

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Elodie DURAFFOURG**

le jeudi 11 décembre 2014

**Titre :**

Commande non linéaire en présence de modes souples  
Applications aérospatiales

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

EDSYS : Automatique

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE-ONERA CSDV

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Tarek AHMED-ALI (directeur de thèse)

M. Laurent BURLION (co-directeur de thèse)

**Jury :**

Mme Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE, Directrice de recherche - Présidente du jury

M. Rachid OUTBIB, Professeur des Universités - Rapporteur

M. Nicolai CHRISTOV, Professeur des Universités - Rapporteur

M. Salah LAGHROUCHE, Maître de conférences - Examineur

M. Laurent BURLION, Ingénieur de recherche - Co-Directeur de thèse

M. Tarek AHMED-ALI, Professeur des Universités - Directeur de thèse



## Remerciements

Après ces trois années, il est temps de jeter un oeil en arrière et de se rendre compte que l'aboutissement d'une thèse est loin de n'être qu'une réussite personnelle et individuelle. Que ce soit par leur implication scientifique ou humaine dans les travaux de recherche, ou tout simplement par leur présence et leur soutien, de nombreuses personnes méritent d'être remerciées.

L'ensemble des membres du jury, tout d'abord, pour avoir accepté et pris le temps de relire, évaluer et commenter ces travaux : Rachid Outbib et Nicolai Christov, rapporteurs, Salah Laghouche, examinateur et Françoise Lamnabhi-Lagarrigue présidente du jury.

Viennent ensuite mes directeurs de thèse, Laurent Burlion et Tarek Ahmed-Ali, sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour, mais surtout pour le temps qu'ils ont consacré à ces travaux, pour leurs précieux conseils scientifiques et leur soutien.

Je remercie également l'ONERA pour le support financier et les moyens mis à ma disposition, ainsi que l'ensemble du personnel du DCSD que j'ai côtoyé à Toulouse.

Un grand merci, de plus à tous les doctorants et stagiaires que j'ai rencontrés ou croisés à l'ONERA, pour la bonne ambiance et les échanges scientifiques, politiques, culturels, sportifs ou autres (sur la prononciation de certains mots en «o» par exemple) et dont je garde de nombreux et bons souvenirs. Un clin d'oeil particulier à Razvan, Emmanuel et Jean-Philippe qui ont réchauffé (au propre comme au figuré) le bureau que nous avons partagé ;-)

Je souhaite enfin associer Benjamin Carpentier à ces remerciements, qui m'a fait découvrir l'application lanceur.

Je n'oublie pas non plus tous les enseignants qui ont joué un rôle important, tout au long de mon parcours scolaire et universitaire.

Plus personnellement, je tiens à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont participé à l'aboutissement de ces travaux et au bon déroulement de ces trois années.

Je pense bien sûr à ma famille, et en particulier à mes parents, qui m'ont toujours encouragée et

---

soutenue dans mes choix et projets. C'est aussi grâce à vous ! J'ai une pensée particulière pour mon grand père qui, je pense, serait heureux et fier de ce parcours.

Un mot ensuite pour mes amis : Perrine, Elodie (Dudu), Marion et Jérôme, Anne So (Cuicui) et Alicia, qui me supportent depuis le lycée ;- ) mais aussi Marie (ma coeurette :-)), Sébastien, François, Amélie et Ludo, qui ont toujours été présents malgré l'éloignement géographique.

Un grand merci aussi au groupe de course à pied « les Nonottes » pour les rires, les discussions et les instants de décompression qui ont accompagné les tours de piste, les côtes et les footings durant les entraînements « scientifiques ! ».

Une dernière pensée dans laquelle tu te reconnaîtras finalement. Merci d'avoir toujours été là pour moi, dans les bons comme dans les mauvais moments, et d'avoir su me soutenir et m'encourager.

## Publications

### Articles de conférences internationales

---

2012 - Elodie Duraffourg et Benjamin Carpentier - **Intérêt d'un retour en accélération transverse pour le pilotage d'un lanceur en vol atmosphérique**, *In Proc. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Grenoble*, pp. 799-804.

2013 - Elodie Duraffourg, Laurent Burlion, Tarek Ahmed-Ali et Françoise Lamnabhi-Lagarrigue **Nonlinear control of the longitudinal rotational dynamics of a flexible aircraft**, *In Proc. 12th European Control Conference, Zürich*, pp. 335-340.

2013 - Elodie Duraffourg, Laurent Burlion, Tarek Ahmed-Ali et Françoise Lamnabhi-Lagarrigue **Nonlinear full state control of a flexible hypersonic aircraft**, *in Proc. 11th IEEE International Workshop of Electronics, Control, Measurement, Signals and their application to Mechatronics, Toulouse*.

2013 - Elodie Duraffourg, Laurent Burlion, Tarek Ahmed-Ali - **Longitudinal modeling and preliminary control of a nonlinear flexible launch vehicle**, *In Proc. 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, Caen*, pp. 209-214.

2013 - Laurent Burlion, Elodie Duraffourg, Tarek Ahmed-Ali et Françoise Lamnabhi-Lagarrigue **Global asymptotic stabilization for some nonlinear models of flexible aerospace vehicles**, *In Proc. 52th Conference on Decision and Control, Florence*, pp. 4230-4235.

2014 - Elodie Duraffourg, Laurent Burlion, Tarek Ahmed-Ali et Françoise Lamnabhi-Lagarrigue **Adaptive finite-time observer for a nonlinear and flexible space launch vehicle**, *In Proc. 19th IFAC World Congress, Le Cap*, pp. 546-551.

---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Publications</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Table des notations</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 État de l'art . . . . .	3
1.1.1 Le problème du sous actionnement . . . . .	4
1.1.2 La commande par backstepping . . . . .	7
1.1.3 Le problème des modes souples . . . . .	10
1.1.4 Le problème des incertitudes paramétriques . . . . .	12
1.1.5 Bilan . . . . .	13
1.2 Contributions de la thèse . . . . .	14
1.2.1 Synthèse d'une loi de commande non linéaire améliorant l'amortissement d'un système aérospatial souple . . . . .	14
1.2.2 Développement d'une méthode d'observation des modes souples . . . . .	15
1.2.3 Synthèse d'observateurs adaptatifs de modes souples . . . . .	16
1.3 Organisation du mémoire . . . . .	17
<b>2 Mise en évidence d'une classe de systèmes et des objectifs de commande non linéaire</b>	<b>19</b>
2.1 Mise en évidence d'une classe théorique pour les systèmes aérospatiaux souples . .	19
2.1.1 Exemples de systèmes aérospatiaux . . . . .	20
2.1.2 Manipulations mathématiques . . . . .	22
2.1.3 Définition d'une classe de systèmes . . . . .	25
2.2 Analyse des objectifs de commande . . . . .	28
2.3 Conclusion . . . . .	30

---

<b>3</b>	<b>Synthèse d'une loi de commande non linéaire améliorant l'amortissement d'un système aérospatial souple</b>	<b>31</b>
3.1	Développement théorique de la loi de commande Backstepping Flexible . . . . .	31
3.1.1	Système considéré et objectifs . . . . .	32
3.1.2	Première approche : limiter l'impact du rigide sur la dynamique souple . . . . .	33
3.1.3	Deuxième approche : apporter de l'amortissement . . . . .	39
3.2	Application du Backstepping Flexible aux systèmes aérospatiaux souples . . . . .	42
3.2.1	Mise en évidence d'un sous-système appartenant à la classe $\Sigma_1$ . . . . .	42
3.2.2	Synthèse de la commande par la première approche . . . . .	44
3.2.3	Synthèse de la commande par la deuxième approche . . . . .	46
3.2.4	Synthèse d'une loi Backstepping classique . . . . .	47
3.3	Simulations numériques : exemple du lanceur et de l'avion hypersonique . . . . .	49
3.3.1	Cas du lanceur souple . . . . .	49
3.3.2	Cas de l'avion hypersonique . . . . .	53
3.4	Union avec un contrôleur local . . . . .	56
3.5	Conclusion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Développement d'une méthode d'observation des modes souples</b>	<b>61</b>
4.1	Synthèse d'un observateur dans le cas nominal . . . . .	61
4.1.1	Extraction d'un sous système . . . . .	63
4.1.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	65
4.2	Applications et simulations numériques . . . . .	67
4.2.1	Observateur en boucle ouverte . . . . .	67
4.2.2	Simulations en boucle fermée . . . . .	69
4.3	Conclusion . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Synthèse d'observateurs adaptatifs de modes souples</b>	<b>71</b>
5.1	Condition d'excitation persistante pour l'estimation . . . . .	71
5.2	Synthèse d'un observateur adaptatif à temps fini sur une classe réduite . . . . .	72
5.2.1	Extraction d'un sous système linéaire . . . . .	73
5.2.2	Synthèse d'un estimateur de paramètres . . . . .	74
5.2.3	Synthèse d'un observateur hybride adaptatif à temps fini . . . . .	77
5.2.4	Application au lanceur souple . . . . .	78
5.3	Synthèse d'un observateur adaptatif asymptotique sur la classe $\Sigma_0$ . . . . .	82
5.3.1	Mise en évidence des incertitudes . . . . .	82
5.3.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	84
5.3.3	Application au lanceur souple . . . . .	86
5.3.4	Discussion sur les deux méthodes . . . . .	88
5.4	Observateurs et Backstepping flexible . . . . .	89
5.4.1	Stabilité de la boucle fermée . . . . .	89
5.4.2	Étude d'un cas de non collocalisation pour le lanceur . . . . .	90
5.5	Conclusion . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>93</b>

---

<b>A</b>	<b>Développement et validation d'un modèle non linéaire de lanceur souple</b>	<b>97</b>
A.1	Hypothèses et conventions de modélisation . . . . .	97
A.1.1	Hypothèses . . . . .	97
A.1.2	Conventions . . . . .	98
A.2	Modélisation mathématique par le formalisme de Lagrange . . . . .	99
A.2.1	Le formalisme de Lagrange . . . . .	99
A.2.2	Représentation des modes de flexion . . . . .	100
A.2.3	Application au lanceur souple . . . . .	101
A.3	Validation numérique du modèle . . . . .	103
A.3.1	Modèle linéaire de référence . . . . .	103
A.3.2	Réponses fréquentielles . . . . .	104
A.4	Détail des calculs . . . . .	106
A.4.1	Préliminaire . . . . .	106
A.4.2	Énergies cinétiques . . . . .	106
A.4.3	Énergies potentielles . . . . .	108
A.4.4	Énergie dissipative . . . . .	108
A.4.5	Forces généralisées . . . . .	109
A.4.6	Équations . . . . .	112
<b>B</b>	<b>Détail des calculs pour l'estimation algébrique</b>	<b>115</b>
B.1	Manipulations algébriques . . . . .	115
B.2	Détail des matrices $P$ et $Q$ . . . . .	117
	<b>Références</b>	<b>121</b>



## Table des figures

1.1	Influence de la commande sur les mesures . . . . .	3
1.2	Représentation schématique du principe de backstepping . . . . .	9
1.3	Organisation du manuscrit et relations avec les contraintes . . . . .	17
2.1	Exemples de systèmes aérospatiaux souples . . . . .	20
2.2	Déformation de la mesure par les modes de flexion . . . . .	27
2.3	Représentation schématique des déformées modales en fonction de la position du gyromètre . . . . .	27
2.4	Représentation schématique d'un système aérospatial souple . . . . .	28
2.5	Représentation schématique des spécifications fréquentielles sur le lieu de Black . . . . .	29
2.6	Influence de la marge de phase de la boucle ouverte sur l'amortissement du mode souple . . . . .	30
3.1	Représentation schématique des changements de variable . . . . .	48
3.2	Réponses temporelles pour le lanceur souple avec la 1ère approche de backstepping flexible . . . . .	52
3.3	Réponses temporelles pour le lanceur souple avec la 2ème approche de backstepping flexible . . . . .	53
3.4	Réponses temporelles pour l'avion hypersonique avec la 1ère approche de backstepping flexible . . . . .	56
3.5	Représentations schématiques du problème de l'union de lois de commande (tiré des slides de présentation de [90]) . . . . .	58
3.6	Réponses temporelles pour l'avion hypersonique obtenues en associant la loi non-linéaire Backstepping flexible à un contrôleur LQ . . . . .	60
4.1	Evolution temporelle des états observés et des erreurs d'observation pour le lanceur (boucle ouverte) . . . . .	68
4.2	Evolution temporelle des états observés et des erreurs d'observation pour l'avion hypersonique (boucle ouverte) . . . . .	68
4.3	Évolution temporelle des états du lanceur commandé en retour d'état et en retour de sortie . . . . .	69

## Table des figures

---

5.1	Évolution temporelle des paramètres et conditions initiales estimées . . . . .	79
5.2	Évolution temporelle des erreurs d'observation avec ou sans mise à jour de l'état à partir des conditions initiales estimées . . . . .	81
5.3	Évolution temporelle des paramètres estimés pour le lanceur avec l'observateur [71]	87
5.4	Évolution temporelle des états observés (à gauche) et des erreurs d'observation (à droite) pour le lanceur avec l'observateur [71] . . . . .	87
5.5	Évolution temporelle des paramètres estimés pour le lanceur avec l'observateur [71], en présence de bruit de mesure . . . . .	88
5.6	Évolution temporelle des états observés (à gauche) et des erreurs d'observation (à droite) pour le lanceur avec l'observateur [71], en présence de bruit de mesure	88
5.7	Comparaison des deux observateurs . . . . .	89
5.8	Schéma fonctionnel de la boucle fermée, contrôlée en retour de sortie . . . . .	90
5.9	Évolution temporelle des états pour des capteurs situés à des positions différentes, avec l'observateur à temps fini . . . . .	92
A.1	Représentation du lanceur et des conventions utilisées . . . . .	99
A.2	Représentation schématique des déformées modales . . . . .	101
A.3	Mesure gyrométrique sur le lanceur déformé . . . . .	101
A.4	Diagrammes de Bode du lanceur souple . . . . .	105
A.5	Représentation des forces aérodynamiques et de la force de propulsion . . . . .	109

## Table des notations

### Notations générales

---

$\mathbb{R}^*$	Ensemble des réels non nul
$(\bullet)_R$	Vecteur dont les coordonnées sont exprimées dans le repère $R$
$\lambda_{\max}(P)$	Plus grande valeur propre de la matrice $P$
$\lambda_{\min}(P)$	Plus petite valeur propre de la matrice $P$
$\mathcal{K}$	Ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ continues, strictement croissantes et nulles en 0.
$\mathcal{K}_\infty$	Ensemble des fonctions de classe $\mathcal{K}$ non bornées.
$\vec{V}(P)_R$	Vitesse du point $P$ exprimée dans le repère $R$ , d'origine $O$ : $\vec{V}(P)_R = \frac{d\vec{OP}}{dt}_R$
$I_n$	Matrice identité de taille $n \times n$
$L_f h(x)$	Dérivée de Lie de $h(x)$ selon le champ de vecteur $f$ : $L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$

### Avion hypersonique

---

$\alpha$	Angle d'incidence (rad)
$\delta_c$	Angle de braquage de la gouverne canard (rad)
$\delta_e$	Commande de profondeur (rad)
$\eta_i$	Coordonnée modale du mode $i$
$\gamma$	Pente (rad/s)
$\omega_i$	Fréquence propre du mode $i$

## Table des notations

---

$\phi$	Mélange air-carburant - <i>AFR</i> ( <i>Air Fuel Ratio</i> )
$\xi_i$	Amortissement naturel du mode $i$
$D$	Trainée ( $\text{kg.m.s}^{-2}$ )
$g$	Accélération gravitationnelle ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$h$	Altitude (m)
$I_y$	Moment d'inertie ( $\text{kg.m}^2$ )
$L$	Portance ( $\text{kg.m.s}^{-2}$ )
$M$	Moment de tangage ( $\text{kg.m.s}^{-2}$ )
$m$	Masse du véhicule (kg)
$q$	Vitesse de tangage (rad/s)
$T$	Poussée ( $\text{kg.m.s}^{-2}$ )
$V$	Vitesse (m/s)

## Lanceur

---

$\beta$	Angle de braquage de la tuyère (rad)
$\eta_i$	Coordonnée modale généralisée du mode souple $i$
$\gamma$	Accélération non gravitationnelle ( $\text{m.s}^{-2}$ )
$\omega_i$	Pulsation propre du $i^{\text{ème}}$ mode de flexion (rad/s)
$\psi$	Attitude (rad)
$\rho$	Masse volumique de l'air ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
$\xi_i$	Amortissement naturel du $i^{\text{ème}}$ mode de flexion
$C_T$	Point d'articulation de la tuyère
$D$	Trainée ( $\text{kg.m.s}^{-2}$ )
$F$	Foyer aérodynamique
$G_L$	Centre de gravité du lanceur déséquipé
$G_T$	Centre de gravité de la tuyère
$h_i$	Déplacement souple du $i^{\text{ème}}$ mode au droit de la tuyère (m)
$i$	Incidence (rad)
$I_L$	Inertie du lanceur déséquipé ( $\text{kg.m}^2$ )
$I_T$	Inertie de la tuyère ( $\text{kg.m}^2$ )
$L$	Portance ( $\text{kg.m.s}^{-2}$ )
$l_{\text{aéro}}$	Distance algébrique de $F$ vers $G_L$ (m)

$L_T$	Distance algébrique de $G$ vers $C_T$ (m)
$l_T$	Distance algébrique de $G_T$ vers $C_T$ (m)
$M_L$	Masse du lanceur déséquipé (kg)
$M_T$	Masse de la tuyère (kg)
$r_i$	Rotation souple du $i^{\text{ème}}$ mode au droit de la tuyère (rad)
$r_{ci}$	Rotation souple au droit de la centrale inertielle (rad)
$r_{gy}$	Rotation souple au droit du gyromètre (rad)
$S$	Surface de référence du lanceur (m <sup>2</sup> )
$T$	Force de propulsion (kg.m.s <sup>-2</sup> )
$V_R$	Vitesse relative à l'air (m/s)
$y$	Dérive (m)
$\bar{q}$	Pression dynamique : $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V_R^2$ (Pa)

### Aile aéroélastique

---

$\alpha$	Angle de tangage (rad)
$\eta$	Déplacement souple (m)
$q$	Pente (rad/s)
$u$	Angle de braquage de la gouverne (rad)



## Introduction générale

Dans le domaine de la commande des systèmes aérospatiaux, les objectifs majeurs consistent à maintenir le véhicule sur une trajectoire donnée, tout en assurant de bonnes qualités de vol en terme de manoeuvrabilité et de performances. Ces objectifs de contrôle, classiques d'un point de vue rigide, ont été étendus suite aux avancées en optimisation structurale qui ont rendu les systèmes aérospatiaux plus légers, plus élancés et par conséquent plus souples. Il s'agit ainsi, lorsque l'on s'intéresse à ces systèmes, de considérer également les objectifs de commande induits par cette souplesse, inhérente au système, comme la stabilisation des modes de flexion et la réduction des efforts structuraux.

Pour satisfaire ces objectifs, la prise en compte des modes de flexion dès la phase de synthèse de l'algorithme de contrôle est nécessaire. En effet, les modes souples étant de plus en plus bas en fréquence, la dynamique souple interagit fortement avec la dynamique rigide. Par conséquent, la dissociation entre souplesse et modes de pilotage n'est plus possible.

La considération des modes de flexion lors de la synthèse des lois de commande fait alors apparaître un certain nombre de phénomènes ou contraintes supplémentaires, que l'on pourrait négliger dans le cas rigide. Ces différentes contraintes et problématiques sont énumérées et détaillées ici.

### ► Les non linéarités

La première contrainte est liée aux caractéristiques intrinsèques des systèmes aérospatiaux. En effet, les interactions complexes entre système de propulsion, caractéristiques aérodynamiques et propriétés structurales confèrent aux systèmes aérospatiaux un comportement non linéaire qui se manifeste par des non linéarités vis à vis de l'état ou de l'entrée de commande. C'est en particulier le cas lorsqu'on s'intéresse aux phases de vol à basses vitesses où les non linéarités sont d'origine aérodynamiques. D'autres non linéarités sont liées aux actionneurs (grands angles, seuil de braquage...). Ces non linéarités peuvent être à l'origine d'oscillations périodiques appelées oscillations de cycles limites ou de phénomènes de flottement aéroélastique.

### ► Le sous actionnement

La seconde contrainte est associée au manque d'information sur les états du système. Les systèmes aérospatiaux ne disposent en effet généralement pas d'actionneurs permettant d'agir directement sur leur structure. Ainsi, puisqu'on ne peut pas intervenir directement sur les modes souples, les systèmes aérospatiaux font partie de la classe des systèmes sous actionnés qui admettent plus de degrés de liberté que d'actionneurs. Le manque d'actionneur complique naturellement la synthèse des lois de commande, en particulier lorsque les objectifs de commande sont multiples. L'un des principaux enjeux de la commande des systèmes sous-actionnés consiste à maintenir la partie non actionnée du système proche de sa position d'équilibre tout en forçant la partie actionnée à suivre une trajectoire donnée.

### ► Le faible amortissement des modes souples

La contrainte suivante est liée aux impératifs de réduction de masse en aérospatial, qui ont conduit à l'utilisation de structures légères et élancées, qui sont les principales causes de flexibilité. L'allègement des structures s'est donc fait en gagnant en élasticité, ce qui se traduit par la présence de modes de flexion avec un faible amortissement naturel (de l'ordre de 0.005). Ces faibles amortissements peuvent être problématiques dans certaines applications, comme les manoeuvres de réorientation des satellites par exemple. En effet, les mouvements commandés au corps rigide pour effectuer la manoeuvre induisent des vibrations sur les appendices flexibles (panneaux solaires, antennes...), qui s'atténuent en fonction des caractéristiques d'amortissement de la structure. Les oscillations résiduelles persistent donc, et peuvent détériorer la précision, fatiguer les structures et même mener à l'instabilité. Ceci illustre les contraintes engendrées par la souplesse ainsi que l'importance à accorder à l'atténuation des oscillations résiduelles, c'est à dire à l'amélioration<sup>1</sup> de l'amortissement des modes souples. D'autres applications ou phénomènes comme le flottement, l'amélioration du confort des passagers ou la réduction des efforts généraux confortent cette nécessité.

### ► Les mesures altérées par les modes souples

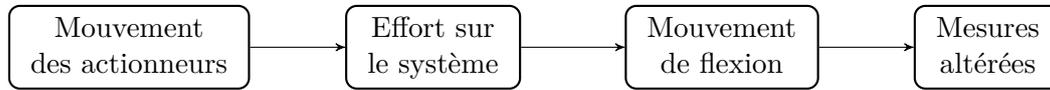
Une autre contrainte due à la présence de modes souples est celle liée aux mesures fournies par les capteurs. En effet, le mouvement des actionneurs induit un effort sur la structure du système, qui provoque lui même un mouvement de flexion, comme le décrit le schéma de la figure 1.1. Ainsi, dans le cas d'une structure flexible, un terme supplémentaire lié au mouvement provoqué par le mode souple est mesuré en plus de la grandeur attendue (angle, déplacement, vitesse...). Plus précisément, les modes souples altèrent les mesures fournies par les capteurs de la façon suivante :

$$y_m = y_{\text{rig}} + y_{\text{flex}} \quad (1.1)$$

---

1. Tout au long du manuscrit, le terme *amélioration* de l'amortissement sera utilisé au sens *augmentation* de l'amortissement, dans un objectif d'atténuation des oscillations engendrées par les modes souples.

où  $y_m$  est la mesure fournie par le capteur,  $y_{rig}$  la mesure du mouvement du corps rigide et  $y_{flex}$  le mouvement induit par les modes souples.



**Figure 1.1** – Influence de la commande sur les mesures

En mettant en place une loi de commande par retour de sortie, on renvoie ainsi une sortie biaisée par les modes souples, qui peut les exciter et mener à l'instabilité du système complet. Cette contrainte est donc à prendre en compte dès la synthèse.

### ► Les incertitudes

La dernière contrainte n'est pas propre aux systèmes aérospatiaux, mais est une contrainte générale au domaine de la commande des systèmes. Elle est due à la méconnaissance du système que l'on cherche à piloter. Deux types d'incertitudes existent :

- les incertitudes paramétriques liées à la connaissance relative de certains paramètres décrivant le modèle,
- les incertitudes de modèle, provoquées par les dynamiques négligées lors de l'étape de modélisation du système

Pour les systèmes aérospatiaux souples, les incertitudes paramétriques concernent principalement les coefficients aérodynamiques et les paramètres des modes souples (fréquences et pulsations propres). Même si de nombreuses expérimentations sont réalisées pour connaître ces paramètres de façon précise, des incertitudes subsistent toujours. De plus, les paramètres sont également susceptibles de varier au cours du vol (comme la masse et l'inertie du système). Ainsi, il est important de prendre en considération ces incertitudes et de vérifier si les spécifications de la loi de commande, synthétisée dans un cas nominal, sont satisfaites pour tout le domaine d'incertitude paramétrique.

Les cinq contraintes énumérées et détaillées ici constituent ainsi les problématiques sur lesquelles on va s'attarder dans cette étude. Avant cela, on s'intéresse aux travaux déjà menés sur ces thématiques.

## 1.1 État de l'art

Dans cette partie, on dresse un bilan des travaux de recherche effectués ces dernières années dans le domaine de la commande non linéaire, qui se rapportent au sujet traité dans cette thèse. On présente ainsi différentes approches, méthodes et techniques de commande issues de la littérature permettant de résoudre les questions posées par les contraintes que l'on vient

d'énumérer. On effectue également un bilan des réponses existantes en mettant en évidence leurs avantages et leurs inconvénients. On justifie ainsi l'étude menée dans cette thèse.

L'état de l'art proposé ici ne se restreint pas aux systèmes aérospatiaux. Il est au contraire étendu aux systèmes non linéaires de façon générale, et englobe ainsi les domaines de la mécanique ou la robotique, qui présentent des contraintes similaires.

On s'intéresse dans un premier temps aux systèmes sous actionnés, dont font partie les systèmes aérospatiaux souples qui sont l'objet de ce travail de thèse, en précisant les méthodes et techniques développées ces dernières décennies pour les commander. On s'attarde ensuite sur la technique particulière du backstepping, valable pour une sous classe de système sous actionnée puisque cette technique de commande est largement utilisée dans ces travaux de thèse. On détaille, dans un troisième temps, la problématique des modes souples d'un point de vue de la commande en faisant notamment l'état des méthodes permettant d'atténuer les vibrations qu'ils provoquent. Enfin, on traite le problème des incertitudes paramétriques.

### 1.1.1 Le problème du sous actionnement

Le sous actionnement est une problème largement étudié, essentiellement parce qu'il constitue un défi en théorie de la commande dès lors que les objectifs de commande sont multiples et concernent la partie non actionnée du système. Après avoir présenté les origines du sous actionnement, on s'attarde sur les solutions apportées pour le contrôle de ces systèmes.

#### ► Origines du sous-actionnement et exemples

Les causes du sous actionnement d'un système sont diverses, on peut néanmoins les classer en deux catégories, en s'appuyant sur [79, 103]. La première correspond à un sous actionnement "subi". C'est le cas lorsque le sous actionnement est directement lié aux caractéristiques physiques du système. Les systèmes aérospatiaux, marins ou les systèmes possédant un bras manipulateur accroché à une plateforme mobile ont par exemple une dynamique naturellement sous actionnée. C'est également le cas lorsqu'on est confronté à une défaillance ou à une panne d'actionneur. La seconde catégorie correspond quant à elle à un sous actionnement "provoqué". En effet, la volonté de réduire les coûts pousse souvent les constructeurs à limiter le nombre d'actionneurs du système. L'exemple le plus flagrant est la robotique. Le sous actionnement a également été imposé intentionnellement de façon à créer des systèmes complexes d'ordres réduits pour la recherche en théorie du contrôle. C'est en particulier le cas de nombreux systèmes pendulaires ou robotiques. On peut citer par exemple l'Acrobot [20], le Pendubot [104], le système bille sur rail [47] ou encore le pendule inversé posé sur un chariot roulant [81].

Les systèmes sous actionnés sont ainsi présents dans de nombreuses applications. Le domaine de la robotique présente en particulier une large littérature et de nombreux exemples de systèmes sous actionnés. Un robot possédant  $n$  liaisons souples est classiquement décrit par l'équation

dynamique standard suivante, issue de la modélisation lagrangienne [29, 103] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = B(q)u \quad (1.2)$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) est le vecteur des coordonnées généralisées,  $u \in \mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ) est le vecteur des entrées de commande,  $M$  est la matrice d'inertie (symétrique et définie positive),  $C$  contient les termes des forces de Coriolis et  $G$  les termes gravitationnels.

Le système (1.2) est complètement actionné si le nombre d'entrée de commande  $m$  est égale au nombre de degré de liberté  $n$ , ce qui se traduit par :  $\text{rang}[B(q)] = m = n$ . Les systèmes complètement actionnés possèdent ainsi des propriétés fortes qui facilitent la synthèse de lois de commande. Ces systèmes sont en particulier linéarisables par retour de sortie statique [53]. En choisissant :

$$u = B(q)^{-1}[M(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)] \quad (1.3)$$

on obtient un double intégrateur  $\ddot{q} = v$  que l'on peut commander en utilisant les outils linéaires classiques.

Au contraire, un système sous-actionné admet moins d'actionneurs que de degrés de liberté. Certaines propriétés structurelles sont alors perdues, et d'autres caractéristiques comme un degré relatif élevé ou un comportement à non minimum de phase peuvent apparaître, compliquant ainsi la synthèse de contrôleurs. On réécrit classiquement (1.2) sous la forme suivante, où l'on sépare la partie non actionnée  $q_1 \in \mathbb{R}^k$  ( $k \geq 1$ ) de la partie actionnée  $q_2 \in \mathbb{R}^l$  ( $l \geq 1$ ).

$$\begin{pmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(q, \dot{q}) \\ C_2(q, \dot{q}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2(q) \end{pmatrix} u \quad (1.4)$$

Dans ce cas,  $\text{rang}[B(q)] < n$  et la linéarisation par bouclage statique n'est plus possible. Pour pallier à cela, plusieurs réponses ont été apportées et sont présentées dans ce qui suit.

### ► Les méthodes de commandes développées et leurs utilisations

#### Linéarisation partielle par bouclage statique

Une première solution consiste à utiliser la linéarisation partielle par bouclage statique, introduite par Spong [101]. Il a en effet montré que tous les systèmes sous actionnés peuvent être globalement et partiellement linéarisés en utilisant un changement de variable de la forme :

$$u = \alpha(q)v + \beta(q, \dot{q}) \quad (1.5)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= B_2^{-1}(q)[M_{22}(q) - M_{21}(q)M_{11}(q)^{-1}M_{12}(q)] \\ \beta(q, \dot{q}) &= B_2^{-1}(q)[C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) - M_{21}(q)M_{11}(q)^{-1}(C_1(q, \dot{q}) - G_1(q))] \end{aligned}$$

Le système (1.4) est alors transformé en :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 &= -M_{11}(q)^{-1}(C_1(q, \dot{q}) + G_1(q)) - M_{11}(q)^{-1}M_{12}(q)v \\ \ddot{q}_2 &= v \end{cases} \quad (1.6)$$

Ainsi, la partie actionnée du système est linéarisée. Cette procédure de linéarisation partielle par bouclage statique, directement liée à la positivité de la matrice d'inertie, simplifie les dynamiques et facilite la manipulation des équations et la synthèse des lois de commande. De plus, elle est applicable à l'ensemble de la classe des systèmes sous actionnés.

### Système en cascade

Une fois la linéarisation partielle par bouclage effectuée, le système possède, d'un point de vue de la commande, une forme plus simple. En posant  $x = (q_2 \ \dot{q}_2)^T$  et  $\eta = (q_1 \ \dot{q}_1)^T$ , on peut réécrire le système (1.6) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bv \\ \dot{\eta} &= f_0(\eta) + g(\eta, x) + h(\eta, x)v \end{cases} \quad (1.7)$$

où la paire  $(A, B)$  est commandable. Ainsi, une loi linéaire n'utilisant que la partie actionnée,  $v = -Kx$  transforme le système en un système en cascade :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - BK)x \\ \dot{\eta} &= f_0(\eta) + g(\eta, x) - h(\eta, x)Kx \end{cases} \quad (1.8)$$

### Contrôleurs hybrides

Une autre méthode consiste à mettre au point une architecture de contrôle hybride, qui commute entre différentes lois de commande. Cette technique a été principalement appliquée aux systèmes pendulaires. L'idée est d'avoir un premier contrôleur (*swing up controller*) permettant d'amener le pendule au voisinage de sa position d'équilibre instable, puis de commuter vers un second contrôleur (*balancing controller*) assurant la stabilité du pendule autour de son équilibre. Cette technique a été appliquée à l'Acrobot [102], au Pendubot [104], au pendule inversé [25] ou encore au pendule en rotation [8]. Cette méthode a également été utilisée pour l'avion à décollage vertical VTOL (*Vertical Take Off and Landing*) [74]. Des contrôleurs assurant le balancement du pendule ont été mis au point en exploitant des propriétés de passivité, après avoir appliqué la linéarisation partielle par bouclage statique [37, 101].

### Découplage et forme normale

Après avoir appliqué la méthode de linéarisation partielle par bouclage statique, la nouvelle entrée de commande  $v$  se trouve à la fois dans le sous-système actionné et dans le sous-système non actionné. Ceci rend donc difficile la synthèse de lois de commande. Une solution permettant de découpler ces deux sous-systèmes a été proposée dans [79]. Ce dernier a en effet montré qu'un

système sous actionné partiellement linéarisable par bouclage peut être mis sous forme normale, par un changement de variable. Après changement de variable, le système (1.6) est transformé en un système de la forme :

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= f(z, \dot{z}, \xi, \dot{\xi}) \\ \ddot{\xi} &= v\end{aligned}\tag{1.9}$$

A ce stade, deux cas de figure se présentent en fonction de la stabilité de la dynamique des zéros. Le premier cas est celui des systèmes à non minimum de phase, pour lesquels la dynamique des zéros est instable. Bien que nombreux travaux aient été menés ces dernières années [76, 79, 105, 113] il reste le cas le plus difficile à traiter et il semble que le problème reste ouvert. Les dynamiques des zéros étudiées jusque là sont de dimension 1 ou 2 et il ne semble pas évident d'étendre ces résultats à des classes de système plus larges. En effet, lorsque la fonction  $f$  est non linéaire, il n'existe pas, à notre connaissance, de résultat théorique général lorsque  $f$  fait intervenir plus de deux composantes "actionnées" ( $\xi$  ou  $\dot{\xi}$ ) [79]. Le second cas concerne les systèmes dont la dynamique des zéros est stable, appelés systèmes à minimum de phase. Pour ces systèmes, le problème est apparemment plus simple. Il a été résolu en utilisant des lois de commande de la forme  $v(\xi, \dot{\xi})$  stabilisant le sous système  $(\xi, \dot{\xi})$  où apparaît l'entrée de commande, tout en s'assurant que la dynamique des zéros  $(z, \dot{z})$  reste asymptotiquement stable. Dans [7] un contrôleur de la forme  $v(\xi, z)$  stabilisant de façon globale une sous classe de système sous actionné est proposé. Enfin, les articles [63, 106, 107] traitent de la stabilisation globale de ces systèmes.

### Séparation des échelles de temps

Cette méthode consiste à décomposer les équations dynamiques du modèle en une dynamique lente (rigide) et une dynamique rapide (souple). Un contrôleur est alors synthétisé pour chacun de ces deux sous-systèmes [94, 100].

#### 1.1.2 La commande par backstepping

Le backstepping est une technique de commande qui peut s'appliquer aux sous systèmes sous actionnés. Puisque cette méthode constitue la base du travail effectué dans cette thèse, on détaille plus particulièrement son fonctionnement et ses utilisations.

##### ► Description de la méthode

Le backstepping est une méthode de synthèse de lois de commande non linéaire systématique et récursive utilisant le principe de stabilité de Lyapunov. Cette technique s'applique aux systèmes triangulaires inférieurs, appelés aussi systèmes à boucle de retour stricte (*strict feedback*) [60]. Ces systèmes possèdent la spécificité de décrire la dérivée de chaque composante du vecteur d'état comme fonction des composantes précédentes auxquelles viennent s'ajouter la composante

suivante, comme le montre le système (1.10) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) est l'état et  $u \in \mathbb{R}$  l'entrée de commande.

L'idée de la commande backstepping est de transformer les systèmes bouclés en sous-systèmes du premier ordre en cascade. C'est une méthode de synthèse multi-étape où, à chaque étape, une loi de commande intermédiaire (appelée également fonction stabilisante ou loi de contrôle virtuelle) assurant la convergence du système vers son état d'équilibre est générée en utilisant une fonction de Lyapunov appropriée. Cette dernière assure ainsi pas à pas la stabilisation de chaque étape de la synthèse.

Cette façon de procéder présente l'avantage d'assurer une stabilité globale asymptotique au système bouclé tout en garantissant des qualités de robustesse. De plus, le backstepping permet de construire, de manière itérative et systématique, une loi de commande et une fonction de Lyapunov stabilisante simultanément. Enfin, contrairement au bouclage linéarisé, le backstepping permet d'éliminer les non linéarités du système, tout en conservant les non linéarités stabilisantes.

Pour illustrer clairement le principe du backstepping, on propose un exemple sur le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \quad (1.11)$$

On suppose qu'il existe un retour  $x_2 = \phi(x_1)$  (avec  $\phi(0) = 0$ ) qui stabilise l'origine de la première composante du système (1.11) de façon asymptotique et une fonction de Lyapunov  $V(x_1)$  qui vérifie :

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1)] \leq 0 \quad (1.12)$$

En ajoutant et en soustrayant  $g(x_1)\phi(x_1)$ , on transforme le système (1.11) en :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1) + g(x_1)(x_2 - \phi(x_1)) \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \quad (1.13)$$

Ce système met en évidence un terme d'erreur que l'on définit par le changement de variable suivant :

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) \quad (1.14)$$

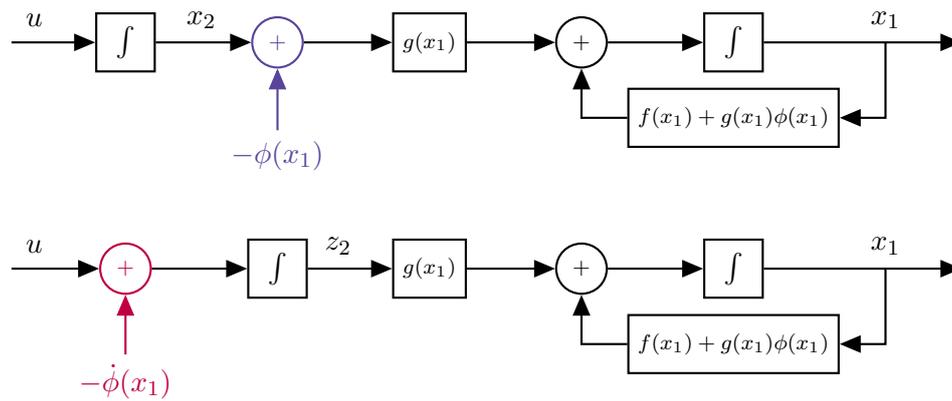


Figure 1.2 – Représentation schématique du principe de backstepping

La nouvelle représentation du système est alors donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1) + g(x_1)z_2 \\ \dot{z}_2 &= u - \dot{\phi}(x_1) \end{cases} \quad (1.15)$$

On remarque ainsi que pour passer de la représentation (1.13) à la représentation (1.15), le terme  $-\phi(x_1)$  a été déplacé derrière l'intégrateur. C'est ce qui explique le terme de backstepping choisi pour décrire cette méthode. Ceci est illustré sur la figure 1.2. On travaille alors sur le nouveau système et on augmente la fonction de Lyapunov connue en définissant :

$$V_a(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (1.16)$$

En prenant sa dérivée temporelle, il vient :

$$\dot{V}_a(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1)] + z_2 \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} g(x_1) + u - \dot{\phi}(x_1) \right] \quad (1.17)$$

En choisissant alors l'entrée de commande :

$$u = \dot{\phi}(x_1) - \frac{\partial V}{\partial x_1} g(x_1) - kz_2 \quad k > 0 \quad (1.18)$$

il vient :

$$\dot{V}_a(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} [f(x_1) + g(x_1)\phi(x_1)] - kz_2^2 \leq 0 \quad (1.19)$$

ce qui assure une stabilité asymptotique à l'origine du système (1.11).

Comme présenté dans cet exemple, l'idée clé du backstepping est ainsi de commencer avec un système stabilisable par une loi et une fonction de Lyapunov connues puis d'ajouter un intégrateur à son entrée. Le système augmenté est alors commandé en synthétisant une nouvelle loi. On prouve dans le même temps que cette loi est stabilisante pour une nouvelle fonction de Lyapunov.

Il est important de noter que la procédure de backstepping peut être réalisée avec un sous système d'ordre plus élevé pour lequel une des variables d'état peut être utilisée comme loi virtuelle.

### ► Revue de la littérature et utilisation du backstepping

La technique de Backstepping présentée ici a été développée à la fin des années 1980. Même si elle est apparue dans différents papiers simultanément, il semble légitime d'attribuer cette méthode de commande au Professeur Petar V. Kokotović, qui y a beaucoup contribué. La conférence qu'il a donnée [62] y fut en particulier consacrée, alors qu'en 1992, Kanellakopoulos [57] a proposé des outils mathématiques pour contrôler des systèmes non linéaires en utilisant le backstepping. D'autres travaux ont également été menés au cours des années 1990 [41, 65, 91], avant que Kokotovic n'examine les avancées du backstepping et des autres outils de commande non linéaire en 1999 [64].

La théorie du backstepping est ainsi assez récente. Malgré cela, on trouve de nombreuses applications pratiques du backstepping dans la littérature, et ce, dans des domaines variés. Sans prétendre être exhaustif, on donne ici quelques unes de ces applications.

Le backstepping a été largement utilisé pour le contrôle des moteurs, qu'ils soient électriques [6, 48], ou diesels [54]. Dans le même domaine, [66] l'a appliqué à un réacteur d'avion. On trouve également des applications en robotique, comme pour le suivi de trajectoire, considéré dans [22, 55] par exemple. La thèse [23] et l'article [24] traitent de plus du backstepping lorsque la commande est échantillonnée.

La technique du backstepping a également été appliquée à l'aérospatial. On peut citer par exemple le problème de synchronisation d'attitude d'un groupe de satellites flexibles [32]. Dans [95], la question du contrôle du vol en formation de plusieurs drones est également traitée à l'aide de la technique du backstepping. Plus récemment, dans [38, 39] le backstepping est appliqué à un modèle d'avion hypersonique.

### 1.1.3 Le problème des modes souples

Comme expliqué dans l'énumération des contraintes liées à la commande des systèmes aérospatiaux, la présence des modes souples engendre deux types de problème : la nécessité d'amortir les oscillations causées par la souplesse et le fait que les modes souples dégradent les mesures. Dans cette partie, on dresse un bilan des méthodes existantes pour résoudre ces deux problématiques.

