

Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

Présentée et soutenue par :

Alexandru RAVZAN LUZI

le mardi 11 février 2014

Titre :

Commande variant dans le temps pour le contrôle d'attitude de satellites

École doctorale et discipline ou spécialité :

EDSYS : Automatique

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA CSDV

Directeur(s) de Thèse :

M. Jean-Marc BIANNIC (directeur de thèse)

M. M. Dimitri PEAUCELLE (co-directeur de thèse)

Jury :

Mme Naira HOVAKIMYAN, Professeur Université d'Illinois - Rapporteur

M. Luc DUGARD, Directeur de recherche CNRS - Rapporteur

M. Samir BENNANI, Ingénieur de recherche - ESA Examineur

M. Jean MIGNOT, Ingénieur de recherche - CNES Examineur

M. Jean-Marc BIANNIC, Ingénieur de recherche - ONERA Directeur de thèse

M. Dimitri PEAUCELLE, Chargé de Recherche CNRS - Co-directeur de thèse

Résumé

Cette thèse porte sur la commande variant dans le temps avec comme fil directeur une application satellite. Nous avons étudié trois types de commande : une commande à commutation, une commande LPV et une commande adaptative directe. Pour cette dernière nous avons proposé des résultats théoriques nouveaux portant sur la structuration du gain et de l'adaptation. Les résultats ont été validés en simulation et sont testés à bord d'un satellite.

L'application que nous considérons au cours de cette étude est la commande d'attitude des satellites par roues à réaction. A partir des limitations de ces actionneurs, nous exposons dans un premier temps le besoin de mettre en place des lois de commande qui varient selon les conditions de fonctionnement. En particulier, on cherche des correcteurs assurant une réponse rapide lorsque l'erreur d'attitude est faible, tout en limitant l'effort de commande lorsque le satellite se trouve loin de sa position de consigne.

En partant des résultats préliminaires portant sur la commande à commutation, actuellement utilisée sur les satellites Myriade, une première partie de nos travaux est dédiée à la commande LPV. Une méthode de synthèse est développée, permettant d'obtenir de nouveaux algorithmes exprimés dans ce formalisme. L'approche que nous proposons se base sur la spécification des objectifs de commande à travers un modèle de référence LPV qui décrit le comportement idéal en boucle fermée. Testées en simulation, les lois de commande LPV obtenues répondent à la problématique de notre application. Toutefois, le choix du modèle de référence LPV s'avère délicat.

Cette difficulté a été levée en utilisant la commande adaptative. Dans cette approche, les spécifications concernant les comportements aux dépointages faibles et forts sont traduites par des contraintes au niveau des lois d'adaptation des gains de commande. Nous introduisons ainsi une nouvelle méthode de synthèse permettant d'obtenir des lois adaptatives structurées. Les preuves de stabilité en boucle fermée se basent sur des outils de la théorie de Lyapunov, spécifiques à la commande adaptative, mais également à la commande robuste. Cette combinaison permet d'établir des preuves de stabilité asymptotique pour des lois d'adaptation structurées faisant apparaître, entre autre, la sigma-modification.

Plusieurs lois ainsi obtenues ont été testées sur un simulateur complet du un modèle non-linéaire d'un satellite dans son environnement orbital. Les résultats montrent l'intérêt de l'utilisation de tels algorithmes adaptatifs, qui permettent en particulier de modifier la dynamique du satellite en fonction des capacités disponibles des actionneurs. Sur la base de ces résultats positifs, une campagne d'essais en vol sur le satellite Picard est actuellement en cours.

Mots-clés : commande attitude satellite, commande adaptative, commande LPV, passivité, LMI, modèle de référence

This manuscript considers time varying control, with a strong emphasis on a satellite application. Three types of control structures are studied : a switch-based approach, LPV control and direct adaptive control. In this last field we introduce new theoretical results which allow structuring the gain and the adaptation law. The results are validated in simulation and are currently tested on board a satellite.

The application we consider is satellite attitude control using reaction wheels. Taking into account the inherent limitations of these actuators, we first point out the need to implement control laws that vary according to the operating conditions. In particular, one seeks controllers that guarantee a fast response when the pointing error is small, whilst limiting the control effort when the satellite is far from its reference position.

Starting from the preliminary results concerning the switch-based control law currently implemented on the Myriade satellites, a first part of our work is dedicated to LPV control. A synthesis method is developed, which allows obtaining new control algorithms expressed within this framework. The proposed approach is based on the specification of the control objectives through an LPV reference model, describing the ideal closed-loop behaviour. The simulations carried out with LPV algorithms obtained by using this method show that they meet the needs of our application. Nonetheless, the choice of a reference model proves to be difficult.

This obstacle has been surpassed by using direct adaptive control. In this approach, specifications regarding the behaviour at small and large pointing errors can be added through constraints on the laws defining the control gains adaptation. We thus introduce a new synthesis method, based on which structured adaptive control laws are obtained. The closed loop stability proofs are based on tools of the Lyapunov theory, specific to adaptive and robust control. This combination allows us to establish stability proofs for structured adaptive laws containing, for instance, the sigma-modification.

