( \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}}_C \right) \cdot \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{F}}_C + \underline{\underline{F}}_{NL} \text{ avec } \underline{\underline{q}} = (q_r, q_e)^T} \quad (3.16)$$

Les matrices qui composent ce système dépendent notamment des angles de battement et trainée rigides, le rendant ainsi non linéaire. En vol palier, ces angles étant périodiques, ce système différentiel est non linéaire à coefficients périodiques.

Pour gagner en lisibilité, ces matrices sont développées dans le cas où centre de gravité, centre de torsion et axe de pas sont confondus et où les effets d'inertie de section et l'angle de pas sont supposés négligeables.

La matrice de masse de ce système est symétrique et prend la forme :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} I_P & 0 & -J_\beta^i \\ \cdot & I_P \cos^2 \beta & J_\delta^i \cos \beta \\ Sym & \cdot & \mu_i \end{pmatrix}$$

avec les invariants de battement et trainée du mode  $i$  :

$$J_\beta^i = \int_e^R r \phi_\beta^i dm \text{ et } J_\delta^i = \int_e^R r \phi_\delta^i dm$$

Cette matrice est fortement non linéaire et illustre les couplages purement inertiels entre déformations et mouvements rigides. La sous matrice de masse des degrés de liberté souple est diagonale

est fait intervenir les masses modales  $\mu_i$ .

La matrice d'amortissement est symétrique et vaut :

$$\underline{\underline{C}} = C_\delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & \phi_\delta^{i'}(0) & \phi_\delta^{j'}(0) \\ \cdot & \cdot & \phi_\delta^{i'}(0)^2 & \phi_\delta^{i'}(0)\phi_\delta^{j'}(0) \\ \text{Sym} & \cdot & \cdot & \phi_\delta^{j'}(0)^2 \end{pmatrix}$$

L'amortisseur de trainée est supposé angulaire.

La matrice gyroscopique, quant à elle, est antisymétrique et prend la forme :

$$\underline{\underline{C}}_G = 2\Omega \sin \beta \begin{pmatrix} 0 & I_P \cos \beta & \mathcal{J}_\delta^i & \mathcal{J}_\delta^j \\ \cdot & 0 & \mathcal{J}_\beta^i \cos \beta & \mathcal{J}_\beta^j \cos \beta \\ \cdot & \cdot & 0 & \int [\phi_\beta^j \phi_\delta^i - \phi_\beta^i \phi_\delta^j] dm \\ \text{Antisym} & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice illustre les couplages gyroscopiques provenant des effets de Coriolis entre mouvements rigides et déformations et également entre les différents modes de déformation.

La matrice de raideur est diagonale et vaut :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} K_\beta & 0 & 0 \\ 0 & K_\delta & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i \omega_i^2 \end{pmatrix}$$

Elle comprend les raideurs à l'articulation ainsi que les raideurs modales issues du calcul modal provenant de la méthode des modes prescrits. Ces dernières contiennent les effets des raideurs de trainée et battement à l'articulation, l'effet non linéaire de précontrainte centrifuge ainsi que les raideurs classiques de poutre.

La matrice  $\underline{\underline{K}}_C$  correspond à une matrice de raideur centrifuge :

$$\underline{\underline{K}}_C = \Omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -em_\beta^i \cos \beta - \mathcal{J}_\beta^j \cos 2\beta \\ 0 & 0 & e [m_\beta^i \sin \beta \sin \delta + m_\delta^i \cos \delta] \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les moments statiques de battement et trainée :

$$m_\beta^i = \int_e^R \phi_\beta^i dm \quad \text{et} \quad m_\delta^i = \int_e^R \phi_\delta^i dm$$

Elle traduit les efforts centrifuges générés par une déformation et se traduisant par des moments à l'articulation.

Le premier terme du second membre  $\underline{\underline{F}}_C$  correspond à l'effort généralisé des forces centrifuges :

$$\underline{\underline{F}}_C = \Omega^2 \begin{pmatrix} \sin \beta [eM_s \cos \delta + I_P \cos \beta] \\ eM_s \cos \beta \sin \delta \\ -\sin \beta [em_\beta^i \cos \delta + \mathcal{J}_\beta^i \cos \beta] + em_\delta^i \sin \delta \end{pmatrix}$$

Les moments à l'articulation exercées par la force centrifuge sont retrouvés ainsi que le travail des forces centrifuges sur les modes souples.

Le second terme correspond quant à lui à un terme de forçage hautement non linéaire regroupant notamment les effets centrifuges et gyroscopiques provenant des vitesses angulaires de battement et trainée rigides.

$$\underline{F}_{NL} = \sin \beta \begin{pmatrix} I_P \dot{\delta}^2 \cos \beta \\ -I_P 2\dot{\beta} \dot{\delta} \cos \beta \\ -\dot{\delta} \left[ \mathcal{J}_\delta^i 2\dot{\beta} + \mathcal{J}_\beta^i \dot{\delta} \cos \beta \right] \end{pmatrix} + \sum_j \left[ \underline{C}_{NL} \dot{q}_j + \underline{K}_{NL} q_j \right]$$

avec les termes non linéaires suivants :

$$\begin{cases} \underline{C}_{NL} = 2\dot{\delta} \sin \beta \begin{pmatrix} \mathcal{J}_\delta^i \\ \mathcal{J}_\beta^i \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{K}_{NL} = \begin{pmatrix} -\mathcal{J}_\beta^i \dot{\delta} \left[ 2\Omega + \dot{\delta} \right] \cos 2\beta \\ \dot{\beta} \left[ \mathcal{J}_\delta^i \dot{\beta} \cos \beta + \mathcal{J}_\beta^i (\Omega + \dot{\delta}) 2 \cos 2\beta \right] \\ \dot{\beta} (\Omega + \dot{\delta}) \cos \beta \int \left[ \phi_\beta^i \phi_\delta^j + \phi_\beta^j \phi_\delta^i \right] dm \end{pmatrix} \end{cases}$$

#### 4.4.1 Remarques

Lorsque les degrés de liberté souples sont supposés nuls, le comportement dynamique d'une pale rigide est obtenu tandis que si les degrés de liberté rigides sont supposés nuls, c'est le comportement élastique linéaire en petit déplacement d'une pale souple qui est obtenu.



# 4 Modélisation aérodynamique du rotor

Dans ce chapitre, le comportement aérodynamique du rotor est présenté. Un état de l'art des différents modèles de flux induit est proposé. Celui-ci permet d'aboutir au choix du modèle de vitesse induite dynamique multiharmoniques FiSUW, modèle le plus adapté pour la description du comportement aéroélastique du rotor. Enfin, un modèle de portance faisant appel à la théorie de l'élément de pale et aux travaux de Theodorsen est présenté. Celui-ci, en reliant les efforts aérodynamiques générés par les profils au comportement cinématique de la pale, assure le lien entre les équations différentielles de mouvement et celles de flux induit.

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Flux induit : état de l'art</b>	<b>78</b>
1.1	Généralités	78
1.2	Modèles de vitesses induites statiques	78
1.3	Modèles de vitesses induites dynamiques	79
1.4	Modèles de sillage	81
1.5	Choix du modèle de flux induit	82
<b>2</b>	<b>Finite State Unsteady Wake model (FiSUW)</b>	<b>83</b>
2.1	Introduction	83
2.2	Equations et hypothèses	84
2.3	Résolution analytique de l'équation au Laplacien	85
2.4	Equations différentielles de vitesse induite	86
2.5	Bilan	86
<b>3</b>	<b>Théorie de l'élément de pale</b>	<b>87</b>
3.1	Généralités	87
3.2	Actions mécaniques exercées sur le profil	87
3.3	Tangage dynamique du profil	88
3.4	Coefficients aérodynamiques tabulés	89
<b>4</b>	<b>Théorie de Theodorsen</b>	<b>90</b>
4.1	Généralités	90
4.2	Fréquence réduite	90
4.3	Modèle de portance	91
4.4	Coefficient de déficience de portance	92

# 1 Flux induit : état de l'art

## 1.1 Généralités

Au cours de son fonctionnement, le rotor apporte de l'énergie à l'air et le flux amont. On parle de flux induit. La vitesse de ce flux doit être prise en compte de façon à calculer correctement l'incidence du profil par rapport à l'écoulement. Le champ de vitesse induite constitue donc un élément important à modéliser. Différentes théories sont disponibles pour estimer la vitesse induite. La théorie de Froude, qui considère une vitesse induite uniforme sur le disque rotor, constitue une première approximation du champ de vitesses induites. De nombreuses théories à un harmonique sont disponibles dans la littérature. A ces modèles statiques viennent s'ajouter des modèles dynamiques qui eux permettent de prendre en compte l'effet de la masse d'air et de son inertie sur le comportement du champ de vitesse induite.

L'étude réalisée par Chen [Che89] présente certains modèles de vitesse induite statique et dynamique. Les résultats de ces derniers sont comparés à des modèles plus complexes de sillage libre. Il est ainsi montré que des modèles simples de vitesses induites constituent un excellent compromis précision/temps de calcul.

## 1.2 Modèles de vitesses induites statiques

Les modèles de vitesse induite statiques relient les efforts aérodynamiques exercés sur le rotor au champ de vitesses induites sans prendre en compte le comportement dynamique de la masse d'air entourant le profil. Autrement dit, à un changement donné de portance générée par le rotor correspond un changement instantané du champ de vitesses induites. Aucun effet de "retard" traduisant le comportement dynamique du fluide n'est pris en compte et tout se passe comme si le comportement aérodynamique du rotor était quasi-statique.

### 1.2.1 Théorie de Froude

La théorie de Froude [Lei06], ou encore, théorie du disque sustentateur, est présentée dans le premier chapitre. Elle considère un flux moyenné sur le disque rotor (voir Fig.1.1). Celui-ci est directement relié à la portance développée par le rotor.

Pour rappel, en vol stationnaire, la vitesse induite est donnée par la relation :

$$V_{i_0} = \sqrt{\frac{T}{2\rho A}}$$

et en vol d'avancement, elle est obtenue par résolution de :

$$T = 2\rho A V_{i_0} \sqrt{(V_\infty \cos \alpha)^2 + (V_{i_0} + V_\infty \sin \alpha)^2} \quad (4.1)$$

Sous forme adimensionnée, cela donne :

$$C_T = 2\lambda_{i_0} \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$$

avec :

$$\mu = \frac{V_a}{R\Omega} = \frac{V_\infty}{R\Omega} \cos \alpha, \quad \lambda = \lambda_i + \frac{V_\infty}{R\Omega} \sin \alpha \quad \text{et} \quad \lambda_{i_0} = \frac{V_{i_0}}{R\Omega}$$

### 1.2.2 Modèles linéaires monoharmoniques

Le flux induit n'est pas uniforme sur le disque rotor. Il varie en fonction de l'incidence et de la vitesse locale de l'écoulement. Glauert [Gla26] fut le premier à proposer une approche alternative à la théorie de Froude en introduisant une variation radiale linéaire longitudinale du flux induit :

$$V_i(r, \psi) = V_{i_0} \left( 1 + \frac{r}{R} K_c \cos \psi \right)$$

Le coefficient  $K_c$  a été identifié expérimentalement par de nombreux auteurs [Che89].

La formulation précédente a été complétée par Meijer-Drees, en y ajoutant une répartition latérale de vitesse induite, traduisant la dissymétrie issue de la différence de vitesse incidente entre pale avançante et pale reculante :

$$V_i(r, \psi) = V_{i_0} \left( 1 + \frac{r}{R} [K_c \cos \psi + K_s \sin \psi] \right)$$

Le terme  $V_{i_0}$  est issue de l'équation 4.1.

La vitesse induite en tout point du rotor est alors connue. Elle ne dépend que de la position en rayon et en azimuth et non du temps, c'est pourquoi ces modèles sont appelés statiques.

Ce type de modélisation s'avère suffisante pour les calculs d'équilibre en vol stationnaire ou vol de translation rectiligne uniforme, pour lesquels la vitesse induite est établie. Une répartition à un unique harmonique suffit alors pour un calcul représentatif de l'équilibre global de la machine.

Auteurs	$K_c$	$K_s$
Coleman et al.	$\tan \chi / 2$	0
White & Blake	$\sqrt{2} \sin \chi$	0
Pitt & Peters	$\frac{15\pi}{23} \tan \chi / 2$	0
Howlett	$\sin^2 \chi$	0
Meijer-Drees	$\frac{4}{3} (1 - 1.8\mu^2) \tan \chi$	$-2\mu$

**TABLE 4.1:** Coefficients longitudinal et latéral issus des modèles de vitesse induite statique à répartition radiale linéaire et répartition azimuthale monoharmonique

L'angle de déflexion du sillage rotor est défini par :

$$\tan \chi = \frac{\mu}{\lambda}$$

### 1.3 Modèles de vitesses induites dynamiques

Il s'agit de modèles de vitesses induites instationnaires dont les états sont régis par des équations différentielles temporelles.

### 1.3.1 Modèle de Pitt & Peters

Le modèle de Pitt & Peters [PP81] est un modèle dynamique prenant en compte trois états de vitesse induite. Ces trois états correspondent à la vitesse induite moyenne  $V_{i_0}$ , la vitesse induite longitudinale  $V_{i_c}$  et la vitesse induite latérale  $V_{i_s}$  :

$$V_i(\tilde{t}, r, \psi) = V_{i_0}(\tilde{t}) + V_{i_c}(\tilde{t}) \frac{r}{R} \cos \psi + V_{i_s}(\tilde{t}) \frac{r}{R} \sin \psi \quad (4.2)$$

avec, pour variable de temps adimensionnée :

$$\tilde{t} = \frac{t}{2\pi/\Omega}$$

Une équation différentielle du premier ordre relie ces états de vitesse induite à la portance et aux moments de tangage et de roulis du rotor.

$$\underline{\underline{\tau}} \dot{\underline{v}}_i + \underline{v}_i = \underline{\underline{L}} \underline{c} \quad (4.3)$$

avec :

$$\underline{v}_i = (V_{i_0}, V_{i_s}, V_{i_c})^T \quad \text{et} \quad \underline{c} = (C_T, C_{M_y}, C_{M_x})^T \quad (4.4)$$

$C_T$  représente le coefficient de portance adimensionné,  $C_{M_y}$  le coefficient de moment de tangage adimensionné et  $C_{M_x}$  le coefficient de moment de roulis adimensionné :

$$C_T = \frac{T}{\rho A (R\Omega)^2}, \quad C_{M_x} = \frac{M_x}{\rho A R (R\Omega)^2} \quad \text{et} \quad C_{M_y} = \frac{M_y}{\rho A R (R\Omega)^2}$$

Les effets inertiels du fluide entourant le rotor sont pris en compte à travers la matrice des constantes de temps  $\underline{\underline{\tau}}$  et le lien quasi-statique entre efforts aérodynamiques et états de vitesse induite est réalisé grâce à la matrice de gain  $\underline{\underline{L}}$ . Peters [Pet82] définit, à partir d'observations expérimentales, la matrice de gain suivante :

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2v_T} & 0 & \frac{15\pi}{64v_m} \tan \frac{\chi}{2} \\ 0 & -\frac{4}{v_m(1+\cos\chi)} & 0 \\ \frac{15\pi}{64v_T} \tan \frac{\chi}{2} & 0 & -\frac{4\cos\chi}{v_m(1+\cos\chi)} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

et la matrice des constantes de temps suivante :

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\pi v_T} & 0 & -\frac{1}{12v_m} \tan \frac{\chi}{2} \\ 0 & \frac{64}{45\pi v_m(1+\cos\chi)} & 0 \\ \frac{5\pi}{8v_T} \tan \frac{\chi}{2} & 0 & \frac{64}{45\pi v_m(1+\cos\chi)} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

avec :

$$v_T = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2} \quad \text{et} \quad v_m = \frac{\mu^2 + \lambda(\lambda + \lambda_{i_0})}{v_T} \quad (4.7)$$

Ce modèle de vitesse induite est adapté à l'étude de la dynamique du vol de l'hélicoptère. De nombreuses études ont montrés que ces états de vitesses induites peuvent se coupler avec les modes de battement ou de trainée rigides [Sa88], d'où l'importance de prendre en compte leurs comportements dynamiques dans le cadre des études de stabilité et de contrôle du vol.

En vol palier, le disque rotor est en régime établi permanent et la vitesse induite également. L'aspect dynamique disparaît alors, et seule la matrice de gain  $\underline{\underline{L}}$  assure le lien entre chargements aérodynamiques globaux et états de vitesses induites constants.

### 1.3.2 Finite State Unsteady Wake model

Ce modèle de vitesse induite dynamique est une généralisation du modèle de Pitt & Peters sur  $n$  harmoniques et pour des répartitions radiales de vitesses induites basées sur les polynômes de Legendre. Etant donné qu'il est le seul à permettre une description haut harmonique du flux induit, il a été choisi pour le modèle aéroélastique de rotor isolé. Une description complète en est donnée suite à cet état de l'art.

## 1.4 Modèles de sillage

Les modèles de sillage décrivent l'ensemble des tourbillons générés par les pales. Ces tourbillons sont de deux types, les tourbillons de pied et de bout de pale et les tourbillons issus du bord de fuite. Contrairement aux modèles de vitesses induites précédents, n'ayant pour but que de déterminer le flux induit au niveau du disque rotor, ces modèles s'attachent à décrire à la fois la géométrie du sillage tourbillonnaire et ces effets, c'est à dire les vitesses induites par ces tourbillons en tout point de l'espace. Ils se substituent donc aux modèles de vitesse induite précédents [ABB01, Joh94, Lei06].

### 1.4.1 Sillage rigide

Le sillage est décrit par une surface hélicoïdale représentant les nappes tourbillonnaires issues du bord de fuite de chaque pale Fig.4.1. Cette surface se déplace axialement à vitesse constante. Du point de vue d'un observateur en repère tournant, la configuration du sillage est donc figée. La vitesse induite est supposée uniforme au niveau du disque rotor et peut être calculée via la théorie de Froude. Ce modèle permet d'accéder à un champ de vitesse induite hors du disque rotor. Celui-ci est déduit de la loi de Biot & Savart donnant la vitesse induite en un point situé à  $\underline{r}$  d'un tourbillon de longueur  $\underline{dl}$  de circulation  $\Gamma$  :

$$\underline{V}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\underline{dl} \wedge \underline{dr}}{\|\underline{dr}\|^3} \quad (4.8)$$

et de l'expression de la circulation d'un tourbillon issu d'une ligne portante de coefficient de portance  $C_z$  et de corde  $c$  :

$$\Gamma = \frac{c}{2} U_\infty C_z \quad (4.9)$$

### 1.4.2 Sillage prescrit

De la même manière que dans le cas des sillages rigides, le sillage est figé et la nappe tourbillonnaire se déplace à vitesse constante  $V_{i0}$ . Sa géométrie est fixée en fonction des conditions de vol et peut provenir de données expérimentales. Cela permet notamment de prendre en compte l'effet de contraction du sillage. Ce dernier est décomposé en éléments tourbillonnaires sous forme d'un maillage.

Un processus itératif est mis en place de façon à faire converger la vitesse induite au niveau du disque rotor [Leb12]. Celle-ci est d'abord calculée via un modèle statique de type Meijer-Drees. La portance générée par un tronçon de ligne portante est calculée ainsi que la circulation du tourbillon associé Eq.(4.9). La vitesse induite par l'ensemble des tourbillons au niveau du disque rotor est ensuite calculée Eq.(4.8) et ainsi de suite jusqu'à obtenir convergence sur les vitesses.

### 1.4.3 Sillage libre

Dans ce cas, le sillage n'est pas figé et interagit avec le champ de vitesses induites complet. Il en résulte une modification dynamique de sa géométrie Fig.4.1. La position des éléments tourbillonnaires est modifiée du fait de ce champ de vitesse et un nouveau champ de vitesse induite est calculé. Le processus est réitéré de façon à obtenir une géométrie de sillage cohérente avec le champ de vitesses induites.

La différence avec les modèles de sillage prescrit provient du fait que le sillage interagit avec lui même. Le calcul des vitesses induites en tout point du sillage est donc nécessaire.

De façon à réduire le temps de calcul, il est possible de décomposer le sillage en un sillage proche libre et un sillage lointain rigide ou prescrit. Suivant les modèles, l'influence du sillage lointain est prise ou non en compte dans le calcul du champ de vitesse induite proche du rotor.

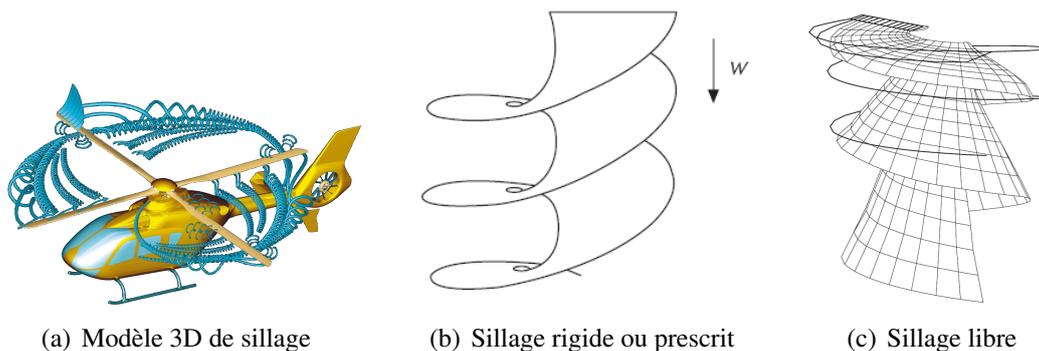


FIGURE 4.1: Modèles de sillage

## 1.5 Choix du modèle de flux induit

L'objectif de cette étude étant de réaliser un outil de calcul de charge, il convient de choisir un modèle de vitesse induite adapté. La théorie de Froude et les modèles statiques à un harmonique

sont adaptés au calcul de performances ainsi qu'à la mécanique du vol. Mais, ils manquent de précision pour le calcul de charge.

Le modèle dynamique de Pitt & Peters est quant à lui adapté au calcul transitoire et aux problématiques de contrôle de l'hélicoptère, mais son faible contenu harmonique est insuffisant pour une évaluation correcte du torseur tête rotor.

Les modèles de sillage, quant à eux, sont les seuls en mesure de prédire les interactions pales-tourbillons et s'avèrent donc utiles pour analyser le comportement aéroacoustique du rotor. Néanmoins, ils sont très coûteux en temps de calcul et sont sujets aux problèmes de convergence. C'est pourquoi, en phase d'avant-projet, les modélisations simplifiées, basées sur la seule représentation de la vitesse induite, leurs sont préférés.

Pour conclure, seul le modèle de vitesse induite *FiSUW* permet une description suffisamment précise, et à moindre coût, du flux induit. Cela réside principalement dans la possibilité de modéliser les harmoniques élevés du flux induit à partir de plusieurs états de vitesse induite. D'autre part, sa grande flexibilité en fait un modèle particulièrement adapté aux études d'avant-projet.

## 2 Finite State Unsteady Wake model (FiSUW)

### 2.1 Introduction

FiSUW est un modèle de vitesse induite instationnaire tridimensionnel basé sur un nombre fini d'états. Il a été développé par Peters & He [PH91] dont les travaux ont été repris côté français par Basset & al. [Bas99, BH00, BHPH01].

La portance circulatoire générée par les pales est considérée comme une entrée du modèle. Celui-ci est basé sur la théorie du disque sustentateur modifiée de façon à prendre en compte les aspects instationnaires ainsi qu'un nombre fini de pales.

Les états du modèle correspondent aux coefficients des fonctions de formes radiales et azimutales décrivant le flux induit. Ils sont régis par des équations différentielles linéaires temporelles. D'autre part, le nombre d'états est fixé par l'utilisateur offrant ainsi une grande flexibilité en terme de compromis temps de calcul / précision.

Ce modèle de vitesse induite dynamique est adaptée à l'analyse aéroélastique des rotors, à la prédiction des charges dynamiques ainsi qu'à la conception de commandes hautes harmoniques [PBH89]. L'effet du tourbillon de bord de fuite, modélisé par le coefficient de déficience de portance  $C(k)$  dans le cadre de la théorie de Theodorsen, est implicitement pris en compte à travers la réponse dynamique du flux induit.

Une des limitations de cette théorie provient du fait qu'elle ne prend pas en compte la contraction du sillage ni les interactions pales-tourbillons puisque le sillage n'est pas modélisé.

La majeure partie des développements théoriques décrits ci-après sont issus des travaux de Basset & al. [BH00].

## 2.2 Equations et hypothèses

On considère une particule de fluide au sein de l'écoulement généré par le rotor. La conservation de la masse donne :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

La conservation de la quantité de mouvement donne :

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_d$$

Et la loi de comportement du fluide :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{I}_d + 2\mu_f \underline{D}$$

avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes internes au fluide,  $\underline{f}_d$  les forces volumiques externes appliquées sur celui-ci,  $p$  la pression,  $\mu_f$  la viscosité du fluide et  $\underline{D}$  le tenseur des taux de déformations.

Dans le cas d'un fluide parfait, incompressible, les équations précédentes se simplifient pour aboutir au système suivant :

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \\ \frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} [-\underline{\nabla}(p) + \underline{f}_d] \end{cases}$$

FiSUW est basée sur l'hypothèse d'existence d'un potentiel d'accélération tel que :

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = \underline{\nabla}(\phi) \Leftrightarrow \underline{\nabla} \wedge \frac{D\underline{v}}{Dt} = \underline{0} \quad (4.10)$$

Cette hypothèse est valable si et seulement si les forces volumiques externes appliquées sur le fluide dérivent d'un potentiel et si l'écoulement est incompressible. Dans le cas du rotor d'hélicoptère, la seule force volumique appliquée sur l'air est la pesanteur dérivant évidemment d'un potentiel.

D'autre part, la majeure partie du rotor présente des nombres de Mach inférieurs à 0.6, rendant valable l'hypothèse d'incompressibilité. Seul le mach en bout de pale avançante peut atteindre des valeurs élevées pour lesquelles cette hypothèse peut être remise en question.

Le potentiel d'accélération peut être divisé en une contribution circulatoire décrivant les variations de pression le long de l'écoulement, et une contribution non circulatoire décrivant son caractère instationnaire :

$$\phi = \phi^A + \phi^V \quad (4.11)$$

pour lesquelles :

$$\underline{\nabla}(\phi^V) = V_\infty \cdot \underline{\nabla}(\underline{v}) \quad (4.12)$$

$$\underline{\nabla}(\phi^A) = -\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \quad (4.13)$$

Dans les deux cas, ces potentiels d'accélération satisfont l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0$$

### 2.3 Résolution analytique de l'équation au Laplacien

Il a été démontré que, dans le cas d'un disque portant, une solution analytique est obtenue en faisant usage des coordonnées elliptiques. Dans ce système de coordonnées, l'opérateur Laplacien prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[ (1-v^2) \frac{\partial \phi}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1-\eta^2) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}} \left[ \frac{v^2 + \eta^2}{(1-v^2)(1+\eta^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\psi}} \right] = 0 \quad (4.14)$$

Il est possible de résoudre cette équation aux dérivées partielles analytiquement à partir d'une méthode de séparation de variables. Cela permet de se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\phi(v, \eta, \tilde{\psi}) = \phi_1(v) \cdot \phi_2(\eta) \cdot \phi_3(\tilde{\psi}) \quad (4.15)$$

La solution est obtenue par résolution du système suivant, pour lequel  $r$  correspond au nombre d'harmoniques et  $n$  au nombre de fonction de forme radiale :

$$\begin{cases} 0 = \frac{d}{dv} \left[ (1-v^2) \frac{d\phi_1}{dv} \right] + \left[ \frac{m^2}{1-v^2} + n(n+1) \right] \phi_1 \\ 0 = \frac{d}{d\eta} \left[ (1-\eta^2) \frac{d\phi_2}{d\eta} \right] + \left[ -\frac{m^2}{1-\eta^2} + n(n+1) \right] \phi_2 \\ 0 = \frac{d^2\phi_3}{d\tilde{\psi}^2} + m^2\phi_3 \end{cases} \quad (4.16)$$

Les formes générales des solutions de ce problème sont alors :

$$\begin{cases} \text{Pour } \phi_1, \text{ les polynômes de Legendre de première espèce} & : P_n^m(v) \\ \text{Pour } \phi_2, \text{ les polynômes de Legendre de seconde espèce} & : Q_n^m(i\eta) \\ \text{Pour } \phi_3, \text{ les fonctions trigonométriques circulaires} & : \cos(m\tilde{\psi}), \sin(m\tilde{\psi}) \end{cases}$$

Les polynômes de Legendre permettent de modéliser une discontinuité de pression à travers le disque rotor tout en satisfaisant l'équation de Laplace. C'est pourquoi ils ont été choisis en tant que base de projection. Le champ de pression prend alors la forme :

$$\phi(v, \eta, \tilde{\psi}, \tilde{t}) = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m+1, m+3}^{\infty} P_n^m(v) \cdot Q_n^m(i\eta) \cdot [\tau_n^{m,c}(\tilde{t}) \cos(m\tilde{\psi}) + \tau_n^{m,s}(\tilde{t}) \sin(m\tilde{\psi})]$$

De manière analogue, la composante de vitesse induite normale au disque rotor prend la forme :

$$V_i(v, \tilde{\psi}, \tilde{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=r+1, r+3}^{\infty} \frac{P_j^r(v)}{v} [\alpha_j^r(\tilde{t}) \cos(r\tilde{\psi}) + \beta_j^r(\tilde{t}) \sin(r\tilde{\psi})]$$

## 2.4 Equations différentielles de vitesse induite

Le lien entre vitesse induite et potentiel d'accélération est obtenue via la relation 4.13 pour la partie instationnaire :

$$\dot{V}_i = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{\eta=0}$$

et la relation 4.12, pour la partie circulaire :

$$V_i = - \frac{1}{V_\infty} \int_0^\infty \frac{\partial \phi}{\partial z} d\xi$$

Cela permet de décrire les états de vitesse induite via le système différentiel du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \left( \underline{\underline{L}}_{jn}^{m\ c} \right) \cdot \underline{\dot{\alpha}}_j^r + V_n^m \cdot \underline{\alpha}_j^r = \left( \underline{\underline{L}}_{jn}^{m\ c} \right) \cdot \underline{\tau}_n^{m\ c} \\ \left( \underline{\underline{L}}_{jn}^{m\ s} \right) \cdot \underline{\dot{\beta}}_j^r + V_n^m \cdot \underline{\beta}_j^r = \left( \underline{\underline{L}}_{jn}^{m\ s} \right) \cdot \underline{\tau}_n^{m\ s} \end{cases}$$

Afin de coupler ce modèle avec le modèle de portance, les efforts généralisés  $\tau_n^m$  doivent être reliés aux efforts développés par les pales à partir de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \tau_n^{m\ c} = \frac{1}{\delta \pi} \sum_1^b \sum_1^{N_e} \frac{F_{b,e}}{\rho \Omega^2 R^4} \cdot \frac{P_n^m(\mathbf{v})}{\mathbf{v}} \sqrt{\frac{\pi}{4H_n^m}} \cos m \Psi_b \\ \tau_n^{m\ s} = \frac{1}{\pi} \sum_1^b \sum_1^{N_e} \frac{F_{b,e}}{\rho \Omega^2 R^4} \cdot \frac{P_n^m(\mathbf{v})}{\mathbf{v}} \sqrt{\frac{\pi}{4H_n^m}} \sin m \Psi_b \end{cases}$$

avec  $\delta = 2$  pour  $m = 0$  et  $\delta = 1$  pour  $m \neq 0$ .

$F_{b,e}$  représente la portance générée par la section  $e$  de la pale  $b$ .

Les termes des matrices du système ainsi que les fonctions apparaissant dans l'expression des efforts généralisés sont données en annexe.

## 2.5 Bilan

Les équations différentielles de flux induit étant désormais établies et les équations différentielles de mouvements ayant été formulées dans la partie sur la modélisation élastique de la pale, il ne reste plus qu'à établir le lien entre le mouvement de la pale et les efforts aérodynamiques associés. Ainsi, il sera possible de décrire dans son ensemble le système couplé fluide-structure que constitue le rotor d'hélicoptère dans son écoulement.

### 3 Théorie de l'élément de pale

#### 3.1 Généralités

La théorie de l'élément de pale est classiquement utilisé de façon à lier comportement cinématique de la pale, influence du sillage et actions mécaniques exercées par l'air sur la pale. Il s'agit d'une application de la théorie de la ligne portante au cas de la voilure tournante.

Cette théorie considère que chaque section de pale se comporte comme un profil aérodynamique. Il s'agit d'une approche bidimensionnelle pour laquelle chaque section est découplée aérodynamiquement des sections voisines [Bie06].

Les actions mécaniques exercées par l'air sur les sections dépendent de l'environnement aérodynamique, caractérisé par une vitesse d'écoulement et une incidence apparente. L'influence du sillage sur cette configuration aérodynamique est vu sous la forme d'une vitesse induite au niveau de la section [Joh94].

#### 3.2 Actions mécaniques exercées sur le profil

Les actions mécaniques exercées par l'air sur les profils sont déterminées à partir des coefficients aérodynamiques de portance  $C_z$ , de traînée  $C_x$  et de moment  $C_m$ , de la vitesse totale de l'écoulement  $U$  et de la masse volumique de l'air  $\rho$  :

$$\begin{cases} dF_z = \frac{1}{2}\rho c U^2 C_z(i, M) dr \\ dF_y = \frac{1}{2}\rho c U^2 C_x(i, M) dr \\ dM_{c/4} = \frac{1}{2}\rho c^2 U^2 C_{m_{c/4}}(i, M) dr \end{cases} \quad (4.17)$$

Ces actions mécaniques s'exercent au foyer aérodynamique du profil. Celui-ci est en général confondu avec le quart de corde. Le torseur des efforts exercés par l'air sur une section de pale de largeur  $dr$  dans le repère aérodynamique  $\mathcal{R}_a$  prend donc la forme :

$$\{\mathcal{T}_{air \rightarrow section}\} = \begin{Bmatrix} 0 & dM_{c/4} \\ dF_y & 0 \\ dF_z & 0 \end{Bmatrix}_{F_A, \mathcal{R}_a} \quad (4.18)$$

La figure 4.2 illustre ce torseur aérodynamique. L'incidence  $i$  fait intervenir l'angle d'écoulement  $\phi$  et l'angle du profil  $\theta_p$  :

$$i = \theta_p - \phi \quad (4.19)$$

L'angle de la section  $\theta_p$  contient le vrillage et l'angle de torsion. L'angle de pas et le couplage pas-battement sont déjà compris dans l'orientation du repère  $\mathcal{R}_p^r$  dans lequel est défini l'écoulement :

$$\theta_p = \theta_v + \theta_x \quad (4.20)$$

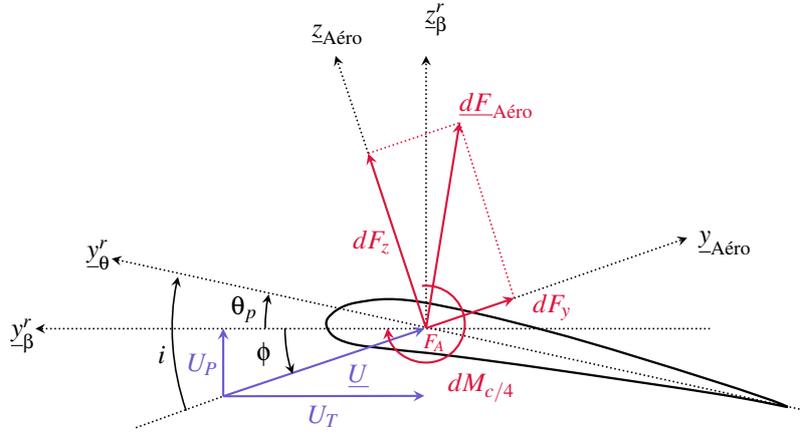


FIGURE 4.2: Actions mécaniques exercées par l'air sur un profil

L'angle d'écoulement, quant à lui, traduit l'incidence apparente de l'écoulement sur le profil :

$$\phi = \text{atan} \left( \frac{U_P}{U_T} \right)$$

avec  $U_P$  et  $U_T$  correspondant respectivement aux composantes perpendiculaire et tangentes du vecteur vitesse de l'air par rapport à la pale (cinématique de la pale et vitesse induite sont donc comprises dans ces composantes) :

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} U_R \\ U_T \\ U_P \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\beta^r}$$

Une fois projeté dans le repère  $\mathcal{R}_\beta^r$  lié à la section, le torseur aérodynamique prend la forme suivante :

$$\{\mathcal{T}_{air \rightarrow section}\} = \begin{Bmatrix} 0 & dM_{c/4} \\ -dF_y \cos \phi - dF_z \sin \phi & 0 \\ dF_z \cos \phi - dF_y \sin \phi & 0 \end{Bmatrix}_{F_A, \mathcal{R}_\beta^r} \quad (4.21)$$

L'effort de portance est notamment projeté sur l'axe  $y_\beta^r$ .

### 3.3 Tangage dynamique du profil

Le profil étant animé d'un mouvement instationnaire de tangage provenant à la fois de la déformation en torsion et de la commande de pas, une attention particulière doit être portée à la définition de l'angle d'incidence ainsi qu'au moment aérodynamique appliqué sur la section.

D'une part, compte tenu de la vitesse angulaire engendrée par ce mouvement, la vitesse d'un point du profil dépend de sa position en corde par rapport au centre de rotation de la section. D'autre part, le mouvement de tangage dynamique crée un moment aérodynamique supplémentaire. Celui-ci n'est pas pris en compte par la formulation basée sur les coefficients aérodynamiques évalués à

l'incidence apparente du profil.

Les travaux sur l'aérodynamique instationnaire des voilures fixes ont permis de démontrer que l'incidence doit être calculée à partir de la vitesse apparente aux trois quarts de corde [Bie06] :

$$\underline{U}^{3c/4} = \begin{pmatrix} U_R^{3c/4} \\ U_T^{3c/4} \\ U_P^{3c/4} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\beta^r}$$

ce qui donne un angle d'écoulement :

$$\phi = \text{atan} \left( \frac{U_P^{3c/4}}{U_T^{3c/4}} \right)$$

Les vitesses de rotation en pas et torsion interviennent alors dans l'expression de la vitesse perpendiculaire  $V_P^{3c/4}$ . Cela a une influence sur les valeurs des coefficients aérodynamiques calculées.

Le moment aérodynamique supplémentaire issu du mouvement de tangage dynamique du profil s'apparente à un amortissement direct en pas et torsion. Il prend la forme d'un moment pur s'ajoutant au terme de moment aérodynamique quasi-statique. Le moment aérodynamique total, exprimé au niveau du centre de rotation de la section  $C_T$  vaut alors :

$$\frac{dM_{C_T}}{dr} = \underbrace{\frac{1}{2} \rho c U^2 \left[ C_{m_{c/4}}(i) + (y_{FA} - y_{CT}) \cdot C_z(i) \right]}_{\text{Terme quasi-statique}} - \underbrace{\rho \pi \frac{c^3}{8} U \left[ 1 + 2 \frac{y_{CT} - y_{FA}}{c} \right]}_{\text{Amortissement direct de pas}} \dot{\theta}_p$$

Ce terme d'amortissement direct constitue la principale source d'amortissement pour les mouvements de pas et de torsion de la pale. Le premier mode de torsion d'une pale classique présente alors un amortissement de l'ordre de 15%.

### 3.4 Coefficients aérodynamiques tabulés

L'analyse aéroélastique non linéaire des rotors nécessite de faire appel à des coefficients aérodynamiques issues de données expérimentales. Ils prennent la forme de tableaux ayant pour entrée le nombre de Mach et l'incidence du profil :

$$C_z(i, M), C_x(i, M), C_{m_{c/4}}(i, M)$$

Ces polaires aérodynamiques issues d'essais quasistatiques sont utilisées pour le calcul des efforts aérodynamiques instationnaires.

Le nombre de Mach est donné par :

$$M = \frac{|U|}{c_{air}} \quad \text{avec} \quad c_{air} = \sqrt{\gamma R_g T}, \quad \gamma = 1.4 \quad \text{et} \quad R_g = 287 \text{ J/kg/K}$$

pour une température de 20°C cela donne :

$$c_{air} = 343m/s$$

Les conditions atmosphériques ont donc une forte influence sur les actions mécaniques exercées par l'air sur le profil. La température agit sur le nombre de Mach tandis que la densité de l'air agit directement sur portance, traînée et moment aérodynamique.

## 4 Théorie de Theodorsen

### 4.1 Généralités

Comme expliqué dans les précédents chapitres, l'écoulement autour du profil est fortement instationnaire. La théorie quasi-statique présentée précédemment peut dès lors s'avérer insuffisante pour évaluer les actions mécaniques exercées par l'air sur la pale.

Certaines théories issues du milieu de la voilure fixe constituent une première approche pour la prise en compte des effets instationnaires.

La théorie développée par Theodorsen [Bie06] tient compte des effets d'accélération de l'écoulement (effet non circulatoire) ainsi que de l'influence du tourbillon de bord de fuite sur les chargements aérodynamiques. Cette théorie est valable dans le cas d'un profil en mouvement d'oscillation harmonique dans un fluide non visqueux, incompressible à  $V_\infty$  constante, ce qui constitue une forte approximation par rapport au cas cyclique de l'hélicoptère.

### 4.2 Fréquence réduite

La fréquence réduite représente le rapport entre le temps de balayage de la structure par une particule de fluide sur la période de vibration de la structure :

$$k = \frac{c\omega}{2U}$$

Ce paramètre caractérise la nature des interactions entre l'écoulement et la structure. Différents cas de fonctionnement peuvent être distingués suivant sa valeur :

- $k \gg 1$  : Une particule de fluide aura le temps de voir plusieurs périodes du mouvement de la structure. Il s'agit de vibroacoustique
- $k \approx 1$  : Les périodes du fluide et de la structure sont équivalentes. Il s'agit d'interaction fluide-structure
- $k \ll 1$  : Une particule de fluide n'aura pas le temps d'être influencée par la structure. Il s'agit d'aéroélasticité

L'utilisation de ce paramètre dans le cadre des voilures tournantes est délicate puisque la fréquence réduite varie avec l'envergure. Néanmoins, il est d'usage de considérer la vitesse de l'écoulement à 75% de l'envergure [Bie06] :

$$k = \frac{2}{3} \frac{c}{R} \frac{\omega}{\Omega}$$

D'autre part, la pale étant excitée sur une infinité d'harmoniques, son mouvement se décompose sur l'ensemble de ces harmoniques. Il s'avère donc nécessaire de considérer l'ensemble des fréquences réduites associées à ces harmoniques.

### 4.3 Modèle de portance

Dans le cadre de la théorie de Theodorsen, les modèles de portance et de moment aérodynamique prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \left[ \frac{dF_z}{dr} \right]_{\text{Theodorsen}} = \left[ \frac{dF_z}{dr} \right]_{\text{NC}} + C(k) \left[ \frac{dF_z}{dr} \right]_{\text{QS}} \\ \left[ \frac{dM_{CT}}{dr} \right]_{\text{Theodorsen}} = \left[ \frac{dM}{dr} \right]_{\text{NC}} + \left[ \frac{dM_{c/4}}{dr} \right]_{\text{QS}} + (y_{FA} - y_T) C(k) \left[ \frac{dF_z}{dr} \right]_{\text{QS}} \end{cases} \quad (4.22)$$

Portance et moment se décomposent chacun en deux contributions distinctes :

- QS fait référence aux termes quasi-statiques présentés précédemment
- NC fait référence aux termes non circulatoires

Les effets non circulatoires de l'écoulement proviennent du comportement inertiel de la masse d'air entourant le profil. Les effets quasi-statiques quant à eux, sont altérés par un coefficient appelé coefficient de déficience de portance. Ce coefficient à valeurs complexes permet d'introduire un déphasage entre écoulement et efforts aérodynamiques ainsi qu'une atténuation par rapport aux valeurs quasi-statique pure. Il traduit l'effet du tourbillon de bord de fuite sur les efforts aérodynamiques.

Les expressions des termes non circulatoires sont :

$$\begin{cases} \left[ \frac{dF_z}{dr} \right]_{\text{NC}} = \frac{\pi}{4} \rho c^2 \left[ -\ddot{z} + U \dot{\theta}_p - \left( y_{FA} - y_T - \frac{c}{4} \right) \ddot{\theta}_p \right] \\ \left[ \frac{dM}{dr} \right]_{\text{NC}} = \frac{\pi}{8} \rho c^3 \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{c} [y_{FA} - y_T] \right) \ddot{z} - U \left( 1 + \frac{2}{c} [y_T - y_{FA}] \right) \dot{\theta}_p \right. \\ \left. + \left( -\frac{3c}{16} + [y_{FA} - y_T] - \frac{2}{c} [y_{FA} - y_T]^2 \right) \ddot{\theta}_p \right] \end{cases} \quad (4.23)$$

Les termes non circulatoires, aussi appelés termes de masse apparente, contiennent notamment des dérivées secondes temporelles. Ils traduisent les efforts de réaction de la masse d'air équivalente entourant le profil aérodynamique. Dans le cas quasi-statique, les polaires sont identifiées une fois que l'écoulement a atteint son régime permanent, indépendamment de ses effets dynamiques de masse apparente.

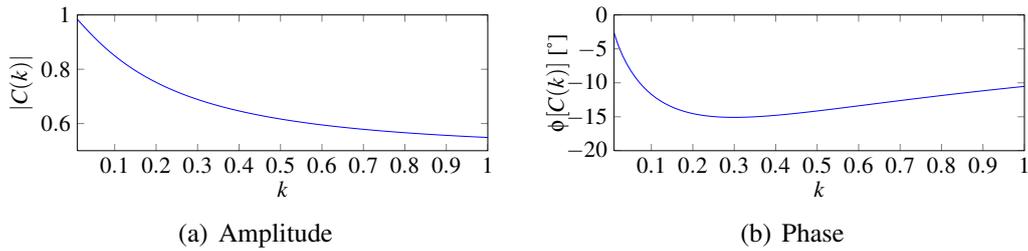
D'autre part, le terme de moment non circulaire contient le terme d'amortissement direct de pas dont il a été question précédemment.

#### 4.4 Coefficient de déficience de portance

L'expression du coefficient de déficience de portance dans le cadre de la théorie de Theodorsen est :

$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \quad \text{avec} \quad H_n^{(2)} = J_n - iY_n$$

$J_n$  et  $Y_n$  représentent les fonctions de Bessel de 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> type.



**FIGURE 4.3:** Amplitude et phase du coefficient de déficience de portance en fonction de la fréquence réduite

La figure 4.3 illustre l'évolution de l'amplitude et de la phase de ce coefficient en fonction de la fréquence réduite.

Le tableau 4.4 quant à lui illustre, pour les trois premiers modes de battement et pour le premier mode de torsion de la pale Super Puma, les amplitudes et phases associées du coefficient de déficience de portance pour des fréquences de mouvement de la structure coïncidant avec les fréquences propres de ces modes. Il apparaît clairement que les efforts aérodynamiques instationnaires associés à ces modes peuvent être fortement impactés en termes d'amplitude (jusqu'à 20%) mais aussi de phase (jusqu'à  $-15^\circ$ ).

Mode	$\omega$	$k$	$ C $	$\phi^\circ$
Battement 1	$1\Omega$	0.05	0.93	-7.7
Battement 2	$2.6\Omega$	0.12	0.83	-12.5
Battement 3	$4.7\Omega$	0.21	0.74	-14.7
Torsion 1	$5.5\Omega$	0.25	0.72	-15.0

**TABLE 4.2:** Coefficient de déficience de portance associés aux trois premiers modes de battement et au premier mode de torsion pour une pale de Super Puma

Il existe dans la littérature, différentes formulations pour ce coefficient de déficience de portance [Bie06, Lei06]. Loewy propose notamment une description prenant en compte les tourbillons générés par les pales précédentes dans le cas d'un vol stationnaire.