### ► Méthodes d'amélioration de l'amortissement

Dans la plupart des travaux effectués en commande linéaire, on ne cherche pas à améliorer l'amortissement des modes souples. L'objectif consiste plutôt à synthétiser une commande qui évite de les exciter. Il est en effet important de noter que pour un système sous-actionné comme

ceux considérés ici, le double objectif qui consiste à imposer une performance à la partie actionnée et à la partie sous-actionnée est contradictoire [36], du fait du manque d'actionneur. Dans le cas des systèmes aérospatiaux, ce double objectif se traduit pour ce qui concerne la partie non actionnée, par la suppression des vibrations indésirables générées par le faible amortissement des modes de flexion. Cet objectif peut être assuré par des méthodes passives ou actives.

Les méthodes passives consistent à ajouter, ou à modifier les matériaux de la structure de façon à changer ses caractéristiques, comme la raideur ou le coefficient d'amortissement. Les matériaux utilisés peuvent être des masses, des ressorts, des amortisseurs ou des matériaux piézo-électriques [77]. Ces méthodes ont par exemple été introduites pour limiter les ballottements des ergols dans les réservoirs des véhicules spatiaux, en ajoutant des cloisons [35, 45]. En réduisant ainsi la taille des réservoirs, on limite les oscillations des liquides. Les méthodes passives de contrôle de vibrations présentent ainsi l'avantage d'être relativement simple à mettre en place et d'être stables. Cependant, ces méthodes passives n'ont pas permis d'atténuer complètement les oscillations. Elles ne sont en effet plus efficaces lorsque les fréquences propres des modes de flexion sont basses. En plus de cela, elles alourdissent le système, ce qui peut compliquer la mise en oeuvre de sa mission initiale.

Les limitations des techniques passives ont donc mené au développement de méthodes de commande actives. Ces méthodes sont en effet plus adaptées aux cas où les caractéristiques du système et donc la nature des excitations varient avec le temps. Les systèmes de contrôle actif des vibrations reposent en général sur le principe suivant : les actionneurs fournissent une énergie qui va contrer l'énergie indésirable causée par les modes souples. Cela réduit ainsi les vibrations.

Une première approche de contrôle actif consiste à travailler sur la génération de la commande, qui permet, indépendamment du contrôleur, de modifier les performances du système. En effet, la commande est elle même responsable des vibrations de la structure du système. Ainsi, en modifiant la commande on peut annuler ces oscillations. Pour cela, on couple un contrôleur linéaire à un amortisseur de vibration, basé sur des méthodes d'*input shaping*. L'*input shaping* est une méthode de commande qui repose sur le principe suivant : en convoluant une entrée de commande avec une série d'impulsion, on peut générer une commande qui induit des oscillations minimales [28, 80, 84, 96, 98]. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'utilise pas les modes souples. Cependant c'est une méthode linéaire qui ne peut être utilisée que lorsque l'interaction entre les dynamiques rigide et souple reste linéaire.

L'extension de ces méthodes au cas non linéaire a été étudiée en adaptant les techniques d'*input shaping*, développées en fréquentiel, au domaine temporel. Pour cela, une approche consiste à utiliser des méthodes de *feedforward* qui peuvent être exploitées pour synthétiser une trajectoire de référence pour les états rigides, de façon à ce que les oscillations des modes souples restent faibles [44]. Cependant, il est difficile d'appliquer de telles méthodes à un système non linéaire avec un grand domaine de fonctionnement, ou quand il y a des incertitudes paramétriques et un grand nombre de modes souples.

La commande prédictive a également été utilisée pour réduire les oscillations provoquées par les modes souples. Même si la littérature se rapportant à la commande prédictive comme

méthode de réduction des vibrations est encore limitée, cette technique a été utilisée dans divers domaines. Dans [75] elle est appliquée à une éolienne dans le but de réduire la fatigue de la structure, alors que [21, 33, 46] l'appliquent à un bras manipulateur souple. Comme elle utilise un modèle du procédé et un algorithme d'optimisation, cette technique est malheureusement très coûteuse en temps de calcul et en ressources.

Une autre technique consiste à utiliser des matériaux intelligents comme capteurs et actionneurs. Les actionneurs sont alors simples d'un point de vue mécanique, légers et ont un rendement de conversion d'énergie important. L'utilisation d'actionneurs piezo-électriques a été introduite par [27]. Divers travaux [56, 92] ont également montré que l'utilisation de matériaux piezo-électrique est efficace pour le contrôle actif des vibrations.

Le faible amortissement ne constitue pas la seule contrainte posé par les modes souples. L'influence qu'ils ont sur les mesures est également un problème pour lequel diverses solutions ont été apportées.

### ► Solutions à l'altération des mesures

L'altération des mesures est un problème typique des systèmes flexibles, qui se produit aussi bien en robotique qu'en aérospatial. Les états rigides (comme l'angle d'attitude ou la vitesse angulaire pour un système aérospatial) que l'on souhaite mesurer sont altérés par le mouvement induit par les modes de flexion. La sortie mesurée est composée du mouvement du véhicule causé par le mode souple à la position du capteur considéré en plus du mouvement du véhicule attendu. La dégradation des mesures est ainsi directement liée à la position du capteur sur le système, comme remarqué dès la fin des années 70 dans [42] pour le lanceur. Suivant la position des capteurs et des actionneurs, des situations de collocalisation ou de non-collocalisation se produisent [101] menant à des situations de dynamique interne stables ou instables [83, 99]. C'est ce qui est remarqué dans [30] en fonction de la position du capteur sur un bras robotique flexible. Dans [78], une sortie non-collocalisée est mise en évidence puis utilisée pour le suivi de trajectoire d'un bras robotisé.

L'utilisation d'une mesure altérée par les modes souples dans la loi de commande peut aussi exciter les modes souples, et mener à l'instabilité du système. Pour éviter ce problème, une méthode proposée consiste à synthétiser un observateur pour reconstruire les modes souples afin d'éliminer la dynamique indésirable des mesures. Les mesures résultantes ne contiennent ainsi que la dynamique rigide souhaitée. Elles peuvent ainsi être utilisées pour synthétiser un contrôleur. Cette méthode a notamment été utilisée dans [93] à travers un observateur par modes glissants appliqué au lanceur Ares I et dans [50] pour la commande d'un satellite.

#### 1.1.4 Le problème des incertitudes paramétriques

La prise en compte des incertitudes paramétriques est une problématique commune à l'automatique en général, et en particulier à la synthèse de lois de commande, qui doit assurer

au système considéré une stabilité sur tout le domaine de variation des paramètres. Diverses solutions ont été apportées.

La première méthode consiste à utiliser les outils de commande robustes développés en linéaire. Les techniques de linéarisation par feedback, insuffisantes en présence d'incertitudes puisque les compensations ne sont plus exactes, peuvent en effet être combinées à des méthodes linéaires robustes, comme la  $\mu$ -synthèse [73, 85]. Le contrôleur linéaire de la boucle externe doit alors, en plus d'assurer la stabilité et les performances requises, être synthétisé de façon robuste aux incertitudes de modèles.

La commande adaptative constitue également une méthode largement utilisée et étudiée pour les systèmes non linéaires. La technique du backstepping adaptatif s'est d'ailleurs imposée comme l'une des méthodes de synthèse de commande adaptative les plus populaires [39, 48].

Une autre technique est celle de la commande par modes glissants [34, 97, 110], qui, dans le domaine de la commande robuste, a acquis une grande popularité en tant que stratégie de commande pour les systèmes non linéaires incertains. La commande par modes glissants a été proposée au début des années 70 et a reçu beaucoup d'attention pour sa faible sensibilité aux erreurs d'estimation des paramètres du systèmes et aux perturbations extérieures [70]. En aérospatial on peut citer par exemple [109, 114]. Cependant, les performances des modes glissants dépendent de la connaissance des bornes des incertitudes du systèmes, qui sont difficiles à connaître en pratique. Enfin, le problème de *chattering* rend difficile l'implémentation de cette technique. Pour surmonter ce problème, les modes glissants d'ordre supérieur ont été introduits [68]. Les modes glissants d'ordre supérieurs ont été largement utilisés pour des applications diverses, comme le contrôle de la production d'électricité d'une éolienne [13–15], d'une hydrolienne [16] ou pour le contrôle moteur [1, 2, 59] par exemple. Cette technique a également été appliquée aux systèmes flexibles mécaniques [82], robotique [70] ainsi qu'aux systèmes aérospatiaux [49, 51, 52].

### 1.1.5 Bilan

Le bilan de l'état de l'art fait apparaître que de nombreux travaux et méthodes ont été développées dans le domaine de la robotique et de la mécanique pour les systèmes sous actionnés. Seulement, ces travaux ne considèrent en général qu'un faible nombre de modes souples. De plus, les théories développées en robotique ne sont pas directement transposables à l'aérospatial à cause de la structure particulière des systèmes robotisés et de l'absence de forces extérieures comme les forces aérodynamiques. On constate également que des travaux portant sur la commande non linéaire des systèmes aérospatiaux existent. Cependant, dans la plupart des cas, ces travaux ne cherchent pas à améliorer l'amortissement des modes souples, ou ne prennent pas en compte l'ensemble des contraintes énumérées.

Ainsi de nouvelles approches de conceptions de commande sont nécessaires pour commander les systèmes non linéaires présentant un grand nombre de modes souples et étendre la théorie existante. C'est ce qui justifie cette étude. Elle consiste in fine, à développer une méthode de commande non linéaire par retour de sortie, améliorant l'amortissement des modes souples, et

à l'appliquer aux systèmes aérospatiaux incertains.

## 1.2 Contributions de la thèse

Ce travail de thèse consiste en la synthèse d'une méthode de commande non linéaire pour les systèmes aérospatiaux, en tenant compte des contraintes engendrées par les modes de flexion. Un intérêt particulier est donné au problème d'amortissement des oscillations causées par les modes souples. Le problème de l'altération des mesures par les modes souples, qui peuvent mener à l'instabilité est également traité. Enfin, les incertitudes paramétriques, en particulier celles de l'amortissement et de la pulsation naturelle des modes souples sont prises en compte.

Cette thèse se voulant théorique et méthodologique, l'ensemble du travail est réalisé sur une classe de système non linéaire, sous actionnée et à minimum de phase, représentative du comportement d'un système aérospatial souple. La mise en évidence de cette classe de système, effectuée au **chapitre 2**, est issue de l'examen des modèles dynamiques de différents systèmes de la littérature.

En considérant cette classe de système, les contributions apportées par cette thèse sont résumées dans les points qui suivent.

### 1.2.1 Synthèse d'une loi de commande non linéaire améliorant l'amortissement d'un système aérospatial souple

Le système sous actionné considéré étant à minimum de phase, la dynamique interne, représentée par les modes souples est stable, mais mal amortie. La première contribution de cette thèse, développée au **chapitre 3**, consiste en la synthèse d'une méthode de commande non linéaire assurant la stabilité du système complet tout en améliorant l'amortissement de la dynamique interne. Deux approches de commande assurant cet objectif sont proposées. On les détailles ici.

#### ► En limitant l'impact de la dynamique rigide sur la dynamique souple

Pour cette première approche, l'amortissement des modes souples est amélioré en réduisant les excitations possibles provoquées par la dynamique rigide, c'est à dire en limitant l'influence de la dynamique rigide sur la dynamique souple. Après avoir effectué des changements de variables, la loi de commande est synthétisée en utilisant la technique du backstepping. La première étape de backstepping est réalisée en adaptant la fonction de Lyapunov de [87, 88] à notre problématique. Cette fonction de Lyapunov contient les états souples. Ainsi la loi de commande virtuelle intermédiaire est composée de deux termes : le correcteur que l'on aurait obtenu si on avait réalisé un backstepping sur la dynamique rigide seule, et un terme supplémentaire non linéaire contenant les états souples. Une étape de backstepping supplémentaire est effectuée pour revenir à l'entrée de commande réelle du système.

On montre alors l'intérêt de cette loi, en terme d'amortissement des modes souples, en la comparant à une loi backstepping classique, en simulations.

Enfin, cette loi de commande non linéaire est associée à un contrôleur Linéaire Quadratique Gaussien (LQG) en utilisant le résultat de [90]. Cette technique est appliquée au modèle d'avion hypersonique [19]. Cette association donne ainsi la possibilité d'utiliser le contrôleur non linéaire lorsque les états varient sur de grandes plages de valeurs, puis de commuter vers la loi linéaire pour assurer un comportement linéaire local.

#### ► En apportant de l'amortissement

Pour cette seconde approche de synthèse, les oscillations des modes souples sont atténuées en apportant directement de l'amortissement à cette dynamique. Pour cela, le résultat de [69] est appliqué à la dynamique souple de notre système, après avoir effectué des changements de variables, donnant ainsi une loi de commande virtuelle intermédiaire. Comme pour la première approche, le retour à l'entrée de commande réelle du système est réalisé grâce à des étapes supplémentaires de backstepping.

#### ► Bilan des deux approches

Même si la loi de commande n'est pas synthétisée de la même façon, les deux approches développées présentent de nombreux points communs.

Contrairement aux développements classiques pour les systèmes à minimum de phase, la loi de commande est synthétisée en considérant d'abord la dynamique interne du système, puis la dynamique rigide. La dynamique interne est considérée dans un premier temps de façon à lui assurer un bon amortissement au cours du régime transitoire.

D'un point de vue théorique, ces deux approches de synthèse de commande étendent la technique du backstepping aux systèmes présentant une dynamique interne stable mais mal amortie : le backstepping permet alors non seulement de stabiliser le système complet mais aussi d'apporter de l'amortissement. Le backstepping est en quelque sorte "étendu" au cas flexible, c'est la raison pour laquelle on l'a dénommé backstepping flexible.

Ces deux approches théoriques présentent l'avantage de pouvoir considérer un grand nombre de modes souples et de posséder une preuve de stabilité asymptotique globale.

### 1.2.2 Développement d'une méthode d'observation des modes souples

Les modes souples n'étant généralement pas mesurés pour les systèmes aérospatiaux, cette contribution, décrite **chapitre 4**, consiste en la synthèse d'un observateur d'état permettant d'estimer les états souples du système, nécessaires à la mise en place de la loi de commande non linéaire développée dans cette thèse.

Considérant la classe des systèmes aérospatiaux souples, on montre, sous l'hypothèse d'un nombre de mesures suffisant, qu'il est possible d'extraire de cette classe un sous système, affine en l'état, contenant les états souples et dont la matrice d'état dépend des sorties.

En travaillant en paramètres certains, l'observateur [3] est utilisé pour estimer l'état et en particulier les états souples de ce sous système .

Même si la preuve de stabilité de la boucle fermée n'est pas donnée, cet observateur est enfin associé, en simulation, à la loi de commande backstepping flexible.

### 1.2.3 Synthèse d'observateurs adaptatifs de modes souples

Cette partie constitue la dernière contribution de notre travail. On met au point, **chapitre 5**, deux observateurs adaptatifs qui fournissent une estimation du vecteur des états souples et de certains paramètres inconnus, comme en particulier la pulsation et l'amortissement des modes souples.

#### ► Observateur à temps fini

Le premier, valable seulement pour une sous-classe de système, est un observateur hybride convergent à temps fini. Il associe un observateur d'état de Luenberger à un estimateur de paramètre synthétisé à l'aide d'outils algébriques [40]. Sous condition d'excitation persistante, l'estimateur fournit, en temps fini, une estimation de la pulsation et de l'amortissement du mode souple ainsi qu'une estimation des conditions initiales des états à observer. En combinant observateur et estimateur de paramètres, l'état du système est mis à jour régulièrement [58], ce qui permet d'assurer une convergence des états observés en temps fini. L'inconvénient de cette méthode est lié au fait qu'elle se limite à un nombre restreint de modes souples.

#### ► Observateur asymptotique

Le second observateur est plus général puisqu'il est valable pour la classe des systèmes aérospatiaux souples étudiée dans cette thèse. On reprend le sous système affine en l'état, extrait de la classe générale et met en évidence les incertitudes paramétriques contenues dans ce modèle. Pour cela, on réécrit ce système en séparant les termes connus des termes sujets aux incertitudes. On définit ainsi un vecteur de paramètres inconnus. Sous condition d'excitation persistante, l'observateur adaptatif [71] est utilisé pour estimer à la fois l'état du système ainsi que le vecteur de paramètres inconnus.

#### ► Boucle fermée : observateurs adaptatifs et backstepping flexible

Des simulations numériques sont réalisées et le cas particulier de non collocalisation des capteurs et de l'actionneur est étudié en particulier. Malgré le fait que les mesures soient dégradées par les modes de flexion, les simulations numériques montrent que cette méthode de commande par retour de sortie, présente l'avantage d'assurer la stabilité du système même en cas de non collocalisation.

## 1.3 Organisation du mémoire

Pour une meilleure lisibilité du manuscrit, la figure 1.3 montre la progression de la méthode de commande développée en fonction des contraintes prises en compte. La démarche de cette thèse a consisté à synthétiser une méthode de commande pour les systèmes aérospatiaux souples, en apportant, progressivement, une réponse à chacune des contraintes énumérées précédemment.

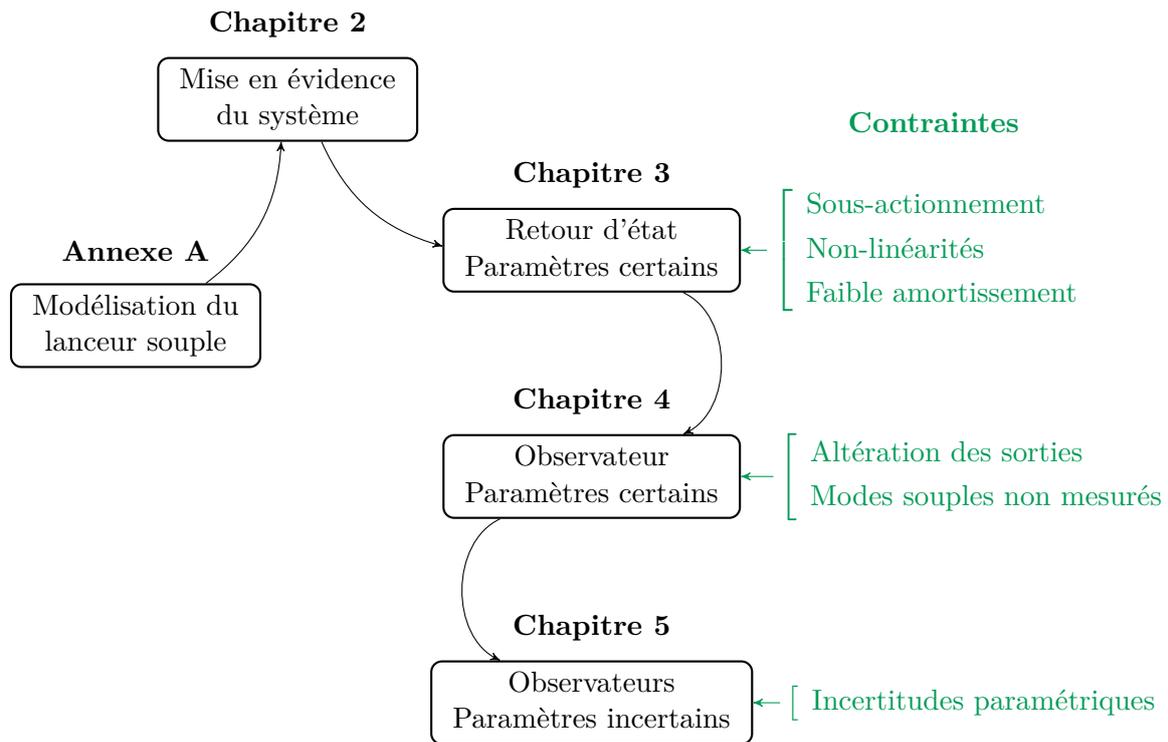


Figure 1.3 – Organisation du manuscrit et relations avec les contraintes



## Mise en évidence d'une classe de systèmes et des objectifs de commande non linéaire

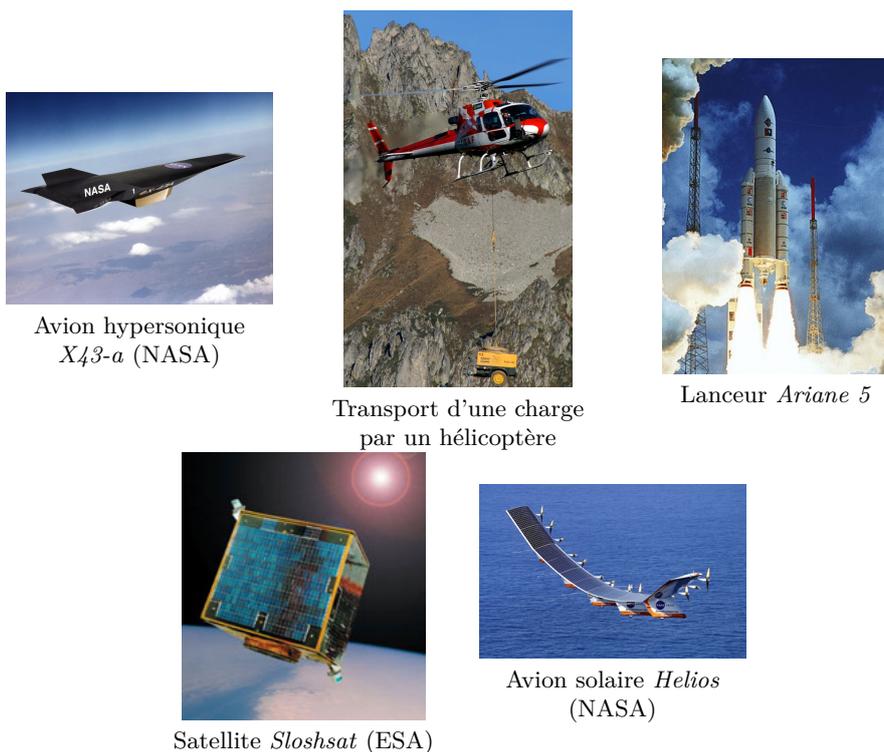
---

Dans ce chapitre, on met en évidence une classe de système non linéaire représentative des systèmes aérospatiaux souples, afin de disposer d'un modèle théorique et générique sur lequel bâtir nos travaux de commande. Pour cela, on considère trois exemples de systèmes aérospatiaux : une aile aéroélastique, un avion hypersonique et un lanceur. Les deux premiers systèmes sont tirés de la littérature alors que le dernier a été développé au cours de cette thèse. On examine les équations dynamiques de ces différents systèmes et on montre que des manipulations mathématiques (changements de variables ou séparation des échelles de temps) permettent de mettre en évidence les points communs de ces systèmes. On définit alors une classe de système non-linéaire théorique, représentant la dynamique liée au contrôle d'attitude d'un système aérospatial. Cette classe mêle dynamique rigide et dynamique souple et ne possède qu'une seule entrée de commande. Ensuite, on analyse les problématiques et objectifs de commande des systèmes aérospatiaux souples, en prenant l'exemple du lanceur. On montre enfin comment les objectifs de commande, traditionnellement définis en linéaire par des spécifications fréquentielles peuvent être traduits d'un point de vue non linéaire.

---

### 2.1 Mise en évidence d'une classe théorique pour les systèmes aérospatiaux souples

Que leur flexibilité viennent de leur structure ou du carburant qu'ils emportent, les systèmes souples sont nombreux en aérospatial. On peut citer par exemple l'avion solaire *Helios* de la NASA qui est un système hautement flexible [43] à cause de la configuration particulière de sa structure. Les systèmes orbitaux comme les satellites présentent également de nombreuses flexibilités, dues aux appendices (comme les panneaux solaires ou les antennes) dont ils sont équipés mais également aux ergols qu'ils embarquent. Le satellite *Sloshsat* a en particulier été lancé pour étudier l'influence du ballonnement d'ergols sur le contrôle d'attitude des systèmes spatiaux [112]. On peut enfin imaginer que le transport d'une charge par un hélicoptère [17] puisse faire partie de cette catégorie de systèmes souples. La figure 2.1 regroupe quelques exemples de



**Figure 2.1** – Exemples de systèmes aérospatiaux souples

ces systèmes.

Au cours de cette thèse, on ne pourra pas s'intéresser à tous ces systèmes aérospatiaux souples en particulier. Afin de généraliser notre étude, on choisit de réaliser un travail méthodologique en définissant une classe de système théorique et représentative des systèmes aérospatiaux souples. Dans cette partie, on cherche une manière de définir cette classe de système non linéaire, qui sera ensuite utilisée tout au long de cette thèse. Pour cela, on analyse la forme et la structure des modèles mathématiques de trois exemples de systèmes aérospatiaux souples : un avion hypersonique, une aile aéro-élastique (dont les modèles sont issus de la littérature), et un modèle de lanceur souple, développé et validé au cours de cette thèse (dont le détail est présenté en [Annexe A](#)).

### 2.1.1 Exemples de systèmes aérospatiaux

On présente et on détaille ici chacun des systèmes aérospatiaux considérés, en donnant leurs équations mathématiques et en les décrivant. Les variables utilisées pour décrire ces systèmes sont précisées dans la [table des notations](#).

#### ► Avion hypersonique

L'avion hypersonique est pressenti comme l'avenir des lancements spatiaux dans le sens où ce véhicule peut constituer un système fiable, réutilisable et par conséquent moins onéreux que

les systèmes de lancement actuels. Ces dernières années, de nombreux travaux ont été consacrés aux avions hypersoniques, en particulier en modélisation et en commande [31]. M. Bolender et D. Doman [19, 39], ont en particulier développé un modèle non linéaire d'avion hypersonique en utilisant la mécanique lagrangienne. On présente le modèle mathématique complet de ce système ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = \frac{T(\alpha, \eta, \phi) \cos \alpha - D(\alpha, \eta, \delta_c, \delta_e)}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{h} = V \sin \gamma \\ \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, \eta, \delta_c, \delta_e) + T(\alpha, \eta, \phi) \sin \alpha}{mV} - \frac{g}{V} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} = -\frac{L(\alpha, \eta, \delta_c, \delta_e) + T(\alpha, \eta, \phi) \sin \alpha}{mV} + q + \frac{g}{V} \cos \gamma \\ \dot{q} = \frac{M(\alpha, \eta, \delta_c, \delta_e, \phi)}{I_{yy}} \\ \ddot{\eta}_1 = -\omega_1^2 \eta_1 - 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1 + N_1(\alpha, \eta, \delta_c, \delta_e) \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_p = -\omega_p^2 \eta_p - 2\xi_p \omega_p \dot{\eta}_p + N_p(\alpha, \eta, \delta_c, \delta_e) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où  $\eta = (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_p)^T$  est le vecteur des coordonnées modales,  $\phi, \delta_e$  et  $\delta_c$  constituent les entrées de commande et les fonctions de portance  $L$ , de trainée  $D$ , de poussée  $T$  et de moment  $M$  sont non linéaires.

La complexité de ce système et les fortes interactions entre son système de propulsion et ses propriétés structurales expliquent les nombreuses non linéarités qu'il présente et ainsi l'intérêt de ce système pour la commande non linéaire.

### ► Lanceur

Le lanceur a été largement étudié dans le domaine de la commande linéaire [5, 26, 111]. Le contrôleur est généralement synthétisé à différents instants de vols et une interpolation des gains est ensuite réalisée pour avoir une loi de commande valable sur l'ensemble du domaine de vol. On choisit dans cette thèse de s'intéresser à ce système dont la flexibilité est issue de la souplesse des structures au cours du vol propulsé ou encore du ballonnement des ergols en vol orbital. Plusieurs types de non linéarités peuvent être considérées pour ce système, comme les actionneurs aux grands angles, les coefficients aérodynamiques ou encore la prise en compte d'un seuil de braquage des actionneurs.

Au cours de cette thèse, un modèle non linéaire de lanceur souple a été mis au point. Ce modèle, écrit en écart par rapport à la trajectoire de référence définie par le guidage, est valable pour un lanceur symétrique et stationnaire. Il prend en compte les deux premiers modes de flexion. Le détail de la modélisation ainsi que la validation numérique de ce modèle sont donnés en [Annexe A](#).

En ignorant la dynamique liée à la tuyère, le modèle non-linéaire du lanceur souple s'écrit :

$$\begin{cases} M_L \ddot{y} &= D \sin \psi + L \cos \psi + T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ I_L \ddot{\psi} &= -L l_{\text{aéro}} + T L_T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - T(h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ \ddot{\eta}_1 &= -\omega_1^2 \eta_1 - 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1 + h_1 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ \ddot{\eta}_2 &= -\omega_2^2 \eta_2 - 2\xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2 + h_2 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\eta = (\eta_1 \ \eta_2)^T$  est le vecteur des coordonnées modales et  $\beta$  l'angle de braquage de la tuyère correspond à l'entrée de commande. Dans ce modèle, les non linéarités dues aux grands angles des actionneurs apparaissent à travers les fonctions sinusoïdales, tandis que les non linéarités aérodynamiques seront mises en évidences dans les fonctions non linéaires de portance  $L$  et de trainée  $D$ , qui s'écrivent comme des fonctions polynomiales en l'incidence.

### ► Aile aéroélastique

L'aile aéroélastique constitue également un système largement étudié [12, 67] pour les phénomènes non linéaires qu'elle met en jeu (flottement, cycles limites...). On présente ici les équations dynamiques d'une section d'aile aéroélastique à deux degrés de liberté, modélisant les réponses de l'aile aux braquages des gouvernes de direction :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} &= q \\ \dot{q} &= g(\alpha)\alpha + d_2 q - k_2 \eta - c_2 \dot{\eta} + g_2 u \\ \ddot{\eta} &= f(\alpha)\alpha + d_1 q - k_1 \eta - c_1 \dot{\eta} + g_1 u \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $\eta$  est la coordonnée modale et  $u$  l'entrée de commande est l'angle de braquage de la gouverne et les fonctions  $f$  et  $g$  sont des polynômes en  $\alpha$ .

### 2.1.2 Manipulations mathématiques

Au regard des équations dynamiques de ces trois systèmes, on met clairement en évidence un premier point commun. Ces systèmes sont en effet composés d'une dynamique rigide et d'une dynamique souple (décrite par la variable  $\eta$  pour les trois modèles présentés) que l'on différencie facilement. De plus, ces deux dynamiques interagissent entre elles, de façon non linéaire.

Malgré cela, les modèles présentées ici montrent plusieurs différences, comme le nombre de degré de liberté ou le nombre d'entrée de commande. On effectue ainsi quelques manipulations mathématiques pour gommer ces différences, et montrer qu'il est possible d'extraire une classe de systèmes non linéaire théorique représentative des systèmes aérospatiaux souples.

On propose ainsi deux types de manipulations que l'on pourra effectuer sur les systèmes aérospatiaux souples : la séparation des échelles de temps, et les changements de variable.

► Séparation des échelles de temps

Les techniques de séparation des échelles de temps sont classiquement utilisées en aérospatial pour contrôler un système dont les variables à commander ont des vitesses de variation distinctes. Le lecteur pourra se référer à [72] pour plus de détails sur cette technique.

En utilisant ces techniques, on décompose le système en sous-systèmes et on ne conserve que la dynamique liée au contrôle d'attitude, c'est à dire la dynamique rapide du système. On applique cela aux modèles d'avion hypersonique et de lanceur souple.

- **Avion hypersonique** : après séparation des échelles de temps, la dynamique rapide de l'avion hypersonique s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = f_{\alpha}(\alpha)\alpha + C_q q + \sum_{i=1}^p K_{\alpha}^i \eta_i \\ \dot{q} = f_q(\alpha)\alpha + \sum_{i=1}^p K_q^i \eta_i + C_v \delta_e \\ \ddot{\eta}_1 = -\omega_1^2 \eta_1 - 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1 + \sum_{i=2}^p N_1^i \eta_i + f_{\eta_1}(\alpha)\alpha + h_1 \delta_e \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_p = -\omega_p^2 \eta_p - 2\xi_p \omega_p \dot{\eta}_p + \sum_{i=1}^{p-1} N_p^i \eta_i + f_{\eta_p}(\alpha)\alpha + h_p \delta_e \end{cases} \quad (2.4)$$

En prenant la notation  $N = (\eta_1 \ \dot{\eta}_1 \ \cdots \ \eta_p \ \dot{\eta}_p)^T \in \mathbb{R}^{2p \times 1}$  pour les états souples, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = f_{\alpha}(\alpha)\alpha + C_q q + K_{\alpha} N \\ \dot{q} = f_q(\alpha)\alpha + K_q N + C_v \delta_e \\ \dot{N} = AN + F_N(\alpha)\alpha + B\delta_e \end{cases} \quad (2.5)$$

avec

$$K_{\alpha} \in \mathbb{R}^{1 \times 2p} \quad K_q \in \mathbb{R}^{1 \times 2p} \quad A \in \mathbb{R}^{2p \times 2p} \quad B \in \mathbb{R}^{2p \times 1} \quad F_N(\alpha) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2p \times 1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\xi_1 \omega_1 & \cdots & N_1^p & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ N_p^1 & 0 & \cdots & -\omega_p^2 & -2\xi_p \omega_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \\ \vdots \\ 0 \\ h_p \end{pmatrix} \quad F_N(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{\eta_1}(\alpha) \\ \vdots \\ 0 \\ f_{\eta_p}(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$K_{\alpha} = (K_{\alpha}^1 \ 0 \ K_{\alpha}^2 \ 0 \ \cdots \ K_{\alpha}^n \ 0) \quad K_q = (K_q^1 \ 0 \ K_q^2 \ 0 \ \cdots \ K_q^p \ 0) \quad (2.6)$$

- **Lanceur** : en ne considérant que la dynamique liée au contrôle d'attitude, le modèle de

lanceur est réduit à :

$$\begin{cases} \dot{\psi} &= q \\ \dot{q} &= -\frac{l_{\text{aéro}}}{I_L} L(\psi) + \frac{T}{I_L} (L_T r_1 - h_1) \eta_1 + \frac{T}{I_L} (L_T r_2 - h_2) \eta_2 + \frac{T L_T}{I_L} \beta \\ \dot{\eta}_1 &= -(\omega_1^2 - h_1 r_1 T) \eta_1 - 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1 + h_1 T \beta \\ \dot{\eta}_2 &= -(\omega_2^2 - h_2 r_2 T) \eta_2 - 2\xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2 + h_2 T \beta \end{cases} \quad (2.7)$$

En notant  $N = (\eta_1 \ \dot{\eta}_1 \ \eta_2 \ \dot{\eta}_2)^T$ , il vient :

$$\begin{cases} \dot{\psi} &= q \\ \dot{q} &= -\frac{l_{\text{aéro}}}{I_L} L(\psi) + KN + \frac{T L_T}{I_L} \beta \\ \dot{N} &= AN + B\beta \end{cases} \quad (2.8)$$

avec

$$K = \frac{T}{I_L} (L_T r_1 - h_1 \ 0 \ L_T r_2 - h_2 \ 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega_1^2 - h_1 r_1 T) & -2\xi_1 \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(\omega_2^2 - h_2 r_2 T) & -2\xi_2 \omega_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 T \\ 0 \\ h_2 T \end{pmatrix}$$

**Remarque** En décomposant la fonction non linéaire de portance  $L$  comme fonction polynomiale  $L(\psi) = \bar{q}S(C_L^1 \psi + C_L^2 \psi^2)$  (voir [18] pour plus de détails sur les coefficients aérodynamiques), on reconnaît, dans ce modèle, les termes d'efficacité aérodynamique  $A_6 = \bar{q}S C_L$  et d'efficacité de braquage  $K_1 = \frac{T L_T}{I_L}$ , classiquement utilisé en pilotage.

Les modèles réduits d'avion hypersonique (2.5) et de lanceur (2.8) présentent alors de fortes similitudes, et on voit se dessiner une classe de système semblable au modèle d'avion hypersonique. On peut en effet considérer le modèle de lanceur comme un cas particulier du modèle qui décrit l'avion hypersonique. Pour ces deux modèles, les non linéarités proviennent de l'aérodynamique et des interactions entre les dynamiques rigides et flexibles.

### ► Changement de variable

Le modèle d'aile aéroélastique présente une différence supplémentaire liée à la présence des deux variables rigides ( $\alpha$  et  $q$ ) dans la dynamique souple. Les techniques de séparation des échelles de temps n'ont pas lieu d'être pour ce modèle. On procède alors à une autre manipulation, en effectuant un changement de variable.

- **Aile aéroélastique** : On introduit le changement de variable suivant :

$$v = d_1 q + g_1 u \quad (2.9)$$

Le système (2.3) est alors transformé en :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} &= q \\ \dot{q} &= g(\alpha)\alpha + (d_2 - d_1 \frac{g_2}{g_1})q - k_2\eta - c_2\dot{\eta} + \frac{g_2}{g_1}v \\ \dot{\eta} &= f(\alpha)\alpha - k_1\eta - c_1\dot{\eta} + v \end{cases} \quad (2.10)$$

On choisit ensuite :

$$\bar{q} = q - (d_2 - d_1 \frac{g_2}{g_1})\alpha \quad (2.11)$$

ce qui mène à :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} &= \bar{q} + (d_2 - d_1 \frac{g_2}{g_1})\alpha \\ \dot{\bar{q}} &= g(\alpha)\alpha - k_2\eta - c_2\dot{\eta} + \frac{g_2}{g_1}v \\ \dot{\eta} &= f(\alpha)\alpha - k_1\eta - c_1\dot{\eta} + v \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec ces deux changements de variables successifs, le modèle d'aile aéroélastique a des équations dynamiques semblables à celles de l'avion hypersonique, ce qui permet de définir une classe de système générale.

Finalement, en considérant un système aérospatial, on montre que les manipulations mathématiques présentées ici, permettent de se ramener à une classe de système, présentant des propriétés communes. On définit de cette façon une classe de système théorique et générique.

### 2.1.3 Définition d'une classe de systèmes

L'analyse des équations dynamiques des trois exemples de systèmes aérospatiaux souples fait ressortir les caractéristiques communes suivantes :

- La présence de deux dynamiques bien identifiables (rigide et souple),
- Une interaction non linéaire entre ces deux dynamiques
- La présence d'une seule entrée de commande influençant les deux dynamiques.
- Une dynamique souple faiblement amortie, mais qui reste stable quand l'état rigide et la commande sont constants.

On définit ainsi une classe de système non linéaire théorique représentative d'un système aérospatial possédant  $p$  modes souples ( $p \geq 1$ ) par le modèle mathématique suivant :

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1)x_1 + x_2 + K_1N \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1)x_1 + K_2N + C_u u \\ \dot{N} &= A_N N + F_N(x_1)x_1 + B_N u \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  est l'état rigide,  $N = (\eta_1 \ \dot{\eta}_1 \ \cdots \ \eta_p \ \dot{\eta}_p)^T \in \mathbb{R}^{2p \times 1}$  est le vecteur des états souples appelé état flexible,  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée de commande et  $C_u \in \mathbb{R}^*$ . Les fonctions

## Chapitre 2. Mise en évidence d'une classe de systèmes et des objectifs de commande non linéaire

---

$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$  sont lisses. La matrice  $A_N$  est Hurwitz et les matrices  $K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 2p}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 2p}$ ,  $A_N \in \mathbb{R}^{2p \times 2p}$  et  $B_N \in \mathbb{R}^{2p \times 1}$  ont la forme suivante :

$$K_i = (k_1^i \ 0 \ \cdots \ k_p^i \ 0) \quad i \in \{1, 2\}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\xi_1\omega_1 & N_1^2 & 0 & \cdots & N_1^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ N_2^1 & 0 & -\omega_2^2 & -2\xi_2\omega_2 & \cdots & N_2^p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ N_p^1 & 0 & N_p^2 & 0 & \cdots & -\omega_p^2 & -2\xi_p\omega_p \end{pmatrix} \quad B_N = \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \\ \vdots \\ 0 \\ h_p \end{pmatrix} \quad F_N(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{\eta_1}(x) \\ \vdots \\ 0 \\ f_{\eta_p}(x) \end{pmatrix}$$

Les fonctions utilisées pour décrire ce système s'écrivent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = \sum_{k=1}^{m_1} a_k S(x)^k \quad f_2(x) = \sum_{k=1}^{m_2} c_k S(x)^k \quad (2.14)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad f_{\eta_i}(x) = \sum_{k=1}^r b_k^i S(x)^k \quad (2.15)$$

où  $S(x)$  est une fonction élémentaire qui peut être définie par :

$$S(x) = x \text{ ou } S(x) = \cos x \text{ ou } S(x) = \sin x \quad (2.16)$$

**Remarque** En comparant la classe de système  $\Sigma_0$  et le modèle de l'avion hypersonique (2.5), on s'aperçoit que dynamique rigide de l'avion hypersonique est plutôt décrit par l'équation suivante :  $\dot{x}_1 = f_1(x_1)x_1 + C_1x_2 + K_1N$ , avec  $C_1 \in \mathbb{R}^*$ . Dans la définition de la classe  $\Sigma_0$  (2.13), on a choisi de prendre  $C_1 = 1$ . Cela revient en effet à effectuer un changement de variable en posant  $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{C_1}$  et en redéfinissant cette dynamique.

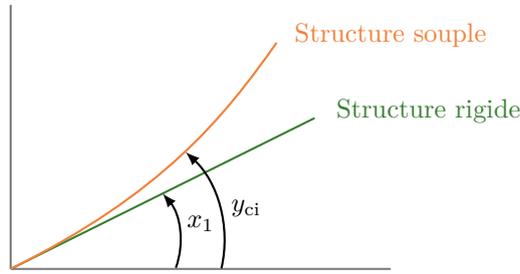
L'état complet du système n'est généralement pas mesuré. Pour cette raison, on définit une équation de sortie, qui, associée à (2.13) décrit complètement la classe des systèmes aérospatiaux souples. Les capteurs sont classiquement des centrales inertielles et des gyromètres mesurant l'attitude et la vitesse angulaire du système. Seulement, ces états rigides idéalement fournis par les capteurs sont altérés par les modes de flexion, comme représenté schématiquement sur la figure 2.2. Ainsi, un terme supplémentaire lié au mouvement du corps rigide induit par le mode souple est ajouté à l'équation de sortie.