Several laws obtained in this way have been tested on a complete simulator, based on a non-linear model of a satellite in its orbital environment. The results show the interest of such adaptive algorithms, which allow in particular to modify the satellite dynamics depending on the available capacity of the actuators. Based on these positive results, a flight-test campaign on the Picard satellite is underway.

Keywords : satellite attitude control, adaptive control, LPV control, passivity, LMI, reference model

Abréviations

ASP	–	almost strictly passive (presque strictement passif)
ASPR	–	almost strictly positive real (presque strictement positive réel)
LFT	–	linear fractional transformation (transformation linéaire fractionnaire)
LMI	–	linear matrix inequality (inégalité linéaire matricielle)
LPV	–	linear parameter varying (linéaire à paramètres variants)
LTI	–	linear time-invariant (linéaire invariant dans le temps)
MAS	–	mode acquisition et survie
MCO	–	mode contrôle d'orbite
MGT	–	mode grossier de transition
MLT	–	mode lancement
MNO	–	mode normal
MPF	–	mode pointage fin
MIMO	–	multiple-input multiple-output (entrée multiple sortie multiple)
PFC	–	parallel feedforward compensator (compensateur en parallèle par anticipation)
SCAO	–	système de contrôle d'attitude et d'orbite
SISO	–	single-input single-output (entrée unique sortie unique)
SP	–	strictly passive (strictement passif)
SPR	–	strictly positive real (strictement positive réel)

Table des matières

Résumé	i
Abréviations	iii
Introduction	1
1 Problématique de contrôle d'attitude - application aux satellites Myriade	7
1.1 Introduction	7
1.2 Présentation de la filière Myriade	8
1.3 Architecture SCAO	10
1.4 Commande par roues à réaction à l'intérieur du mode MNO	11
1.4.1 Modèle satellite 1 axe	12
1.4.1.1 Dynamique satellite	13
1.4.1.2 Roue à réaction	14
1.4.1.3 Capteur stellaire et estimateur de vitesse	15
1.4.2 Synthèse d'un correcteur LTI - $C_0(s)$	16
1.4.2.1 Réponse à dépointage faible	17
1.4.2.2 Réponse à dépointage fort : besoin d'un correcteur variant dans le temps	17
1.4.3 Loi à commutation	19
1.4.3.1 Commutation dépointage fort / dépointage faible	20
1.4.3.2 Réponses aux conditions initiales	21
1.4.3.3 Améliorations possibles	23
1.4.4 Approximation LPV de la loi à commutation	24
1.4.4.1 Loi de commande et boucle fermée quasi-LPV	25
1.4.4.2 Etude de la stabilité	26
1.4.4.3 Réponses temporelles	28
1.5 Conclusions	31
2 Commande LPV par modèle de référence	33
2.1 Introduction	33
2.2 Courte présentation du formalisme LPV	34
2.2.1 Systèmes strictement et quasi LPV	34

2.2.2	Représentations des systèmes LPV	35
2.2.3	Considérations sur les conditions d'analyse - choix d'un type de représentation	39
2.3	Recherche d'une loi de commande assurant le suivi d'un modèle LPV	42
2.3.1	Suivi d'un modèle LPV : formulation du problème	42
2.3.2	Synthèse LPV polytopique	43
2.4	Synthèse sur un modèle satellite 1 axe	46
2.4.1	Forme standard - spécifications sous forme de sensibilité mixte	46
2.4.2	Choix des modèles et des filtres	48
2.4.2.1	Choix d'un modèle de référence	48
2.4.2.2	Choix du modèle de satellite	48
2.4.2.3	Choix des filtres de pondération	50
2.4.3	Résultats de synthèse	51
2.4.3.1	Calcul des plages de stabilité	51
2.4.3.2	Calcul des correcteurs - extrapolation linéaire	54
2.5	Résultats de simulation	56
2.5.1	Réponse aux conditions initiales : faible dépointage, forte vitesse initiale	58
2.5.2	Réponse aux grands dépointages : suivi de consignes de grande amplitude	60
2.6	Conclusions	61
3	Commande adaptative directe - état de l'art	63
3.1	Introduction	63
3.2	Lois d'adaptation et relaxation des hypothèses	65
3.2.1	Systèmes carrés, presque passifs	68
3.2.2	Systèmes non-carrés, presque passifs	72
3.2.3	Systèmes carrés, stabilisables par retour de sortie LTI (statique ou dynamique)	76
3.2.4	Systèmes non-carrés, stabilisables par retour de sortie statique	82
3.2.5	La commande adaptative "pure" n'existe pas	84
3.3	Etude de la σ -modification	85
3.3.1	Compensation des bruits et des perturbations permanentes	86
3.3.2	Influence sur la stabilité globale	87
3.3.3	Evolution entre deux valeurs stabilisantes	90
3.4	Conclusions	93
4	Commande adaptative structurée	95
4.1	Introduction	95
4.2	Illustration du besoin, application de la loi adaptative non-structurée au satellite	95
4.3	Proposition d'une loi d'adaptation structurée	100
4.3.1	Systèmes considérés, hypothèse principale	100
4.3.2	Expression de la nouvelle loi d'adaptation	101
4.3.3	Conditions de stabilité	103
4.4	Application de la σ -modification et influence sur la stabilité	108