---

# Détermination de la réponse dynamique, des charges et de la stabilité du rotor

Suite à la phase de modélisation présentée précédemment, ce chapitre s'attache à décrire les méthodes de résolution mise en œuvre de façon à déterminer d'une part, la réponse dynamique du rotor et le flux induit associé et d'autre part, les charges dynamiques exercées par les pales sur le moyeu rotor. Il est également question des méthodes de perturbations permettant d'évaluer la stabilité aéroélastique du rotor.

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Réponse dynamique du rotor</b> . . . . .	<b>94</b>
1.1	Régime forcé . . . . .	94
1.2	Régime libre . . . . .	94
<b>2</b>	<b>Equilibre de l'hélicoptère</b> . . . . .	<b>95</b>
2.1	Dynamique du vol . . . . .	95
2.2	Algorithme de résolution . . . . .	96
<b>3</b>	<b>Calcul des charges dynamiques</b> . . . . .	<b>99</b>
3.1	Intégration des efforts aérodynamiques et inertiels . . . . .	99
3.2	Méthode modale . . . . .	99
3.3	Torseur tête rotor . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Etude de la stabilité aéroélastique du rotor</b> . . . . .	<b>102</b>
4.1	Système linéaire tangent . . . . .	102
4.2	Développement en repère tournant . . . . .	102
4.3	Développement en repère fixe . . . . .	103
4.4	Calcul des valeurs et vecteurs propres . . . . .	105

---

# 1 Réponse dynamique du rotor

## 1.1 Régime forcé

Le calcul de la réponse dynamique en régime forcé du rotor est réalisé à partir d'une méthode d'équilibre harmonique [Joh94]. Chaque degrés de liberté est décomposé en une série de Fourier sur les harmoniques rotor :

$$q_i(\psi) = q_i^0 + \sum_{n=1}^N [q_i^{nc} \cos(n\psi) + q_i^{ns} \sin(n\psi)] \quad (5.1)$$

Les coefficients de ces séries de Fourier correspondent à la description en repère fixe des degrés de liberté issus du repère tournant. Cette décomposition est ensuite injectée au sein des équations différentielles du mouvement et les opérateurs suivant leurs sont appliqués :

$$\begin{cases} L_0[Eq] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Eq \cdot d\psi \\ L_{nc}[Eq] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Eq \cdot \cos(n\psi) d\psi \\ L_{ns}[Eq] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Eq \cdot \sin(n\psi) d\psi \end{cases}$$

La projection des équations différentielles sur ces fonctions périodiques permet d'obtenir un système algébrique non linéaire, pouvant être résolu pour chaque harmonique, par une méthode de type Newton-Raphson. Chaque coefficient de Fourier est alors déterminé et le mouvement de la pale sur un tour connu. Cette projection correspond à la résolution de l'équilibre dynamique de la pale en repère fixe.

Cette méthode repose sur l'hypothèse de régime établi périodique du rotor. Elle n'est donc applicable qu'en vol de translation rectiligne uniforme (vol stationnaire, vol axial à vitesse constante et vol palier), pour lequel l'hélicoptère présente un régime établi permanent.

La troncature de cette série définit le niveau de précision avec lequel le mouvement de la pale est décrit. Dans le cas de l'étude de l'équilibre du rotor, une description des angles de battement et trainée jusqu'à la deuxième harmonique permettra une bonne estimation de la portance et des moments statiques exercés par le rotor sur le mât rotor. Pour les études dynamiques, une description du mouvement de la pale allant au moins jusqu'à  $b + 1$  harmoniques permet de déterminer avec précision le torseur dynamique transmis au fuselage en  $b\Omega$ .

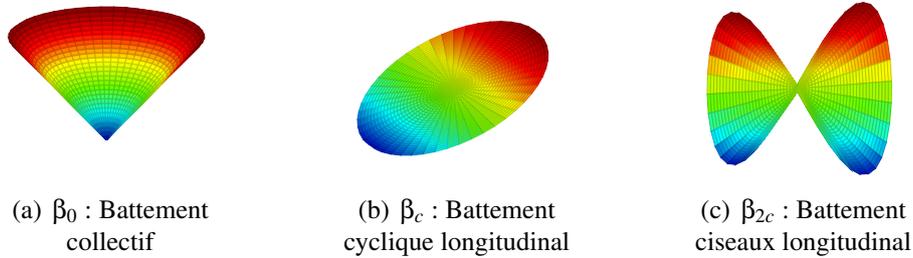
## 1.2 Régime libre

En régime libre, la décomposition précédente est également utilisée. Elle permet d'observer le comportement du rotor en repère fixe et s'avère avantageuse notamment lors de l'étude de la stabilité des problèmes couplés de type rotor-structure. La description du mouvement de la pale étant naturellement réalisée en repère tournant et celle du fuselage en repère fixe, le couplage entre ces deux mouvements se traduit alors par la présence de termes périodiques au sein des matrices de

raideur et de masse. La projection du mouvement de la pale en repère fixe permet alors de revenir à un système linéaire à coefficients constants. Pour ce faire, la transformation dite de Coleman est appliquée :

$$q_0(t) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b q_i(t) \quad q_{nc}(t) = \frac{2}{b} \sum_{i=1}^b q_i(t) \cos(n\Omega t) \quad q_{ns}(t) = \frac{2}{b} \sum_{i=1}^b q_i(t) \sin(n\Omega t)$$

Elle correspond à la relation inverse de celle Eq.5.1 à la différence près que les coefficients dépendent ici du temps. Ces derniers peuvent être assimilés à des participations modales associées à des modes "rotor", dont les déformées font intervenir l'ensemble des pales. Le mouvement du rotor est alors décrit non pas à partir du mouvement individuel de chaque pale mais à partir d'une combinaison linéaire de ces modes rotor. Des modes collectifs, cycliques et ciseaux sont alors définis Fig.5.1.



**FIGURE 5.1:** Enveloppe décrite par la pale au cours de son mouvement dans le cas d'un battement collectif pur, d'un battement cyclique longitudinal pur et d'un battement ciseaux longitudinal pur

La transformation de Coleman n'est valable que pour un nombre de pale supérieur à trois et pour un rotor isotrope, c'est à dire, un rotor doté de pales de caractéristiques identiques. Dans le cas d'un rotor isolé, l'étude du régime libre à partir des coefficients de Coleman permet notamment de connaître la projection des fréquences propres issues du mouvement de la pale en repère fixe.

## 2 Equilibre de l'hélicoptère

### 2.1 Dynamique du vol

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au fuselage, au rotor principal et au rotor arrière dans leurs mouvements respectifs par rapport au sol donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathcal{D}_{\text{Fus./Sol}}\} = \{\mathcal{T}_{\text{Air} \rightarrow \text{Fus.}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{Pesanteur} \rightarrow \text{Fus.}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{RP} \rightarrow \text{Fus.}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{RA} \rightarrow \text{Fus.}}\} \\ \{\mathcal{D}_{\text{RP/Sol}}\} = \{\mathcal{T}_{\text{Air} \rightarrow \text{RP}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{Pesanteur} \rightarrow \text{RP}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{Fus.} \rightarrow \text{RP}}\} \\ \{\mathcal{D}_{\text{RA/Sol}}\} = \{\mathcal{T}_{\text{Air} \rightarrow \text{RA}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{Pesanteur} \rightarrow \text{RA}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{Fus.} \rightarrow \text{RA}}\} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$\mathcal{D}$  et  $\mathcal{T}$  représentent respectivement le torseur dynamique et le torseur des actions mécaniques.

La résolution de l'équilibre dynamique de l'hélicoptère complet passe donc par la résolution de l'équilibre du fuselage, du rotor arrière et du rotor principal. Dans le cas d'un vol palier (translation rectiligne uniforme), le torseur dynamique du fuselage est nul.

S'agissant d'un problème d'interaction fluide structure, à ce système d'équations doivent être rajoutées les équations régissant le comportement dynamique des flux induits par le rotor principal et par le rotor arrière.

Le schéma de la figure 5.2 illustre l'approche couplée {Fuselage + Rotor Arrière + Rotor Principal}. Le fuselage impose des actions mécaniques ainsi que des déplacements et rotations aux deux ro-

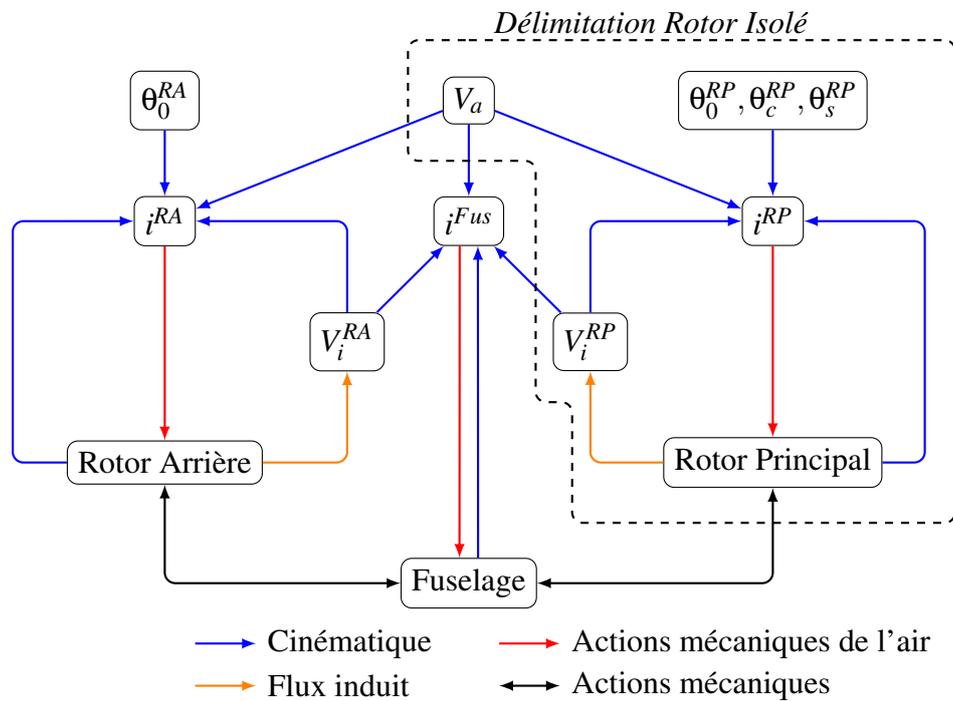


FIGURE 5.2: Equilibre de l'hélicoptère

tors. Ceux-ci génèrent une portance induisant un flux qui modifie à la fois leur propre incidence apparente par rapport à l'écoulement, mais aussi l'incidence du fuselage (notamment celle de l'empennage horizontal). Les commandes sont assurées par le pas collectif du rotor arrière et les pas collectif et cycliques du rotor principal. D'autre part, la vitesse d'avance elle aussi modifie la configuration aérodynamique de l'hélicoptère.

## 2.2 Algorithme de résolution

Un calcul préalable modélisant l'hélicoptère complet est réalisé sous HOST. Une vitesse d'avance constante ainsi que des accélérations linéaires et angulaires nulles de la cellule sont

imposées. Cela permet de déterminer les commandes de pas collectif et cycliques ainsi que le niveau de portance et de moment en roulis et lacet nécessaire à l'équilibre de la machine complète. Les données de portance et de moment sont ensuite introduites au sein du modèle de rotor isolé. Elles font office de valeurs objectifs permettant d'assurer la convergence du modèle vers un équilibre du rotor identique à celui rencontré dans le cas où il est relié à la machine complète.

Les variables d'états du modèle de rotor isolé sont :

1. Le pas collectif  $\theta_0$
2. Le pas cyclique longitudinal  $\theta_c$
3. Le pas cyclique latéral  $\theta_s$
4. Les composantes harmoniques des différents modes de mouvements  $q_i^{nc}$  et  $q_i^{ns}$
5. Les composantes harmoniques de flux induits  $\alpha_j^r$  et  $\beta_j^r$

Les fonctions objectifs font intervenir un paramètre de convergence  $\varepsilon$ , suffisamment petit. Elles prennent les formes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} |F_z^0 - F_{zEq}^0| < \varepsilon : \text{Convergence sur la portance de la pale} \\ |F_z^{1c} - F_{zEq}^{1c}| < \varepsilon : \text{Convergence sur le moment développé par la pale} \\ |F_z^{1s} - F_{zEq}^{1s}| < \varepsilon : \text{Convergence sur le moment développé par la pale} \\ |L_0 [Eq_{q_i} - Q_{q_i}]| < \varepsilon : \text{Convergence sur les équations de Lagrange moyenne} \\ |L_{nc} [Eq_{q_i} - Q_{q_i}]| < \varepsilon : \text{Convergence sur les équations de Lagrange harmonique} \\ |L_{ns} [Eq_{q_i} - Q_{q_i}]| < \varepsilon : \text{Convergence sur les équations de Lagrange harmonique} \\ |Eq_{\alpha_j^r} - Q_{\alpha_j^r}| < \varepsilon : \text{Convergence sur les équations de vitesse induite} \\ |Eq_{\beta_j^r} - Q_{\beta_j^r}| < \varepsilon : \text{Convergence sur les équations de vitesse induite} \end{array} \right.$$

Le schéma de résolution permettant d'accéder à l'équilibre du rotor isolé est présenté Fig.5.3. Une initialisation des variables d'états est réalisée. Celle-ci peut être issue d'un calcul en pale rigide. La configuration aérodynamique en incidence et nombre de Mach est ensuite calculée. Cela permet de calculer les efforts de portance, trainée et moments aérodynamiques utilisés pour la détermination des efforts généralisés appliqués sur la pale, du second membre des équations différentielles de flux induit ainsi que des efforts à l'articulation. Un processus itératif basé sur un algorithme de type Newton-Raphson est utilisé de façon à converger vers l'équilibre en annulant les fonctions objectifs. Ces dernières mesurent les écarts entre seconds membres ( $Q_{q_i}$ ,  $Q_{\alpha_j^r}$ ) et équations homogènes de mouvement et de flux induit ( $Eq_{q_i}$ ,  $Eq_{\alpha_j^r}$ ) ainsi que les écarts entre les efforts moyen  $F_z^0$  et en  $1\Omega$  ( $F_z^{1c}$ ,  $F_z^{1s}$ ) transmis par la pale à l'articulation.

Les efforts en  $0\Omega$  et  $1\Omega$  sont utilisés pour assurer l'équilibre en lacet, roulis et en portance du

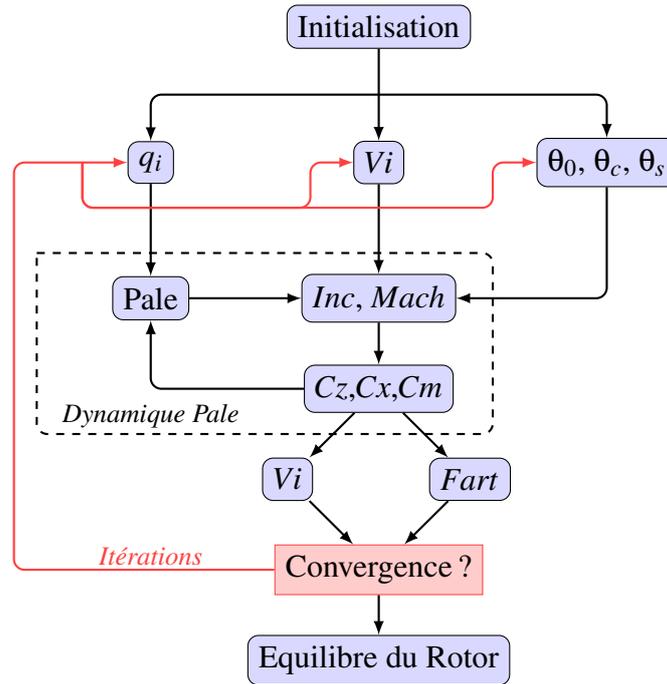


FIGURE 5.3: Algorithme de résolution de l'équilibre du rotor isolé

rotor. En effet l'équation 2.3 du deuxième chapitre donne :

$$\begin{cases} \hat{F}_z = b \sum_k F_z^{kb} e^{ikb\Omega t} \\ \hat{M}_x = e \frac{b}{2} \sum_k e^{ikb\Omega t} \left( e^{-i\frac{\pi}{2}} F_z^{kb-1} + e^{i\frac{\pi}{2}} F_z^{kb+1} \right) \\ \hat{M}_y = -e \frac{b}{2} \sum_k e^{ikb\Omega t} \left( \hat{F}_z^{kb-1} + F_z^{kb+1} \right) \end{cases}$$

avec  $\hat{F}_z$ ,  $\hat{M}_x$  et  $\hat{M}_y$  respectivement l'effort vertical, les moments de roulis et lacet exercé par le rotor sur le fuselage en repère fixe et  $F_z$  l'effort vertical exercé par une pale sur le moyeu en repère tournant. Lorsque l'équilibre statique de l'hélicoptère est considéré, seul l'harmonique 0 en repère fixe intervient dans l'équilibre ( $k = 0$ ) :

$$\begin{cases} \hat{F}_z^{0\Omega} = b F_z^{0\Omega} \\ \hat{M}_x^{0\Omega} = e \frac{b}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} F_z^{1\Omega} \\ \hat{M}_y^{0\Omega} = -e \frac{b}{2} F_z^{1\Omega} \end{cases}$$

La portance et les moments statiques en repère fixes sont donc issues des efforts de portance en  $0\Omega$  et  $1\Omega$  en repère tournant. C'est pourquoi ces derniers sont utilisés au sein des fonctions objectifs.

### 3 Calcul des charges dynamiques

Le calcul des charges dynamiques transmises du rotor au fuselage passe par la détermination du torseur des actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu. Il existe deux méthodes pour déterminer ces efforts [Dat04]. La première est basée sur une intégration radiale des efforts aérodynamiques et inertiels (*Force Summation Method*) et la seconde sur les déplacements modaux de la pale (*Modal Curvature Method*).

#### 3.1 Intégration des efforts aérodynamiques et inertiels

Cette méthode est basée sur une utilisation directe du principe fondamental de la dynamique selon lequel, la résultante dynamique d'un solide dans son mouvement par rapport à un repère galiléen est égal à la somme des forces extérieures appliquées sur ce solide. L'équilibre de la pale est donc donné par :

$$\int_0^R \underline{\Gamma}_{M \in \text{Pale}/R_G} \cdot dm = \underline{F}_{\text{Articulation} \rightarrow \text{Pale}} + \int_0^R \underline{F}_{\text{Air} \rightarrow \text{Pale}} \cdot dr \quad (5.3)$$

L'effort appliqué par une pale sur l'articulation vaut donc :

$$\underline{F}_{\text{Pale} \rightarrow \text{Articulation}} = \int_0^R \underline{F}_{\text{Air} \rightarrow \text{Pale}} \cdot dr - \int_0^R \underline{\Gamma}_{M \in \text{Pale}/R_G} \cdot dm \quad (5.4)$$

La principale difficulté de cette méthode provient du fait qu'il est difficile d'analyser les résultats qui en sont issues. En effet, un même mode intervenant à la fois dans les efforts inertiels et aérodynamiques, il est difficile d'identifier les modes ayant une forte influence sur les charges dynamiques. Néanmoins, cette méthode est la plus précise car, contrairement à la méthode modale, elle n'émet aucune hypothèse sur la répartition des efforts aérodynamiques exercés sur la pale.

#### 3.2 Méthode modale

Cette méthode approchée permet de déterminer les efforts tranchants coplanaires et hors plan à partir de la réponse de chacun des modes considérés dans la base de déformation [Bie06]. Cela facilite l'analyse et permet de relier directement un mode à l'effort tranchant modal qu'il génère. Dans cette approche, modes de battement et de trainée sont supposés découplés. D'autre part, le comportement cinématique de la pale est supposée linéaire en battement et trainée, les non-linéarités géométriques introduites par les angles à l'articulation sont donc négligées.

##### 3.2.1 Effort tranchant modal hors plan

L'équation différentielle régissant le comportement d'un mode de battement prend la forme :

$$\mu_{\beta_i} \left[ \ddot{q}_{\beta_i} + \omega_{\beta_i}^2 q_{\beta_i} \right] = \int_0^R F_z^{\text{Aéro}} \phi_{\beta_i} \cdot dr \quad (5.5)$$

Or, les déformées modales de battement forment une base de l'espace considéré, il est donc possible de décrire l'effort aérodynamique par :

$$F_z^{\text{Aéro}} = \sum_k F_{z_k} \phi_{\beta_k} \cdot dm \quad (5.6)$$

L'effort aérodynamique est donc supposé être une combinaison linéaire des efforts généralisés appliqués sur les modes de battement, pondérés par la répartition de masse de la pale. Cela constitue une forte approximation, notamment lorsque le nombre de modes considérés pour décrire le mouvement de la pale est faible [Joh94].

Compte tenu de la propriété d'orthogonalité des modes de battement :

$$F_{z_i} = \frac{1}{\mu_{\beta_i}} \int_0^R F_z^{\text{Aéro}} \phi_{\beta_i} \cdot dr \quad \text{avec} \quad \mu_{\beta_i} = \int_0^R \phi_{\beta_i}^2 \cdot dm \quad (5.7)$$

En combinant 5.5 et 5.7, il vient :

$$\ddot{q}_{\beta_i} + \omega_{\beta_i}^2 q_{\beta_i} = F_{z_i} \quad (5.8)$$

D'autre part, l'expression de l'effort hors plan transmis par une pale au moyeu prend la forme :

$$T_z(0) = \int_0^R [F_z^{\text{Aéro}} - \ddot{u}_z m_p] \cdot dr \quad (5.9)$$

Lorsque le déplacement et le chargement aérodynamique hors plan sont décomposés en une superposition de mode de battement, cet effort tranchant devient :

$$T_z(0) = \sum_k [F_{z_k} - \ddot{q}_{\beta_k}] \int_0^R \phi_{\beta_k} \cdot dm \quad (5.10)$$

En injectant l'expression 5.8 au sein de l'équation précédente, il vient :

$$T_z(0) = \sum_k \omega_{\beta_k}^2 \int_0^R \phi_{\beta_k} \cdot dm \cdot q_{\beta_k} \quad (5.11)$$

L'effort tranchant modal de battement est alors défini tel que :

$$T_z(0) = \sum_k T_z^{\beta_k} \cdot q_{\beta_k} \quad (5.12)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{T_z^{\beta_k} = \omega_{\beta_k}^2 \int_0^R \phi_{\beta_k} \cdot dm} \quad (5.13)$$

### 3.2.2 Efforts tranchants modaux dans le plan

L'équation différentielle régissant le comportement d'un mode de trainée prend la forme :

$$\mu_{\delta_j} \left[ \ddot{q}_{\delta_j} + \omega_{\delta_j}^2 q_{\delta_j} \right] = \int_0^R F_y^{\text{Aéro}} \phi_{\delta_j} \cdot dr \quad (5.14)$$

De la même manière que les modes de battement, les modes de trainée forment une base de l'espace considéré, il est donc possible de décrire l'effort aérodynamique par :

$$F_y^{\text{Aéro}} = \sum_j F_{y_j} \phi_{\delta_j} \cdot dm \quad (5.15)$$

Compte tenu de la propriété d'orthogonalité des modes de trainée :

$$F_{y_j} = \frac{1}{\mu_{\delta_j}} \int_0^R F_y^{\text{Aéro}} \phi_{\delta_j} \cdot dr \quad \text{avec} \quad \mu_{\delta_j} = \int_0^R \phi_{\delta_j}^2 \cdot dm \quad (5.16)$$

En combinant 5.14 et 5.16, il vient :

$$\ddot{q}_{\delta_j} + \omega_{\delta_j}^2 q_{\delta_j} = F_{y_j} \quad (5.17)$$

D'autre part, l'expression de l'effort tranchant en trainée transmis par une pale vaut :

$$T_y(0) = \int_0^R \left[ F_y^{\text{Aéro}} - \ddot{u}_y m_p + \Omega^2 u_y m_p \right] dr \quad (5.18)$$

Les forces de Coriolis issues du mouvement de battement sont négligées devant la force centrifuge, les efforts inertiels et la trainée aérodynamique.

Lorsque le déplacement et le chargement aérodynamique dans le plan sont décomposés en une superposition de mode de trainée, il vient :

$$T_y(0) = \sum_j \left[ F_{y_j} - \ddot{q}_{\delta_j} + \Omega^2 q_{\delta_j} \right] \int_0^R \phi_{\delta_j} \cdot dm \quad (5.19)$$

En injectant l'expression 5.17 au sein de l'équation précédente, il vient :

$$T_y(0) = \sum_j \left[ \omega_{\delta_j}^2 + \Omega^2 \right] \int_0^R \phi_{\delta_j} dm \cdot q_{\delta_j} \quad (5.20)$$

L'effort tranchant modal de trainée est alors défini tel que :

$$T_y^{\delta_j}(0) = \sum_j T_y^{\delta_j} \cdot q_{\delta_j} \quad (5.21)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{T_y^{\delta_j} = \left[ \omega_{\delta_j}^2 + \Omega^2 \right] \int_0^R \phi_{\delta_j} dm} \quad (5.22)$$

A cet effort tranchant modal de trainée vient s'ajouter l'effort tranchant modal radial  $T_x(0)$ , orienté suivant l'axe de la pale et faisant intervenir l'effort aérodynamique radial, l'effort centrifuge et les efforts de Coriolis issues du mouvement de trainée :

$$T_x(0) = \int_0^R \left[ F_x^{\text{Aéro}} + \Omega^2 r m_p - 2\Omega \dot{u}_y m_p \right] dr \quad (5.23)$$

Une fois le déplacement de trainée projeté sur la base de déformation cela donne :

$$T_x(0) = \int_0^R \left[ F_x^{\text{Aéro}} + \Omega^2 r m_p \right] dr - 2\Omega \sum_j \dot{q}_{\delta_j} \int_0^R \phi_{\delta_j} . dm \quad (5.24)$$

Cet effort est néanmoins plus difficile à déterminer puisqu'il ne dépend pas uniquement des participations modales de trainée mais nécessite également l'évaluation de l'effort aérodynamique radial. Ce dernier fait intervenir la trainée aérodynamique radiale ainsi qu'une projection de la portance lorsque la pale est animée d'un mouvement de battement. D'autre part le terme de force centrifuge, pour être correctement évalué, nécessite la connaissance du mouvement de battement.

### 3.3 Torseur tête rotor

Le torseur tête rotor est le torseur des actions mécaniques exercées par l'ensemble de pales sur le moyeu. Il est évalué à partir des développements mathématiques présentés dans le deuxième chapitre de ce mémoire.

## 4 Etude de la stabilité aéroélastique du rotor

### 4.1 Système linéaire tangent

Le système linéaire tangent peut être obtenu, soit à partir des degrés de liberté en repère tournant, c'est à dire des participations modales et angles à l'articulation, soit à partir des coefficients issues de la décomposition en série de Fourier, autrement dit des variables de Coleman.

Dans les deux cas, les matrices du système linéaire tangent sont obtenues à partir d'une méthode dite de "perturbation".

### 4.2 Développement en repère tournant

Une fois la résolution du système non linéaire algébrique réalisé, l'évolution des degrés de liberté en fonction de l'azimuth est connu. De façon à simplifier les développements, seulement deux degrés de liberté sont considérés :

$$q_{j_0}(\psi) \text{ et } q_{k_0}(\psi)$$

Leur comportement respectif est régi par une équation différentielle du deuxième ordre du type :

$$\begin{cases} \ddot{q}_j = F_{q_j}(q_j, \dot{q}_j, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) \\ \ddot{q}_k = F_{q_k}(q_k, \dot{q}_k, q_j, \dot{q}_j, \ddot{q}_j) \end{cases} \quad (5.25)$$

Les expressions précédentes une fois dérivées donnent :

$$\begin{cases} d\ddot{q}_j = \frac{\partial F_{q_j}}{\partial q_j}(\psi)dq_j + \frac{\partial F_{q_j}}{\partial \dot{q}_j}(\psi)d\dot{q}_j + \frac{\partial F_{q_j}}{\partial q_k}(\psi)dq_k + \frac{\partial F_{q_j}}{\partial \dot{q}_k}(\psi)d\dot{q}_k + \frac{\partial F_{q_j}}{\partial \ddot{q}_k}(\psi)d\ddot{q}_k \\ d\ddot{q}_k = \frac{\partial F_{q_k}}{\partial q_k}(\psi)dq_k + \frac{\partial F_{q_k}}{\partial \dot{q}_k}(\psi)d\dot{q}_k + \frac{\partial F_{q_k}}{\partial q_j}(\psi)dq_j + \frac{\partial F_{q_k}}{\partial \dot{q}_j}(\psi)d\dot{q}_j + \frac{\partial F_{q_k}}{\partial \ddot{q}_j}(\psi)d\ddot{q}_j \end{cases}$$

Ce qui correspond au système matriciel suivant :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}.d\ddot{q} = -\underline{\underline{\mathcal{C}}}.d\dot{q} - \underline{\underline{\mathcal{K}}}.dq \quad (5.26)$$

avec :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\partial F_{q_j}}{\partial \ddot{q}_k} \\ -\frac{\partial F_{q_k}}{\partial \ddot{q}_j} & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathcal{C}}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{q_j}}{\partial \dot{q}_j} & \frac{\partial F_{q_j}}{\partial \dot{q}_k} \\ \frac{\partial F_{q_k}}{\partial \dot{q}_j} & \frac{\partial F_{q_k}}{\partial \dot{q}_k} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathcal{K}}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{q_j}}{\partial q_j} & \frac{\partial F_{q_j}}{\partial q_k} \\ \frac{\partial F_{q_k}}{\partial q_j} & \frac{\partial F_{q_k}}{\partial q_k} \end{pmatrix}$$

Les termes des matrices  $\underline{\underline{\mathcal{M}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$  et  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$  sont obtenus en développant en série de Taylor le système d'équations (5.25) autour de la solution obtenue :

$$\begin{cases} F_{q_j}(q_j, \dot{q}_j, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) = F_{q_j}(q_{j0}, \dot{q}_{j0}, q_{k0}, \dot{q}_{k0}, \ddot{q}_{k0}) + \frac{\partial F_{q_j}}{\partial q_j}(q_j - q_{j0}) + \frac{\partial F_{q_j}}{\partial \dot{q}_j}(\dot{q}_j - \dot{q}_{j0}) + \dots \\ F_{q_k}(q_k, \dot{q}_k, q_j, \dot{q}_j, \ddot{q}_j) = F_{q_k}(q_{k0}, \dot{q}_{k0}, q_{j0}, \dot{q}_{j0}, \ddot{q}_{j0}) + \frac{\partial F_{q_k}}{\partial q_k}(q_k - q_{k0}) + \frac{\partial F_{q_k}}{\partial \dot{q}_k}(\dot{q}_k - \dot{q}_{k0}) + \dots \end{cases}$$

En appliquant une perturbation sur un unique degrés de liberté, sa dérivée temporelle première ou sa dérivée temporelle seconde, il est possible de déterminer les différentes dérivées partielles :

$$q_j = q_{j0} + \Delta q \quad \text{et} \quad \dot{q}_j = \dot{q}_{j0}, \ddot{q}_j = \ddot{q}_{j0}, q_k = q_{k0}, \dot{q}_k = \dot{q}_{k0}, \ddot{q}_k = \ddot{q}_{k0}$$

Ce qui donne, une fois injecté dans le développement de Taylor :

$$\frac{\partial F_{q_j}}{\partial q_j} = \frac{1}{\Delta q} [F_{q_j}(q_{j0}, \dot{q}_{j0}, q_{k0}, \dot{q}_{k0}, \ddot{q}_{k0}) - F_{q_j}(q_{j0} + \Delta q, \dot{q}_{j0}, q_{k0}, \dot{q}_{k0}, \ddot{q}_{k0})]$$

### 4.3 Développement en repère fixe

Ici, les variables de Coleman sont utilisées de façon à obtenir le système linéaire tangent.

$$\begin{cases} q_j(\psi) = q_j^0 + \sum_{n=1}^N \{ q_j^{nc} \cos(n\psi) + q_j^{ns} \sin(n\psi) \} \\ \dot{q}_j(\psi) = \dot{q}_j^0 + \sum_{n=1}^N \{ [\dot{q}_j^{nc} + n\Omega q_j^{ns}] \cos(n\psi) + [\dot{q}_j^{ns} - n\Omega q_j^{nc}] \sin(n\psi) \} \\ \ddot{q}_j(\psi) = \ddot{q}_j^0 + \sum_{n=1}^N \{ [\ddot{q}_j^{nc} + 2n\Omega \dot{q}_j^{ns} - (n\Omega)^2 q_j^{nc}] \cos(n\psi) + [\ddot{q}_j^{ns} - 2n\Omega \dot{q}_j^{nc} - (n\Omega)^2 q_j^{ns}] \sin(n\psi) \} \end{cases}$$

La dérivée temporelle seconde peut être mise sous la forme :

$$\ddot{q}_j = \Gamma_{q_j}(\underline{Q}_j, \dot{\underline{Q}}_j, \ddot{\underline{Q}}_j, \underline{Q}_k, \dot{\underline{Q}}_k, \ddot{\underline{Q}}_k) \quad (5.27)$$

avec :

$$\underline{Q}_j = (q_j^0, q_j^{1c}, q_j^{1s}, \dots, q_j^{Nc}, q_j^{Ns})^T$$

et :

$$\Gamma_{q_j} = \Gamma_{q_j}^0 + \sum_{n=1}^N \left\{ \Gamma_{q_j}^{nc} \cos(n\psi) + \Gamma_{q_j}^{ns} \sin(n\psi) \right\}$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} \Gamma_{q_j}^0 = \ddot{q}_j^0 \\ \Gamma_{q_j}^{nc} = \ddot{q}_j^{nc} + 2n\Omega \dot{q}_j^{ns} - (n\Omega)^2 q_j^{nc} \\ \Gamma_{q_j}^{ns} = \ddot{q}_j^{ns} - 2n\Omega \dot{q}_j^{nc} - (n\Omega)^2 q_j^{ns} \end{cases} \quad (5.28)$$

En dérivant les dérivées secondes temporelles des coefficients de Coleman il vient, par exemple pour  $\ddot{q}_j^{nc}$  :

$$d\ddot{q}_j^{nc} = \frac{\partial \ddot{q}_j^{nc}}{\partial q_j^0} dq_j^0 + \frac{\partial \ddot{q}_j^{nc}}{\partial \dot{q}_j^0} d\dot{q}_j^0 + \frac{\partial \ddot{q}_j^{nc}}{\partial \ddot{q}_j^0} d\ddot{q}_j^0 + \frac{\partial \ddot{q}_j^{nc}}{\partial q_j^{1c}} dq_j^{1c} + \dots \quad (5.29)$$

En tirant profit des relations (5.28), le système suivant est construit :

$$\underline{\underline{M}}^{\text{coleman}} \cdot d\underline{\underline{Q}} = -\underline{\underline{C}}^{\text{coleman}} \cdot d\underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{K}}^{\text{coleman}} \cdot \underline{\underline{Q}} \quad (5.30)$$

pour lequel :

$$\underline{\underline{Q}} = [\underline{Q}_j^T, \underline{Q}_k^T]^T \quad (5.31)$$

et avec pour matrice de masse :

$$\underline{\underline{M}}^{\text{coleman}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial q_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial q_j^{1c}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial q_k^{Ns}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial q_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial q_j^{1c}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial q_k^{Ns}} \end{pmatrix}$$

pour matrice d'amortissement :

$$\underline{\underline{C}}^{\text{coleman}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial \dot{q}_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial \dot{q}_j^{1c}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial \dot{q}_j^{nc}} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial \dot{q}_j^{ns}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial \dot{q}_k^0} & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial \dot{q}_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial \dot{q}_j^{1c}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial \dot{q}_j^{nc}} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial \dot{q}_j^{ns}} - 2n\Omega & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial \dot{q}_k^0} & \dots \\ \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial \dot{q}_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial \dot{q}_j^{1c}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial \dot{q}_j^{nc}} + 2n\Omega & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial \dot{q}_j^{ns}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial \dot{q}_k^0} & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial \dot{q}_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial \dot{q}_j^{1c}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial \dot{q}_j^{nc}} & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial \dot{q}_j^{ns}} & \dots & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial \dot{q}_k^0} & \dots \end{pmatrix}$$

et pour matrice de raideur :

$$\underline{\underline{K}}^{\text{coleman}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial q_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial q_j^{1c}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial q_j^{nc}} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial q_j^{ns}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^0}{\partial q_k^0} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial q_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial q_j^{1c}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial q_j^{nc}} + (n\Omega)^2 & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial q_j^{ns}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial q_k^0} & \cdots \\ \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial q_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial q_j^{1c}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial q_j^{nc}} & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial q_j^{ns}} + (n\Omega)^2 & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{ns}}{\partial q_k^0} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial q_j^0} & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial q_j^{1c}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial q_j^{nc}} & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial q_j^{ns}} & \cdots & \frac{\partial \Gamma_{q_k}^{Ns}}{\partial q_k^0} & \cdots \end{pmatrix}$$

Les termes en  $2n\Omega$  et  $(n\Omega)^2$  au sein des matrices d'amortissement et de raideur sont issus du passage repère tournant / repère fixe. Ils illustrent respectivement, le couplage gyroscopique entre des mouvements longitudinaux et latéraux issus du repère fixe, et l'effet de raidissement centrifuge.

Les termes des matrices précédentes sont calculés via un développement en série de Taylor des coefficient de Fourier de  $\Gamma$  autour de la position d'équilibre.

Pour  $\Gamma_{q_j}^{nc}$ , cela donne :

$$\Gamma_{q_j}^{nc}(\underline{Q}_j, \underline{\dot{Q}}_j, \underline{Q}_k, \underline{\dot{Q}}_k, \underline{\ddot{Q}}_k) = \Gamma_{q_j}^{nc}(\underline{Q}_{j_0}, \underline{Q}_{k_0}, \underline{\dot{Q}}_{k_0}, \underline{\ddot{Q}}_{k_0}) + \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial q_j^0} (q_j^0 - q_{j_0}^0) + \dots + \frac{\partial \Gamma_{q_j}^{nc}}{\partial \ddot{q}_k^{Ns}} (\ddot{q}_k^{Ns} - \ddot{q}_{k_0}^{Ns})$$

Par une méthode de perturbation similaire à celle présentée précédemment, il est alors possible de déterminer les différentes dérivées partielles de  $\Gamma$ .

## 4.4 Calcul des valeurs et vecteurs propres

### 4.4.1 Système d'état

Que le système soit étudié en repère fixe ou en repère tournant, le système linéaire tangent prend la forme :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}.d\ddot{x} + \underline{\underline{C}}.d\dot{x} + \underline{\underline{\mathcal{K}}}.dx = \underline{0} \quad (5.32)$$

avec en repère tournant :

$$\underline{dx} = \underline{dq}$$

et en repère fixe :

$$\underline{dx} = \underline{dQ}$$

Il est alors possible de le mettre sous la forme d'un système d'état :

$$\begin{pmatrix} -\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{-1}\underline{\underline{C}} & -\underline{\underline{\mathcal{M}}}^{-1}\underline{\underline{\mathcal{K}}} \\ \underline{\underline{Id}} & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Celui-ci équivaut à :

$$\underline{\dot{X}} = \underline{A} \cdot \underline{X} \quad (5.34)$$

avec :

$$\underline{X} = (\dot{x}, x)^T$$

#### 4.4.2 Variables en repère fixe

En repère fixe, la matrice dynamique  $\underline{A}$  est constante. L'étude du comportement dynamique de la pale est alors réalisée à partir des outils classiques d'analyse aux valeurs propres basés notamment sur une décomposition de type QR :

$$\underline{A} \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \cdot \underline{v}_i$$

Une fois les valeurs propres  $\lambda_i$  du système connues, il est possible de déterminer l'amortissement  $\alpha_i$  et la fréquence propre  $\omega_i$  de chaque mode :

$$\alpha_i = -\frac{Re(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \quad \text{et} \quad \omega_i = \frac{Im(\lambda_i)}{\sqrt{1 - \alpha_i^2}} \quad (5.35)$$

#### 4.4.3 Variables en repère tournant

En repère tournant, la matrice dynamique  $\underline{A}$  dépend de l'azimuth et est périodique :

$$\underline{A}(\psi + 2\pi) = \underline{A}(\psi)$$

Il est alors nécessaire d'utiliser la théorie de Floquet pour analyser le comportement dynamique périodique de la pale. Les éléments principaux de la théorie de Floquet sont développées en annexe.

Pour des ratios d'avancement inférieurs à 0.3, le caractère périodique des valeurs propres peut être négligé [Joh94]. Une alternative consiste donc à considérer le comportement moyenné sur un tour rotor. En outre, cela permet de se ramener à un système linéaire à coefficients constants pour lequel les outils d'analyse aux valeurs propres précédents sont valables :

$$\underline{A}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underline{A}(\psi) d\psi$$

# Troisième partie

## Etudes et simulations

---

*Le modèle aéroélastique de rotor isolé ayant été présenté, il est désormais validé par comparaison avec un autre code de calculs aéromécaniques ainsi qu'avec des torseurs tête rotor identifiés expérimentalement. Plusieurs études paramétriques sont ensuite réalisées sur les paramètres aérodynamique et dynamique de la pale. Enfin, l'apport des couplages aéroélastiques est étudié analytiquement et numériquement à travers leur influence sur le comportement dynamique de la pale et sur les charges dynamiques.*

---



---

# Validation et études de sensibilité

Dans ce chapitre, le modèle aéroélastique de rotor isolé développé dans la deuxième partie de ce manuscrit est validé, à la fois par une comparaison à un autre logiciel de calculs aéromécaniques et par une comparaison à des mesures réalisées au cours d'essais en vols. Dans un second temps, il est utilisé de façon à réaliser des études paramétriques portant sur l'influence de différents paramètres de conception du rotor, sur les composantes du torseur tête rotor. L'impact du vrillage, de la répartition de corde, du régime rotor ainsi que du placement fréquentiel des pales sont étudiés. Pour gagner en lisibilité, le modèle développé précédemment sera dénommé *FLFR*.

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Validation</b> . . . . .	<b>110</b>
1.1	Dynamique du rotor : comparaison avec <i>HOST</i> . . . . .	110
1.2	Base de déformation couplée : comparaison avec <i>MODPAL</i> . . . . .	114
1.3	Torseur tête rotor : comparaison avec l'identification expérimentale . . . . .	115
<b>2</b>	<b>Influence des paramètres aérodynamiques du rotor</b> . . . . .	<b>120</b>
2.1	Vrillage . . . . .	120
2.2	Corde . . . . .	122
2.3	Régime rotor . . . . .	126
2.4	Bilan . . . . .	129
<b>3</b>	<b>Influence des paramètres d'adaptation dynamique</b> . . . . .	<b>130</b>
3.1	Sensibilité des fréquences propres . . . . .	130
3.2	Influence du placement fréquentiel sur les charges dynamiques . . . . .	131
3.3	Bilan . . . . .	131

---

# 1 Validation

## 1.1 Dynamique du rotor : comparaison avec *HOST*

*HOST* est un logiciel de calcul aéromécanique développé par Airbus Helicopters. Il est dédié à l'étude du comportement dynamique et aérodynamique global de l'hélicoptère. Son architecture est basée sur une logique multicorps utilisant le parcours cinématique et le parcours effort de type Newton-Euler récursif [Ver94]. Chaque modèle décrivant un sous système transmet un torseur cinématique et un torseur d'action mécaniques aux autres modèles auxquels il est connecté. Un schéma itératif est mis en place de façon à converger vers l'équilibre.

*HOST* permet le calcul de l'équilibre de la machine, la simulation de cas de vols précis ainsi que l'analyse du comportement dynamique et de la stabilité du rotor. Il constitue donc une référence dont les bases théoriques sont décrites par Lebel [Leb12] et Toulmay [TAFV96]. Des précisions sont apportées en annexe concernant le modèle cinématique de pale souple utilisé par *HOST*. Celui-ci est basé sur une succession de tronçons rigides articulés, ce qui le différencie de la formulation par repère flottant.

*HOST* n'a pas été choisi pour traiter ces travaux de thèse car les couplages élastiques ne sont pas pris en compte. D'autre part, des problèmes liés aux déports de centre de gravité ont été constatés dans de précédentes études sur les pales de nouvelles générations.

### 1.1.1 Cas de calcul

Le cas-test considéré est un vol en palier à 120kts de l'EC225. L'équilibre en terme de commandes est obtenu grâce à *HOST* et est réinjecté au sein des modèles rotor isolé de *HOST* et *FLFR*. Le tableau 1.1.1 récapitule les données d'équilibre et les caractéristiques rotor utilisées.

$V_a$ [kts]	$c_{air}$ [m/s]	$\theta_0$ [°]	$\theta_c$ [°]	$\theta_s$ [°]	$\alpha$ [°]
120	340	2.057	2.816	-4.644	-5

**TABLE 6.1:** Paramètres du cas test de comparaison

Les hypothèses et paramètres de calcul considérés sont les suivants :

- Des coefficients aérodynamiques non linéaires tabulés dépendant de l'incidence et du nombre de Mach sont utilisés
- Le modèle de vitesse induite FiSUW est utilisé jusqu'à la 7<sup>ème</sup> harmonique et jusqu'au 8<sup>ème</sup> ordre pour les fonctions de formes radiales
- Les degrés de liberté sont décomposés en série de Fourier jusqu'au 7<sup>ème</sup> harmonique

De façon à considérer des cas de calculs strictement équivalents, les points de modélisation pour lesquels des différences notoires sont d'ores et déjà connues sont évités. Ainsi, de façon à correspondre à la formulation de *HOST*, les termes non circulatoires et l'amortissement direct de pas issus de la théorie de Theodorsen ne sont pas pris en compte. D'autre part, compte tenu des problèmes ayant été rencontrés sur pale de nouvelle génération avec *HOST*, les couplages entre

modes de déformation, les déports de centre de gravité et de foyer aérodynamique par rapport au centre de torsion et surtout le vrillage structurel (et non aérodynamique), sont négligés.

### 1.1.2 Etat d'équilibre du rotor

La configuration aérodynamique du rotor est caractérisée grâce aux cartographies de la figure 6.1. Les profils travaillant à des nombres de Mach différents suivant leurs positions en envergures, les variables utilisées pour décrire l'état aérodynamique du rotor font intervenir les coefficients aérodynamiques et le nombre de Mach local. Les coefficients  $C_z M^2$ ,  $C_x M^2$  et  $C_m M^2$  sont donc utilisés pour caractériser la contribution de chaque section aux charges aérodynamiques respectivement de portance, de traînée et de moment.

Compte tenu de la grande similitude entre les deux modèles, seules les cartographies aérodynamiques issues de la formulation en repère flottant (*FLFR*) sont présentées.