Par exemple, dans le cas d'un système avec deux modes souples, équipé de trois capteurs, dont deux gyromètres (notés  $a$  et  $b$ ) mesurant  $x_2$  (une vitesse angulaire) et une centrale inertielle

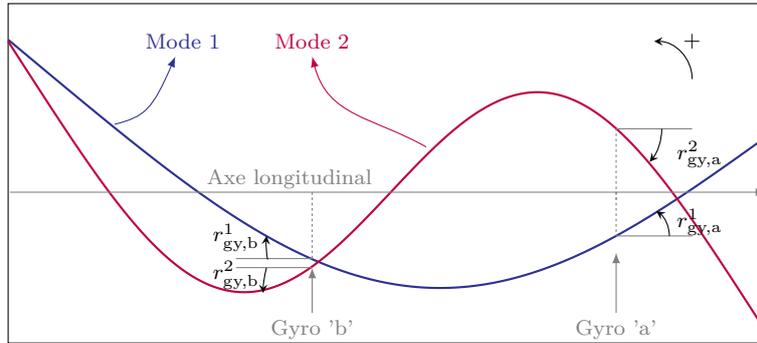
fournissant  $x_1$  (un angle), les mesures seront données par :

$$\begin{cases} y_{ci} &= x_1 + r_{ci}^1 \eta_1 + r_{ci}^2 \eta_2 \\ y_{gy,a} &= x_2 + r_{gy,a}^1 \dot{\eta}_1 + r_{gy,a}^2 \dot{\eta}_2 \\ y_{gy,b} &= x_2 + r_{gy,b}^1 \dot{\eta}_1 + r_{gy,b}^2 \dot{\eta}_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

où  $r_{ci}^i$  est la rotation souple induite par le  $i^{\text{ème}}$  mode au droit de la centrale inertielle et  $r_{gy,a}^i$  (resp.  $r_{gy,b}^i$ ) celle induite par le  $i^{\text{ème}}$  mode au droit du gyromètre  $a$  (resp.  $b$ ). Ces rotations souples sont décrites schématiquement sur la figure 2.3, où les déformées modales des deux premiers modes, le long de l'axe longitudinal du véhicule sont données. On constate ainsi que suivant la position du capteur, le signe de la rotation souple diffère. Des détails supplémentaires sur ces déformées sont données en [Annexe A](#).



**Figure 2.2** – Déformation de la mesure par les modes de flexion



**Figure 2.3** – Représentation schématique des déformées modales en fonction de la position du gyromètre

Finalement, pour généraliser la classe de système mise en évidence, on associe une équation de sortie, définie sous la forme générale suivante :

$$y = Cx + RN \quad (2.18)$$

où  $y \in \mathbb{R}^m$  avec  $m \geq 1$  le nombre de capteur,  $C \in \mathbb{R}^{m \times 2}$  et  $R \in \mathbb{R}^{m \times 2p}$  contient les termes de rotations induits par les modes souples au droit des capteurs.

Ainsi, les équations (2.13) et (2.18) définissent la dynamique liée au contrôle d'attitude d'un système aérospatial souple. La figure 2.4 représente, le schéma fonctionnel d'un système aérospatial souple, en mettant en évidence la dynamique rigide, la dynamique souple et leurs interactions.

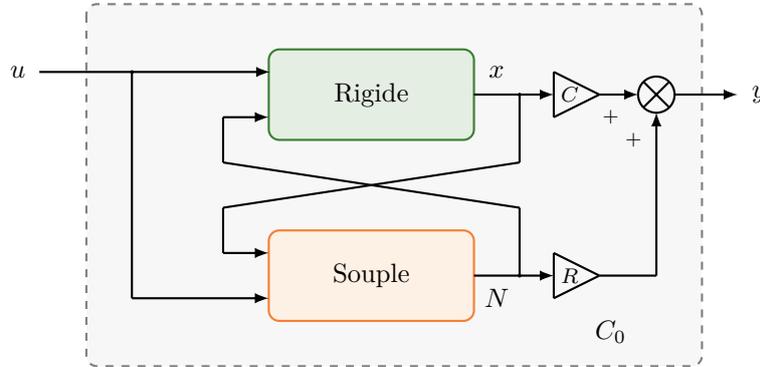


Figure 2.4 – Représentation schématique d'un système aérospatial souple

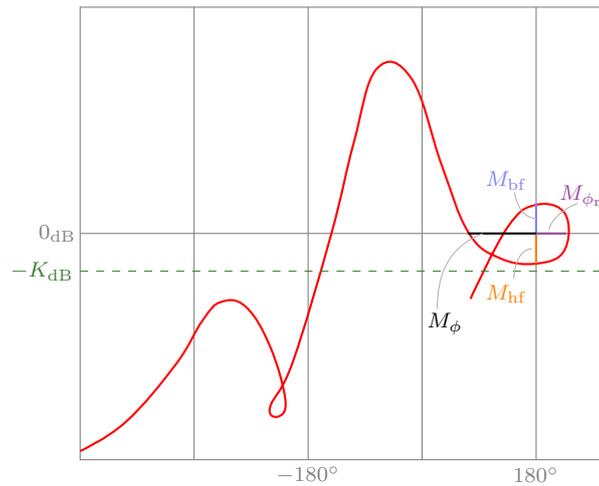
## 2.2 Analyse des objectifs de commande

On dispose maintenant d'une classe de système non linéaire, représentative de la dynamique liée au contrôle d'attitude d'un système aérospatial souple. Cette thèse vise au développement d'une méthode de commande pour un tel système. Pour cela, on analyse les objectifs de commande classiquement définis pour ces véhicules aérospatiaux.

Traditionnellement, en linéaire, les objectifs de commande des systèmes aérospatiaux souples sont traduits par des spécifications fréquentielles, selon trois bandes de fréquence, correspondant respectivement au mode rigide, au premier mode de flexion et aux autres modes de flexion (plus haut en fréquence). Pour ces trois modes, les spécifications sont traduites par des marges de stabilité à respecter. La figure 2.5 représente ces différentes spécifications, et propose un lieu de Black typique pour un système aérospatial souple :

- Pour le mode rigide, des marges de gains minimales (basses et hautes fréquences) doivent être respectées :  $M_{bf} > X_{bf}$  dB et  $M_{hf} > X_{hf}$  dB. Le respect d'une marge de phase minimale  $M_{\phi_r} > X_{\phi_r}^\circ$  est également demandée.
- Pour le 1<sup>er</sup> mode de flexion, une marge de phase est également définie, et l'objectif à vérifier s'écrit :  $M_\phi > X_\phi^\circ$
- Pour les autres modes souples, l'amplitude des résonances est limitée par une borne supérieure  $K$ dB

Les spécifications liées au mode rigide correspondent aux objectifs classiques de stabilité de la dynamique rigide. Pour assurer les objectifs de stabilité liés au premier mode de flexion, un



**Figure 2.5** – Représentation schématique des spécifications fréquentielles sur le lieu de Black

calage en phase est souvent effectué du fait de sa proximité fréquentielle avec le mode rigide. Ce contrôle en phase peut être effectué à l'aide d'un filtre imposant une variation brutale de phase sans variation de gain, construit à partir de seconds ordres, de la façon suivante :

$$H(s) = \frac{(s/\omega_f)^2 - 2\xi_n(s/\omega_f) + 1}{(s/\omega_f)^2 + 2\xi_d(s/\omega_f) + 1} \quad (2.19)$$

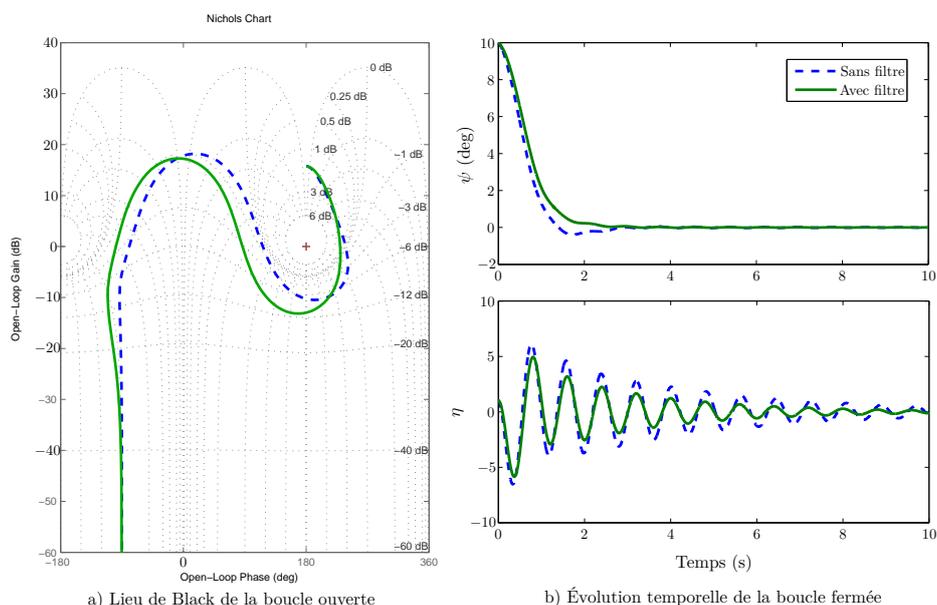
où  $\xi_f$  est l'amortissement naturel du mode souple,  $\omega_f$  sa pulsation naturelle et  $\xi_n$  et  $\xi_d$  sont à régler. Le lieu de Black de la figure 2.6 illustre ce calage en phase, fréquentiel, et son influence sur l'évolution temporelle des modes souples. Pour le tracé de cette figure, un simple filtre à retard de phase a été utilisé.

Enfin, les autres modes souples sont stabilisés à l'aide de filtres trous (*notch filters*), appliqués à la fréquence des modes souples, de façon à atténuer les pics de résonance qu'ils provoquent, et ainsi satisfaire les spécifications.

Cette façon de procéder pour contrôler le système pourrait être transposée en commande non linéaire, pour des modes souples haut en fréquence, en synthétisant une loi non linéaire pour stabiliser le mode rigide et en ajoutant des filtres trous aux fréquences des modes souples afin d'atténuer leurs surtensions, et d'éviter ainsi de les exciter [86].

Ce n'est cependant pas cette manière de procéder qui sera considérée dans cette étude. En effet, l'utilisation de filtres trous n'est possible que si les modes souples sont suffisamment haut en fréquence, et n'altèrent pas les modes de pilotage.

Dans cette thèse, on considère ainsi des modes de flexion bas en fréquence, pour lesquels l'utilisation de filtres trous n'est pas possible (du fait de la proximité avec le rigide). Se plaçant dans le domaine de la commande non linéaire, résonner en fréquentiel est difficile. L'idée de la méthode que l'on cherche à développer dans cette thèse, est de "transposer" la technique du



**Figure 2.6** – Influence de la marge de phase de la boucle ouverte sur l'amortissement du mode souple

calage en phase au domaine temporel, classiquement utilisée en commande non linéaire. On propose ainsi de mettre au point une méthode de commande alternative, permettant d'amortir les modes souples, ce qui signifie atténuer les oscillations qu'ils induisent, comme sur la figure 2.6.

### 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une classe de système non linéaire théorique et représentative de la dynamique liée au contrôle d'attitude d'un système aérospatial souple est mise en évidence. Considérant un système aérospatial souple, des manipulations mathématiques comme la séparation des échelles de temps ou des changements de variables permettent de se ramener à cette classe de système. Cette classe constitue ainsi la base du travail méthodologique de commande qui est réalisé dans cette étude. Ce chapitre présente également les objectifs de commande fixés pour cette étude. Ainsi, dans cette thèse, un système aérospatial souple avec des modes de flexion bas en fréquence est considéré, et les objectifs de commande consistent à assurer sa stabilité tout en amortissant ses modes de flexion.

## Synthèse d'une loi de commande non linéaire améliorant l'amortissement d'un système aérospatial souple

---

L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode de commande non linéaire qui stabilise, de façon globale et asymptotique, un système aérospatial souple, tout en atténuant ces modes de flexion. Pour cela, une classe de système non linéaire à minimum de phase (Classe  $\Sigma_1$ ) est définie. Puis, en supposant l'état complet disponible, deux approches de commande, basées sur la théorie de Lyapunov et un changement de variable sont proposées pour satisfaire les objectifs. La première approche consiste à atténuer les modes de flexion en limitant l'impact de la dynamique rigide sur la dynamique souple. La seconde approche cherche quand à elle à apporter de l'amortissement. Ces deux approches consistent en un *backstepping* étendu au cas flexible, et appelé abusivement *backstepping flexible*. L'utilisation par le contrôleur de l'état complet du système permet d'améliorer le régime transitoire du système. Puis, sachant que les systèmes aérospatiaux font partie d'une même classe de système non linéaire souple (classe  $\Sigma_0$ ), on montre que des changements de variables permettent d'extraire de  $\Sigma_0$  un sous-système non linéaire appartenant à la classe  $\Sigma_1$ . Le *backstepping flexible* peut ainsi être appliqué à ce sous-système, en définissant une commande intermédiaire. Une étape supplémentaire de *backstepping* est alors réalisée pour revenir à l'entrée de commande. Ce résultat théorique est ensuite appliqué à un modèle de lanceur souple et d'avion hypersonique. On montre alors l'intérêt du *backstepping flexible* en terme d'atténuation des modes souples et d'amélioration du régime transitoire en le comparant à une loi de commande classique. Pour finir, le comportement local du système est modifié en unissant notre loi non-linéaire à un contrôleur LQ afin d'assurer aux trajectoires un comportement local linéaire.

---

### 3.1 Développement théorique de la loi de commande Backstepping Flexible

Tout au long de ce chapitre, on se place dans un cas nominal, en supposant que tous les paramètres décrivant le système sont connus, et que l'état complet du système est accessible.

### 3.1.1 Système considéré et objectifs

On considère la classe de système non linéaire suivante, que l'on notera Classe  $\Sigma_1$  :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} &= u \\ \dot{z} &= f_z(z, x, u) := A_z z + F(x)x + H(x)u \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

- $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2p}$  ( $p > 1$ ) est l'état,
- $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée de commande,
- $f_z$  est stable au sens entrée-état (ISS) par rapport aux entrées  $x$  et  $u$ ,
- $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$  et  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$  sont des fonctions de classe  $C^1$ ,
- $A_z \in \mathbb{R}^{2p \times 2p}$  est Hurwitz

En lien avec les parties applicatives qui suivront, le terme *dynamique rigide* sera abusivement utilisé pour la dynamique liée à l'état  $x$  et *dynamique souple* ou *dynamique flexible* pour la dynamique liée à l'état  $z$ . La variable  $p$  désigne en effet le nombre de modes souples du système considéré.

**Remarque** La classe de système  $\Sigma_1$  considérée dans cette étude théorique, est "simple" du point de vue de la dynamique rigide. Le développement de la loi de commande Backstepping Flexible aurait pu être réalisé sur une classe plus large, avec  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  ( $n_x > 1$ ) et une dynamique rigide triangulaire supérieure. On a choisi de travailler avec cette classe de système parce qu'elle concorde parfaitement avec l'application que l'on souhaite étudier, à savoir les systèmes aérospatiaux souples, définis dans le chapitre précédent.

La partie théorique est réalisée, sans perte de généralité, avec un point d'équilibre  $(x_c, z_c)$  à l'origine. Si ce n'est pas le cas, alors on définit l'écart entre l'état et l'état d'équilibre en prenant :

$$\delta x = x - x_c \text{ et } \delta z = z - z_c \quad (3.2)$$

Les dynamiques des erreurs s'expriment alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \dot{x} = u \\ \delta \dot{z} &= A_z(\delta z + z_c) + F(x)(\delta x + x_c) + H(x)u \\ &= A_z \delta z + \cancel{A_z z_c} + F(x)\delta x + F(x)x_c + H(x)u + \cancel{F(x_c)x_c} - F(x_c)x_c \\ &= A_z \delta z + F(x)x - F(x_c)x_c + H(x)u \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.1 Développement théorique de la loi de commande Backstepping Flexible

On choisit alors la fonction  $\bar{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$  par :

$$\begin{cases} \bar{F}(x) = \frac{F(x)x - F(x_c)x_c}{\delta x} & \text{si } \delta x \neq 0 \\ \bar{F}(x) = \frac{d(F(x)x)}{dx} & \text{si } x = x_c \end{cases} \quad (3.4)$$

Ainsi, le modèle aux écarts issu du système (3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\delta x} = u \\ \dot{\delta z} = A_z \delta z + \bar{F}(x) \delta x + H(x)u \end{cases} \quad (3.5)$$

On donne également un résultat, extrait des propriétés de la classe de système considérée, qui sera utilisé tout au long du développement de la loi de commande. La matrice  $A_z$  étant Hurwitz, il existe une matrice  $Q_z \in \mathbb{R}^{2p \times 2p}$  définie positive et une matrice  $P_z \in \mathbb{R}^{2p \times 2p}$  symétrique et définie positive vérifiant l'équation de Lyapunov :

$$A_z^T P_z + P_z A_z = -2Q_z \quad (3.6)$$

On cherche alors une loi de commande non linéaire satisfaisant les objectifs suivants :

- assurer la stabilité globale et asymptotique de l'origine du système (3.1),
- améliorer l'amortissement de la dynamique souple :  $z$  doit être stable et bien amorti.

Pour satisfaire ces deux objectifs de commande, deux approches ont été mises en place : la première approche consiste à améliorer l'amortissement de la dynamique souple en limitant l'impact de la dynamique rigide sur la dynamique souple. La seconde approche consiste à apporter directement de l'amortissement à la dynamique souple.

#### 3.1.2 Première approche : limiter l'impact du rigide sur la dynamique souple

Afin de justifier au mieux les choix effectués dans la mise au point de la loi de commande, on présente dans cette sous-partie les différentes étapes de la démarche qui ont menés à la synthèse d'une loi limitant l'effet de la dynamique rigide sur la dynamique souple.

##### ► Première étape : si $H(x) = H_0$ constante

La première étape consiste à considérer la fonction  $H$  comme une constante, c'est à dire vérifiant l'hypothèse suivante :

##### Hypothèse 3.1

Il existe  $H_0 \in \mathbb{R}^{2p}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = H_0$

**Hypothèse 3.2**

Il existe une constante positive  $c_2$  vérifiant la condition suivante :  $c_2 < \frac{\lambda_{\min}(P_z)}{H_M^2 \lambda_{\max}(P_z)}$  avec  $H_M = \|H_0\|_2$

M. Reyhanoglu et J. Hervas ont développés, dans [89], une loi de commande non linéaire, basée sur la théorie de Lyapunov, pour contrôler les mouvements d'un robot déplaçant un récipient rempli de liquide. Le système robotique souple considéré dans ce papier est très proche de la classe de système  $\Sigma_1$  considérée ici. Les objectifs de commande et les systèmes considérés étant similaires, on a choisi, dans un premier temps, de s'inspirer de ce travail et de considérer une fonction de Lyapunov semblable à celle utilisée dans [89]. Elle est définie par :

$$V_1(x, z)^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{c_2}{2} [z^T P_z z - 2z^T P_z H_0 x] \quad (3.7)$$

**Proposition 3.1**

Si les hypothèses 3.1 et 3.2 sont vérifiées, alors la fonction  $V_1$  est définie positive sur  $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ .

**Démonstration de 3.1 :** Soit  $P_z^{1/2}$  une racine carré de  $P_z$ .

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2p} \quad (P_z^{1/2} z - P_z^{1/2} H_0 x)^T (P_z^{1/2} z - P_z^{1/2} H_0 x) \geq 0$$

En développant cette expression positive, il vient :

$$z^T P_z z + x^2 H_0^T P_z H_0 - 2z^T P_z H_0 x \geq 0 \Rightarrow -2z^T P_z H_0 x \geq -z^T P_z z - x^2 H_0^T P_z H_0$$

Ce qui permet de majorer la fonction  $V_1$  :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2p} \quad V_1(x, z) \geq \frac{1}{2}x^2 (1 - c_2 H_0^T P_z H_0)$$

Le caractère symétrique de  $P_z$  et l'hypothèse 3.2 permettent d'écrire :

$$c_2 H_0 P_z H_0 \leq c_2 H_M^2 \lambda_{\max}(P_z) \leq \frac{\lambda_{\min}(P_z)}{\lambda_{\max}(P_z)} \leq 1$$

Il vient ainsi

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2p} \quad V_1(x, z) \geq \frac{1}{2}x^2 \geq 0 \quad \blacksquare$$

En considérant le système (3.5), on calcule la dérivée temporelle de  $V_1$  :

$$\dot{V}_1(x, z) = xu + c_2 [A_z z + F(x)x + H_0 u]^T P_z z - c_2 \dot{z}^T P_z H_0 x - c_2 z^T P_z H_0 \dot{x}$$

---

1. La fonction choisie est équivalente à  $V_1(x, z) = \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{2} [z^T P_z z - 2z^T P_z H_0 x]$  Sans perte de généralité, on choisit  $c_1 = 1$ , ce qui revient à choisir  $c_2' = \frac{c_2}{c_1}$

$$= x \left( u + c_2 F(x)^T P_z z - c_2 \dot{z}^T P_z H_0 \right) + c_2 z^T A_z^T P_z z$$

L'équation de Lyapunov (3.6), permet de transformer le dernier terme :

$$z^T A_z^T P_z z = \frac{1}{2} z^T A_z^T P_z z + \frac{1}{2} z^T P_z A_z z = \frac{1}{2} z^T (A_z^T P_z + P_z A_z) z = -z^T Q_z z \quad (3.8)$$

Et  $\dot{V}_1$  s'écrit alors :

$$\dot{V}_1(x, z) = x \left[ u \Delta_1(x, z) + \Gamma_1(x, z) \right] - c_2 z^T Q_z z \quad (3.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 - c_2 H_0^T P_z H_0 \\ \Gamma_1(x, z) &= c_2 F(x)^T P_z z - c_2 [A_z z + F(x)x]^T P_z H_0 \end{aligned}$$

La positivité de  $\Delta_1$  a été montré dans la démonstration de la proposition 3.1. Ainsi, on peut définir la loi de commande  $u_1$  de la façon suivante :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2p}, \quad u_1(x, z) = -\frac{\lambda_1 x + \Gamma_1(x, z)}{\Delta_1}, \quad \lambda_1 > 0 \quad (3.10)$$

La dérivée temporelle de la fonction  $V_1$  s'écrit alors :

$$\dot{V}_1(x, z) = -\lambda_1 x^2 - c_2 z^T Q_z z \quad (3.11)$$

qui vérifie  $\dot{V}_1 < 0$  pour  $(x, z) \neq (0, 0)$ . La fonction  $V_1$  est bien une fonction de Lyapunov et le résultat est résumé par la proposition suivante :

#### **Proposition 3.2**

Si les hypothèses 3.1, 3.2 sont vérifiées, alors l'origine du système en boucle fermée, formé par le système (3.1) et la loi de commande (3.10) est globalement et asymptotiquement stable.

#### **► Deuxième étape : si $H(x)$ est une fonction bornée**

#### **Hypothèse 3.3**

Il existe un réel positif  $H_M$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \|H(x)\|_2 \leq H_M$

On choisit d'utiliser l'intégrale de la fonction  $H$  dans la fonction de Lyapunov, en définissant la fonction  $\mathcal{H} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$  par :

$$\mathcal{H}(x)x := \int_{x_c}^x H(s) ds = \int_0^x H(s) ds \quad (3.12)$$

On considère alors la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_2(x, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{c_2}{2} [z^T P_z z - 2z^T P_z \mathcal{H}(x)x] \quad (3.13)$$

**Proposition 3.3**

Sous les hypothèses 3.2 et 3.3, la fonction  $V_2$  est définie positive.

**Démonstration de 3.3 :** L'hypothèse 3.2 permet d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\| \int_0^x H(s)ds \right\|_2 \leq |x|H_M \Rightarrow \|\mathcal{H}(x)\|_2 \leq H_M \quad (3.14)$$

D'où

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2p} \quad V_2(x, z) \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{c_2}{2} [z^T P_z z - 2|z^T P_z H_M x|] \quad (3.15)$$

De plus, pour tout  $k > 0$  on a :

$$-2|z^T P_z H_M x| \geq -k^2 x^2 - \frac{H_M^2}{k^2} z^T P_z z$$

Ainsi, la fonction  $V_2$  vérifie :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2p} \quad V_2(x, z) \geq \frac{1}{2}(1 - k^2 c_2)x^2 + \frac{c_2}{2} z^T \left( P_z - \frac{H_M^2}{k^2} P_z^2 \right) z$$

Alors  $V_2$  est définie positive si :

$$k^2 c_2 < 1 \text{ et } P_z < \frac{H_M^2}{k^2} P_z^2 \quad (3.16)$$

Comme  $\lambda_{\min}(P_z)I_{2p} < P_z$  et  $P_z^2 < \lambda_{\max}(P_z^2)I_{2p}$ , la condition (3.16) devient :

$$c_2 < \frac{1}{k^2} \text{ et } \lambda_{\min}(P_z) \geq \frac{H_M^2}{k^2} \lambda_{\max}(P_z^2) \quad (3.17)$$

On peut vérifier la seconde condition de (3.17) en choisissant :  $k^2 = H_M^2 \frac{\lambda_{\max}(P_z^2)}{\lambda_{\min}(P_z)}$ . La première condition de (3.17) est finalement assurée par l'hypothèse 3.2. ■

**Proposition 3.4**

Soit la fonction  $\Delta_2$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $\Delta_2(x) = 1 - c_2 H(x)^T P_z \mathcal{H}(x)$ .

Si les hypothèses 3.3 et 3.2 sont vérifiées, alors la fonction  $\Delta_2$  est définie positive sur  $\mathbb{R}$  et l'origine du système en boucle fermée, composé de (3.5) et de la loi de commande suivante :

$$u_2(x, z) = -\frac{\lambda_2 x + \Gamma_2(x, z)}{\Delta_2(x)}, \quad \lambda_2 > 0 \quad (3.18)$$

avec :

$$\Gamma_2(x, z) = c_2 z^T P_z F(x) - c_2 (A_z z + F(x)x)^T P_z \mathcal{H}(x) \quad (3.19)$$

est globalement et asymptotiquement stable.

**Démonstration :** On remarque tout d'abord que :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{H}(x)x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x H(s)ds \right] \dot{x} = H(x)u \quad (3.20)$$

On calcule ensuite la dérivée temporelle de la fonction  $V_2$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x, z) &= xu + c_2 [A_z z + F(x)x + \mathcal{H}(x)u]^T P_z z - c_2 \dot{z}^T P_z \mathcal{H}(x)x - \cancel{c_2 z^T P_z \mathcal{H}(x)u} \\ &= x(u\Delta_2(x) + \Gamma_2(x)) - c_2 z^T Q_z z \end{aligned}$$

De plus, la fonction  $\Delta_2$  vérifie :  $\Delta_2(x) \geq 1 - c_2 H_M^2 \lambda_{\max}(P_z) > 0$ . La loi de commande (3.18) est donc bien définie, et permet finalement d'écrire :

$$\dot{V}_2 = -\lambda_2 x^2 - c_2 z^T Q_z z \quad (3.21)$$

ce qui satisfait  $\dot{V}_2 < 0$ . Ainsi, la fonction  $V_2$  est une fonction de Lyapunov. Le théorème de stabilité de Lyapunov assure une stabilité globale et asymptotique de l'origine de la boucle fermée composée du système (3.1) et de la loi de commande (3.18) ■

Le contrôleur mis en place ici satisfait les objectifs de commande en imposant une contrainte au système, à travers la fonction  $H$ . Cependant, la contrainte imposée par l'hypothèse 3.3 est très forte. En effet, une fonction  $H(x)$  polynomiale ne vérifie pas cette hypothèse. D'un point de vue théorique, ce résultat n'est donc pas suffisant, puisque l'on cherche à mettre au point une méthode de commande non linéaire générique. D'un point de vue pratique, il est vrai que l'état  $x$  sera borné puisqu'il est limité par des contraintes physiques. Par conséquent, la fonction  $H$  sera bornée elle aussi, sur un ensemble donné. Cependant, la forme de la fonction de Lyapunov choisie impose également une contrainte à la loi de commande, à travers le paramètre de réglage  $c_2$ . Cette contrainte complexifie le réglage de la loi de commande. Pour ces raisons, il serait préférable de pouvoir relâcher les hypothèses 3.3 et 3.2. C'est ce qui est fait dans l'étape suivante, en définissant un changement de variable.

#### ► Troisième étape : en utilisant un changement de variable

Afin de se passer de la contrainte imposée à la fonction  $H$ , on élimine cette fonction de la dynamique souple en définissant le changement de variable suivant :

$$Z := z - \mathcal{H}(x)x \quad (3.22)$$

et on l'applique au système (3.1). Il vient alors :

$$\dot{Z} = \dot{z} - H(x)u = A_z z + F(x)x \quad (3.23)$$

Finalement, le système (3.1) est transformée en une nouvelle classe de système appelée Classe  $C_2$  :

$$C_2 : \begin{cases} \dot{x} &= u \\ \dot{Z} &= A_z Z + G(x)x \end{cases} \quad (3.24)$$

avec  $G(x) = A_z \mathcal{H}(x) + F(x)$

On considère alors la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_3(x, Z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{c_2}{2}Z^T P_z Z \quad (3.25)$$

**Proposition 3.5**

L'origine de la boucle fermée composée du système (3.24) avec la loi de commande suivante :

$$u_3(x, Z) = -\lambda_3 x - c_2 G(x)^T P_z Z, \quad \lambda_3 > 0 \quad (3.26)$$

est globalement et asymptotiquement stable.

**Démonstration :** La fonction  $V_3$  est clairement définie positive. Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= xu + c_2 [A_z Z + G(x)x]^T P_z Z \\ &= x \left[ u + c_2 G(x)^T P_z Z \right] - c_2 Z^T Q_z Z \end{aligned}$$

Avec la loi de commande (3.26), la dérivée temporelle de  $V_3$  devient :

$$\dot{V}_3 = -\lambda_3 x^2 - c_2 Z^T Q_z Z \quad (3.27)$$

et vérifie  $\dot{V}_3 < 0$ . La stabilité globale et asymptotique de l'origine de la boucle fermée composée du système (3.24) et de la loi de commande (3.26) est donc assurée. ■

**Remarque** La classe de système considérée étant à minimum de phase, une loi de commande de la forme  $u(x) = -\lambda_x x$  avec  $\lambda_x > 0$ , n'utilisant que la dynamique rigide, serait suffisante pour réguler l'état  $x$  et stabiliser le système. On a cependant choisi d'utiliser la dynamique souple  $z$  dans la loi de commande. Ce choix va permettre de limiter l'interaction de la dynamique rigide sur le transitoire de la dynamique souple et d'assurer un meilleur amortissement. Ce résultat sera illustré lors de l'application de la loi de commande sur un système aérospatial souple. De plus, on verra dans le chapitre 5 qu'il est nécessaire de prendre en compte les modes souples dans la commande lorsque les actionneurs et les capteurs ne sont pas collocalisés.

On peut étendre la loi de commande (3.26) en ajoutant un terme supplémentaire qui va

### 3.1 Développement théorique de la loi de commande Backstepping Flexible

apporter de l'amortissement. En effet, en définissant une fonction  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que<sup>2</sup>

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x\sigma(x) > 0 \quad (3.28)$$

La loi  $u_3$  définie par :

$$u_3(x, Z) = -\lambda_3 x - c_2 G(x)^T P_z Z - c_4 \sigma(x) Z^T Q_z Z, \quad c_4 > 0 \quad (3.29)$$

assure une stabilité globale et asymptotique à l'origine du système en boucle fermée. En considérant la même fonction de Lyapunov,  $V_4 = V_3$ , sa dérivée temporelle s'écrit alors :

$$\dot{V}_4 = \dot{V}_3 - c_4 x \sigma(x) Z^T Q_z Z \leq \dot{V}_3 \quad (3.30)$$

Et cette loi de commande apporte de l'amortissement aux modes souples en réduisant leur énergie.

#### 3.1.3 Deuxième approche : apporter de l'amortissement

L'approche proposée dans cette partie pour satisfaire les objectifs de commande, à savoir assurer la stabilité du système tout en améliorant le régime transitoire de la dynamique souple est basée sur un résultat théorique tiré de [69]. Ainsi, avant de développer notre résultat, on présente ce résultat théorique.

##### Lemme 3.1 ( Wei Lin [69])

Soit le système non-linéaire et non affine suivant :

$$\dot{z} = f_0(z) + g_0(z)u + \sum_{i=2}^l g_i(z)u^i \quad (3.31)$$

où  $u \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{2p}$ ,  $g_i : \mathbb{R}^{2p} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$ ,  $2 \leq i \leq l$  sont des fonctions lisses. On suppose que la dynamique en régime libre  $f_0$  est telle qu'il existe des fonctions  $V : \mathbb{R}^{2p} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha_0$  de classe  $\mathcal{K}$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  telles que :

$$\forall z \in \mathbb{R}^{2p} \quad \alpha_1(\|z\|) \leq V(z) \leq \alpha_2(\|z\|) \quad (3.32)$$

$$\dot{V}|_{u=0} = \frac{\partial V}{\partial z} f_0(z) \leq -\alpha_0(z) \quad (3.33)$$

2. On pourra par exemple choisir  $\sigma(x) = x$

alors le système en régime libre est globalement et asymptotiquement stable et la loi de commande définie par :

$$u(z) = \varphi(z) := \frac{-b}{1 + \|\partial V/\partial z\|^2 \rho(z)^2} \frac{L_{g_0} V(z)}{1 + (L_{g_0} V(z))^2} \quad (3.34)$$

avec

$$\rho(z) \geq \sum_2^l 1 + \|g_i(z)\|^2 \quad \text{et} \quad b \in ]0, 1[ \quad (3.35)$$

assure également la stabilité globale et asymptotique du système (3.31) avec :

$$\dot{V} \leq \dot{V}|_{u=0} - \frac{1-b}{1 + \|\partial V/\partial z\|^2 \rho(z)^2} \frac{(L_{g_0} V(z))^2}{1 + (L_{g_0} V(z))^2} \leq \dot{V}|_{u=0} \quad (3.36)$$

On dit dans ce cas que la loi  $u$  apporte de l'amortissement au système (3.31).

On souhaite appliquer ce résultat à la classe de système théorique  $\Sigma_1$ , définie, on le rappelle par :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} &= u \\ \dot{z} &= A_z z + F(x)x + H(x)u \end{cases}$$

Pour cela, on restreint la classe  $\Sigma_0$  en imposant une hypothèse sur les fonctions  $F$  et  $H$ , définies jusque là comme des fonctions de classe  $C^1$  :

#### **Hypothèse 3.4**

Les fonctions  $F$  et  $H$  sont des polynômes de degré fini.

On a montré dans la section précédente, en introduisant un changement de variable que contrôler la classe de système  $\Sigma_1$  revenait à contrôler la classe  $C_2$  définie par le système (3.24) que l'on rappelle :

$$C_2 : \begin{cases} \dot{x} &= u \\ \dot{Z} &= A_z Z + G(x)x \end{cases}$$

La fonction  $G$ , définie suite à un changement de variable dans la section précédente par  $G(x) = A_z \mathcal{H}(x) + F(x)$ , est, sous l'hypothèse 3.4, un polynôme de degré fini.

Ainsi, en choisissant  $f_0 : \mathbb{R}^{2p} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$ ,  $g_0 \in \mathbb{R}^{2p}$  et  $g_i \in \mathbb{R}^{2p}$  de la façon suivante :

$$f_0(Z) := A_z Z$$

$$g_0 := \left. \frac{dG(x)x}{dx} \right|_{x=0} \quad g_i := \left. \frac{1}{i!} \frac{d^i G(x)x}{dx^i} \right|_{x=0} \quad \forall i \in \{2, \dots, l\}$$

la dynamique souple de (3.1.3) s'écrit :

$$\dot{Z} = f_0(Z) + g_0 x + \sum_{i=2}^l g_i x^i \quad (3.37)$$

### 3.1 Développement théorique de la loi de commande Backstepping Flexible

L'hypothèse 3.4 assure ainsi que la somme est finie. On applique alors le résultat du lemme avec  $V := V_z = \frac{1}{2}Z^T P_z Z$  et on calcule  $\varphi$  en utilisant la relation (3.34).

$$\varphi(Z) = \frac{-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{L_{g_0} V(Z)}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} \quad (3.38)$$

On calcule la dérivée temporelle de la fonction  $V$  :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [f_0(Z) + g_0 x + \sum_{i=2}^l g_i x^i]^T P_z Z \\ &= -Z^T Q_z Z + [L_{g_0} V x + \sum_{i=2}^l L_{g_i} V x^i]^T \end{aligned}$$

On choisit

$$\delta_x = x - \varphi(Z) \quad (3.39)$$

et en remarquant que :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad x^i = (\varphi + \delta_x)^i = \varphi^i + \sum_{k=0}^{i-1} C_i^k \varphi^k \delta_x^{i-k} \quad \text{avec } C_i^k = \frac{i!}{k!(i-k)!} \quad (3.40)$$

Il vient :

$$\dot{V} = -Z^T Q_z Z + [L_{g_0} V \varphi + \sum_{i=2}^l L_{g_i} V \varphi^i]^T + [L_{g_0} + \sum_{\substack{2 \leq i \leq l \\ 0 \leq k \leq i-1}} L_{g_i} C_i^k \varphi^k \delta_x^{i-k-1}]^T \delta_x \quad (3.41)$$

En appliquant le résultat (3.36) du lemme, on a :

$$\dot{V} \leq -Z^T Q_z Z - \frac{1-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{(L_{g_0} V(Z))^2}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} + [L_{g_0} V + \sum_{\substack{2 \leq i \leq l \\ 0 \leq k \leq i-1}} L_{g_i} V C_i^k \varphi^k \delta_x^{i-k-1}]^T \delta_x \quad (3.42)$$

On réalise ensuite une seconde étape de backstepping pour mettre en évidence l'entrée de commande  $u$ , en considérant la fonction de Lyapunov suivante :

$$W = V + \frac{1}{2} \delta_x^2 \quad (3.43)$$

En choisissant la commande  $u$  comme suit :

$$u = -k_1 \delta_x + \dot{\varphi} - [L_{g_0} V + \sum_{\substack{2 \leq i \leq l \\ 0 \leq k \leq i-1}} L_{g_i} V C_i^k \varphi^k \delta_x^{i-k-1}] \quad (3.44)$$

la dérivée temporelle de  $W$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{W} &\leq -Z^T Q_z Z - \frac{1-b}{1 + \|\partial V/\partial Z\|^2 \rho(z)^2} \frac{(L_{g_0} V(Z))^2}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} \\ &\quad + \delta \left( [L_{g_0} V + \sum_{\substack{2 \leq i \leq l \\ 0 \leq k \leq i-1}} L_{g_i} V C_i^k \varphi^k \delta^{i-k-1}] + u - \dot{\varphi} \right) \\ &\leq -Z^T Q_z Z - \frac{1-b}{1 + \|\partial V/\partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{(L_{g_0} V(Z))^2}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} - k_1 \delta_x^2\end{aligned}$$

Le résultat finale est synthétisé dans la proposition suivante :

**Proposition 3.6**

L'origine du système en boucle fermée composé du système (3.1) et de la loi de commande (3.44) est globalement et asymptotiquement stable. Cette loi améliore de plus le régime transitoire de la dynamique souple (au sens atténuation des oscillations souples).

## 3.2 Application du Backstepping Flexible aux systèmes aérospatiaux souples

### 3.2.1 Mise en évidence d'un sous-système appartenant à la classe $\Sigma_1$

Les systèmes aérospatiaux souples font parties d'une même classe de système non linéaire  $\Sigma_0$  définie par (2.13). Afin d'appliquer les lois théoriques backstepping flexible développées dans ce chapitre sur la classe  $\Sigma_1$ , on met en évidence des changements de variables qui permettent de passer de la classe  $\Sigma_0$  à la classe  $\Sigma_1$ .

**Proposition 3.7**

Les changements de variables suivants permettent d'extraire de (2.13) un sous-système appartenant à la classe  $\Sigma_1$

$$x_2^* = f_1(x_1)x_1 + x_2 + K_1 N \tag{3.45}$$

$$z = N - \frac{1}{C_u} [\bar{B}_N x_1 + B_N x_2^*] \text{ avec } \bar{B}_N = (h_1 \ 0 \ \dots \ h_n \ 0)^T \tag{3.46}$$

**Démonstration :** La définition de  $x_2^*$  donne

$$\dot{x}_1 = x_2^* \tag{3.47}$$

Calculons la dérivée temporelle de  $x_2^*$  :

$$\dot{x}_2^* = x_2^* \left[ \frac{df_1(x_1)}{dx_1} x_1 + f_1(x_1) \right] + x_1 \left[ f_2(x_1) + \underbrace{K_1 F_N(x_1)}_{=0} \right] + [K_2 + K_1 A_N] N + [C_2 C_u + \underbrace{K_1 B_N}_{=0}] u$$

### 3.2 Application du Backstepping Flexible aux systèmes aérospatiaux souples

En prenant la notation  $K_z = K_2 + K_1 A_N$ , et en utilisant le changement de variable (3.46), la dérivée temporelle de  $x_2^*$  s'écrit :

$$\dot{x}_2^* = \Lambda(x_1, x_2^*, z) + C_u u \quad (3.48)$$

avec

$$\Lambda(x_1, x_2^*, z) = x_2^* \left[ \frac{df_1(x_1)}{dx_1} x_1 + f_1(x_1) + \frac{K_z B_N}{C_u} \right] + x_1 \left[ f_2(x_1) + \frac{K_z \bar{B}_N}{C_u} \right] + K_z z$$

Prenons la dérivée temporelle de  $z$  :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_N N + B_N u + F_N(x_1) x_1 - \frac{1}{C_u} [\bar{B}_N x_2^* + B_N \dot{x}_2^*] \\ &= A_N N + B_N u + F_N(x_1) x_1 - \frac{\bar{B}_N}{C_u} x_2^* - \frac{B_N}{C_u} [\Lambda(x_1, x_2^*, z) + C_u u] \\ &= A_N \left( z + \frac{1}{C_u} [\bar{B}_N x_1 + B_N x_2^*] \right) + F_N(x_1) x_1 - \frac{\bar{B}_N}{C_u} x_2^* - \frac{B_N}{C_u} \Lambda(x_1, x_2^*, z) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\dot{z} = A_z z + F(x_1) x_1 + H(x_1) x_2^* \quad (3.49)$$

avec

$$\begin{aligned} A_z &= A_N - \frac{B_N K_z}{C_u} \\ F(x_1) &= F_N(x_1) + \frac{1}{C_u} (A_z \bar{B}_N - B_N f_2(x_1)) \\ H(x_1) &= \frac{1}{C_u} (A_z B_N - \bar{B}_N - B_N \left[ \frac{df_0(x_1)}{dx_1} x_1 + f_0(x_1) \right]) \end{aligned}$$

Ainsi, les changements de variable (3.45) et (3.46) transforment le système (2.13) en :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^* \\ \dot{x}_2^* &= \Lambda(x_1, x_2^*, z) + C_u u \\ \dot{z} &= A_z z + F(x_1) x_1 + H(x_1) x_2^* \end{cases} \quad (3.50)$$

En supposant la matrice  $A_z$  stable, le sous-système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^* \\ \dot{z} &= A_z z + F(x_1) x_1 + H(x_1) x_2^* \end{cases} \quad (3.51)$$

fait bien partie de la classe de système non-linéaire (3.1), avec  $x = x_1$  et  $u = x_2^*$ . ■

Dans la suite de cette partie, on supposera la matrice  $A_z$  Hurwitz.