4.4.1	Test de stabilité asymptotique globale à l'aide de la commande robuste	110
4.5	Application au contrôle d'attitude de satellite	115
4.5.1	Procédure de synthèse de la loi adaptative	116
4.5.1.1	Définition de la structure de la loi d'adaptation	116
4.5.1.2	Détermination des paramètres (G_i, D_i, α_i) et β -résolution LMI	117
4.5.1.3	Validation des domaines de variation pour l'application de la σ - modification	119
4.5.1.4	Choix des paramètres σ	120
4.5.1.5	Choix des coefficients d'adaptation - γ	121
4.5.2	Implémentation de la fonction barrière Φ	122
4.5.3	Résultats de simulation	126
4.5.3.1	Réponse aux conditions initiales en position angulaire et suivi de consigne de grande amplitude	126
4.5.3.2	Réponse aux conditions initiales en forte vitesse angulaire	130
4.6	Conclusions	134
5	Application sur un simulateur satellite complet	135
5.1	Introduction	135
5.2	Évolutions de la loi d'adaptation	136
5.2.1	Terme σ variable	136
5.2.2	Pris en compte de la vitesse de la roue à réaction	139
5.3	Discretisation des lois de commande proposées	143
5.3.1	Loi sans fonction barrière - schémas d'Euler et de Tustin	144
5.3.2	Approximation de la fonction barrière - fonction "projecteur"	147
5.4	Un court bilan	149
5.5	Synthèse sur un modèle satellite 3 axes	150
5.5.1	Modèle de synthèse	151
5.5.2	Adaptation de la procédure de synthèse	152
5.5.2.1	Définition de la structure de commande et d'adaptation	153
5.5.2.2	Calcul et validation des domaines de variation	154
5.6	Résultats de simulation	157
5.6.1	Simulateur complet du satellite Picard	157
5.6.1.1	Dynamique non-linéaire du satellite	158
5.6.1.2	Implémentation de la loi de commande adaptative	159
5.6.2	Cas de simulation et réglages considérés	161
5.6.2.1	Réponses aux grands dépointages	162
5.7	Conclusions	167
	Conclusions et perspectives	169
	A Commande adaptative structurée pour la résolution des LMIs	173
	B Valeurs numériques associées à l'application au satellite Picard	181

C Résultats complémentaires de simulation	185
Bibliographie	194

Introduction

Dans le domaine de la commande des satellites par roues à réaction, un des enjeux majeurs consiste à mettre au point des lois de commande couvrant des domaines de fonctionnement étendus. Ces domaines sont définis en termes d'erreur de pointage par rapport à une position angulaire désirée et peuvent aller, pour le type de satellites auxquels nous nous intéressons, jusqu'à 20 degrés autour de chaque axe. A cause des limitations des actionneurs utilisés, les stratégies de commande mises en place dans ce contexte doivent répondre à des objectifs différents en fonction de la valeur du dépointage. On cherche ainsi des lois de commande qui assurent un bon rejet des perturbations et une dynamique rapide lorsque l'erreur de pointage est faible, tout en limitant l'effort demandé aux actionneurs lorsque le satellite se trouve loin de la position désirée. La présence d'objectifs différents, voire antagonistes, selon le point de fonctionnement du système fait ainsi apparaître le besoin de mettre en place une stratégie de commande variant dans le temps.

Une première possibilité pour résoudre ce problème est présentée par Pittet et al. (1999); Pittet et Arzelier (2006), qui proposent une stratégie basée sur la commutation entre deux lois de commande. Ainsi, lorsque le dépointage est important un algorithme de type biais de vitesse est utilisé, qui consiste à asservir la vitesse angulaire à une valeur désirée. On assure de cette manière une sollicitation réduite des actionneurs et la diminution de l'erreur d'attitude, jusqu'à une certaine valeur définie par le seuil de commutation. Lorsque ce seuil est franchi, la loi de commande commute sur un algorithme de type proportionnel-dérivé, qui assure la convergence de l'erreur vers zéro et les performances désirées en termes de rejet des perturbations. Cette stratégie de commande répond aux spécifications fixées en boucle fermée, notamment :

- absence de saturation des actionneurs,
- robustesse aux variations paramétriques,
- stabilité observée en pratique,
- bonne précision en régime permanent.