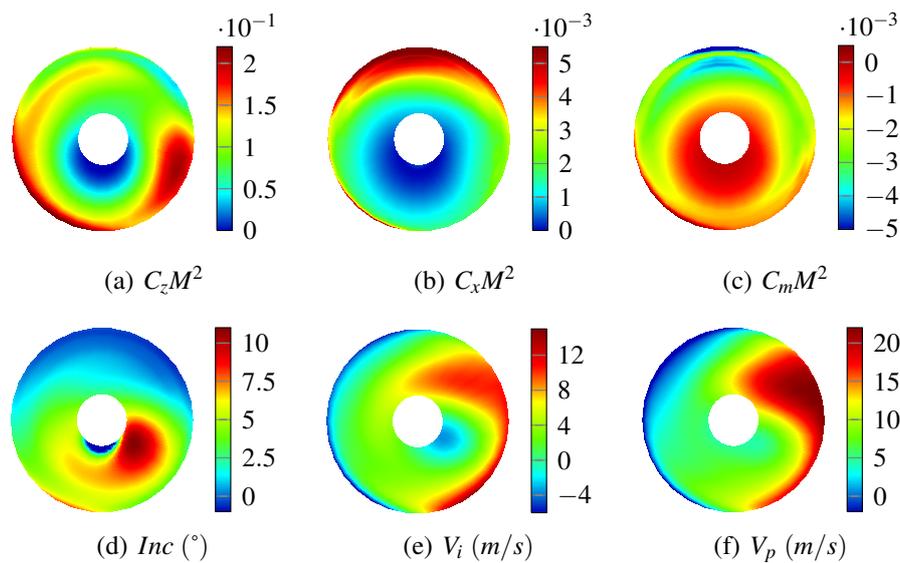


FIGURE 6.1: Cartographies aérodynamiques issues de *FLFR*

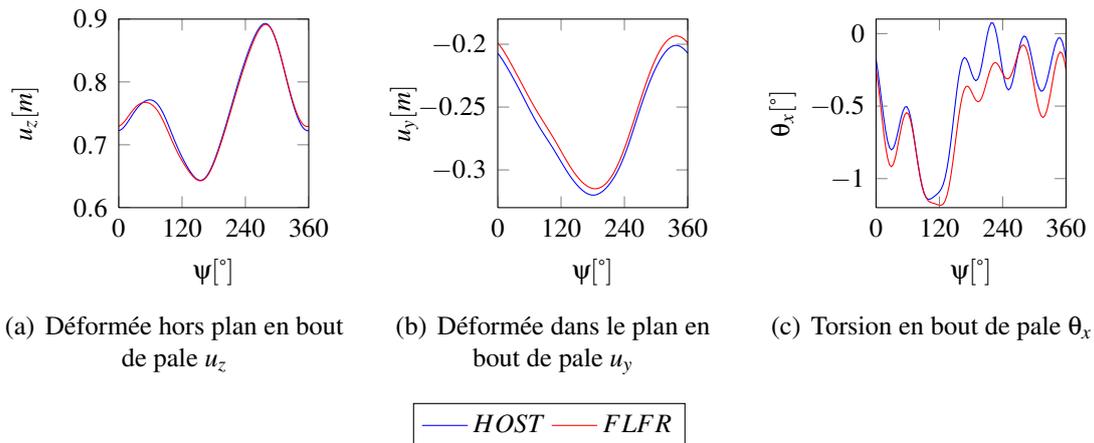
Le coefficient  $C_z M^2$  est globalement constant sur le disque rotor tandis que le coefficient  $C_x M^2$  présente un comportement cyclique fortement marqué avec en pale avançante une zone a forte traînée et en pale reculante une zone a traînée quasiment nulle. Un comportement similaire est obtenu pour le coefficient de moment  $C_m M^2$ , avec un moment aérodynamique piqueur en pale avançante et un moment faible en pale reculante.

L'incidence du rotor est comprise entre  $0^\circ$  et  $10^\circ$  avec une zone a faible incidence et mach important en pale avançante, et une zone a forte incidence et faible mach en pale reculante. Cela garantit une répartition de  $C_z M^2$  globalement constante sur le disque rotor. La vitesse d'écoulement perpendiculaire au profil  $V_p$ , quant à elle, présente une allure similaire à la vitesse induite, mettant en exergue l'importance de cette dernière l'écoulement vu par le profil.

### 1.1.3 Déformées dynamiques

La figure 6.2 représente les déformées en battement, trainée et torsion en bout de pale, en fonction de l'azimuth. Les ordres de grandeurs et tendances sont semblables dans les trois cas. Un écart statique apparaît pour la déformée de trainée et la déformée en torsion présente une évolution en fonction de l'azimuth légèrement différente même si valeur moyenne et amplitude crête à crête sont quasiment identiques pour les deux modèles.

La déformation de la pale peut également être analysée à travers l'évolution des différentes parti-



**FIGURE 6.2:** Déformée en battement, trainée et torsion en bout de pale en fonction de l'azimuth

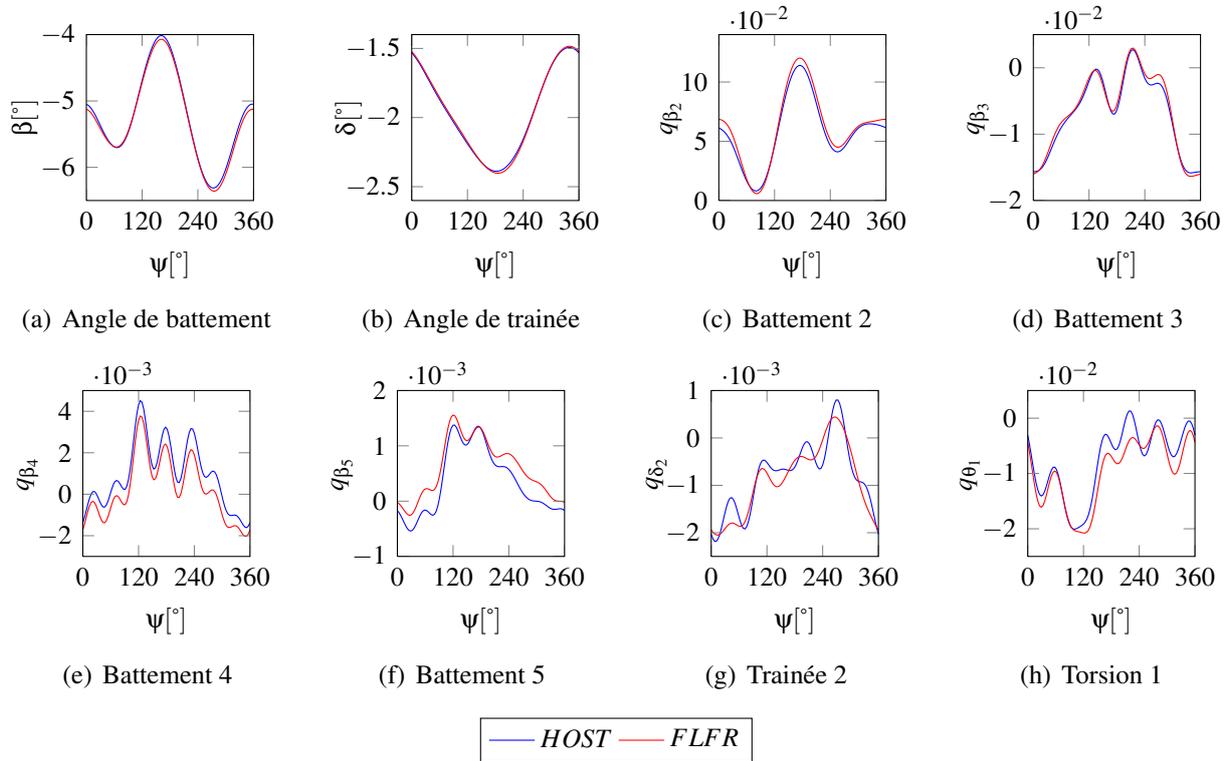
cipations modales des modes considérés au sein de la base de déformation. La figure 6.3 représente ces participations pour chacun des modes en fonction de l'azimuth. Pour les angles de battement, trainée et pour les participations modales des 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> modes de battement, la correspondance est quasiment parfaite entre les deux modèles. Pour les 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> modes de battement, les ordres de grandeurs et tendances sont identiques avec un léger écart statique. Enfin, pour les 2<sup>ème</sup> mode de trainée et le mode de torsion, les tendances sont identiques entre les modèles mais des écarts dynamiques apparaissent.

De manière générale, les écarts constatés entre les deux modèles, correspondent à des amplitudes de déplacement en bout de pale de l'ordre du millimètre.

### 1.1.4 Efforts à l'articulation

Les efforts transmis en pied de pale sont comparés en analysant leurs contenus harmoniques. Le tableau 6.2 représente l'amplitude des coefficients de Fourier de ces efforts pour les harmoniques allant de 0 (part statique de l'effort) à 6. Jusqu'à la troisième harmonique les écarts entre les deux modèles restent faibles. Au delà, des écarts plus importants peuvent apparaître. Néanmoins, ces écarts doivent être mis en regard des amplitude harmoniques correspondantes. En effet, la décroissance harmonique est telle, qu'à partir de la troisième harmonique, les amplitudes pour lesquels des écarts apparaissent sont de l'ordre du pourcent de la valeur moyenne de l'effort sur un tour rotor (composante statique).

Les difficultés à modéliser les efforts dynamiques hautes harmoniques, viennent en partie de



**FIGURE 6.3:** Angles à l'articulation et participations des modes de déformations (équivalent à la déformée en bout de pale provenant du mode correspondant) en fonction de l'azimuth

cette importante décroissance harmonique, et du facteur pouvant apparaître entre les composantes faibles et hauts harmoniques.

(a) $ F_x^{n\Omega} $			(b) $ F_y^{n\Omega} $			(c) $ F_z^{n\Omega} $		
$n$	HOST	FLFR	$n$	HOST	FLFR	$n$	HOST	FLFR
0	3.05e4	3.07e4	0	1.10e3	1.08e3	0	2.12e3	2.08e3
1	3.68e2	3.67e2	1	2.88e2	2.87e2	1	3.72e2	3.79e2
2	57.4	55.8	2	25.5	27.0	2	7.33e2	6.94e2
3	22.9	19.7	3	11.4	7.2	3	70.9	68.6
4	21.5	14.6	4	8.5	7.5	4	16.1	9.9
5	9.9	7.0	5	16.6	7.7	5	38.4	31.2
6	6.0	2.1	6	16.8	2.1	6	23.4	16.7

**TABLE 6.2:** Amplitude des coefficients issus de la décomposition de Fourier des efforts exercés par une pale au niveau de l'articulation [daN]

### 1.1.5 Étude des valeurs propres

Les fréquences propres et amortissements du système linéarisé déterminés par *HOST* et par *FLFR* sont comparés au sein des tableaux 6.3 et 6.4. Pour chacun des modes de déformation, les caractéristiques dynamiques des modes collectif, cyclique régressif et cyclique progressif sont présentées. Aucun écart significatif n'apparaît entre les deux modèles.

(a) Collectif			(b) Progressif			(c) Régressif		
$\omega_0$ [ $\Omega$ ]	<i>HOST</i>	<i>FLFR</i>	$\omega_{1c}$ [ $\Omega$ ]	<i>HOST</i>	<i>FLFR</i>	$\omega_{1s}$ [ $\Omega$ ]	<i>HOST</i>	<i>FLFR</i>
$\delta_1$	0.48	0.48	$\delta_1$	1.47	1.47	$\delta_1$	0.54	0.54
$\beta_1$	1.10	1.10	$\beta_1$	2.04	2.04	$\beta_1$	0.53	0.50
$\beta_2$	2.51	2.55	$\beta_2$	3.50	3.54	$\beta_2$	1.53	1.57
$\beta_3$	4.51	4.50	$\beta_3$	5.51	5.49	$\beta_3$	3.51	3.51
$\delta_2$	5.41	5.47	$\delta_2$	6.42	6.47	$\delta_2$	4.41	4.48
$\theta_1$	5.48	5.42	$\theta_1$	6.49	6.43	$\theta_1$	4.47	4.42
$\beta_4$	7.21	7.23	$\beta_4$	8.21	8.22	$\beta_4$	6.23	6.24
$\beta_5$	10.48	10.49	$\beta_5$	11.48	11.48	$\beta_5$	9.49	9.50

**TABLE 6.3:** Fréquences propres des modes collectifs, cycliques régressifs et cycliques progressifs du système linéarisé

(a) Collectif			(b) Progressif			(c) Régressif		
$\alpha_0$ [%]	<i>HOST</i>	<i>FLFR</i>	$\alpha_{1c}$ [%]	<i>HOST</i>	<i>FLFR</i>	$\alpha_{1s}$ [%]	<i>HOST</i>	<i>FLFR</i>
$\delta_1$	20.0	20.4	$\delta_1$	6.35	6.61	$\delta_1$	17.6	17.8
$\beta_1$	47.6	46.5	$\beta_1$	25.7	24.8	$\beta_1$	100	100
$\beta_2$	14.0	13.6	$\beta_2$	9.74	9.58	$\beta_2$	23.2	22.1
$\beta_3$	8.46	8.61	$\beta_3$	6.95	7.02	$\beta_3$	10.7	11.4
$\delta_2$	9.25	10.5	$\delta_2$	7.86	8.92	$\delta_2$	11.4	12.9
$\theta_1$	1.70	0.79	$\theta_1$	1.45	0.57	$\theta_1$	1.98	0.98
$\beta_4$	5.59	5.71	$\beta_4$	4.91	5.01	$\beta_4$	6.50	6.65
$\beta_5$	4.06	4.29	$\beta_5$	3.70	3.90	$\beta_5$	4.50	4.75

**TABLE 6.4:** Amortissements réduits des modes collectifs, cycliques régressifs et cycliques progressifs du système linéarisé

## 1.2 Base de déformation couplée : comparaison avec *MODPAL*

Pour valider la méthode des modes prescrits, une comparaison est effectuée entre les modes issues d'un calcul de base modale couplée direct *MODPAL* et les modes provenant de *GAHEL* recouplé via cette méthode. La comparaison est réalisée sur la pale EC225. Les couplages apparaissent notamment à cause des déports entre centre de gravité et centre de torsion.

Une description du fonctionnement de *GAHEL* est fournie par Cranga [[Cra05](#)], et une description de *MODPAL* est fournie en annexe.

### 1.2.1 Comparaison des fréquences propres et amortissement réduits

Le tableau 6.5 donne les fréquences propres des modes découplés issus de *GAHEL*, des modes couplés issus de *MODPAL* et des modes *GAHEL* recouplés via la méthode des modes prescrits *AMM* (*Assumed Mode Method*). Le seul effet fréquentiel remarquable provenant du couplage,

(a) Fréquences propres				(b) Amortissements réduits			
$\omega_i$ [ $\Omega$ ]	<i>GAHEL</i>	<i>AMM</i>	<i>MODPAL</i>	$\alpha_i$ [%]	<i>GAHEL</i>	<i>AMM</i>	<i>MODPAL</i>
$\delta_1$	0.46	0.46	0.42	$\delta_1$	13.6	13.6	18.5
$\beta_1$	1.05	1.05	1.03	$\beta_1$	0	0	0
$\beta_2$	2.58	2.58	2.54	$\beta_2$	0	0	0
$\beta_3$	4.58	4.58	4.50	$\beta_3$	0	0	0
$\delta_2$	5.71	5.71	5.71	$\delta_2$	14.1	14.1	17.8
$\theta_1$	5.73	5.82	5.81	$\theta_1$	0	0	0
$\beta_4$	7.28	7.28	7.25	$\beta_4$	0	0	0
$\beta_5$	10.75	10.73	10.65	$\beta_5$	0	0	0

**TABLE 6.5:** Comparaison des fréquences propres et amortissement réduits issus de *GAHEL*, *MODPAL* et de la méthode des modes prescrits *AMM*

impacte le mode de torsion, dont la fréquence propre augmente d'environ  $0.1\Omega$ . D'autre part, l'analyse des amortissements réduits montre une légère différence entre *GAHEL* et *MODPAL*, provenant de la différence de modélisation de l'adaptateur de trainée, ainsi que l'influence nulle des couplages.

### 1.2.2 Comparaison des déformées modales

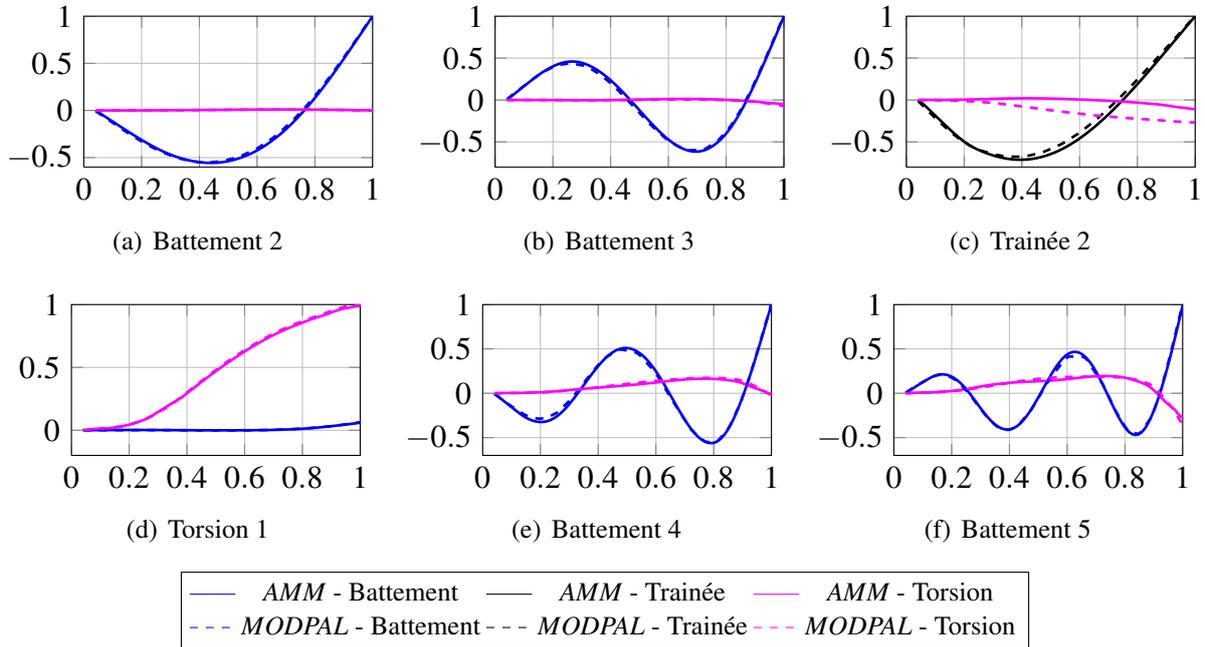
L'analyse des déformées modales Fig.6.4 montre la concordance entre les deux modèles, particulièrement pour les modes de battement et torsion. Les déformées couplées des 4<sup>ième</sup> et 5<sup>ième</sup> modes de battement et du 1<sup>er</sup> mode de torsion sont identiques, démontrant ainsi la bonne prise en compte du couplage inertiel et centrifuge entre ces deux modes de déformation, par la méthode des modes prescrits.

Le seul écart apparaît sur la déformée de torsion couplée au sein du deuxième mode de trainée. Il provient de la non prise en compte du vrillage structurel dans la méthode des modes prescrits.

## 1.3 Torseur tête rotor : comparaison avec l'identification expérimentale

### 1.3.1 Identification Expérimentale

La méthode d'identification expérimentale du torseur tête rotor est basée sur une mesure des déformations du mât rotor. Celui-ci est instrumenté à l'aide de jauges de flexions, de torsion et de traction-compression. A partir des déformations en repère tournant du mât et des relations de comportement matériau, il est possible de déterminer les moments de flexion et torsion ainsi que l'effort de traction au niveau des différentes sections instrumentées. Le torseur tête rotor est ensuite déduit de ces actions internes.



**FIGURE 6.4:** Comparaison des déformées modales issues de *MODPAL* avec celles recouplées à partir de la méthode des modes prescrits *AMM*

**Equilibre du mât rotor** Le mât rotor est en liaison pivot avec le carter cône de la boîte de transmission principale. Cette liaison est assurée par un unique roulement à double rouleaux cône. Ce roulement, appelé roulement de portance, assure la transmission des efforts aérodynamiques à l'ensemble des éléments non tournants tels que la boîte de transmission principale et la structure. La transmission du couple provenant du dernier étage du train épicycloïdal de la boîte est assuré par des cannelures.

Compte tenu de sa fréquence propre très élevée devant les fréquences des phénomènes observés ici, les effets d'amplification dynamique du mât sont négligés. Le principe fondamental de la dynamique permet alors de démontrer l'équivalence entre le torseur de cohésion et le torseur des actions mécaniques exercées par les pales sur le mât rotor :

$$\{\mathcal{T}_{s^+ \rightarrow s^-}\} = \{\mathcal{T}_{\Sigma \text{Pale} \rightarrow \text{Mât}}\}$$

La connaissance des moments de flexion en deux points de mesure distincts  $A$  et  $B$  permet de remonter aux actions mécaniques coplanaires exercées par l'ensemble des pales sur le mât rotor en repère tournant :

$$\begin{cases} F_x = \frac{M_A^y - M_B^y}{H_B - H_A} \\ F_y = -\frac{M_A^x - M_B^x}{H_B - H_A} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M_x = \frac{H_B M_x^A - H_A M_x^B}{H_B - H_A} \\ M_y = \frac{H_B M_y^A - H_A M_y^B}{H_B - H_A} \end{cases}$$

La connaissance du moment de torsion et de l'effort de traction permet quant à elle une détermination directe des actions mécaniques axiales :

$$\hat{M}_z = M_z^C \text{ et } \hat{F}_z = F_z^D$$

**Passage repère tournant/repère fixe** Pour les composantes axiales, le passage repère tournant/repère fixe n'induit aucun décalage fréquentiel. Une analyse synchrone à la fréquence  $b\Omega$  suffit alors à déterminer ces composantes du torseur tête rotor dynamique. Néanmoins, compte tenu de la grande raideur axiale du mât, l'identification de l'effort de pompage  $\hat{F}_z$  nécessite une attention particulière.

Les composantes coplanaires en  $b\Omega$  en repère fixe sont quant à elles issues des actions mécaniques en  $(b \pm 1)\Omega$  en repère tournant. L'analyse synchrone doit donc être réalisée sur ces deux fréquences puis ces deux contributions doivent être sommées.

Dans le cas d'un rotor isotrope, les relations suivantes sont obtenues (avec  $P$  faisant référence aux composantes de fréquences  $(b + 1)\Omega$  et  $R$  à celles en  $(b - 1)\Omega$ ) :

$$\begin{cases} F_y^R = -F_x^R e^{-i\pi/2} \\ M_x^R = M_y^R e^{-i\pi/2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} F_y^P = -F_x^P e^{i\pi/2} \\ M_x^P = M_y^P e^{i\pi/2} \end{cases}$$

La sommation donne alors :

$$\begin{cases} \hat{F}_x = F_y^P e^{-i(\pi/2+\delta_0)} + F_y^R e^{i(\pi/2+\delta_0)} \\ \hat{F}_y = F_y^P e^{-i\delta_0} + F_y^R e^{i\delta_0} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \hat{M}_x = M_x^P e^{-i\delta_0} + M_x^R e^{i\delta_0} \\ \hat{M}_y = M_x^P e^{i(\pi/2-\delta_0)} + M_x^R e^{i(-\pi/2+\delta_0)} \end{cases}$$

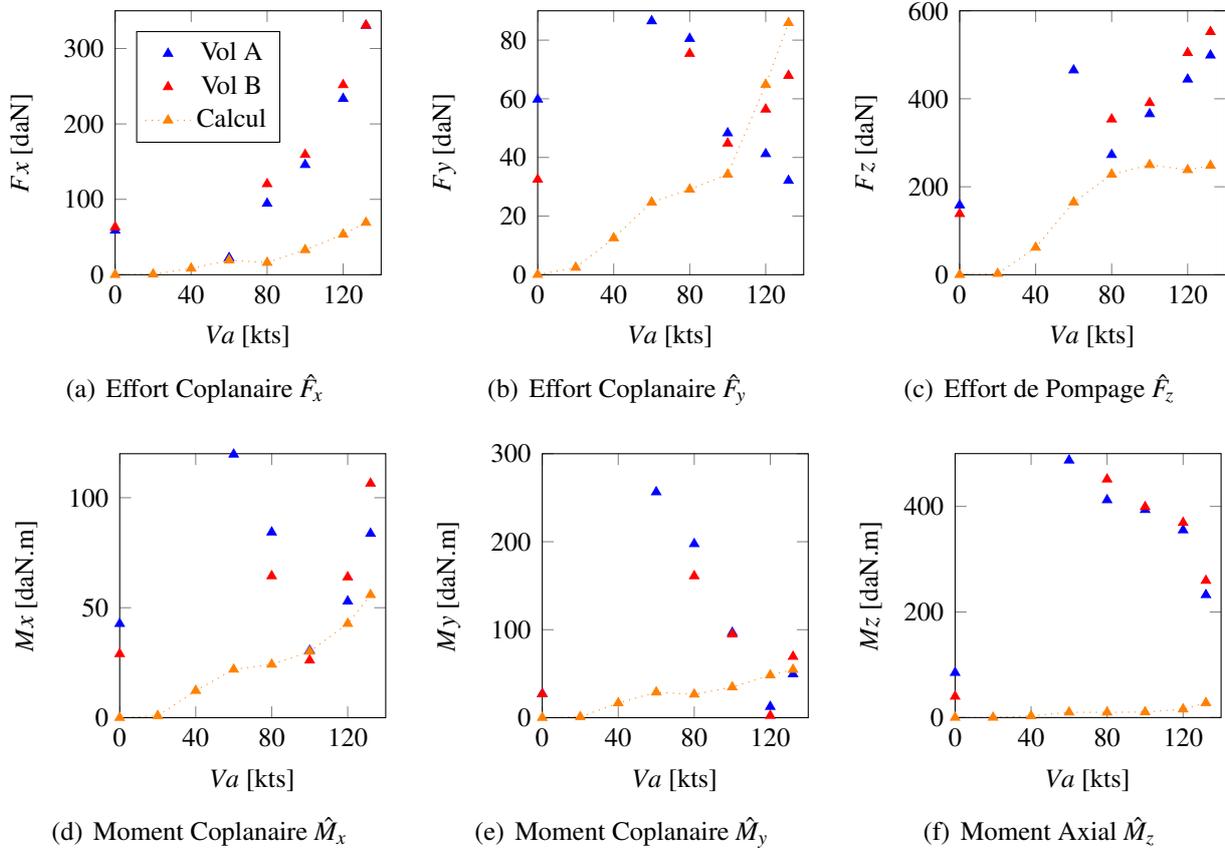
avec  $\delta_0$  le déphasage entre la référence de la mesure et l'axe longitudinal de la machine.

### 1.3.2 Comparaison et Analyse

Les torseurs tête rotor expérimentaux de deux hélicoptères dotés de cinq pales distincts sont déterminés à partir de la mesure de la déformation du mât rotor. Ils sont comparés au torseur tête rotor calculé par le modèle de rotor isolé dans les mêmes conditions d'équilibre avec une base de déformation couplée. La figure 6.5 représente les différentes composantes de ces torseurs identifiés expérimentalement et calculé.

**Vol stationnaire** En vol stationnaire  $V_a = 0$ , les torseurs tête rotor expérimentaux et calculés sont radicalement différents. Le calcul prédit un torseur tête rotor dynamique nul. Cela s'explique par l'absence de vitesse d'avancement et donc une vitesse tangentielle de l'écoulement constante au cours de la rotation. Seul le pas cyclique imposé de façon à assurer l'équilibre en moment de la machine introduit une variation d'incidence cyclique en  $1\Omega$ . Celle-ci est néanmoins insuffisante pour générer des efforts aérodynamiques hauts harmoniques.

La présence de composantes mesurées pour la plupart élevées en  $5\Omega$  peut provenir, d'une part, des rafales de vents, introduisant une variation cyclique haute harmonique de l'écoulement et venant perturber l'équilibre de la machine, et d'autre part, du sillage entre les différentes pales. Les



**FIGURE 6.5:** Comparaison des différentes composantes des torseurs tête rotor calculé et identifié expérimentalement en fonction de la vitesse d'avancement

assymétries provoquées par les interférences aérodynamiques avec le fuselage et le rotor arrière peuvent également expliquer ces mesures.

L'absence de modélisation du sillage entre les pales, des rafales de vent et des interférences aérodynamiques, constitue une source d'écart avec les mesures expérimentales sur l'ensemble de la plage de vitesse d'avance considérée.

**Vol de transition** De façon générale, d'importants écarts apparaissent pour les vitesses d'avancement inférieures à 80 nœuds. Ils proviennent de l'absence de prise en compte des interactions pales-tourbillons lors du calcul. Celles-ci sont fortement marquées lors des vols de transition, pour lesquels le flux induit reste proche du rotor et les tourbillons des pales précédentes viennent frapper la pale avançante. Cela génère des efforts très importants en  $b\Omega$  parfaitement identifiés via la mesure de déformations du mât.

**Vol de croisière** A 100 nœuds, les écarts entre l'identification et le calcul s'amenuisent pour les composantes  $\hat{F}_y$ ,  $\hat{F}_z$ ,  $\hat{M}_x$  et  $\hat{M}_y$ . La vitesse d'avance est telle que les tourbillons de bout de pale sont éjectés hors de la zone rotor évitant ainsi les interactions pale tourbillon. Les phénomènes

aérodynamiques en jeu au niveau du rotor sont pour la plupart modélisés.

**Haute vitesse** Au delà de 100 nœuds, les écarts sur les composantes  $\hat{F}_x$  et  $\hat{M}_z$  persistent tandis que des écarts importants réapparaissent pour les composantes  $\hat{F}_z$  et  $\hat{M}_x$ . Une explication possible est l'apparition de décrochage dynamique en pale avançante entraînant une augmentation des charges dynamiques hors plan et suivant l'axe de trainée de la pale pour les azimuths proches de  $90^\circ$ . Cela se traduit donc directement en termes d'effort  $\hat{F}_z$ , de moments coplanaires  $\hat{M}_x$  et d'effort coplanaires  $\hat{F}_x$  en repère fixe. A contrario, l'effort coplaire  $\hat{F}_y$  et le moment coplaire  $\hat{M}_y$  étant respectivement dû au comportement dynamique en trainée et au comportement dynamique en battement de la pale pour des azimuths proches de  $0^\circ$  et  $180^\circ$ , ne sont pas ou peu impactées par le décrochage dynamique des pales avançantes.

**Moment axial** Le moment dynamique axial  $\hat{M}_z$  est totalement sous estimé par le modèle sur l'ensemble du domaine. Cela s'explique par l'influence de la chaîne de transmission sur le couple transmis par les pales au moyeu. En effet, le comportement dynamique des différents arbres de la chaîne de transmission se couple avec celui du mât rotor, mais aussi avec celui des pales. Il en résulte une augmentation des charges, non prise en compte dans le cadre de ce modèle de rotor isolé. D'autre part, cette composante du torseur tête rotor n'a aucune influence sur les vibrations au sein du fuselage. Elle n'intervient dans le dimensionnement dynamique du rotor que pour éviter les oscillations de couple.

**Bilan** Dans le domaine de vitesse d'avance pour lequel la modélisation est destinée, c'est à dire le vol de croisière, le comportement des charges dynamiques latérales est bien mieux prédit que celui longitudinal. Cela provient de l'origine des charges longitudinales, issues de phénomènes aérodynamiques complexes situés, eux, en pale avançante et dans la zone à forte incidence des pales reculantes, c'est à dire sur les parties latérales du rotor. Cette explication peut être complétée par l'absence de modélisation radiale des efforts aérodynamiques au niveau du profil. Dans le cas où l'axe des pales est aligné avec la vitesse d'avance, de grands angles de dérapages des profils apparaissent venant modifier leur comportement aérodynamique et pouvant générer des charges dynamiques longitudinales. Enfin, l'absence de modélisation des effets aérodynamiques sur le moyeu rotor et sur la partie non profilée de la pale, ainsi que l'hypothèse de rotor isolé, pour lequel aucun effet provenant du rotor arrière ou des interactions flux induit-fuselage n'est pris en compte, peuvent eux aussi expliquer les écarts observés. Côté expérimental, les mesures sont évidemment sources d'incertitudes ce qui est confirmé par les écarts importants entre les deux cas de vol présentés.

## 2 Influence des paramètres aérodynamiques du rotor

La fonction principale du rotor étant d'assurer la sustentation de l'hélicoptère, son cahier des charges fonctionnel est principalement composé de critères liés aux performances aérodynamiques. Les choix de conception permettant de définir la géométrie et le point de fonctionnement du rotor sont donc majoritairement guidés par des impératifs aérodynamiques. Les critères dynamiques permettant d'assurer un niveau vibratoire acceptable en cabine, interviennent ensuite, et impactent uniquement la répartition de masse et de raideur des pales. Ainsi, le vrillage, la corde et le régime de rotation sont définis en dehors de toute considérations dynamiques.

De façon à appréhender l'influence de ces paramètres sur le torseur tête rotor, une étude de sensibilité de l'équilibre du rotor et des charges dynamiques est proposée. De façon à réduire la complexité des analyses et cibler l'influence d'un paramètre en particulier, les modifications de vrillage et de corde imposées sont d'ordre purement aérodynamique. Autrement dit, elles ne sont ici associées à aucunes modifications structurelles de la pale. Les modifications de régime rotor, quant à elles, sont assurées à placement fréquentiel équivalent, de façon à appréhender les effets aérodynamiques indépendamment de tout effet d'adaptation dynamique.

Les résultats présentés sont issus du modèle de rotor isolé développé dans ces travaux de thèse.

### 2.1 Vrillage

Le vrillage est introduit de façon à uniformiser le chargement aérodynamique le long de la pale. Un vrillage négatif permet d'augmenter la portance en pied de pale et de réduire celle en extrémité limitant ainsi les effets du décrochage sur la pale reculante et les effets de compressibilité en pale avançante au cours du vol d'avancement. D'autre part, il permet de minimiser la puissance en vol stationnaire et améliore les performances aérodynamiques globales du rotor.

La dégradation du niveau vibratoire avec l'augmentation du vrillage est un phénomène bien connu des hélicoptéristes [RB81, Joh94]. Le programme *BERP IV* a d'ailleurs eu pour objectif de conserver le même niveau vibratoire malgré une augmentation de vrillage de  $6^\circ$  à  $16^\circ$  [HSH08].

Le vrillage considéré ici est linéairement décroissant avec l'envergure. L'angle de vrillage en extrémité de pale est imposé tandis que celui en pied de pale  $\theta_v$  varie entre  $10^\circ$  et  $16^\circ$ .

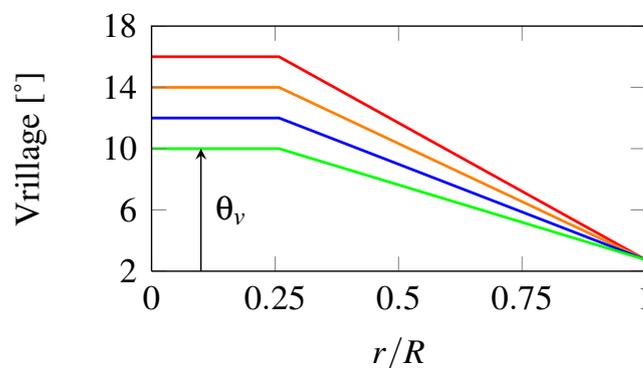
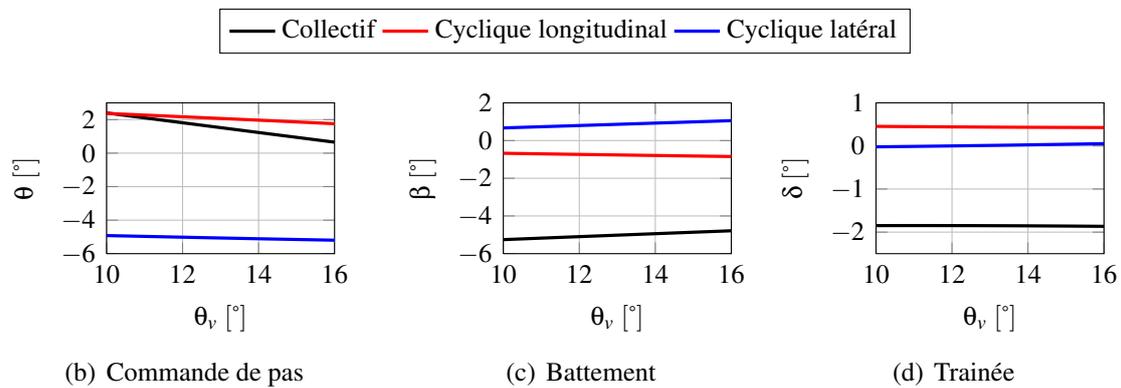


FIGURE 6.6: Lois de vrillage

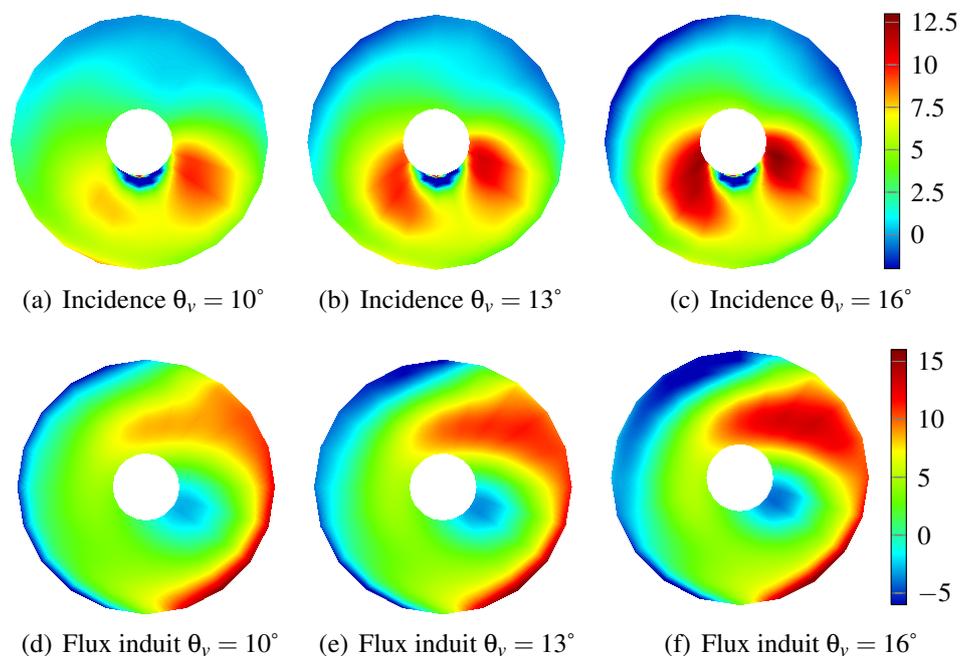
### 2.1.1 Influence sur l'équilibre

Comme le montre les graphiques de la figure 6.7, l'augmentation du vrillage  $\theta_v$  entraîne une diminution du pas collectif nécessaire à la conservation du niveau de portance. La conicité, l'inclinaison du rotor et la traînée sont quant à elles assez peu touchées.



**FIGURE 6.7:** Composantes collectives et cycliques des angles de pas, battement et traînée

Les graphiques de la figure 6.8 représentent l'évolution de la répartition d'incidence et de vitesse induite sur le disque rotor pour différents angles de vrillage. La plage d'incidence augmente naturellement avec le vrillage. D'autre part, les variations d'incidence et de vitesse induite en fonction du rayon et de l'azimut sont plus marquées.



**FIGURE 6.8:** Cartographies aérodynamiques d'incidence [ $^\circ$ ] et de vitesse induite [m/s]

### 2.1.2 Influence sur les charges dynamiques

Les graphiques de la figure 6.9 représentent l'évolution des composantes du torseur tête rotor en fonction du vrillage. Elles sont normalisées par rapport au cas nominal d'un vrillage de pale EC225. Toutes les composantes varient quasi-linéairement avec le vrillage avec des pentes allant de 12% par degrés pour le moment axial à 25% par degrés pour les efforts coplanaires.

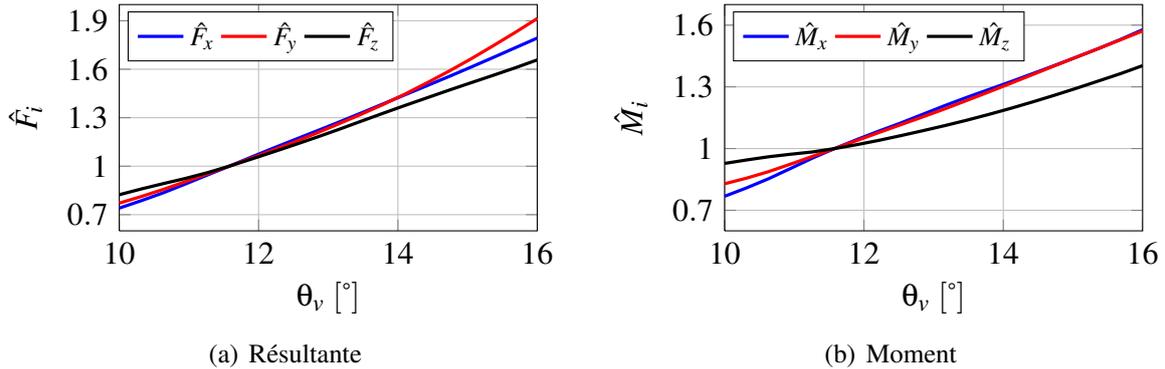


FIGURE 6.9: Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor

Ces tendances s'expliquent par une modification des efforts généralisés appliqués sur les différents modes de la pale. Plusieurs explications peuvent être avancées pour justifier ces modifications d'efforts généralisés. Tout d'abord, l'augmentation du vrillage entraîne une augmentation de la plage d'incidence sur laquelle les profils travaillent. Par conséquent, la proportion de profils aérodynamiques travaillant sur des incidences proches du décrochage et pour lesquelles leur comportement est fortement non-linéaire augmente. Cela favorise l'apparition d'efforts aérodynamiques sur les hauts harmoniques. D'autre part, l'augmentation des variations d'incidence en fonction de l'azimut observée sur les cartographies aérodynamiques, entraîne également des sollicitations hautes harmoniques.

## 2.2 Corde

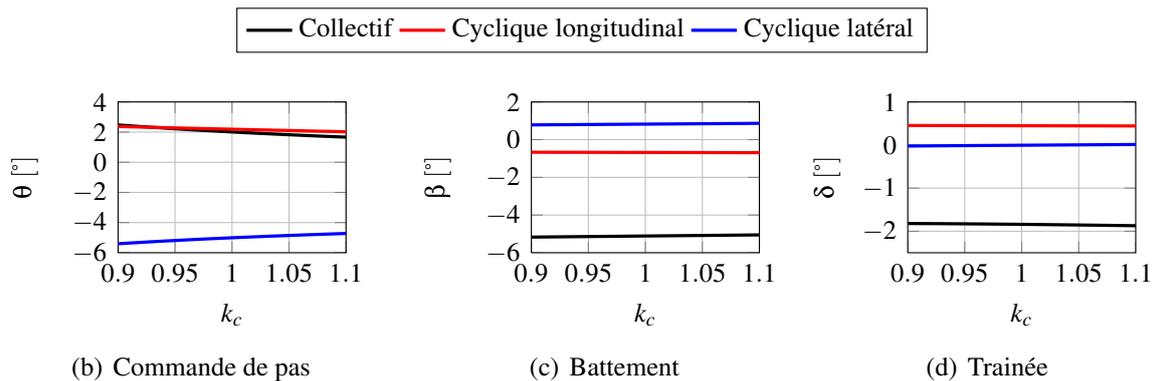
### 2.2.1 Modification de la corde moyenne aérodynamique

La corde moyenne aérodynamique correspond à la corde d'une pale rectangulaire développant la même portance que la pale réelle. Elle est donc représentative d'un niveau moyen de portance développé par la pale. Pour la voilure tournante, elle est définie par la relation :

$$c_{\text{Aéro}} = \frac{\int_{R_p}^R cr^2 dr}{\int_{R_p}^R r^2 dr}$$

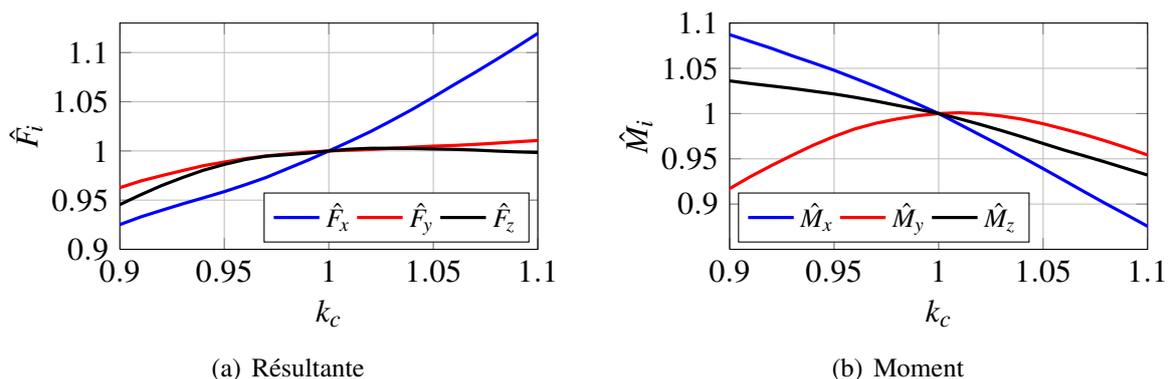
De façon à observer son influence sur le comportement dynamique du rotor, une variation homogène de corde comprise entre 90% et 110% est imposée ( $0.9 < k_c < 1.1$ ).

**Influence sur l'équilibre** Les graphiques de la figure Fig.6.10 représentent l'évolution des angles de pas, battement et trainée en fonction de la corde moyenne aérodynamique. L'augmentation de cette dernière est compensée par une diminution du pas collectif et du pas cyclique latéral de façon à conserver le même niveau de portance. D'autre part, les sollicitations aérodynamiques et centrifuges étant identiques malgré l'homothétie imposée, la conicité, l'inclinaison du rotor et le comportement en trainée restent inchangés.



**FIGURE 6.10:** Composantes collectives et cycliques des angles de pas, battement et trainée

**Influence sur les charges dynamiques** Les graphiques de la figure 6.11 représentent l'évolution des composantes du torseur tête rotor en fonction de la corde moyenne aérodynamique. Elles sont normalisées par rapport au cas nominal (cf. pale EC225).



**FIGURE 6.11:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la corde moyenne aérodynamique

Les tendances varient suivant les composantes. Les variations maximales rencontrées sont de l'ordre de 10% d'amplitude pour un allongement de 10% de la corde.

Les caractéristiques dynamiques de la pale étant identiques, les tendances observées s'expliquent

par une modification des efforts généralisés. L'augmentation homogène de la corde aérodynamique entraîne d'une part une augmentation proportionnelle des efforts généralisés, et d'autre part une diminution du pas de la pale. La proportion de fortes incidences sur le disque rotor a donc tendance à diminuer, favorisant le fonctionnement des profils dans leur domaine linéaire et limitant ainsi les charges hautes harmoniques. Les deux effets peuvent se compenser ou s'amplifier suivant les harmoniques considérés, rendant alors difficile toute conclusion générique quant à l'effet de ce paramètre sur les charges dynamiques.

### 2.2.2 Modification de la loi de corde

De façon à modifier les efforts généralisés tout en conservant la même commande de pas et un équilibre du rotor identique, la loi de corde est modifiée tout en conservant une corde moyenne aérodynamique constante.

#### Simple effilement

L'effilement correspond à une diminution linéaire de la corde entre l'emplanture et l'extrémité de pale. Ici, une variation de la corde en début de partie profilée ( $r = R_p$ ) est imposée entre 100% et 120% de la corde moyenne aérodynamique nominale (cf. EC225). L'effilement étant réalisé à corde moyenne aérodynamique constante, une augmentation de la corde en début de partie profilée entraîne une diminution de la corde en extrémité.