Commander le système aérospatial souple défini par (2.13) revient donc à commander le système issu des changements de variable.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^* \\ \dot{z} &= A_z z + F(x_1)x_1 + H(x_1)x_2^* \\ \dot{x}_2^* &= \Lambda(x_1, x_2^*, z) + C_u u \end{cases} \quad (3.52)$$

On développe dans la suite les lois de commande backstepping flexible correspondant aux deux approches théoriques mises en place dans ce chapitre. Ces deux approches sont basées sur le même changement de variable, que l'on commence par appliquer au système (3.52).

$$Z = z - \mathcal{H}(x_1)x_1 \text{ avec } \mathcal{H}(x_1)x_1 = \int_0^{x_1} H(s)ds \quad (3.53)$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^* \\ \dot{Z} &= A_z Z + G(x_1)x_1 \\ \dot{x}_2^* &= \Lambda(x_1, x_2^*, Z) + C_u u \end{cases} \quad (3.54)$$

avec

$$G(x_1) = A_z \mathcal{H}(x_1) + F(x_1) \quad (3.55)$$

La démarche utilisée pour le développement de la loi de commande se décompose en deux étapes :

1. Appliquer la loi de commande Backstepping Flexible au sous-système  $(x_1, z)$  appartenant à la classe  $\Sigma_1$ , en introduisant une entrée de commande intermédiaire virtuelle.
2. Réaliser une étape de Backstepping supplémentaire pour contrôler le système complet, à l'aide de l'entrée de commande réelle  $u$ .

### 3.2.2 Synthèse de la commande par la première approche

#### ► Backstepping Flexible sur le sous-système

On utilise la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V_1(x_1, Z) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{c_2}{2}Z^T P_z Z, \quad c_2 > 0 \quad (3.56)$$

On calcule alors sa dérivée temporelle, en introduisant une commande intermédiaire  $x_{2\text{cmd}}^*$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_1, Z) &= x_1 x_2^* + c_2 [A_z Z + G(x_1)x_1]^T P_z Z \\ &= x_1 [x_{2\text{cmd}}^* + c_2 G(x_1)^T P_z Z] + x_1 (x_2^* - x_{2\text{cmd}}^*) - c_2 Z^T Q_z Z \end{aligned}$$

### 3.2 Application du Backstepping Flexible aux systèmes aérospatiaux souples

Le choix de la commande intermédiaire se fait alors naturellement :

$$x_{2\text{cmd}}^* = -\lambda_{x_1}x_1 - c_2G(x_1)^T P_z Z \quad (3.57)$$

Et la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov devient :

$$\dot{V}_1 = -\lambda_{x_1}x_1^2 + x_1(x_2^* - x_{2\text{cmd}}^*) - c_2Z^T Q_z Z \quad (3.58)$$

#### ► Commande du système complet

Pour commander le système avec l'entrée de commande  $u$ , une étape supplémentaire de Backstepping est nécessaire. On augmente donc la fonction de Lyapunov candidate précédente, en considérant :

$$V(x_1, x_2^*, Z) = V_1(x_1, Z) + \frac{c_3}{2}(x_2^* - x_{2\text{cmd}}^*)^2 \text{ avec } c_3 > 0 \quad (3.59)$$

Sa dérivée temporelle prend la forme :

$$\dot{V}(x_1, x_2^*, Z) = -\lambda_{x_1}x_1^2 - c_2Z^T Q_z Z + (x_2^* - x_{2\text{cmd}}^*) \left( x_1 + c_3 [\Lambda(x_1, x_2^*, Z) + C_u u - \dot{x}_{2\text{cmd}}^*] \right)$$

Comme  $C_u \neq 0$ , on choisit la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{C_u} \left[ \dot{x}_{2\text{cmd}}^* - \Lambda(x_1, x_2^*, Z) - \frac{1}{c_3} \left( x_1 + \lambda_{x_2} (x_2^* - x_{2\text{cmd}}^*) \right) \right] \text{ avec } \lambda_{x_2} > 0 \quad (3.60)$$

Finalement, la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov s'écrit :

$$\dot{V}(x_1, x_2^*, Z) = -\lambda_{x_1}x_1^2 - c_2Z^T Q_z Z - \lambda_{x_2}(x_2^* - x_{2\text{cmd}}^*)^2 \quad (3.61)$$

et l'on a clairement  $\dot{V}(x_1, x_2^*, Z) < 0$ , ce qui mène au résultat de la proposition 3.8.

#### Proposition 3.8

L'origine du système en boucle fermée, composé du système aérospatial souple (2.13) et de la loi de commande suivante :

$$\begin{cases} x_{2\text{cmd}}^* &= -\lambda_{x_1}x_1 - c_2G(x_1)^T P_z Z \\ u &= \frac{1}{C_u C_1} \left[ \dot{x}_{2\text{cmd}}^* - \Lambda(x_1, x_2^*, Z) - \frac{1}{c_3} \left( x_1 + \lambda_{x_2} (x_2^* - x_{2\text{cmd}}^*) \right) \right] \text{ avec } \lambda_{x_2} > 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

est globalement et asymptotiquement stable.

### 3.2.3 Synthèse de la commande par la deuxième approche

#### ► Backstepping Flexible sur le sous-système

On considère dans un premier temps seulement la dynamique souple et on applique le résultat du lemme avec  $V_z(Z) = \frac{1}{2}Z^T P_z Z$  pour calculer  $\varphi_1(Z)$ . On considère ensuite :

$$\delta_1 = x_1 - \varphi_1(Z) \quad (3.63)$$

$$W_1 = V_z + \frac{1}{2}\delta_1^2 \quad (3.64)$$

Les résultats précédents mènent à :

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 \leq & -Z^T Q_z Z - \frac{1-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{(L_{g_0} V(Z))^2}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} \\ & + \delta_1 \left( [L_{g_0} V + \sum_{\substack{2 \leq i \leq l \\ 0 \leq k \leq i-1}} L_{g_i} V C_i^k \varphi_1^k \delta_1^{i-k-1}] + x_2^* - \dot{\varphi}_1 \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

On introduit

$$\delta_2 = x_2^* - \varphi_2 \quad (3.66)$$

où  $\varphi_2$  se comporte comme une entrée de commande intermédiaire :

$$\varphi_2 = -k_1 \delta_1 - [L_{g_0} V + \sum_{\substack{2 \leq i \leq l \\ 0 \leq k \leq i-1}} L_{g_i} V C_i^k \varphi_1^k \delta_1^{i-k-1}] + \dot{\varphi}_1 \quad (3.67)$$

La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov est :

$$\dot{W}_1 \leq -Z^T Q_z Z - \frac{1-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{(L_{g_0} V(Z))^2}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} - k_1 \delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 \quad (3.68)$$

#### ► Commande du système complet

On réalise une étape supplémentaire de backstepping en considérant la fonction de Lyapunov

$$W = W_1 + \frac{1}{2}\delta_2^2 \quad (3.69)$$

Il vient :

$$\dot{W} \leq -Z^T Q_z Z - \frac{1-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{(L_{g_0} V(Z))^2}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} - k_1 \delta_1^2 + \delta_2 \left( \delta_1 + \Lambda(x_1, x_2^*, Z) + C_u u - \dot{\varphi}_2 \right) \quad (3.70)$$

On choisit finalement

$$u = \frac{1}{C_u} \left( \dot{\varphi}_2 - \delta_1 - \Lambda(x_1, x_2^*, Z) - k_2 \delta_2 \right) \quad (3.71)$$

et on a :

$$\dot{W} \leq -Z^T Q_z Z - \frac{1-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(z)^2} \frac{(L_{g_0} V(Z))^2}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} - k_1 \delta_1^2 - k_2 \delta_2^2 \quad (3.72)$$

#### Proposition 3.9

L'origine du système en boucle fermée, composé du système aérospatial souple (2.13) et de la loi de commande suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1 &= \frac{-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{L_{g_0} V(Z)}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} \\ \varphi_2 &= -k_1 \delta_1 - [L_{g_0} V + \sum_{\substack{2 \leq i \leq l \\ 0 \leq k \leq i-1}} L_{g_i} V C_i^k \varphi^k \delta^{i-k-1}] + \dot{\varphi}_1 \\ u &= \frac{1}{C_u} \left( \dot{\varphi}_2 - \delta_1 - \Lambda(x_1, x_2^*, Z) - k_2 \delta_2 \right) \end{cases} \quad (3.73)$$

est globalement et asymptotiquement stable.

Le figure 3.1 représente, de façon schématique la méthode de commande théorique développée dans cette partie, à travers les différents changements de variable appliqués.

#### 3.2.4 Synthèse d'une loi Backstepping classique

La dynamique rigide du système aérospatial considéré est sous forme triangulaire. On réalise alors un backstepping sur la dynamique rigide seulement. Cette loi classique servira de référence lors des simulations.

$$V_1^c = \frac{1}{2} x_1^2 \quad (3.74)$$

$V_1^c$  est définie positive et sa dérivée temporelle est définie en introduisant une commande virtuelle intermédiaire  $x_{2\text{cmd}}^c$  :

$$\dot{V}_1^c = x_1 \left[ f_1(x_1) x_1 + K_1 N + x_{2\text{cmd}}^c \right] + x_1 (x_2 - x_{2\text{cmd}}^c) \quad (3.75)$$

En choisissant

$$x_{2\text{cmd}}^c = -[\lambda_1^c x_1 + K_1 N + f(x_1) x_1] \quad (3.76)$$

avec  $\lambda_1^c > 0$ , il vient  $\dot{V}_1^c = -\lambda_1^c x_1^2 + x_1 (x_2 - x_{2\text{cmd}}^c)$ . La deuxième étape de backstepping est alors réalisée en augmentant la fonction de Lyapunov avec :

$$V_2^c = V_1^c + \frac{1}{2} (x_2 - x_{2\text{cmd}}^c)^2$$

$V_2$  est définie positive. On prend sa dérivée temporelle :

$$\dot{V}_2^c = -\lambda_1^c x_1^2 + (x_2 - x_{2\text{cmd}}^c) \left[ x_1 + f_2(x_1) x_1 + K_2 N + C_u u - \dot{x}_{2\text{cmd}}^c \right] \quad (3.77)$$

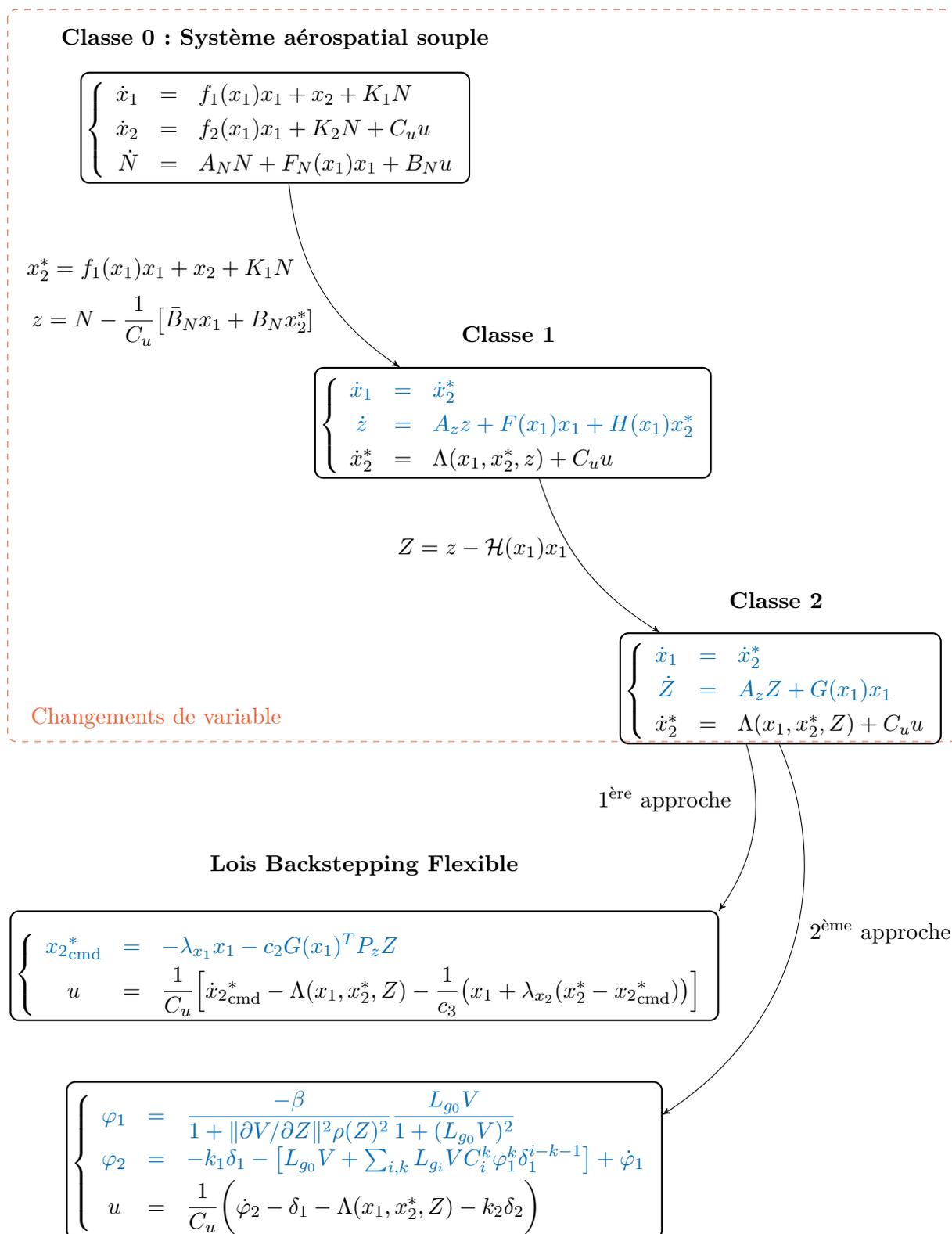


Figure 3.1 – Représentation schématique des changements de variable

On choisit alors la commande  $u$  comme suit :

$$u = \frac{1}{C_u} \left[ \dot{x}_{2\text{cmd}}^c - x_1 - f_2(x_1)x_1 - K_2N - \lambda_2^c(x_2 - x_{2\text{cmd}}^c) \right] \quad \lambda_2^c > 0 \quad (3.78)$$

ce qui donne :

$$\dot{V}_2^c = -\lambda_1^c x_1^2 - \lambda_2^c (x_2 - x_{2\text{cmd}}^c)^2 \leq 0$$

Ainsi la dynamique rigide  $(x_1, x_2)$  est stable. Cette loi stabilise également la dynamique interne, correspondant à la dynamique souple, puisque le système est à minimum de phase.

### 3.3 Simulations numériques : exemple du lanceur et de l'avion hypersonique

Dans cette partie, on met en application la théorie développée, en traitant deux exemples aérospatiaux présentés au chapitre 1 :

- L'avion hypersonique,
- Le modèle non-linéaire de lanceur lanceur que l'on a développé.

Pour ces deux exemples applicatifs, seule la dynamique liée au contrôle d'attitude (c'est à dire la dynamique rapide) est considérée. Les deux approches théoriques développées, à savoir (i) limiter l'impact de la dynamique rigide sur la dynamique souple, (ii) apporter de l'amortissement, sont illustrées sur ces exemples. L'intérêt en terme d'amélioration de l'amortissement des modes souples est également illustrée en comparant, à chaque fois, la loi Backstepping flexible à une loi classique, synthétisée sur la dynamique rigide seulement.

Pour les deux applications, on donne les lois de commande puis les résultats de simulation. Pour la deuxième approche, seul le lanceur a été simulé.

#### 3.3.1 Cas du lanceur souple

La dynamique liée au contrôle d'attitude du lanceur souple est tirée de (2.8). En notant  $q$  la vitesse de variation de l'attitude, le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\psi} &= q \\ \dot{q} &= -\frac{l_{\text{aero}}}{I_L} L(\psi) + \frac{T}{I_L} (L_T r - h)\eta + \frac{T L_T}{I_L} \beta \\ \dot{\eta} &= -\omega^2 \eta - 2\xi \omega \dot{\eta} + h r T \eta + h T \beta \end{cases} \quad (3.79)$$

où la portance  $L$  est une fonction non-linéaire de l'attitude, définie par :

$$L(\psi) = \bar{q} S (C_L^1 \psi + C_L^2 \psi^2) = \bar{L}(\psi) \psi$$

► **Backstepping classique**

La loi s'écrit :

$$\begin{cases} q_{\text{cmd}}^c = -\lambda_1^c \psi & \lambda_1^c > 0 \\ \beta^c = \frac{I_L}{TL_T} \left[ \dot{q}_{\text{cmd}}^c + \frac{l_{\text{aero}}}{I_L} L(\psi) - \frac{T}{I_L} (L_T r - h) \eta - \lambda_2^c (q - q_{\text{cmd}}^c) \right] & \lambda_2^c > 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

► **Backstepping flexible**

Les lois précédentes s'écrivent, selon les diverses approches avec :

$$\begin{aligned} x_1 = \psi \quad x_2^* = x_2 = q \quad u = \beta \\ C_1 = 1 \quad C_u = \frac{TL_T}{I_L} \quad K_1 = (0 \ 0) \quad K_2 = \left( \frac{T}{I_L} (L_T r - h) \ 0 \right) \\ f_1(x_1) = 0 \quad f_2(x_1) = -\frac{l_{\text{aero}}}{I_L} L(x_1) \\ N = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\bar{\omega}^2 - hrT) & -2\xi\omega \end{pmatrix} \quad B_N = \begin{pmatrix} 0 \\ hT \end{pmatrix} \quad F_N(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le changement de variable (3.46) de la proposition 3.7, s'écrit :

$$z = N - \begin{pmatrix} \frac{hI_L}{L_T} \\ 0 \end{pmatrix} \psi - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{hI_L}{L_T} \end{pmatrix} q \quad (3.81)$$

et transforme le système (3.79) en :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = q \\ \dot{q} = \Lambda(\psi, z) + \frac{TL_T}{I_L} \beta \\ \dot{z} = A_z z + F(\psi) \psi + Hq \end{cases} \quad (3.82)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{\omega}^2 & -2\xi\omega \end{pmatrix} \quad F(\psi) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\psi) \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\xi\omega \frac{hI_L}{L_T} \end{pmatrix} \\ \bar{\omega}^2 = \omega^2 - hrT + \frac{hT}{L_T} (L_T r - h) \\ f(\psi) = \frac{1}{L_T} \left( -\omega^2 h I_L + h^2 r T I_L + h l_{\text{aero}} \bar{L}(\psi) \right) - \frac{h^2 T I_L}{L_T^2} (L_T r - h) \\ \Lambda(\psi, z) = \left[ -\frac{l_{\text{aero}} \bar{L}(\psi)}{I_L} + \frac{T h}{L_T} (L_T r - h) \right] \psi + \begin{pmatrix} \frac{T}{I_L} (L_T r - h) & 0 \end{pmatrix} z \end{aligned}$$

La matrice  $A_z$  est Hurwitz. Les différentes lois développées dans la partie précédente peuvent donc être appliquées au système (3.82). L'application du second changement de variable  $Z =$

$z - H\psi$  mène à :

$$\begin{cases} \dot{\psi} &= q \\ \dot{q} &= \Lambda(\psi, Z) + \frac{TL_T}{I_L}\beta \\ \dot{Z} &= A_z Z + G(\psi)\psi \end{cases} \quad (3.83)$$

avec  $G(\psi) = A_z H + F(\psi)$  Finalement, les lois de commande pour les deux approches sont résumés ici :

1. Avec la première approche :

En appliquant la théorie précédente, la loi de commande s'écrit :

$$\begin{cases} q_{\text{cmd}}^1 &= -\lambda_\psi^1 \psi - c_2 G(\psi)^T P_z Z \quad \lambda_\psi^1 > 0 \\ \beta_1 &= \frac{I_L}{TL_T} \left[ \dot{q}_{\text{cmd}}^1 - \Lambda(\psi, Z) - \frac{1}{c_3} \left( \psi + \lambda_2 (q - q_{\text{cmd}}^1) \right) \right] \quad \lambda_q^1 > 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

2. Avec la seconde approche :

La théorie s'applique avec  $l = 2$  (et donc  $i = 2$ ). Les fonctions  $f_0$ ,  $g_0$  et  $g_2$  sont définies par :

$$f_0(Z) = A_z Z \quad g_0 = A_z H + F(0) = G(0) \quad g_2 = \frac{F(\psi)}{d\psi} \quad (3.85)$$

Et finalement, en notant  $\delta_1 = \psi - \varphi_1$  et  $\delta_2 = q - \varphi_2$ , on a :

$$\begin{cases} \varphi_1 &= \frac{-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{L_{g_0} V(Z)}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} \quad 0 < b < 1 \\ \varphi_2 &= -k_1 \delta_1 - [L_{g_0} V + L_{g_2} V \delta_1 + 2L_{g_2} V \varphi_1] + \dot{\varphi}_1 \quad k_1 > 0 \\ \beta_2 &= \frac{I_L}{TL_T} \left[ \dot{\varphi}_2 - \delta_1 - \Lambda(\psi, Z) - k_2 \delta_2 \right] \quad k_2 > 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

#### ► Simulations

On présente sur les figure 3.2 et 3.3 l'évolution temporelle de l'attitude, de la vitesse de déviation angulaire et du premier mode de flexion obtenues respectivement avec la première approche de backstepping flexible et avec la seconde approche. Ces réponses temporelles sont comparées à celles obtenues avec une loi backstepping classique. Les paramètres de réglage ont été ajustés de façon à ce que les temps de réponses soient similaires, et que la comparaison de ces réponses ait du sens.

La simulation est réalisée avec un écart d'attitude initial de  $20^\circ$ , un amortissement  $\xi_1 = 0.005$  et une fréquence  $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$ .

L'intérêt de la loi synthétisée est donc bien illustré en terme d'amélioration de l'amortissement des modes souples. Contrairement à la loi classique, le transitoire du mode souple n'est pas plus long que celui de la dynamique rigide, et ce, pour les deux approches de backstepping développées dans cette thèse. Pour chiffrer cette amélioration, elle se traduit par un amortissement 100 fois supérieur à l'amortissement naturel du mode souple, avant action de la commande.

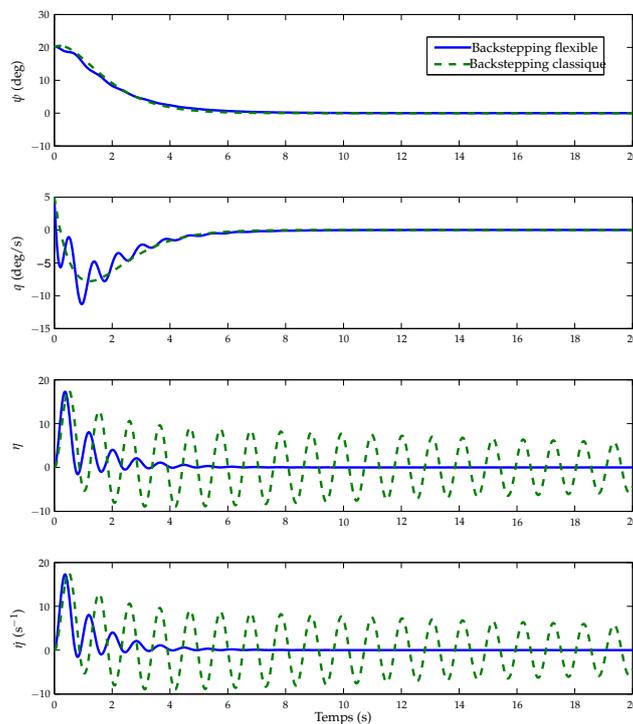
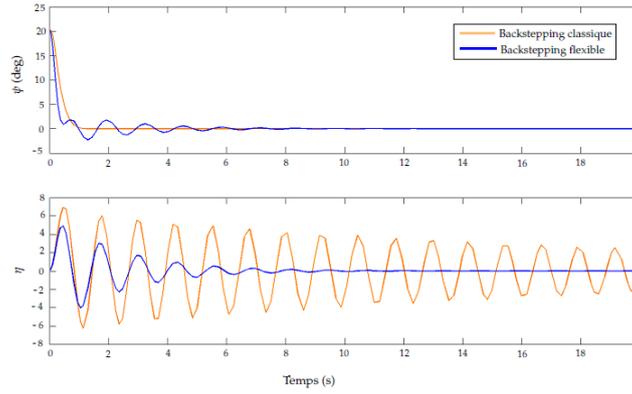


Figure 3.2 – Réponses temporelles pour le lanceur souple avec la 1ère approche de backstepping flexible

**Remarque** Pour les deux simulations, les données décrivant le modèle de lanceur sont les mêmes. Seulement, les paramètres de réglages des lois de commande n'ont pas été ajustés de la même façon, et l'on remarque bien que le temps de réponse est beaucoup plus court sur la figure 3.3. Cette étude ne peut ainsi pas prétendre comparer les deux méthodes mises au point, mais seulement montrer leur intérêt en terme d'amortissement du mode souple. Comme il en sera discuter plus tard dans ce manuscrit, la comparaison des deux méthodes fera partie des perspectives de ces travaux.

Dans la suite du manuscrit, seule la première approche de backstepping est illustrée. Le manque de temps n'a en effet pas permis de réaliser toutes les simulations souhaitées. Cette approche ne sera donc illustrée que sur le lanceur.



**Figure 3.3** – Réponses temporelles pour le lanceur souple avec la 2ème approche de backstepping flexible

#### 3.3.2 Cas de l'avion hypersonique

On considère la dynamique liée au contrôle d'attitude de l'avion hypersonique. Les équations dynamiques de ce modèle sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\delta\alpha} = f_\alpha(\alpha)\delta\alpha + C_\alpha^{\eta_1}\delta\eta_1 + C_\alpha^{\eta_2}\delta\eta_2 + \delta q \\ \dot{\delta q} = f_q(\alpha)\delta\alpha + C_q^{\eta_1}\delta\eta_1 + C_q^{\eta_2}\delta\eta_2 + C_v\delta v \\ \delta\ddot{\eta}_1 = -\omega_1^2\delta\eta_1 - 2\xi_1\omega_1\delta\dot{\eta}_1 + N_1^\eta\delta\eta_2 + f_{\eta_1}(\alpha)\delta\alpha + h_1\delta v \\ \delta\ddot{\eta}_2 = -\omega_2^2\delta\eta_2 - 2\xi_2\omega_2\delta\dot{\eta}_2 + N_2^\eta\delta\eta_1 + f_{\eta_2}(\alpha)\delta\alpha + h_2\delta v \end{cases} \quad (3.87)$$

Pour les simulations, les fonctions suivantes ont été utilisées :

$$\begin{aligned} f_\alpha(\alpha) &= C_\alpha^2 \sin \alpha + C_\alpha^1 \\ f_q(\alpha) &= C_q^2 \alpha + C_q^1 \\ f_{\eta_i}(\alpha) &= N_{\eta_i}^2 \alpha + N_{\eta_i}^1 \quad i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Comme pour le lanceur, on applique la théorie précédente et on donne directement les différentes lois de backstepping classique ou flexible.

#### ► Backstepping classique

La loi s'écrit :

$$\begin{cases} \delta q_{\text{cmd}}^c = -\lambda_1^c \alpha - K_1 N - f(\alpha)\delta\alpha & \lambda_1^c > 0 \\ \delta v^c = \frac{1}{C_v} \left[ \delta \dot{q}_{\text{cmd}}^c - \delta\alpha - f_q(\alpha)\delta\alpha - K_2 N - \lambda_2^c (\delta q - \delta q_{\text{cmd}}^c) \right] & \lambda_2^c > 0 \end{cases} \quad (3.88)$$

► Backstepping flexible

Les lois précédentes s'écrivent, selon les diverses approches avec :

$$\begin{aligned} x_1 = \delta\alpha \quad u = \delta v \quad K_1 = (C_\alpha^{\eta_1} \quad 0 \quad C_\alpha^{\eta_2} \quad 0) \quad f_1(x_1) = f_\alpha(\alpha) \\ x_2 = \delta q \quad C_u = C_v \quad K_2 = (C_q^{\eta_1} \quad 0 \quad C_q^{\eta_2} \quad 0) \quad f_2(x_1) = f_q(\alpha) \end{aligned}$$

$$N = \begin{pmatrix} \delta\eta_1 \\ \delta\dot{\eta}_1 \\ \delta\eta_2 \\ \delta\dot{\eta}_2 \end{pmatrix} \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -2\xi_1\omega_1 & N_1^\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ N_2^\eta & 0 & -\omega_2^2 & -2\xi_2\omega_2 \end{pmatrix} \quad B_N = \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \\ 0 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad F_N(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{\eta_1}(\alpha) \\ 0 \\ f_{\eta_2}(\alpha) \end{pmatrix}$$

Les changements de variable (3.45) et (3.46) de la proposition 3.7, s'écrivent :

$$\delta q^* = f_\alpha(\alpha)\delta\alpha + C_\alpha^{\eta_1}\delta\eta_1 + C_\alpha^{\eta_2}\delta\eta_2 + \delta q \quad (3.89)$$

$$z = N - \frac{1}{C_v} \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \\ h_2 \\ 0 \end{pmatrix} \delta\alpha - \frac{1}{C_v} \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \\ 0 \\ h_2 \end{pmatrix} \delta q^* \quad (3.90)$$

et transforme le système (3.79) en :

$$\begin{cases} \dot{\delta\alpha} = \delta q^* \\ \dot{\delta q^*} = \Lambda(\delta\alpha, \delta q^*, z) + C_v \delta v \\ \dot{z} = A_z z + F(\alpha)\delta\alpha + H(\alpha)\delta q^* \end{cases} \quad (3.91)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} A_z &= A_N - \frac{1}{C_v} B_N (C_q^{\eta_1} \quad C_\alpha^{\eta_1} \quad C_q^{\eta_2} \quad C_\alpha^{\eta_2}) \\ \Lambda(\delta\alpha, \delta q^*, z) &= [C_q^2 \alpha + C_q^1 + \frac{1}{C_v} (C_q^{\eta_1} h_1 + C_q^{\eta_2} h_2)] \delta\alpha \\ &+ [C_a^2 (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) + C_a^1 + \frac{1}{C_v} (C_\alpha^{\eta_1} h_1 + C_\alpha^{\eta_2} h_2)] \delta q^* + (C_q^{\eta_1} \quad C_\alpha^{\eta_1} \quad C_q^{\eta_2} \quad C_\alpha^{\eta_2}) z \\ F(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 \\ [N_{\eta_1}^2 - \frac{h_1}{C_v} C_q^2] \alpha + N_{\eta_1}^1 + \frac{1}{C_v} [N_1^\eta h_2 - h_1 (\omega_1^2 + C_q^1)] \\ 0 \\ [N_{\eta_2}^2 - \frac{h_2}{C_v} C_q^2] \alpha + N_{\eta_2}^1 + \frac{1}{C_v} [N_2^\eta h_4 - h_2 (\omega_2^2 + C_q^1)] \end{pmatrix} \\ H(\alpha) &= \frac{1}{C_v} \begin{pmatrix} 0 \\ -h_1 [2\xi_1\omega_1 + C_a^2 (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) + C_a^1] \\ 0 \\ -h_2 [2\xi_2\omega_2 + C_a^2 (\alpha \cos \alpha + \sin \alpha) + C_a^1] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.3 Simulations numériques : exemple du lanceur et de l'avion hypersonique

La matrice  $A_z$  est Hurwitz. Les différentes lois développées dans la partie précédente peuvent donc être appliquées au système (3.91). L'application du second changement de variable

$$Z = z - \int_0^\alpha H(s) ds \quad (3.92)$$

mène à :

$$\begin{cases} \dot{\delta\alpha} &= \delta q^* \\ \dot{\delta q}^* &= \Lambda(\delta\alpha, \delta q^*, Z) + C_v \delta v \\ \dot{Z} &= A_z Z + G(\alpha) \delta\alpha \end{cases} \quad (3.93)$$

avec  $G(\alpha) \delta\alpha = A_z \int_0^\alpha H(s) ds + F(\alpha)$  Finalement, les lois de commande pour les deux approches sont résumées ici :

1. Avec la première approche :

$$\begin{cases} \delta q_{\text{cmd}}^1 &= -\lambda_\alpha^2 \delta\alpha - c_2^2 G(\alpha)^T P_z Z \quad \lambda_\alpha^2 > 0 \\ \delta_e^1 &= \frac{1}{C_v} \left[ \dot{q}_{\text{cmd}}^2 - \Lambda(\delta\alpha, \delta q^*, Z) - \frac{1}{c_3^2} \left( \delta\alpha + \lambda_q^2 (\delta q^* - \delta q_{\text{cmd}}^2) \right) \right] \quad \lambda_q^2 > 0 \end{cases} \quad (3.94)$$

2. Avec la seconde approche :

$$\begin{cases} \varphi_1 &= \frac{-b}{1 + \|\partial V / \partial Z\|^2 \rho(Z)^2} \frac{L_{g_0} V(Z)}{1 + (L_{g_0} V(Z))^2} \\ \varphi_2 &= -k_1 \delta_1 - \left[ L_{g_0} V + \sum_{\substack{2 \leq i \leq l \\ 0 \leq k \leq i-1}} L_{g_i} V C_i^k \varphi_1^k \delta_1^{i-k-1} \right] + \dot{\varphi}_1 \\ \delta_e^2 &= \frac{1}{C_v} \left( \dot{\varphi}_2 - \delta_1 - \Lambda(\delta\alpha, \delta_q^*, Z) - k_2 \delta_2 \right) \end{cases} \quad (3.95)$$

#### ► Simulations

Les différentes lois sont illustrées sur l'avion hypersonique dans le cas d'un changement de position d'équilibre. L'avion est initialement dans une position d'équilibre avec un angle d'incidence  $\alpha = -10^\circ$ . A l'instant  $t = 1$ s, on change la position d'équilibre et l'incidence désirée est  $\alpha = 25^\circ$ . Les simulations ont été réalisées avec les données suivantes :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0.01 \quad \omega_1 = 2 \text{ rad/s} \\ \xi_2 &= 0.01 \quad \omega_2 = 6 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Les paramètres de réglage des lois de commande (classique et flexible) ont été ajustées de façon à ce que les temps de réponses soient les mêmes et que le résultat puisse être comparable. La figure 3.2 représente l'évolution temporelle des états rigides et des deux modes de flexion. L'intérêt du backstepping flexible apparaît surtout sur le premier mode de flexion, qui s'atténue rapidement. Quelques légères oscillations peuvent être repérées sur le tracé de l'attitude pour le backstepping flexible. Ainsi, même si les paramètres de réglage du backstepping flexible (en particulier le gain  $c_2$ ) peut atténuer encore plus les oscillations des modes souples, un compris

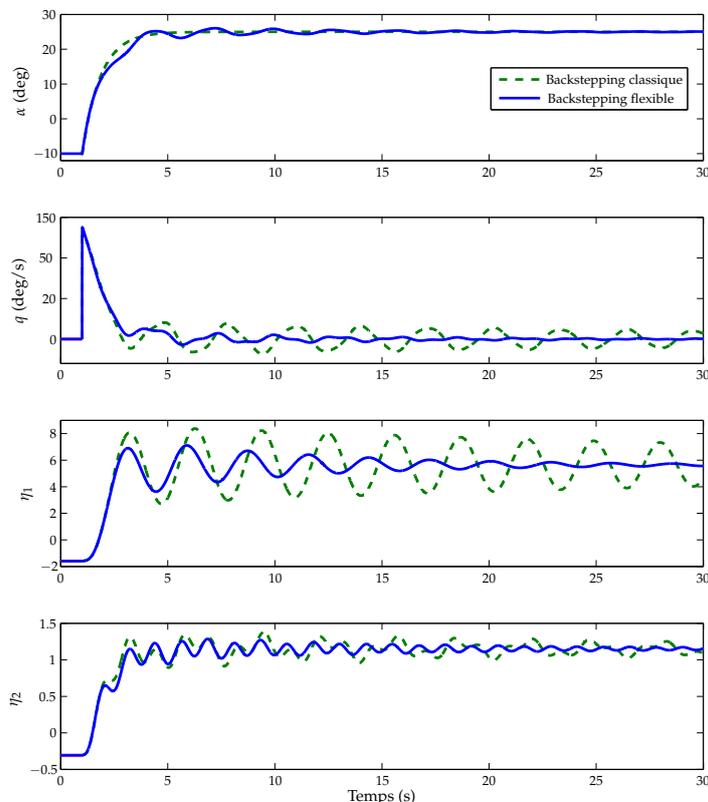


Figure 3.4 – Réponses temporelles pour l'avion hypersonique avec la 1ère approche de backstepping flexible

reste à trouver pour ne pas dégrader le mode rigide.

A ce stade, on dispose ainsi d'une loi de commande non linéaire satisfaisant les objectifs de commande en terme de stabilité et d'amélioration de l'amortissement des modes souples. On souhaite de plus améliorer le comportement local du système en boucle fermée, de façon à ce que les trajectoires se comportent, localement, comme des réponses linéaires. Ce dernier point peut en effet correspondre à un objectif industriel.

### 3.4 Amélioration de l'amortissement des modes souples par l'union avec un contrôleur local

Pour améliorer le comportement local des trajectoires, on a choisi de mixer notre loi non-linéaire avec un contrôleur linéaire local satisfaisant un critère d'optimisation. L'idée étant de mettre au point un contrôleur hybride qui soit capable de passer d'une loi à l'autre (sorte de *switch*) en fonction de l'état du système :

- la loi non linéaire est utilisée pour les grands domaines de variations,
- la loi linéaire est utilisée de façon locale lorsque les états sont suffisamment proches de

leurs positions d'équilibre.

Andrieu et Prieur ont formalisé ce principe en donnant une condition suffisante pour synthétiser une commande hybride faisant l'union d'une commande non-linéaire et d'un contrôleur local. Ce résultat est détaillé dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1** ([90])

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.96)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose qu'il existe une fonction  $V_\infty$  propre, définie positive et de classe  $\mathcal{C}^2$  et une fonction  $\phi_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^0$  telles que :

$$\frac{\partial V_\infty}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\phi_\infty(x)] < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (3.97)$$

On suppose également que la paire  $(A_{\text{lin}}, B_{\text{lin}})$  définie par :

$$A_{\text{lin}} = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B_{\text{lin}} = \frac{\partial g}{\partial x}(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.98)$$

est contrôlable. On suppose de plus qu'il existe une matrice  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique et définie positive et un vecteur  $K_0 \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$P_0(A_{\text{lin}} + B_{\text{lin}}K_0) + (A_{\text{lin}} + B_{\text{lin}}K_0)^T P_0 < 0 \quad (3.99)$$

S'il existe deux matrices  $K_{m,1} \in \mathbb{R}^n$  et  $K_{m,2} \in \mathbb{R}^n$  et une matrice définie positive  $P_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifiant les inégalités suivantes :

$$P_0(A + BK_{m,1}) + (A + BK_{m,1})^T P_0 < 0 \quad (3.100)$$

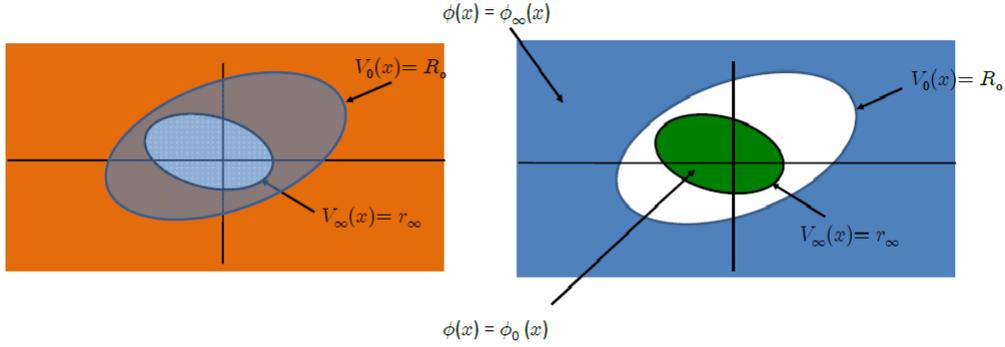
$$P_m(A + BK_{m,1}) + (A + BK_{m,1})^T P_m < 0 \quad (3.101)$$

$$P_m(A + BK_{m,2}) + (A + BK_{m,2})^T P_m < 0 \quad (3.102)$$

$$P_\infty(A + BK_{m,2}) + (A + BK_{m,2})^T P_\infty < 0 \quad (3.103)$$

où  $P_\infty = \frac{\partial^2 V_\infty}{\partial x^2}(0)$ , alors il existe une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'origine du système  $\dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x)$  est globalement et asymptotiquement stable et un réel  $r_\infty$  suffisamment petit tel que  $\phi(x) = K_0 x$  pour tout  $x$  vérifiant  $V_\infty(x) \leq r_\infty$ .

L'idée est ainsi de mettre au point une loi de commande linéaire pour le système aérospatial souple linéarisé, et d'utiliser ce résultat pour unir la loi non linéaire backstepping flexible à cette loi linéaire. Ainsi, la loi non linéaire pourra être utilisée lorsque les états du systèmes ont de grands domaines de variations, puis, localement, c'est à dire une fois que les états ont atteint une bande suffisamment proche de leurs points d'équilibre, la loi linéaire prend le relais, de façon



**Figure 3.5** – Représentations schématiques du problème de l'union de lois de commande (tiré des slides de présentation de [90])

à assurer le comportement local souhaité.

Plus précisément, les domaines d'utilisation des deux lois de commandes sont définies par des réels  $r_\infty$  et  $R_0$  vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \{x : 0 < V_0(x) \leq R_0\}, L_f V_0(x) + L_g V_0(x) \phi_0(x) < 0 \\ \forall x \in \{x : V_\infty(x) > r_\infty \leq R_0\}, L_f V_\infty(x) + L_g V_\infty(x) \phi_\infty(x) < 0 \end{cases} \quad (3.104)$$

La loi de commande hybride résultante vérifie :

$$\begin{cases} \phi(x) = \phi_0(x) \text{ pour tout } x \text{ tel que } V_\infty(x) \leq r_\infty \\ \phi(x) = \phi_\infty(x) \text{ pour tout } x \text{ tel que } V_0(x) \geq R_0 \end{cases} \quad (3.105)$$

La figure 3.5 donne une représentation schématique de ces variables et des domaines de stabilité.

On commence ainsi par linéariser notre système aérospatial souple (2.13), autour d'un point d'équilibre défini par :

On pose  $X = (x_1 \ x_2 \ N)^T$  et on linéarise le système autour de l'origine. L'équation d'état du système linéarisé permet de définir les matrices  $A_{\text{lin}} \in \mathbb{R}^{2p+2 \times 2p+2}$  et  $B_{\text{lin}} \in \mathbb{R}^{2p+2}$  de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{N} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left. \frac{df_1(x_1)x_1}{dx_1} \right|_{eq} & C_1 & K_1 \\ \left. \frac{df_2(x_1)x_1}{dx_1} \right|_{eq} & 0 & K_2 \\ \left. \frac{dF(x_1)x_1}{dx_1} \right|_{eq} & 0_{2p \times 1} & A \end{pmatrix}}_{A_{\text{lin}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ N \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ C_u \\ B \end{pmatrix}}_{B_{\text{lin}}} u \quad (3.106)$$

On suppose que la paire  $(A_{\text{lin}}, B_{\text{lin}})$  est contrôlable et on choisit de mettre au point une loi de commande Linéaire Quadratique (LQ) qui minimise la fonction coût suivante, de façon à

minimiser l'énergie des modes souples :

$$J = \int_0^t X^T Q X + R u^2$$

avec  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R \in \mathbb{R}^+$  Le contrôleur local optimal est alors donné par :

$$u_0 = K_0 X = -\frac{1}{R} B_{\text{lin}}^T P_0 X \quad (3.107)$$

où  $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice symétrique et définie positive solution de l'équation de Riccati suivante :

$$P_0 A_{\text{lin}} + A_{\text{lin}}^T P_0 - P_0 B_{\text{lin}} R^{-1} P_0 = -Q \quad (3.108)$$

A ce stade, les hypothèses du théorème sont satisfaites en considérant  $\phi_\infty(x)$  comme la loi de commande backstepping flexible synthétisé avec l'une des deux approches et  $V_\infty$  est la fonction de Lyapunov correspondante.