Ces propriétés justifient la mise en place de cette stratégie sur la gamme de satellites Myriade, qui constituent le cas d'application auquel nous nous intéressons. Cependant, cette structure de commande comporte plusieurs inconvénients. Tout d'abord, même si en pratique on observe la stabilité de la boucle fermée et la convergence de l'erreur de pointage vers zéro, il est difficile de prouver formellement la stabilité asymptotique globale du système bouclé. Deuxièmement, cette stratégie de commande étant basée sur l'association de deux algorithmes différents, sa validation est complexe. Le réglage de ces algorithmes peut également s'avérer délicat, puisque leurs paramètres sont liés par une condition de continuité et ne peuvent donc pas être choisis de manière indépendante. Finalement, une discontinuité du couple commandé peut apparaître lors de la commutation entre les deux lois, si la vitesse de consigne n'a pas été rejointe.

Une partie de ces inconvénients ont été levés par Biannic et al. (2011), qui formulent une loi de commande unique sous forme LPV, obtenue à partir de la loi par commutation présentée ci-dessus. Cette nouvelle loi assure la continuité du couple de commande pour toute évolution de la vitesse et de la position angulaire. La formulation LPV de la boucle fermée rend possible l'utilisation des outils d'analyse associés à ce formalisme. On prouve de cette manière que la loi LPV assure la stabilité en boucle fermée, pour des dépointages qui varient sur l'intégralité de la plage pour laquelle la loi à commutation était conçue. Ces résultats montrent ainsi l'intérêt d'une expression sous forme LPV. Cependant, dans la construction de cette nouvelle loi de commande, la connaissance d'une loi à commutation, constituant le point de départ de la démarche, est nécessaire.

Une autre catégorie de commande à temps variant, la commande adaptative directe, a également été appliquée pour la commande d'attitude de satellites par Peaucelle et Fradkov (2008); Peaucelle et al. (2011b). Ces études introduisent des conditions de synthèse d'une loi adaptative pour les systèmes linéaires à entrées et sorties multiples, stabilisables par retour de sortie statique, forme sous laquelle il est possible de modéliser la dynamique du satellite. La formulation de ces résultats est faite sous forme LMI, ce qui offre une certaine flexibilité : possibilité d'ajouter des contraintes, choix d'un critère linéaire à optimiser. Cette approche permet également de prouver des propriétés de robustesse. Toutefois, la procédure de synthèse proposée permet de mettre en place seulement une adaptation globale, sans offrir la possibilité de spécifier une structure désirée à ce niveau. Ceci fait que la loi adaptative répond seulement en partie à la problématique de dépointage fort/faible. Ainsi, les domaines de fonctionnement couverts sont inférieurs à ceux désirés et la dynamique à faible dépointage ne respecte pas les spécifications en termes de rapidité et rejet de perturbations.

Cette analyse succincte revue met en évidence les différents résultats existants au début de notre étude au niveau de la commande à temps variant et les avantages associés à chacune de ces techniques. La loi par commutation offre de bonnes performances opérationnelles et est utilisée avec succès depuis de nombreuses années. Son approximation LPV permet de résoudre les problèmes liés à la possible discontinuité du couple commandé et montre l'intérêt de ce cadre de travail dans le contexte de la commande d'attitude de satellites. Au niveau de la commande adaptative, des conditions de synthèse permettant de mettre en place des lois de commande stabilisantes pour une vaste classe de systèmes existent également. On remarque cependant que chacune de ces stratégies présente des inconvénients : les propriétés de la loi à commutation sont difficiles à caractériser d'un point de vue théorique, tandis que dans le cadre LPV on ne dispose pas d'une méthode de synthèse permettant de spécifier un comportement temps variant en boucle fermée. Finalement, les résultats existants au niveau de la commande adaptative ne permettent pas la mise en œuvre d'une loi de commande couvrant l'intégralité du domaine de fonctionnement prévu.

Ce sont ces problématiques qui justifient nos travaux, dont l'objectif central réside dans la conception de lois de commande LPV et adaptatives applicables au contrôle d'attitude de satellites par roues à réaction, pour des domaines de fonctionnement élargis.

Le premier chapitre de ce manuscrit présente l'application considérée au cours notre étude et les solutions existantes dans le domaine. Une première partie du chapitre est dédiée à l'analyse du système de contrôle d'attitude et d'orbite (SCAO) des satellites Myriade. Le problème simplifié de commande d'un modèle satellite un axe est considéré dans un premier temps. En utilisant la boucle d'asservissement ainsi modélisée, nous mettons ensuite en évidence le besoin d'implémenter un correcteur qui varie dans le temps. Ce comportement est nécessaire afin de respecter le niveau de performance demandé à faible dépointage, tout en limitant l'effort de commande lorsque le satellite se trouve loin de la position désirée. La stratégie de commande à commutation,

permettant de répondre à cette problématique et actuellement utilisée sur les satellites Myriade, est présentée en premier lieu. Nous nous intéressons par la suite à une loi de commande sous forme LPV, qui permet de lever une partie des difficultés induites par la structure classique de commande. Cette analyse fait ressortir l'intérêt du formalisme LPV dans le cadre de la problématique considérée. On remarque en même temps que la stratégie de synthèse LPV existante se base sur la connaissance d'une loi à commutation, à partir de laquelle une loi améliorée est obtenue. Le développement d'une méthode de synthèse permettant d'obtenir des algorithmes de commande LPV directement à partir des spécifications de la boucle fermée apparaît ainsi comme nécessaire.