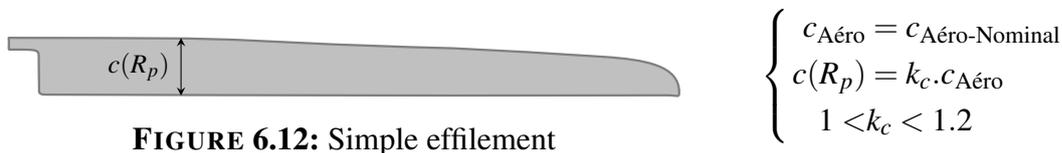


FIGURE 6.12: Simple effilement

Les graphiques de la figure 6.13 représentent l'évolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de l'effilement. Les composantes de pompage, moments coplanaires et moment axial diminuent linéairement tandis que les efforts coplanaires augmentent.

Ces tendances peuvent être expliquées grâce aux graphiques de la figure 6.14. Ils représentent l'évolution des efforts exercés par une pale sur le moyeu en repère tournant en  $4\Omega$ ,  $5\Omega$  et  $6\Omega$ . Les composantes verticales et orthoradiales diminuent quel que soit l'harmonique. Cela s'explique par des considérations sur les efforts généralisés. L'association d'une déformée modale maximale et d'un effort aérodynamique important en bout de pale génère d'importants efforts généralisés [Cra05]. Une diminution de la corde en extrémité due à l'effilement limite la réponse dynamique des modes de trainée et battement, générant ainsi moins d'efforts dynamiques sur les deux axes correspondants.

Les composantes radiales, quant à elles, augmentent en  $4\Omega$  et  $6\Omega$  et diminuent en  $5\Omega$ . L'origine des efforts radiaux provenant à la fois des efforts de Coriolis issus du mouvement de trainée (voir

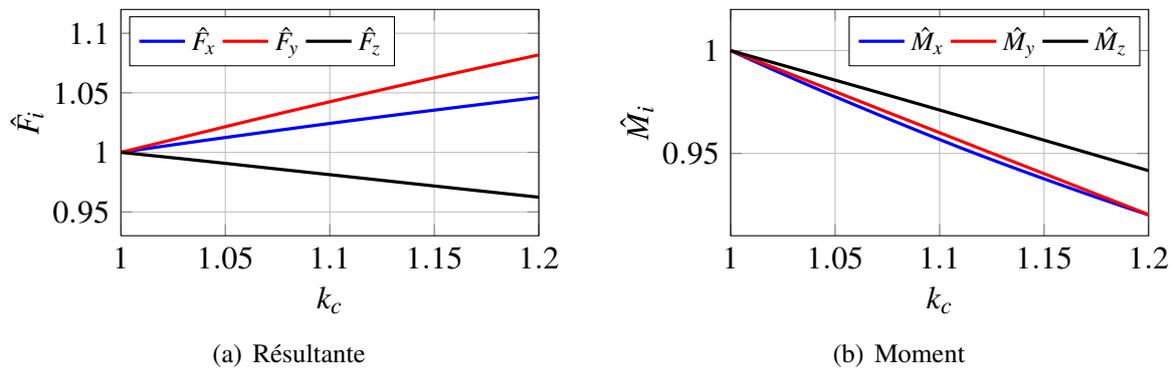


FIGURE 6.13: Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor

Eq.5.24), de l'effort centrifuge dynamique issu du battement de la pale et de la projection des efforts aérodynamiques et inertiels verticaux, il est difficile de prédire leur évolution à partir de considérations sur la réponse des modes. D'importants effets de phases entrent en jeu et peuvent aboutir soit à des augmentations, soit à des réductions d'efforts.

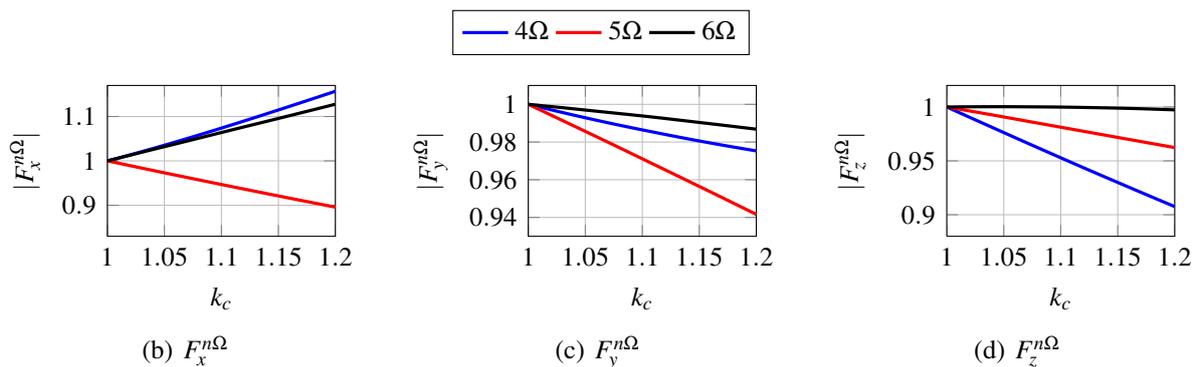


FIGURE 6.14: Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction de l'effilement

En conclusion, l'effilement aérodynamique permet de diminuer les composantes du torseur tête rotor dont l'origine est uniquement issue de la réponse dynamique des modes ( $\hat{F}_z$ ,  $\hat{M}_x$ ,  $\hat{M}_y$  : modes de battement,  $\hat{M}_z$  : modes de trainée). Il est par contre difficile de conclure quant à son effet sur des composantes ( $\hat{F}_x$ ,  $\hat{F}_y$ ) issues de la combinaison d'efforts en repère tournant ( $\hat{F}_x^{4,6\Omega}$ ,  $\hat{F}_y^{4,6\Omega}$ ) dont les origines ne peuvent s'expliquer par de simples considérations sur l'amplitude de réponse des modes.

### Double effilement

Les pales nouvelles générations présentent des lois de cordes à double effilement. La corde augmente entre le début de partie profilée et le rayon à  $0.8R$  puis elle diminue jusqu'en extrémité de pale. Cela permet de maximiser l'influence des profils travaillant à des nombres de Mach et

des incidences pour lesquels leur comportement est optimal, et de minimiser le rôle des profils situés dans des zones aérodynamiques “chahutées”, telles que le cercle d’inversion et les zones transoniques ( $Mach > 0.8$ ).

Ici, la pale est découpée en deux tronçons présentant des variations de cordes linéaires en fonction du rayon. La corde en début de partie profilée est égale à la corde moyenne aérodynamique et la corde en  $0.8R$  varie entre 100% et 120% de la corde moyenne aérodynamique.

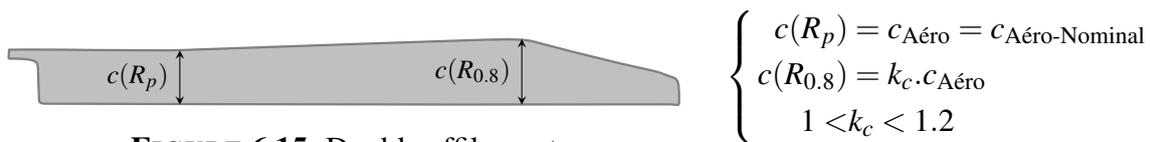


FIGURE 6.15: Double effilement

Les efforts exercés par la pale au niveau de l’articulation sont présentés figure 6.16. Les tendances sont identiques à celles obtenues pour un effilement simple avec cependant, des amplitudes de variations beaucoup plus importantes. Cela s’explique par le fait qu’à corde moyenne aérodynamique constante, une même augmentation de corde, mais cette fois-ci placée en  $R_{0.8}$ , entrainera une diminution de corde beaucoup plus importante en extrémité de pale que pour le simple effilement. Cela confirme donc les analyses précédentes comme quoi la réduction de la corde en extrémité permet de réduire les efforts généralisés et donc la réponse des modes.

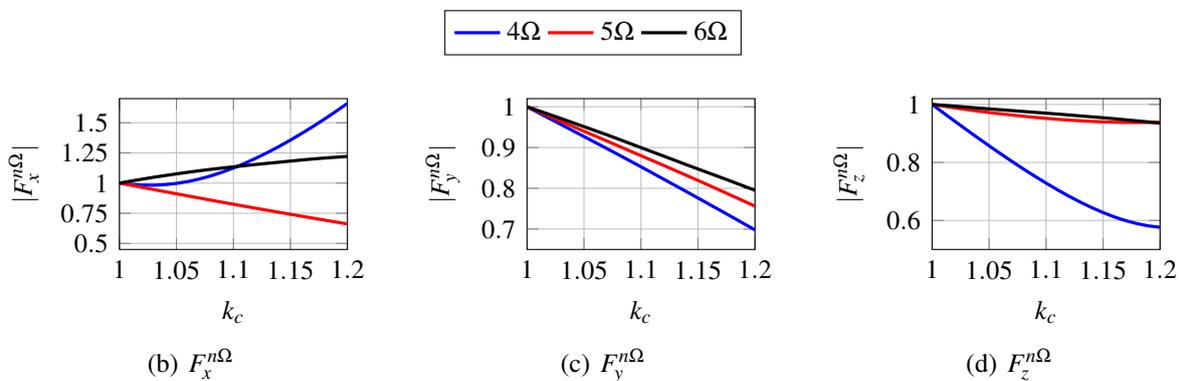


FIGURE 6.16: Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction du double effilement

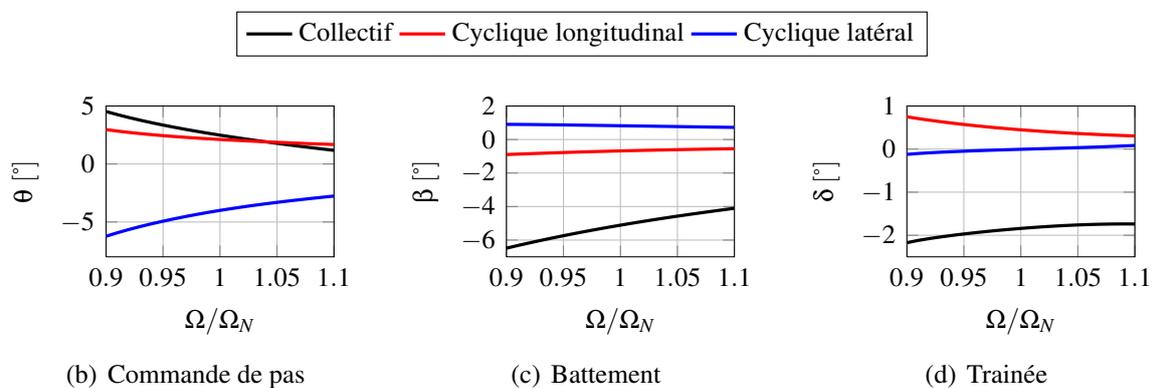
### 2.3 Régime rotor

La vitesse de rotation des rotors de nouvelles générations varie en fonction du cas de vol. Cela permet un gain acoustique lors des phases de descentes ainsi qu’une optimisation des performances et de la consommation. De façon à étudier l’influence du régime rotor sur les charges dynamiques, une variation comprise entre 90% et 110% du régime nominal  $\Omega_N$  est imposée. Ces

modifications sont réalisées à placement fréquentiel identique de façon à éviter toute modification d'adaptation dynamique de la pale.

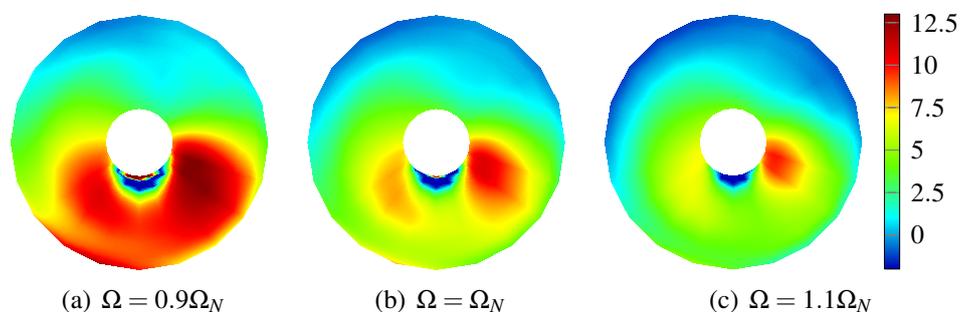
### 2.3.1 Influence sur l'équilibre

La variation de régime de rotation entraîne une modification significative de l'équilibre global du rotor. Les graphiques de la figure 6.17 représentent l'évolution des angles de pas, battement et trainée en fonction du régime rotor. L'augmentation de la vitesse de rotation entraîne d'une part la diminution du pas nécessaire à l'équilibre, et d'autre part, une augmentation de la force centrifuge générant une diminution de la conicité. Celle-ci modifie les efforts de Coriolis sollicitant la pale, diminuant ainsi sa réponse dynamique en trainée.



**FIGURE 6.17:** Composantes collectives et cycliques des angles de pas, de battement et de trainée en fonction du régime rotor

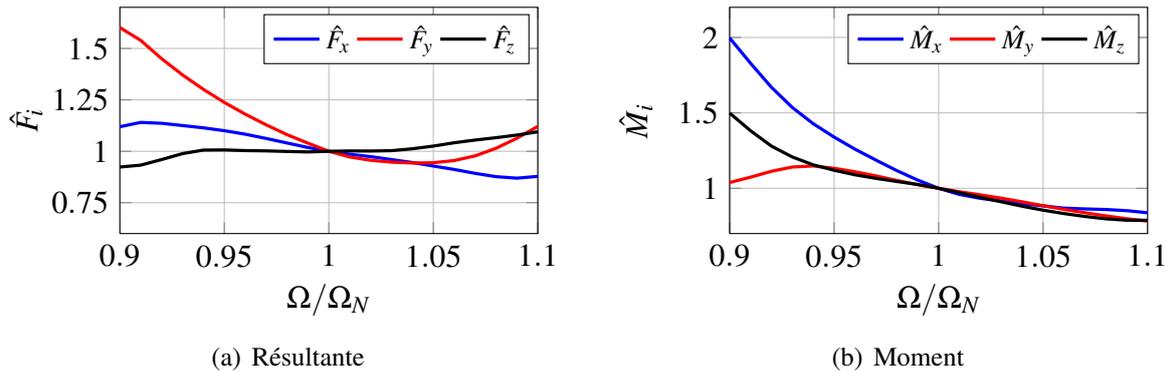
La diminution du régime rotor et l'augmentation de pas associé, entraîne un accroissement d'incidence sur l'ensemble du disque rotor Fig.6.18.



**FIGURE 6.18:** Cartographies aérodynamiques d'incidence [°]

### 2.3.2 Influence sur les charges dynamiques

Les graphiques de la figure 6.19 représentent l'évolution des composantes du torseur tête rotor en fonction du régime rotor. Elles sont normalisées par rapport au cas nominal. Une baisse du régime rotor entraîne de fortes augmentations de la plupart des composantes.



**FIGURE 6.19:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du régime de rotation

Les graphiques de la figure 6.20 représentent quant à eux les efforts exercés par une pale au niveau de l'articulation. Les composantes radiales  $F_x^{n\Omega}$  sont assez chahutées. Leurs évolutions s'expliquent par de grandes variations d'amplitude et de phase entre les différentes contributions inertiels et aérodynamiques de ces efforts. Les composantes de trainée  $F_y^{n\Omega}$ , quant à elles, ont tendance à diminuer avec l'augmentation du régime rotor. Cela provient essentiellement de la baisse de conicité, entraînant une réduction des efforts de Coriolis appliqués sur le deuxième mode de trainée et donc une réduction de sa réponse dynamique (voir Fig.6.21). Enfin, l'évolution des composantes verticales s'expliquent, pour les harmoniques 3 et 4, respectivement par une diminution de la réponse des deuxième et troisième mode de battement avec le régime rotor, et pour l'harmonique 5, par un rephasage entre les efforts tranchants des différents modes de battement, dont les amplitudes de réponse ont pourtant tendance à diminuer avec le régime rotor Fig.6.21.

Le régime de rotation a une forte influence sur les charges dynamiques. Elle provient d'une modification des efforts généralisés appliqués sur la pale. Les modes de battement et trainée semblent réagir différemment avec les variations de régime rotor. Les modes de trainée sont sensibles à la conicité et aux variations d'efforts de Coriolis qui y sont associés. Ainsi, une augmentation de régime rotor a tendance à réduire les efforts dynamiques de trainée. La réponse des modes de battement, quant à elle, n'est pas clairement monotone. Plusieurs effets non-linéaires aérodynamiques peuvent expliquer ce comportement. La diminution du régime rotor et l'augmentation d'incidence associée rapproche les profils de leurs zones de décrochage. A contrario, l'augmentation du régime favorise l'apparition des effets de compressibilité en bout de pale. Dans les deux cas, les variations de régime de rotation entraîne l'apparition de non-linéarité aérodynamiques favorisant la réponse des modes de battement.

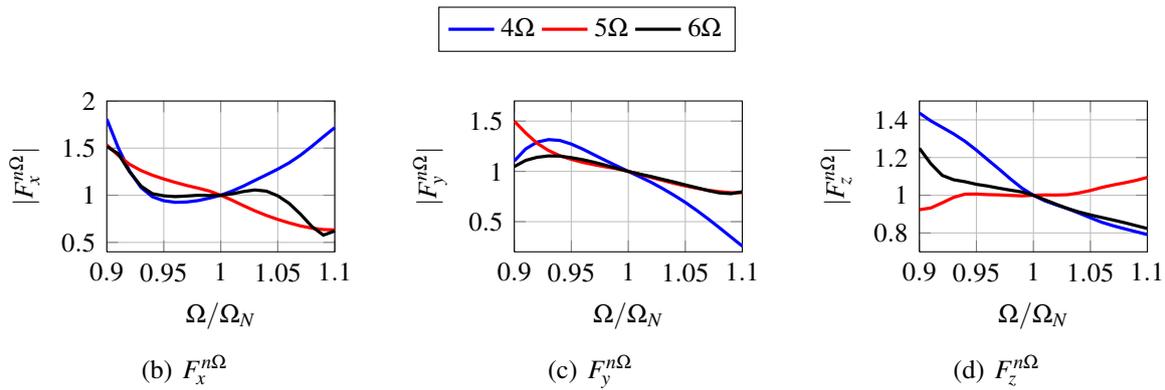


FIGURE 6.20: Efforts exercés par une pale sur le moyeu en fonction du régime rotor

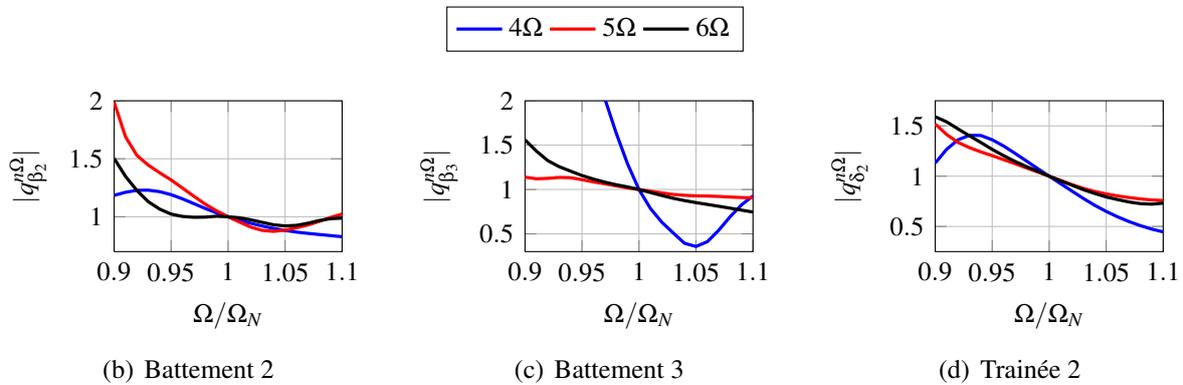


FIGURE 6.21: Réponses dynamiques des deuxième et troisième modes de battement et du deuxième mode de trainée en fonction du régime rotor

## 2.4 Bilan

Suite à ces études de sensibilité, les conclusions suivantes peuvent être avancées :

1. L'influence du vrillage aérodynamique sur les charges dynamiques est très significatif. Son augmentation va de paire avec l'augmentation de chaque composantes du torseur tête rotor.
2. Les effilements simple et double entrainent une limitation de la réponse des modes.
3. La diminution du régime rotor augmente la réponse des modes de déformation.

Les points précédents trouvent leurs justifications dans les phénomènes physiques suivants :

1. L'augmentation du vrillage augmente la plage d'incidence et favorise le fonctionnement des profils dans leur domaine non-linéaire.
2. L'effilement à corde aérodynamique moyenne constante permet de réduire la corde en extrémité de pale limitant ainsi les efforts généralisés appliqués sur les modes.
3. La diminution du régime rotor augmente la conicité et accroît la plage d'incidence favorisant respectivement les effets de Coriolis et les non-linéarités aérodynamiques. A contrario, une augmentation significative aboutit à des effets de compressibilité en bout de pale entrainant l'apparition de nouvelles non-linéarités aérodynamiques.

### 3 Influence des paramètres d'adaptation dynamique

L'adaptation dynamique a toujours été réalisée sur de simples considérations fréquentielles et sur leurs validations expérimentales. Il est d'usage d'assurer un écart minimum de  $0.3\Omega$  entre les fréquences propres et les harmoniques à l'origine des charges en repère fixe.

De façon à valider numériquement cette approche, une étude de l'influence des fréquences propres sur les charges dynamiques est proposée. Une étude préliminaire portant sur l'influence des paramètres de raideurs et de masses structurales sur les fréquences propres est d'abord présentée.

#### 3.1 Sensibilité des fréquences propres

##### 3.1.1 Influence de la raideur structurale

Les raideurs de battement  $EI_B$ , trainée  $EI_T$  et torsion  $GJ$  jouent au premier ordre sur les fréquences propres des modes associés. Les tableaux 6.6 contiennent les variations de fréquences propres dans le vide pour une augmentation homogène de 10% des caractéristiques de raideur de la pale.

(a) Battement		(b) Trainée		(c) Torsion	
$\omega_i$	$\Delta\omega/\Delta_{10\%}EI_B$	$\omega_i$	$\Delta\omega/\Delta_{10\%}EI_T$	$\omega_i$	$\Delta\omega/\Delta_{10\%}GJ$
$\omega_{\beta_2}$	$\approx +0.01\Omega$	$\omega_{\delta_1}$	$\approx +0.00\Omega$	$\omega_{\theta_1}$	$\approx +0.18\Omega$
$\omega_{\beta_3}$	$\approx +0.05\Omega$	$\omega_{\delta_2}$	$\approx +0.23\Omega$	$\omega_{\theta_2}$	$\approx +0.78\Omega$
$\omega_{\beta_4}$	$\approx +0.15\Omega$				
$\omega_{\beta_5}$	$\approx +0.30\Omega$				

TABLE 6.6: Influence de la distribution de raideur sur les fréquences propres dans le vide

Plus l'ordre d'un mode est élevé, plus il sera sensible à une modification de raideur car la proportion d'énergie de déformation d'origine purement élastique est plus importante pour les modes à fortes courbures.

**Remarque** En pratique, l'adaptation dynamique des modes de battement est principalement réalisée à partir de la répartition de masse. L'utilisation de masses non structurales permet de modifier localement la masse, sans intervenir sur la structure de la pale et donc sa raideur. Cette méthode est présentée dans le dernier chapitre de ce mémoire.

##### 3.1.2 Influence de la masse structurale

La répartition de masse conditionne les effets centrifuges et inertiels appliqués sur la pale. Elle joue donc au premier ordre sur les fréquences propres. Les tableaux 6.7 contiennent les variations de fréquences propres dans le vide pour une augmentation homogène de 10% de la masse linéique de la pale.

De nouveau, plus l'ordre du mode est élevé et plus l'influence d'une augmentation de masse linéique est importante.

(a) Battement		(b) Trainée	
$\omega_i$	$\Delta\omega/\Delta_{10\%}m_L$	$\omega_i$	$\Delta\omega/\Delta_{10\%}m_L$
$\omega_{\beta_2}$	$\approx -0.01\Omega$	$\omega_{\delta_1}$	$\approx -0.01\Omega$
$\omega_{\beta_3}$	$\approx -0.04\Omega$	$\omega_{\delta_2}$	$\approx -0.25\Omega$
$\omega_{\beta_4}$	$\approx -0.13\Omega$		
$\omega_{\beta_5}$	$\approx -0.27\Omega$		

TABLE 6.7: Influence de la distribution de masse sur les fréquences propres dans le vide

## 3.2 Influence du placement fréquentiel sur les charges dynamiques

L'ensemble des résultats est normalisé par rapport au cas initial et les plages de variations des fréquences propres sont représentatives de celles pouvant être rencontrées sur des pales classiques (voir figure 2.8 du deuxième chapitre).

Compte tenu de leur placement fréquentiel par rapport aux harmoniques d'intérêt ainsi que de leur plus grande sensibilité aux variations de masse et de raideur, seuls les troisième et quatrième modes de battement et le deuxième mode de trainée sont étudiés.

### 3.2.1 Modes de battement

Les graphiques de la figure 6.22 représentent l'évolution des efforts exercés par une pale à l'articulation en fonction des fréquences propres des troisième et quatrième modes de battement dans le vide.

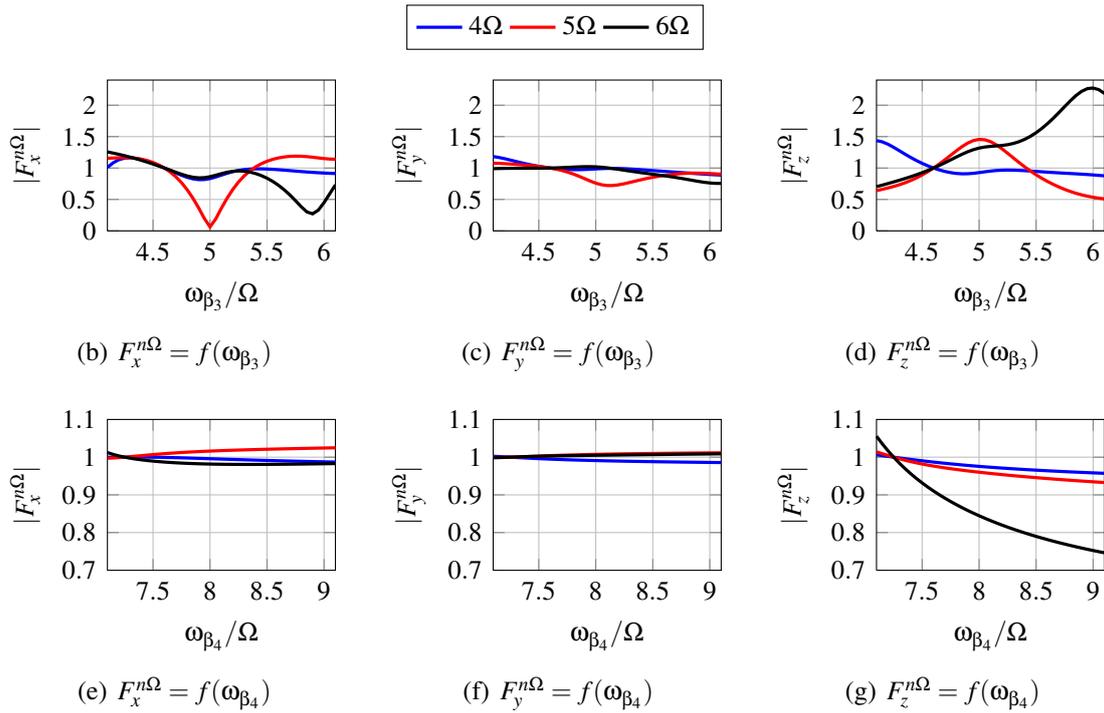
Les composantes verticales sont fortement influencées par le placement fréquentiel, et les effets d'amplification dynamique sont clairement retrouvés. D'autre part, lors d'un balayage sur la fréquence du troisième mode de battement, l'effort radial est très fortement impacté, démontrant ainsi la forte influence de la réponse en battement sur cette composante.

### 3.2.2 Modes de trainée

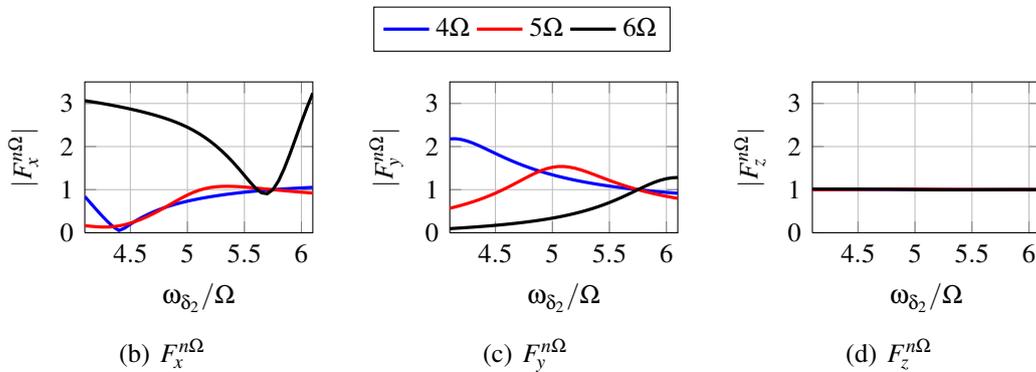
Les graphiques de la figure 6.23 représentent les efforts à l'articulation en fonction de la fréquence du deuxième mode de trainée dans le vide. Une fois de plus les effets d'amplification dynamique sont retrouvés sur l'effort dynamique de trainée ainsi que les importantes variations de la composante radiale. Celle-ci semble extrêmement sensible à la réponse du mode de trainée (Effort de Coriolis).

## 3.3 Bilan

Le placement fréquentiel des modes de battement et trainée constitue effectivement une méthode efficace pour limiter les réponses excessives et réduire ainsi les efforts dynamiques transmis à l'articulation. Suivant les composantes et harmoniques, et sur la plage de fréquence considérée ici, des réductions ou augmentations pouvant aller jusqu'à 50% pour les modes de battement et 100% pour les modes de trainée peuvent être rencontrés.



**FIGURE 6.22:** Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction des fréquences propres des modes de battement dans le vide



**FIGURE 6.23:** Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction de la fréquence propre du deuxième mode de trainée dans le vide

Il est malgré tout impossible de simultanément réduire l'ensemble des harmoniques lorsque la fréquence propre est comprise dans la plage d'harmoniques d'intérêts. Un compromis doit alors être trouvé. Deux critères peuvent être pris en compte pour guider le choix de placement fréquentiel :

1. Cibler les harmoniques dont l'influence est prédominante au sein du torseur tête rotor.
2. Cibler les composantes du torseur tête rotor ayant une forte influence sur les niveaux vibratoires. La connaissance de la fonction de transfert du fuselage est alors nécessaire.

Le modèle ayant été validé dans le chapitre précédent, il est utilisé pour évaluer l'apport des couplages aéroélastiques sur le niveau de charges dynamiques transmises par le rotor au fuselage. Dans un premier temps, des développements analytiques basées sur une linéarisation du modèle sont présentées. Ils permettent notamment d'appréhender les modifications de caractéristiques modales liées à l'introduction de couplages. Dans un second temps, le modèle non linéaire complet est utilisé de façon à évaluer l'effet d'une masse non structurale déportée puis l'effet de couplages élastiques sur le torseur tête rotor ainsi que sur la stabilité du rotor. Différents balayages sont réalisés et plusieurs configurations prometteuses permettant une réduction des charges sont proposées.

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Etude théorique des couplages aéroélastiques</b> . . . . .	<b>134</b>
1.1	Système différentiel linéaire . . . . .	134
1.2	Etude analytique . . . . .	137
1.3	Synthèse . . . . .	143
<b>2</b>	<b>Masse non structurale déportée</b> . . . . .	<b>147</b>
2.1	Identification des modes prépondérants . . . . .	148
2.2	Balayage en envergure et en corde d'une masse non structurale . . . . .	151
2.3	Masse non structurale à 0.7R . . . . .	153
<b>3</b>	<b>Raideur de battement-torsion</b> . . . . .	<b>158</b>
3.1	Intensité du couplage élastique . . . . .	158
3.2	Couplage optimal entre le 2 <sup>ème</sup> mode de battement et le 1 <sup>er</sup> de torsion . . . . .	160
3.3	Couplage optimal entre le 3 <sup>ème</sup> mode de battement et le 1 <sup>er</sup> de torsion . . . . .	164
3.4	Etude paramétrique d'une combinaison de couplage élastique . . . . .	167
<b>4</b>	<b>Couplages aéroélastiques : bilan</b> . . . . .	<b>171</b>

# 1 Etude théorique des couplages aéroélastiques

De façon à analyser l'origine et l'influence des couplages aéroélastiques, le modèle de rotor isolé précédent est simplifié et linéarisé. Dans un second temps, il est utilisé tel quel, en considérant une base de déformation couplée artificiellement, de façon à appréhender les effets de ces couplages sur le comportement dynamique non linéaire du rotor, indépendamment de leurs origines physiques.

Pour gagner en clarté, les points suivants de vocabulaire sont précisés :

**Modes ciblés :** Il s'agit de l'unique mode de battement et de l'unique mode de torsion ciblés par les couplages structurels (inertiel, centrifuge ou élastique). Dans le vide, ces modes présentent des déformées couplées battement/torsion.

**Modes non ciblés :** Il s'agit des modes pour lesquels aucun mécanisme structurel de couplage n'agit. Dans le vide, ces modes présentent des déformées pures en battement ou torsion.

**Modes élastiques :** Modes propres calculés en l'absence d'effets aérodynamiques.

**Modes aéroélastiques :** Modes propres calculés en présence d'effets aérodynamiques.

## 1.1 Système différentiel linéaire

De façon à faciliter l'analyse, le système non linéaire précédent a été linéarisé et plusieurs hypothèses ont été émises :

1. Les non linéarités géométriques et aérodynamiques sont négligeables. Seules de petites déformations de la pale sont considérées.
2. Le mouvement de trainée n'a aucune influence sur les couplages en battement-torsion. Il est donc négligé.
3. Les coefficients aérodynamiques de trainée et de moment sont négligeables et celui de portance ne dépend pas du nombre de Mach et présente un comportement linéaire avec l'incidence.
4. Les effets de flux induit sont négligeables.
5. La base de déformation initiale est découplée.

Le système linéaire exprimé dans la base de déformation découplée, prend alors la forme suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\text{Struct}} \cdot \underline{\underline{\ddot{q}}} + \left[ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{Struct}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\text{Aéro}} \right] \cdot \underline{\underline{\dot{q}}} + \left[ \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{Struct}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{Aéro}} \right] \cdot \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad (7.1)$$

avec un vecteur des degrés de liberté composé des participations modales de battement et de torsion :

$$\underline{\underline{q}} = (q_{\beta_1} \ q_{\beta_2} \ \dots \ q_{\theta_1} \ q_{\theta_2} \ \dots)^T$$

### 1.1.1 Matrices Structurelles

Les effets d'amortissement structurel sont supposés négligeables devant ceux d'origines aérodynamique, la matrice d'amortissement structurelle est donc nulle. Les matrices de masse et de raideur valent quant à elles :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\text{Struct}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\beta\beta} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\beta\theta} \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\theta\beta} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\text{Struct}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\beta\beta} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\beta\theta} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\theta\beta} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

La base de déformation étant issue d'un calcul de modes découplés, les vecteurs propres  $\phi_\beta$  et  $\phi_\theta$  forment respectivement une base pour la déformation en battement et la déformation en torsion de la pale. Les termes extradiagonaux des matrices  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\beta\beta}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{\theta\theta}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\beta\beta}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{\theta\theta}$  sont donc nuls.

Les différents termes des sous matrices valent<sup>1</sup> :

**Battement :**

$$\mathbf{M}_{ii}^{\beta\beta} = \mu_{\beta_i} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{ii}^{\beta\beta} = \mu_{\beta_i} \omega_{\beta_i}^2$$

**Torsion :**

$$\mathbf{M}_{kk}^{\theta\theta} = \mu_{\theta_k} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{kk}^{\theta\theta} = \mu_{\theta_k} \omega_{\theta_k}^2$$

**Battement-Torsion :**

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ik}^{\beta\theta} = \int_e^R y_G \cdot \phi_{\beta_i} \cdot \phi_{\theta_k} \cdot dm = \mu_{\beta_i \theta_k} \\ \mathbf{K}_{ik}^{\beta\theta} = \int_e^R \left[ \Omega^2 y_G \cdot r \cdot \phi'_{\beta_i} \cdot \phi_{\theta_k} \cdot m_L - K_{z\theta} \cdot \phi''_{\beta_i} \cdot \phi'_{\theta_k} \right] \cdot dr = k_{\beta_i \theta_k} \\ \mathbf{M}_{ki}^{\theta\beta} = \mathbf{M}_{ik}^{\beta\theta} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{ki}^{\theta\beta} = \mathbf{K}_{ik}^{\beta\theta} \end{cases}$$

**Synthèse des couplages** Le déport entre les centres de gravité et de torsion de la section engendre un couplage inertiel et un couplage centrifuge entre les mouvements de battement et de torsion. La raideur de battement-torsion engendre quant à elle un couplage en raideur entre les modes, lié à leurs courbures respectives.

L'importance de ces termes extradiagonaux est directement reliée d'une part, aux répartitions en envergure de déport, de raideur de battement-torsion et de masse linéique de la pale et d'autre part aux déformées des modes en question.

Enfin, ces couplages structurels aboutissent à un système dynamique composé de matrices symétriques pour lesquelles les vecteurs propres seront normaux et permettront une diagonalisation du système dans le vide.

1. les indices  $i$  et  $k$  font référence respectivement aux modes de battement et aux modes de torsion découplés de la base de déformation

### 1.1.2 Matrices Aérodynamiques

Les matrices d'amortissement et de raideur aérodynamiques prennent les formes suivantes :

$$\underline{\underline{C}}^{\text{Aéro}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}^{\beta\beta} & \underline{\underline{C}}^{\beta\theta} \\ \underline{\underline{C}}^{\theta\beta} & \underline{\underline{C}}^{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{K}}^{\text{Aéro}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}^{\beta\beta} & \underline{\underline{K}}^{\beta\theta} \\ \underline{\underline{K}}^{\theta\beta} & \underline{\underline{K}}^{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

Le coefficient aérodynamique  $\kappa$  est introduit :

$$\kappa = \frac{1}{2} \rho c C_{z\alpha}$$

Les termes des sous matrices aérodynamiques valent :

**Battement-Battement :**

$$\begin{cases} \underline{\underline{C}}_{i_1 i_2}^{\beta\beta} = \int_{R_p}^R \kappa V_T \cdot \phi_{\beta_{i_1}} \cdot \phi_{\beta_{i_2}} \cdot dr \\ \underline{\underline{K}}_{i_1 i_2}^{\beta\beta} = \int_{R_p}^R [y_{3c/4} \Omega + V_a \cos \psi] \cdot \kappa V_T \cdot \phi_{\beta_{i_1}} \cdot \phi'_{\beta_{i_2}} \cdot dr \end{cases}$$

**Torsion-Torsion :**

$$\begin{cases} \underline{\underline{C}}_{k_1 k_2}^{\theta\theta} = \int_{R_p}^R \left( y_{F_A} \cdot y_{3c/4} \cdot \kappa + \frac{\pi}{8} \rho c^3 [1 - 2y_{F_A}/c] \right) V_T \cdot \phi_{\theta_{k_1}} \cdot \phi_{\theta_{k_2}} \cdot dr \\ \underline{\underline{K}}_{k_1 k_2}^{\theta\theta} = - \int_{R_p}^R y_{F_A} \cdot \kappa V_T^2 \cdot \phi_{\theta_{k_1}} \cdot \phi_{\theta_{k_2}} \cdot dr \end{cases}$$

**Battement-Torsion :**

$$\begin{cases} \underline{\underline{C}}_{ik}^{\beta\theta} = \int_{R_p}^R y_{3c/4} \cdot \kappa V_T \cdot \phi_{\beta_i} \cdot \phi_{\theta_k} \cdot dr \\ \underline{\underline{C}}_{ki}^{\theta\beta} = \int_{R_p}^R y_{F_A} \cdot \kappa V_T \cdot \phi_{\beta_i} \cdot \phi_{\theta_k} \cdot dr \\ \underline{\underline{K}}_{ik}^{\beta\theta} = - \int_{R_p}^R \kappa V_T^2 \cdot \phi_{\beta_i} \cdot \phi_{\theta_k} \cdot dr \\ \underline{\underline{K}}_{ki}^{\theta\beta} = \int_{R_p}^R y_{F_A} \cdot [y_{3c/4} \Omega + V_a \cos \psi] \cdot \kappa V_T \cdot \phi_{\theta_k} \cdot \phi'_{\beta_i} \cdot dr \end{cases}$$

**Synthèse des couplages** Les couplages aérodynamiques sont nombreux. Ils apparaissent entre modes de battement et de torsion mais aussi entre modes d'un même type.

Pour les modes de battement, les effets d'amortissements sont retrouvés ainsi que des effets de raidissement provenant de leurs déformées angulaires venant notamment projeter une composante

de la vitesse d'avancement cyclique.

La dynamique des modes de torsion découplés n'est influencée par l'aérodynamique, en dehors des effets instationnaires issues de la théorie de Theodorsen, qu'en présence d'un déport de foyer aérodynamique. Le moment aérodynamique ainsi créé génère des effets de raidissement et d'amortissements entre les modes de torsion.

Enfin, les couplages aérodynamiques entre modes de battement et de torsion apparaissent même dans le cas d'une pale droite sans déport de foyer aérodynamique. Le comportement dynamique en torsion de la pale modifie directement l'incidence et donc la portance. Les efforts généralisés associés aux différents modes de battement s'en trouvent alors perturbés et le comportement dynamique en battement également.

**Remarques** Les matrices aérodynamiques obtenues ne sont pas symétriques. Les vecteurs propres du système dynamique dans l'air ne sont donc pas normaux et ne respectent pas les propriétés d'orthogonalité vis à vis des matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. Dans le cas de systèmes faiblement couplés, il est possible d'utiliser des méthodes pseudo-modales pour calculer la réponse de ces modes [LF98]. Dans le cas d'une pale d'hélicoptère, le couplage aérodynamique peut être très marqué suivant les modes et ne peut pas être négligé.

D'autre part, la présence systématique du terme de vitesse tangentielle  $V_T$  introduit une dépendance temporelle des termes matriciels précédents. En effet, la vitesse d'avance introduit un caractère cyclique et le système présente alors des coefficients périodiques nécessitant l'utilisation d'outils mathématiques spécifiques tels que ceux développés dans la théorie de Floquet pour l'analyse aux valeurs propres.

En vol stationnaire, ce terme est constant et vaut  $r\Omega$ . Le système précédent correspond alors à un système linéaire à coefficients constants pouvant être traité par les méthodes standard d'analyse aux valeurs propres.

## 1.2 Etude analytique

L'objectif de cette étude analytique est d'observer l'influence des couplages d'origines structurales et aérodynamique sur les caractéristiques dynamiques de la pale.

Le système précédent est réduit à 1 ou 2 degrés de liberté de battement et 1 degré de liberté de torsion couplés. Après une étude paramétrique, l'influence du terme  $y_{3c/4}$  étant faible, il a été négligé pour simplifier les développements. Enfin, les termes périodiques issus du vol d'avancement sont supposés négligeables.

### 1.2.1 Système dynamique couplé structurellement dans le vide

En l'absence d'effets aérodynamiques, le système couplé battement-torsion prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mu_\beta & \mu_{\beta\theta} \\ \mu_{\beta\theta} & \mu_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_\beta \\ \ddot{q}_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_\beta \omega_\beta^2 & k_{\beta\theta} \\ k_{\beta\theta} & \mu_\theta \omega_\theta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_\beta \\ q_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le terme  $\mu_{\beta\theta}$  traduit le couplage inertiel provenant du déport de centre de gravité. Le terme  $k_{\beta\theta}$  regroupe les termes de couplage centrifuge provenant du déport de centre de gravité et de raideur de battement-torsion  $K_{z\theta}$ .

**Étude aux valeurs propres** Les valeurs propres du système couplé dans le vide sont obtenues par résolution du système suivant :

$$\begin{vmatrix} \mu_{\beta}(\omega_{\beta}^2 + \hat{\lambda}^2) & k_{\beta\theta} + \hat{\lambda}^2\mu_{\beta\theta} \\ k_{\beta\theta} + \hat{\lambda}^2\mu_{\beta\theta} & \mu_{\theta}(\omega_{\theta}^2 + \hat{\lambda}^2) \end{vmatrix} = 0$$

Elles prennent la forme :

$$\hat{\lambda}_{\beta} = \hat{\sigma}_{\beta} \pm i\hat{\omega}_{\beta} \quad \hat{\lambda}_{\theta} = \hat{\sigma}_{\theta} \pm i\hat{\omega}_{\theta}$$

Compte tenu de l'absence d'amortissement, la partie réelle des valeurs propres précédentes est nulle :

$$\hat{\sigma}_{\beta} = 0 \quad \hat{\sigma}_{\theta} = 0$$

et, les vecteurs propres associés sont réels.

Les pulsations propres couplées  $\hat{\omega}_{\beta}$  et  $\hat{\omega}_{\theta}$  sont déterminées par résolution de l'équation d'ordre 4 issue du calcul du déterminant. Après linéarisation à l'ordre 1 de l'écart entre le carré des fréquences propres couplés et découplés, il vient :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{\beta}^2 = \omega_{\beta}^2 + \frac{(k_{\beta\theta} - \mu_{\beta\theta}\omega_{\beta}^2)^2}{2(k_{\beta\theta}\mu_{\beta\theta} - \mu_{\beta\theta}^2\omega_{\beta}^2) + \mu_{\beta}\mu_{\theta}(\omega_{\beta}^2 - \omega_{\theta}^2)} \\ \hat{\omega}_{\theta}^2 = \omega_{\theta}^2 + \frac{(k_{\beta\theta} - \mu_{\beta\theta}\omega_{\theta}^2)^2}{2(k_{\beta\theta}\mu_{\beta\theta} - \mu_{\beta\theta}^2\omega_{\theta}^2) + \mu_{\beta}\mu_{\theta}(\omega_{\theta}^2 - \omega_{\beta}^2)} \end{cases} \quad (7.2)$$

Lorsque seul un couplage élastique est introduit, les expressions précédentes se simplifient pour aboutir à :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{\beta}^2 = \omega_{\beta}^2 + \frac{k_{\beta\theta}^2}{\mu_{\beta}\mu_{\theta}(\omega_{\beta}^2 - \omega_{\theta}^2)} \\ \hat{\omega}_{\theta}^2 = \omega_{\theta}^2 + \frac{k_{\beta\theta}^2}{\mu_{\beta}\mu_{\theta}(\omega_{\theta}^2 - \omega_{\beta}^2)} \end{cases} \quad (7.3)$$

Quelque soit le signe du couplage élastique introduit, ce dernier, dans le cas où les propriétés de raideur et de masse de la pale reste inchangée, entraîne un écartement fréquentiel des modes ciblés :

$$\hat{\omega}_{\beta} < \omega_{\beta} < \omega_{\theta} < \hat{\omega}_{\theta} \quad \text{ou} \quad \hat{\omega}_{\theta} < \omega_{\theta} < \omega_{\beta} < \hat{\omega}_{\beta}$$

C'est également le cas lors d'un couplage par déport de centre de gravité "classique".