On utilise les outils LMI pour tester les différentes conditions, en suivant la procédure suivante :

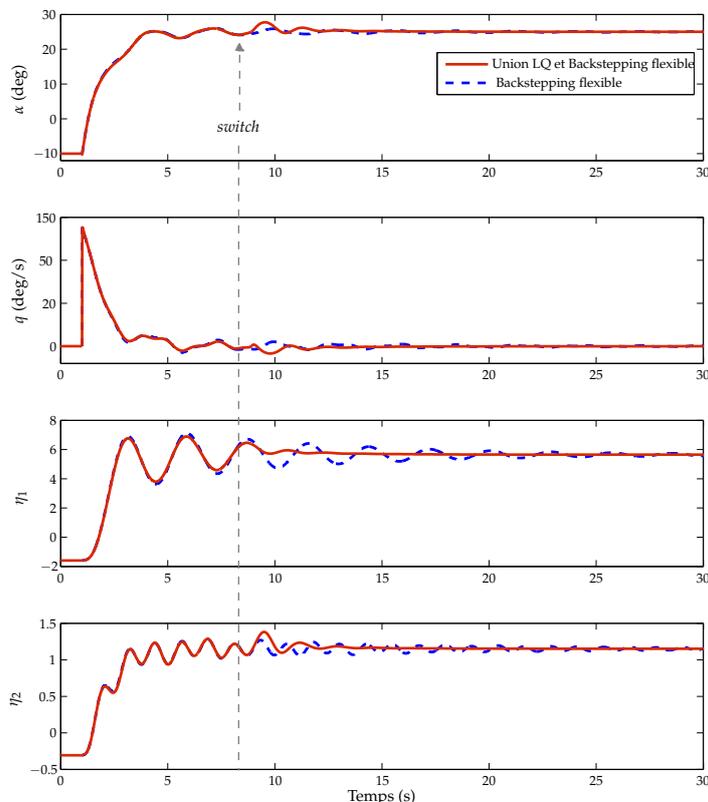
- Connaissant  $P_0$ , on résout (3.100) pour obtenir  $K_{m_1}$ ,
- Connaissant  $P_\infty$ , on résout (3.103) pour obtenir  $K_{m_2}$ ,
- Connaissant  $K_{m_1}$  et  $K_{m_2}$ , on résout (3.101)-(3.102) pour obtenir  $P_m$ ,

La figure 3.6 illustre les réponses temporelles des différents états obtenues en mixant la loi linéaire LQ et la loi non linéaire Backstepping flexible. Avant l'instant "switch", la loi non linéaire prédomine. Après cet instant, les états sont proches de leurs valeurs d'équilibres. La loi linéaire prend donc le relais, et assure donc un meilleur amortissement des modes souples. De plus, cette loi assure un comportement linéaire aux trajectoires.

Ce travail illustre ainsi une façon dont la loi de commande non linéaire backstepping flexible peut être utilisée. Cette loi est ainsi tout à fait compatible avec une loi linéaire, en fonction de l'instant de vol, et la méthode de commutation entre les deux lois utilisée ici permet d'assurer la stabilité sur tout le domaine de vol. De cette manière, l'ensemble des objectifs de commande peuvent être satisfait, à savoir assurer au système un bon régime transitoire, avec des modes souples qui s'atténuent rapidement puis, garantir un comportement local linéaire et optimal.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une loi de commande non linéaire a été mise au point pour le contrôle d'un système aérospatial, avec objectif d'atténuation des modes souples. Plus précisément, ce problème a été traité sur une classe de système non-linéaire réduite, et des changements de variables ont été utilisés pour se ramener à la classe des systèmes aérospatiaux souples. L'objectif d'atténuation des modes souples a été étudié selon deux approches complémentaires de backstepping étendu au cas flexible : la limitation de l'influence de la dynamique rigide sur la



**Figure 3.6** – Réponses temporelles pour l'avion hypersonique obtenues en associant la loi non-linéaire Backstepping flexible à un contrôleur LQ

dynamique souple constitue la première approche et l'apport direct d'amortissement la seconde. Les exemples du lanceur et de l'avion hypersonique ont été traités en simulation et l'intérêt des lois proposées a été illustré en terme d'amélioration de l'amortissement des modes souples par des comparaisons avec une loi classique. Les méthodes proposées présentent également l'avantage de pouvoir prendre en compte un grand nombre de modes souples. On a également montré que la loi non linéaire issue de la première approche pouvait être mixée à une loi linéaire de façon à assurer, localement, la minimisation d'un critère, en utilisant un résultat de la littérature.

Cependant, la loi non-linéaire proposée dans ce chapitre consiste en un retour d'état. La mise au point de cette loi repose donc sur l'accès aux états du système et en particulier aux états souples. Ces derniers ne sont généralement pas mesurés pour les systèmes aérospatiaux. Pour cette raison, on propose de synthétiser un observateur pour estimer les états souples.

Notons que dans la suite du document, seule la première approche de backstepping flexible est considérée. Même si une démarche similaire peut être appliquée à la seconde approche, le manque de temps n'aura pas permis de mettre en place toutes les preuves.

## Développement d'une méthode d'observation des modes souples

---

La loi de commande backstepping flexible, développée au chapitre 3, et satisfaisant les objectifs de stabilité et d'amortissement des modes de flexion a été synthétisée par retour d'état. Dans ce chapitre, on cherche à mettre en place cette même loi de commande en utilisant seulement les sorties disponibles, à savoir les états rigides altérés par les modes souples. Pour cela, on se place dans un cadre de travail idéal, en supposant que tous les paramètres du système sont connus. On montre alors qu'il est possible de reconstruire les états souples en observant l'état d'un sous système non linéaire, affine en l'état, extrait de la classe théorique non linéaire considérée. Ensuite, on combine cet observateur avec la loi backstepping flexible et on présente des simulations numériques sur les exemples du lanceur et de l'avion hypersonique.

---

### 4.1 Synthèse d'un observateur dans le cas nominal

Tout au long de ce chapitre, on travaille dans un cas nominal idéal, ce qui signifie que l'on se place sous l'hypothèse suivante :

#### **Hypothèse 4.1**

Tous les paramètres décrivant le système sont connus.

On considère le système aérospatial souple de la classe  $\Sigma_0$ , dont on rappelle les équations dynamiques :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1)x_1 + x_2 + K_1N \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1)x_1 + K_2N + C_uu \\ \dot{N} &= A_NN + F_N(x_1)x_1 + B_Nu \end{cases} \quad (4.1)$$

Le chapitre précédent a montré qu'il était possible de stabiliser ce système tout en atténuant ses modes de flexion en mettant en place une commande backstepping flexible. La synthèse de cette loi nécessite cependant la connaissance et l'accès au vecteur des états souples  $N$ , non

mesuré pour les systèmes aérospatiaux. Ainsi, on cherche à reconstruire les  $2p$  états souples en mettant en place un observateur. Pour cela, on considère les sorties du système en effectuant l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 4.2**

Le système aérospatial souple considéré, possédant  $p \geq 1$  mode souple est équipé de  $d \geq 2$  capteurs répartis de la façon suivante :

- $l \geq 1$  mesures de l'état  $x_1$  (obtenues par des centrales inertielles),
- $d - l$  mesures de l'état  $x_2$  (données par des gyromètres).

Ces mesures sont altérées par les modes de flexion de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 + R_1 N \\ y_2 = x_1 + R_2 N \\ \vdots \\ y_l = x_1 + R_l N \\ y_{l+1} = x_2 + R_{l+1} N \\ \vdots \\ y_d = x_2 + R_d N \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec

$$\forall j \in \{1, \dots, l\} \quad R_j = (r_{ci_1}^j \ 0 \ r_{ci_2}^j \ 0 \ \dots \ r_{ci_p}^j \ 0) \in \mathbb{R}^{1 \times 2p}$$

$$\forall i \in \{l+1, \dots, d\} \quad R_i = (0 \ r_{gy_1}^i \ 0 \ r_{gy_2}^i \ \dots \ 0 \ r_{gy_p}^i) \in \mathbb{R}^{1 \times 2p}$$

où  $r_{ci_k}^j$  représente la rotation souple induite par le  $k^{\text{ième}}$  mode souple au droit de la  $j^{\text{ième}}$  centrale inertielle, et  $r_{gy_k}^i$  représente la rotation souple induite par le  $k^{\text{ième}}$  mode souple au droit du  $i^{\text{ième}}$  gyromètre, avec  $k \in \{1, \dots, p\}$ .

Pour reconstruire les états souples, on procède de la façon suivante : on sélectionne tout d'abord deux sorties parmi les  $d$  mesures disponibles. On met ensuite en évidence un sous-système non linéaire liant les états souples à l'entrée de commande et aux deux sorties choisies. Enfin, on met en place un observateur d'état sur ce sous-système.

### 4.1.1 Extraction d'un sous système

#### Proposition 4.1

Sous l'hypothèse 4.2, on peut extraire de la classe non linéaire  $\Sigma_0$  un sous système non linéaire, affine en l'état contenant la dynamique souple, de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A(Y)X + BU \\ Y &= CX \end{cases} \quad (4.3)$$

**Démonstration :** On commence par rappeler la formule de Taylor au premier ordre, qui est utilisée à plusieurs reprises dans cette preuve.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{df(a)}{da}h + o(h) \quad (4.4)$$

De cette formule, on tire le cas particulier suivant : si  $x = a + h$ , on peut écrire :

$$f(x)x = f(a)a + \left[ \frac{df(a)}{da}a + f(a) \right] h + o(h) \quad (4.5)$$

On réécrit la dynamique rigide liée à l'état  $x_1$ , donnée par (4.1), comme fonction des sorties. Pour cela, on sélectionne un gyromètre et une centrale inertielle parmi les capteurs disponibles, de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_1 &= y_j - R_j N \quad j \in \{1, \dots, l\} \\ x_2 &= y_i - R_i N \quad i \in \{l+1, \dots, d\} \end{cases} \quad (4.6)$$

En appliquant le résultat (4.5) à la fonction  $f_1$ , il vient :

$$\dot{x}_1 = f_1(y_j)y_j - \left[ \frac{df_1(y_j)}{dy_j}y_j + f_1(y_j) \right] R_j N + y_i - R_i N + K_1 N \quad (4.7)$$

$$= f_1(y_j)(x_1 + R_j N) - \left[ \frac{df_1(y_j)}{dy_j}y_j + f_1(y_j) \right] R_j N + y_i + (K_1 - R_i)N \quad (4.8)$$

$$= f_1(y_j)x_1 + y_i + \left[ K_1 - \frac{df_1(y_j)}{dy_j}y_j R_j - R_i \right] N \quad (4.9)$$

On procède la même manière pour les états souples et on obtient :

$$\dot{N} = F_N(y_j)x_1 + \left[ A_N - \underbrace{\frac{dF_N(y_j)}{dy_j}y_j R_j}_{=0_{2p \times 2p}} \right] N + B_N u \quad (4.10)$$

Vue la définition du vecteur  $R_j$  dans l'hypothèse 4.2, qui n'est défini que pour des indices impairs et la forme du vecteur  $F_N(y_j)$  (nul pour les indices impairs), le terme  $\frac{dF_N(y_j)}{dy_j}y_j R_j$  correspond à la matrice nulle.

On regroupe alors les résultats (4.9) et (4.10) dans l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(y_j) & K_1 - \frac{df_1(y_j)}{dy_j}y_j R_j - R_i \\ F(y_j) & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{2p} \end{pmatrix} y_i + \begin{pmatrix} 0 \\ B_N \end{pmatrix} u \quad (4.11)$$

En considérant  $y_i$  comme une entrée de commande, l'équation (4.11) se comporte comme une équation d'état avec une matrice d'état dépendante de la sortie  $y_j$ . Pour former l'équation de sortie correspondante, toutes les sorties différentes de  $y_i$  peuvent être utilisées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 + R_1 N \\ y_2 = x_1 + R_2 N \\ \vdots \\ y_l = x_1 + R_l N \\ y_{l+1} - y_i = (R_{l+1} - R_i) N \quad l+1 \neq i \\ \vdots \\ y_d - y_i = (R_d - R_i) N \quad d \neq i \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Les  $l$  mesures fournies par les centrales inertielles peuvent être utilisées telles qu'elles. La mesure  $y_i$  se comportant maintenant comme une entrée de commande, on considère, pour les sorties gyrométriques, leurs différences avec la sortie  $y_i$ .

Ceci permet de définir le système suivant, affine en l'état et contenant les états souples :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = A_o(y_j)X + B_{y_i}y_i + B_u u \\ Y = CX \end{array} \right. \quad (4.13)$$

avec

$$X = (x_1 \ N)^T \\ Y = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_l \ y_{l+1} - y_i \ \cdots \ y_d - y_i)^T \in \mathbb{R}^p$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & R_l \\ 0 & R_{l+1} - R_i \\ \vdots & \vdots \\ 0 & R_d - R_i \end{pmatrix} \quad A_o(y_j) = \begin{pmatrix} f_1(y_j) & K_1 - \frac{df_1(y_j)}{dy_j} y_j R_j - R_i \\ F(y_j) & A_N \end{pmatrix} \quad B_{y_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{2p} \end{pmatrix} \quad B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ B_N \end{pmatrix}$$

La preuve est ainsi terminée en choisissant  $A(Y) = A_o(y_i)$ ,  $B = (B_{y_i} \ B_u)$  et  $U = (y_i \ u)^T$ . ■

Le système (4.13) constitue un sous-système non linéaire à temps variant, dans le sens où la matrice  $A_o$  dépend d'une sortie, mais linéaire en l'état. L'état est composé de l'état rigide  $x_1$ , mais également de tous les états souples regroupés dans  $N$ . Ainsi, on va alors pouvoir développer un observateur sur ce système pour reconstruire les états souples dont on a besoin pour synthétiser le backstepping flexible en retour de sortie.

### 4.1.2 Synthèse de l'observateur

On cherche, dans cette sous partie, à construire un observateur d'état pour le système (4.13). Comme la matrice d'état de ce système est liée à la sortie, on commence par faire un point sur les conditions d'observabilité d'un tel système. Pour cela, on considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A(Y)X + BU \\ Y &= CX \end{cases} \quad (4.14)$$

avec  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $Y \in \mathbb{R}^m$

► **Conditions d'observabilité**

Un observateur du système (4.14) est un système fournissant un état estimé  $\hat{X}$  tel que l'erreur entre l'état et son estimé tend asymptotiquement vers 0, ce qui se traduit par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{X} - X\| = 0 \quad (4.15)$$

Dans le cas où la matrice d'état  $A$  du système est constante, la condition précédente est vérifiée si la paire  $(A, C)$  est observable, c'est à dire si et seulement si sa matrice d'observabilité est de plein rang colonne, ce qui s'écrit encore :

$$\text{rang} [ C^T \quad A^T C^T \quad (A^2)^T C^T \quad \dots \quad (A^{n-1})^T C^T ]^T = n \quad (4.16)$$

Dans le cas considéré dans cette étude, la matrice  $A$  est fonction de la sortie  $Y$ . Dans ce cas, on détermine plutôt l'observabilité en utilisant la matrice de transition d'état, définie comme suit :

**Définition 4.1**

Soit  $\Phi_y(\tau, t)$  la matrice de transition du système (4.14) associée à  $A(Y)$ , qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \Phi_y(\tau, t) &= A(Y(\tau)) \Phi_y(\tau, t) \\ \Phi_y(t, t) &= I_n \end{cases} \quad (4.17)$$

L'observabilité du système (4.14) est alors assurée par une condition d'excitation persistante :

**Hypothèse 4.3**

Il existe des nombres  $T_1$ ,  $t_0$  et  $\alpha_1$  strictement positifs tels que la matrice de transition d'état  $\Phi_y(\tau, t)$  satisfait la relation :

$$\forall t > t_0 \quad \int_t^{t+T_1} \Phi_y(\tau, t)^T C^T C \Phi_y(\tau, t) d\tau > \alpha_1 I_n \quad (4.18)$$

Cette hypothèse garantit l'observabilité du système, à condition de choisir  $T_1$  suffisamment grand pour que le signal contienne assez d'information.

► **Synthèse**

On construit un observateur d'état en utilisant le résultat [3], donné dans le cas discret et adaptatif.

**Proposition 4.2**

Soit le système non linéaire affine en l'état (4.19), où le nombre de mesures, défini par l'hypothèse 4.2 est tel que la matrice de transition d'état vérifie la condition d'observabilité (4.18).

$$\begin{cases} \dot{X} &= A(Y)X + BU \\ Y &= CX \end{cases} \quad (4.19)$$

Alors l'observateur défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} &= A(Y)\hat{X} + BU + S^{-1}C^T(Y - C\hat{X}) \\ \dot{S} &= -A(Y)^T S - SA(Y) - \mu S + 2C^T C \end{cases} \quad (4.20)$$

avec  $\mu > 0$  et  $S(t=0)$  une matrice symétrique et définie positive, assure une convergence globale et asymptotique de l'erreur d'observation  $\tilde{X} = X - \hat{X}$  vers 0.

La preuve complète de cette proposition et en particulier du fait que la matrice  $S$  est définie positive pour tout instant est détaillée dans [3]. On définit l'erreur d'observation  $\tilde{X}$  par :

$$\tilde{X} = X - \hat{X} \quad (4.21)$$

Et on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \tilde{X}^T S \tilde{X} \quad (4.22)$$

La dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\tilde{X}}^T S \tilde{X} + \tilde{X}^T \dot{S} \tilde{X} + \tilde{X}^T S \dot{\tilde{X}} \\ &= \tilde{X}^T [A(y_j) - S^{-1}C^T C]^T S \tilde{X} + \tilde{X}^T [-A(y_j)^T S - SA(y_j) - \mu S + 2C^T C] \tilde{X} \\ &\quad + \tilde{X}^T S [A(y_j) - S^{-1}C^T C] \tilde{X} \\ &= \tilde{X}^T [A(y_j)^T S - C^T C - A(y_j)^T S - SA(y_j) - \mu S + 2C^T C + SA(y_j) - C^T C] \tilde{X} \\ &= -\mu \tilde{X}^T S \tilde{X} \end{aligned}$$

Ainsi, vu que  $\mu > 0$  et que  $S > 0$ , on a  $\dot{V} < 0$ , ce qui assure par conséquent la convergence globale et asymptotique vers 0 de l'erreur d'observation  $\tilde{X}$ .

**Remarque** L'hypothèse 4.2 assure que  $d \geq 2$  mesures sont disponibles, dont au moins une

mesure inertielle et une mesure gyrométrique, mais ne précise pas comment les choisir. La dimension du vecteur de sortie doit en fait être choisie de façon à assurer l'observabilité du système.

## 4.2 Applications et simulations numériques

### 4.2.1 Observateur en boucle ouverte

On effectue des simulations numériques de cet observateur pour le lanceur souple et l'avion hypersonique. Les simulations sont réalisées en boucle ouverte. Le système aérospatial est commandé en retour d'état par la loi de commande backstepping flexible, mise au point au chapitre 3.

#### ► Lanceur souple

On considère le lanceur avec un mode de flexion et les deux mesures suivantes :

$$y_1 = \psi + r_{ci}\eta \quad (4.23)$$

$$y_2 = \dot{\psi} + r_{gy}\dot{\eta} \quad (4.24)$$

Pour ce système, le sous-système extrait pour l'observation est linéaire, avec une matrice d'état constante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{gy} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{\omega}^2 & -2\xi\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ u \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

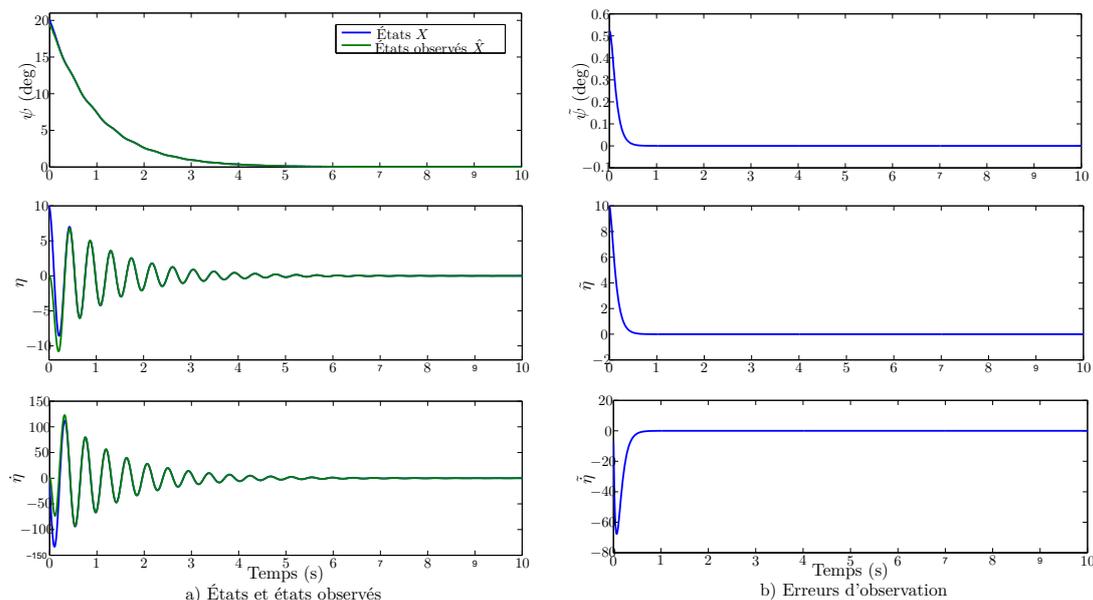
La sortie  $y_2$  est considérée comme une entrée et l'observateur est synthétisé à l'aide de la sortie  $y_1$ .

On se trouve ainsi, pour ce système, dans un cas particulier de la théorie développée où le système à observer est linéaire.

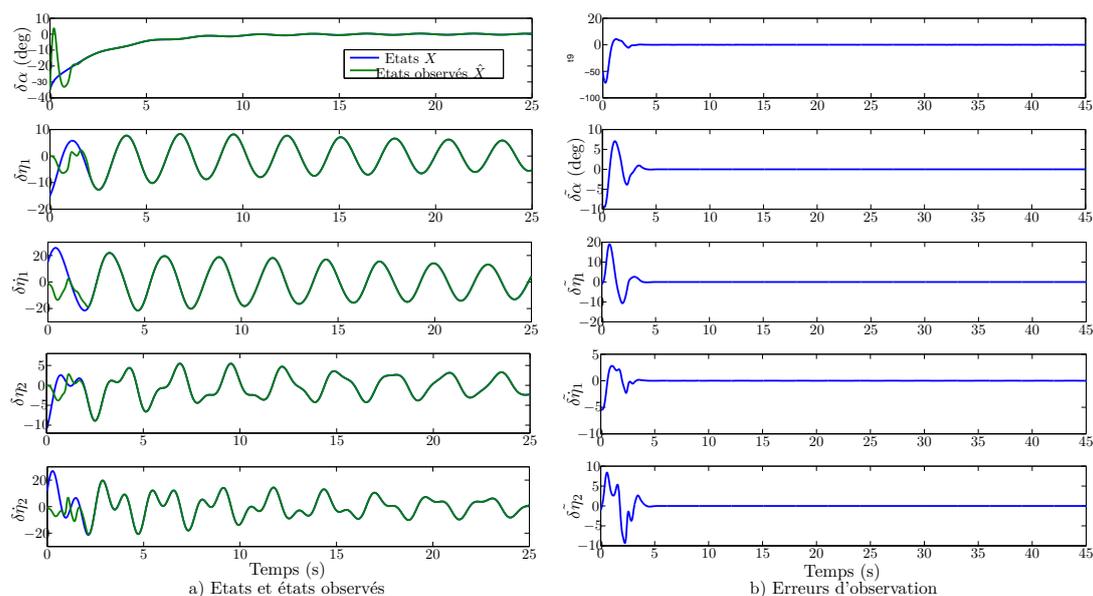
La figure 4.1-a) compare, sur un même tracé les états du système, commandé par retour d'état par un backstepping flexible, aux états observés, alors que la figure 4.1-b) présente les erreurs d'observation  $\tilde{X} = X - \hat{X}$ .

La simulation est réalisée avec les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = (20^\circ \quad 10 \quad -7)^T \quad \hat{X}(0) = (y_1(0) \quad 0 \quad 0)^T \quad (4.26)$$



**Figure 4.1** – Evolution temporelle des états observés et des erreurs d'observation pour le lanceur (boucle ouverte)



**Figure 4.2** – Evolution temporelle des états observés et des erreurs d'observation pour l'avion hypersonique (boucle ouverte)

L'attitude initiale de l'observateur peut être définie de manière assez précise en prenant la mesure initiale de la centrale inertielle puisque la valeur de la déformée modale  $r_{ci}$  est très faible. Les états initiaux des modes souples sont quand à eux mis à 0 dans l'observateur. N'ayant aucune information, a priori, de leurs valeurs initiales, la solution la plus simple consiste à les considérer nulles au début de la simulation.

► **Avion hypersonique**

On effectue le même travail pour l'avion hypersonique, en simulation l'observateur en boucle ouverte. Dans ce cas, la matrice d'état du système à observer dépendant bien de la sortie du système.

Les conditions initiales choisies sont les suivantes :

$$X(0) = (-35^\circ \quad -10 \quad 10 \quad -8 \quad 10)^T \quad \hat{X}(0) = (y_1(0) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \quad (4.27)$$

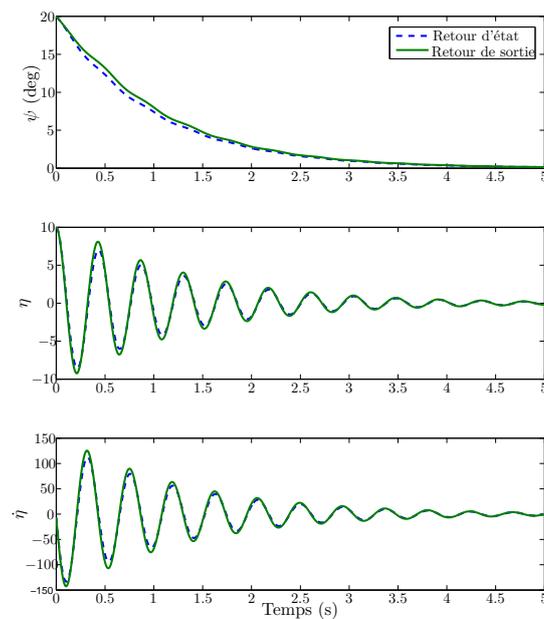
Le résultat est présenté figure 4.2 où les états et états observés sont superposés à gauche, et les erreurs d'observation sont tracées à droite.

### 4.2.2 Simulations en boucle fermée

La preuve de stabilité de la boucle fermée, composée de l'observateur et de la loi de commande backstepping flexible n'a pas été donnée. Les raisons de cela seront données dans le chapitre 5. On illustre tout de même son fonctionnement par une simulation numérique.

► **Lanceur souple**

La figure 4.3 compare, pour des conditions initiales identiques, l'évolution temporelle des états du lanceur, avec un mode souple, lorsqu'il est contrôlé en retour d'état et en retour de sortie. Comme illustré sur la figure 4.1, l'observateur converge très rapidement. Ainsi le comportement des états commandé en retour de sortie et en retour d'état sont très similaires.



**Figure 4.3** – Évolution temporelle des états du lanceur commandé en retour d'état et en retour de sortie

### 4.3 Conclusion

En se plaçant dans un cadre idéal où tous les paramètres décrivant le système sont connus, ce chapitre a décrit une méthode de synthèse d'un observateur d'état pour la classe des systèmes aérospatiaux souples. Cet observateur, développé en appliquant un résultat de la littérature sur un sous-système non linéaire, affine en l'état, et extrait de la classe générale, permet en particulier d'estimer les états souples du système, nécessaires à la mise en place de la commande backstepping flexible. Ainsi, même si la preuve de stabilité n'a pas été donnée, cet observateur a permis de réaliser des simulations numériques en retour de sortie.

Dans ce chapitre, les contraintes liées aux mesures fournies par les capteurs (modes souples non mesurés et altération des sorties par les modes souples) ont ainsi été considérées. Ayant supposé tous les paramètres du système connus, une dernière contrainte reste à considérer : celle des incertitudes paramétriques.

## Synthèse d'observateurs adaptatifs de modes souples

---

Dans ce chapitre, on élargit le domaine de fonctionnement de la méthode de commande backstepping flexible proposée dans cette thèse, en la rendant robuste aux incertitudes paramétriques. Le contrôleur développé jusque là repose en effet sur l'hypothèse d'une connaissance parfaite du système et de ses paramètres physiques. On montre ainsi, dans ce chapitre, comment prendre en compte les méconnaissances de ces paramètres physiques, comme les coefficients aérodynamiques, la pulsation et l'amortissement des modes souples. Pour cela, on met en place une stratégie de commande adaptative indirecte à travers la synthèse de deux types d'observateurs adaptatifs. Le premier, valable pour une classe de système réduite, est un observateur hybride convergeant en temps fini. Il combine un observateur linéaire de Luenberger à un estimateur de paramètre utilisant des techniques algébriques. Le second, plus générique car valable sur la classe de système complète est un observateur adaptatif asymptotique permettant d'estimer à la fois les états souples et les paramètres incertains. Une discussion sur les performances de ces deux observateurs est finalement menée, avant qu'une simulation numérique en boucle fermée soit présentée.

---

### 5.1 Condition d'excitation persistante pour l'estimation

Le chapitre 4 a présenté, sous l'hypothèse de paramètres certains, une méthode de synthèse d'un observateur estimant les états souples. Dans ce chapitre, on souhaite étendre cette théorie, en considérant les méconnaissances de certains paramètres physiques du système. Pour prendre en compte ces incertitudes, on utilise des outils adaptatifs indirects, qui consistent à estimer, en ligne, les paramètres de la loi de commande ou de l'observateur.

L'estimation de paramètres ne peut se faire que sous certaines conditions sur la richesse des signaux utilisés dans le processus d'identification. La convergence d'un estimateur dépend ainsi du degré d'excitation des signaux appliqués au système lors de son processus d'identification. On qualifie de "persistante" une excitation suffisante pour assurer la convergence d'un estimateur donné. Autrement dit, les signaux d'entrée utilisés lors du processus d'identification doivent être

assez riches pour apporter l'excitation persistante nécessaire à la convergence de l'estimateur. Cette excitation persistante est traduite par la définition mathématique suivante :

**Définition 5.1 (*Excitation persistante*)**

Une fonction  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  est appelée excitation persistante s'il existe deux nombres  $\mu$  et  $\tau$  strictement positifs tels que :

$$\forall t \geq 0 \quad \int_t^{t+\tau} \Phi(s)^T \Phi(s) ds \geq \mu I_m \quad (5.1)$$

On propose, dans ce chapitre, deux méthodes pour observer les états souples en présence d'incertitudes paramétriques. La première n'est valable que pour une classe de systèmes réduite alors que la seconde est une méthode générale pour la classe des systèmes aérospatiaux souples  $\Sigma_0$  considérée. Même si les stratégies de ces deux méthodes sont différentes, elles utilisent toutes les deux des techniques adaptatives indirectes.

## 5.2 Synthèse d'un observateur adaptatif à temps fini sur une classe réduite

La loi de commande backstepping flexible a montré son efficacité en terme d'atténuation des modes souples au cours du régime transitoire. Ce résultat a été obtenu grâce à l'utilisation des états souples dans la loi de commande. Ces derniers n'étant pas mesurés, ils sont insérés dans la loi de commande à travers un observateur. Il semble ainsi évident, que, plus l'observateur sera rapide, et meilleur sera la loi de commande, en terme d'amélioration de l'amortissement des modes souples. La synthèse d'un observateur à temps fini est donc justifiée d'un point de vue des objectifs de commande. De plus, d'un point de vue plus théorique, le problème de synthèse d'un observateur à temps fini pour les systèmes aérospatiaux incertains ne semble, à notre connaissance pas résolu.

Ainsi, tout au long de cette section, on cherche à développer un observateur adaptatif convergent en temps fini. Pour cela, on choisit dans un premier temps de travailler sur une sous-classe de système, issue de  $\Sigma_0$ . On la définit à travers l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5.1**

La classe de système  $\Sigma_0$  est définie par les caractéristiques suivantes :

- $p = 1$  (un seul mode souple)
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) = 0_{2p}$ .
- $K_1 = 0_{1 \times 2p}$
- Tous les paramètres du système sont connus, sauf la pulsation  $\omega$  et l'amortissement  $\xi$  du mode de flexion

La sous classe de système considérée, sous l'hypothèse 5.1, s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1)x_1 + k_2\eta + C_u u \\ \ddot{\eta} &= -\omega^2\eta - 2\xi\omega\dot{\eta} + hu \end{cases} \quad (5.2)$$

On suppose de plus que le système est équipé de deux capteurs (au moins) fournissant les sorties suivantes :

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + r_1\eta \\ y_2 &= x_2 + r_2\dot{\eta} \end{cases} \quad \text{avec } r_1 \neq r_2 \quad (5.3)$$

**Remarque** Les restrictions de la classe  $\Sigma_0$  données par l'hypothèse 5.1 ne sont pas dénuées de sens physique. Même si elle est moins générale, la classe réduite (5.2) reste représentative de certains systèmes aérospatiaux souples, comme le lanceur, sur lequel les travaux de cette section seront illustrés.

### 5.2.1 Extraction d'un sous système linéaire

Malgré les hypothèses effectuées pour réduire la classe de système considérée, le système (5.2) reste non linéaire. Or, en remarquant que  $x_2 = y_2 - r_2\dot{\eta}$ , et en considérant la sortie  $y_2$  comme une entrée, on peut extraire du système non linéaire (5.2) un sous-système linéaire décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + BU \\ y_1 &= CX \end{cases} \quad (5.4)$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} y_2 \\ u \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & -2\xi\omega \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

Comme  $r_1 \neq r_2$ , la paire  $(A, C)$  est observable, et on peut construire un observateur de Luenberger pour estimer l'état du système :

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BU + L_o(Y - C\hat{X}) \quad (5.5)$$

où  $\hat{X} = (\hat{\psi} \ \hat{\eta} \ \hat{\dot{\eta}})^T$  est le vecteur d'état estimé, et  $L_o \in \mathbb{R}^3$  est choisie de façon à ce que la matrice  $A - LC$  soit Hurwitz.

Cependant, la pulsation  $\omega$  et l'amortissement  $\xi$  sont des termes sensibles aux incertitudes.

Ainsi, la matrice d'état  $A$  dépend de paramètres incertains, et le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A(\theta)X + BU \\ y_1 &= CX \end{cases} \quad (5.6)$$

avec

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix} \quad \theta_1 = -\omega^2 \quad \theta_2 = -2\xi\omega$$

Pour se passer de la connaissance de la pulsation et de l'amortissement du mode souple, on choisit de mettre en place un estimateur de paramètre, qui fournit ces informations, en ligne.

### 5.2.2 Synthèse d'un estimateur de paramètres

On cherche dans cette partie, à mettre au point un estimateur pour reconstruire les paramètres caractéristiques du mode souple, à savoir sa pulsation et son amortissement naturel, de façon à les injecter dans la matrice d'état de l'observateur. On utilise pour cela une méthode d'estimation algébrique tirée de [40], qui donne une procédure d'identification des paramètres d'un système. L'utilisation de cette méthode nécessite de lier les paramètres que l'on cherche à estimer, aux signaux d'entrée et de sortie connus. Pour cela, la sortie  $y_1$  est dérivée successivement. Il vient alors l'équation suivante, qui fait intervenir la matrice d'observabilité  $M_o$  :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}}_{M_o} X + \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{1 \times 2} \\ CB \\ CAB \end{pmatrix}}_{M_U} U + \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{1 \times 2} \\ 0_{1 \times 2} \\ CB \end{pmatrix}}_{M_{\dot{U}}} \dot{U} \quad (5.7)$$

et

$$y_1^{(3)} = CA^3X + CA^2BU + CAB\dot{U} + CB\ddot{U} \quad (5.8)$$

Le système (5.4) est observable. Ainsi, la matrice d'observabilité  $M_o$  est de rang plein et on peut tirer  $X$  de l'équation (5.7) :

$$X = M_o^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{pmatrix} - M_o^{-1} M_U U - M_o^{-1} M_{\dot{U}} \dot{U} \quad (5.9)$$

On injecte alors cette dernière expression dans (5.8). On obtient une équation liant les sorties et leurs dérivées à la dérivée de l'entrée de commande :

$$y_1^{(3)} - \ddot{y}_2 = -\omega^2(\dot{y}_1 - y_2) - 2\xi\omega(\ddot{y}_1 - \dot{y}_2) + h(r_1 - r_2)\dot{u} \quad (5.10)$$

Cette équation constitue l'équation de base de l'estimation paramétrique, dans le sens où elle lie les paramètres que l'on cherche à estimer, aux signaux d'entrée et de sortie et leurs dérivées.

**Remarque** Une autre manière, plus simple mais moins générale, permet d'obtenir l'équation (5.10). Il suffit de prendre la dérivée temporelle de la dynamique souple :

$$\eta^{(3)} = -\omega^2 \dot{\eta} - 2\xi\omega \ddot{\eta} + h\dot{u} \quad (5.11)$$

et de remarquer la relation liant les états souples aux sorties et à leurs dérivées :

$$\dot{\eta} = \frac{\dot{y}_1 - y_2}{r_1 - r_2} \quad (5.12)$$

En combinant ces deux dernières équations, on obtient le résultat (5.10)

On souhaite maintenant estimer, en ligne, les caractéristiques du mode souple, à savoir sa pulsation  $\omega$  et son amortissement  $\xi$ . On choisit la méthode d'estimation algébrique, décrite dans [40] pour identifier ces paramètres. Cette méthode utilise la transformation de Laplace ainsi que des dérivations successives par rapport à la variable de Laplace. Ainsi, au cours des étapes menant à l'estimation des paramètres, les conditions initiales de certains signaux vont apparaître. L'idée consiste alors à estimer, dans le même temps, les conditions initiales de l'état observé  $X_0 = (x_{1_0} \ \eta_0 \ \dot{\eta}_0)^T$  de façon à améliorer la précision de l'observateur et à lui assurer une convergence en temps fini. Cette convergence trouvera en effet tout son intérêt dans l'utilisation des états observés pour la synthèse de la loi de commande en retour de sortie.

Pour estimer les paramètres caractérisant les modes souples ainsi que les conditions initiales, on définit le vecteur de paramètres suivant :

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi\omega \\ -\omega^2 \\ \dot{y}_1(0) \\ \ddot{y}_1(0) - \ddot{y}_2(0) + 2\xi\omega\dot{y}_1(0) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Les deux premiers paramètres donnent les caractéristiques du mode souple. Les deux paramètres suivants sont ajoutés de façon à reconstruire les conditions initiales des états souples par les relations :

$$\eta_0 = \eta(0) = \frac{1}{\theta_2} \left( \frac{\theta_4 + \theta_1 y_2(0)}{r_1 - r_2} - hu(0) \right) \quad (5.14)$$

$$\dot{\eta}_0 = \dot{\eta}(0) = \frac{\theta_3 - y_2(0)}{r_1 - r_2} \quad (5.15)$$

En gardant à l'esprit le domaine d'application aérospatial dans lequel on se place, on sait que le paramètre  $r_1$  correspondant à la rotation souple au droit du capteur est très petit. L'état initiale  $x_1(0) = x_{1_0}$  peut ainsi être directement déduit de la mesure initiale  $y_1(0)$  :

$$x_{1_0} = y_1(0) - r_1 \eta_0 \simeq y_1(0) \quad (5.16)$$

**Remarque** Les travaux d'estimations basés sur cette méthode algébrique cherchent généra-

lement à éliminer les conditions initiales qui apparaissent lors du calcul de la transformée de Laplace, en effectuant des dérivations successives. Au contraire, dans cette étude, on a conservé les conditions initiales et on les a traitées comme des paramètres à part entière pour l'estimation.

Une fois ce vecteur de paramètre défini, les différentes étapes de la procédure d'estimation algébriques sont appliquées (transformation de Laplace, dérivation par rapport à la variable de Laplace...). Toutes ces étapes sont détaillées en [Annexe B](#) et mènent à la définition de matrices  $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  variant dans le temps, qui satisfont la relation :

$$P(t)\hat{\theta}(t) = Q(t), \quad (5.17)$$

A ce stade, la façon la plus classique de conclure l'estimation paramétrique consiste à prendre l'inverse de la matrice  $P$  pour tirer  $\hat{\theta}$  de (5.17). Seulement, comme  $P$  est une matrice variant dans le temps, il est probable qu'elle s'annule à certains instants, et cela a d'ailleurs été remarqué en simulations. Pour éviter ce problème, on choisit de travailler avec l'intégrale du terme  $P^T P$  sur un instant suffisamment long, ce qui revient à imposer une condition d'excitation persistante.

### Hypothèse 5.2

$P$  est une excitation persistante, ce qui signifie qu'il existe  $\tau > 0$  tel que :

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{t+\tau} P(s)^T P(s) ds > 0 \quad (5.18)$$

Cette hypothèse constitue une condition d'excitation persistante et assure ainsi la définition du vecteur de paramètres estimés, défini par :

$$\hat{\theta}(t) = \left[ \int_t^{t+\tau} P(s)^T P(s) ds \right]^{-1} \int_t^{t+\tau} P(s)^T Q(s) ds \quad (5.19)$$

La constante  $\tau$  étant inconnue, on calcule le vecteur de paramètres estimés  $\hat{\theta}$  à des instants discrets  $\tau_k$  où  $\{\tau_k\}_{k=0}^{+\infty}$  est une partition de  $\mathbb{R}^+$  :

$$\hat{\theta}(\tau_k) = \left[ \int_0^{\tau_k} P(s)^T P(s) ds \right]^{-1} \int_0^{\tau_k} P(s)^T Q(s) ds \quad (5.20)$$

Ces paramètres estimés permettent ensuite de reconstruire la matrice d'état composée de paramètres incertains ainsi que les conditions initiales de l'état, à ces même instants discrets :

$$\hat{A}(\tau_k) = \hat{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \hat{\theta}_2(\tau_k) & \hat{\theta}_1(\tau_k) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

$$\hat{X}_0(\tau_k) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ \frac{1}{\hat{\theta}_2(\tau_k)} \left( \frac{\hat{\theta}_4(\tau_k) + \hat{\theta}_1(\tau_k)y_2(0)}{r_1 - r_2} - hu(0) \right) \\ \frac{\hat{\theta}_3(\tau_k) - y_2(0)}{r_1 - r_2} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

A ce stade, on dispose donc :

- d'un observateur de Luenberger estimant les états souples dans le cas où tous les paramètres sont connus,
- d'un estimateur fournissant les caractéristiques des modes souples ainsi que les conditions initiales de l'état observé à des instants discrets.