C'est l'objectif que l'on fixe pour le Chapitre 2. Dans le processus de la mise en place d'une telle méthode de synthèse, on remarque tout d'abord que le comportement temps variant que nous recherchons est lié aux objectifs de commande, les modèles utilisés pour le système à commander étant stationnaires. L'approche classique utilisée en commande LPV – où le correcteur reproduit la structure temps variant du système – n'est par conséquent pas adaptée au problème considéré. Dans ce contexte, la méthode que nous proposons se base sur la spécifications des objectifs de commande sous la forme d'un modèle de référence LPV, dont le suivi doit être assuré en boucle fermée. L'interconnexion "système à commander + modèle de référence" se représente alors, sous forme LPV et les conditions de synthèse associées à formalisme peuvent être utilisées. Suite à la présentation de ces conditions au début du Chapitre 2, nous donnons une formulation du problème de suivi de modèle sous forme standard, ce qui nous permet de trouver une solution optimale du point de vue de la norme H_∞ . La loi de commande ainsi obtenue assure le suivi de modèle avec une précision garantie et imprime un comportement différent en boucle fermée, en fonction de l'erreur de pointage. Les résultats présentés dans ce chapitre ont donné lieu à la publication (Luzi et al., 2012a).

L'approche développée dans le cadre LPV permet de répondre à la problématique de commande à dépointage fort et faible, en se basant sur un modèle de référence qui décrit le comportement idéal et par le biais duquel la loi de commande devient variante dans le temps. Cependant, le choix d'un tel modèle s'avère en pratique complexe. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes orientés vers des stratégies de commande qui permettent de s'affranchir de cette difficulté. Il s'agit plus exactement de la commande adaptative, paradigme dans lequel le correcteur varie selon les conditions de fonctionnement du système. Le Chapitre 3 présente les résultats ayant inspiré nos travaux dans le domaine. A ce sujet, notre choix – utiliser la commande adaptative afin de mettre en place des structure *sans* modèle de référence – peut être surprenant, car ce type de schéma est très présent dans ce paradigme. Nous remarquons toutefois que l'utilisation d'un modèle de référence afin d'imposer un comportement temps variant en boucle fermée n'est plus nécessaire lorsque la loi de commande est adaptative. En effet, le caractère non-stationnaire du correcteur est dans ce cas implicite. Celui-ci varie selon les conditions de fonctionnement et donc, pour l'application considérée, selon le dépointage. Ainsi, les résultats présentés dans le Chapitre 3 concernent uniquement la commande adaptative sans modèle de référence. On peut distinguer à ce niveau des méthodes directes et indirectes. Ces dernières proposent une adaptation basée sur l'estimation des paramètres mal connus du système, problématique qui ne se situe pas parmi celles auxquelles nous nous intéressons dans cette thèse. On se focalisera donc dans ce chapitre sur les méthodes d'adaptation directe, consistant à faire varier le correcteur directement en fonction des mesures. L'utilisation de ces méthodes permet, tout comme la suppression du modèle de référence de réduire l'effort de calcul nécessaire à l'implémentation de la loi de commande, aspect particulièrement important pour la mise en œuvre à bord d'un satellite.

Bien que les résultats existant au niveau de la commande adaptative permettent la synthèse de lois stabi-

lisantes pour le satellite, celles-ci répondent seulement de manière partielle à la problématique de commande dépointage faible et fort. Cet aspect, qui justifie nos contributions au domaine de la commande adaptative est illustré au début du Chapitre 4. On vise ainsi, dans cette partie du manuscrit à développer une procédure de synthèse pour des lois de commande adaptatives stabilisantes qui couvrent le domaine de fonctionnement considéré. Concernant la manière dont cet objectif peut être atteint on remarque que, suite à la suppression du modèle de référence on ne dispose plus d'outils permettant de spécifier le comportement recherché en boucle fermée. Un autre moyen à travers lequel cette spécification pourra être traduite doit alors être trouvé. Dans ce contexte, notre démarche se fonde sur l'hypothèse qu'en imposant au correcteur une adaptation appropriée, on peut répondre à la problématique de commande à laquelle nous faisons face. En particulier, le correcteur doit évoluer, lorsque le satellite est loin de son point d'équilibre, de manière à limiter la commande, pour ensuite retrouver un comportement rapide lorsque l'erreur est faible.

La procédure de synthèse que nous développons, via laquelle des lois adaptatives structurées sont obtenues permet de spécifier ce type de comportement. Cette procédure repose sur la partition du correcteur en plusieurs composantes, dont chacune est adaptée en fonction des signaux d'erreur spécifiés. Grâce aux conditions de synthèse que nous formulons, les composantes du correcteur varient dans des domaines indépendants. Une attention particulière est accordée par la suite à la σ -modification, dont l'utilisation peut garantir une réponse rapide à faible dépointage. Des conditions de stabilité asymptotique pour des lois ainsi modifiées sont proposées, en s'appuyant sur la connaissance du domaine de variation du correcteur. Une fois les lois de commande complètement définies, nous nous intéressons aux critères des choix des valeurs numériques pour leurs nombreux paramètres. Les degrés de liberté que ceux-ci offrent sont ainsi exploités afin d'obtenir une stratégie de commande adaptée au contrôle d'attitude de satellites. Afin de valider l'intérêt des algorithmes adaptatifs que nous proposons, des résultats de simulation basés sur un modèle linéaire du satellite sont finalement présentés. Sur la base de ces contributions deux articles scientifiques ont été publiés (Luzi et al., 2013c, 2012b).