Une fois ces fréquences propres connues, il est possible d'obtenir les vecteurs propres couplés en calculant les solutions non triviales du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \mu_\beta(\omega_\beta^2 + \hat{\lambda}^2) & k_{\beta\theta} + \hat{\lambda}^2\mu_{\beta\theta} \\ k_{\beta\theta} + \hat{\lambda}^2\mu_{\beta\theta} & \mu_\theta(\omega_\theta^2 + \hat{\lambda}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les déformées des modes couplés structurellement prennent alors la forme :

$$\hat{\underline{\phi}}_\beta = \underline{\phi}_\beta + \hat{\tau}_B \cdot \underline{\phi}_\theta \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\phi}}_\theta = \hat{W}_B \cdot \underline{\phi}_\beta + \underline{\phi}_\theta$$

ou encore, exprimées sous forme vectorielle dans la base des modes découplés  $\mathcal{B}$  :

$$\hat{\underline{\phi}}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{\tau}_B \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \hat{\underline{\phi}}_\theta = \begin{pmatrix} \hat{W}_B \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Les coefficients  $\hat{W}_B$  et  $\hat{\tau}_B$  représentent respectivement la part de battement dans le mode couplé à torsion dominante, et la part de torsion dans le mode couplé à battement dominant. Ils valent :

$$\begin{cases} \hat{W}_B = \frac{\hat{\omega}_\theta^2 \int y_G \cdot \phi_\beta \cdot \phi_\theta \cdot dm - \Omega^2 \int y_G \cdot r \cdot \phi'_\beta \cdot \phi_\theta \cdot dm + \int K_{z\theta} \cdot \phi''_\beta \cdot \phi'_\theta \cdot dr}{\mu_\beta(\omega_\beta^2 - \hat{\omega}_\theta^2)} \\ \hat{\tau}_B = \frac{\hat{\omega}_\beta^2 \int y_G \cdot \phi_\beta \cdot \phi_\theta \cdot dm - \Omega^2 \int y_G \cdot r \cdot \phi'_\beta \cdot \phi_\theta \cdot dm + \int K_{z\theta} \cdot \phi''_\beta \cdot \phi'_\theta \cdot dr}{\mu_\theta(\omega_\theta^2 - \hat{\omega}_\beta^2)} \end{cases} \quad (7.4)$$

Ces coefficients sont proportionnels aux couplages inertiels et élastiques et sont inversement proportionnels à la différence des carrés des pulsations propres des modes de torsion et battement initiaux.

**Synthèse** Le premier effet remarquable est la modification des fréquences propres du système. Celle-ci entraîne notamment une modification de la transmissibilité des modes.

Le second effet est l'apparition de vecteurs propres couplés présentant des déformées à la fois en battement et torsion. L'amplitude de ces déformées couplées dépend de l'écart fréquentiel entre les modes initiaux ainsi que de leurs masses modales. Les masses modales de battement étant beaucoup plus importantes que celles de torsion (d'un facteur 40 environ), pour une même amplitude et répartition de couplage inertiel ou élastique, la part de torsion couplée au sein du mode de battement sera beaucoup plus importante que la part de battement couplé au sein du mode de torsion. Cependant, cette propriété est à considérer avec précaution, car elle dépend du choix de normalisation des vecteurs propres.

D'autre part, dans le cas où les fréquences propres sont peu modifiées, le signe des déformées dépend uniquement du placement fréquentiel relatif entre les modes de torsion et de battement découplés. Le couplage est en fait équivalent à une sollicitation inertielle ou élastique d'un mode de battement situé à une fréquence donnée par un mode de torsion située à une fréquence différente, introduisant suivant le placement fréquentiel, un déphasage de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  entre les deux mouvements.

Les nouveaux modes couplés structurellement forment une base  $\hat{\mathcal{B}}$  pouvant être utilisée pour décrire la dynamique de la pale dans l'air.

### 1.2.2 Système dynamique découplé structurellement dans l'air

En l'absence de termes de déport ou de couplages élastiques, le système couplé aérodynamiquement exprimé dans la base des modes découplés  $\mathcal{B}$  prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mu_\beta & 0 \\ 0 & \mu_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_\beta \\ \ddot{q}_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\beta\beta} & 0 \\ 0 & \mathbb{C}^{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_\beta \\ \dot{q}_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_\beta \omega_\beta^2 & \mathbb{K}^{\beta\theta} \\ 0 & \mu_\theta \omega_\theta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_\beta \\ q_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Etude aux valeurs propres** Les valeurs propres du système couplé aérodynamiquement sont obtenues par résolution du système suivant :

$$\begin{vmatrix} \mu_\beta(\omega_\beta^2 + \bar{\lambda}^2) - \mathbb{C}^{\beta\beta}\bar{\lambda} & \mathbb{K}^{\beta\theta} \\ 0 & \mu_\theta(\omega_\theta^2 + \bar{\lambda}^2) - \mathbb{C}^{\theta\theta}\bar{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

Elles prennent la forme :

$$\bar{\lambda}_\beta = \bar{\sigma}_\beta \pm i\bar{\omega}_\beta \quad \bar{\lambda}_\theta = \bar{\sigma}_\theta \pm i\bar{\omega}_\theta$$

Les parties réelles des valeurs propres précédentes valent :

$$\bar{\sigma}_\beta = \frac{\mathbb{C}^{\beta\beta}}{2\mu_\beta} \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\mathbb{C}^{\theta\theta}}{2\mu_\theta}$$

et les parties imaginaires :

$$\bar{\omega}_\beta = \omega_\beta \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbb{C}^{\beta\beta}}{2\mu_\beta \omega_\beta}\right)^2} \quad \bar{\omega}_\theta = \omega_\theta \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbb{C}^{\theta\theta}}{2\mu_\theta \omega_\theta}\right)^2}$$

L'air joue principalement un rôle amortissant. L'effet du vent relatif apporte de l'amortissement aux mouvements de battement tandis que les effets aérodynamiques instationnaires en apporte aux modes de torsion. D'autre part, les fréquences propres sont peu influencées par le passage dans l'air. Aucun effet de coalescence de modes n'apparait et seul l'amortissement apporté modifie les fréquences propres.

Les vecteurs propres aéroélastiques sont obtenus par résolution du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \mu_\beta(\omega_\beta^2 + \bar{\lambda}^2) - \mathbb{C}^{\beta\beta}\bar{\lambda} & \mathbb{K}^{\beta\theta} \\ 0 & \mu_\theta(\omega_\theta^2 + \bar{\lambda}^2) - \mathbb{C}^{\theta\theta}\bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ils prennent la forme :

$$\underline{\bar{\phi}}_\beta = \underline{\phi}_\beta \quad \text{et} \quad \underline{\bar{\phi}}_\theta = \bar{W}_B \cdot \underline{\bar{\phi}}_\beta + \underline{\bar{\phi}}_\theta$$

ou encore, exprimés sous forme vectorielle dans la base  $\mathcal{B}$  des modes découplés :

$$\underline{\bar{\phi}}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \underline{\bar{\phi}}_\theta = \begin{pmatrix} \bar{W}_B \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Avec :

$$\bar{W}_B = \frac{-\mathbb{K}^{\beta\theta}}{\mu_\beta(\omega_\beta^2 + \bar{\lambda}_\theta^2) - \mathbb{C}^{\beta\beta} \cdot \bar{\lambda}_\theta}$$

Le mode de battement n'est pas modifié et une composante de battement  $\bar{W}_B$  apparaît dans le mode de torsion. Compte tenu de l'amortissement apporté par l'air, celle-ci est complexe. Les composantes de battement et de torsion sont donc déphasées.

La composante de battement est d'autant plus importante que le terme de raideur aérodynamique  $\mathbb{K}^{\beta\theta}$  est important et que les modes considérés sont proches fréquentiellement. Elle traduit la propension du mode de torsion à solliciter le mode de battement via l'effort aérodynamique qu'il génère.

En l'absence de couplages inertiels et élastiques, l'air suffit donc à "générer" des déformées couplées.

### 1.2.3 Système dynamique couplé structurellement dans l'air

De façon à mieux appréhender l'effet des couplages structurels une fois la pale plongée dans l'air, le système dynamique 7.1 composé d'un mode de torsion et de deux modes de battement, dont un couplé structurellement avec le mode de torsion, est projeté sur la base des modes normaux couplés structurellement dans le vide  $\hat{B}$ . La matrice de passage de la base  $B$  à la base  $\hat{B}$  est composée des modes propres couplés dans le vide exprimés dans la base  $B$  :

$$\hat{\underline{\underline{\phi}}} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{W}_B & 0 \\ \hat{\tau}_B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_B$$

Le système dynamique prend alors la forme<sup>2</sup> :

$$\hat{\underline{\underline{M}}}. \hat{\underline{\underline{\ddot{q}}}} + \hat{\underline{\underline{C}}}. \hat{\underline{\underline{\dot{q}}}} + (\hat{\underline{\underline{K}}} + \hat{\underline{\underline{\mathbb{K}}}}) \cdot \hat{\underline{\underline{q}}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{avec} \quad \hat{\underline{\underline{q}}} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{\beta_I} & \hat{q}_{\theta_K} & \hat{q}_{\beta_j} \end{pmatrix}^T$$

Les matrices de masse et de raideur généralisées valent :

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \hat{\underline{\underline{\phi}}}^T \cdot \underline{\underline{M}}^{\text{Struct}} \cdot \hat{\underline{\underline{\phi}}} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{\beta_I} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mu}_{\theta_K} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mu}_{\beta_j} \end{pmatrix}_{\hat{B}} \quad \text{et} \quad \hat{\underline{\underline{K}}} = \hat{\underline{\underline{\phi}}}^T \cdot \underline{\underline{K}}^{\text{Struct}} \cdot \hat{\underline{\underline{\phi}}} = \begin{pmatrix} \hat{k}_{\beta_I} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_{\theta_K} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_{\beta_j} \end{pmatrix}_{\hat{B}}$$

Dans la base  $\hat{B}$ , l'expression du chargement aérodynamique élémentaire devient :

$$dF_z = \frac{1}{2} \rho c V_T^2 \cdot C_{z\alpha} \cdot \left( \phi_{\theta_K} \cdot [\hat{q}_{\theta_K} + \hat{\tau}_B \cdot \hat{q}_{\beta_I}] - \frac{\phi_{\beta_I} \cdot [\hat{q}_{\beta_I} + \hat{W}_B \cdot \hat{q}_{\theta_K}] + \phi_{\beta_j} \cdot \hat{q}_{\beta_j}}{V_T} \right) \cdot dr$$

La déformée en torsion  $\hat{\tau}_B$  du mode couplé à battement dominant et la déformée en battement  $\hat{W}_B$  du mode couplé à torsion dominante interviennent désormais dans l'incidence du profil et par

2. Les indices  $I$  et  $K$  font respectivement références aux modes de battement et de torsion ciblés par le couplage. L'indice  $j$  fait référence au mode de battement non ciblé par le couplage.

conséquent dans l'effort de portance. Cela vient alors modifier les efforts généralisés. Une seconde conséquence de la présence de modes couplés battement/torsion est l'apparition d'efforts généralisés supplémentaires. En effet, la déformée en battement  $\hat{W}_B$  du mode de torsion couplé vient faire travailler l'effort de portance et la déformée en torsion  $\hat{\tau}_B$  du mode de battement couplé vient quant à elle faire travailler le moment aérodynamique :

$$\hat{Q}_{\theta_K}^{sup} = \hat{W}_B \int_{R_p}^R F_z \cdot \phi_{\beta_I} \cdot dr \quad \text{et} \quad \hat{Q}_{\beta_I}^{sup} = \hat{\tau}_B \int_{R_p}^R M_x^{CT} \cdot \phi_{\theta_K} \cdot dr \quad (7.5)$$

La matrice de raideur aérodynamique prend donc la forme :

$$\underline{\underline{\mathbb{K}}} = \mathbb{K}^{\beta_I \theta_K} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_B & 1 & 0 \\ \hat{\tau}_B \hat{W}_B & \hat{W}_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K}^{\beta_j \theta_K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{\tau}_B & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K}^{\theta_K \theta_K} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_B^2 & \hat{\tau}_B & 0 \\ \hat{\tau}_B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice d'amortissement aérodynamique vaut :

$$\underline{\underline{\hat{C}}} = \mathbb{C}^{\beta_I \beta_I} \begin{pmatrix} 1 & \hat{W}_B & 0 \\ \hat{W}_B & \hat{W}_B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C}^{\theta_K \beta_I} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_B & \hat{\tau}_B \hat{W}_B & 0 \\ 1 & \hat{W}_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C}^{\theta_K \theta_K} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_B^2 & \hat{\tau}_B & 0 \\ \hat{\tau}_B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + \mathbb{C}^{\beta_j \beta_j} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{C}^{\theta_K \beta_j} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{C}^{\beta_j \beta_I} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \hat{W}_B & 0 \end{pmatrix}$$

La présence de déformées couplée entraîne une répartition des effets d'amortissement et de raideur aérodynamique. La première conséquence est une modification des fréquences propres. Celles-ci sont obtenues par résolution du système suivant :

$$\left| \tilde{\lambda}^2 \underline{\underline{\hat{M}}} - \tilde{\lambda} \underline{\underline{\hat{C}}} + (\underline{\underline{\hat{K}}} + \underline{\underline{\mathbb{K}}}) \right| = 0$$

De façon à faciliter les développements, l'amortissement aérodynamique, les déports de foyer aérodynamique et les effets instationnaires de Theodorsen sont négligés.

Pour les modes ciblés, la présence de déformées couplées entraîne tout d'abord un raidissement / assouplissement aérodynamique direct. Leurs fréquences propres deviennent alors :

$$\begin{cases} \check{\omega}_{\beta_I}^2 = \hat{\omega}_{\beta_I}^2 + \frac{\hat{\tau}_B}{\hat{\mu}_{\beta_I}} \mathbb{K}^{\beta_I \theta_K} \\ \check{\omega}_{\theta_K}^2 = \hat{\omega}_{\theta_K}^2 + \frac{\hat{W}_B}{\hat{\mu}_{\theta_K}} \mathbb{K}^{\beta_I \theta_K} \end{cases} \quad (7.6)$$

Pour rappel :

$$\mathbb{K}^{\beta_I \theta_K} = - \int_{R_p}^R \frac{1}{2} \rho c C_{z\alpha} V_T^2 \cdot \phi_{\beta_I} \cdot \phi_{\theta_K} \cdot dr \quad (7.7)$$

Le raidissement aérodynamique direct dépend notamment du signe des déformées couplées et du signe de la raideur aérodynamique de battement-torsion. Etant donné que  $\hat{W}_B$  et  $\hat{\tau}_B$  sont de signes

opposés (voir Eq.7.4), cet effet aboutira à un rapprochement ou un écartement des fréquences propres des modes ciblés.

Dans un second temps, si les fréquences propres des modes ciblés sont suffisamment proches, un véritable couplage aéroélastique s'opère, aboutissant à une modification fréquentielle indirecte. Cet effet provient de l'influence du mode de torsion ciblé sur la réponse du mode de battement et de l'effort aérodynamique induit par la déformée de torsion du mode de battement ciblé, et faisant travailler le mode de torsion à travers sa composante de battement induite. Ce couplage entraîne les modifications de fréquences propres suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{\beta_l}^2 = \check{\omega}_{\beta_l}^2 + \frac{\hat{\tau}_B \hat{W}_B}{\hat{\mu}_{\beta_l} \hat{\mu}_{\theta_K} (\check{\omega}_{\theta_K}^2 - \check{\omega}_{\beta_l}^2)} \mathbb{K}^{\beta_l \theta_K^2} \\ \tilde{\omega}_{\theta_K}^2 = \check{\omega}_{\theta_K}^2 + \frac{\hat{\tau}_B \hat{W}_B}{\hat{\mu}_{\beta_l} \hat{\mu}_{\theta_K} (\check{\omega}_{\beta_l}^2 - \check{\omega}_{\theta_K}^2)} \mathbb{K}^{\beta_l \theta_K^2} \\ \tilde{\omega}_{\beta_j}^2 = \hat{\omega}_{\beta_j}^2 \end{cases} \quad (7.8)$$

Le couplage aéroélastique des modes ciblés entraîne systématiquement un écartement fréquentiel supplémentaire.

En pratique, le raidissement aérodynamique direct est prépondérant sur le couplage aéroélastique lorsque les fréquences propres des modes ciblés sont initialement éloignées.

D'autre part, le mode de battement non ciblé par le couplage n'est pas affecté d'un point de vue fréquentiel.

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\tilde{\omega}$  exprimés dans la base des vecteurs propres couplés structurellement  $\hat{\mathcal{B}}$  valent :

$$\begin{cases} \underline{\tilde{\Phi}}_{\beta_l} = \left( 1 \quad \tilde{\tau}_{\beta_l \theta_K} \quad \tilde{W}_{\beta_l \beta_j} \right)_{\hat{\mathcal{B}}}^T \\ \underline{\tilde{\Phi}}_{\theta_K} = \left( \tilde{W}_{\theta_K \beta_l} \quad 1 \quad \tilde{W}_{\theta_K \beta_j} \right)_{\hat{\mathcal{B}}}^T \\ \underline{\tilde{\Phi}}_{\beta_j} = (0 \ 0 \ 1)_{\hat{\mathcal{B}}}^T \end{cases} \quad (7.9)$$

Le mode de battement initialement découplé reste découplé. Le mode aéroélastique de torsion voit apparaître des déformées en battement dépendant des termes de couplage aérodynamique et du placement fréquentiel relatif et le mode de battement initialement couplé voit notamment apparaître une composante issue de l'autre mode de battement.

### 1.3 Synthèse

Cette synthèse s'attache d'une part, à évaluer les termes de couplages ayant une influence significative sur le comportement aéroélastique de la pale, d'autre part, à décrire l'effet de déformées couplées et enfin, à récapituler l'ensemble des effets issus des couplages.

### 1.3.1 Estimation de la raideur aérodynamique de battement-torsion

L'étude analytique précédente a montré l'importance de la raideur aérodynamique de battement-torsion sur le comportement de la pale dans l'air. Elle vaut :

$$\mathbb{K}^{\beta_i \theta_k} = - \int_{R_p}^R \frac{1}{2} \rho c C_{z\alpha} V_T^2 \cdot \phi_{\beta_i} \cdot \phi_{\theta_k} \cdot dr$$

De façon à évaluer cette raideur aérodynamique a priori, les résultats analytiques du modèle linéaire sont utilisés dans le cas stationnaire. Les effets de compressibilité sont pris en compte par la correction de Prandtl-Glauert [Joh94] :

$$C_{z\alpha} = \frac{C_{z\alpha}^{M=0.1}}{\sqrt{1-M^2}}$$

Le tableau 7.1 répertorie les valeurs de couplage aérodynamique de battement-torsion normalisées par rapport à la raideur modale de battement initiale, pour la pale de l'EC225. Deux raideurs différentes de chaîne de commande  $K_\theta$  sont considérées, car celle-ci a de l'influence sur les déformées des modes de torsion  $\phi_{\theta_k}$ .

(a) Chaîne de commande raide				(b) Chaîne de commande souple			
$\mathbb{K}^{\beta_i \theta_k} / k_{\beta_i}$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\mathbb{K}^{\beta_i \theta_k} / k_{\beta_i}$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
$\theta_1$	-62.9	2.0	0.4	$\theta_1$	-58.7	3.0	0.3
$\theta_2$	-90.9	-21.4	-2.3	$\theta_2$	-96.5	-15.5	-0.4

**TABLE 7.1:** Raideurs aérodynamiques de battement-torsion normalisée par rapport à la raideur généralisée du mode de battement initial pour une pale classique [%]

Le 2<sup>ème</sup> mode de battement a tendance à fortement se coupler aérodynamiquement avec les deux modes de torsion tandis que les 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> modes de battement ont plutôt tendance à se coupler avec le 2<sup>ème</sup> de torsion. Concrètement, si l'on considère le cas du 2<sup>ème</sup> mode de battement pour une chaîne de commande raide, la présence d'une déformée couplée identique à celle du 1<sup>er</sup> mode de torsion au sein de ce mode de battement, autrement dit  $\hat{\tau}_{\beta_2 \theta_1} = 1$ , entraîne une chute de 62.9% de sa raideur. A contrario, une déformée couplée  $\hat{\tau}_{\beta_2 \theta_1} = -1$  entraîne une augmentation de sa raideur. En pratique, compte tenu de l'écart fréquentiel entre ces deux modes, il est difficile d'obtenir de tel niveau de couplage.

Ces effets de raidissement aérodynamique se traduisent ensuite au niveau des fréquences propres aéroélastiques, Eq.7.6 et Eq.7.8.

### 1.3.2 Estimation de l'amortissement couplé battement-battement

Le couplage aérodynamique entre modes de battement joue également un rôle prépondérant dans le comportement aéroélastique de la pale. Celui-ci se traduit principalement par le terme d'amortissement couplé :

$$\mathbb{C}^{\beta_i \beta_j} = \int_{R_p}^R \frac{1}{2} \rho c C_{z\alpha} V_T \cdot \phi_{\beta_i} \cdot \phi_{\beta_j} \cdot dr$$

Le tableau 7.2 répertorie, pour les quatre premiers modes de battement, les termes d'amortissement couplé battement-battement normalisés de façon à correspondre à des amortissements réduits équivalents :

$C^{\beta_i\beta_j}/2\mu_{\beta_i}\omega_{\beta_i}$ [%]	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
$\beta_1$	58.8	12.5	-3.7	0.1
$\beta_2$	7.6	16.5	7.9	0.2
$\beta_3$	-1.5	5.3	9.5	5.0
$\beta_4$	0.0	0.1	4.2	6.6

**TABLE 7.2:** Termes d'amortissement aérodynamique de battement-battement normalisés de façon à correspondre à des amortissements réduits équivalents

Un mode donné est principalement impacté par les deux modes voisins. Ce couplage aérodynamique en amortissement entre les modes de battement se traduit par d'importants effets de stabilité. Un couplage avec la torsion pour un mode ciblé de battement aura de l'influence sur les marges de stabilité de modes de battement non ciblés.

### 1.3.3 Influence de déformées couplées sur les caractéristiques modales

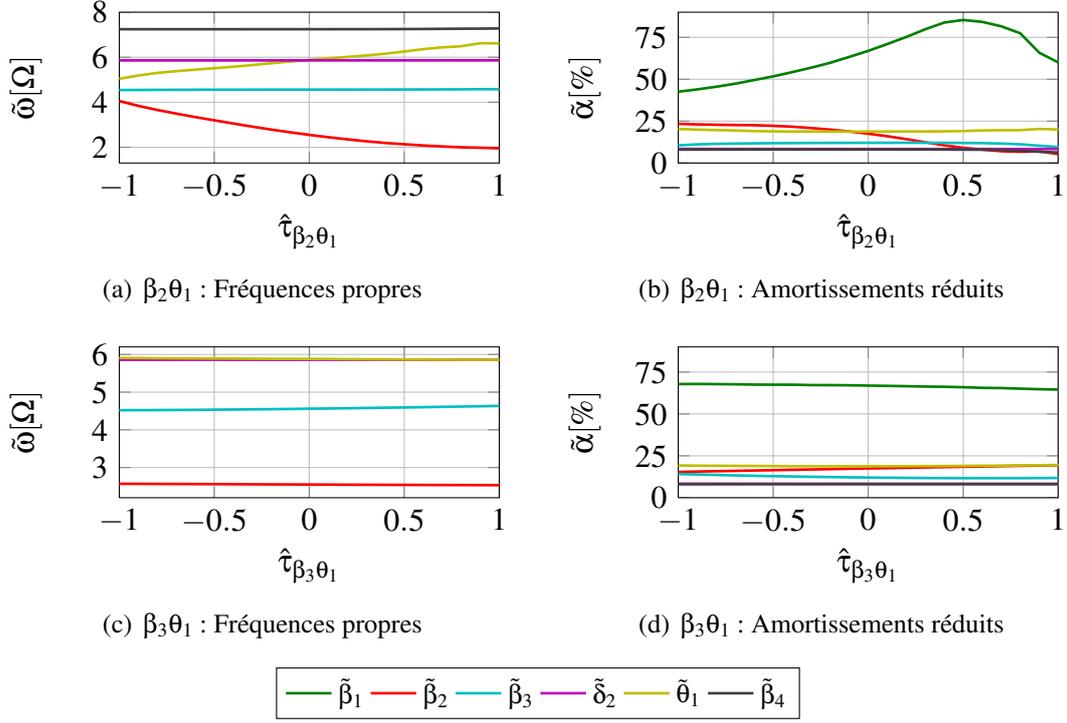
Les graphiques de la figure 7.1 représentent les diagrammes de Campbell en fréquence et amortissement dans le cas où une déformée de torsion  $\hat{\tau}_{\beta_i\theta_1}$  variant de -1 radian à 1 radian en bout de pale est imposée respectivement au 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> modes de battement. Une déformée de battement  $\hat{W}_{\beta_i\theta_1}$  est également imposée au sein du 1<sup>er</sup> mode de torsion. Elle respecte les proportions définies par les relations 7.4. Ces résultats sont issus du modèle de rotor isolé non linéaire complet.

La présence d'une déformée de torsion au sein du 2<sup>ème</sup> mode de battement entraîne d'importants effets de raidissement aérodynamique direct pour le 1<sup>er</sup> mode de torsion et d'assouplissement aérodynamique pour le 2<sup>ème</sup> mode de battement. En accord avec les valeurs de raideur aérodynamique couplée du tableau Tab.7.1, ces effets sont beaucoup moins marqués dans le cas d'une déformée de torsion imposée au sein du 3<sup>ème</sup> mode de battement.

En ce qui concerne la stabilité, les amortissements des modes de battement ciblés, mais également du mode de battement précédent sont fortement impactés. Cela provient du terme d'amortissement aérodynamique couplé  $C^{\beta_i\beta_j}$  décrit précédemment. Celui-ci induit un déphasage entre le mode de battement ciblé par le couplage avec la torsion, et le mode de battement précédent, générant ainsi des gains ou des pertes de stabilité suivant le signe de la déformée de torsion imposée. Cette effet est flagrant pour le 1<sup>er</sup> mode aéroélastique de battement.

### 1.3.4 Influence de déformées couplées sur les efforts généralisés

La présence de couplages aéroélastiques entraîne une modification des sollicitations aérodynamiques exercées sur la pale. Pour les modes non ciblés, le couplage sera bénéfique s'il génère un "contre-effort" généralisé venant diminuer l'effort généralisé initial  $\hat{Q}_{\beta_j}$ . L'équation différentielle



**FIGURE 7.1:** Diagrammes de Campbell en fréquence et amortissement en fonction de la déformée de torsion couplée, pour différents modes de battement ciblés

régissant le comportement d'un mode de battement non ciblé par le couplage prend la forme :

$$\hat{\mu}_{\beta_j} \ddot{q}_{\beta_j} + \hat{\mu}_{\beta_j} \hat{\omega}_{\beta_j}^2 \hat{q}_{\beta_j} = \hat{Q}_{\beta_j} + \hat{Q}_{\beta_j}^{\hat{\tau}_{\beta_j \theta_k}} \quad (7.10)$$

Avec pour effort généralisé regroupant l'ensemble des sollicitations hors couplages :

$$\hat{Q}_{\beta_j} = \hat{Q}_{\beta_j}^{Ext} - \sum_k \mathbb{K}^{\beta_j \theta_k} \hat{q}_{\theta_k} - \sum_i \mathbb{C}^{\beta_j \beta_i} \dot{\hat{q}}_{\beta_i} \quad (7.11)$$

$\hat{Q}_{\beta_j}^{Ext}$  représente l'effort généralisé issu des effets de flux induit, de la commande de pas, du vrillage et de l'ensemble des sollicitations aérodynamiques ne provenant pas du mouvement de battement ou torsion de la pale ;

et avec, pour contre-effort généralisé regroupant les effets de couplage aéroélastique imposé :

$$\hat{Q}_{\beta_j}^{\hat{\tau}_{\beta_j \theta_k}} = -\hat{\tau}_{\beta_j \theta_k} \mathbb{K}^{\beta_j \theta_k} \hat{q}_{\beta_j} - \hat{W}_{\beta_j \theta_k} \mathbb{C}^{\beta_j \beta_i} \dot{\hat{q}}_{\theta_k} \quad (7.12)$$

Le terme  $\hat{W}_{\beta_j \theta_k}$  étant petit, cet effort généralisé peut être approché par :

$$\hat{Q}_{\beta_j}^{\hat{\tau}_{\beta_j \theta_k}} = -\hat{\tau}_{\beta_j \theta_k} \mathbb{K}^{\beta_j \theta_k} \hat{q}_{\beta_j} \quad (7.13)$$

Suivant les signes de la composante de torsion imposée  $\hat{\tau}_{\beta_j \theta_k}$ , de la phase de la participation modale  $\hat{q}_{\beta_j}$  et de la raideur aérodynamique de battement-torsion  $\mathbb{K}^{\beta_j \theta_k}$ , la phase de ce terme pourra

varier de  $180^\circ$  et il sera possible, ou non, de réduire l'amplitude de l'effort généralisé initial  $\hat{Q}_{\beta_j}$  pour une ou plusieurs harmoniques données.

D'autre part, les couplages introduits entraînent une modification de la réponse en torsion de la pale. Ce changement entraîne une modification des efforts aérodynamiques instationnaires et du flux induit, ce qui à nouveau, se répercute sur les efforts généralisés appliqués sur les modes ciblés et non ciblés.

### 1.3.5 Bilan

L'introduction de couplages d'origine structurels entre un mode élastique de battement ciblé et un mode élastique de torsion ciblé, a pour conséquence dans le vide :

1. Une modification des fréquences propres des modes ciblés.
2. L'apparition de déformées couplées battement-torsion dont l'amplitude dépend de la répartition de couplage structurel introduit, de l'amplitude de couplage et de la proximité fréquentielle entre les deux modes ciblés.
3. L'apparition d'un effort tranchant modal associé à la déformée de battement au sein du mode de torsion ciblé.

La présence de déformées couplées dans l'air entraîne quant à elle :

1. Un raidissement ou assouplissement aérodynamique direct des modes ciblés, aboutissant à une modification de leurs fréquences propres.
2. Lorsque les modes ciblés sont assez proches fréquentiellement, un véritable couplage aéroélastique s'opère, aboutissant à une nouvelle modification des fréquences propres dans l'air (coalescence ou croisement de modes).
3. Sur les modes non ciblés par le couplage, l'apparition d'un "contre-effort" généralisé issu de la déformée de torsion induite dans le mode de battement ciblé, et pouvant aboutir, suivant les phases et le signe de la raideur aérodynamique de battement-torsion, à une diminution des efforts généralisés initialement exercés sur ces modes.
4. La modification significative des efforts généralisés appliqués sur le mode de torsion ciblé compte tenu de la composante de battement couplé.
5. La modification significative de la réponse en torsion de la pale entraînant une modification des efforts aérodynamiques instationnaires ainsi qu'une modification du flux induit.

## 2 Masse non structurelle déportée

L'adaptation dynamique de la pale est couramment réalisée à l'aide de masses non structurales. Des boîtiers pouvant accueillir ces masses sont prévus en différentes positions radiales. Cela permet d'une part de modifier les fréquences propres en jouant sur la répartition d'effets centrifuges et inertiels, et d'autre part, de modifier les efforts tranchants modaux.

Ces masses d'adaptations sont classiquement centrées en corde de façon à coïncider avec l'axe

de pas, évitant ainsi les couplages entre battement et torsion. Il peut être question de les déplacer pour des problématiques liées à la stabilité de la pale.

Ici, des déports sont volontairement introduits afin de générer des couplages battement-torsion bénéfiques à la réduction des charges dynamiques.

Préalablement à l'introduction d'une masse non structurelle, une étude du comportement de la pale de référence est réalisée. Celle-ci a pour objectif d'identifier les principaux modes à l'origine de charges dynamiques et ainsi faciliter la compréhension de l'influence des couplages aéroélastiques sur les charges. Cette étude se concentre sur les modes de battement et les efforts tranchants verticaux associés.

## 2.1 Identification des modes prépondérants

### 2.1.1 Placement fréquentiel de référence

Le placement fréquentiel des différents modes de la pale donne de premières indications sur les modes à l'origine des charges dynamiques pour les harmoniques considérés. Le tableau 7.3 récapitule les fréquences propres de la pale.

La proximité des troisième et quatrième modes de battement avec les harmoniques 4, 5 et 6, indique qu'il s'agit de modes dominants pour les problématiques de charges. D'autre part, la proximité fréquentielle de ces deux modes avec le premier mode de torsion indique qu'un couplage aéroélastique serait facilement induit.

$\omega$ [ $\Omega$ ]	$\delta_1$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\theta_1$	$\delta_2$	$\beta_4$	$\beta_5$
Vide	0.46	1.03	2.56	4.58	5.76	5.85	7.27	10.72
Air	0.47	1.18	2.52	4.60	5.33	5.86	7.30	10.73

TABLE 7.3: Fréquences propres de la pale

De façon à caractériser la faculté d'un mode à répondre à un harmonique donné, il est d'usage de faire recours à l'amplification dynamique. Bien que le comportement dynamique de la pale d'hélicoptère soit non linéaire et périodique, l'expression suivante, issue de la théorie des systèmes linéaires à coefficients constants, en constitue une bonne approximation :

$$A_i^{n\Omega} = \frac{1}{(n\Omega)^2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_i}{n\Omega}\right)^2\right]^2 + 4\alpha_i^2 \left(\frac{\omega_i}{n\Omega}\right)^2}} \quad (7.14)$$

Le tableau 7.4 contient les amplifications dynamiques des différents modes pour les harmoniques d'intérêts. L'amplification du troisième mode de battement sur les trois harmoniques et celle du quatrième mode de battement sur le sixième montre l'importance du placement fréquentiel par rapport aux harmoniques aéroélastiques.

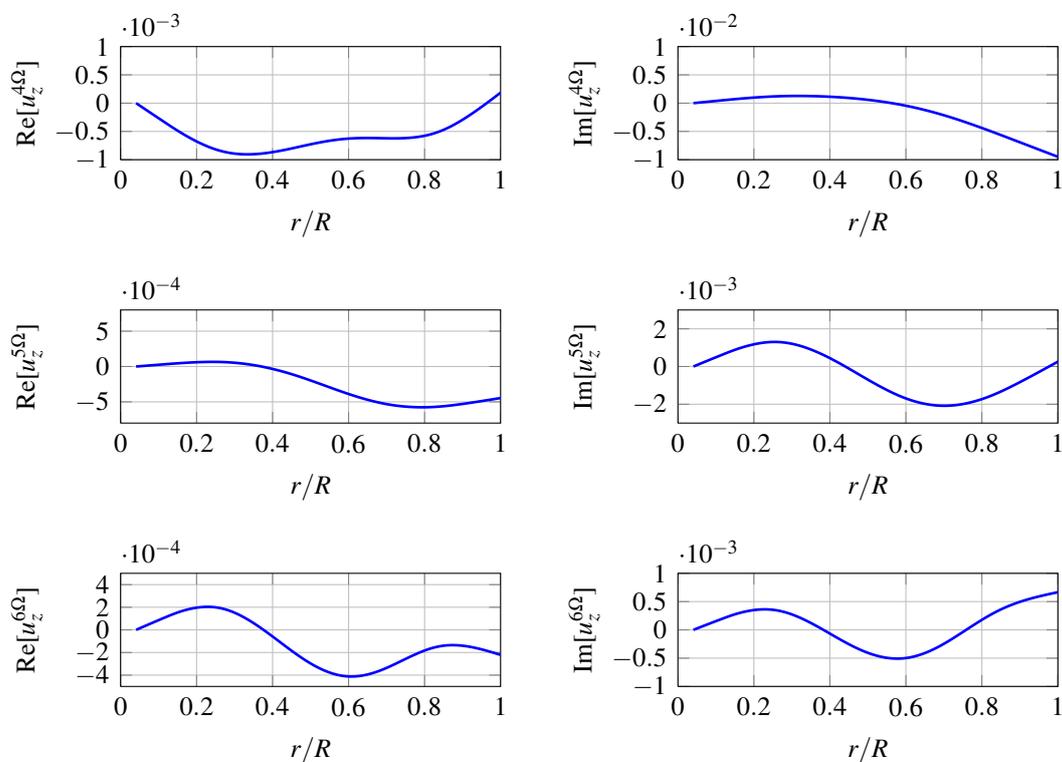
### 2.1.2 Réponse dynamique de référence

Le calcul de la réponse du rotor permet d'aboutir aux déformées dynamiques de la figure 7.2, représentant les parties réelles et imaginaires de la déformée de battement, pour les harmoniques

$A_i^{n\Omega} [s^{-2}]$	$\delta_1$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\theta_1$	$\delta_2$	$\beta_4$	$\beta_5$
4 $\Omega$	1.01	0.99	1.66	3.10	1.28	0.87	0.43	0.16
5 $\Omega$	1.01	0.99	1.34	6.36	6.95	2.68	0.88	0.28
6 $\Omega$	1.01	1.00	1.21	2.42	4.71	20.6	2.09	0.45

**TABLE 7.4:** Amplifications dynamiques des modes pour les harmoniques 4, 5 et 6

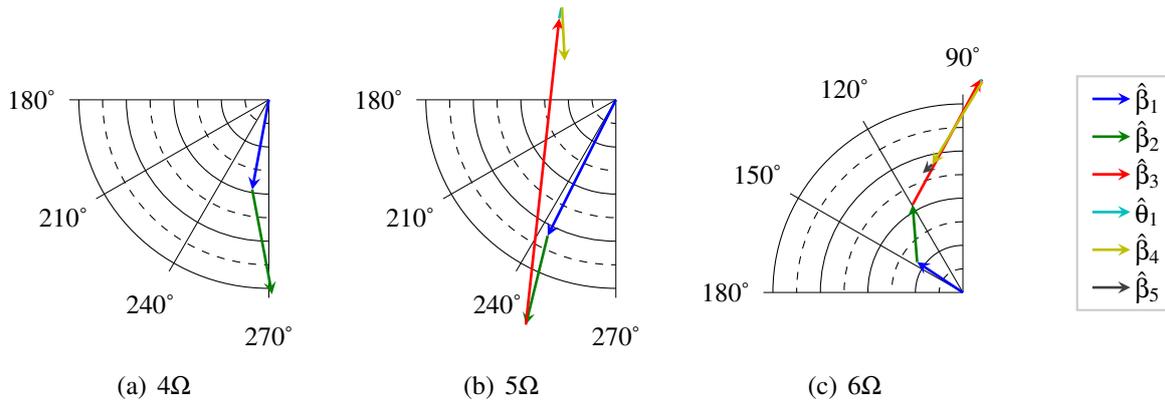
4, 5 et 6. Le deuxième mode de battement présente une forte amplitude en 4 $\Omega$ . Le troisième mode de battement quant à lui, présente une forte réponse en 5 $\Omega$  et 6 $\Omega$ . Enfin, la déformée du quatrième mode de battement est observable principalement sur le sixième harmonique.



**FIGURE 7.2:** Parties réelle et imaginaire de la réponse dynamique de la pale en battement pour les harmoniques 4, 5 et 6

La réponse dynamique en battement de la pale peut également être étudiée à travers les diagrammes de participations modales de battement de la figure 7.3. Cela permet d'une part, de prendre conscience des différences de phases entre les réponses des modes et d'autre part, d'observer l'influence du premier mode de battement sur la déformation dynamique de la pale. Celui-ci répond sur l'ensemble des harmoniques.

Il est à noter que, même si le deuxième mode de battement reste éloigné fréquentiellement du premier de torsion, sa forte réponse en 4 $\Omega$ , 5 $\Omega$  et 6 $\Omega$  en fait un candidat pour l'introduction de couplages aéroélastiques.



**FIGURE 7.3:** Diagrammes des participations modales de battement (équivalent à la contribution de chaque mode à la déformée dynamique verticale en bout de pale)

### 2.1.3 Efforts tranchants de référence

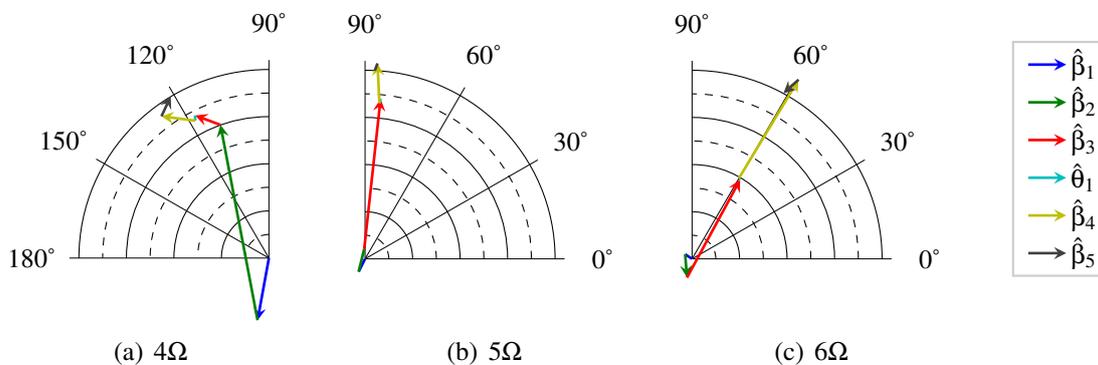
Le tableau 7.5 regroupe les valeurs des efforts tranchants modaux, définis par la relation Eq.5.13, pour les cinq premiers modes de battement.

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
$T_z^{\beta_i}$ [N]	3.8E4	-1.0E5	1.9E5	-2.9E5	3.9E5

**TABLE 7.5:** Efforts tranchants modaux

Pour déterminer les efforts tranchants transmis par chacun de ces modes en pied de pale, ces valeurs doivent être pondérées par les participations modales Eq.5.12. Cela permet d'aboutir aux diagrammes des efforts tranchants de la figure 7.4.

Sur le quatrième harmonique, les efforts tranchants des premier et deuxième modes de battement sont prépondérants. Sur le cinquième, le troisième mode de battement est le plus influent. Enfin, sur le sixième harmonique, les troisième et quatrième modes de battement présentent des contributions équivalentes, de phases identiques.



**FIGURE 7.4:** Efforts tranchants

## 2.2 Balayage en envergure et en corde d'une masse non structurale

Un balayage de cette masse en corde, du point à mi-corde vers le bord d'attaque, et en envergure, est réalisée. La figure 7.5 illustre son positionnement en rayon et corde.

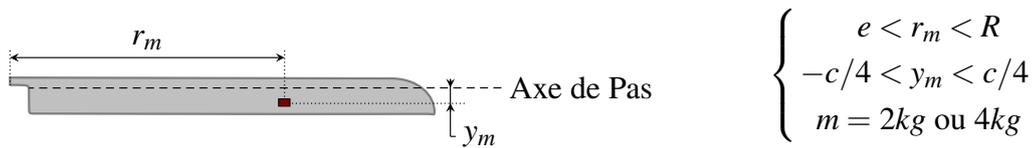


FIGURE 7.5: Positionnement en corde et rayon de la masse

Une masse de 2 kg ou 4kg est considérée de façon à entrainer une pénalité de masse équivalente à celle de systèmes anti-vibratoires de type résonateur à pendules verticaux.

### 2.2.1 Torseur tête rotor

Les graphiques de la figure 7.6 représentent l'évolution de l'effort de pompage et des moments coplanaires en fonction du rayon et de la position en corde de la masse. Les variations de ces composantes restent assez faibles pour des position radiales inférieures à 0.5R. Au delà, de fortes variations apparaissent avec l'envergure et la corde.

Pour un rayon de 0.7R, la présence d'une masse entraine systématiquement une réduction du pompage  $\hat{F}_z^{5\Omega}$ . Lorsqu'un déport vers le bord de fuite est introduit, cela aboutit à une réduction de plus de 30% de cette composante. Les moments coplanaires  $\hat{M}_x^{5\Omega}$  et  $\hat{M}_y^{5\Omega}$ , quant à eux, présentent une forte dépendance avec la position en corde. Pour des rayons supérieurs à 0.7R, une masse à mi-corde entraine une augmentation de l'ordre de 50% de ces composantes, tandis qu'un positionnement sur le bord d'attaque entraine une réduction de  $\hat{M}_x^{5\Omega}$  seulement.

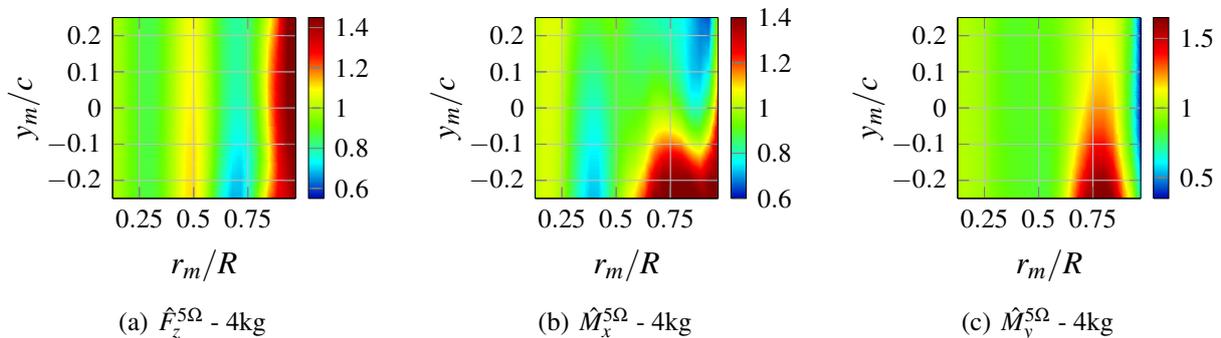
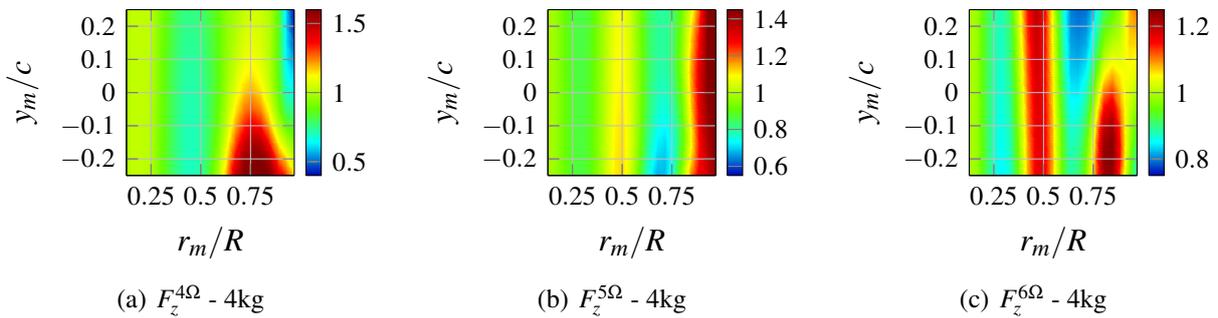


FIGURE 7.6: Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 4kg

### 2.2.2 Efforts à l'articulation

Les efforts verticaux transmis par une pale au moyeu dans le repère tournant, et dont la sommation en repère fixe aboutit aux composantes précédentes du torseur tête rotor, sont représentés sur les graphiques de la figure 7.7. L'effort vertical en  $5\Omega$  est évidemment identique à la composante de pompage précédente. D'autre part, les similitudes entre l'effort en  $4\Omega$  et le moment  $\hat{M}_y^{5\Omega}$  prouve que cette composante est prépondérante dans le moment transmis en repère fixe. Enfin, l'évolution du moment  $\hat{M}_x^{5\Omega}$  s'explique par un jeu de phase entre les composantes  $F_z^{4\Omega}$  et  $F_z^{6\Omega}$  du repère tournant.