On dispose alors d'un système continu (observateur) et d'un système discret (estimateur) que l'on va unir pour mettre au point un observateur adaptatif convergeant en temps fini.

### 5.2.3 Synthèse d'un observateur hybride adaptatif à temps fini

On combine les développements précédents pour mettre au point un observateur adaptatif hybride.

#### Proposition 5.1

Soit  $\{\tau_k\}_{k=0}^{+\infty}$  une partition de  $\mathbb{R}^+$ . Sous l'hypothèse d'excitation persistante 5.2, l'observateur adaptatif hybride suivant converge globalement en temps fini.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[ \\ \dot{\hat{X}} = \hat{A}_k \hat{X} + BU + L_k(y_1 - C\hat{X}) \\ \text{Pour } t = \tau_k \\ \hat{X}(\tau_k) = e^{\hat{A}_k \tau_k} \hat{X}_0(\tau_k) + \int_0^{\tau_k} e^{\hat{A}_k(\tau_k - s)} BU(s) ds \end{array} \right. \quad (5.23)$$

avec  $L_k \in \mathbb{R}^3$  telle que  $\hat{A}_k - L_k C$  soit Hurwitz.

A chaque instant  $\tau_k$ , l'état  $\hat{X}$ , le gain  $L_k$  et la dynamique  $\hat{A}_k$  sont mis à jour.

**Démonstration :** On utilise les notations  $\tilde{X} = X - \hat{X}$  et  $\tilde{A}_k = A - \hat{A}_k$ . En prenant la dérivée temporelle de l'erreur d'observation, il vient :

$$\dot{\tilde{X}} = AX - \hat{A}_k \hat{X} - LC\tilde{X} = (A - L_k C)\tilde{X} - \tilde{A}_k \hat{X} \quad (5.24)$$

L'hypothèse d'excitation persistante assure une convergence en temps fini de l'estimation des paramètres. Ainsi, il existe  $k^* \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\tau_{k^*} > \tau > 0$  et :

$$\forall k > k^*, \quad \hat{\theta}(\tau_k) = \theta \quad (5.25)$$

Par conséquent,  $\forall k > k^*$ ,  $\hat{A}_k = A$  et les erreurs d'estimations vérifient :

$$\forall t \geq \tau_k^*, \quad \dot{\tilde{X}} = (A - L_k C)\tilde{X} \quad (5.26)$$

Le vecteur  $L_k$  est choisi pour assurer la stabilité de la matrice  $A - L_k C$ . Ainsi, l'erreur  $\tilde{X}$  converge asymptotiquement vers 0. De plus, à chaque instant  $\tau_k$  tel que  $\tau_k > \tau_{k^*}$ , l'état estimé  $\hat{X}(t)$  est mis à jour sur  $\hat{X}(\tau_k)$ .

$$\forall t \geq \tau_k^*, \quad \hat{X}_0(t) = X_0(t) \quad \text{donc} \quad \hat{X}(\tau_k) = X(\tau_k) \quad (5.27)$$

L'erreur d'estimation est alors donnée par :

$$\forall t \geq \tau_k^*, \quad \tilde{X}(t) = \tilde{X}(\tau_k)e^{(A-L_k C)(t-\tau_k)} = 0 \quad (5.28)$$

Finalement, l'erreur d'estimation s'annule en temps fini. ■

Cet observateur combine ainsi une convergence en temps fini avec des incertitudes paramétriques. Il doit de plus assurer de bonnes qualités de robustesses aux bruits de mesures, puisque la méthode d'estimation algébrique l'est.

Avant d'utiliser la sortie de cet estimateur pour synthétiser la loi de commande backstepping flexible, on effectue des simulations numériques sur le lanceur souple, en boucle ouverte, pour tester l'efficacité de l'observateur et de l'estimateur de paramètres.

#### 5.2.4 Application au lanceur souple

L'observateur développé dans cette partie ne s'applique qu'à une sous-classe de système, dont le lanceur souple fait partie.

$$\begin{cases} \dot{\psi} &= q \\ \dot{q} &= -\frac{l_{\text{aéro}}}{I_L}L(\psi) + \frac{T}{I_L}(L_T r - h) + \frac{TL_T}{I_L}\beta \\ \dot{\eta} &= -\bar{\omega}^2\eta - 2\xi\omega\dot{\eta} + hT\beta \\ y_1 &= \psi + r_{\text{ci}}\eta \\ y_2 &= q + r_{\text{gy}}\dot{\eta} \end{cases} \quad (5.29)$$

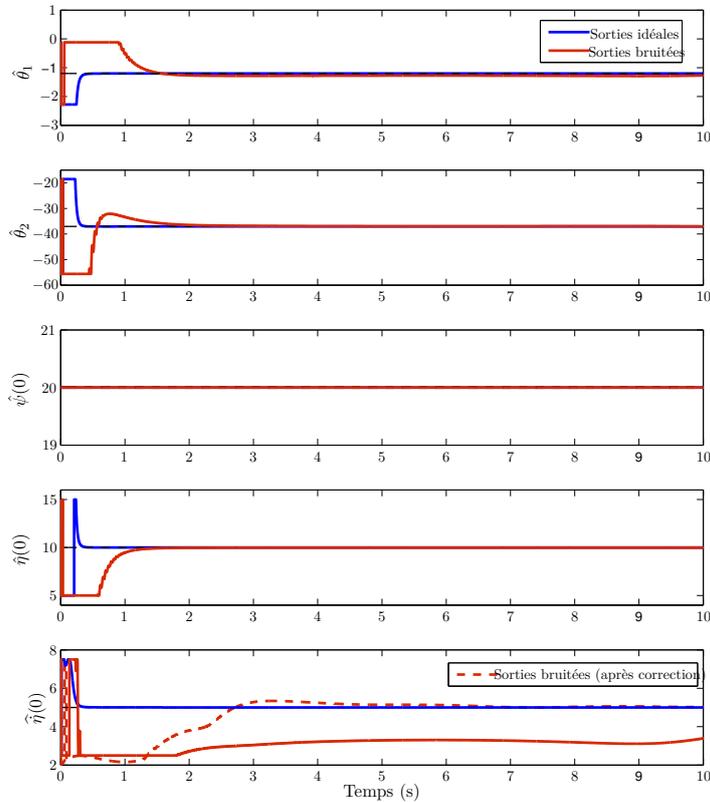
On applique ainsi les résultats théoriques précédents avec :

$$x_1 = \psi \quad r_1 = r_{\text{ci}} \quad r_2 = r_{\text{gy}} \quad u = \beta \quad (5.30)$$

#### ► Simulation numérique de l'estimateur paramétrique

On effectue une simulation numérique de l'estimateur de paramètres. Le figure 5.1 représente l'évolution des coefficients ( $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ ) caractérisant le mode souple et des conditions initiales ( $\hat{\psi}(0), \hat{\eta}(0), \hat{\dot{\eta}}(0)$ ) pour des sorties idéales (en bleu) et pour des sorties bruitées (en rouge). Pour

la simulation, le bruit utilisé est un bruit blanc à moyenne nulle ajouté sur les signaux de sortie  $y_1$  et  $y_2$ .



**Figure 5.1** – Évolution temporelle des paramètres et conditions initiales estimées

Avec des sorties idéales, les paramètres estimés convergent en moins d'une seconde. L'attitude initiale estimée est directement donnée par la sortie initiales  $y_1$ , ce qui explique sa constance dès le début de la simulation. Lorsque les mesures sont bruitées, l'estimée de la condition initiale  $\hat{\eta}(0)$  est biaisée. L'erreur d'estimation est même assez importante. On se penche alors sur ce problème.

### ► Amélioration de la robustesse en présence de bruits de mesure

Sur la simulation 5.1, on constate une erreur d'estimation pour le paramètre  $\hat{\eta}(0)$  lorsque les mesures sont bruitées. Ce biais d'estimation est donné par :

$$\tilde{\eta}(0) = \eta(0) - \hat{\eta}(0) = \frac{\theta_3 - \hat{\theta}_3}{r_1 - r_2} \quad (5.31)$$

Cette erreur est directement liée au dénominateur  $r_1 - r_2$  qui prend des valeurs très faible, et qui, par conséquent, accentue la différence entre  $\theta_3$  et son estimé  $\hat{\theta}_3$ . Ce biais est directement

lié à l'application choisie, pour laquelle les paramètres  $r_1$  et  $r_2$  sont très faibles. Cela ne remet en aucun cas en cause la théorie développée. Dans cette section, on montre comment limiter ce phénomène en identifiant le biais  $\tilde{\eta}(0)$  pour corriger l'estimation des conditions initiales  $\hat{X}_0(\tau_k)$ .

A partir du système (5.4) on peut écrire la sortie  $y_1$  comme :

$$y_1(t) = CX(t) = Ce^{At}X_0(t) + C \int_0^t e^{A(t-s)}BU(s)ds \quad (5.32)$$

En faisant de même avec l'état estimé, il vient :

$$\hat{X}(t) = e^{\hat{A}_k t} \hat{X}_0(t) + \int_0^t e^{\hat{A}_k(t-s)}BU(s)ds \quad (5.33)$$

Sous condition d'excitation persistante, l'estimation algébrique se fait en temps fini. Ainsi, il existe  $k^* > 0$  tel que pour tout  $k \geq k^*$

$$\hat{A}_k = A \text{ et } \hat{X}_0 = (\psi(0) \quad \eta(0) \quad \dot{\eta}(0) - \tilde{\eta}(0))^T \quad (5.34)$$

Cette dernière équation souligne le fait que seule la condition initiale associée à  $\dot{\eta}$  est biaisée. Ensuite, en écrivant la différence entre la sortie mesurée et la sortie estimée, on a :

$$\forall t > t_{k^*} \quad y_1(t) - C\hat{X}(t) = Ce^{At}e_3 \tilde{\eta}(0) \quad (5.35)$$

avec  $e_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$ .

$$\int_0^t (Ce^{As}e_3)^2 ds \tilde{\eta}(0) = \int_0^t Ce^{As}e_3 [y_1(s) - C\hat{X}(s)] ds \quad (5.36)$$

En supposant que  $\int_0^t (Ce^{As}e_3)^2 ds \neq 0$ , l'erreur d'estimation s'écrit :

$$\tilde{\eta}(0) = \frac{\int_0^t Ce^{As}e_3 [y_1(s) - C\hat{X}(s)] ds}{\int_0^t (Ce^{As}e_3)^2 du} \quad (5.37)$$

Ce terme est alors ajouté à la condition initiale estimée. Le résultat est représenté sur la figure 5.1 (trait pointillé). On assure ainsi une convergence de tous les paramètres estimés, même en présence de bruit de mesure.

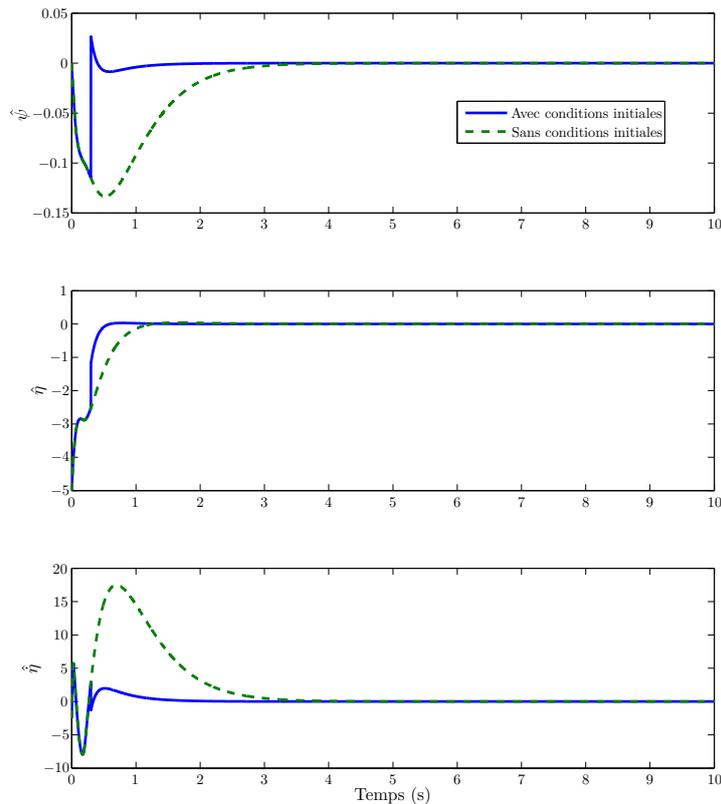
On utilise ensuite ces paramètres estimés pour tester l'observateur hybride.

### ► Simulation numérique de l'observateur

Le comportement de l'observateur hybride est simulé en utilisant les données fournies par l'estimateur. L'observateur à temps fini que l'on vient de développer est comparé à un observateur de Luenberger possédant le même gain d'observation  $L_o$ . On montre ainsi l'intérêt de la mise

à jour de l'état estimé à partir des conditions initiales fournies par l'estimateur de paramètres. Pour garantir une comparaison significative, les conditions initiales des deux observateurs sont les mêmes. Le résultat est représenté sur la figure 5.2.

Cette simulation est réalisée sans bruit de mesure. On remarque bien l'instant de la mise à jour de l'état avec les paramètres estimés à  $t \approx 0.3s$ . Cette mise à jour se déroule dès que les paramètres de l'estimateur ont convergé.



**Figure 5.2** – Évolution temporelle des erreurs d'observation avec ou sans mise à jour de l'état à partir des conditions initiales estimées

L'observateur adaptatif développé dans cette section, basé sur la combinaison d'un observateur linéaire et d'un estimateur de paramètre discret permet d'estimer les états souples du système ainsi que les paramètres les caractérisant. La convergence à temps fini est ainsi assurée en présence d'incertitudes. Les paramètres estimés pourront de plus être utilisés dans la loi de commande.

Cependant, cet observateur n'est valable que pour une classe réduite de système, mais ne peut s'appliquer à l'ensemble de la classe des systèmes aérospatiaux souples. Ainsi, on propose,

dans la section suivante, une méthode d'observation pour la classe  $\Sigma_0$ .

### 5.3 Synthèse d'un observateur adaptatif asymptotique sur la classe $\Sigma_0$

Dans cette section, on développe une méthode permettant de reconstruire les états souples d'un système aérospatial souple de la classe  $\Sigma_0$ , tout en tenant compte des incertitudes paramétriques. On travaille tout de même sous l'hypothèse suivante :

#### Hypothèse 5.3

Les déplacements et rotations souples sont supposées connues, ce qui se traduit par la connaissance des paramètres  $R_i$  et  $h_i$ .

Dans le chapitre 4, un observateur asymptotique est synthétisé en supposant que tous les paramètres du système sont connus. Dans cette section, on propose d'étendre cette étude en tenant compte des incertitudes. Pour cela, on reprend le système non linéaire affine en l'état(4.13), mis en évidence au chapitre 4 :

$$\begin{cases} \dot{X} = A(y_j)X + B_{y_i}y_i + B_u u \\ Y = CX \end{cases} \quad (5.38)$$

avec :

$$\begin{aligned} X &= (x_1 \ N)^T \quad U = (y_i \ u)^T \\ Y &= (y_1, y_2, \dots, y_l, y_{l+1} - y_i, \dots, y_{p+1} - y_i)^T \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & R_l \\ 0 & R_{l+1} - R_i \\ \vdots & \vdots \\ 0 & R_{p+1} - R_i \end{pmatrix} \quad A(y_j) = \begin{pmatrix} f_1(y_j) & K_1 - \frac{df_1(y_j)}{dy_j} y_j R_j - C_1 R_i \\ F_N(y_j) & A_N \end{pmatrix} \\ B_{y_i} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{2p} \end{pmatrix} \quad B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 5.3.1 Mise en évidence des incertitudes

L'hypothèse 5.3 assure la connaissance des matrices  $B_u$  et  $C$ . Le vecteur  $B_{y_i}$  étant constant, il est connu également. Ainsi, les incertitudes ne concernent que la matrice  $A$  qui dépend d'une des sorties  $y_j$ . On réécrit ainsi cette matrice en séparant les termes qui dépendent des paramètres incertains de ceux qui n'en dépendent pas :

$$A(y_j) = A_{\text{nom}}(y_j) + A_{\delta}(y_j) \quad (5.39)$$

où  $A_{\text{nom}}(y_j)$  est la partie nominale de la matrice, qui contient des termes connus et  $A_\delta(y_j)$  est la matrice d'incertitudes.

$$A_{\text{nom}}(y_j) = \begin{pmatrix} f_{1\text{nom}}(y_j) & K_{1\text{nom}} - \frac{df_{1\text{nom}}(y_j)}{dy_j} y_j R_j - R_i \\ F_{N_{\text{nom}}}(y_j) & A_{N_{\text{nom}}} \end{pmatrix}$$

$$A_\delta(y_j) = \begin{pmatrix} f_{1\delta}(y_j) & K_{1\delta} - \frac{df_{1\delta}(y_j)}{dy_j} y_j R_j \\ F_{N_\delta}(y_j) & A_{N_\delta} \end{pmatrix}$$

avec :

$$f_{1\text{nom}}(y_j) = \sum_{k=1}^{m_1} a_{k\text{nom}} S(y_j)^k \quad f_{1\delta}(y_j) = \sum_{k=1}^{m_2} a_{k\delta} S(y_j)^k$$

$$K_{1\text{nom}} = (k_{1\text{nom}} \quad 0 \quad \dots \quad k_{p_{\text{nom}}} \quad 0) \quad K_{1\delta} = (k_{1\delta} \quad 0 \quad \dots \quad k_{p_\delta} \quad 0)$$

$$F_{N_{\text{nom}}}(y_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^r b_{k\text{nom}}^1 S(y_j)^k \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{k=1}^r b_{k\text{nom}}^p S(y_j)^k \end{pmatrix} \quad A_{N_{\text{nom}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_{1\text{nom}}^2 & -2\xi_{1\text{nom}}\omega_{1\text{nom}} & \dots & N_{p_{\text{nom}}}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ N_{1\text{nom}}^p & 0 & \dots & -\omega_{p_{\text{nom}}}^2 & -2\xi_{p_{\text{nom}}}\omega_{p_{\text{nom}}} \end{pmatrix}$$

$$F_{N_\delta}(y_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^r b_{k\delta}^1 S(y_j)^k \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{k=1}^r b_{k\delta}^p S(y_j)^k \end{pmatrix} \quad A_{N_\delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_{1\delta}^2 & -2\xi_{1\delta}\omega_{1\delta} & \dots & N_{p_\delta}^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N_{1\delta}^p & 0 & \dots & -\omega_{p_\delta}^2 & -2\xi_{p_\delta}\omega_{p_\delta} \end{pmatrix}$$

Le système (5.38) s'écrit ainsi, en tenant compte des incertitudes paramétriques :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A_{\text{nom}}(y_j)X + A_\delta(y_j)X + B_{y_i}y_i + B_u u \\ Y &= CX \end{cases} \quad (5.40)$$

Le terme incertain  $A_\delta(y_j)X$  est transformé de façon à mettre en évidence les incertitudes, dans un même vecteur de paramètre constant, noté  $\theta$  :

$$A_\delta(y_j)X = \Psi(X, y_j)\theta \quad (5.41)$$

où le vecteur de paramètres incertains est défini par :

$$\theta = \left[ \theta_0^T \quad \theta_1^T \quad \dots \quad \theta_p^T \right]^T \quad (5.42)$$



**Définition 5.2 (USPAS)**

L'origine du système non linéaire  $\dot{x} = f(t, x)$  est Uniformément Semi-globalement Pratiquement Asymptotiquement Stable (USPAS) si pour tous nombres réels positifs  $\Delta > \delta > 0$  et  $\sigma > 0$ , il existe  $T > 0$  et  $\kappa \in \mathcal{K}_\infty$  tels que :

$$\begin{cases} \forall t \geq t_0 & \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \kappa(\|x_0\|) \\ \forall t \geq t_0 + T & \|x_0\| \leq \Delta \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \sigma + \delta \end{cases} \quad (5.45)$$

Le caractère pratiquement stable avancé par cette définition traduit en fait la convergence asymptotique vers une boule.

**Proposition 5.2 ([71])**

Soit le système incertain suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(y)x + \Psi(x, y)\theta + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (5.46)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $y \in \mathbb{R}^l$  la sortie mesurée, la matrice d'état  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ne dépend que de la sortie, la matrice  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times m}$  dépend de l'état et de la sortie mesurée et le vecteur  $\theta \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur de paramètres incertains constants. Soit l'observateur adaptatif suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A(y)\hat{x} - L(y)(\hat{y} - y) + \Psi(\hat{x}, y)\hat{\theta} + Bu \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\gamma\Psi(\hat{x}, y)^T P(y)\hat{x} \\ L(y) &= P(y)^{-1}C^T \\ \dot{P}(y) &= 2C^T C - \rho_x P(y) - P(y)A(y) - A(y)^T P(y) \quad \rho_x > 0 \\ P(y_0) &= P_0 = P_0^T > 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

Sous condition d'excitation persistante, les erreurs d'observation définies par  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  et  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  convergent uniformément semi-globalement pratiquement asymptotiquement vers 0.

Ce résultat assure ainsi la convergence de l'état observé vers l'état du système, mais permet également, dans le même temps, d'estimer le vecteur de paramètre incertain  $\theta$ . Ainsi, appliqué à notre problématique, ce résultat permet de reconstruire les états souples du système, tout en estimant les paramètres incertains. Ce dernier point est particulièrement intéressant pour les objectifs de commande fixés. En effet, les paramètres estimés pourront être utilisés par la loi de commande backstepping flexible.

L'observateur développé dans cette partie présente l'avantage de pouvoir s'appliquer à l'ensemble de la classe des systèmes aérospatiaux  $\Sigma_0$ . Même si le lanceur souple fait partie de la classe réduite sur laquelle l'observateur hybride à temps fini peut être synthétisé, on l'utilise

comme exemple d'application pour cet observateur adaptatif plus général, de façon à pouvoir comparer les deux méthodes d'observation mises au point dans cette thèse sur le même exemple.

### 5.3.3 Application au lanceur souple

On rappelle le système linéaire extrait du système non linéaire du lanceur souple (avec 1 mode) :

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + BU \\ y_1 &= CX \end{cases} \quad (5.48)$$

avec

$$X = (\psi \quad \eta \quad \dot{\eta})^T \quad U = (y_2 \quad \beta)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{gy} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{\omega}^2 & -2\xi\omega \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & hT \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad r_{ci} \quad 0)$$

Les incertitudes affectent l'ensemble des données décrivant le système. Seulement, on ne considère, dans un premier temps que les incertitudes n'affectent que les caractéristiques des modes souples (pulsation et amortissement naturel), de façon à se mettre dans les mêmes conditions que dans la section précédente où l'observateur à temps fini fournissait la pulsation et l'amortissement du mode souple. On pourra alors comparer ces deux méthodes d'observation. On pose ainsi :

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi\omega_\delta \\ -\bar{\omega}_\delta^2 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

où  $-2\xi\omega_\delta$  (resp.  $-\bar{\omega}_\delta^2$ ) représente la partie incertaine du terme  $-2\xi\omega$  (resp.  $-\bar{\omega}^2$ ). En notant de même  $-2\xi\omega_{nom}$  (resp.  $-\bar{\omega}_{nom}^2$ ) la partie nominale de  $-2\xi\omega$  (resp.  $-\bar{\omega}^2$ ), on sépare les termes connus des termes incertains, on réécrit le système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} &= A_{nom}X + \Psi(X)\theta + BU \\ y_1 &= CX \end{cases} \quad (5.50)$$

avec

$$A_{nom} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r_{gy} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\bar{\omega}_{nom}^2 & -2\xi\omega_{nom} \end{pmatrix} \quad \Psi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\eta} & \eta \end{pmatrix}$$

On réalise alors une simulation avec 25% d'incertitudes sur les paramètres nominaux liés à la pulsation et à l'amortissement du mode souple, ce qui se traduit par les données suivantes :

$$\begin{aligned} -2\xi\omega_{nom} &= -2.4 & -\bar{\omega}^2 &= -180 \\ \theta_1 &= -2\xi\omega_{nom} \times 0.25 = -0.6 & \theta_2 &= -\bar{\omega}_{nom}^2 \times 0.25 = -45.2 \end{aligned}$$

Les conditions initiales choisies pour tester l'observateur sont les suivantes :

$$X(0) = (20^\circ \ 10 \ 5)^T \quad \hat{X}(0) = (5^\circ \ 0 \ 0)^T \quad (5.51)$$

La figure 5.3 présente l'évolution des paramètres estimés, alors que la figure 5.4 montre l'évolution des états observés et des erreurs d'observation. La convergence de l'observateur est très rapide, aussi bien pour les paramètres que pour les états estimés. Ceci est un point positif pour cet observateur, en vue d'une utilisation en boucle fermée.

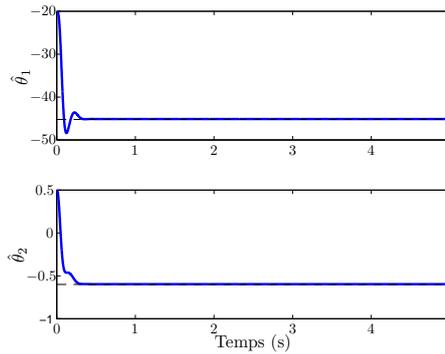


Figure 5.3 – Évolution temporelle des paramètres estimés pour le lanceur avec l'observateur [71]

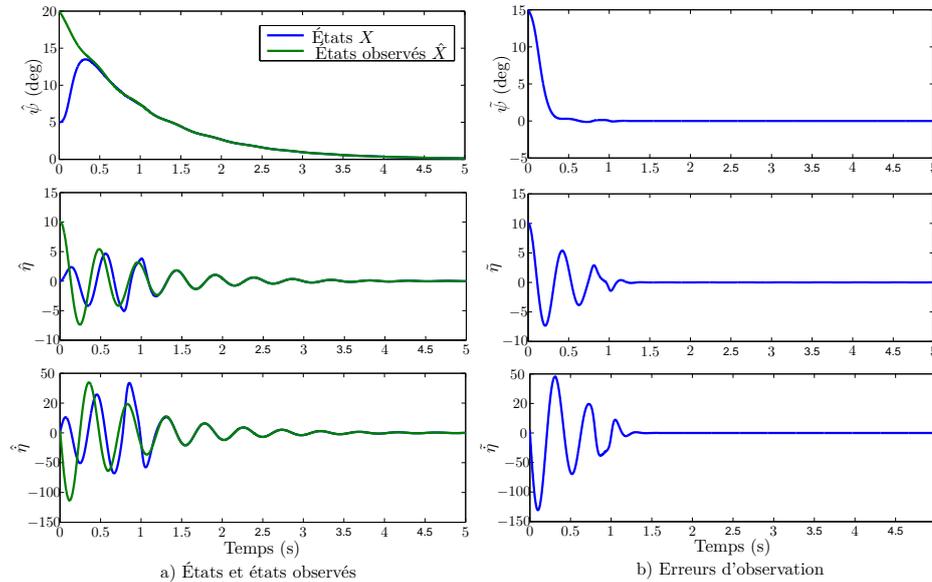
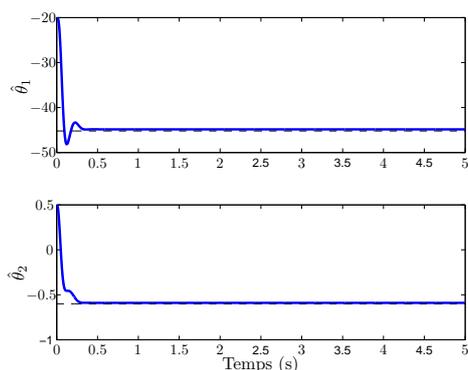
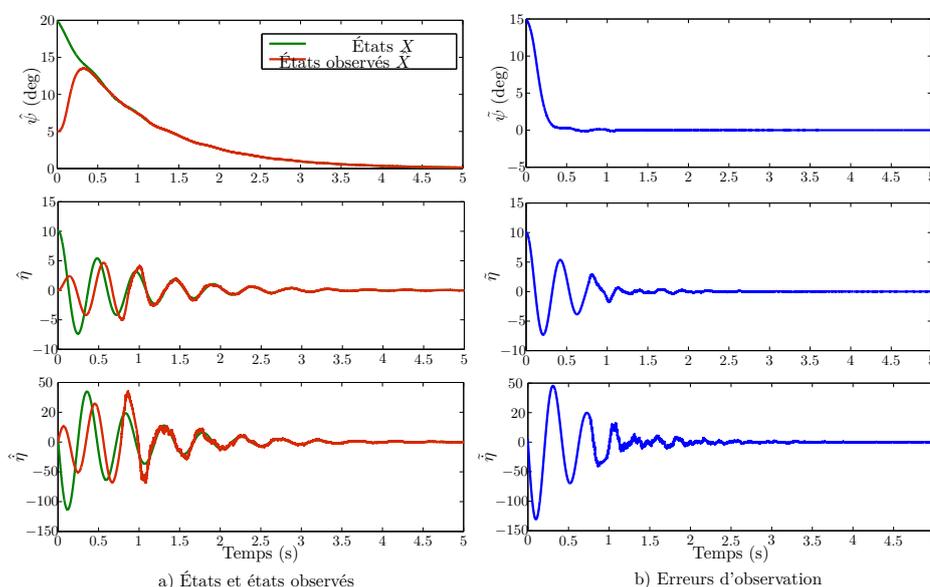


Figure 5.4 – Évolution temporelle des états observés (à gauche) et des erreurs d'observation (à droite) pour le lanceur avec l'observateur [71]

Ce même observateur est testé en présence d'un bruit de mesure à moyenne nulle, ajouté sur les deux sorties. Le résultat est présenté figure 5.5 pour les paramètres estimés, et figure 5.6 pour les états estimés et les erreurs d'observation. L'observateur fonctionne également en présence de bruit. Il est à noter tout de même que cela ne tient plus pour un temps de réponse réduit pour l'observateur. Ainsi, un compromis performance/robustesse est à trouver pour cet observateur.



**Figure 5.5** – Évolution temporelle des paramètres estimés pour le lanceur avec l'observateur [71], en présence de bruit de mesure



**Figure 5.6** – Évolution temporelle des états observés (à gauche) et des erreurs d'observation (à droite) pour le lanceur avec l'observateur [71], en présence de bruit de mesure

### 5.3.4 Discussion sur les deux méthodes

Deux observateurs adaptatifs assurant l'estimation des états souples et de paramètres sujets aux incertitudes ont été mis au point dans ce chapitre. Même s'ils sont basés sur des techniques adaptatives indirectes, ces deux observateurs n'offrent pas les mêmes garanties. Le tableau 5.7 dresse un bilan comparatif de ces deux observateurs selon plusieurs critères.

La principale différence se situe au niveau du système sur lequel l'observateur peut être appliqué. La première méthode d'observation ne s'applique en effet pas à la classe complète, mais à une sous classe de système dont fait partie le lanceur. Ainsi, la première méthode d'observation est moins générale. Elle est également moins générale dans le sens où elle ne permet d'estimer qu'un nombre restreint de paramètres, contrairement à la seconde, qui, en théorie, permet d'estimer tous les paramètres mis à part les déformées modales. En revanche, la première méthode

	1 <sup>ère</sup> méthode	2 <sup>ème</sup> méthode
Validité	Classe réduite	Classe complète
Hypothèses	Excitation persistante	Excitation persistante
Paramètres incertains	$\xi \omega$	Tous sauf les déformées
Type de convergence	Globale en temps fini	USPAS
Robustesse aux bruits	Bonne	Bonne

Figure 5.7 – Comparaison des deux observateurs

a l'avantage d'assurer une convergence en temps fini, ce qui peut s'avérer important pour l'utilisation en boucle fermée. Concernant la robustesse aux bruits de mesures, les simulations ont montré qu'un bruit de mesure à moyenne nulle ne posait pas de problème pour l'estimation. Cependant, un bémol est à ajouter pour les deux méthodes utilisées : pour la première méthode, le cas d'application choisi a montré que l'estimation pouvait s'avérer délicate pour la condition initiale de l'état  $\dot{\eta}$  en présence de bruit. Pour la seconde méthode, la convergence en présence de bruit est conditionnée par le compromis classique performance/robustesse.

Ces deux méthodes présentent donc des avantages et des inconvénients, selon l'application choisie ou le nombre de paramètres incertains.

## 5.4 Observateurs et Backstepping flexible

### 5.4.1 Stabilité de la boucle fermée

Le principe de séparation ne s'applique pas au cas non linéaire et nécessite souvent de saturer la commande [9–11, 61, 108] ; ainsi, la stabilité de la boucle fermée ne peut être assurée de façon globale dans la plupart des problèmes. Ceci explique pourquoi la preuve de stabilité de la boucle fermée n'a pas été donnée au chapitre 4 et est laissée en perspective.

De plus, pour ce qui concerne le cas des observateurs adaptatifs développés dans ce chapitre, même si l'on savait écrire la preuve de stabilité de la boucle fermée en paramètre certain, une difficulté supplémentaire interviendrait. En effet, la convergence des observateurs adaptatifs utilisés dans cette thèse repose sur l'hypothèse d'excitation persistante de ses entrées. Ainsi, pour prouver la stabilité de la boucle fermée, il faudrait être capable de montrer que la loi de commande génère, en boucle fermée, des entrées pour l'observateur vérifiant la condition d'excitation persistante. Ceci ne semble pas évident à vérifier.

Ne pouvant pas, pour le moment, prouver que la commande produit, en boucle fermée, une excitation persistante, la preuve théorique de stabilité du backstepping flexible en retour de sortie ne sera pas présentée ici. Des simulations numériques en boucle fermée sont tout de même réalisées, en utilisant le schéma décrit par la figure 5.8. Tant que l'observateur n'a pas convergé, la loi de commande backstepping classique, n'utilisant pas les états souples est choisie. Dès que

l'observateur a convergé, les états souples et les paramètres estimés peuvent être utilisés dans la loi de commande. C'est alors la loi backstepping flexible qui est choisie. Il est important de noter, que, même si la figure 5.8 montre une loi de commande de type commutation, les deux lois de commande sont les mêmes. La loi classique  $\beta_f$  correspond à la loi flexible  $\beta_c$  avec des modes souples mis à 0.

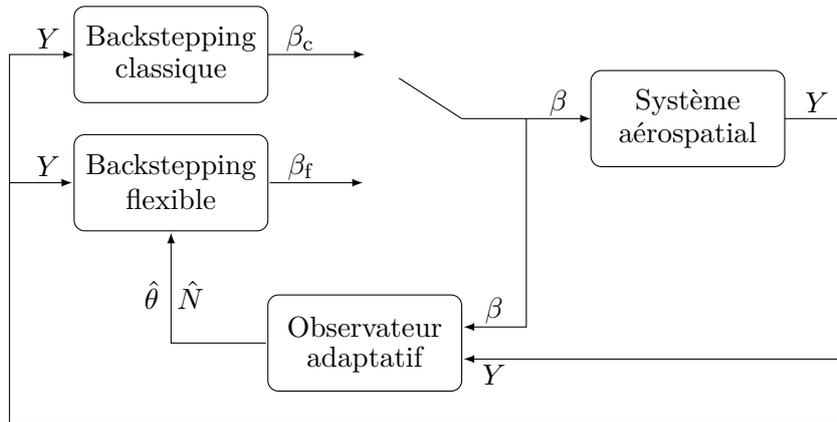


Figure 5.8 – Schéma fonctionnel de la boucle fermée, contrôlée en retour de sortie

#### 5.4.2 Étude d'un cas de non collocalisation pour le lanceur

Utilisant le schéma de la figure 5.8 avec l'observateur à temps fini, on montre, par une simulation en boucle fermée, l'intérêt de la loi de commande développée, en l'illustrant à un cas de non collocalisation capteurs/actionneur pour le lanceur.

La collocalisation se définit généralement en linéaire. Elle se produit lorsque la dynamique entre capteurs et actionneurs montre une séquence répétée d'anti-résonances (pôles complexes) et de résonances (zéros complexes), avec pour conséquence le fait que la phase ne dépasse jamais  $-180^\circ$  ce qui est bénéfique à la stabilité du système. Le lecteur pourra se référer à [4, 83] pour plus de détails. La propriété de collocalisation est liée à celle de la passivité. La dynamique d'un mode souple, et sa mesure gyrométrique est données par :

$$\begin{cases} \dot{N} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{pmatrix} N + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} u \\ y &= (0 \ r_{gy})N \end{cases} \quad (5.52)$$

Le système est passif s'il existe une matrice  $P$  telle que :

$$\begin{cases} PA + A^T P &\leq 0 \\ PB &= C^T \end{cases} \quad (5.53)$$

La matrice  $P$  définie par

$$P = a \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a > 0 \quad (5.54)$$

assure la première condition de (5.53). La seconde condition est assurée si

$$a = \frac{r_{\text{gy}}}{h} > 0 \quad (5.55)$$

ce qui se traduit par une condition de signe entre le déplacement souple au droit de la tuyère et la rotation souple au droit du gyromètre.

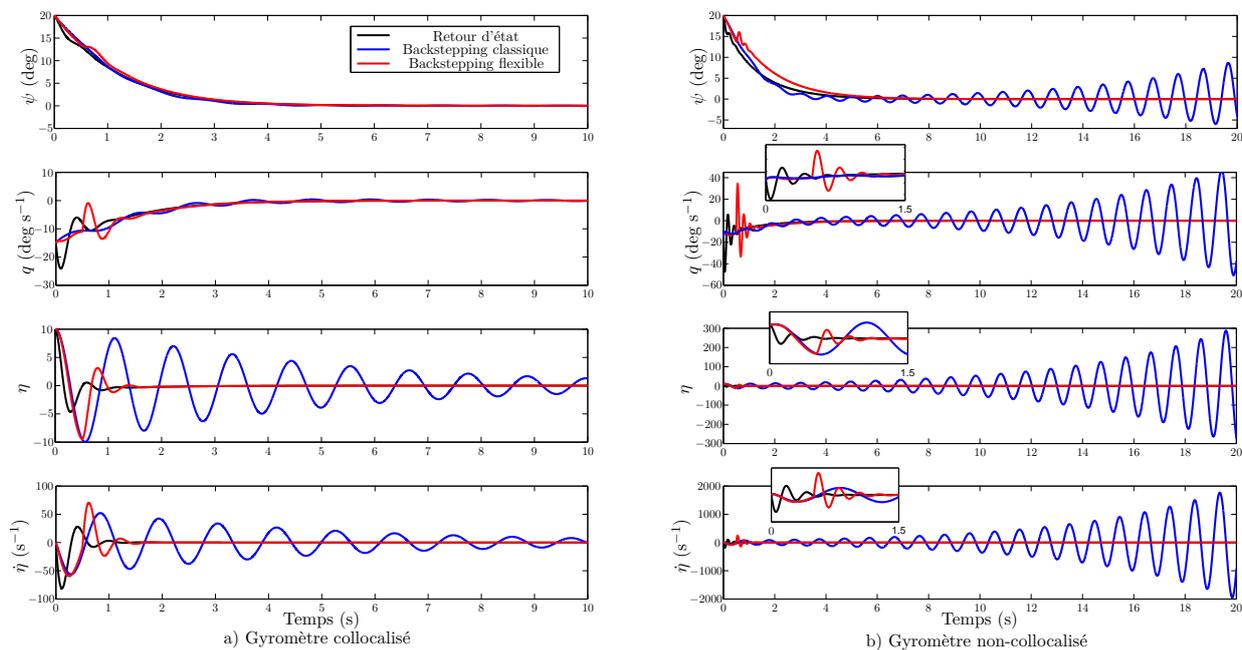
Cet exemple illustre ainsi le fait que la collocalisation est directement liée au positionnement du capteur sur l'axe du véhicule. Ainsi, il convient de placer le gyromètre le long de l'axe longitudinal de manière à satisfaire une condition sur le signe de la valeur de la déformée du mode au droit de l'axe d'articulation de la tuyère par la valeur de la pente de la déformée au droit du gyromètre.

La propriété de collocalisation étant définie pour le lanceur, on teste la loi de commande pour deux positions différentes de capteurs le long de l'axe longitudinal du lanceur. Dans le premier cas, le gyromètre est collocalisé ( $hr_{\text{gy}} > 0$ ) alors que dans le second cas il ne l'est pas ( $hr_{\text{gy}} < 0$ ). Dans ces deux cas, la loi backstepping flexible en retour de sortie est comparée à la même loi en retour d'état ainsi qu'à la loi backstepping classique. La loi par retour d'état ayant démontré de bonnes performances en terme d'amortissement des modes souples, on la prend comme référence pour cette simulation. La figure 5.9 illustre l'évolution temporelle des états du lanceur pour ces deux situations de capteur. Les paramètres de réglage des lois de commande ont été ajustés pour que les temps de réponses soient similaires. Les conditions initiales sont également identiques.

La figure 5.9 montre ainsi que dans une situation de collocalisation, les lois assurent une convergence asymptotique des états vers leurs positions d'équilibre. Au contraire, en cas de non collocalisation, la stabilité est perdue avec la loi backstepping classique. En effet, les mesures des capteurs étant altérées par les modes souples, ces derniers sont renvoyés à l'actionneur et induisent une instabilité de la dynamique rigide. La loi backstepping flexible, synthétisée quant à elle en tenant compte des modes souples et de leurs conséquences sur les mesures garantit la stabilité des états même dans une situation de non collocalisation, et en présence de bruit de mesure.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, deux méthodes d'estimation des états souples et des paramètres incertains ont été développées. La première, valable pour une sous classe de système, consiste en un observateur adaptatif hybride, qui associe un observateur linéaire à un estimateur de paramètre, réalisé avec des outils algébriques. Le second est un observateur asymptotique, mis au point sur un système non linéaire affine en l'état. Ces deux méthodes d'observation permettent d'assurer la synthèse du backstepping flexible en retour de sortie, tout en prenant en compte les incerti-



**Figure 5.9** – Évolution temporelle des états pour des capteurs situés à des positions différentes, avec l'observateur à temps fini

tudes paramétriques. Même si la preuve de stabilité de la boucle fermée n'a pas pu être donnée, des simulations en boucle fermée ont été réalisées. L'étude d'un cas de non-collocalisation entre capteur et actionneur a d'ailleurs illustré l'efficacité de la loi développée, et l'intérêt de ne pas négliger les termes souples affectant les mesures.

## Conclusion générale et perspectives

Ce travail présente les résultats obtenus pour la commande non linéaire d'un système aérospatial souple. La démarche utilisée, et rapportée ici, a visé à prendre en compte, au fur et à mesure du développement de la méthode de commande, l'ensemble des contraintes mises en jeu par un tel système, à savoir les non linéarités, le sous actionnement, le faible amortissement des modes souples, les incertitudes paramétriques et l'altération des mesures.