Nos travaux dans le domaine de la commande adaptative structurée nous ont également conduits vers des résultats sans connexion immédiate au problème pratique que nous considérons. Il s'agit en effet d'une proposition pour une nouvelle méthode de résolution des LMI. Cette méthode est basée sur la simulation d'un système fictif connecté en rétroaction avec une loi adaptative structurée. On montre alors que le correcteur converge vers une solution au problème LMI à partir duquel le système fictif est construit. Ce résultat a donné lieu à la publication reproduite en Annexe A (Luzi et al., 2013a).

Une fois construit le cadre théorique de la commande adaptative structurée, nous nous intéressons à une conception plus détaillée. On vise ainsi, au cours du Chapitre 5, à proposer des algorithmes de commande adaptatifs améliorés, implémentables à bord d'un satellite en orbite. Nous remarquons ainsi, dans un premier temps, le besoin d'obtenir des dynamiques en boucle fermée plus uniformes que celles générées par l'application de la loi adaptative introduite au Chapitre 4. Deuxièmement, pour que les lois adaptatives présentent des avantages opérationnels par rapport à la stratégie de commande actuellement mise en place, on souhaiterait adapter la dynamique de la boucle fermée en tenant compte des capacités disponibles des actionneurs. Pour répondre à ces besoins, deux modifications de la loi de commande sont introduites. Suite à la formulation des algorithmes adaptatifs améliorés, l'implémentation pratique de ces stratégies de commande est considérée. Plusieurs expressions en temps discret sont alors données, en tenant compte de la particularité du terme de l'équation d'adaptation qui garantit la bornitude du correcteur. La méthode de discrétisation que nous propo-

sons est également présentée dans (Luzi et al., 2013b).

A ce niveau on dispose ainsi de nouveaux algorithmes adaptatifs, implémentables sur l'ordinateur de bord d'un satellite et pouvant offrir certains avantages au cours de son fonctionnement. Cependant, comme les propriétés de stabilité de ces algorithmes reposent sur des modèles un axe du satellite, la synthèse de lois de commande complètes, calculées en utilisant un modèle satellite trois axes est nécessaire. Afin de déterminer les paramètres de ces lois de commande, les conditions de synthèse introduites au Chapitre 4 sont utilisées, en ajoutant des contraintes spécifiques à la modélisation trois axes. La structure désirée au niveau de la commande et de l'adaptation est ainsi prise en compte. Les lois de commande obtenues en appliquant cette procédure sont intégrées par la suite dans un simulateur SCAO avancé, contenant un modèle non-linéaire du satellite. La présentations des résultats obtenus à l'aide de ce simulateur, ayant permis la validation des essais en vol des algorithmes de commande que nous proposons, conclut ce manuscrit.

Chapitre 1

Problématique de contrôle d'attitude - application aux satellites Myriade

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre nous proposons au lecteur une introduction à la problématique de commande à temps variant qui restera le fil conducteur de nos travaux de recherche développés dans la suite du manuscrit. Nous détaillons ici une approche classique utilisée avant nos travaux et fondée sur la commutation du correcteur.

Nous présentons ainsi dans un premier temps les caractéristiques générales du SCAO Myriade. Le concept de "mode" de fonctionnement est introduit et les actionneurs utilisés à l'intérieur du mode normal (MNO), phase de fonctionnement à laquelle nous nous intéressons, sont brièvement décrits.

L'étape de modélisation des éléments qui composent la boucle de contrôle d'attitude est ensuite présentée. A ce stade on met en évidence la possibilité d'utiliser des modèles linéaires pour décrire la dynamique du satellite. On remarque cependant les limitations introduites par les roues à réaction – actionneurs utilisés dans le mode MNO – et le besoin d'éviter leur saturation en vitesse, afin de garantir la commandabilité du satellite.

En tenant compte de cette contrainte, les spécifications de performance pour la boucle fermée font ressortir la nécessité de mettre en place une stratégie de commande à temps variant, afin de pouvoir couvrir l'intégralité de la plage de fonctionnement attribuée au mode MNO. Une fois ce besoin introduit, deux stratégies de commande à temps variant sont présentées : la première, développée par le CNES et actuellement implémentée sur les satellites de la famille Myriade, est basée sur la commutation entre deux lois de commande, selon la valeur de l'erreur de pointage. Une approximation sous forme LPV de cette loi, développée par l'ONERA, permettant d'améliorer une partie de ses caractéristiques, est finalement présentée et une analyse des avantages et inconvénients de ces techniques conclut ce chapitre.