**FIGURE 7.7:** Evolution des efforts verticaux transmis en pied de pale en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 4kg

En l'absence de déports, les évolutions des efforts à l'articulation avec la position en envergure de la masse s'expliquent principalement par des considérations sur les caractéristiques modales de la pale. Seul le cas du cinquième harmonique est présenté ici.

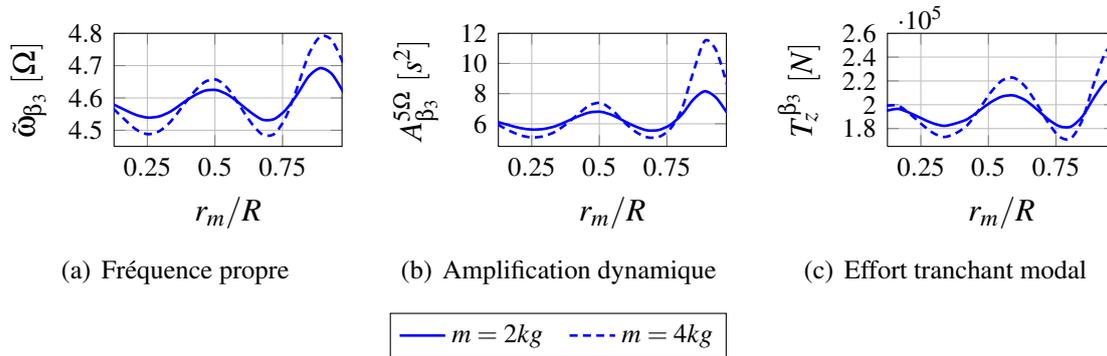
Comme le montre le diagramme des efforts tranchants de la pale de référence (voir Fig.7.4), le troisième mode de battement est à l'origine de la majorité des charges en  $5\Omega$ . Les graphiques de la figure 7.8 représentent, les évolutions de sa fréquence propre, de son amplification dynamique en  $5\Omega$  et de son effort tranchant modal en fonction de la position en envergure de la masse non structurale. Une position radiale de la masse proche de  $0.7R$  assure à la fois un minimum d'amplification dynamique en  $5\Omega$  et un effort tranchant modal faible, provenant de la réduction de la fréquence propre et de la modification de la distribution radiale de masse. L'association de ces deux effets entraîne une réduction de la réponse et de l'effort tranchant du troisième mode de battement, et par conséquent, une réduction du pompage dynamique en repère fixe.

L'évolution de l'effort en  $6\Omega$  s'explique par des considérations identiques sur le quatrième mode de battement.

### 2.2.3 Bilan

Il existe différents couples envergure-déport aboutissant à des réductions des composantes du torseur tête rotor<sup>3</sup>. Cependant, la réduction du moment coplanaire longitudinal est obtenu pour

3. Le cas d'une masse de 2kg aboutit strictement aux mêmes évolutions du torseur tête rotor et des efforts aux articulations avec des amplitudes de variation moins importantes.



**FIGURE 7.8:** Evolution des caractéristiques dynamiques du troisième mode de battement en l'absence de déport de la masse non structurale ( $y_m = 0$ )

des rayons supérieurs à  $0.8R$ , aboutissant à une augmentation significative de l'effort centrifuge. En outre, cette diminution provient d'un rephasage des composantes issues du repère tournant, difficile à maîtriser.

A contrario, pour une masse en  $0.7R$ , la réduction du pompage provient d'une diminution de la réponse de la pale, située, elle, en repère tournant. De plus, l'introduction d'un déport pour cette envergure peut être bénéfique. Pour ces différentes raisons, seul ce cas sera traité dans la suite.

## 2.3 Masse non structurale à $0.7R$

La position radiale de la masse est désormais fixée à  $0.7R$ . Un balayage est réalisé sur sa position en corde et sur la fréquence propre du premier mode de torsion. Comme l'ont montré les développements analytiques précédents, il s'agit là de deux paramètres fondamentaux dans les couplages aéroélastiques.

### 2.3.1 Déformées modales dans le vide

Le déport en corde de la masse d'adaptation permet de générer des déformées mixtes battement-torsion Fig.7.9. La position en  $0.7R$  de la masse correspond à un ventre de vibrations pour les troisième et quatrième modes de battement, maximisant ainsi le couplage inertiel avec la torsion. A contrario, cette position est proche d'un nœud du deuxième mode de battement, ce qui limite le couplage avec ce mode. Le signe des déformées de torsion induites, dépend du signe du déport et également de la position fréquentielle relative entre les modes de battement et le mode de torsion susceptibles de se coupler. Les fréquences propres des troisième et quatrième modes de battement étant situées de part et d'autre de celle du premier mode de torsion, pour un signe de déport donné, les déformées de torsion induites dans chacun de ces modes présentent des signes opposés. D'autre part, pour un déport inexistant, la torsion induite n'est pas nulle car le centre de gravité des sections de la pale de référence ne coïncide pas toujours avec le centre de torsion.

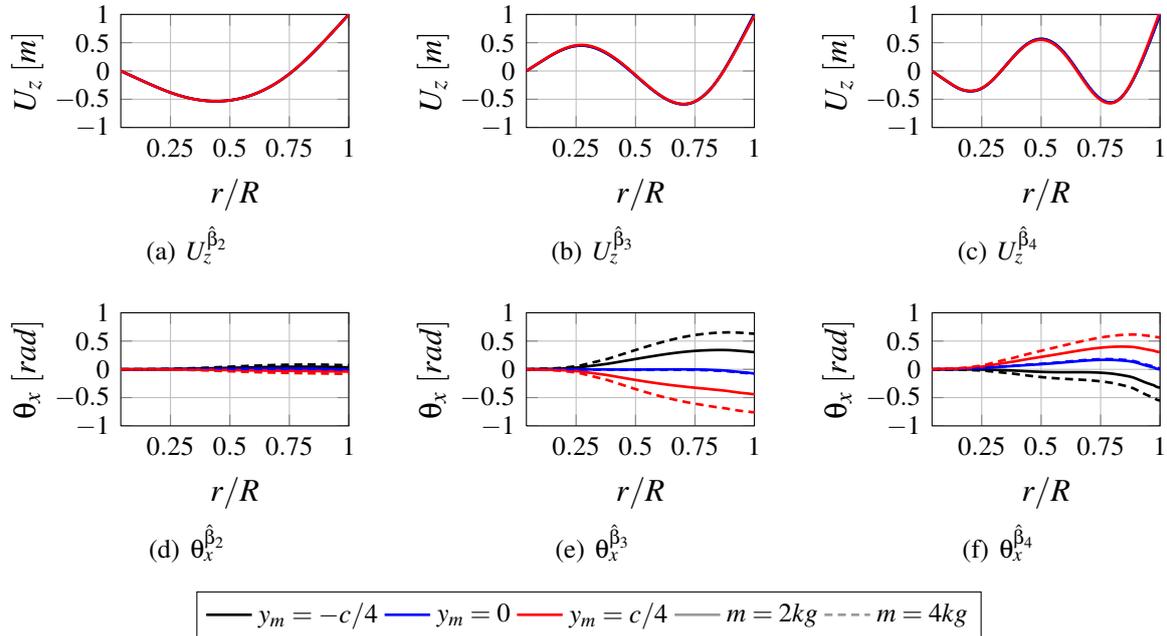


FIGURE 7.9: Déformées des modes de battement dans le vide pour  $r_m = 0.7R$  et  $\omega_{\theta_1} = 5.75\Omega$

### 2.3.2 Evolution des fréquences propres et amortissements

Les diagrammes de Campbell Fig.7.10 représentent l'évolution des fréquences propres et des amortissements réduits en fonction de la fréquence du premier mode de torsion découplé dans le vide.

Pour des fréquences propres de torsion inférieures à  $5\Omega$ , la fréquence du deuxième mode de battement est fortement impactée par la masse déportée. La position radiale de celle-ci ne favorise pas un couplage avec ce mode, néanmoins, la raideur aéroélastique de battement-torsion  $\mathbb{K}^{\beta_2\theta_1}$  est telle que, si petite soit la part de torsion  $\hat{\tau}_{\beta_2\theta_1}$  au sein de la déformée du deuxième mode de battement Fig.7.9.d, l'effet de raidissement aéroélastique direct est remarquable.

Lorsque la fréquence propre du mode de torsion se rapproche de celle du troisième mode de battement, deux phénomènes distincts apparaissent suivant le signe du déport. Pour un déport positif, les fréquences propres se croisent (*mode crossing*) et un gain d'amortissement est observé pour le mode le plus faiblement amorti. Pour un déport négatif, une coalescence apparaît entre ces deux modes (*mode veering*). Une bulle d'instabilité, aboutissant à une chute d'amortissement pour le mode le moins amorti, est observée. Hors de cette zone de coalescence, le raidissement aéroélastique prédomine et les deux fréquences ont tendances, suivant le signe du déport et du placement fréquentiel relatif, soit à se rapprocher l'une de l'autre, soit à s'éloigner. Pour la torsion, cet effet est moins marqué en dessous de  $5\Omega$ , car elle se couple également avec le deuxième mode de battement, rendant caduques les raisonnements analytiques valables pour deux degrés de liberté.

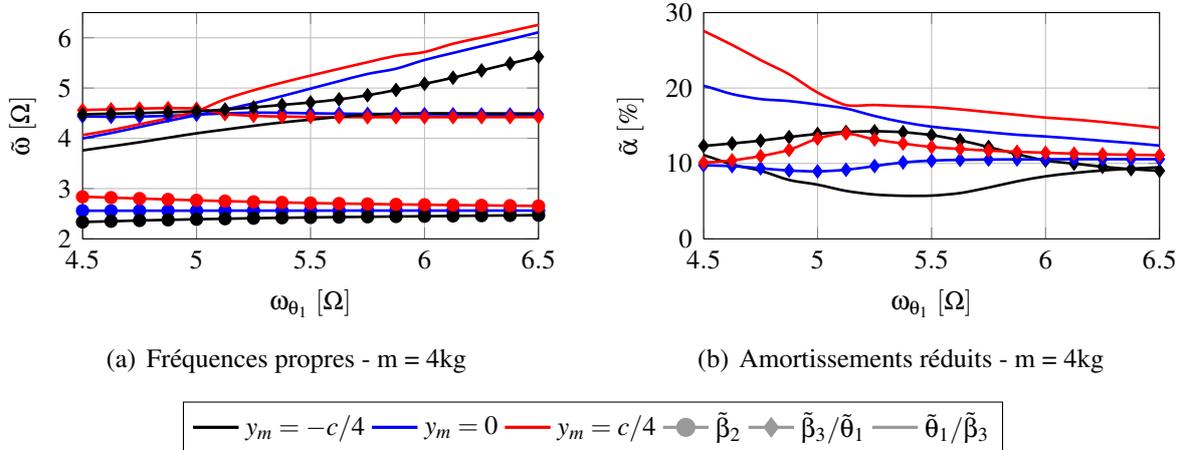


FIGURE 7.10: Diagrammes de Campbell

### 2.3.3 Evolution des charges dynamiques

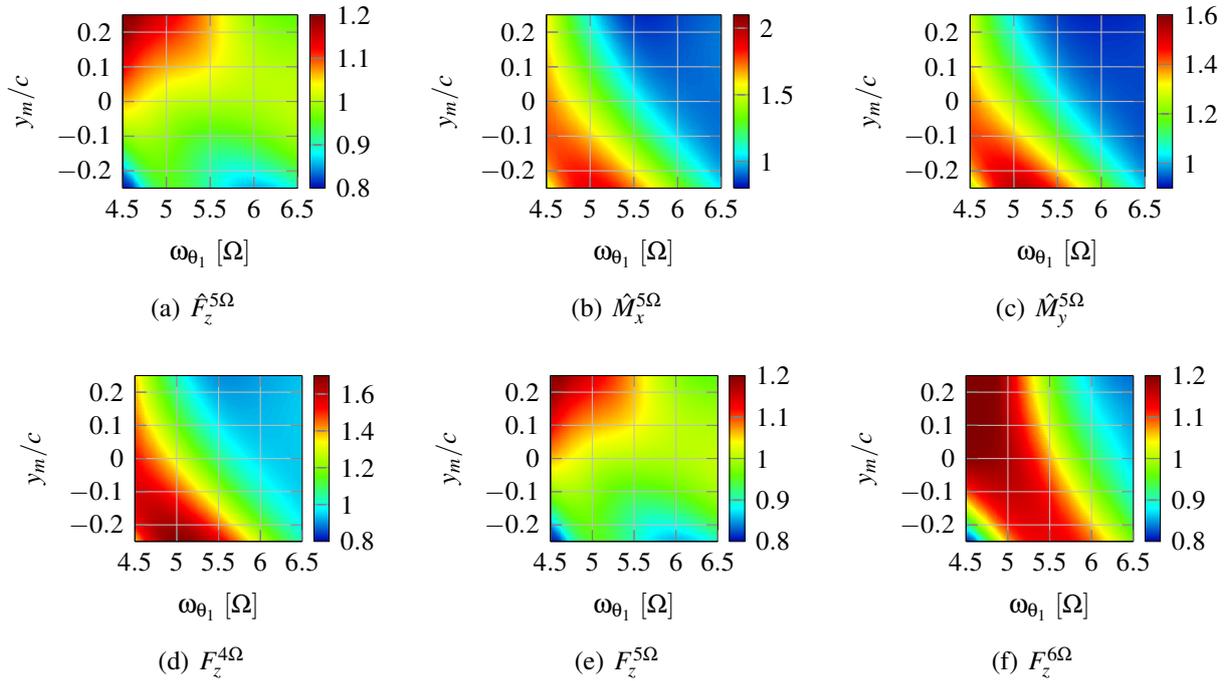
Les graphiques de la figure 7.11 représentent les évolutions de l’effort de pompage, des moments coplanaires du torseur tête rotor et des efforts verticaux exercés par la pale en  $4\Omega$ ,  $5\Omega$  et  $6\Omega$  en fonction de la fréquence propre du premier mode de torsion et du déport de la masse non structurale.

En  $4\Omega$ , la diminution de la fréquence propre du mode de torsion entraîne l’augmentation du niveau de charges dynamiques. Cela s’explique d’une part par la diminution de la rigidité de ce mode et donc une réponse plus importante aux efforts généralisés qui lui sont appliqués, et d’autre part, par une augmentation de son couplage aéroélastique avec le deuxième mode de battement. La réponse de ce dernier est alors amenée à fortement augmenter.

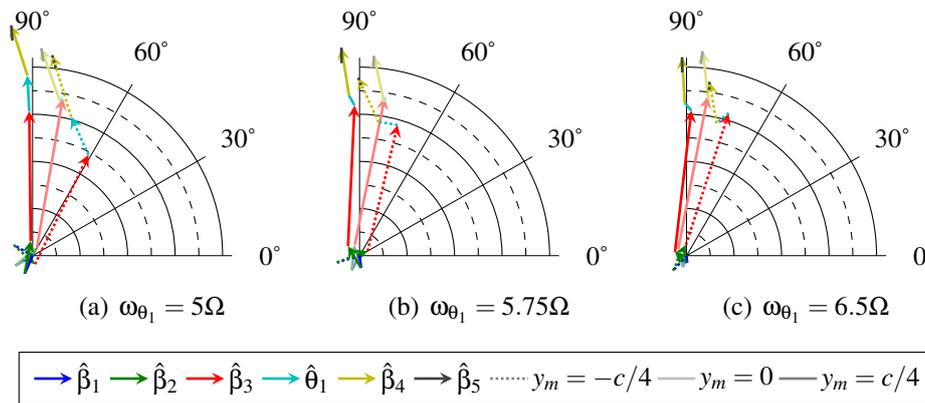
L’évolution en  $5\Omega$  est dictée par le comportement du troisième mode de battement et par sa coalescence avec le mode de torsion. Les diagrammes de la figure 7.12 représentent les contributions de chaque modes aux efforts tranchants en  $5\Omega$ . Plus la fréquence propre du mode de torsion se rapproche de celle du troisième mode de battement, plus le couplage est important, et plus l’amplitude de l’effort tranchant associé à la déformée de battement du mode de torsion couplé  $\hat{W}_{\beta_3\theta_1}$  est importante. Pour un déport positif, cet effort tranchant est quasiment en phase avec celui du mode de battement couplé, ce qui aboutit à une augmentation des charges. Pour un déport négatif, un déphasage entre ces deux composantes apparaît, évitant ainsi une augmentation des charges. Ce déphasage est lié à la coalescence des deux modes.

### 2.3.4 Propositions de configurations favorables - Bilan

Compte tenu des résultats de l’étude paramétrique précédente, trois configurations différentes de masse non structurale ( $m=4\text{kg}$  en  $0.7R$ ) sont proposées. Le tableau 7.6 récapitule les gains normalisés par rapport au cas de référence (absence de masse non structurale) pour chacune d’entre elle.



**FIGURE 7.11:** Evolution des composantes du torseur tête rotor et des efforts à l’articulation en fonction de la fréquence propre du premier mode de torsion et du positionnement en corde de la masse de 4kg, normalisées par rapport au cas d’une masse non déportée et d’une fréquence de torsion de  $5.75\Omega$



**FIGURE 7.12:** Diagramme des efforts tranchants en  $5\Omega$

**Configuration  $C_0$  :**  $y_m = 0 - \omega_{\theta_1} = 5.75\Omega$

Cette configuration correspond au cas de la pale de référence munie d’une masse non structurale sans déport. Ce cas simple permet une diminution importante de la composante de pompage associée à une augmentation significative du moment coplanaire  $\hat{M}_y$ .

**Configuration  $C_1$  :**  $y_m = -c/4 - \omega_{\theta_1} = 6.5\Omega$

Cette configuration assure un niveau faible de pompage mais augmente les niveau des moments coplanaires.

**Configuration  $C_2$  :**  $y_m = +c/4 - \omega_{\theta_1} = 6.5\Omega$

Cette configuration permet de minimiser la composante  $\hat{M}_x$  et de réduire la composante  $\hat{F}_z$ . Les bénéfices du déport sont principalement remarquable sur les moments coplanaires. Ils permettent de limiter l'augmentation de la composante  $\hat{M}_y$  causée par la position radiale en  $0.7R$  de la masse (Configuration  $C_0$ ).

Configuration	$C_0$	$C_1$	$C_2$
$\hat{F}_z$	-23%	-32%	-26%
$\hat{M}_x$	-5%	+0.2%	-12%
$\hat{M}_y$	+15%	+17%	+6%

**TABLE 7.6:** Gains issus de la masse non structurale suivant la configuration

Le choix de la configuration optimale dépend ensuite des fonctions de transfert du fuselage. Ces dernières permettent de déterminer quelles composantes du torseur tête rotor génèrent le plus de niveaux vibratoires en cabines. Ainsi, en ciblant l'une de ces composantes plutôt qu'une autre, cela aura plus ou moins d'effets sur les vibrations.

### 3 Raideur de battement-torsion

#### 3.1 Intensité du couplage élastique

Comme le montre les relations 7.4, le couplage élastique entre un mode de battement et un mode de torsion est caractérisé par le terme :

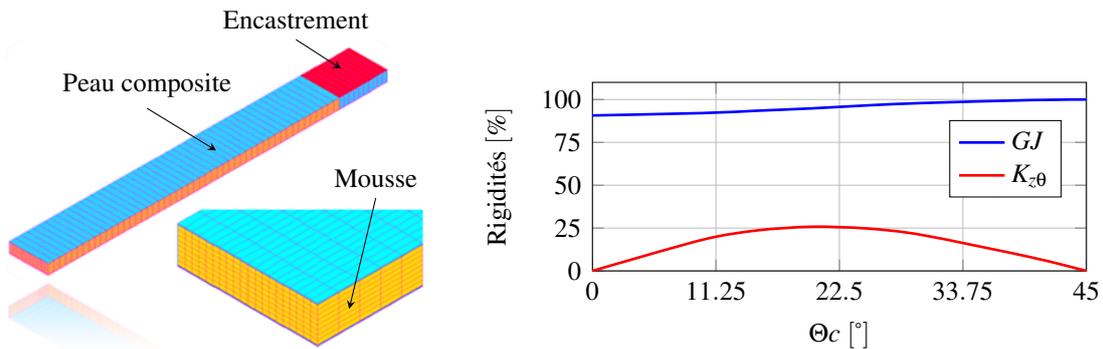
$$k_{\beta\theta} = - \int_e^R K_{z\theta} \phi_\beta'' \phi_\theta' dr$$

La norme de ce terme dépend à la fois de l'amplitude de raideur de battement-torsion, de sa répartition radiale et de la courbure des modes ciblés.

##### 3.1.1 Amplitude de raideur de battement-torsion

Pour une répartition et des déformées données, la norme du terme de couplage  $k_{\beta\theta}$  est fonction de l'amplitude de raideur de battement-torsion des différentes sections. Celle-ci dépend des technologies de fabrication des pales et notamment de l'orientation des plis composites au sein des sections.

Des études numériques sur des poutres sandwich symétriques, composées de plis en carbone  $c$  et verre  $v$  et remplis de mousse polyuréthane, ont été réalisées au service pale d'Airbus Helicopters [BMC14]. Les orientations des plis composant la peau de la poutre sont définies par  $[0v/\Theta c/45c]$ . L'orientation du pli médian  $\Theta c$  varie de  $0^\circ$  à  $45^\circ$  de façon à introduire les couplages flexion-torsion. La figure 7.13 illustre les variations de raideur de torsion  $GJ$  et de raideur de battement-torsion  $K_{z\theta}$  en fonction de l'orientation de ce pli. La raideur de torsion varie peu, tandis que la raideur de battement-torsion présente un maximum d'environ 25% de la raideur torsionnelle  $GJ$  pour une orientation du pli médian  $\Theta c = 22.5^\circ$ .



**FIGURE 7.13:** Evaluation numérique des caractéristiques de rigidité d'une section de poutre sandwich en fonction de l'orientation du pli médian - Valeurs normalisées par rapport à la raideur en torsion de référence  $[0v/45c/45c]$

Compte tenu de ces résultats et des valeurs rencontrées dans la littérature [Pia97], la valeur maximale de raideur de battement-torsion considérée comme réalisable technologiquement pour la suite, est fixée à 25% du  $GJ$ . D'autre part, l'introduction de couplages élastiques via des orientations particulières de plis sera supposée n'avoir aucune incidence sur la raideur en torsion.

### 3.1.2 Répartition radiale

De façon à évaluer l'influence de la répartition radiale de raideur de battement-torsion  $K_{z\theta}$  sur le terme de couplage  $k_{\beta\theta}$ , une étude considérant trois tronçons distincts délimités par les rayons  $r_1$  et  $r_2$  est réalisée Fig.7.14. Chaque tronçon présente la même amplitude de raideur de battement-torsion, mais un signe différent du tronçon voisin.

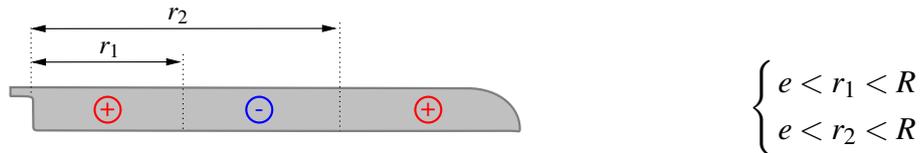


FIGURE 7.14: Positionnement des tronçons

Un balayage en envergure est réalisé sur les rayons  $r_1$  et  $r_2$ . De plus, compte tenu du placement fréquentiel des différents modes, seul le cas d'un couplage avec le 1<sup>er</sup> mode de torsion est présenté. Les graphiques de la figure 7.15 représentent l'évolution du terme de couplage  $k_{\beta_i\theta_1}$  entre les 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup>, 4<sup>ème</sup> modes de battement et le 1<sup>er</sup> de torsion, en fonction des positions radiales des différents tronçons.

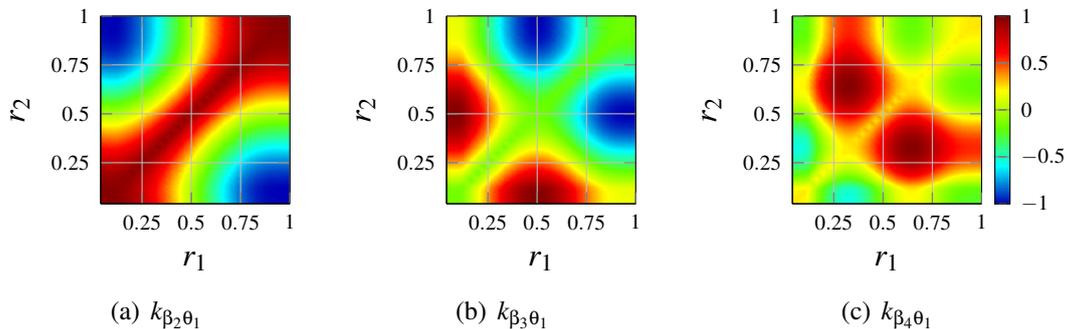


FIGURE 7.15: Evolution du coefficient de couplage élastique  $k_{\beta\theta}$  en fonction de la position radiale des différents tronçons

Les rayons  $r_1$  et  $r_2$  donnant les maximums d'amplitude correspondent aux rayons de changement de signe de la courbure des déformées de battement. Cela provient de la courbure du 1<sup>er</sup> mode de torsion, de même signe le long de l'envergure. Le couplage sera maximisé, par un unique tronçon de signe constant pour le 2<sup>ème</sup> mode de battement, par deux tronçons de signes opposés pour le 3<sup>ème</sup> mode de battement et par trois tronçons pour le 4<sup>ème</sup>. La répartition optimale de couplage entre le  $i^{\text{ème}}$  mode de battement et le 1<sup>er</sup> de torsion vaut donc :

$$K_{z\theta}^{\beta_i\theta_1}(r) = \frac{GJ}{4} \text{Signe} \left[ \phi_{\beta_i}''(r) \right]$$

Les zones de maximums pour un mode donné ne correspondent pas toujours à des zones de minimums pour les autres modes de battement. Ainsi, lorsqu'un couplage est recherché entre un unique mode de torsion et un unique mode de battement, un compromis doit être trouvé de façon à limiter les couplages parasites.

### 3.1.3 Courbures des modes ciblés

La courbure des déformées modales intervient également dans l'amplitude du terme de couplage  $k_{\beta\theta}$ . Les déformées de battement évoluent très peu avec les couplages, les variations de caractéristiques matériaux ou encore le régime rotor. Leurs courbures peuvent donc être considérées comme invariantes Fig.7.16. Les déformées de torsion quant à elles, dépendent fortement de la raideur de chaîne de commande. Lorsque celle-ci est faible, la déformée de torsion peut présenter un angle élevé en pied de pale. Par conséquent, la courbure du mode diminue, induisant ainsi des niveaux d'énergie élastique de couplage beaucoup plus faibles.

Dans le cas où une diminution de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion est recherchée pour optimiser le couplage, à écart fréquentiel équivalent entre les modes ciblés, il sera donc plus judicieux de jouer sur une modification de la raideur en torsion  $GJ$  plutôt qu'une diminution de la raideur de commande [SG09].

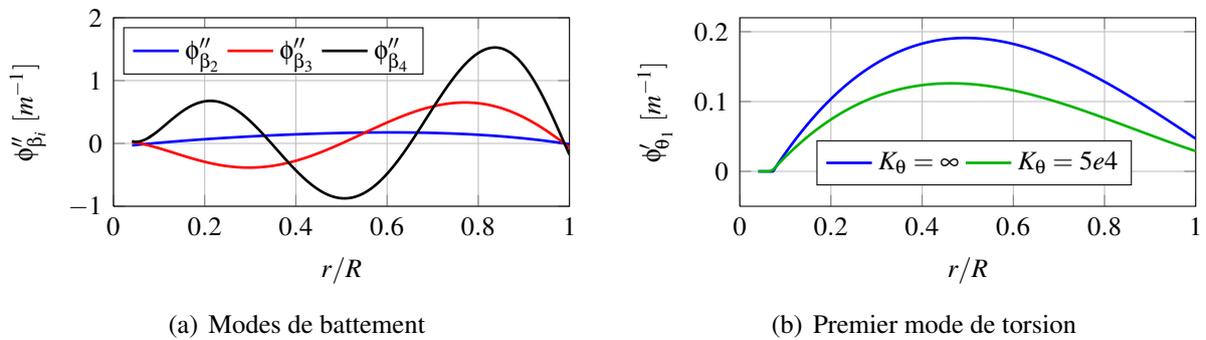
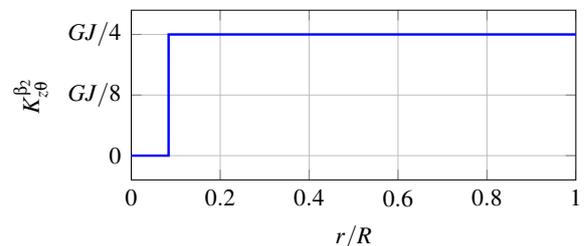


FIGURE 7.16: Courbures des modes de battement et du premier mode de torsion

## 3.2 Couplage optimal entre le 2<sup>ème</sup> mode de battement et le 1<sup>er</sup> de torsion

Dans cette partie, la raideur de battement-torsion est uniforme sur l'envergure. Son amplitude varie entre -25% et 25% de la raideur torsionnelle  $GJ$ . D'autre part, une variation de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion est imposée entre  $4.5\Omega$  et  $6.5\Omega$  :

$$\begin{cases} K_{z\theta}(r) = A_{\beta_2} \cdot K_{z\theta}^{\beta_2}(r) \\ -1 < A_{\beta_2} < 1 \\ 4.5\Omega < \omega_{\theta_1} < 6.5\Omega \end{cases}$$



### 3.2.1 Déformées modales couplées dans le vide

Les graphiques de la figure 7.17 représentent les déformées hors plan  $U_z$  et de torsion  $\theta_x$  des modes de battement pour des répartitions radiales de couplage élastique de signes opposés et

d'amplitudes maximales. Les déformées hors plan ne sont pas affectées par l'introduction de couplages tandis que les déformées de torsion le sont significativement. Le 2<sup>ème</sup> mode de battement présente une déformée en torsion aboutissant à un angle de 0.4 radians en bout de pale. Le 3<sup>ème</sup> mode de battement se couple quant à lui avec le 2<sup>ème</sup> mode de torsion et le 4<sup>ème</sup> mode de battement présente une déformée de torsion faisant intervenir les déformées 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> modes de torsion.

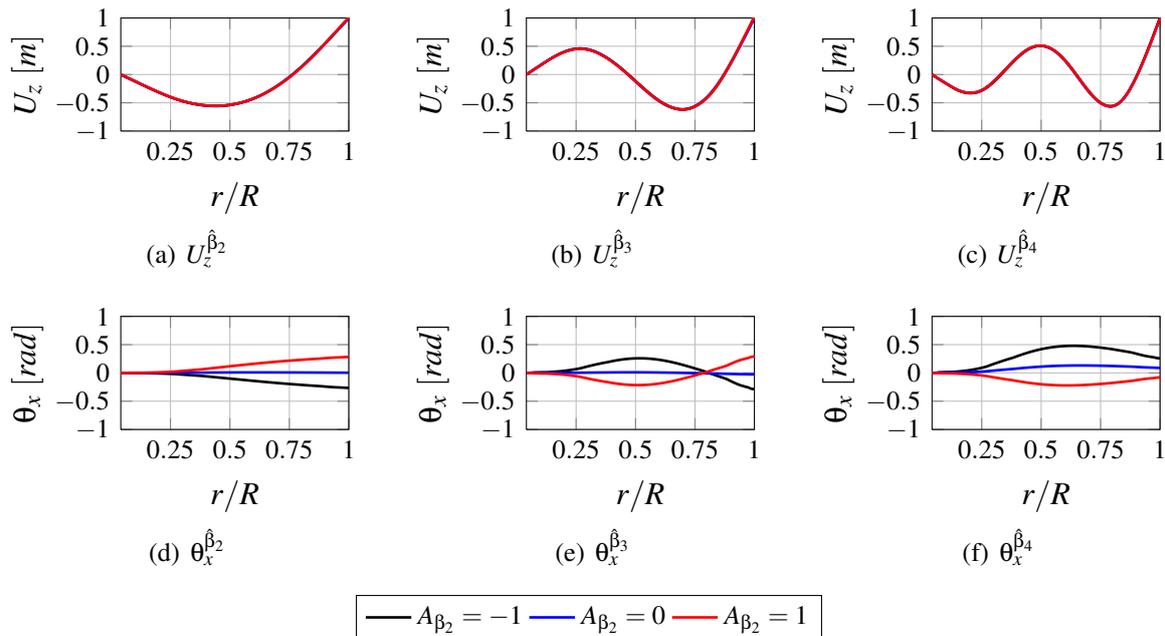


FIGURE 7.17: Déformées des modes de battement dans le vide pour une fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion de  $5.75\Omega$

### 3.2.2 Modification des caractéristiques modales aéroélastiques

Les modes aéroélastiques sont fortement impactés par les modifications de raideur de battement-torsion et de fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion dans le vide. Les diagrammes de Campbell de la figure 7.18 représentent l'évolution des fréquences propres aéroélastiques et de l'amortissement en fonction de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion découplé, et ce pour trois valeurs distinctes de raideur de battement-torsion.

Les effets de raidissement aérodynamique direct sont clairement observables pour le 2<sup>ème</sup> mode de battement aéroélastique ainsi que pour le mode de torsion. Les fréquences propres de ces derniers ont tendance, suivant le signe des déformées couplées, à se rapprocher ou à s'éloigner. Lorsque la fréquence propre du mode de torsion est proche de celle du 3<sup>ème</sup> mode de battement, cela se traduit, dans le cas d'une amplitude positive de raideur de battement-torsion, par un croisement de modes, et dans le cas d'une amplitude négative, par une coalescence de modes.

D'un point de vue stabilité, l'amortissement du 2<sup>ème</sup> mode de battement est fortement dépendant de la fréquence propre du mode de torsion et de l'amplitude de raideur de battement-torsion. Le

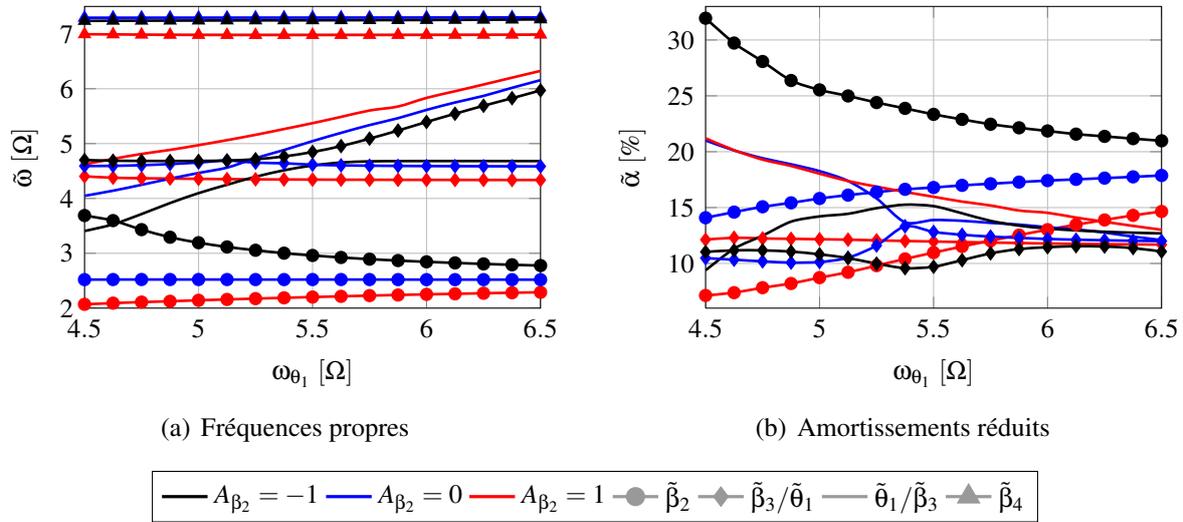


FIGURE 7.18: Diagrammes de Campbell dans l'air en fonction de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion

3<sup>ème</sup> mode de battement présente quant à lui une chute d'amortissement au niveau de la coalescence avec le 1<sup>er</sup> mode de torsion.

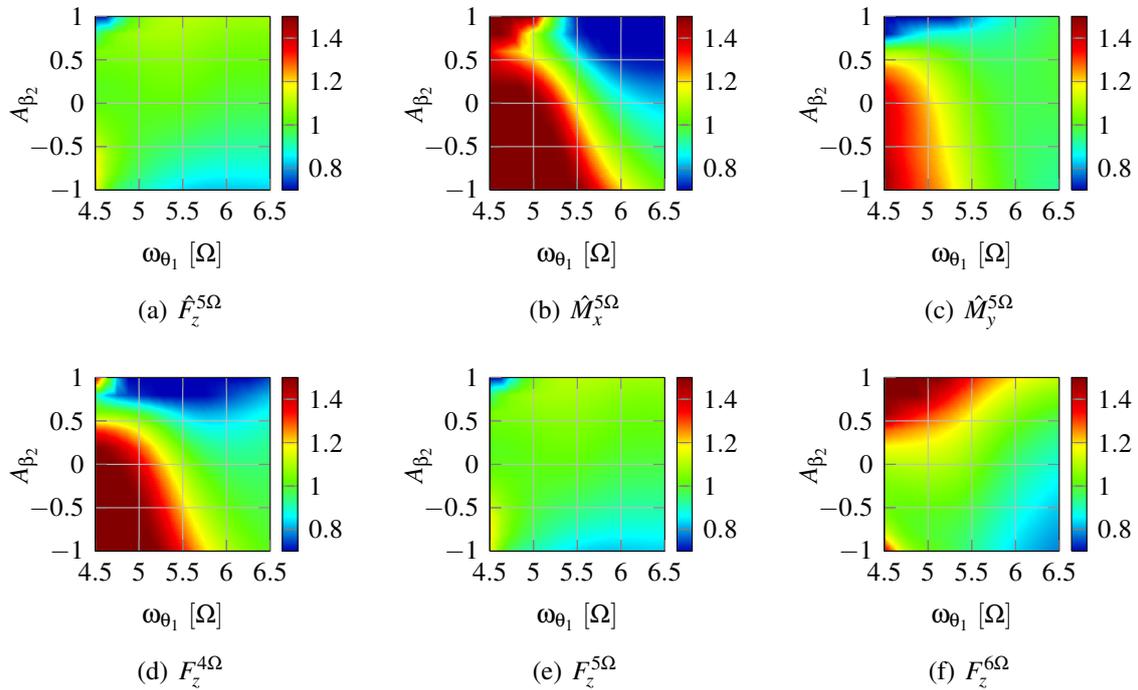
### 3.2.3 Modification des charges dynamiques

Les graphiques de la figure 7.19 représentent les composantes normalisées du torseur tête rotor et des efforts verticaux à l'articulation en repère tournant en fonction de l'amplitude de raideur de battement-torsion et de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion.

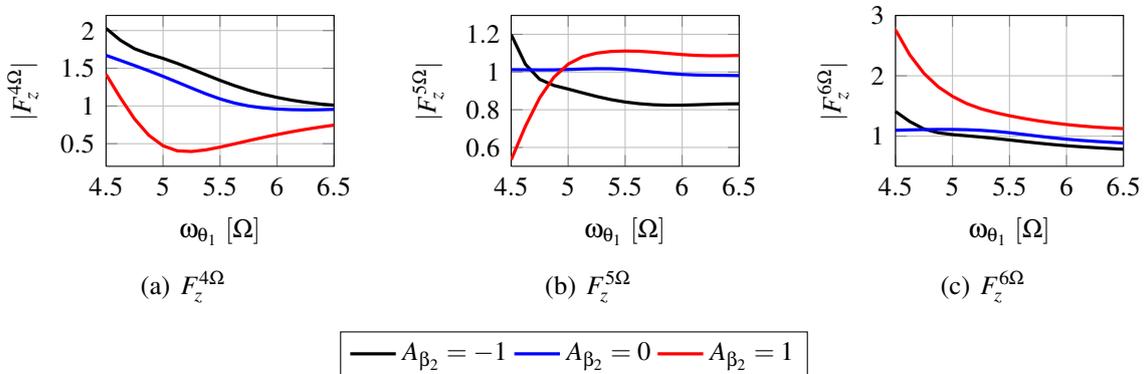
Une fois de plus, l'influence de la composante  $F_z^{4\Omega}$  sur les moments coplanaires semble prépondérante par rapport à celle de  $F_z^{6\Omega}$  ce qui s'explique principalement par son amplitude nettement supérieure ( $F_z^{4\Omega} \approx 2.F_z^{6\Omega}$ ).

Les graphiques de la figure 7.20 représentent l'évolution des efforts tranchants verticaux en repère tournant en  $4\Omega$ ,  $5\Omega$  et  $6\Omega$  pour différentes amplitudes de raideur de battement-torsion.

L'évolution de la composante  $F_z^{4\Omega}$  s'explique, pour les fréquences de torsion suffisamment élevées, par l'effort tranchant du 2<sup>ème</sup> mode de battement, Fig.7.21.a, dont les variations proviennent du placement fréquentiel de ce mode et du 1<sup>er</sup> de torsion vis à vis du 4<sup>ème</sup> harmonique, Fig.7.18. Pour une amplitude de couplage négative, leurs fréquences propres sont beaucoup plus proches de cet harmonique, induisant ainsi des réponses modales plus importantes. Pour une amplitude positive, elles sont plus éloignées, ce qui limite la réponse de la pale et l'effort tranchant associé. Pour les fréquences propres de torsion inférieures à  $5\Omega$  associée à une amplitude positive de couplage élastique, l'effort en  $4\Omega$  croit significativement. Cela provient de la fréquence propre du 2<sup>ème</sup> mode de battement aéroélastique, proche de  $2\Omega$ , harmonique pour lequel les excitations aérodynamiques sont très importantes. Ce mode est alors proche de la résonance, ce qui se répercute sur les har-



**FIGURE 7.19:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor et des charges dynamiques verticales en repère tournant



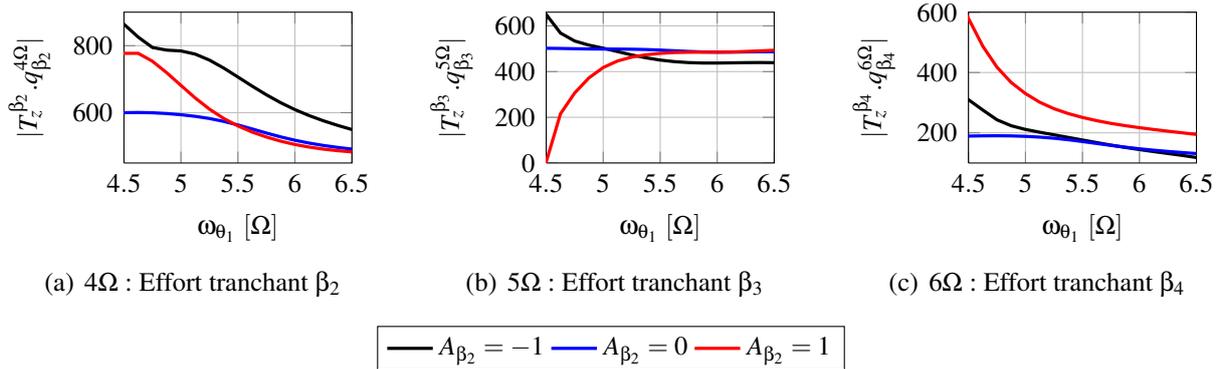
**FIGURE 7.20:** Actions mécaniques exercées par une pale sur le moyeu en fonction de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion, pour trois amplitudes différentes de couplage élastique

moniques suivants et sur l'état d'équilibre du rotor.

L'évolution de la composante  $F_z^{5\Omega}$  quant à elle, provient principalement des variations d'efforts tranchants du 3<sup>ème</sup> mode de battement, Fig.7.21.b. Ces dernières s'expliquent, non pas par des considérations fréquentielles, mais par des considérations sur les efforts aérodynamiques instantanés appliqués sur ce mode. Le couplage aéroélastique entre le 2<sup>ème</sup> mode de battement et la torsion entraîne une modification des efforts généralisés appliqués sur le 3<sup>ème</sup> mode de battement à cet harmonique, provoquant, suivant les écarts de phase entre sa réponse initiale, celle en torsion

mais également celle du flux induit, une réduction ou une augmentation de sa réponse.

Enfin, les variations de la composante en  $6\Omega$  proviennent de l'effort tranchant du 4<sup>ème</sup> mode de battement sur cet harmonique, Fig.7.21.c, qui s'explique d'une part, par l'évolution de sa fréquence propre, Fig.7.18 et d'autre part, pour les fréquences propres de torsion faibles, par une modification de la configuration aérodynamique du rotor.

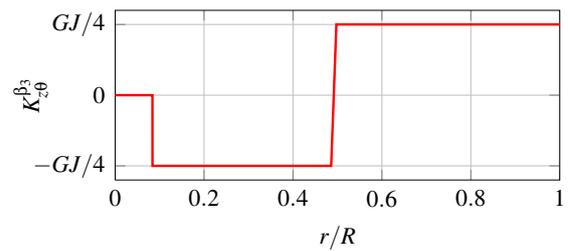


**FIGURE 7.21:** Efforts tranchants exercés par les 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> modes de battement respectivement en  $4\Omega$ ,  $5\Omega$  et  $6\Omega$

### 3.3 Couplage optimal entre le 3<sup>ème</sup> mode de battement et le 1<sup>er</sup> de torsion

Dans cette partie, la pale est constituée de deux tronçons présentant des raideurs de battement-torsion de signes opposés, Fig.3.3. Une étude paramétrique pour laquelle leur amplitude varie entre -25% et 25% de la raideur torsionnelle  $GJ$  et la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion varie entre  $4.5\Omega$  et  $6.5\Omega$  est réalisée :

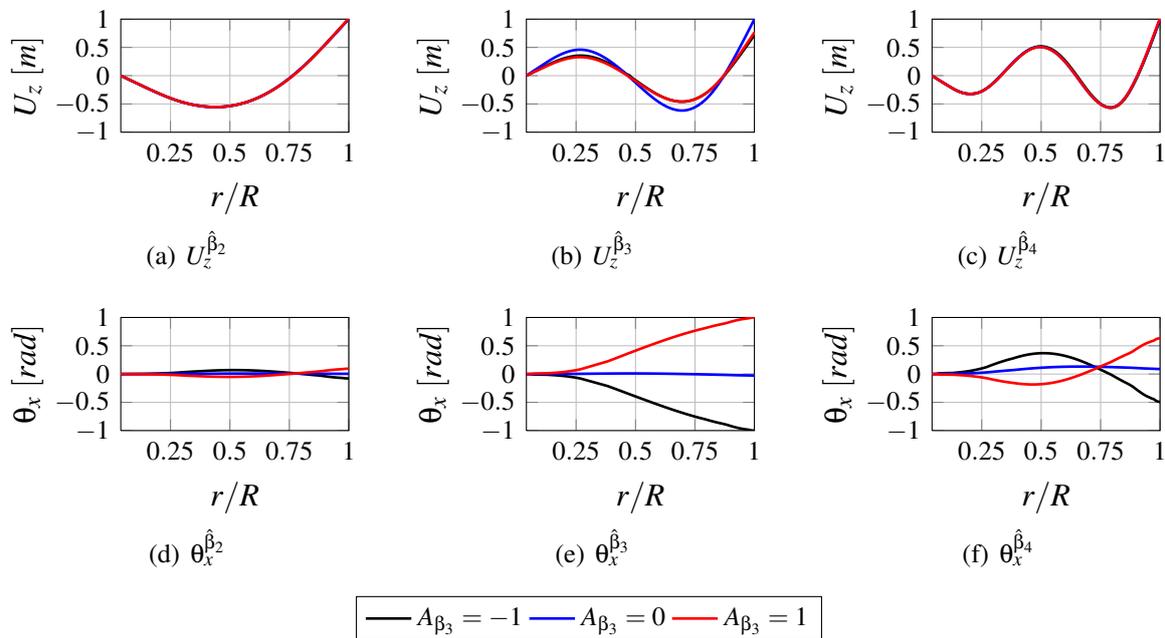
$$\begin{cases} K_{z\theta}(r) = A_{\beta_3} \cdot K_{z\theta}^{\beta_3}(r) \\ -1 < A_{\beta_3} < 1 \\ 4.5\Omega < \omega_{\theta_1} < 6.5\Omega \end{cases}$$



#### 3.3.1 Déformées modales couplées dans le vide

Les graphiques de la figure 7.22 représentent les déformées hors plan et de torsion des modes de battement pour différentes répartitions radiales de raideur de battement-torsion. Le 2<sup>ème</sup> mode de battement n'est quasiment pas impacté par l'introduction de couplages élastiques. Le 3<sup>ème</sup> présente quant à lui un angle de torsion de 1 radian en bout de pale, faisant de lui un véritable

mode couplé battement-torsion. Enfin, le 4<sup>ème</sup> mode de battement se couple avec le 2<sup>ème</sup> mode de torsion.