Ce travail de thèse se voulant théorique et méthodologique, une classe de système générique et représentative des systèmes aérospatiaux souples a d'abord été mise en évidence par l'examen des équations dynamiques de différents systèmes (avion hypersonique, lanceur et aile aéroélastique). Des manipulations mathématiques ont permis de faire ressortir, de ces modèles, une structure commune non linéaire, sous actionnée et à minimum de phase, soulignant une dynamique souple stable mais mal amortie.

Une loi de commande par retour d'état a ensuite été mise en place pour cette classe de système. Utilisant des changements de variable, une fonction de Lypunov adaptée et la technique du backstepping, cette loi améliore sensiblement l'amortissement des modes souples au cours du régime transitoire. Deux approches d'amélioration de l'amortissement ont été étudiées. La première consiste à limiter l'influence de la dynamique rigide sur la dynamique souple alors que la seconde consiste à apporter de l'amortissement. Dans les deux cas, la particularité de la méthode réside dans le fait que la dynamique interne, stable, est considérée en premier lieu dans la synthèse. D'un point de vue théorique, cette méthode "étend" le backstepping au cas où la dynamique interne est mal amortie et présente l'avantage de pouvoir considérer un nombre important de modes souples, tout en disposant d'une preuve de stabilité globale. La performance de cette loi, en terme d'amélioration de l'amortissement a été testée en simulation et comparée à une méthode de commande classique. Cette loi s'est également montrée efficace en association avec un contrôleur linéaire assurant des performances locales. Cette méthode de commande répond ainsi aux contraintes de sous actionnement et de faible amortissement des modes souples. Cependant, elle repose sur l'accès à l'état complet du système, et en particulier aux états souples, qui ne sont pas mesurés pour les systèmes aérospatiaux. Une solution a été mise en place pour faire face à ce problème de manque de mesures.

La solution proposée consiste en la synthèse d'un observateur permettant d'estimer les états souples. Cet observateur a été synthétisé sur un sous système non linéaire, affine en l'état, extrait de la classe de système considérée. La contrainte liée à l'altération des mesures par les modes souples a été prise en compte. Même si la stabilité de la boucle fermée n'a pas été prouvée, des simulations numériques ont montrées son fonctionnement, dans le cas où les paramètres du modèle étaient connus.

Pour prendre en compte la contrainte liée aux incertitudes paramétriques, la technique adaptative indirecte a été utilisée et deux observateurs adaptatifs ont été synthétisés. Le premier, un observateur adaptatif à temps fini, combinant un observateur de Luenberger à une méthode d'estimation algébrique, n'est valable que pour une sous classe de système et ne prend en compte que les incertitudes des paramètres souples (pulsation et amortissement). Le second, plus général, est un observateur adaptatif asymptotique. Il est valable pour la classe complète de système, et permet de considérer davantage d'incertitudes. Dans les deux cas, les paramètres incertains ont été estimés, en ligne, puis utilisés dans la loi de commande. Ceci a ainsi permis de tester en simulation le backstepping flexible en retour de sortie. Même si la preuve de stabilité formelle de la boucle fermée n'a pas été donnée, l'intérêt de la méthode et l'importance de la prise en compte de l'altération des mesures par les modes souples dans la synthèse de la loi de commande a été illustrée par l'étude d'un cas de non collocalisation capteur/actionneur.

Cette thèse a ainsi présenté une méthode de commande non linéaire permettant d'atténuer les modes souples, tout en prenant en compte les contraintes des systèmes aérospatiaux. Même si l'objectif majeur de ce travail a été atteint, cette étude reste tout de même un travail préliminaire qui pourrait être prolongé dans plusieurs directions :

Au chapitre 3, deux approches de synthèse de commande permettant d'améliorer l'amortissement des modes souples ont été développées. Même si la seconde approche a été illustrée sur une simulation, seule la première approche a été conservée dans la suite des travaux. Ainsi, il serait intéressant de mener le même travail en considérant la seconde approche, et d'effectuer une étude comparative de ces deux approches de synthèse. Cette étude pourrait viser par exemple à évaluer l'efficacité de ces approches, en terme d'atténuation des modes souples, de difficulté de réglage des paramètres du correcteur, de robustesse vis à vis du bruit de mesure ou des incertitudes...

Dans un soucis de travail théorique, méthodologique et prospectif, des hypothèses sur la connaissances de certains paramètres comme les déplacements et rotations souples ont été effectuées. Ces hypothèses ne sont pas réalistes d'un point de vue physique puisqu'elles requièrent la connaissance parfaite des fonctions de déformées modales et de la position des capteurs. Une perspective consisterait donc à chercher comment relaxer ces hypothèses ou comment considérer des incertitudes sur ces paramètres.

Aux chapitres 4 et 5, des simulations numériques en boucles fermées, mêlant observateurs (adaptatifs ou non) et backstepping flexible ont été réalisées, prouvant ainsi, le fonctionnement en simulation. Malgré cela, la preuve de stabilité formelle de la boucle fermée n'a pas été donnée. Cela s'explique par deux raisons. La première est liée à l'impossibilité d'utiliser le principe de sé-

---

paration en non linéaire. Une perspective évidente consiste donc à chercher comment démontrer la stabilité de la boucle fermée. Cela reposera certainement sur la saturation de la commande, qui imposera ainsi une stabilité semi-globale. La deuxième raison est, quant à elle causée par l'hypothèse d'excitation persistante, difficile à assurer. Une perspective intéressante consisterait ainsi à chercher comment garantir la persistance de l'excitation. Autrement dit est-il possible de s'assurer, qu'en boucle fermée, la commande produit une excitation persistante des sorties ?

Cette thèse a été focalisée sur la dynamique rapide, liée au contrôle d'attitude d'un système aérospatial. La loi synthétisée correspond ainsi à une loi de type "petite boucle". Une perspective évidente de ces travaux consisterait à associer la loi backstepping flexible synthétisée dans cette thèse à une loi de commande "grande boucle" stabilisant la dynamique de translation du système.

Même si le travail réalisé est théorique, il serait intéressant d'effectuer des simulations sur des modèles plus complets, prenant en compte davantage de modes souples, de considérer la dynamique des capteurs et des actionneurs, ainsi que leurs saturations dans la synthèse du correcteur et/ou en simulation. On pourrait également envisager d'étudier le comportement du système face à des perturbations extérieures, de type rafales de vent pour le lanceur par exemple.

Les méthodes de commande développées dans cette thèse pourraient également être comparées à d'autres méthodes de commande (linéaires à paramètres variant par exemple), de manière à comparer leur efficacité dans des conditions similaires.





## Développement et validation d'un modèle non linéaire de lanceur souple

---

L'objectif de cette annexe est de développer un modèle mathématique permettant de décrire le comportement dynamique d'un lanceur souple et son évolution au cours du temps. Pour cela, le formalisme de Lagrange est appliqué à un lanceur souple, stationnaire, symétrique et décrivant un mouvement plan autour de son centre de gravité. Pour simplifier la formulation énergétique de ce formalisme, le système est décomposé en trois sous-systèmes : le lanceur déséquipé, la tuyère pilotante et les modes de flexion. Les énergies cinétiques et potentielles de chacun de ces sous-systèmes sont données et les forces généralisées, issues des forces aérodynamiques, de la poussée et des forces d'inerties sont également exprimées. Le modèle est finalement écrit dans un repère nominal fixe, lié à la trajectoire de référence du lanceur. Ainsi, il s'agit d'un modèle en écart par rapport à la trajectoire de référence. Il est montré ensuite, par des simulations numériques, que le modèle mathématique non linéaire développé reproduit bien le comportement souhaité. Pour cela, les réponses fréquentielles du modèle développé sont comparées à celles d'un modèle linéaire de lanceur souple de référence, issu de la littérature.

---

### A.1 Hypothèses et conventions de modélisation

#### A.1.1 Hypothèses

##### ► Lanceur

On considère un lanceur souple, ayant un mouvement plan autour de son centre de gravité, au cours de son vol atmosphérique. On suppose de plus que le lanceur est :

- Stationnaire : les masses et inerties sont supposées constantes,
- Symétrique : le centre de gravité et le point d'articulation de la tuyère se trouvent sur l'axe du lanceur.

### ► Propulsion

On suppose que le lanceur ne possède qu'une seule tuyère et que toute la poussée est contrôlée, c'est à dire orientée par la tuyère. On suppose également que la poussée est appliquée au point d'articulation de la tuyère.

### ► Modes souples

Du fait de sa légèreté et de sa forme élancée, les structures du lanceur sont soumises à des mouvements de flexion, qui affectent l'angle de braquage de la tuyère, et donc la poussée. Par conséquent il est important de prendre en considération ces modes de flexion dans notre étude, et de tenir compte de l'interaction qu'ils peuvent avoir sur le corps rigide. Même si une infinité de modes souples apparaissent, on ne considérera que les deux premiers dans la modélisation. Ce choix est justifié par le fait que seule la considération des premiers modes souples est pertinente d'un point de vue de la synthèse de lois de commande.

Le phénomène de ballottement d'ergol est quant à lui négligé. Cette hypothèse prend son sens puisque l'étude est réalisée en vol atmosphérique, phase de vol pendant laquelle la poussée est assurée par les propulseurs à poudre.

#### A.1.2 Conventions

Pour simplifier l'écriture des lois de la mécanique on décompose le système en trois sous-systèmes :

- Le lanceur déséquipé de sa tuyère  $\Sigma_L$ ,
- La tuyère pilotante  $\Sigma_T$
- Les modes de flexion  $\Sigma_f$

Ainsi, le lanceur souple considéré s'écrit :

$$\Sigma_{\text{Lanceur}} = \Sigma_T \cup \Sigma_L \cup \Sigma_f \quad (\text{A.1})$$

On associe de plus un repère, à chacun de ces sous-système :

$R_n = (G_n, x_n, y_n, z_n)$  Repère nominal fixe, lié à la trajectoire de référence, non Galiléen

$R_L = (G_L, x_L, y_L, z_L)$  Repère mobile lié au lanceur déséquipé

$R_T = (C_T, x_T, y_T, z_T)$  Repère mobile lié à la tuyère pilotante

La figure A.1 présente schématiquement le lanceur, ainsi que les conventions utilisées pour la modélisation.

Les équations dynamiques du lanceur seront données dans le repère nominal  $R_n$ , ce qui signifie que le modèle sera écrit en écart par rapport à la trajectoire nominale. Ainsi on fera un abus de notation puisque les variables considérées représenteront des écarts (de distance ou angulaires). Par exemple, la variable  $y$  représentera la distance, selon l'axe  $y_n$ , du centre de

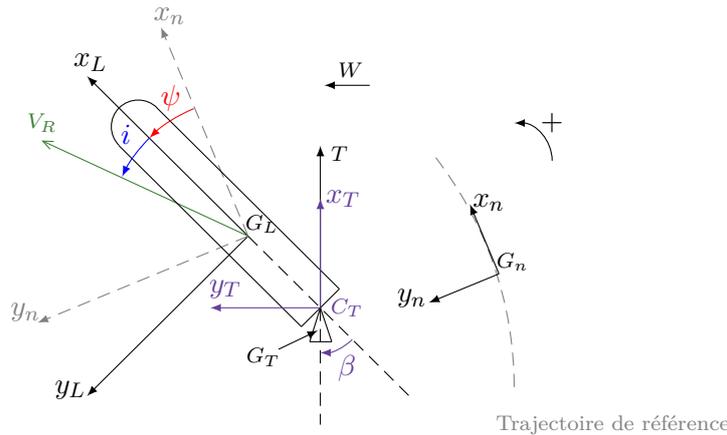


Figure A.1 – Représentation du lanceur et des conventions utilisées

gravité du lanceur  $G_L$  à l'origine du repère nominal  $G_n$ , et l'attitude  $\psi$  représentera la déviation angulaire autour de l'axe du lanceur par rapport à l'attitude de référence fournie par le guidage.

## A.2 Modélisation mathématique par le formalisme de Lagrange

On a choisi de formaliser ce problème de modélisation mécanique par la méthode de Lagrange, plutôt que d'utiliser l'approche classique des lois de Newton. Même si les deux approches sont équivalentes, la formulation énergétique des équations de Lagrange est bien adaptée au problème considéré. Elle permet en effet de travailler avec des quantités scalaires qui sont plus facile à utiliser, et donne une forme indépendante des coordonnées utilisées.

### A.2.1 Le formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange repose sur la formulation énergétique d'un système en mouvement et utilise des paramètres géométriques  $\kappa_j(t)$ , appelés coordonnées généralisées, pour décrire la configuration du système à un instant donné. Ces coordonnées, définies comme des distances ou des angles, sont indépendantes entre elles et définissent l'information nécessaire et suffisante pour prédire l'évolution du système. Le nombre de coordonnées généralisées correspond au nombre de degré de liberté du système.

Le formalisme de Lagrange fait intervenir les forces extérieures appliquées sur le système considéré par l'intermédiaire de leurs forces généralisées. Pour les définir, on considère un système de  $N$  points matériels en mouvement, pour lequel on a choisi  $n \leq N$  coordonnées généralisées  $\kappa_j$ . Alors la force généralisée associée à la coordonnée généralisée  $\kappa_j$  s'écrit :

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \kappa_j} \quad (\text{A.2})$$

où

- $\vec{r}_k$  représente le vecteur position du point  $k$ ,
- $\vec{F}_k$  est la résultante des forces agissant sur le point  $k$ .

Les équations de Lagrange, sur lesquelles reposent la démarche de modélisation présentée ici sont définies de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\kappa}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \kappa_j} = \Phi_j \quad (\text{A.3})$$

où  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\kappa_j, \dot{\kappa}_j)$ , le Lagrangien du système est défini comme la différence entre l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  et l'énergie potentielle  $\mathcal{V}$ .

Il est important de noter de plus que les forces généralisées  $\Phi_j$  du second membre de l'équation de Lagrange ne sont calculées que pour des forces non conservatives.

### A.2.2 Représentation des modes de flexion

Pour prendre en compte les deux premiers modes de flexion, le lanceur est assimilé à une poutre libre, sur laquelle le principe de séparation a été appliqué. Le déplacement du lanceur selon l'axe  $y$  s'écrit :

$$u(x, t) = h_1(x)\eta_1(t) + h_2(x)\eta_2(t) \quad (\text{A.4})$$

où  $h_i(x)$  est la déformée modale du mode  $i$ , et  $\eta_i(t)$  la coordonnée modale généralisée du mode souple  $i$ . La déformée modale  $h_i(x)$  correspond au déplacement souple que subit le lanceur par le mode  $i$ . On peut ainsi définir leurs dérivées, qui peuvent être assimilées à des rotations souples :

$$r_i(x) = \frac{dh_i(x)}{dx} \quad (\text{A.5})$$

La figure A.2 représente, de façon schématique, quelques déformées modales associées aux deux premiers modes souples, en fonction de la position sur l'axe du lanceur. Ainsi, en notant  $x_T$  la position de la tuyère,  $x_{ci}$  la position de la centrale inertielle et  $x_{gy}$  la position du gyromètre sur l'axe lanceur, on définit les déformées suivantes :

$$h_i = h_i(x_T) \quad r_i = r_i(x_T) \quad r_{ci_i} = r_i(x_{ci}) \quad r_{gy_i} = r_i(x_{gy}) \quad (\text{A.6})$$

Les déformées modales affectent les mesures fournies par la centrale inertielle et le gyromètre. Les capteurs fournissent en effet, en plus du mouvement du corps rigide, le mouvement provoqué par les modes souples à la position du capteur. Cela se traduit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} y_1 &= \psi + r_{ci_1}\eta_1 + r_{ci_2}\eta_2 \\ y_2 &= q + r_{gy_1}\dot{\eta}_1 + r_{gy_2}\dot{\eta}_2 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

La figure A.3 illustre la façon dont le premier mode souple altère la mesure gyrométrique.

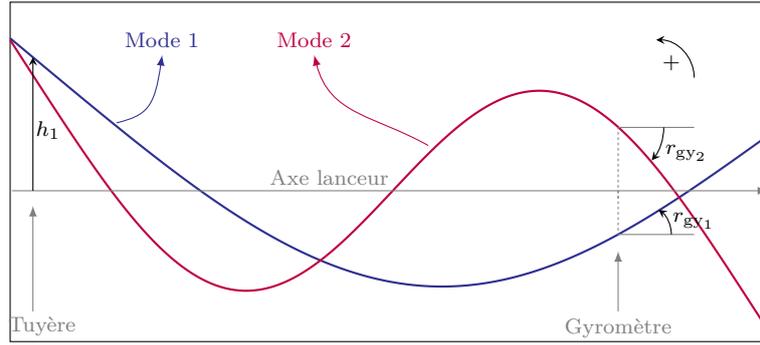


Figure A.2 – Représentation schématique des déformées modales

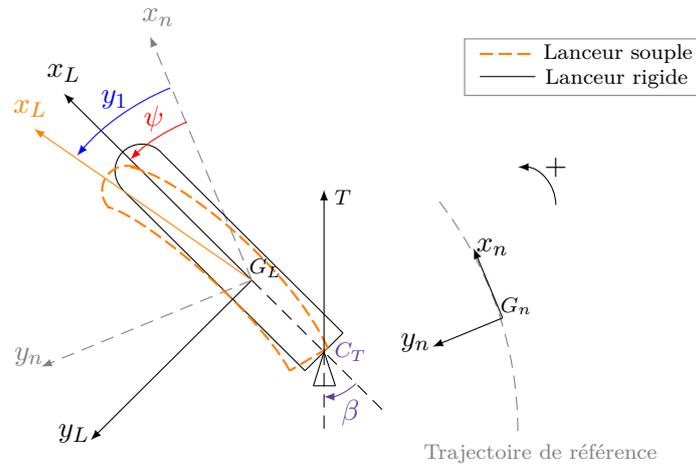


Figure A.3 – Mesure gyrométrique sur le lanceur déformé

### A.2.3 Application au lanceur souple

Pour appliquer le formalisme de Lagrange, on commence par définir les coordonnées généralisées. On choisit :

$$\kappa = (y \ \psi \ \eta_1 \ \eta_2) \quad (\text{A.8})$$

Le Lagrangien s'écrit donc  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\kappa, \dot{\kappa})$  et les équations dynamiques du lanceur souple sont données par :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \Phi_y \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \Phi_\psi \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta_i} = \Phi_{\eta_i} \quad i \in \{1, 2\} \quad (\text{A.11})$$

Pour tenir compte des dissipations internes d'origine mécanique des modes souples, on introduit une fonction de dissipation de Rayleigh  $\mathcal{R}$  dans l'équation de Lagrange correspondant

aux coordonnées généralisées  $\eta_i$ .

Le lecteur pourra se référer à la [section A.4](#) pour le détail des calculs des énergies cinétiques, potentielles, et des forces généralisées.

► **Énergies cinétiques**

Les énergies cinétiques du lanceur déséquipé, de la tuyère et des modes de flexion sont données ci-dessous.

$$2\mathcal{T}_L = M_L(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I_L\dot{\psi}^2 \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{T}_T = & M_T \left[ \dot{x} + \left( l_T \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - h_1\eta_1 - h_2\eta_2 \right) \dot{\psi} \right]^2 \\ & + M_T \left[ \dot{y} + \left( L_T - l_T \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) \right) \dot{\psi} + (h_1 - l_T r_1)\dot{\eta}_1 + (h_2 - l_T r_2)\dot{\eta}_2 - l_T \dot{\beta} \right]^2 \\ & + I_T \left( \dot{\psi} + \dot{\beta} + r_1\dot{\eta}_1 + r_2\dot{\eta}_2 \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$2\mathcal{T}_f = \dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \quad (\text{A.14})$$

► **Énergie potentielle**

Seule l'énergie potentielle élastique liée au mode souple est considérée :

$$\mathcal{V}_f = \frac{1}{2} (\omega_1^2 \eta_1^2 + \omega_2^2 \eta_2^2) \quad (\text{A.15})$$

► **Énergie dissipative**

L'amortissement des modes de flexion est introduite à partir d'une fonction de dissipation  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{R} = \xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1^2 + \xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2^2 \quad (\text{A.16})$$

► **Forces généralisés**

Les forces extérieures qui s'appliquent sur le lanceur sont :

- les forces aérodynamiques  $\vec{F}_{\text{aéro}}$  composées de la portance  $\vec{L}$  et de la traînée  $\vec{D}$ ,
- la force de propulsion ou poussée  $\vec{T}$ ,
- les forces d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie}$  puisque le référentiel nominal n'est pas Galiléen

La force généralisée s'exprime donc :

$$\Phi_j = \Phi_j^{F_{\text{aéro}}} + \Phi_j^T + \Phi_j^{F_{ie}} \quad (\text{A.17})$$

Et on obtient pour chacune des coordonnées :

$$\Phi_y = D \sin \psi + L \cos \psi + T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \quad (\text{A.18})$$

$$\Phi_\psi = -Ll_{\text{aéro}} + TL_T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - T(h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \quad (\text{A.19})$$

$$- M_T \gamma \left[ l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - L_T \sin \psi - (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos \psi \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\Phi_{\eta_1} = h_1 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) + M_T \gamma \left[ h_1 \sin \psi - r_1 l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\Phi_{\eta_2} = h_2 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) + M_T \gamma \left[ h_2 \sin \psi - r_2 l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \right] \quad (\text{A.22})$$

### ► Modèle mathématique

Les équations complète du modèle sont données dans la [section A.4](#). Pour plus de clarté, on présente ici la forme générale de ces équations :

$$M(\beta, \eta_i) \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\eta}_i \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\eta}_i \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_i^2 \eta_i \end{pmatrix} = \underbrace{G(\psi) \begin{pmatrix} \sin(\beta + r \eta_i) \\ \cos(\beta + r \eta_i) \end{pmatrix}}_{\Phi^T} + \Phi^{F_{\text{aéro}}} + \Phi^{F_{ie}} \quad (\text{A.23})$$

où  $C$  est non-linéaire.

On donne également, le modèle du lanceur souple sans tuyère, qui permet de montrer la forme des équations obtenues et la présence des non linéarités.

$$\begin{cases} M_L \ddot{y} &= D \sin \psi + L \cos \psi + T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ I_L \ddot{\psi} &= -Ll_{\text{aéro}} + TL_T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - T(h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ \ddot{\eta}_1 &= -\omega_1^2 \eta_1 - 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1 + h_1 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ \ddot{\eta}_2 &= -\omega_2^2 \eta_2 - 2\xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2 + h_2 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

## A.3 Validation numérique du modèle

Le modèle complet du lanceur souple est donné par les équations (A.23)-(A.7). Pour valider le travail de modélisation effectué, on effectue une comparaison des réponses fréquentielles de notre modèle avec un modèle linéaire de la littérature.

### A.3.1 Modèle linéaire de référence

Le mémoire de thèse [26] porte sur le pilotage d'un lanceur en vol atmosphérique. Ainsi, un modèle linéaire de lanceur souple est développé, par le formalisme de Lagrange, et le modèle est

finaleme nt donné sous forme de représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{y} \\ \dot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_6 & 0 & \frac{A_6}{V_R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2^2 & -2\xi_2\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ y \\ \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 \\ \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{A_6}{V_R} & K_1 \\ -a_2 & a_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -Th_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -Th_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{pmatrix} i \\ \psi_m \\ \dot{\psi}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{V_R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -r_{ci_1} & 0 & -r_{ci_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -r_{gy_1} & 0 & -r_{gy_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ y \\ \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 \\ \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{V_R} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

### A.3.2 Réponses fréquentielles

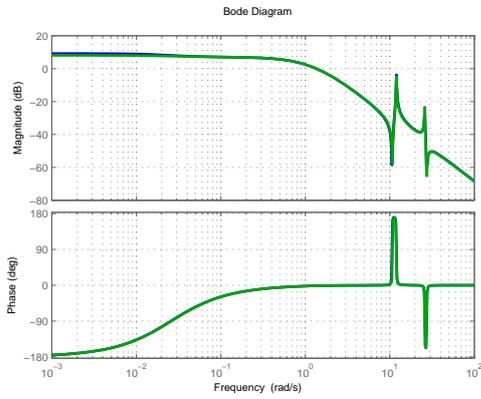
Les figures suivantes représentent les réponses fréquentielles des différents transferts intervenant dans la modélisation. On compare les réponses fréquentielles du modèle linéaire de référence (A.25)-(A.26) et de notre modèle non-linéaire (A.23)-(A.7). Pour cela, on considère les entrées et sorties suivantes :

- Entrées
  - Vitesse du vent  $W$
  - Angle de braquage  $\beta$
- Sorties
  - Mesure d'attitude  $\psi_m$
  - Mesure de variation d'attitude  $\dot{\psi}_m$
  - Angle d'incidence  $i$

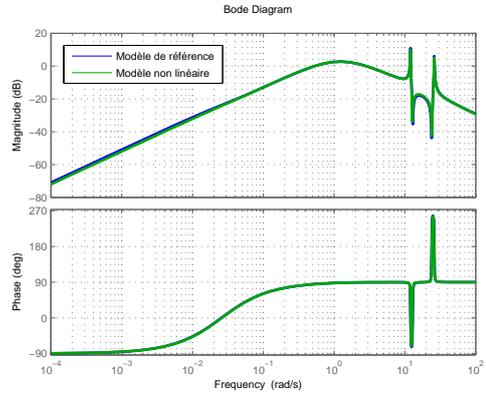
La figure A.4 représente les diagrammes de Bode de ces deux modèles, et permet de valider le modèle non linéaire développé puisque les réponses fréquentielles des différents transferts sont les mêmes.

**Remarque** Pour les simulations, les conventions angulaires du modèle de référence ont été adaptées aux conventions choisies pour cette étude. Sans cela, un déphasage de  $180^\circ$  serait présent sur certaines réponses fréquentielles.

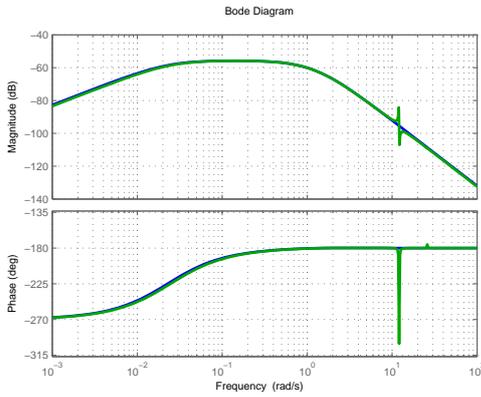
### A.3 Validation numérique du modèle



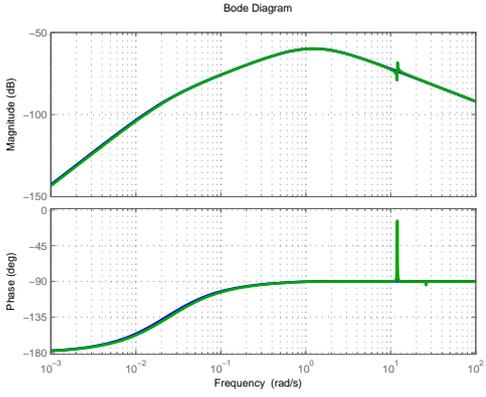
a)  $\frac{\psi_m}{\beta}$



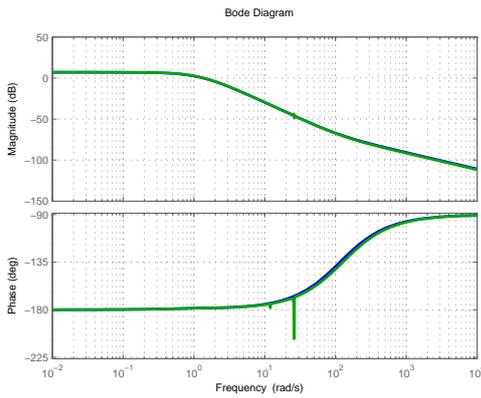
b)  $\frac{\dot{\psi}_m}{\beta}$



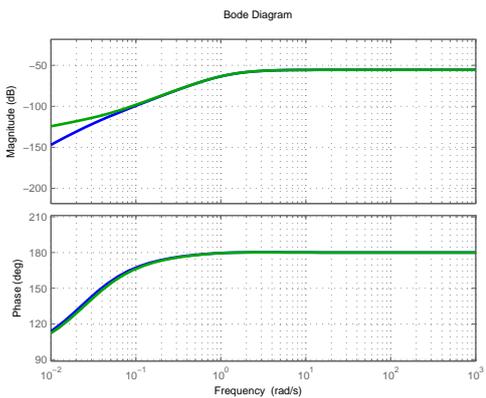
c)  $\frac{\psi_m}{W}$



d)  $\frac{\dot{\psi}_m}{W}$



e)  $\frac{i}{\beta}$



f)  $\frac{i}{W}$

Figure A.4 – Diagrammes de Bode du lanceur souple

## A.4 Détail des calculs

Cette section détaille les différents calculs effectués pour utiliser le formalisme de Lagrange. Après avoir donné quelques préliminaires, on présente les calculs des énergies cinétiques, potentielles, dissipatives et des forces généralisées.

### A.4.1 Préliminaire

Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux repères d'origine  $O$  et  $P$  un point de l'espace. On note alors  $M_{R_1/R_2}$  est la matrice de passage du repère  $R_1$  au repère  $R_2$  telle que

$$\overrightarrow{OP}_{R_2} = M_{R_1/R_2} \overrightarrow{OP}_{R_1} \quad (\text{A.27})$$

et  $\overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_2}$  le vecteur rotation du repère  $R_1$  par rapport à  $R_2$ .

#### ► Matrices de changement de repère

On définit les matrices de changement de repère :

- $M_{R_T/R_L}$  : matrice de passage du repère tuyère  $R_T$  au repère lanceur  $R_L$ ,
- $M_{R_L/R_n}$  : matrice de passage du repère lanceur  $R_L$  au repère nominal  $R_n$ ,

$$M_{R_T/R_L} = \begin{pmatrix} \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) & -\sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) & 0 \\ \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) & \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{R_L/R_n} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### ► Vecteurs instantanés de rotation

On donne également les vecteurs instantanés de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega}_{R_T/R_L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} + r_1\dot{\eta}_1 + r_2\dot{\eta}_2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\Omega}_{R_L/R_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

### A.4.2 Énergies cinétiques

#### ► Lanceur déséquipé

L'énergie cinétique du lanceur déséquipé s'écrit classiquement :

$$\mathcal{T}_L = \frac{1}{2} M_L \overrightarrow{V}(G_L)_{R_n}^T \overrightarrow{V}(G_L)_{R_n} + \frac{1}{2} I_L \overrightarrow{\Omega}_{R_L/R_n}^T \overrightarrow{\Omega}_{R_L/R_n}$$

La vitesse du centre de gravité du lanceur déséquipé dans le repère nominal s'obtient par :

$$\overrightarrow{G_n G_L} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n} \Rightarrow \vec{V}(G_L)_{R_n} = \frac{d\overrightarrow{G_n G_L}}{dt}_{R_n} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n}$$

On a finalement :

$$\mathcal{T}_L = \frac{1}{2}M_L(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_L\dot{\psi}^2 \quad (\text{A.28})$$

► **Tuyère pilotante**

De la même façon, l'énergie cinétique de la tuyère pilotante est donnée par la relation :

$$\mathcal{T}_T = \frac{1}{2}M_T \vec{V}(G_T)_{R_n}^T \vec{V}(G_T)_{R_n} + \frac{1}{2}I_T \vec{\Omega}_{R_T/R_n}^T \vec{\Omega}_{R_T/R_n}$$

On calcule alors la vitesse du centre de gravité de la tuyère, dans le repère nominal, en décomposant le vecteur  $\overrightarrow{G_n G_T}$

$$\vec{V}(G_T)_{R_n} = \frac{d\overrightarrow{G_n G_T}}{dt}_{R_n} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{G_n G_L} + \overrightarrow{G_L C_T} + \overrightarrow{C_T G_T}]_{R_n}$$

On donne alors les expressions de ces vecteurs, afin d'en prendre les dérivées temporelles.

$$\overrightarrow{G_L C_T} = \begin{pmatrix} L_T \\ h_1\eta_1 + h_2\eta_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_L} \quad \overrightarrow{C_T G_T} = \begin{pmatrix} -l_T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_T}$$

La loi de dérivation d'un vecteur par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{G_L C_T}}{dt}_{R_n} &= \frac{d\overrightarrow{G_L C_T}}{dt}_{R_L} + \vec{\Omega}_{R_L/R_n} \wedge \overrightarrow{G_L C_T}_{R_L} = \begin{pmatrix} -(h_1\eta_1 + h_2\eta_2)\dot{\psi} \\ h_1\dot{\eta}_1 + h_2\dot{\eta}_2 + L_T\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n} \\ \frac{d\overrightarrow{C_T G_T}}{dt}_{R_n} &= \frac{d\overrightarrow{C_T G_T}}{dt}_{R_T} + \vec{\Omega}_{R_T/R_L} \wedge \overrightarrow{C_T G_T}_{R_T} + \vec{\Omega}_{R_L/R_n} \wedge \overrightarrow{C_T G_T}_{R_L} \\ &= \begin{pmatrix} l_T \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2)\dot{\psi} \\ -l_T(\dot{\beta} + r_1\dot{\eta}_1 + r_2\dot{\eta}_2 + \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2)\dot{\psi}) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n} \end{aligned}$$

La vitesse de  $G_T$  dans le repère nominal est ainsi donnée par :

$$\vec{V}(G_T) = \begin{pmatrix} \dot{x} + \left( l_T \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - h_1\eta_1 - h_2\eta_2 \right) \dot{\psi} \\ \dot{y} + \left( L_T - l_T \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) \right) \dot{\psi} + (h_1 - l_T r_1) \dot{\eta}_1 + (h_2 - l_T r_2) \dot{\eta}_2 - l_T \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n}$$

D'où l'expression de l'énergie cinétique suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_T = & \frac{1}{2}M_T \left( \dot{x} + \left( l_T \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - h_1\eta_1 - h_2\eta_2 \right) \dot{\psi} \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2}M_T \left( \dot{y} + \left( L_T - l_T \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) \right) \dot{\psi} + (h_1 - l_T r_1)\dot{\eta}_1 + (h_2 - l_T r_2)\dot{\eta}_2 - l_T \dot{\beta} \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2}I_T \left( \dot{\psi} + \dot{\beta} + r_1\dot{\eta}_1 + r_2\dot{\eta}_2 \right)^2
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

### ► Modes de flexion

La masse des modes de flexion étant normalisée, l'énergie cinétique est donnée par :

$$\mathcal{T}_f = \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) \tag{A.30}$$

### A.4.3 Énergies potentielles

Le modèle développé étant en écart par rapport à la trajectoire de référence, seule l'énergie potentielle élastique est considérée ici. Elle n'intervient donc que pour les modes souples. Pour calculer l'énergie potentielle associée aux modes souples, on peut faire l'analogie avec un système masse-ressort. En notant  $k_i$  la raideur du ressort  $i$ , on a :

$$\mathcal{V}_f = \frac{1}{2}(k_1\eta_1^2 + k_2\eta_2^2)$$

La masse étant normalisée à 1, la raideur du ressort est directement liée à la pulsation propre du mode :  $k_i = \omega_i^2$ . Ainsi, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\mathcal{V}_f = \frac{1}{2}(\omega_1^2\eta_1^2 + \omega_2^2\eta_2^2) \tag{A.31}$$

### A.4.4 Énergie dissipative

Comme pour l'énergie potentielle, l'énergie dissipative correspond à l'amortissement naturel des modes de flexion. En notant  $c_i$  le coefficient d'amortissement du ressort  $i$ , on a :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}(c_1\dot{\eta}_1^2 + c_2\dot{\eta}_2^2)$$

Le coefficient d'amortissement du ressort est lié à l'amortissement naturel du mode souple :  $c_i = 2\xi_i\omega_i$ . D'où :

$$\mathcal{R} = \xi_1\omega_1\dot{\eta}_1^2 + \xi_2\omega_2\dot{\eta}_2^2 \tag{A.32}$$

### A.4.5 Forces généralisées

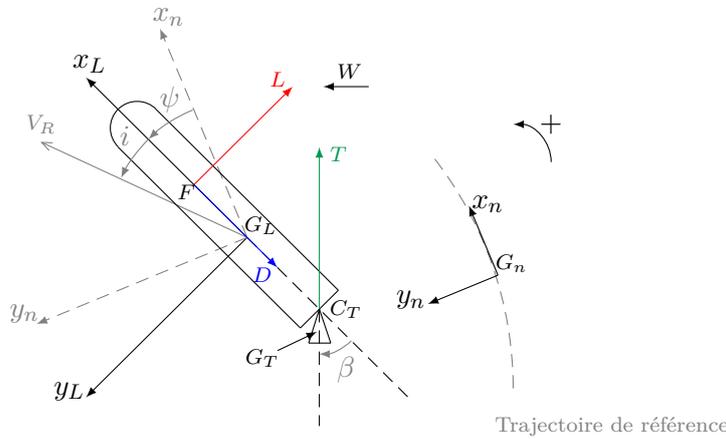
On rappelle l'expression de la force généralisée  $\Phi_j$  relative à la coordonnée généralisée  $q_j$

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \quad (\text{A.33})$$

Les forces extérieures qui s'appliquent sur le lanceur sont :

- les forces aérodynamiques  $\vec{F}_{\text{aero}}$  composées de la portance  $\vec{L}$  et de la trainée  $\vec{D}$ ,
- la force de propulsion ou poussée  $\vec{T}$ ,
- les forces d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie}$  puisque le référentiel nominal n'est pas Galiléen

La portance, la trainée et la poussée sont représentées sur la figure A.5.



**Figure A.5** – Représentation des forces aérodynamiques et de la force de propulsion

#### ► Forces aérodynamiques

Les forces aérodynamiques  $\vec{F}_{\text{aero}}$  s'appliquent au foyer  $F$  du lanceur. La force généralisée de cette force, associée à la coordonnée généralisée  $q_j$  s'écrit :

$$\Phi_j^{F_{\text{aero}}} = \vec{F}_{\text{aero}} \frac{\partial \overrightarrow{G_n F}}{\partial q_j} \quad j \in \{\psi \ y \ \eta_1 \ \eta_2\} \quad (\text{A.34})$$

avec :

$$\vec{F}_{\text{aero}} = \begin{pmatrix} D \\ L \\ 0 \end{pmatrix}_{R_L} = \begin{pmatrix} D \cos \psi - L \sin \psi \\ D \sin \psi + L \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n}$$

$$\overrightarrow{G_n F} = \overrightarrow{G_n G_L} + \overrightarrow{G_L F} = \begin{pmatrix} x - l_{\text{aero}} \cos \psi \\ y - l_{\text{aero}} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n}$$

En prenant les dérivées des composantes du vecteur  $\overrightarrow{G_n \dot{F}}$  par rapport aux différentes coordonnées généralisées, on obtient :

$$\Phi_y^{F_{aéro}} = D \sin \psi + L \cos \psi \quad (\text{A.35})$$

$$\Phi_\psi^{F_{aéro}} = (D \cos \psi - L \sin \psi) l_{aéro} \sin \psi - (D \sin \psi + L \cos \psi) l_{aéro} \cos \psi = -L l_{aéro} \quad (\text{A.36})$$

$$\Phi_{\eta_1}^{F_{aéro}} = 0 \quad (\text{A.37})$$

$$\Phi_{\eta_2}^{F_{aéro}} = 0 \quad (\text{A.38})$$

### ► Force de propulsion

La poussée  $\vec{T}$  s'applique au point d'articulation de la tuyère  $C_T$ . La force généralisée s'écrit ainsi :

$$\Phi_j^T = \vec{T} \frac{\partial \overrightarrow{G_n C_T}}{\partial q_j} \quad j \in \{\psi \ y \ \eta_1 \ \eta_2\} \quad (\text{A.39})$$

avec :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_T} = \begin{pmatrix} T \cos(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n}$$

$$\overrightarrow{G_n C_T} = \overrightarrow{G_n G_L} + \overrightarrow{G_L C_T} = \begin{pmatrix} x + L_T \cos \psi - (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \sin \psi \\ y + L_T \sin \psi + (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n}$$

Il vient ainsi :

$$\Phi_y^T = T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \quad (\text{A.40})$$

$$\Phi_\psi^T = T L_T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - T (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \quad (\text{A.41})$$

$$\Phi_{\eta_1}^T = h_1 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \quad (\text{A.42})$$

$$\Phi_{\eta_2}^T = h_2 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \quad (\text{A.43})$$

### ► Forces d'inertie d'entraînement

Pour écrire sa force généralisée, la force d'inertie d'entraînement est décomposée :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = \overrightarrow{F_{ie}^L} + \overrightarrow{F_{ie}^T} \quad (\text{A.44})$$

avec :

- $\overrightarrow{F_{ie}^L}$  la force d'inertie d'entraînement du lanceur déséquipé appliquée au centre de gravité  $G_L$ ,
- $\overrightarrow{F_{ie}^T}$  la force d'inertie d'entraînement de la tuyère pilotante appliquée au centre de gravité  $G_T$ .