1.2 Présentation de la filière Myriade

Au cours de cette étude nous nous intéressons aux satellites de la gamme Myriade (voir The Myriade series (sep 2013); Goudy (2011)¹). Cette plateforme ayant été développée par le CNES, nous avons pu avoir accès à des informations concernant la modélisation, les équipements utilisés et les principes de fonctionnement du logiciel de bord. Plusieurs satellites de la gamme Myriade étant en vol et exploités par le CNES, ce choix a aussi permis de viser l'essai en vol des algorithmes développés dans le cadre de la thèse. Si l'apport de ces contributions se relevait significatif d'un point de vue opérationnel, ces nouveaux algorithmes pourraient être utilisés dans le cadre du développement de la nouvelle filière, Myriade Evolutions (The Myriade Evolution series, sep 2013).

Le développement de Myriade a été décidé par le CNES et inscrit dans les priorités de l'agence spatiale dès janvier 1998. Le but identifié de cette nouvelle plateforme était d'offrir à la communauté spatiale un moyen d'accès à l'espace dans des délais et à des coûts réduits, pour des applications prioritairement scientifiques mais aussi technologiques ou démonstratives de services futurs. Dans le prolongement de Proteus (Proteus Series, sep 2013), le concept de Myriade en diffère toutefois dans le sens où il ne s'agit pas de développer un concept unique multi-mission, mais plutôt de privilégier l'adaptation d'un concept de référence pour répondre aux exigences de différentes missions.



FIGURE 1.1 – Demeter - premier satellite sur plateforme Myriade

Les avancées technologiques et notamment la miniaturisation de l'électronique ont rendu en effet possible la réalisation de missions disposant d'un haut degré de performance dans des volumes réduits. Myriade recourt ainsi largement aux composants commerciaux. Le gain de masse permet aussi de disposer de solutions de lancement à des coûts faibles, soit en tant que passager principal sur un petit lanceur (Vega, Dniepr), soit en tant que passager auxiliaire sur un plus gros lanceur (Ariane 5 ou Soyouz avec le plateau Asap).

Myriade met ainsi à la disposition des utilisateurs :

- un ensemble de chaînes fonctionnelles permettant de constituer une plate-forme dotée d'options, et qui, complétée d'une charge utile formeront des satellites pour une masse typique de 100 à 150 kg, la ligne

1. Toutes les informations présentées dans ce chapitre, traitant des plateformes CNES et des équipements utilisés sont issues de cet ouvrage, ainsi que des sites internet mentionnés.

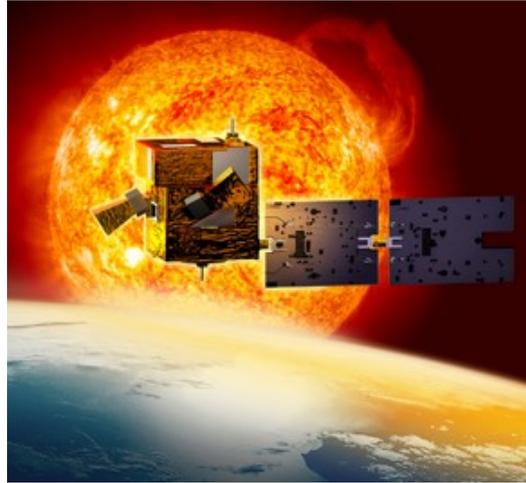


FIGURE 1.2 – Le satellite Picard

de produits Myriade pouvant s'adapter aux orbites basses avec tout type d'inclinaison ;

- un segment sol pour l'acquisition des données scientifiques, la commande et le contrôle des satellites ;
- des outils pour l'analyse des missions, la conception des satellites, la validation.

Parmi les mission scientifiques utilisant ou ayant utilisé cette plateforme nous pouvons citer (Missions Myriade, sep 2013) :

- Demeter - étude des perturbations ionosphériques dues aux phénomènes géophysiques naturels tels que les tremblements de terre, les éruptions volcaniques ou les tsunamis ;
- Parasol - étude des nuages et des aérosols pour mieux comprendre le climat de la Terre ;
- Picard - mesure du diamètre solaire, de sa rotation différentielle et de la constante solaire ;
- Microscope - test du Principe d'équivalence entre la masse pesante et la masse inerte ;
- Taranis - étude des phénomènes d'émission lumineuse et leur association avec des phénomènes d'émissions de rayons gamma.

Le CNES a aussi signé des accords de partenariat avec Thales Alenia Space et Astrium, permettant à ces 2 compagnies d'utiliser les concepts développés pour proposer le développement d'applications propres. Plusieurs missions commerciales utilisent ainsi la structure Myriade : Alsat 2A et 2B - Algérie, Ssat - Chili, Vn RedSat - Vietnam. Finalement, cette plateforme est aussi utilisée dans le cadre de missions financées par la Direction générale de l'armement (DGA) : Essaim, Spirale, Elisa, ce qui montre sa versatilité.