**FIGURE 7.22:** Déformées des modes de battement dans le vide pour une fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion de  $5.75\Omega$

### 3.3.2 Modification des caractéristiques modales aéroélastiques

Les diagrammes de Campbell de la figure 7.23 représentent l'évolution des fréquences propres aéroélastiques et de l'amortissement en fonction de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion découplé dans le vide et ce pour trois répartitions différentes de raideur de battement-torsion.

Les fréquences propres des 2<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> modes de battement aéroélastique sont une fois de plus influencées par l'effet de raidissement aéroélastique direct provenant de la part de torsion couplée au sein de leurs déformées. D'autre part, un couplage aéroélastique important apparaît entre les modes ciblés par le couplage élastique. Celui-ci se traduit, dans le cas d'une amplitude de couplage négative, par une coalescence importante et dans le cas d'une amplitude positive, par un croisement de modes.

### 3.3.3 Modification des charges dynamiques

Les graphiques de la figure 7.24 représentent les composantes normalisées du torseur tête rotor et des efforts verticaux à l'articulation en repère tournant en fonction de la répartition de raideur de battement-torsion et de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion.

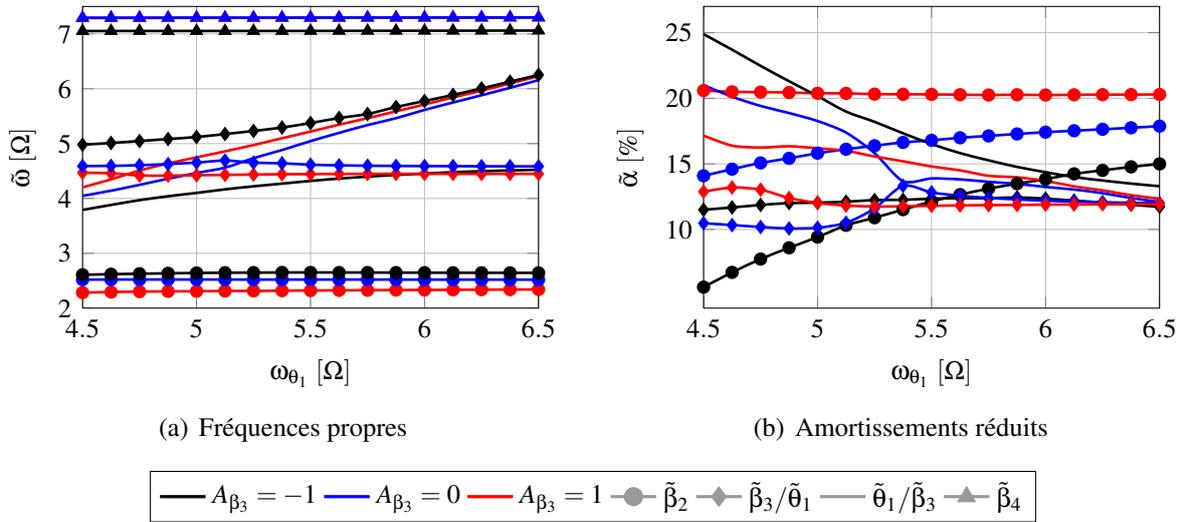


FIGURE 7.23: Diagrammes de Campbell dans l'air en fonction de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion

Le lien entre l'évolution des moments coplanaires  $\hat{M}_y^{5\Omega}$  et  $\hat{M}_x^{5\Omega}$  et l'effort en repère tournant  $\hat{F}_z^{4\Omega}$  est encore une fois flagrant. D'autre part, pour des fréquences propres de torsion élevées, il est possible de réduire de 25% ces composantes du torseur tête rotor.

Ici, l'analyse des gains obtenus ne peut être réalisée simplement à partir de considérations sur les fréquences propres ou les efforts tranchants d'un mode en particulier. Il a donc été choisi de décrire, pour trois fréquences propres de torsion ( $\omega_{\theta_1} = 5\Omega, 5.75\Omega, 6.5\Omega$ ) et pour trois amplitudes de couplage élastique ( $A_{\beta_3} = -1, 0, 1$ ), l'évolution des amplitudes et phases des efforts tranchants modaux en  $4\Omega$  et  $5\Omega$ .

Les diagrammes a, b et c de la figure 7.25 représentent ces efforts pour le 4<sup>ème</sup> harmonique.

L'introduction d'une raideur de battement-torsion d'amplitude  $A_{\beta_3} = 1$  entraîne une forte modification du comportement des 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> modes de battement, notamment pour des fréquences propres du 1<sup>er</sup> mode de torsion de  $5\Omega$  et  $5.75\Omega$ . L'amplitude de leurs efforts tranchants croient alors significativement. Pour une fréquence propre de torsion de  $6.5\Omega$ , la phase du 3<sup>ème</sup> mode de battement est modifiée d'environ  $180^\circ$ , entraînant une réduction importante des efforts transmis à la pale.

Les diagrammes d, e et f de la figure 7.25 représentent les efforts tranchants verticaux en  $5\Omega$  exercés par les différents modes sur l'articulation.

Pour une fréquence propre de torsion de  $5\Omega$ , compte tenu de la proximité fréquentielle entre les deux modes ciblés, le couplage entre le 3<sup>ème</sup> mode de battement et le 1<sup>er</sup> de torsion est très important. Ce dernier présente alors une déformée conséquente en battement, générant ainsi des efforts tranchants importants (en  $4\Omega$  et  $5\Omega$ ). Pour  $\omega_{\theta_1} = 5.75\Omega$ , le couplage est moins marqué, aboutissant à des efforts tranchants du mode de torsion couplé beaucoup plus faibles. Pour une fréquence propre de torsion de  $6.5\Omega$ , la part de battement au sein du mode de torsion est quasiment nulle, et les efforts tranchants associés également. Suivant le signe du couplage élastique, l'amplitude de l'effort tranchant du 3<sup>ème</sup> mode de battement varie significativement.

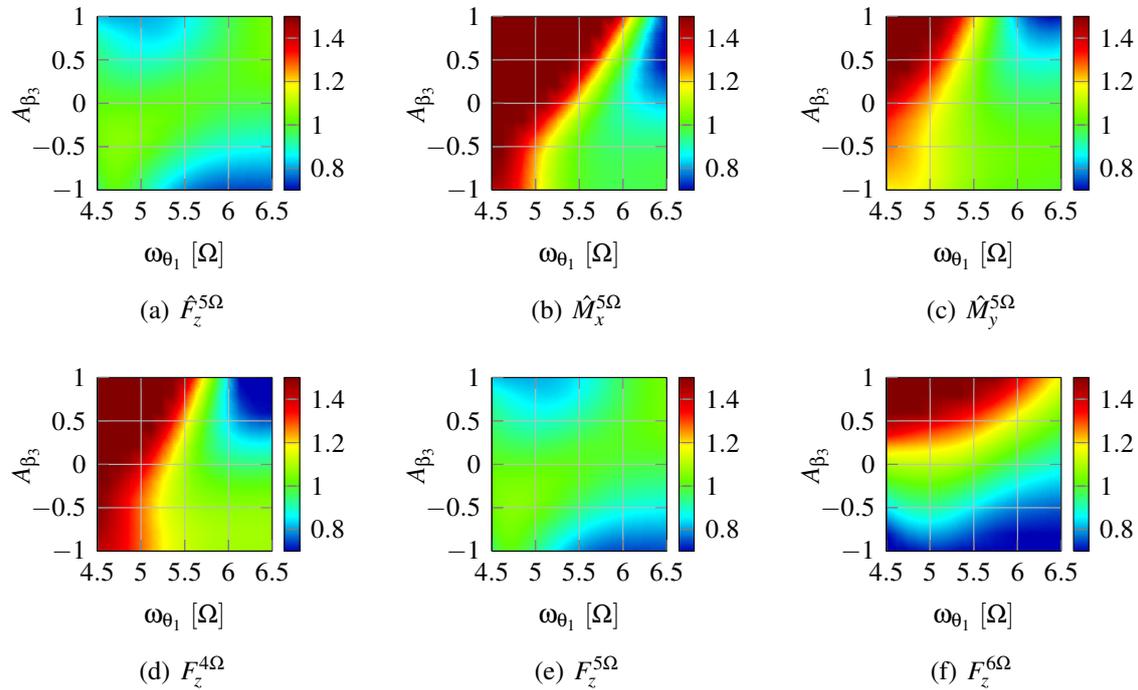


FIGURE 7.24: Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor

Dans chacune de ces configurations, l'évolution des différentes composantes et de leur phase s'explique par une modification des fréquences propres aéroélastiques des différents modes, Fig.7.23, par une modification de la réponse en torsion de la pale, mais également du flux induit, aboutissant, in fine, à une évolution des efforts généralisés appliqués sur les modes.

### 3.3.4 Bilan

Les études paramétriques précédentes ont permis de démontrer le potentiel des couplages élastiques dans la réduction des charges dynamiques transmises au fuselage. L'influence de la répartition de couplage et de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion sur les composantes du torseur tête rotor a clairement été mise en évidence. De façon générale, une fréquence propre de torsion élevée offre de meilleure possibilité de réduction des charges. Cela limite un couplage aérodynamique trop important avec le 2<sup>ème</sup> mode de battement, pouvant aboutir à de fortes modifications de configurations aérodynamiques du rotor.

## 3.4 Etude paramétrique d'une combinaison de couplage élastique

De façon à évaluer l'impact d'une combinaison des répartitions de raideur de battement-torsion étudiées précédemment, la raideur de battement-torsion est supposée prendre la forme d'une combinaison linéaire de répartitions optimales. Suivant la combinaison considérée, la valeur seuil de 25% de la raideur torsionnelle peut être localement dépassée. Cette "frontière" technologique est

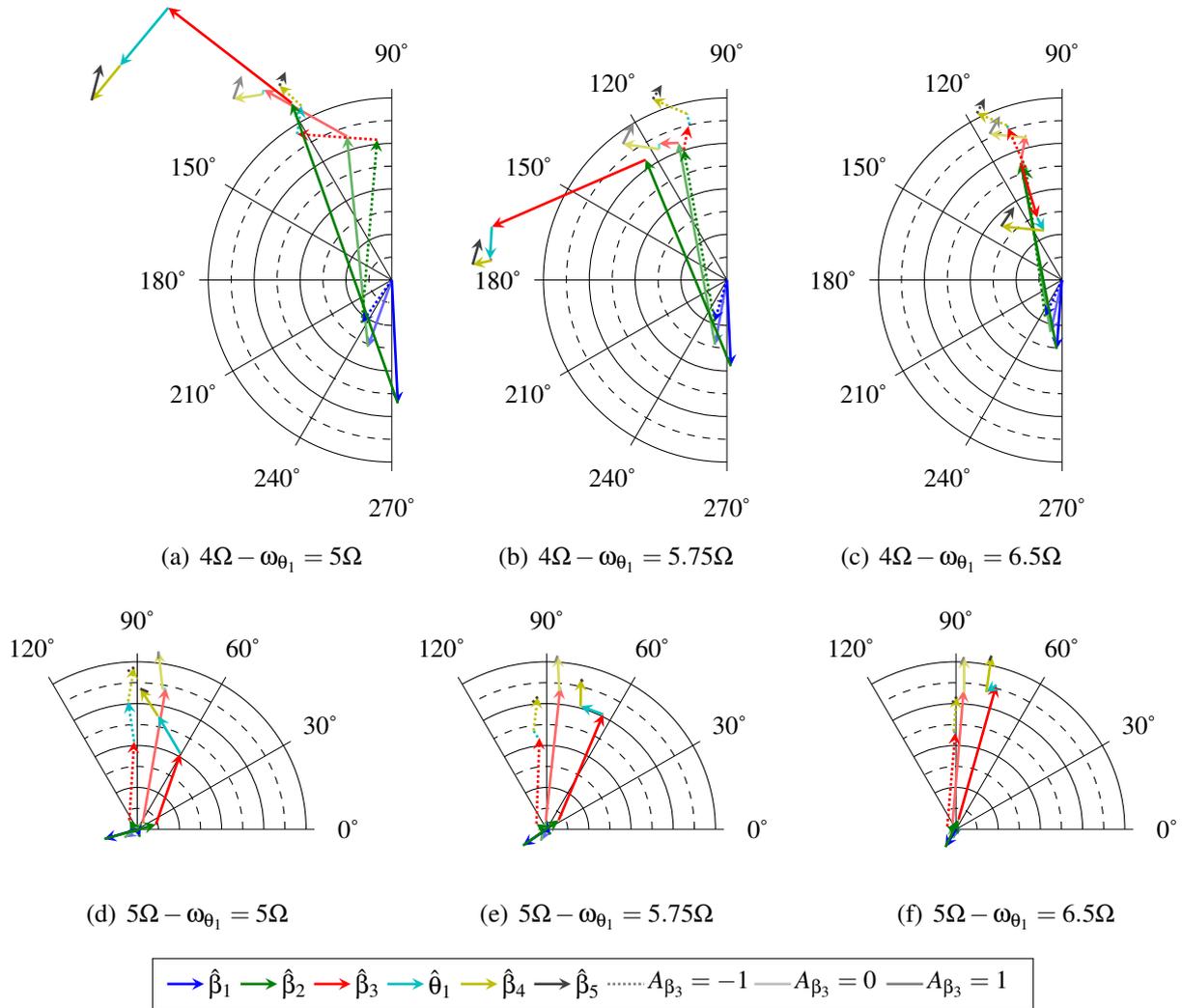
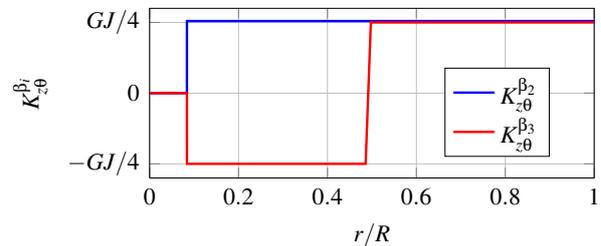


FIGURE 7.25: Diagrammes des efforts tranchants en  $4\Omega$  et  $5\Omega$  pour différentes amplitudes de couplages élastiques et de fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion

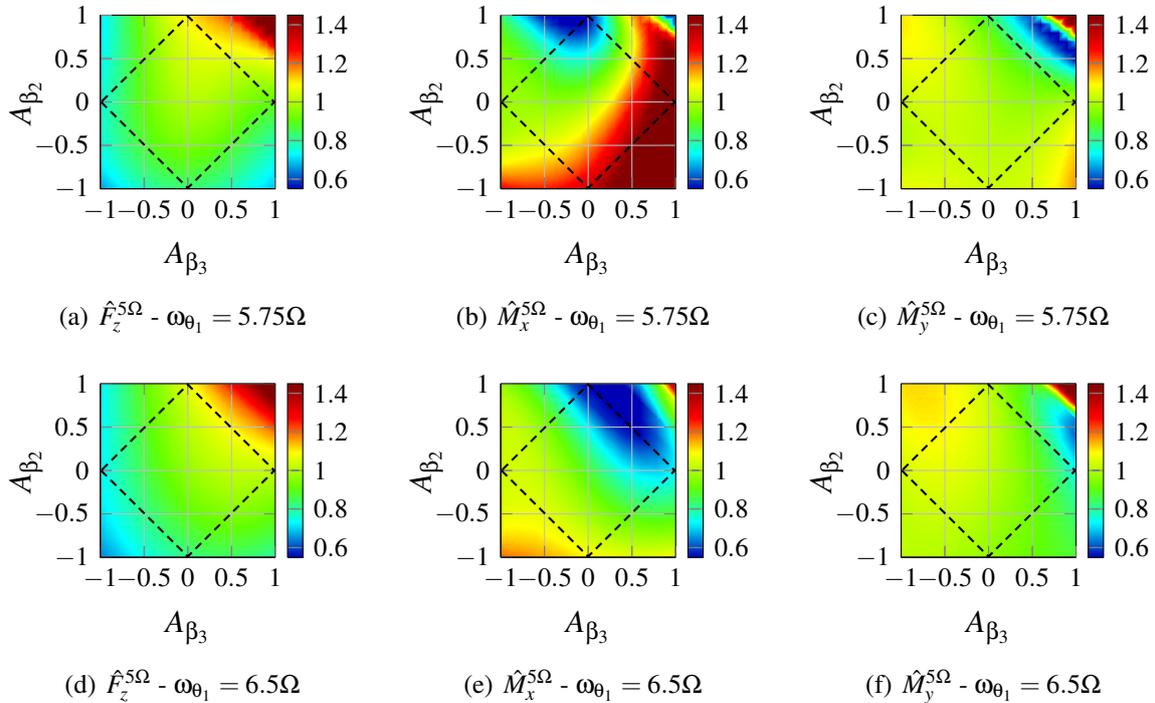
$$\begin{cases} K_{z\theta}(r) = A_{\beta_2} \cdot K_{z\theta}^{\beta_2}(r) + A_{\beta_3} \cdot K_{z\theta}^{\beta_3}(r) \\ -1 < A_{\beta_2} < 1 \\ -1 < A_{\beta_3} < 1 \\ \omega_{\theta_1} = 5.75\Omega \text{ ou } 6.5\Omega \end{cases}$$



représentée sur les différents graphiques par des pointillés noirs. Ces études paramétriques sont réalisées pour deux valeurs différentes de fréquence propre de torsion.

### 3.4.1 Influence sur les charges dynamiques

Les graphiques de la figure 7.26 représentent les évolutions de l'effort de pompage et des moments coplanaires en fonction des amplitudes de raideur de battement-torsion imposées.



**FIGURE 7.26:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la répartition de raideur de battement-torsion pour deux fréquence propres de torsion différentes

L'effet d'une modification de la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion est principalement observable sur le moment coplaire  $\hat{M}_x^{5\Omega}$ . L'augmentation de cette fréquence propre permet d'aboutir à une zone de gain élargie. De plus, dans la zone de faisabilité technologique, des réductions plus importantes sont obtenues pour chacune des composantes.

### 3.4.2 Propositions de configurations favorables

Compte tenu des différentes études paramétriques réalisées, deux configurations de couplage élastique assurant respectivement une diminution de l'effort de pompage et des moments coplanaires sont proposées. Chacune de ces propositions est complétée d'une ou deux autres configurations voisines, se situant légèrement au delà de la limite de faisabilité fixée précédemment. Les différentes configurations proposées entraînent une réduction des composantes ciblées pour les deux fréquences propres de torsion considérées.

**Configurations  $C_1$**  Ces configurations favorisent la réduction de l'effort de pompage. Les répartitions de couplage élastique associées maximise principalement le couplage entre le 3<sup>ème</sup> mode de battement et le 1<sup>er</sup> de torsion.

(a) Répartition			(b) Charges dynamiques				
Config.	$C_{10}$	$C_{11}$	Config.	$C_{10}$		$C_{11}$	
$A_{\beta_2}$	0	0.4	$\omega_{\theta_1}$	5.75Ω	6.5Ω	5.75Ω	6.5Ω
$A_{\beta_3}$	-1	-1	$\hat{F}_z$	-24%	-24%	-27%	-27%
			$\hat{M}_x$	-4%	+4%	+3%	-5%
			$\hat{M}_y$	+4%	+4%	+7%	+9%

**TABLE 7.7:** Configurations de couplages élastiques favorables pour la réduction de l'effort de pompage en repère fixe

Le tableau 7.7.b répertorie les gains ou pertes pour chacune des composantes et ce pour chaque configuration. La fréquence propre de torsion n'a pas d'influence sur les gains obtenus. D'autre part, la configuration hors de la zone de faisabilité apporte seulement 3% de gain supplémentaire, pour un effort technologique beaucoup plus important ( $K_{z\theta}^{max} \approx 0.35GJ$ ).

**Configurations  $C_2$**  Ces configurations favorisent la réduction des moments coplanaires. Elles font intervenir des répartitions de raideur de battement-torsion favorisant le couplage entre le 2<sup>ème</sup> mode de battement et le 1<sup>er</sup> mode de torsion.

(a) Répartition				(b) Charges dynamiques						
Config.	$C_{20}$	$C_{21}$	$C_{22}$	Config.	$C_{20}$		$C_{21}$		$C_{22}$	
$A_{\beta_2}$	1	1	1	$\omega_{\theta_1}$	5.75Ω	6.5Ω	5.75Ω	6.5Ω	5.75Ω	6.5Ω
$A_{\beta_3}$	0	0.2	-0.2	$\hat{F}_z$	+1%	+7%	+3%	+14%	-2%	0%
				$\hat{M}_x$	-35%	-54%	0%	-65%	-55%	-39%
				$\hat{M}_y$	-25%	+2%	-41%	-4%	-13%	+6%

**TABLE 7.8:** Configurations de couplages élastiques favorables pour la réduction des moments coplanaires en repère fixe

Le tableau 7.8.b repertorie les gains ou pertes pour chacune des composantes dans chaque configuration. Ici, la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion a beaucoup d'influence sur les gains obtenus ainsi que sur la composante de moment impactée. De fortes réductions apparaissent dans chacune des configurations et celles obtenues hors de la zone de faisabilité sont les plus importantes. Enfin, pour la configuration  $C_{21}$ , la composante de pompage peut augmenter de 14%, ce qui démontre la nécessité d'un compromis.

**Bilan** L'introduction d'une raideur de battement-torsion induisant des couplages élastiques permet, suivant sa répartition radiale et son amplitude, de réduire certaines des composantes du torseur tête rotor. Pour une amplitude de 25% de la raideur torsionnelle, des gains allant jusqu'à -54% peuvent être obtenus. Lorsque ce seuil est dépassé, les gains peuvent nettement augmenter. D'autre part, le choix de la fréquence propre de torsion influe également sur les gains obtenus. Il est difficile de réduire simultanément l'ensemble des composantes du torseur tête rotor. Un

choix basé sur la prise en compte des fonctions de transfert du fuselage doit être réalisé de façon à minimiser les composantes du torseur ayant le plus d'impact sur les niveaux vibratoires en cabines.

## 4 Couplages aéroélastiques : bilan

**Apport des couplages aéroélastiques** Les bénéfices potentiels issus des couplages aéroélastiques ont clairement été établis. Les études paramétriques ont permis d'aboutir à des réductions allant jusqu'à -32% de l'effort de pompage pour une masse non structurale déportée placée en 0.7R et jusqu'à -54% du moment coplanaire longitudinal pour une raideur de battement-torsion de 25% de la raideur torsionnelle.

Néanmoins, il est difficile de trouver une configuration pour laquelle toutes les amplitudes des composantes du torseur tête rotor sont réduites. Un compromis doit donc être trouvé. Celui-ci peut soit être basé sur des critères liés aux fonctions de transfert du fuselage et donc à la propension d'une composante donnée à générer d'importants niveaux vibratoire en cabine, soit faire appel à des outils d'optimisation permettant la prise en compte de l'ensemble des composantes du torseur tête rotor à travers une fonction scalaire mono objective, ou par une approche multi objectifs.

**Analyses des résultats** L'analyse des résultats reste difficile compte tenu de la grande complexité du problème. L'introduction de couplages aéroélastiques entraîne une modification des fréquences propres aéroélastiques et donc de la réponse en battement et torsion de la pale. Ces modifications altèrent l'incidence dynamique des profils, modifiant ainsi les efforts instantanés exercés sur la pale. Le flux induit s'en trouve alors perturbé, modifiant à son tour l'incidence dynamique. Ces interactions fluide-structure rendent difficile l'estimation, a priori, ou par de simples considérations sur un effet en particulier (placement fréquentiel des modes aéroélastiques, coalescence, modification du chargement aérodynamique instantané, modification de la réponse en torsion etc. . .), de l'apport des couplages aéroélastiques sur la réponse des pale et les charges dynamiques associées.

D'autre part, l'état d'équilibre du rotor est perturbé par ces couplages. Les angles de pas collectif et cyclique peuvent changer, aboutissant à une cartographie d'incidence différente sur le rotor. Les profils sont alors amenés à travailler sur des plages d'incidence différente, ce qui altère la réponse dynamique de la pale et les charges dynamiques associées.



---

# Conclusion

La réduction des charges dynamiques transmises par le rotor au fuselage conditionne le confort des passagers et la durée de vie des composants au sein de l'hélicoptère. Elle est au cœur de nombreux travaux de recherche. Une méthode pour l'instant non appliquée sur des hélicoptères commercialisés, consiste à introduire des couplages aéroélastiques au sein des pales de façon à maîtriser le comportement dynamique du rotor. L'objectif de cette thèse était d'évaluer la capacité de ces couplages aéroélastiques à réduire le torseur tête rotor. Pour cela, un modèle aéroélastique de rotor isolé prenant en compte l'ensemble des mécanismes élastiques, inertiels et aérodynamiques régissant le comportement dynamique des pales a été développé. Il a ensuite été validé et différentes études paramétriques ont été réalisées de façon à appréhender les effets des couplages sur les charges dynamiques.

Les **chapitres 1 et 2** ont permis de mettre en place les différentes spécificités cinématiques, aérodynamiques et dynamiques du rotor d'hélicoptère. Son comportement ainsi que sa capacité à générer mais aussi à filtrer les charges dynamiques sont présentées. Une étude bibliographique des différentes méthodes de réduction du torseur tête rotor en repère tournant ainsi que des couplages élastiques ont été présentés.

Le comportement élastique et inertiel de la pale a été décrit au **chapitre 3** par une formulation de type repère flottant. Celle-ci prend en compte de grandes rotations issues de l'articulation, introduisant ainsi des non linéarités géométriques et permettant une représentation fidèle des effets de Coriolis à l'œuvre sur la pale. D'autre part, elle permet la représentation des déformations en flexion et torsion de la pale, à l'aide d'une base de déformation issue de calculs éléments-finis. Cette approche rend possible l'utilisation d'outils disponibles au sein du service Vibration et Bruit Interne d'Airbus Helicopters et permet un développement semi-analytique utile pour appréhender les différents phénomènes physiques en jeu. Les couplages inertiels et élastiques sont pris en compte au niveau de la base de déformation.

La représentation du comportement aérodynamique du rotor, quant à elle, a fait appel à un modèle de portance et un modèle de flux induit décrits **chapitre 4**. Le premier est issu de la théorie bidimensionnel de l'élément de pale associée aux théories instationnaires développées par Theodorsen. Le second, permet de représenter la vitesse induite à l'aide de plusieurs états finis. Il offre une grande flexibilité et constitue un modèle particulièrement adapté aux problématiques hautes harmoniques.

Enfin, le calcul de la réponse dynamique des pales, présenté au **chapitre 5**, est basé sur l'hypothèse de périodicité du comportement rotor. Les différents degrés de liberté du modèle sont ainsi développés en série de Fourier sur les harmoniques du régime de rotation. Une fois la réponse des pales connue, la stabilité du rotor est étudiée par une méthode de perturbation.

Ce modèle offre une grande flexibilité de modélisation. Différents paramètres sont ajustables de façon à correspondre aux besoins de l'utilisateur. Du point de vue structurel il est possible d'intervenir sur le caractère rigide ou souple du rotor et également sur le nombre et le type de modes au sein de la base de déformation. Différentes bases éléments-finis, issues d'outils externes au modèle, sont ainsi disponibles. Côté aérodynamique, il est possible de jouer sur le nombre d'états de flux induit de façon à modéliser la vitesse induite avec plus ou moins de précision suivant le cas de calcul considéré (vol stationnaire, vol d'avancement d'un rotor trois ou cinq pales, etc. . .). Enfin, il est possible de choisir le nombre d'harmoniques sur lequel sont développés les différents degrés de liberté et ainsi tronquer le système à sa convenance.

Au **chapitre 6**, ce modèle a été validé par une comparaison avec un autre logiciel de calculs aéromécaniques ainsi qu'avec des essais en vol. Néanmoins, cette validation se cantonne aux vitesses d'avancement rencontrées en vol palier. Les difficultés à prédire quantitativement les charges dynamique notamment à basse vitesse en l'absence de modèle de sillage, mais également à haute vitesse en l'absence de modèle de décrochage dynamique sont connues et s'appliquent à ce modèle.

Différents balayages sur des paramètres clés du rotor ont également été réalisés. Il a ainsi été démontré l'influence significative du vrillage, de l'effilement et du régime rotor sur le niveau de charges dynamiques transmises par le rotor au fuselage. Les effets d'adaptation dynamique du rotor ont également été investigués. Ces différents balayages ont permis de retrouver les tendances attendues et ont démontré le comportement sain du modèle aéroélastique.

De façon à caractériser l'influence des couplages aéroélastiques sur le comportement du rotor, le modèle développé a été utilisé au **chapitre 7**. Il a tout d'abord été simplifié de façon à faciliter les analyses et la compréhension. Puis, il a permis d'évaluer les bénéfices potentiels issus des couplages.

Ces derniers se traduisent par de nombreux effets sur les modes ciblés et non ciblés. La présence de couplages entraîne une modification des fréquences propres dans le vide, puis un raidissement ou assouplissement aérodynamique direct suivant le signe des déformées couplées. Dans un troisième temps, un véritable couplage aéroélastique apparaît entre les modes ciblés, entraînant une modification supplémentaire de leurs fréquences propres. La réponse des modes non ciblés par le couplage, quant à elle, est affectée par la modification des efforts généralisés, provenant de l'évolution de la réponse en torsion de la pale. A l'ensemble de ces mécanismes viennent s'ajouter des modifications importantes de l'environnement aérodynamique du rotor. Une modification de la réponse en torsion influe sur le champ de vitesse induite ainsi que sur l'état d'équilibre du rotor. Les raisonnements basés sur de simples considérations fréquentielles des modes dans l'air s'avèrent alors inefficaces pour prédire le comportement dynamique du rotor a priori.

Deux techniques de couplages aéroélastiques ont ensuite été investiguées, l'une basée sur l'introduction d'une masse non structurelle déportée par rapport au centre de torsion, et l'autre basée sur des couplages élastiques. Dans le cas de la masse non structurelle, des études paramétriques basées sur la position radiale et en corde de la masse ainsi que sur la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion ont été réalisées. Des gains allant jusqu'à 30% de la composante de pompage ont été obtenus. Dans le cas du couplage élastique, des études paramétriques prenant en compte l'ampli-

tude et la répartition de raideur de battement-torsion ainsi que la fréquence propre du 1<sup>er</sup> mode de torsion ont démontré des gains potentiels allant jusqu'à 24% de la composante de pompage 54% de la composante longitudinale de moment coplanaire.

## Perspectives

En ce qui concerne le modèle aéroélastique de rotor isolé, différents axes de perfectionnement sont envisageables. Du point de vue aérodynamique, la prise en compte du décrochage dynamique permettrait d'étendre le domaine de validité du modèle aux grandes vitesses d'avancement. La modélisation des interactions pale-tourbillons quant à elle, via l'utilisation de théories aérodynamique tridimensionnelles, serait trop onéreuse en temps de calcul et sortirait du contexte d'avant-projet dans lequel s'inscrit ce modèle. Elle n'apparaît donc pas comme justifiée.

Du point de vue structurel, la prise en compte du fuselage et des couplages inertiels existant entre son comportement dynamique et celui du rotor, permettrait une meilleure estimation du torseur tête rotor. Une seconde approche, réalisable sans développements supplémentaires, consisterait en la prise en compte des fonctions de transfert du fuselage, de façon à estimer des niveaux vibratoires en cabine, directement à partir des charges dynamiques issues du modèle.

En ce qui concerne les couplages aéroélastiques, bien que leur potentiel de réduction des charges dynamiques ait été mis en exergue, il reste difficile de prédire a priori leurs effets sur le torseur tête rotor. Une étude expérimentale associée à un processus d'optimisation constituerait une approche complémentaire intéressante. L'utilisation d'algorithmes d'optimisation permettrait de définir les différents paramètres de couplage des pales expérimentales. Leur conception serait alors rendue plus aisée par la prise en compte directement au sein des algorithmes d'optimisation, de fonctions objectif mono ou multi-critères (différentes composantes du torseur tête rotor), et de l'ensemble des contraintes de faisabilité, de stabilité, de masse etc... D'autre part, la confrontation des différentes mesures issues des essais expérimentaux permettrait de tester la robustesse des outils de modélisation et du processus d'optimisation.

Une seconde perspective intéressante serait l'application de couplages aéroélastiques en vue d'un apport d'amortissement. En effet, comme l'ont montré les différentes études menées au sein de ces travaux, l'amortissement des modes ciblés par les couplages est fortement impacté. Les couplages aéroélastiques constituent donc un paramètre supplémentaire permettant de maîtriser les marges de stabilité.



# A

## La théorie de Floquet

En vol d'avancement, la présence de termes périodiques au sein de la vitesse tangentielle du profil  $V_T$  amènent à utiliser la théorie de Floquet [Flo83]. Celle-ci s'attache à décrire le comportement des systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques de la forme :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{x}(t) \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\underline{\underline{A}}(t+T) = \underline{\underline{A}}(t) \quad (\text{A.2})$$

### 1 Matrice de monodromie

#### 1.1 Définitions & propriétés

Ce système étant linéaire, la solution  $x$  à l'instant  $t$  est une combinaison linéaire des degrés de liberté du système à l'instant  $t_0$ . Il existe donc une fonction de transition d'état  $\phi$ , aussi appelée *résolvante*, prenant la forme :

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\phi}}(t, t_0) \cdot \underline{x}(t_0) \quad (\text{A.3})$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

$$\underline{\underline{\phi}}(t_1, t_1) = I_d \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{\underline{\phi}}(t_2, t_0) = \underline{\underline{\phi}}(t_2, t_1) \cdot \underline{\underline{\phi}}(t_1, t_0) \quad (\text{A.5})$$

$$\underline{\underline{\phi}}(t_1, t_0) = \underline{\underline{\phi}}(t_0, t_1)^{-1} \quad (\text{A.6})$$

En substituant l'équation A.3 au sein de l'équation A.1, il vient :

$$\dot{\underline{\underline{\phi}}}(t, t_0) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{\underline{\phi}}(t, t_0) \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{\underline{\underline{\phi}}}(t+T, t_0) = \underline{\underline{A}}(t) \cdot \underline{\underline{\phi}}(t+T, t_0) \quad (\text{A.8})$$

$\underline{\underline{\phi}}(t, t_0)$  et  $\underline{\underline{\phi}}(t+T, t_0)$  sont solutions de la même équation différentielle. Elles sont donc linéairement dépendante et il existe une matrice constante  $\underline{\underline{\alpha}}$ , appelée matrice de monodromie, telle que :

$$\underline{\underline{\phi}}(t+T, t_0) = \underline{\underline{\phi}}(t, t_0) \cdot \underline{\underline{\alpha}} \quad (\text{A.9})$$

D'autre part, la matrice de transition d'état  $\phi$  peut être décomposée en une matrice périodique et une matrice non périodique :

$$\underline{\underline{\phi}}(t, 0) = \underline{\underline{P}}(t) \cdot e^{\underline{\underline{\beta}}t} \quad (\text{A.10})$$

Ce qui peut être généralisé à :

$$\underline{\underline{\phi}}(t, t_0) = \underline{\underline{P}}(t) \cdot e^{\underline{\underline{\beta}}(t-t_0)} \cdot \underline{\underline{P}}(t_0)^{-1} \quad (\text{A.11})$$

La matrice de monodromie est alors obtenue par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\phi}}(t, t_0) \cdot \underline{\underline{\alpha}} &= \underline{\underline{\phi}}(t+T, t_0) \\ &= \underline{\underline{P}}(t) \cdot e^{\underline{\underline{\beta}}(t+T-t_0)} \cdot \underline{\underline{P}}(t_0)^{-1} \\ &= \underline{\underline{P}}(t) \cdot e^{\underline{\underline{\beta}}(t-t_0)} \cdot \underline{\underline{P}}(t_0)^{-1} \cdot e^{\underline{\underline{\beta}}T} \\ &= \underline{\underline{\phi}}(t, t_0) \cdot e^{\underline{\underline{\beta}}T} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\underline{\underline{\alpha}} = e^{\underline{\underline{\beta}}T} \quad (\text{A.12})$$

ou encore :

$$\underline{\underline{\beta}} = \frac{1}{T} \ln(\underline{\underline{\alpha}}) \quad (\text{A.13})$$

## 1.2 Calcul numérique de la matrice de monodromie

L'équation A.9 à l'instant  $t_0 = 0$  associée à la propriété A.5 donne :

$$\underline{\underline{\phi}}(T, 0) = \underline{\underline{\alpha}} \quad (\text{A.14})$$

Il suffit donc de connaître la matrice de transition d'état  $\underline{\underline{\phi}}$  au bout d'une période pour déterminer la matrice de monodromie [Joh94]. Or,

$$\underline{\underline{x}}(T) = \underline{\underline{\phi}}(T, 0) \cdot \underline{\underline{x}}(0) \quad (\text{A.15})$$

$\underline{\underline{\phi}}(T, 0)$  peut être déduite par la connaissance d'un ensemble de  $n$  solutions indépendantes aux instants  $t = 0$  et  $t = T$ . Une méthode simple consiste à prendre pour conditions initiales :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{x}}_1(0) &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \\ \underline{\underline{x}}_2(0) &= [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0] \\ \underline{\underline{x}}_3(0) &= [0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0] \\ &\vdots \end{aligned}$$

autrement dit, une fois concaténé :

$$\underline{\underline{X}}_0 = \underline{\underline{I}}_d$$

puis à réaliser une intégration numérique par la méthode de Runge-Kutta (voir annexe). L'ensemble des solutions  $\underline{\underline{x}}_{1,2,3,\dots,n}(T)$  sont alors concaténées pour former la matrice  $\underline{\underline{X}}(T)$ . Ce qui permet d'en déduire la matrice de monodromie :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\phi}}(T, 0) &= \underline{\underline{X}}_0^{-1} \underline{\underline{X}}(T) \\ &\Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{X}}(T) \end{aligned}$$

## 2 Etude des valeurs propres

L'étude des valeurs propres de la matrice de monodromie permet l'analyse du comportement dynamique et de la stabilité du système.

### 2.1 Matrices des valeurs et vecteurs propres

En considérant  $\underline{\underline{\eta}}$  et  $\underline{\underline{S}}$  respectivement les matrices de valeurs propres et de vecteurs propres de la matrice de monodromie, il vient :

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\eta}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \quad (\text{A.16})$$

Les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\underline{\underline{\beta}}$  sont le plus souvent préférées à celle de la matrice de monodromie. Il vient alors, avec  $\underline{\underline{\Lambda}}$  la matrice des valeurs propres de  $\underline{\underline{\beta}}$  :

$$\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \quad (\text{A.17})$$

De la relation A.12, il vient :

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \frac{1}{T} \ln(\underline{\underline{\eta}}) \quad (\text{A.18})$$

Les valeurs propres prennent alors la forme :

$$\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma_j = \frac{1}{T} \ln \left( [Re(\eta_j)^2 + Im(\eta_j)^2]^{1/2} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\omega_j = \omega_j^0 + k \cdot \frac{2\pi}{T} \quad (\text{A.21})$$

$$\omega_j^0 = \frac{1}{T} \text{atan} \left( \frac{Im(\eta_j)}{Re(\eta_j)} \right) \quad (\text{A.22})$$

avec  $\sigma_j$  correspondant à l'amortissement modal et  $\omega_j$  à la pulsation propre du mode. La fréquence propre de base  $\omega_j^0$  est issue directement du calcul du logarithme, telle que :

$$0 \leq \omega_j^0 \leq \Omega/2$$

La fonction *atan* pouvant donner la même valeurs pour différents arguments, il est alors nécessaire d'y ajouter un multiple de la fréquence principale du système, dans notre cas, la vitesse de rotation du rotor  $\Omega$ . Il existe donc une infinité de parties imaginaires possibles pour une même valeur propre  $\lambda_j$  et donc une infinité de fréquences propres  $\omega_j$  distantes les unes de autres de  $2\pi/T$ .

#### Remarque sur le comportement des valeurs propres

- Une paire de valeurs propres conjuguées  $\eta$  donne une paire de valeurs propres conjuguées  $\lambda_0$
- Une valeur propre  $\eta$  réelle positive donne une valeur propre principale  $\lambda_0$  réelle et donc une fréquence propre multiple de  $\Omega$

- Une valeur propre  $\eta$  réelle négative donne quant à elle une valeur propre  $\lambda_0 = \Omega/2$
- Lorsque  $\eta$  est réelle, les valeurs propres  $\lambda_0$  sont complexes mais non conjuguées ce qui diffère des systèmes à coefficients constants

## 2.2 Détermination de la fréquence propre principale

Parmi l'infinité de fréquences disponibles, il faut déterminer la fréquence "principale", soit à partir de considérations physiques, soit à partir du contenu harmonique des vecteurs propres périodiques obtenus. Dans le cas de systèmes peu périodiques, les valeurs propres issues du système linéaire moyenné sur une période rotor, c'est à dire d'un système linéaire à coefficients constants, apporte des indications quant à la fréquence propre "physique" à considérer :

$$\underline{\underline{A}}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\underline{A}}(t) dt$$

Lorsque le caractère périodique du système est important, seul l'analyse des vecteurs propres périodiques permettra de déterminer "la" ou "les" fréquences dominantes du système [PL11].

En reprenant l'équation A.11 et en y injectant l'équation A.12, la matrice de transition d'état prend la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\phi}}(t, t_0) &= \underline{\underline{P}}(t) \cdot \underline{\underline{S}} e^{\underline{\underline{\Lambda}}_0(t-t_0)} \cdot \left[ \underline{\underline{P}}(t_0) \cdot \underline{\underline{S}} \right]^{-1} \\ &= \underline{\underline{PS}}(t) e^{\underline{\underline{\Lambda}}_0(t-t_0)} \cdot \left[ \underline{\underline{PS}}(t_0) \right]^{-1} \end{aligned}$$

La matrice périodique  $\underline{\underline{PS}}(t)$  correspond à la matrice des vecteurs propres périodiques du système.  $\underline{\underline{\Lambda}}_0$  correspondent aux fréquences propres et amortissements de base du système, c'est à dire sans ajout d'un multiple de  $\Omega$  à la partie imaginaire.

En considérant un développement en mode normaux de la solution, il vient alors :

$$\underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{PS}}(t) \cdot \underline{\underline{q}}(t) \quad (\text{A.23})$$

Comparativement à un système linéaire à coefficients constants, pour lequel les modes propres sont constants dans le temps, ici, les vecteurs propres sont périodiques. C'est en analysant le contenu harmonique de ces vecteurs propres qu'il est possible de déterminer la fréquence principale d'un mode donnée, autrement dit, le bon multiple  $k$  à ajouter à la fréquence propre de base  $\omega_j^0$ .

Pour cela, une décomposition en série de Fourier de chaque composante des vecteurs propres  $\underline{\underline{PS}}(t)$  donne les coefficients de Fourier associés à une harmonique donné :

$$C_{rjn} = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\underline{PS}}_{rj}(t) \cdot e^{-in\Omega t} \cdot dt \quad (\text{A.24})$$

Le facteur de participation modale [MG11], représentant la participation relative de chaque harmonique  $n$  pour un degrés de liberté  $r$  au sein de l'exposant de Floquet  $j$  est alors défini :

$$PF_{rjn} = \frac{|C_{rjn}|}{\sum_n C_{rjn}} \quad (\text{A.25})$$

Pour déterminer la fréquence principale de ce mode propre périodique, il est alors nécessaire de calculer le facteur de participation cumulée pour chaque harmonique  $n$  :

$$CPF_{jn} = \sum_r |C_{rjn}| \quad (\text{A.26})$$

L'harmonique  $n$  pour lequel ce facteur est maximum permet d'identifier la fréquence propre principale du système. Une fois celle-ci identifiée, il est possible de reconstruire une nouvelle matrice modale, contenant les vecteurs propres périodiques associées à cette fréquence propre :

$$\underline{\underline{\Psi}}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t) \cdot \underline{\underline{S}} \cdot e^{-\underline{\underline{\Lambda}}t} \quad (\text{A.27})$$

Ces vecteurs sont toujours périodiques, mais ils sont associées à la fréquence propre principale  $\omega_j$  et non à la fréquence propre de base  $\omega_j^0$ .

L'analyse des coefficients  $C_{rjn}$  permet d'une part d'identifier les degrés de liberté impliqués au sein d'un vecteur propre donné et d'autre part, de quantifier son caractère périodique ce qui, lors du calcul de charges, aura une importance. L'exemple qui suit permet d'illustrer les propos précédents.

***Exemple :** Détermination des fréquences propres d'un système linéaire à coefficients constants par la théorie de Floquet*

Considérons une pale dans le vide, animée d'un mouvement souple de battement, décomposé en une superposition linéaire de 3 modes de battement. Ce système est linéaire à coefficients constants puisqu'aucun terme aérodynamique n'introduit de phénomènes périodiques.

Voici un tableau comparatif des fréquences propres obtenues par la théorie de Floquet et par les outils standard de calcul aux valeurs propres des systèmes linéaires à coefficients constants :

	$\omega_j^0$	Floquet : $\omega_j$	Standard : $\omega_j$
$\beta_1$	0.04486 $\Omega$	1.0449 $\Omega$	1.0449 $\Omega$
$\beta_2$	0.34002 $\Omega$	2.66 $\Omega$	2.66 $\Omega$
$\beta_3$	0.28526 $\Omega$	4.7147 $\Omega$	4.715 $\Omega$

**TABLE A.1:** Comparaison des fréquences propres obtenues par la théorie de Floquet et par les méthodes standard

L'observation des coefficients de Fourier  $C_{rjn}$  a permis d'identifier le multiple du régime de rotation rotor a ajouté à la fréquence de base. Par exemple, pour le 2<sup>ème</sup> mode de battement :

### 2.3 Analyse de la stabilité

Par définition :

$$\underline{x}(t + nT) = \underline{\underline{\Phi}}(t + nT, t_0) \cdot \underline{x}(t_0) \quad (\text{A.28})$$

D'autre part, l'équation A.9 permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Phi}}(t + nT, t_0) &= \underline{\underline{\Phi}}(t + [n - 1]T, t_0) \cdot \underline{\underline{\alpha}} \\ &= \underline{\underline{\Phi}}(t, t_0) \cdot \underline{\underline{\alpha}}^n \end{aligned}$$

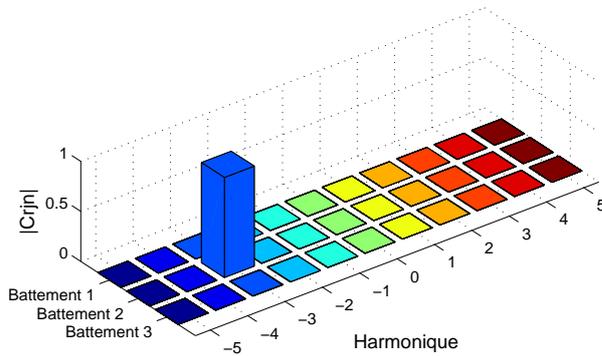


FIGURE A.1:  $C_{rjn}$  pour  $j$  : Battement 2

Le coefficient de Fourier modal de plus grande amplitude est situé à l'harmonique  $-3$  donc :

$$\omega_{\beta_2} = |\omega_{\beta_2}^0 - 3\Omega|$$

donc :

$$\underline{x}(nT) = \underline{\alpha}^n \cdot \underline{x}(0) \quad (\text{A.29})$$

La stabilité du système dépend donc de la norme des valeurs propres de la matrice de monodromie. Le système est stable au sens de Floquet si :

$$\forall j, |\eta_j| < 1 \quad (\text{A.30})$$

Ce critère suffit à garantir la stabilité du système, néanmoins, il existe différents scénarios de divergence [Joh94].