La force généralisée correspond alors à la somme des forces généralisées des deux composantes.

$$\Phi_j^{F_{ie}} = \vec{F}_{ie}^L \frac{\partial \overrightarrow{G_n G_L}}{\partial q_j} + \vec{F}_{ie}^T \frac{\partial \overrightarrow{G_n G_t}}{\partial q_j} \quad j \in \{\psi, y, \eta_1, \eta_2\} \quad (\text{A.45})$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie}^L &= \begin{pmatrix} -M_L \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n} & \vec{F}_{ie}^T &= \begin{pmatrix} -M_T \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n} & \overrightarrow{G_n G_L} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n} \\ \overrightarrow{G_n G_T} &= \overrightarrow{G_n G_L} + \overrightarrow{G_L G_T} = \begin{pmatrix} x + L_T \cos \psi - (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \sin \psi - l_T \cos(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ y + L_T \sin \psi - (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos \psi - l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_n} \end{aligned}$$

La force généralisée de la force d'inertie d'entraînement du lanceur déséquipé  $\vec{F}_{ie}^L$  est nulle pour toutes les coordonnées généralisées. Ainsi, seule la force généralisée de la force d'inertie d'entraînement appliquée à la tuyère existe :

$$\Phi_y^{F_{ie}} = 0 \quad (\text{A.46})$$

$$\Phi_\psi^{F_{ie}} = -M_T \gamma \left( l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - L_T \sin \psi - (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos \psi \right) \quad (\text{A.47})$$

$$\Phi_{\eta_1}^{F_{ie}} = M_T \gamma \left( h_1 \sin \psi - r_1 l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \right) \quad (\text{A.48})$$

$$\Phi_{\eta_2}^{F_{ie}} = M_T \gamma \left( h_2 \sin \psi - r_2 l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \right) \quad (\text{A.49})$$

#### ► Bilan des forces généralisées

Finalement, la force généralisée s'écrit :

$$\Phi_j = \Phi_j^{F_{aéro}} + \Phi_j^T + \Phi_j^{F_{ie}} \quad (\text{A.50})$$

Et on obtient pour chacune des coordonnées généralisées :

$$Q_y = D \sin \psi + L \cos \psi + T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} Q_\psi &= -L l_{aéro} + T L_T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - T (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \\ &\quad - M_T \gamma \left( l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - L_T \sin \psi - (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \cos \psi \right) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$Q_{\eta_1} = h_1 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) + M_T \gamma \left( h_1 \sin \psi - r_1 l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \right) \quad (\text{A.53})$$

$$Q_{\eta_2} = h_2 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) + M_T \gamma \left( h_2 \sin \psi - r_2 l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \right) \quad (\text{A.54})$$

#### A.4.6 Équations

Les quatre équations obtenues sont présentées en suivant :

► Équation liée à la dérive

$$\begin{aligned}
 & [M_L + M_T] \ddot{y} \\
 & - M_T \left( l_T \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - L_T \right) \ddot{\psi} \\
 & + M_T (h_1 - l_T r_1) \ddot{\eta}_1 \\
 & + M_T (h_2 - l_T r_2) \ddot{\eta}_2 \\
 & = M_T l_T \ddot{\beta} \\
 & - M_T l_T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) (\dot{\beta} + r_1 \dot{\eta}_1 + r_2 \dot{\eta}_2) \dot{\psi} \\
 & + D \sin \psi \\
 & + L \cos \psi \\
 & + T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2)
 \end{aligned}$$

► Équation liée à l'attitude

$$\begin{aligned}
 & - M_T \left( l_T \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - L_T \right) \ddot{y} \\
 & + [I_L + M_T (l_T^2 + L_T^2 - 2l_T ((h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2) \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) + L_T \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2))) \\
 & + (h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2)^2) + I_T] \ddot{\psi} \\
 & + [M_T \left( l_T \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - L_T \right) (l_T r_1 - h_1) + I_T r_1] \ddot{\eta}_1 \\
 & + M_T \left( l_T \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - L_T \right) (l_T r_2 - h_2) + I_T r_2] \ddot{\eta}_2 \\
 & = - [M_T \left( l_T \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) - L_T \right) l_T + I_T] \ddot{\beta} \\
 & + M_T l_T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) (\dot{\beta} + r_1 \dot{\eta}_1 + r_2 \dot{\eta}_2) \left( (l_T r_1 - h_1) \dot{\eta}_1 + (l_T r_2 - h_2) \dot{\eta}_2 + l_T \dot{\beta} - \dot{y} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2M_T\dot{\psi} \left[ (l_T \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - h_1\eta_1 - h_2\eta_2)(h_1\dot{\eta}_1 + h_2\dot{\eta}_2) \right. \\
& \left. - l_T(\dot{\beta} + r_1\dot{\eta}_1 + r_2\dot{\eta}_2) \left( (h_1\eta_1 + h_2\eta_2) \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - L_T \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) \right) \right] \\
& - Ll_{\text{aéro}} + TL_T \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - T(h_1\eta_1 + h_2\eta_2) \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) \\
& - M_T\gamma \left( l_T \sin(\psi + \beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - L_T \sin \psi - (h_1\eta_1 + h_2\eta_2) \cos \psi \right)
\end{aligned}$$

► Équation liée au premier mode souple

$$\begin{aligned}
& M_T(h_1 - l_T r_1)\ddot{y} \\
& + \left[ I_T r_1 - M_T \left( l_T \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - L_T \right) (h_1 - L_T r_1) \right] \ddot{\psi} \\
& + \left[ 1 + M_T(h_1 - l_T r_1)^2 + I_T r_1^2 \right] \ddot{\eta}_1 \\
& + \left[ I_T r_1 r_2 + M_T(h_1 - l_T r_1)(h_2 - l_T r_2) \right] \ddot{\eta}_2 \\
& = - \left[ I_T r_1 - M_T l_T (h_1 - l_T r_1) \right] \ddot{\beta} \\
& - \omega_1^2 \eta_1 \\
& - 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1 \\
& - \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) \left[ (\dot{\beta} + r_1\dot{\eta}_1 + r_2\dot{\eta}_2) \left( l_T (h_1 - l_T r_1) + l_T^2 r_1 \right) - (h_1\dot{\eta}_1 + h_2\dot{\eta}_2 + \dot{y}) l_T r_1 \right] M_T \dot{\psi} \\
& + \left[ h_1^2 \eta_1 + h_1 h_2 \eta_2 - l_T S \right] M_T \dot{\psi}^2 \\
& + h_1 T \sin(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) + M_T \gamma \left( h_1 \sin \psi - r_1 l_T \sin(\psi + \beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) \right)
\end{aligned}$$

► Équation liée au second mode souple

$$\begin{aligned}
& M_T(h_2 - l_T r_2)\ddot{y} \\
& + \left[ I_T r_2 - M_T \left( l_T \cos(\beta + r_1\eta_1 + r_2\eta_2) - L_T \right) (h_2 - L_T r_2) \right] \ddot{\psi} \\
& + \left[ 1 + M_T(h_2 - l_T r_2)^2 + I_T r_2^2 \right] \ddot{\eta}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left[ I_T r_1 r_2 + M_T (h_1 - l_T r_1) (h_2 - l_T r_2) \right] \ddot{\eta}_1 \\
 &= - \left[ I_T r_2 - M_T l_T (h_2 - l_T r_2) \right] \ddot{\beta} \\
 &- \omega_2^2 \eta_2 \\
 &- 2\xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2 \\
 &- \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \left[ (\dot{\beta} + r_1 \dot{\eta}_1 + r_2 \dot{\eta}_2) \left( l_T (h_2 - l_T r_2) + l_T^2 r_2 \right) - (h_1 \dot{\eta}_1 + h_2 \dot{\eta}_2 + \dot{y}) l_T r_2 \right] M_T \dot{\psi} \\
 &+ \left[ h_2^2 \eta_2 + h_1 h_2 \eta_1 - l_T S \right] M_T \dot{\psi}^2 \\
 &+ h_2 T \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) + M_T \gamma \left( h_2 \sin \psi - r_2 l_T \sin(\psi + \beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$S = \left( \cos(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) (r_1 h_1 \eta_1 + r_1 h_2 \eta_2) + \sin(\beta + r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2) (h_2 - r_2 l_T) \right)$$

## Détail des calculs pour l'estimation algébrique

---

On présente dans cette annexe le détail des manipulations algébriques effectuées au chapitre 5 pour estimer les paramètres caractérisant le mode souple (pulsation et amortissement) et les conditions initiales de l'état à observer. Ces manipulations s'effectuent dans un premier temps dans le domaine fréquentiel puisqu'elles utilisent la transformée de Laplace. Des dérivations successives par rapport à la variable de Laplace permettent ensuite de définir des équations de redondance, de manière à avoir autant d'équations que de paramètres inconnus. Les équations obtenues peuvent alors s'écrire sous forme matricielle. Un retour au domaine temporel est finalement réalisé de façon à pouvoir implémenter ces équations.

---

### B.1 Manipulations algébriques

On rappelle l'équation de base de l'estimation algébrique (5.10), qui lie les caractéristiques du mode souple (pulsation  $\omega$  et amortissement  $\xi$ ), à l'entrée  $u$ , aux sorties  $y_1$  et  $y_2$ , et à leurs dérivées :

$$y_1^{(3)} - \ddot{y}_2 = -\omega^2(\dot{y}_1 - y_2) - 2\xi\omega(\ddot{y}_1 - \dot{y}_2) + h(r_1 - r_2)\dot{u} \quad (\text{B.1})$$

On présente ici les différentes étapes menant à l'estimation des paramètres définis par le vecteur

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi\omega \\ -\omega^2 \\ \dot{y}_1(0) \\ \ddot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0) + 2\xi\omega\dot{y}_1(0) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

#### ► Transformation de Laplace

La méthode d'estimation algébrique de [40] est basée sur des manipulations mathématiques. La première étape consiste à prendre la transformée de Laplace de l'équation (B.1), en notant  $Y_1$  (resp.  $Y_2$ ) la transformée de Laplace de la sortie  $y_1$  (resp.  $y_2$ ) et  $U$  la transformée de Laplace de l'entrée de commande  $u$ .

$$\begin{aligned}
 & - 2\xi\omega[sY_2 - y_2(0) - s^2Y_1 + sy_1(0) + \dot{y}_1(0)] - \omega^2[Y_2 - sY_1 + y_1(0)] \\
 & = h(r_1 - r_2)[sU - u(0)] + s^2Y_2 - sy_2(0) - \dot{y}_2(0) - s^3Y_1 + s^2y_1(0) + s\dot{y}_1(0) + \ddot{y}_1(0)
 \end{aligned}$$

Les paramètres que l'on cherche à estimer interviennent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \theta_1[sY_2 - y_2(0) - s^2Y_1 + sy_1(0)] + \theta_2[Y_2 - sY_1 + y_1(0)] - s\theta_3 - \theta_4 \\
 = h(r_1 - r_2)[sU - u(0)] + s^2Y_2 - sy_2(0) - s^3Y_1 + s^2y_1(0) \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

Considérant l'équation (B.3) comme équation de base de l'estimation, dans le domaine fréquentiel, des manipulations mathématiques sont effectuées de façon à avoir autant d'équations que de paramètres inconnus. La première manipulation consiste à prendre la dérivée par rapport à la variable de Laplace  $s$ .

► **Dérivations successives par rapport à la variable de Laplace  $s$**

On dérive successivement l'équation (B.3) par rapport à  $s$

→ 1<sup>ère</sup> dérivée

$$\begin{aligned}
 \theta_1 \left[ Y_2 + s \frac{dY_2}{ds} - 2sY_1 - s^2 \frac{dY_1}{ds} + y_1(0) \right] + \theta_2 \left[ \frac{dY_2}{ds} - Y_1 - s \frac{dY_1}{ds} \right] - \theta_3 \\
 = h(r_1 - r_2) \left[ U + s \frac{dU}{ds} \right] + 2sY_2 + s^2 \frac{dY_2}{ds} - y_2(0) - 3s^2Y_1 - s^3 \frac{dY_1}{ds} + 2sy_1(0) \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

→ 2<sup>ème</sup> dérivée

$$\begin{aligned}
 \theta_1 \left[ 2 \frac{dY_2}{ds} + s \frac{d^2Y_2}{ds^2} - 2Y_1 - 4s \frac{dY_1}{ds} - s^2 \frac{d^2Y_1}{ds^2} \right] + \theta_2 \left[ \frac{d^2Y_2}{ds^2} - 2 \frac{dY_1}{ds} - s \frac{d^2Y_1}{ds^2} \right] \\
 = h(r_1 - r_2) \left[ 2 \frac{dU}{ds} + s \frac{d^2U}{ds^2} \right] + 2Y_2 + 4s \frac{dY_2}{ds} + s^2 \frac{d^2Y_2}{ds^2} - 6sY_1 - 6s^2 \frac{dY_1}{ds} - s^3 \frac{d^2Y_1}{ds^2} + 2y_1(0) \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

→ 3<sup>ème</sup> dérivée

$$\theta_1 \left[ 3 \frac{d^2Y_2}{ds^2} + s \frac{d^3Y_2}{ds^3} - 2Y_1 - 6 \frac{dY_1}{ds} - 6s \frac{d^2Y_1}{ds^2} - s^2 \frac{d^3Y_1}{ds^3} \right] + \theta_2 \left[ \frac{d^3Y_2}{ds^3} - 3 \frac{d^2Y_1}{ds^2} - s \frac{d^3Y_1}{ds^3} \right]$$

$$= 3h(r_1 - r_2) \left[ \frac{d^2 U}{ds^2} + s \frac{d^3 U}{ds^3} \right] + 6 \frac{dY_2}{ds} + 6s \frac{d^2 Y_2}{ds^2} + s^2 \frac{d^3 Y_2}{ds^3} - 6Y_1 - 18s \frac{dY_1}{ds} - 9s^2 \frac{d^2 Y_1}{ds^2} - s^3 \frac{d^3 Y_1}{ds^3} \quad (\text{B.6})$$

Avec les équations (B.3), (B.4), (B.5), (B.6), on a autant d'équations que de paramètres inconnus, ce qui doit, en pratique, permettre d'estimer les paramètres voulus. Ce n'est cependant pas le cas en pratique. Ainsi, on effectue de nouvelles manipulations pour avoir des équations suffisamment différentes entre elles, et "augmenter" la richesse des signaux.

► **Multiplication par  $\frac{1}{s}$  puis dérivation par rapport à  $s$  des équations (B.3) et (B.4)**

L'équation (B.4) devient :

$$\begin{aligned} & \theta_1 \left[ -\frac{1}{s^2} Y_2 + \frac{1}{s} \frac{dY_2}{ds} + \frac{d^2 Y_2}{ds^2} - 3 \frac{dY_1}{ds} - s \frac{d^2 Y_1}{ds^2} - \frac{1}{s^2} y_1(0) \right] + \theta_2 \left[ -\frac{1}{s^2} \frac{dY_2}{ds} + \frac{1}{s} \frac{d^2 Y_2}{ds^2} + \frac{1}{s^2} Y_1 - \frac{1}{s} \frac{dY_1}{ds} - \frac{d^2 Y_1}{ds^2} \right] \\ & + \frac{1}{s^2} \theta_3 = h(r_1 - r_2) \left[ -\frac{1}{s^2} U + \frac{1}{s} \frac{dU}{ds} + \frac{d^2 U}{ds^2} \right] + 3 \frac{dY_2}{ds} + s \frac{d^2 Y_2}{ds^2} + \frac{1}{s^2} y_2(0) - 3Y_1 - 5s \frac{dY_1}{ds} - s^2 \frac{d^2 Y_1}{ds^2} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

L'équation (B.3) devient :

$$\begin{aligned} & \theta_1 \left[ \frac{dY_2}{ds} - Y_1 - s \frac{dY_1}{ds} + \frac{1}{s^2} y_1(0) \right] + \theta_2 \left[ -\frac{1}{s^2} Y_2 + \frac{1}{s} \frac{dY_2}{ds} - \frac{dY_1}{ds} - \frac{1}{s^2} y_1(0) \right] + \frac{1}{s^2} \theta_4 \\ & = h(r_1 - r_2) \left[ \frac{dU}{ds} + \frac{1}{s^2} u(0) \right] + Y_2 + s \frac{dY_2}{ds} - 2sY_1 - s^2 \frac{dY_1}{ds} + y_1(0) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

En posant  $\theta = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4)^T$ , les équations (B.5)-(B.6)-(B.7)-(B.8) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$P\theta = Q \quad (\text{B.9})$$

où  $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  sont détaillées dans la section suivante.

## B.2 Détail des matrices $P$ et $Q$

Pour définir les matrices  $P$  et  $Q$ , on repasse dans le domaine temporel. Pour cela, on prend la transformée de Laplace inverse des quatre équations précédentes, en sachant que la dérivation par rapport à  $s$  dans le domaine fréquentiel équivaut à une multiplication par  $-t$  dans le domaine temporel :

$$\frac{d^n}{ds^n} \rightarrow \times (-t)^n \quad (\text{B.10})$$

On utilise de plus la relation de Cauchy (B.11) pour transformer les intégrales multiples en

intégrales simples de façon à faciliter l'implémentation.

$$\int_0^t \int_0^{t_{v-1}} \cdots \int_0^{t_1} \tau^\alpha x(\tau) dt_{v-1} \cdots dt_1 d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{v-1}}{(v-1)!} \tau^\alpha x(\tau) d\tau \quad (\text{B.11})$$

Enfin les matrices  $P$  et  $Q$  ont la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & 0 \\ P_{41} & P_{42} & 0 & P_{44} \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

où les différents termes sont donnés ici :

► **Détail de la matrice  $P$  :**

$$P_{11} = \int_0^\tau \left( -\frac{(\tau-t)^3}{3}t + \frac{(\tau-t)^2}{2}t^2 \right) y_2(t) dt + \int_0^\tau \left( \frac{(\tau-t)^3}{3} + 2(\tau-t)^2t - (\tau-t)t^2 \right) y_1(t) dt$$

$$P_{12} = \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^3}{6} t^2 y_2(t) dt + \int_0^\tau \left( \frac{(\tau-t)^3}{3}t - \frac{(\tau-t)^2}{2}t^2 \right) y_1(t) dt$$

$$P_{21} = \int_0^\tau \left( \frac{(\tau-t)^3}{2}t^2 - \frac{(\tau-t)^2}{2}t^3 \right) y_2(t) dt + \int_0^\tau \left( (\tau-t)^3t - 3(\tau-t)^2t^2 + (\tau-t)t^3 \right) y_1(t) dt$$

$$P_{22} = \int_0^\tau -\frac{(\tau-t)^3}{6} t^2 y_2(t) dt + \int_0^\tau \left( -\frac{(\tau-t)^3}{2}t^2 + \frac{(\tau-t)^2}{2}t^3 \right) y_1(t) dt$$

$$P_{31} = \int_0^\tau \left( \frac{(\tau-t)^4}{24} + \frac{(\tau-t)^3}{6}t - \frac{(\tau-t)^2}{2}t^2 \right) y_2(t) dt + \frac{\tau^4}{24} y_1(0)$$

$$+ \int_0^\tau \left( \frac{-3(\tau-t)^2}{2}t + (\tau-t)t^2 \right) y_1(t) dt$$

$$P_{32} = \int_0^\tau \left( -\frac{(\tau-t)^4}{24}t - \frac{(\tau-t)^3}{6}t^2 \right) y_2(t) dt + \int_0^\tau \left( \frac{-(\tau-t)^4}{24} - \frac{(\tau-t)^3}{6}t + \frac{(\tau-t)^2}{2}t^2 \right) y_1(t) dt$$

$$P_{33} = -\frac{\tau^4}{24}$$

$$P_{41} = \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^2}{2} t y_2(t) dt + \int_0^\tau \left( \frac{(\tau-t)^2}{2} - (\tau-t)t \right) y_1(t) dt - \frac{\tau^4}{24} y_2(0)$$

$$P_{42} = \int_0^\tau \left( \frac{(\tau-t)^4}{24} + \frac{(\tau-t)^3}{6}t \right) y_2(t) dt + \int_0^\tau -\frac{(\tau-t)^2}{2} t y_1(t) dt + \frac{\tau^4}{24} y_1(0)$$

$$P_{44} = -\frac{\tau^4}{24}$$

► Détail du vecteur  $Q$  :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= h(r_1 - r_2) \int_0^\tau \left( -\frac{(\tau-t)^3}{6}t + \frac{(\tau-t)^2}{2}t^2 \right) u(t) dt \\
&\quad + \int_0^\tau \left( \frac{(\tau-t)^3}{3} - 2(\tau-t)^2t + (\tau-t)t^2 \right) y_2(t) dt \\
&\quad - \int_0^\tau \left( 3(\tau-t)^2 - 6(\tau-t)t + t^2 \right) y_1(t) dt + \frac{\tau^3}{3} y_1(0) \\
Q_2 &= h(r_1 - r_2) \int_0^\tau \left( \frac{(\tau-t)^3}{2}t^2 - \frac{(\tau-t)^2}{2}t^3 \right) u(t) dt \\
&\quad + \int_0^\tau \left( -(\tau-t)^3t + 3(\tau-t)^2t^2 - (\tau-t)t^3 \right) y_2(t) dt \\
&\quad + \int_0^\tau \left( -(\tau-t)^3 + 9(\tau-t)^2t - 9(\tau-t)t^2 + t^3 \right) y_1(t) dt \\
Q_3 &= -h(r_1 - r_2) \int_0^\tau \left( -\frac{(\tau-t)^4}{24} - \frac{(\tau-t)^3}{6}t + \frac{(\tau-t)^2}{2}t^2 \right) u(t) dt - \frac{\tau^4}{24} y_2(0) \\
&\quad + \int_0^\tau \left( \frac{3(\tau-t)^2}{2}t - (\tau-t)t^2 \right) y_2(t) dt \\
&\quad + \int_0^\tau \left( \frac{3(\tau-t)^2}{2} - 5(\tau-t)t + t^2 \right) y_1(t) dt \\
Q_4 &= -h(r_1 - r_2) \int_0^\tau -\frac{(\tau-t)^2}{2}tu(t) dt - \frac{\tau^2}{2}y_1(0) - h(r_1 - r_2)\frac{\tau^4}{24}u(0) \\
&\quad + \int_0^\tau \left( -\frac{(\tau-t)^2}{2} + (\tau-t)t \right) y_2(t) dt + \int_0^\tau \left( 2(\tau-t) - t \right) y_2(t) dt
\end{aligned}$$



## Bibliographie

- [1] F.S. Ahmed, S. Laghrouche, and M. El Bagdouri. Second-order sliding mode based output-feedback control of an engine air path actuator in presence of uncertainties. *in Proc. Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*, pages 50–56, 2010. [13](#)
- [2] F.S. Ahmed, S. Laghrouche, and M. El Bagdouri. An experimental comparative study of different second order sliding mode algorithms on a mechatronic actuator. *in Proc. American Control Conference*, pages 5286–5291, 2011. [13](#)
- [3] T. Ahmed-Ali, R. Postoyan, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. Continuous-discrete adaptive observers for state affine systems. *Automatica*, Vol. 45, pages 2986–2990, 2009. [16](#), [66](#)
- [4] D. Alazard and J.P. Chrétien. *Commande active des structures flexibles : applications spatiales et aéronautiques*. Notes de cours, Supaéro, 2000. [90](#)
- [5] D. Alazard, N. Imbert, B. Clément, and P. Apkarian. Launcher attitude control : some additional design and optimization tools. *5th International Conference on launcher Technology : Missions, Control and Avionics of space launcher*, 2003. [21](#)
- [6] M.T. Alrifai, J.H. Chow, and D.A. Torry. A backstepping nonlinear control approach to switched reluctance motors. *In Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4652–4657, 1998. [10](#)
- [7] A. Astolfi. New results on the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *Automatica*, Vol. 34, No. 6, pages 783–788, 1998. [7](#)
- [8] K.J. Aström and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, Vol. 36, No. 2, pages 287–295, 2000. [6](#)
- [9] A.N. Atassi and H.K. Khalil. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 9, pages 1672–1687, 1999. [89](#)

- [10] A.N. Atassi and H.K. Khalil. Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs. *Systems & Control Letters*, Vol. 39, No. 3, pages 183–191, 2000.
- [11] A.N. Atassi and H.K. Khalil. A separation principle for the control of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 5, pages 742–746, 2001. [89](#)
- [12] P. Baranyi. Tensor-product model-based control of two dimensional aeroelastic system. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, pages 391–400, 2006. [22](#)
- [13] B. Beltran, T. Ahmed-Ali, and M. El Hachemi Benbouzid. Sliding mode power control of variable-speed wind energy conversion systems. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 23, No. 2, pages 551–558, 2008. [13](#)
- [14] B. Beltran, T. Ahmed-Ali, and M. El Hachemi Benbouzid. High-order sliding-mode control of variable-speed wind turbines. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, Vol. 9, pages 3314–3321, 2009.
- [15] B. Beltran, M. El Hachemi Benbouzid, and T. Ahmed-Ali. Second-order sliding mode control of a doubly fed induction generator driven wind turbine. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 27, No. 2, pages 261–269, 2012. [13](#)
- [16] S.E. Ben Elghali, M. El Hachemi Benbouzid, T. Ahmed-Ali, and J.-F. Charpentier. High-order sliding mode control of a marine current turbine driven doubly-fed induction generator. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, Vol. 35, No. 2, pages 402–411, 2010. [13](#)
- [17] M. Bisgaard, A. La Cour-Harbo, and J.D. Bendtsen. Adaptive control system for autonomous helicopter slung load operations. *Control Engineering Practice*, Vol. 18, No. 7, pages 800–811, 2010. [19](#)
- [18] J.L. Boiffier. *Dynamics of Flight The Equations*. Wiley, 1998. [24](#)
- [19] M. Bolender and D. Doman. Nonlinear longitudinal dynamical model of an air breathing hypersonic vehicle. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 44, No. 2, pages 374–387, 2007. [15](#), [21](#)
- [20] S.A. Bortoff. *Pseudolinearization using Spline Functions with Application to the Acrobot*. PhD thesis, University of Illinois, 1992. [4](#)
- [21] P. Boscariol, A. Gasparetto, and V. Zanotto. Active position and vibration control of a flexible link mechanism using model based predictive controller. *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, Vol. 132, No. 1, 2010. [12](#)

- [22] M.M. Bridges, D. M. Dawson, and C.T. Adballah. Control of rigid-link flexible-joint robots : A survey of backstepping approaches. *Journal of Robotic Systems*, pages 199–216, 1995. [10](#)
- [23] L. Burlion. *Contribution à l'analyse et à la commande de systèmes non linéaires à commande échantillonnée*. PhD thesis, Université Paris Sud, 2007. [10](#)
- [24] L. Burlion, T. Ahmed-Ali, and F. Lamnabhi-Lagarrigue. On the stabilization of sampled-data nonlinear systems by using backstepping on the higher order approximate models. *International Journal of Control*, Vol. 79, No. 9, pages 1087–1095, 2006. [10](#)
- [25] C.C. Chung and J. Hauser. Nonlinear control of a swinging pendulum. *Automatica*, Vol.40, pages 851–862, 1995. [6](#)
- [26] B. Clement. *Synthèse multiobjectifs et séquençement de gains : application au pilotage d'un lanceur spatial*. PhD thesis, Université Paris XI, 2001. [21](#), [103](#)
- [27] E.F. Crawley and J. De Luis. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 25, No. 10, pages 1373–1385, 1987. [12](#)
- [28] C.F. Cutforth and L.Y. Pao. Adaptive input shaping for maneuvering flexible structures. *Automatica*, Vol. 40, pages 685–693, 2004. [11](#)
- [29] A. De Luca and W. Book. *Springer Handbook for robotics, Chapter 13 : Robots with Flexible Elements*. Springer, 2008. [5](#)
- [30] A. De Luca and B. Siciliano. Trajectory control of a non-linear one-link flexible arm. *International Journal of Control*, Vol. 50, No. 5, pages 1699–1715, 1989. [12](#)
- [31] D.B. Doman, W. Oppenheimer, and M.A. Bolender. Progress in guidance and control research for space access and hypersonic vehicles. *in Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6837–6851, 2006. [21](#)
- [32] H. Du and S. Li. Attitude synchronisation control for a group of flexible spacecraft. *Automatica*, Vol. 50, pages 645–651, 2014. [10](#)
- [33] R. Dubay, M. Hassan, C. Li, and M. Charest. Finite element based model predictive control for active vibration suppression of a one-link flexible manipulator. *ISA Transactions*, 2014. [12](#)
- [34] C. Edwards and S.K. Spurgeon. *Sliding mode control, theory and applications*. Taylor and Francis, 1998. [13](#)
- [35] M. Eswaran, U.K. Saha, and D. Maity. Effect of baffles on a partially filled cubic tank : Numerical simulation and experimental validation. *Computers and Structures*, Vol. 87, Issues 3-4, pages 198–205, 2009. [11](#)

- [36] Y. Fang, B. Ma, P. Wang, and X. Zhang. A motion planning-based adaptive control method for an underactuated crane system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 20, No. 1, pages 241–248, 2012. [11](#)
- [37] I. Fantoni, R. Lozano, and M.W. Spong. Energy based control of the Pendubot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 4, pages 725–729, 2000. [6](#)
- [38] L. Fiorentini. *Nonlinear Adaptive Controller Design for Air-Breathing Hypersonic Vehicles*. PhD thesis, The Ohio State University, 2010. [10](#)
- [39] L. Fiorentini, A. Serrani, M. A. Bolender, and D. B. Doman. Nonlinear robust adaptive control of flexible air-breathing hypersonic vehicles. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 32, No.2, pages 401–416, 2009. [10](#), [13](#), [21](#)
- [40] M. Fliess and H. Sira-Ramirez. An Algebraic Framework for Linear Identification. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, pages 151–168, 2003. [16](#), [74](#), [75](#), [115](#)
- [41] R. Freeman and P. Kokotovic. Robust nonlinear control design : State-space and Lyapunov techniques. 1996. [10](#)
- [42] J.A. Frosch and D.P. Valley. Saturn AS-501/S-IC flight control system design. *Journal of Spacecraft*, Vol. 4, No. 8, pages 1003–1009, 1967. [12](#)
- [43] T.E. Gibson and A.M. Annaswamy. Modeling for control of very flexible aircraft. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2011, Paper IAF-05-C1.2.09. [19](#)
- [44] D. Gorinevsky and G. Vukovich. Nonlinear input shaping control of flexible spacecraft reorientation maneuver. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 21, pages 264–270, 1998. [11](#)
- [45] S.M. Hasheminejad and M.M. Mohammadi. Effect of anti-slosh baffles on free liquid oscillations in partially filled horizontal circular tanks. *Ocean Engineering*, Vol. 38, No. 1, pages 49–62, 2011. [11](#)
- [46] M. Hassan, R. Dubay, C. Li, and R. Wang. Active vibration control of a flexible one-link manipulator using a multivariable predictive controller. *Mechatronics*, Vol. 17, No. 6, pages 311–323, 2007. [12](#)
- [47] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotovic. Nonlinear control via approximate input-output linearization : The ball and beam example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 3, pages 392–398, 1992. [4](#)
- [48] J. Hu, D.M. Dawson, and Y. Qian. Position tracking control for robot manipulators driven by induction motors without flux measurements. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 3, pages 419–438, 1996. [10](#), [13](#)

- [49] Q. Hu. Adaptive output feedback sliding-mode manoeuvring and vibration control of flexible spacecraft with input saturation. *IET Control Theory Applications*, Vol. 2, No. 6, pages 467–478, 2008. [13](#)
- [50] Q. Hu. Robust adaptive backstepping attitude and vibration control with  $L_2$ -gain performance for flexible spacecraft under angular velocity constraint. *Journal of Sound and Vibration*, pages 285–298, 2009. [12](#)
- [51] Q. Hu and G. Ma. Adaptive variable structure controller for spacecraft vibration reduction. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 44, No. 3, pages 861–876, 2008. [13](#)
- [52] Q. Hu, Z. Wang, and H. Gao. Sliding mode and shaped input vibration control of flexible systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 44, No. 2, pages 503–519, 2008. [13](#)
- [53] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems, Third edition*. Springer, 1995. [5](#)
- [54] M. Jankovic and I.V. Kolmanovskiy. Constructive Lyapunov control design for turbocharged diesel engines. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol.8, No. 2, pages 288–299, 2000. [10](#)
- [55] Z. Jiang and H. Nijmeijer. Tracking control of mobile robots : A case study in backstepping. *Automatica*, Vol. 33, No. 7, pages 1393–1399, 1997. [10](#)
- [56] S. Kalaycioglu, M. Giray, and H. Asmer. Vibration control of flexible manipulators using smart structures. *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 11, pages 90–94, 1998. [12](#)
- [57] I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic, and A.S. Morse. A toolkit for nonlinear feedback design. *Systems & Control Letters*, pages 83–92, 1992. [10](#)
- [58] I. Karafyllis and Z.P. Jiang. Hybrid dead-beat observers for a class of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, Vol. 60, pages 608–617, 2011. [16](#)
- [59] G. Kenne, T. Ahmed-Ali, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and A. Arzande. Real-time speed and flux adaptive control of induction motors using unknown time-varying rotor resistance and load torque. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 24, No. 2, pages 375–387, 2009. [13](#)
- [60] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems, Second edition*. Prentice Hall, 1996. [7](#)
- [61] H.K. Khalil and F. Esfandiari. Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 9, pages 1412–1415, 1993. [89](#)
- [62] P. V. Kokotovic. *The Joy of Feedback : Nonlinear and Adaptive*. 1992. [10](#)

- [63] P.V. Kokotovic. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, Vol. 13, No. 2, pages 125–133, 1989. [7](#)
- [64] P.V. Kokotovic. Constructive nonlinear control : Progress in the 90's. *in Proc. of IFAC Word Congress*, 1999. [10](#)
- [65] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, 1995. [10](#)
- [66] M. Krstic, J.M. Protz, J.D. Paduano, and P.V. Kokotovic. Backstepping designs for jet engine stall and surge control. *in Proc. of Conference on Decision and Control*, pages 3049–3055, 1995. [10](#)
- [67] K. W. Lee and Singh S. N. Non-certainty-equivalent adaptive control of a nonlinear aeroelastic system. *Faculty publications, Electrical and Computer Engineering*, 2010. [22](#)
- [68] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 9, pages 924–941, 2003. [13](#)
- [69] W. Lin. Global Asymptotic Stabilization of General Nonlinear Systems with Stable Free Dynamics via Passivity and Bounded Feedback. *Automatica*, Vol. 32, No. 6, pages 915–924, 1996. [15](#), [39](#)
- [70] M. Lopez-Martinez, J. A. Acosta, and J.M. Cano. Non-linear sliding mode surface for a class of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory and Applications*, Vol. 4, No. 10, pages 2195–2204, 2010. [13](#)
- [71] A. Loria, E. Panteley, and A. Zavala-Rio. Adaptive observers with persistency of excitation for synchronization of chaotic systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 56, No. 12, pages 2703–2716, 2009. [x](#), [16](#), [85](#), [87](#), [88](#)
- [72] J. Lévine. *Analyse et commande des systèmes non linéaires*. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004. [23](#)
- [73] M. Malekzadeh, A. Nadhash, and H.A. Talebi. Control of flexible spacecraft using dynamic inversion and  $\mu$ -synthesis. *Journal of Vibration and Control*, pages 1938–1951, 2011. [13](#)
- [74] N.H. McClamroch and I. Komakovsky. A hybrid switched mode control for VTOL flight control problems. *in Proc. of IEEE conference on Decision and Control*, pages 2648–2653, 1996. [6](#)
- [75] M. Mirazei, L. C. Henriksen, N. K. Poulsen, H. N. Niemann, and M. H. Hansen. Individual pitch control using lidar measurements. *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1646–1651, 2012. [12](#)

- [76] I. Mizumoto and R. Kohzawa. Control of a flexible arm with input dead zone by a passivity based adaptive output feedback. *IEEE International Conference on Control Applications*, 2012. [7](#)
- [77] S.O.R. Moheimani. A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, pages 482–494, 2003. [11](#)
- [78] R. Olfati-Saber. Trajectory tracking for a flexible one-link robot using a nonlinear non-collocated output. in *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, 2000. [12](#)
- [79] R. Olfati-Saber. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001. [4](#), [6](#), [7](#)
- [80] E. Pereira, J.R. Trapero, I.M. Dia, and V. Feliu. Adaptive input shaping for manoeuvring flexible structures using an algebraic identification technique. *Automatica*, Vol. 45, pages 1046–1051, 2009. [11](#)
- [81] M.F. Perez Polo, M. Perez Molina, and J. Gil Chica. Swing-up and positioning control of an inverted wheeled cart pendulum system with chaotic balancing motions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, pages 655–665, 2012. [4](#)
- [82] A. Pisano, S. Scodina, and E. Usai. Load swing suppression in the 3-dimensional overhead crane via second-order sliding-modes. in *Proc. 11th International Workshop on Variable Structure Systems*, pages 452–457, 2010. [13](#)
- [83] A. Preumont. Vibration control of active structures : an introduction, 3rd edition. *Springer*, 2011. [12](#), [90](#)
- [84] B. Pridgen, K. Bai, and W. Singhose. Slosh suppression by robust input shaping. in *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2316–2321, 2010. [11](#)
- [85] J. Reiner, G.J. Balas, and W.L. Garrard. Flight control design using robust dynamic inversion and time-scale separation. *Automatica*, Vol. 32, No. 11, pages 1493–1504, 1996. [13](#)
- [86] M. Reyhanoglu. Slewing maneuver of a flexible spacecraft using finite time control. in *Proc. 34th IEEE International Conference IECON*, pages 2667–2671, 2008. [29](#)
- [87] M. Reyhanoglu and J. R. Hervas. Partial-state feedback control design for liquid container transfert with sloshing suppression. *IEEE*, 2012. [14](#)
- [88] M. Reyhanoglu and J.R. Hervas. Nonlinear dynamics and control of space vehicles with multiple fuel slosh modes. *Control Engineering Practice*, Vol. 20, pages 912–918, 2012. [14](#)

- [89] M. Reyhanoglu and J.R. Hervas. Point-to-Point Liquid Container Transfer via a PPR Robot with Slosing Suppression. *in Proc. American Control Conference*, pages 5490–5494, 2012. [34](#)
- [90] M. Sahnoun, V. Andrieu, and M. Nadri. Nonlinear and locally optimal controllers design for input affine systems. *International Journal of Control*, Vol. 85, No. 2, pages 1267–1272, 2012. [ix](#), [15](#), [57](#), [58](#)
- [91] M. Sepulchre, M. Jankovic, and P.V. Kokotovic. *Constructive Nonlinear Control*. Springer, 1997. [10](#)
- [92] H.C. Shin and S.B. Choi. Position control of a two-link flexible manipulator featuring piezoelectric actuators and sensors. *Mechatronics*, Vol. 11, No. 6, pages 707–729, 2001. [12](#)
- [93] Y.B. Shtessel, C.E. Hall, S. Baev, and J.S. Orr. Flexible modes control using sliding mode observers : Application to Ares I. *in Proc. of AIAA Guidance Navigation and Control Conference*, 2010. [12](#)
- [94] B. Siciliano, J.V.R. Prasad, and A.J. Calise. Output feedback two time scale control of multilink flexible arms. *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, Vol. 114, No. 1, pages 70–77, 1992. [7](#)
- [95] S.N. Singh, P. Chandler, C. Schumacher, S. Banda, and M. Pachter. Nonlinear adaptive close formation control of unmanned aerial vehicles. *Dynamics and Control*, Vol. 10, No. 2, pages 179–194, 2000. [10](#)
- [96] W. Singhose. Command shaping for flexible systems : A review of the first 50 years. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 10, No. 4, pages 153–168, 2009. [11](#)
- [97] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991. [13](#)
- [98] K.L. Sorensen and W.E. Singhose. Command-induced vibration analysis using input shaping principles. *Automatica*, Vol. 44, pages 2392–2397, 2008. [11](#)
- [99] V.A. Spector and H. Flashner. Modelling and design implications of non-collocated control in flexible systems. *AMSE Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control*, Vol. 11, pages 186–193, 1990. [12](#)
- [100] M. W. Spong. On the force control problem for flexible joint manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 1, pages 107–111, 1989. [7](#)
- [101] M. W. Spong. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. *IFAC World Congress*, July 1996. [5](#), [6](#), [12](#)

- [102] M.W. Spong. The swing up control problem for the Acrobot. *in Proc. of IEEE Control Systems Magazine*, pages 49–55, 1995. [6](#)
- [103] M.W. Spong. Underactuated mechanical systems. In B. Siciliano and K.P. Valavanis, editors, *Control Problems in Robotics and Automation*, volume 230 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 135–150. Springer Berlin Heidelberg, 1998. [4](#), [5](#)
- [104] M.W. Spong and D. Block. The pendubot : A mechatronic systems for control research and education. *in Proc. of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 555–557, 1995. [4](#), [6](#)
- [105] S. Su and Y. Lin. Robust output tracking control of a class of non-minimum phase systems and application to VTOL aircraft. *International Journal of Control*, Vol. 84, No.11, pages 1858–1872, 2011. [7](#)
- [106] H.J. Sussmann. Limitations on the stabilizability of globally-minimum-phase systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 1, pages 117–119, 1990. [7](#)
- [107] H.J. Sussmann and P.V. Kokotovic. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 4, pages 424–440, 1991. [7](#)
- [108] A. Teel and L. Praly. Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback. *Systems & Control Letters*, Vol. 22, No. 5, pages 313–325, 1994. [89](#)
- [109] C. Tournes, D.B. Landrum, Y. Shtessel, and C.W. Hawk. Ramjet-powered reusable launch vehicle control by sliding modes. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 21, No. 3, pages 409–415, 1998. [13](#)
- [110] V. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, pages 212–222, 1977. [13](#)
- [111] O. Voinot, P. Apkarian, and D. Alazard. Gain-scheduling  $H_\infty$  control of the launcher in atmospheric flight via linear-parameter varying techniques. *in Proc. of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2002. [21](#)
- [112] J.P.B. Vreeburg. Measured states of sloshsat flevo. *in Proc. of the 56th International Astronautical Congress*, 2005. [19](#)
- [113] R. Wood and B. Cazzolato. An alternative nonlinear control law for the global stabilization of the PVTOL vehicle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, No. 7, pages 1282–1287, 2007. [7](#)

- [114] H. Xu, M. Mirmirani, and P. Ioannou. Adaptive sliding mode control design for a hypersonic flight vehicle. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 27, No. 5, pages 829–838, 2004. [13](#)



## Résumé

En aérospatial, les contraintes de masse ont conduit à utiliser des structures plus légères et par conséquent plus souples, induisant de nouveaux objectifs de commande, comme la réduction des efforts structuraux. Pour satisfaire ces objectifs, les modes de flexion doivent être considérés dès la synthèse de la loi de commande, ce qui entraîne certaines contraintes comme les non linéarités, le sous actionnement et l'altération des mesures par les modes souples.

En considérant ces contraintes, cette thèse traite de la synthèse d'une méthode de commande non linéaire pour les systèmes aérospatiaux souples. Nous nous intéressons particulièrement au problème d'atténuation des oscillations provoquées par les modes souples.

Pour cela, nous définissons une classe de système non linéaire, sous actionnée et à minimum de phase, représentative des systèmes aérospatiaux souples. Pour cette classe de système, nous proposons une loi de commande non linéaire synthétisée par retour d'état en utilisant des changements de variables et la technique du backstepping. La synthèse est effectuée de façon à améliorer le régime transitoire des modes souples. Les états souples n'étant pas mesurés, le problème du retour de sortie est également traité par l'intermédiaire d'observateurs adaptatifs (à temps fini et asymptotique). Des incertitudes sur la pulsation et l'amortissement des modes souples sont en particulier considérées. La méthode proposée est illustrée par des simulations numériques réalisées sur un lanceur et un avion hypersonique.

**Mots clés :** commande non linéaire, backstepping, modes souples, observateurs, sous actionnement, amortissement, aérospatial

## Abstract

Due to mass constraints aerospace systems tend to have lightweight and flexible structures leading to new control objectives such as structural load reduction. To fulfil these objectives, flexible modes must be considered from the design of the controller, requiring to consider some constraints such as nonlinearities, underactuation, or measurement corruption terms.

Consider these constraints, this thesis treats the design of a nonlinear control method for flexible aerospace systems. We particularly focus on the problem of reducing oscillations caused by the bending modes.

To do that, we define a class of nonlinear system which is both underactuated and minimum phase and that represents flexible aerospace systems. Consider this class, we propose a nonlinear full-state controller based on changes of coordinates and the backstepping technique. The control design is carried out to enhance the transient of the flexible modes. Flexible states being not measured, the output-feedback problem is also treated through adaptive observers (finite-time and asymptotic). Uncertainties of natural damping and frequency of the bending modes are particularly considered. The proposed method is illustrated by numerical simulations performed on a space launch vehicle and an hypersonic aircraft.

**Keywords:** nonlinear control, backstepping, bending modes, observers, underactuation, damping, aerospace