**Divergence classique** Les phénomènes de divergence classique apparaissent lorsqu'une des valeurs propres  $\eta_i$  du système est de norme supérieure à 1. Dans ce cas de figure, les valeurs propres  $\lambda_i$  correspondantes sont à partie réelle positive. Le cas classique des systèmes linéaires à coefficients constants est retrouvé et seules deux types d'instabilités peuvent apparaître. Soit, une paire de valeurs propres complexes conjuguées franchit l'axe des imaginaires, soit une racine simple du système, située sur l'axe des réelles, devient positive. En d'autres termes, ces deux cas correspondent respectivement à une réponse sinusoïdale divergente et une réponse purement divergente. Ce type de divergence arrive notamment au cours des phénomènes de divergence statique ou flottement lorsque des couplages interviennent entre modes de battement et modes de torsion.

**Résonance Paramétrique** Dans le cas des systèmes différentiel linéaire à coefficients périodiques, un troisième type d'instabilité vient s'ajouter aux deux précédents. Il est d'ailleurs prédominant lorsque la système présente un fort caractère périodique.

Lorsque un couple de valeurs propres  $\eta_i$  atteint l'axe des réelles, une des valeurs propre peut voir sa partie réelle diminuer tandis que celle de la seconde augmentera. L'une des valeurs propres pourra alors franchir la frontière de stabilité. Les valeurs propres  $\lambda_i$  associées présenteront alors des parties imaginaires identiques mais des parties réelles différentes. Ce phénomène de dissociation des valeurs propres n'arrive que pour des fréquences propres multiples de  $\Omega/2$ .

L'exemple qui suit permet d'illustrer ce phénomène.

*Exemple : Résonance paramétrique d'une pale articulée en battement*

Ici, une pale animée d'un mouvement de battement modélisée par unique mode rigide est considérée. Les effets d'amortissements aérodynamiques sont négligés de façon à mieux faire apparaître les zones d'instabilité. Il ne reste alors que les effets des matrices structurelles et de la matrice de raideur aérodynamique apportant le caractère périodique du système.

La figure illustre la limite de stabilité pour des variations de fréquence propre de battement dans le vide et de vitesse d'avancement. Ces dernières sont volontairement sans communes mesures avec celles rencontrées par un hélicoptère en vol. L'objectif est de montrer que, même pour un système à un unique degrés de liberté, et donc sans possibilité de couplages, des instabilités simplement liées au caractère périodique du système peuvent apparaître.

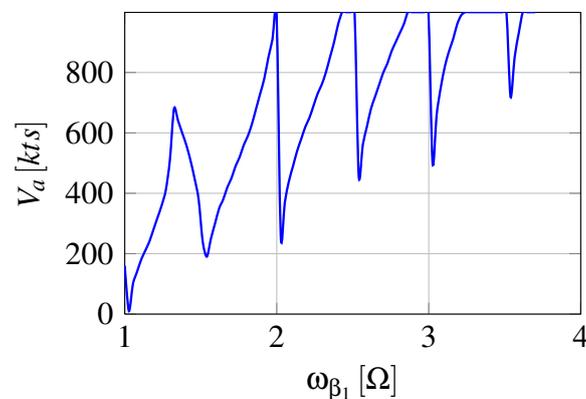


FIGURE A.2: Frontière de stabilité d'un mode de battement non amorti

La zone située au dessus de la courbe correspond à la zone instable sujette aux résonances paramétriques. Des chutes de la frontière de stabilité apparaissent pour des fréquences propres de battement proche des multiples de  $\Omega/2$ . En pratique, le mode de battement étant proche de  $1\Omega$ , la zone d'instabilité correspondante sur cette figure apparaît pour une vitesse d'avancement très faible. Cependant, c'est sans compter sur l'amortissement de ce mode, proche de 50%, et qui vient repousser les frontières de stabilité à des vitesses d'avancement bien plus élevées et non rencontrées sur hélicoptère.

### 3 Réponse des systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques

#### 3.1 Résolution des systèmes à coefficients périodiques

La réponse forcée en régime établi des systèmes linéaires à coefficients périodiques peut être obtenue par une intégration temporelle de type Runge Kutta. Néanmoins, le nombre de période

nécessaires à l'obtention du régime établi étant fortement dépendant du choix des conditions initiales, il peut s'avérer couteux en terme de temps de calcul d'utiliser cette méthode.

Une alternative consiste à tirer profit de la propriété A.29. Cependant, même si le gain en temps de calcul est important, la question du nombre de période à considérer pour atteindre le régime établi, pour des conditions initiales données, reste posée.

Les travaux réalisés par Wereley sur l'analyse et le contrôle des systèmes linéaires à coefficients périodiques apporte les outils nécessaires à leur résolution sans avoir affaire aux méthodes précédentes [Wer91].

Le système forcé prend la forme :

$$\underline{M}.\underline{\ddot{q}} + \underline{C}(t).\underline{\dot{q}} + \underline{K}(t).\underline{q} = \underline{F}$$

Sa réponse est obtenue via le formalisme des systèmes d'état :

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}(t).\underline{x}(t) + \underline{B}.\underline{U}(t)$$

avec :

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{I}_d & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{M}^{-1}.\underline{F} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$$

On définit ensuite :

$$\underline{\bar{B}} = \underline{P}(t)^{-1}.\underline{B}$$

$\underline{P}(t)$  étant déduit de l'équation A.10 :

$$\underline{P}(t) = \underline{\phi}(t, 0).e^{-\underline{\beta}t}$$

Puis les coefficients de Fourier associés :

$$\underline{\bar{B}}_h = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{\bar{B}}(t).e^{-ih\Omega t}.dt \quad \text{et} \quad \underline{U}_h = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{U}(t).e^{-ih\Omega t}.dt$$

Wereley démontre que la réponse en régime établi du système précédent vaut :

$$\underline{x}(t) = \underline{P}(t).\sum_l \sum_m \left( s_l \underline{I}_d - \underline{\beta} \right)^{-1} .\underline{\bar{B}}_{l-m}.\underline{U}_m.e^{s_l t} \quad (\text{A.31})$$

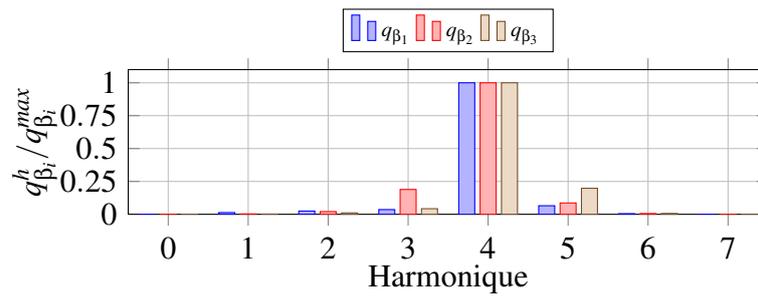
avec :

$$s_l = il\Omega$$

### 3.2 Réponse forcée d'un système à coefficients périodiques

Le modèle linéaire présenté précédemment est limité à trois modes de battement dans un écoulement à 150 nœuds. Ces modes sont sollicités par un effort aérodynamique externe à une fréquence de  $4\Omega$ . La relation A.31 est ensuite utilisée pour déterminer leurs réponses.

La figure A.3 représente les participations modales par harmonique des modes de battement. Elles sont normées pour chacun des modes par rapport à l'harmonique de plus grande amplitude,



**FIGURE A.3:** Participations modales harmoniques normées par mode

ici, l'harmonique 4 puisqu'ils sont forcés sur cette dernière.

Les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> modes de battement présentent des réponses non négligeables respectivement sur les harmoniques 3 et 5. Cela provient du caractère périodique du système qui réinjecte des excitations dites "paramétriques" liée aux mouvements de la pale, et situées à des harmoniques différentes de celles du second membre.



Le modèle complet d'hélicoptère fait appel à un sous modèle de pale, dont la description est faite ci-dessous.

## 1 Pale Rigide

Le modèle de pale rigide de HOST considère une pale indéformable articulée en trainée, battement et pas. Les centres de ces articulations peuvent ne pas être confondus, la pale est alors modélisée sous la forme de trois tronçons rigides distincts. La résolution de l'équilibre dynamique de la pale permet de déterminer l'évolution de ces angles en fonction de l'azimuth.

La figure B.1 illustre le modèle par segments finis dans le cas générique constitué de plusieurs tronçons rigides.

L'état cinématique de chaque tronçon est décrit par :

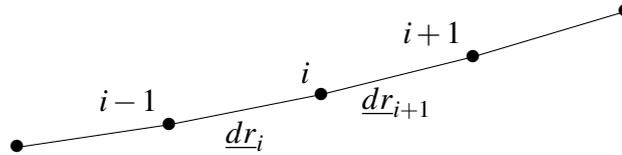


FIGURE B.1: Modèle générique de segments finis

$$\begin{cases} \underline{V}_{i+1} = \underline{V}_i + \underline{\Omega}_i \wedge \underline{dr}_{i+1} \\ \underline{\Omega}_{i+1} = \underline{\Omega}_i + \underline{\omega}_{i+1} \\ \underline{\Gamma}_{i+1} = \underline{\Gamma}_i + \underline{\dot{\Omega}}_i \wedge \underline{dr}_{i+1} + \underline{\Omega}_i \wedge [\underline{\Omega}_i \wedge \underline{dr}_{i+1}] \\ \underline{\dot{\Omega}}_{i+1} = \underline{\dot{\Omega}}_i + \underline{\dot{\omega}}_{i+1} + \underline{\Omega}_i \wedge \underline{\omega}_{i+1} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$\underline{V}_i$ ,  $\underline{\Omega}_i$ ,  $\underline{dr}_{i+1}$  représentent respectivement la vitesse à l'articulation  $i$ , la vitesse de rotation du tronçon et la position de l'articulation  $i+1$  par rapport à l'articulation  $i$ .  $\underline{\omega}_{i+1}$  traduit la différence de vitesse de rotation entre les deux tronçons et  $\underline{\Gamma}_i$  l'accélération de l'articulation  $i$ .

A partir de l'état cinématique de chaque tronçon il est possible de déterminer les efforts et moments inertiels au niveau de chaque articulation :

$$\begin{cases} \underline{dF}_i^{Inert} = m_i \underline{\Gamma}_i + \underline{\dot{\Omega}}_i \wedge \underline{M}_i^s + \underline{\Omega}_i \wedge [\underline{\Omega}_i \wedge \underline{M}_i^s] \\ \underline{dM}_i^{Inert} = \underline{I}_i \cdot \underline{\dot{\Omega}}_i + \underline{\Omega}_i \wedge [\underline{I}_i \cdot \underline{\Omega}_i] + \underline{M}_i^s \wedge \underline{\Gamma}_i \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$m_i$ ,  $\underline{M}_i^s$  et  $\underline{I}_i$  représentent respectivement la masse, le moment statique et la matrice d'inertie autour de l'articulation  $i$  du tronçon.

$$\begin{cases} \underline{F}_{i+1}^{Inert} = \underline{F}_i^{Inert} + d\underline{F}_i^{Inert} \\ \underline{M}_{i+1}^{Inert} = \underline{M}_i^{Inert} + d\underline{M}_i^{Inert} + dr_{i+1} \wedge \underline{F}_{i+1}^{Inert} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

La pale rigide est ensuite équilibrée en résolvant le théorème du moment dynamique autour de chaque articulation. Celles-ci sont parfois confondues ce qui revient à considérer une seule articulation.

La méthode de Newton-Euler récursif est ainsi utilisé pour aboutir à la solution.

## 2 Pale Souple

Le modèle de pale souple de HOST est basée sur une approche multicorps reprenant la démarche présentée pour le cas de la pale rigide. La pale est supposée constituée d'une multitude de tronçons rigides (Finite Segment Method), reliés les uns aux autres via des liaisons rotules. Celles-ci permettent à chaque segment de s'orienter successivement en trainée, battement puis torsion, suivant les angles d'Euler. D'autre part, chaque liaison rotule présente une raideur suivant chacun de ces axes de façon à traduire le comportement élastique de la pale. Celui-ci est supposé répondre aux hypothèse de Bernoulli, comme quoi chaque section droite reste droite et chaque section initialement perpendiculaire à la fibre neutre le reste au cours de la déformation.

Le calcul de l'énergie de déformation de la pale est réalisée à partir de raideurs d'articulations équivalentes, traduisant les raideurs en flexion dans le plan, en flexion hors plan et en torsion :

$$\begin{cases} E_{E_i} = \frac{1}{2}K_i^\theta \xi_i^2 + \frac{1}{2}K_i^\beta \xi_i^2 + \frac{1}{2}K_i^\delta \xi_i^2 \\ K_i^\theta = G_i J_i / l_i, K_i^\beta = E_i I_{B_i} / l_i, K_i^\delta = E_i I_{T_i} / l_i \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$\xi_i^x, \xi_i^y, \xi_i^z$  représentent les courbures respectivement en torsion, battement et trainée. Elles correspondent à la différence d'angles entre les tronçons  $i$  et  $i+1$  ramenée sur la longueur du tronçon.  $E_i, G_i, I_{B_i}, I_{T_i}$  et  $J_i$  correspondent respectivement au module d'Young, au module de cisaillement, au moment quadratique de battement, de trainée et de torsion du tronçon  $i$ .

La reconstruction géométrique de la position de la pale étant basée sur les angles au niveau des différentes articulations et de façon à améliorer la modélisation [Sha97], une méthode de superposition modale est utilisée sur ces angles. Une base modale est préalablement calculée et chaque angle est supposée être une combinaison linéaire d'angles modaux pondérés par des participations modales :

$$\begin{cases} \theta_i^y = -\sum \phi_\beta^{j'}(r_i) q_\beta^j \\ \theta_i^z = \sum \phi_\delta^{j'}(r_i) q_\delta^j \\ \theta_i^x = \sum \phi_\theta^j(r_i) q_\theta^j \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Cette approche permet de résoudre le comportement dynamique de la pale non plus à partir des degrés de liberté physiques (angle à chaque articulation) mais à partir des participations modales. De plus, en tronquant la base de déformation de façon à ne considérer que les modes situés dans

la plage fréquentielle d'intérêt, cela permet de réduire le nombre de degrés de liberté du système et donc le temps de calcul. Une fois cette hypothèse cinématique émise, le calcul de l'énergie cinétique est réalisée :

$$E_{C_i} = \frac{1}{2} m_i \underline{V}_{i,M}^2 + \frac{1}{2} \underline{\Omega} \cdot \left[ \underline{I}_{\underline{M}} \cdot \underline{\Omega}_i \right] + \underline{V}_{i,M} \cdot \left[ \underline{\Omega}_i \wedge \underline{M}_{i,M}^s \right] \quad (\text{B.6})$$

La méthode de lagrange est ensuite utilisée de façon à calculer la réponse dynamique de la pale déformable.



# C Compléments sur FiSUW

Les fonctions de forme radiale correspondant au polynôme de Legendre de première espèce prennent la forme :

$$\frac{P_n^m(\mathbf{v})}{\mathbf{v}} = \sqrt{(2n+1)H_n^m} \sum_{q=m, m+2, \dots}^{n-1} r^q \frac{(-1)^{\frac{q-m}{2}} (n+q)!!}{(q-m)!!(q+m)!!(n-q-1)!!}$$

avec  $H_n^m$  :

$$H_n^m = \frac{(n+m-1)!!(n-m-1)!!}{(n+m)!!(n-m)!!}$$

L'opérateur double factoriel vaut :

$$\begin{cases} n!! = n(n-2)(n-4) \dots 2 \text{ avec } n \text{ pair} \\ n!! = n(n-2)(n-4) \dots 1 \text{ avec } n \text{ impair} \\ 0!! = 1!! = 1 \end{cases}$$

et :

$$\mathbf{v} = \sqrt{1 - \tilde{r}^2}$$

Les matrices de gains valent :

$$\begin{cases} \underline{\underline{L_{0m}^{jn}}} = X^m \cdot \Gamma_{jn}^{0m} \\ \underline{\underline{L_{rm}^{jn}}} = (X^{m-r} + (-1)^h \cdot X^{m+r}) \cdot \Gamma_{jn}^{rm} \\ \underline{\underline{L_{rm}^{jn}}} = (X^{m-r} - (-1)^h \cdot X^{m+r}) \cdot \Gamma_{jn}^{rm} \end{cases}$$

avec :

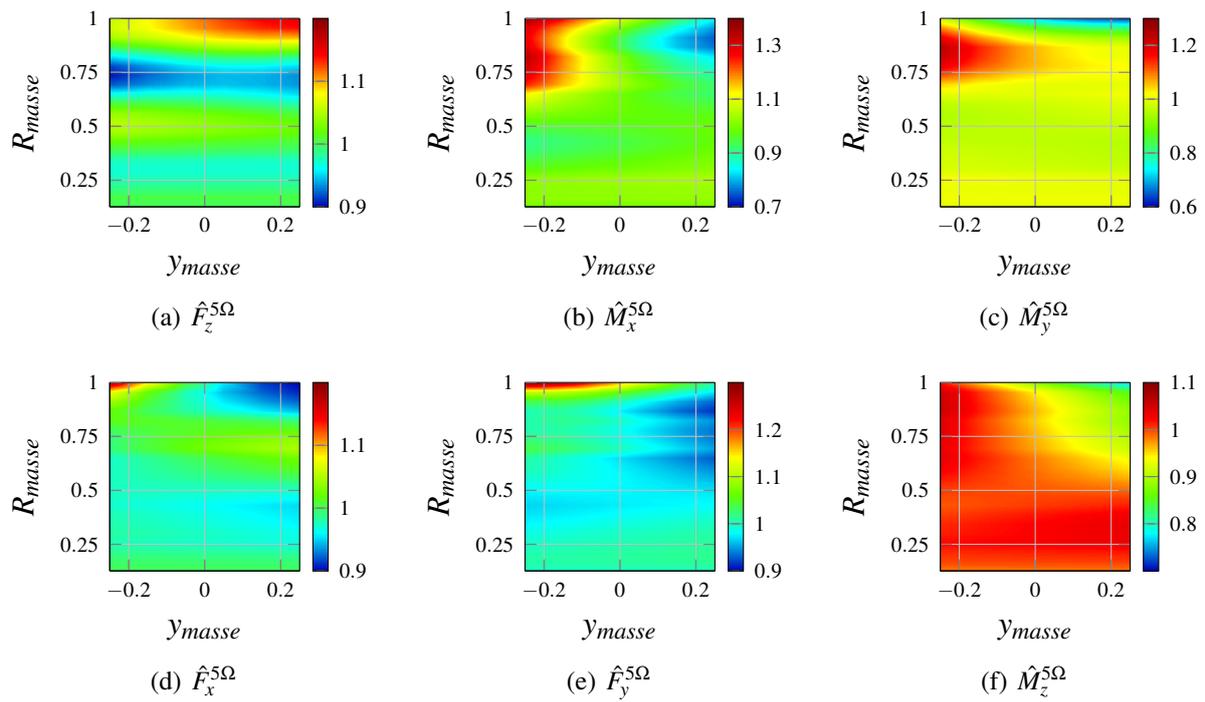
$$X = \tan \left| \frac{\chi}{2} \right| \quad \text{et} \quad h = \min(r, m) \quad (\text{C.1})$$

et :

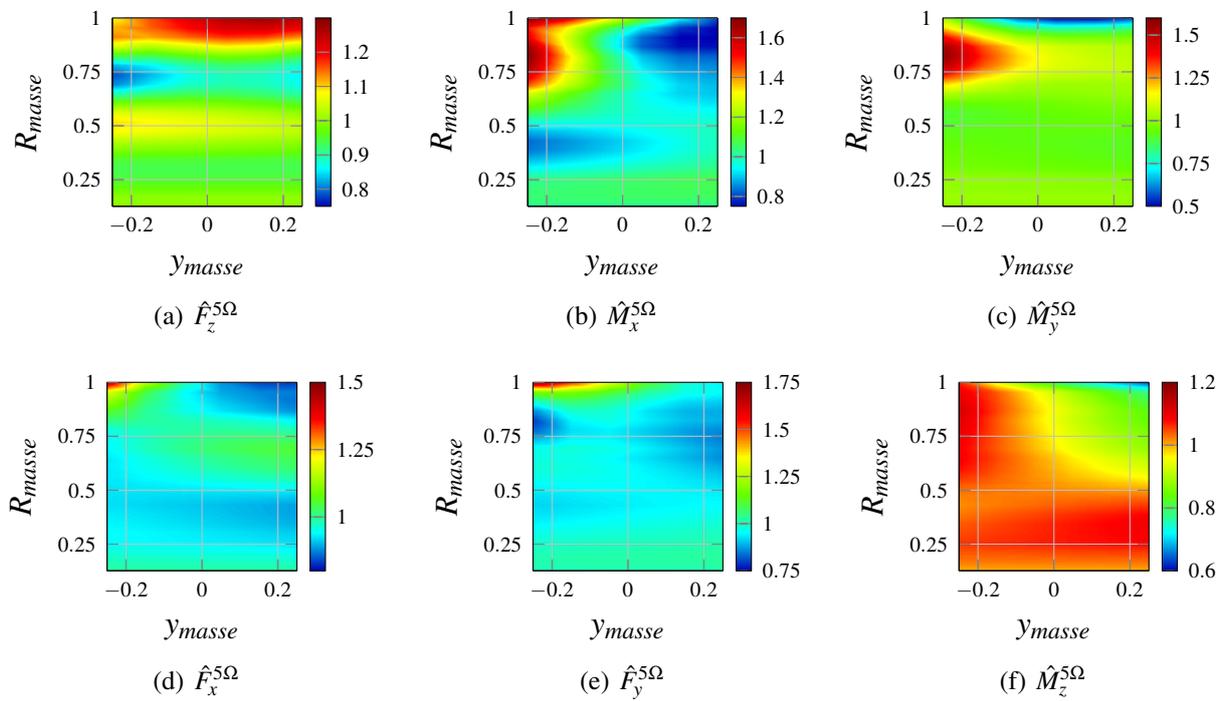
$$\begin{cases} \Gamma_{jn}^{rm} = \frac{(-1)^{\frac{n+j-2r}{2}} 4 \sqrt{(2n+1)(2j+1)}}{\pi(j+n)(j+n+2)((j-n)^2-1)} \quad \text{avec } r+m \text{ pair} \\ \Gamma_{jn}^{rm} = \frac{\text{sign}(r-m)}{\sqrt{(2n+1)(2j+1)}} \quad \text{avec } r+m \text{ impair et } j = n \pm 1 \\ \Gamma_{jn}^{rm} = 0 \quad \text{avec } r+m \text{ impair et } j \neq n \pm 1 \end{cases}$$



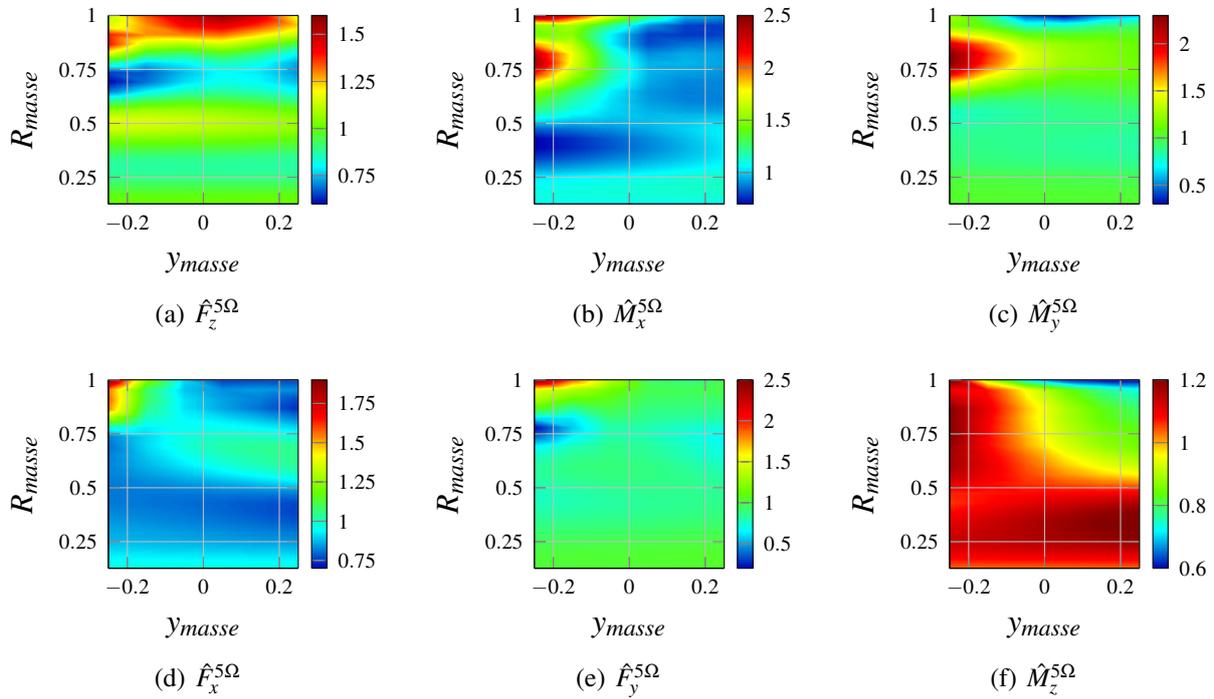
## Compléments sur la masse ponctuelle déportée



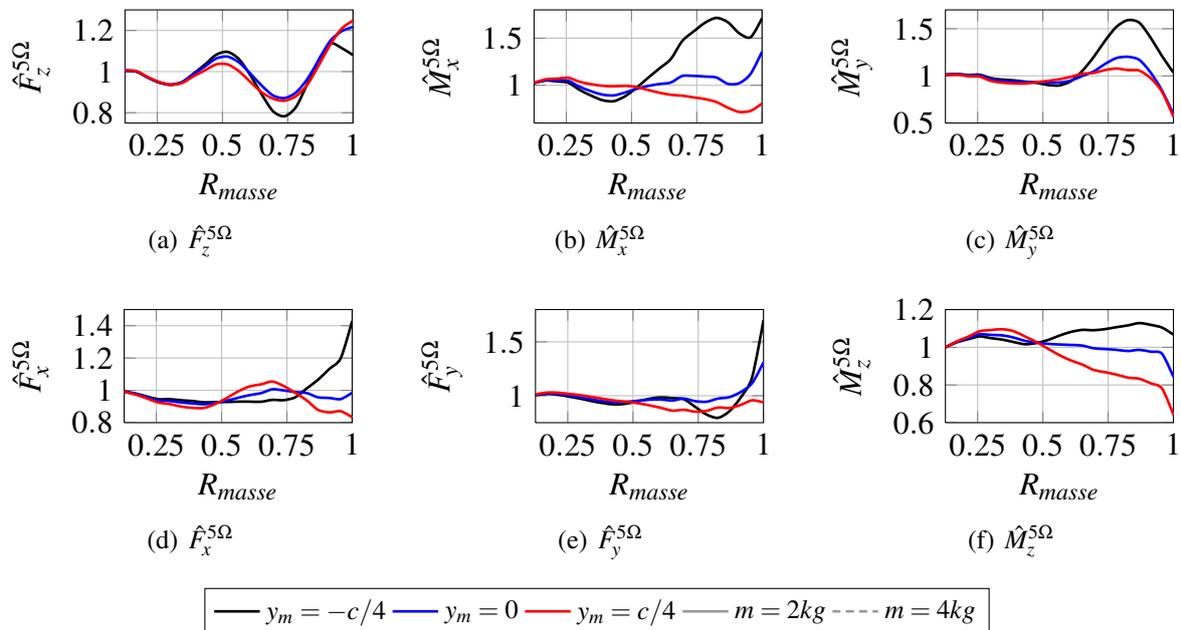
**FIGURE D.1:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 1kg



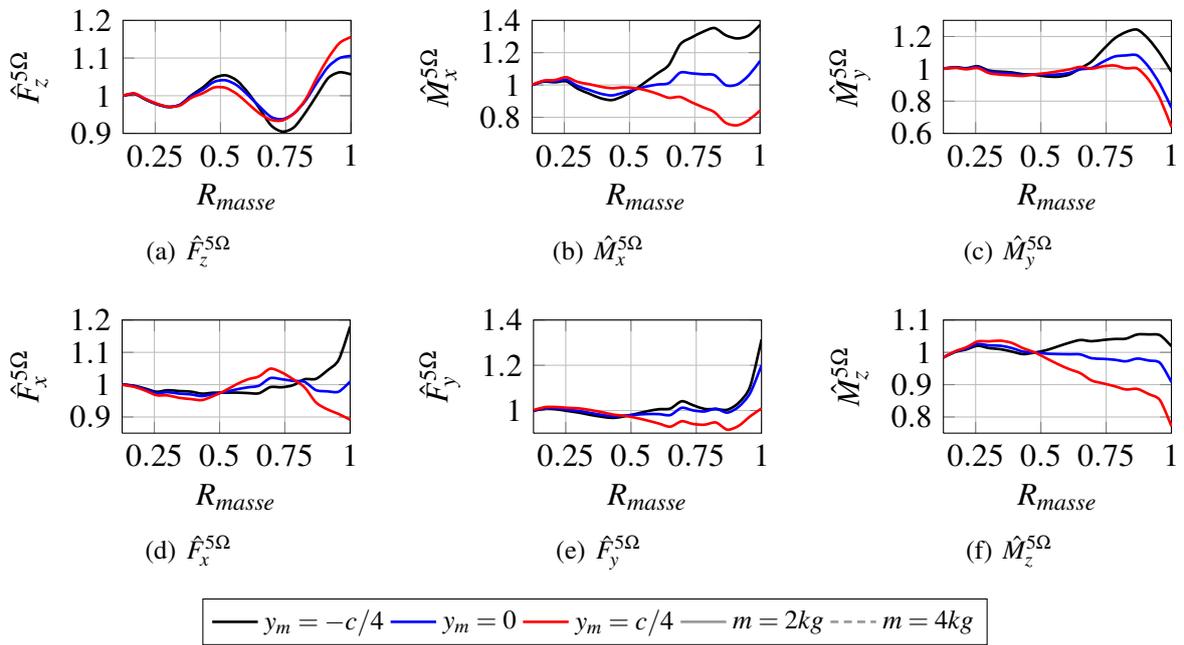
**FIGURE D.2:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 2kg



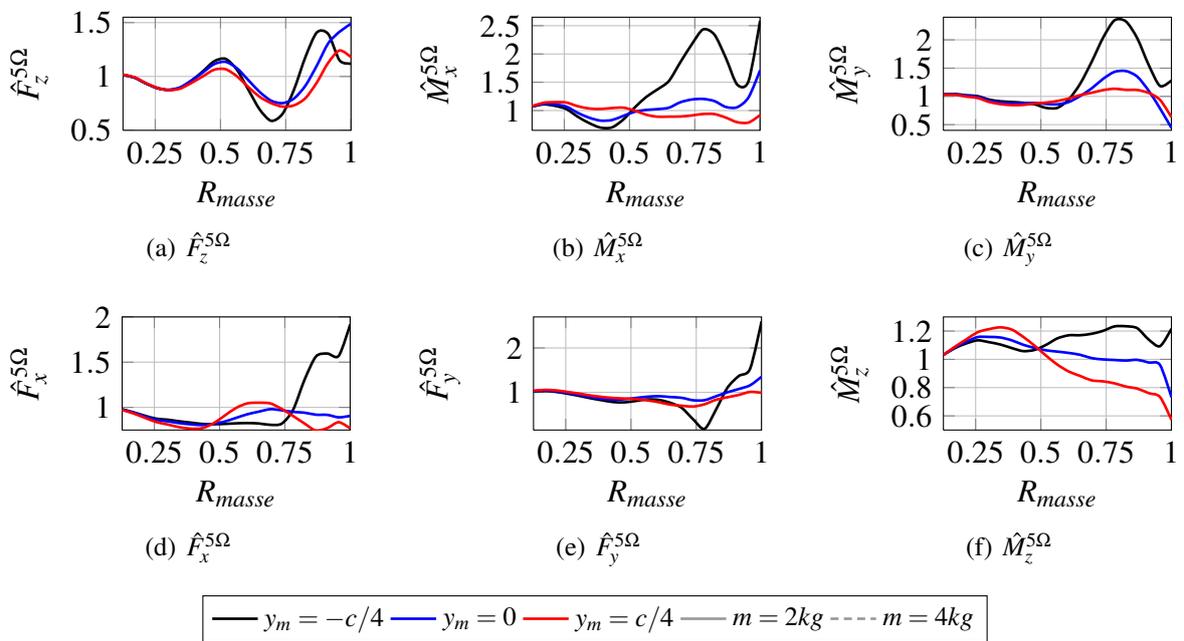
**FIGURE D.3:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction du positionnement en corde et en rayon de la masse ponctuelle de 4kg



**FIGURE D.4:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la position radiale de la masse ponctuelle pour trois valeurs distinctes de déport



**FIGURE D.5:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la position radiale de la masse ponctuelle de 1kg pour trois valeurs distinctes de déport



**FIGURE D.6:** Evolution des composantes normalisées du torseur tête rotor en fonction de la position radiale de la masse ponctuelle de 4kg pour trois valeurs distinctes de déport

---

# Bibliographie

- [ABB01] G. Done A.R.S Bramwell and D. Balmford. *Bramwell's Helicopter Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2001.
- [Bas99] P-M. Basset. Implementation in host of an adaptable finite state dynamic rotor inflow model. Technical report, ONERA, 1999.
- [BG93] O. A. Bauchau and D. Guernsey. On the choice of appropriate bases for nonlinear dynamic modal analysis. *Journal of the American Helicopter Society*, 1993.
- [BH00] P-M. Basset and M. Hamers. Application of the finite state unsteady wake model in helicopter flight dynamic simulation. In *26th European Rotorcraft Forum, 26-29 September, Netherlands Congress Centre, The Hague, The Netherlands*, page 16, 2000.
- [BHPH01] P-M. Basset, O. Heuze, J.V.R. Prasad, and M. Hamers. Finite state rotor induced flow model for interferences and ground effect. In *American Helicopter Society 57th Annual Forum, Washington, DC, May 9-11, 2001*.
- [Bie06] R.L. Bielawa. *Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [BMC14] L. Bernard, G. Michon, and B. Castanie. Rapport d'activité de thèse CIFRE : Etude des couplages flexion/torsion dans les pales d'hélicoptère. Technical report, Airbus Helicopters, 2014.
- [Bou99] W. G. Bousman. Putting the aero back into aeroelasticity. In *Eight ARO Workshop on Aeroelasticity of Rotorcraft Systems, University Park, PA, October 18-20, 1999*.
- [Bri09] A. Brindejone. *Etude d'un rotor d'hélicoptère sans plateau cyclique avec des servo-paddles actives*. PhD thesis, Arts et Métiers, 2009.
- [BS] J-J. Barrau and M. Sudre. Détermination du tenseur complet des contraintes dans des poutres composites. Technical report, Université de Toulouse.
- [CA08] P. Cranga and P-A. Aubourg. Recent advances in eurocopter's passive and active vibration control. In *American Helicopter Society 64th Annual Forum, Montréal, Canada, April 29 - May 1*, page 18, 2008.
- [Cel99] R. Celi. Recent applications of design optimization to rotorcraft - a survey. *Journal of Aircraft*, 36 :176–190, 1999. University of Maryland.
- [Che89] R. T. N. Chen. A survey of nonuniform inflow models for rotorcraft flight dynamics and control applications. Technical report, NASA, 1989.
- [CNBB04] I. Chopra, V.T. Nagaraj, J. Bao, and A. P.F. Bernhard. Wind tunnel testing of low vibration mach scale rotor with composite tailored blades. In *American Helicopter Society 58th Annual Forum, Baltimore, MD, June 8-10, 2004*.

- [Con95] A. T. Conlisk. Modern helicopter aerodynamics. Technical report, Department of Mechanical Engineering, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1995.
- [Con01] A.T. Conlisk. Modern helicopter rotor aerodynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, 37 :419–476, 2001.
- [Cra05] P. Cranga. *Comportement Dynamique de l'Hélicoptère - Contribution à la Définition de l'Architecture Générale*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2005. 194p., 05 ISAL 0046.
- [Cri97] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures, vol. 2*. Wiley, 1997.
- [Dat04] A. Datta. *Fundamental Understanding, Prediction and Validation of Rotor Vibratory Loads In Steady Level Flight*. PhD thesis, University of Maryland, 2004.
- [DH74] E.H. Dowell D.H. Hodges. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blade. Technical report, NASA, 1974.
- [DNC07] A. Datta, M. Nixon, and I. Chopra. Review of rotor loads prediction with the emergence of rotorcraft cfd. *Journal of the American Helicopter Society*, 52(4) :287–317, 2007.
- [FB01] P. P. Friedmann and F-X. Bagnoud. Rotary-wing aeroelasticity - current status and future trends. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, page 30, 2001.
- [Flo83] G. Floquet. *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*. Gauthier-Villars, 1883.
- [Flo00] M. W. Floros. *Elastically tailored composite rotor blades for stall alleviation and vibration reduction*. PhD thesis, The Pennsylvania State University, 2000.
- [Gan02] R. Ganguli. Optimum design of a helicopter rotor for low vibration using aeroelastic analysis and response surface methods. *Journal of Sound and Vibration*, 258 :327–344, 2002.
- [Gay05] D. Gay. *Matériaux Composites*. Hermès, 2005.
- [GBRR11] G.Lebel, B.Benoit, R.Dufour, and G.Jacquet Richardet. Aerodynamic and dynamic models for rotor load prediction, application to new generation blades. In *American Helicopter Society, 67th Annual Forum, Virginia Beach, VA, May 3-5, 2011*.
- [GC93] R. Ganguli and I. Chopra. Aeroelastic optimization of a helicopter rotor with composite tailoring. In *American Helicopter Society 49th Annual Forum*, 1993.
- [GC96a] R. Ganguli and I. Chopra. Aeroelastic optimization of a helicopter rotor to reduce vibration and dynamic stresses. *Journal of Aircraft*, 33 :808–815, 1996.
- [GC96b] R. Ganguli and I. Chopra. Aeroelastic optimization of a helicopter rotor with two-cell composite blades. *AIAA Journal*, Vol.34, No.4 :835–841, 1996.
- [GC96c] R. Ganguli and I. Chopra. Aeroelastic optimization of an advanced geometry helicopter rotor. *Journal of the American Helicopter Society*, 41(1) :18–28, 1996.

- [GC97] R. Ganguli and I. Chopra. Aeroelastic tailoring of composite couplings and blade geometry of a helicopter rotor using optimization methods. *Journal of the American Helicopter Society*, 42(3) :218–228, 1997.
- [GFL08] B. Glaz, P. Friedmann, and L. Liu. Surrogate based optimization of helicopter rotor blades for vibration reduction in forward flight. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 35 :341–363, 2008.
- [GFL09] B. Glaz, P. P. Friedmann, and L. Liu. Helicopter vibration reduction throughout the entire flight envelope using surrogate-based optimization. *Journal of the American Helicopter Society*, 54(1), 2009.
- [Gla26] H. Glauert. A general theory of the autogyro. *R&M ,British A.R.C*, No. 1111, 1926.
- [Gla08] B. Glaz. *Active Passive Optimization of Helicopter Rotor Blades for Improved Vibration, Noise, and Performance Characteristics*. PhD thesis, University of Michigan, 2008.
- [GV04] R. Ganguli and S. R. Viswamurth. An optimization approach to vibration reduction in helicopter rotors with multiple active trailing edge flaps. *Aerospace Science and Technology*, 8 :185–194, 2004.
- [HB57] Houbolt and Brooks. Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending and torsion of twisted non uniform rotor blades. Technical report, Langley Aeronautical Laboratory, 1957.
- [HSH08] R. Harrison, S. Stacey, and B. Hansford. BERP IV The design, development and testing of an advanced rotor blade. In *American Helicopter Society 64th Annual Forum, Montréal, Canada, April 29 May 1*, 2008.
- [Joh94] W. Johnson. *Helicopter theory*. Dover books on physics. Dover Publications, 1994.
- [LC89] J. W. Lim and I. Chopra. Aeroelastic optimization of a helicopter rotor. *Journal of the American Helicopter Society*, 34(1) :52–62, 1989.
- [Leb12] G. Lebel. *Prévision des charges aéromécaniques des rotors d’hélicoptère - Application aux pales à doubles flèches*. PhD thesis, INSA Lyon, 2012.
- [Lei06] J.G. Leishman. *Principles of Helicopter Aerodynamics*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, 2006.
- [LF98] M. Lalanne and G. Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*. Rotordynamics prediction in engineering. John Wiley, 1998.
- [LNW<sup>+</sup>92] R. C. Lake, M.W. Nixon, M. L. Wilbur, J. D. Singleton, and P.H. Mirick. A demonstration of passive blade twist control using extension twist coupling. Technical report, NASA, 1992.
- [LV09] V. Laxman and C. Venkatesan. Influence of dynamic stall and dynamic wake effects on helicopter trim and rotor loads. *Journal of the American Helicopter Society*, 54(3), 2009.

- [MC08] C. A. Malpica and R. Celi. *Contributions to the Dynamics of Helicopters with Active Rotor Control*. PhD thesis, University of Maryland, 2008.
- [MG11] R. Mohan and G. H. Gaonkar. Mode identification by floquet-eigenvector and approximate methods including comparisons with aeromechanical stability measurements. In *American Helicopter Society 67th Annual Forum*, 2011.
- [MI95] J. Milgram and I. Chopra. Helicopter vibration reduction with trailing edge flaps. In *36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 1995.
- [Nix93] M. W. Nixon. *Aeroelastic response and stability of tiltrotors with elastically-coupled composite rotor blades*. PhD thesis, University of Maryland, 1993.
- [NPCP99] M. W. Nixon, D. J. Piatak, L. M. Corso, and D. A. Popelka. Aeroelastic tailoring for stability augmentation and performance enhancements of tiltrotor aircraft. In *CEAS / AIAA / ICASE / NASA LaRC International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, June 22-25*, page 18, 1999.
- [PBH89] D. A. Peters, D. D. Boyd, and C. J. He. Finite-state induced-flow model for rotors in hover and forward flight. *Journal of the American Helicopter Society*, 34(4) :5–17, 1989.
- [Pet82] D.A. Peters. On the adequacy of modeling dynamic inflow for helicopter flap-lag stability. In *8th European Rotorcraft Forum, Aix en Provence*, 1982.
- [PH91] D. A. Peters and C. J. He. Correlation of measured induced velocities with a finite state wake model. In *45th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Boston, Massachusetts*, volume 36, page 12, 1991.
- [Pia97] D. J. Piatak. Stiffness characteristics of composite rotor blades with elastic coupling. Technical report, NASA, 1997.
- [PL11] D. A. Peters and S. M. Lieb. Significance of floquet eigenvalues and eigenvectors for the dynamics of time-varying systems. *American Helicopter Society 67th Annual Forum*, 2011.
- [PP81] D.M. Pitt and D.A. Peters. Theoretical prediction of dynamic-inflow derivatives. *In Vertica*, 15 :21–34, 1981.
- [PR11] P. Cranga A. Baud J-F. Hirsch A. Walter et P. Beaumier P. Rauch, M. Gervais. Blue edge : The design, development and testing of a new blade concept. 2011.
- [RB81] Jr R.H. Blackwell. Blade design for reduced helicopter vibration. In *American Helicopter Society*, 1981.
- [Sa88] D. P. Schrage and al. Helicopter stability and control modeling improvements and verification on two helicopters. In *14th European Rotorcraft Forum, Milano, Italy*, 1988.
- [San11] L. Sanches. *Résonance sol des hélicoptères : modélisation dynamique, analyse paramétrique de la robustesse et validation expérimentale*. PhD thesis, ISAE, 2011.

- [SC93] E. C. Smith and I. Chopra. Aeroelastic response, loads and stability of a composite rotor in forward flight. *AIAA Journal* No.7, 31 :1265–1274, 1993.
- [SG09] S. Moffatt and N. Griffiths. Structural optimisation and aero-elastic tailoring of the berp iv demonstrator blade. In *American Helicopter Society 65th Annual Forum, Grapevine, Texas, May 27-29, 2009*.
- [Sha97] A. A. Shabana. Flexible multibody dynamics review of past and recent developments. *Multibody System Dynamics*, 1 :189–222, 1997.
- [Sha08] A. A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, 2008.
- [Sk111] Y. Skladanek. *Formulation d'un Élément Fini de Poutre pour la Dynamique des Pales d'Hélicoptère de Géométrie Complexe*. PhD thesis, INSA Lyon, 2011.
- [TAFV96] F. Toulmay, G. Arnaud, D. Falchero, and V. Villat. Analytical prediction of the rotor dynamics for advanced geometry blades. In *American Helicopter Society 52nd Annual Forum, Washington, D.C., June 4-6, 1996*.
- [TC91] M. S. Torok and I. Chopra. Rotor loads prediction utilizing a coupled aeroelastic analysis with refined aerodynamic modeling. *Journal of the American Helicopter Society*, 36(1) :58–67, 1991.
- [The35] T. Theodorsen. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. Technical report, NACA, 1935.
- [Ver94] O. Verlinden. *Simulation du Comportement Dynamique de Système Multicorps Flexibles Comportant des Membrures de Formes Complexes*. PhD thesis, Faculté Polytechnique de Mons, 1994.
- [Wer91] N. M. Wereley. *Analysis and Control of Linear Periodically Time Varying Systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1991.
- [Wil91] M. L. Wilbur. Experimental investigation of helicopter vibration reduction using rotor blade aeroelastic tailoring. In *47th Annual Forum of the American Helicopter Society, Phoenix, Arizona, 1991*.
- [WMWTY<sup>+</sup>02] M. L. Wilbur, P. H. Mirick, Jr. W. T. Yeager, C. W. Langston, C. E. S. Cesnik, and S. Shin. Vibratory loads reduction testing of the nasa/army/mit active twist rotor. *Journal of the American Helicopter Society*, 47(2) :123–133, 2002.
- [WN03] T. M. Wasfy and A. K. Noor. Computational strategies for flexible multibody systems. *Applied Mechanics*, 56 :553–613, 2003.
- [YF98] K. A. Yuan and P. P. Friedmann. Structural optimization for vibratory loads reduction of composite helicopter rotor blades with advanced geometry tips. *Journal of the American Helicopter Society*, 43 :246–256, 1998.
- [YJ91] D. K. Young and F. J. Tarzanin Jr. Structural optimization and mach scale test validation of a low vibration rotor. In *47th Annual Forum of the American Helicopter Society, Phoenix, Arizona, 1991*.