Dans notre étude nous utilisons dans un premier temps des modèles de Demeter (Figure 1.1, voir aussi (Demeter, sep 2013)). Premier satellite de la série Myriade, sa mission a pris fin et il a été désorbité en 2011. Son modèle est maintenant ouvert à la communauté scientifique (Pittet et Arzelier, 2006) et il constitue un cas d'application intéressant car sa dynamique fait intervenir des modes flexibles, liés à la présence de plusieurs mats qui faisaient partie de la charge utile embarquée. Nous considérons ensuite le cas d'application du satellite Picard (Figure 1.2, voir aussi (Picard, sep 2013)), dans le but de proposer des algorithmes à tester dans le cadre des expérimentations en fin de vie (Picard News, sep 2013).

1.3 Architecture SCAO

Comme dans le cas de tous les satellites, le fonctionnement sur orbite des satellites Myriade est décomposé en plusieurs phases : phase de mise à poste depuis la séparation du lanceur, phase de contrôle d'orbite, phases mission et phase de survie en cas de panne. A chacune de ces phases correspond un certain mode de fonctionnement, caractérisé par des objectifs spécifiques de pointage qui doivent être satisfaits en utilisant des outils matériels (actionneurs, capteurs) et logiciels dédiés. Plusieurs sous-modes avec des algorithmes de contrôle et d'estimation d'attitude dédiés peuvent également être utilisés, afin de satisfaire des performances spécifiques. Durant les trente dernières années, le nombre de modes SCAO a été réduit et l'architecture SCAO typique contient maintenant trois ou quatre modes. Dans ce contexte de simplification de l'architecture logicielle, les travaux que nous présentons visent à fournir de nouveaux algorithmes de commande permettant de couvrir l'intégralité du mode "mission" et d'unifier ainsi les deux sous-modes actuellement implémentés sur les satellites Myriade.

En revenant à la description de cette plateforme, la définition de son architecture a été guidée par des critères de minimisation du coût de développement et d'adaptation de chaque mission. Pour cela, une commonalité entre les modes a été recherchée. Cela a conduit à avoir un mode commun entre l'acquisition et la survie. Ainsi, l'architecture s'articule autour de quatre modes fonctionnels :

- MAS - mode acquisition /survie - assure le contrôle du satellite à la fois en acquisition initiale (suite au lancement) et en survie (en cas de fonctionnement anormal) ;
- MGT - mode grossier de transition - mode de transition entre le mode acquisition/survie et le mode normal ;
- MNO - mode normal - mode dans lequel le satellite remplit sa mission ;
- MCO - mode contrôle d'orbite - réalisation des manœuvres de correction de l'orbite.

L'enchaînement de ces modes à partir du mode lancement (MLT) est représenté dans la Figure 1.3 et le Tableau 1.1 illustre l'utilisation de chaque équipement en fonction des différents modes SCAO.

TABLE 1.1 – Capteurs et actionneurs disponibles dans chaque mode SCAO

Mode SCAO		MLT		MAS		MGT		MNO		MCO	
		ON	OFF	ON	OFF	ON	OFF	ON	OFF	ON	OFF
Capteurs	Capteurs solaires		x	x			x		x		x
	Magnétomètre		x	x		x			x		x
	Capteurs stellaire		x		x		x	x			x
	Gyromètres		x		x		x		x	x	
Actionneurs	Magnéto-coupleurs		x	x		x		x ⁽¹⁾		x ⁽¹⁾	
	Roues		x	x		x		x		x	
	Propulseurs		x		x		x		x	x	

⁽¹⁾ les magnéto-coupleurs ne sont plus utilisés pour le contrôle du satellite mais pour la désaturation des roues

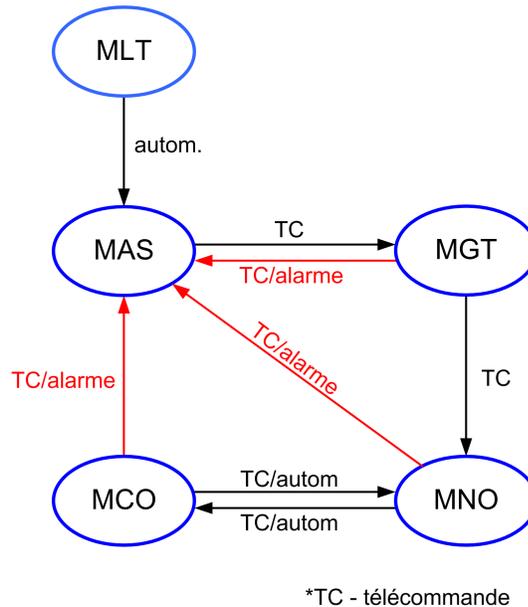


FIGURE 1.3 – Enchaînement des modes SCAO

1.4 Commande par roues à réaction à l'intérieur du mode MNO

Nous nous intéressons dans ce manuscrit à la commande d'attitude à l'intérieur du mode MNO, ce mode étant celui où la mission du satellite se déroule et où, par conséquent, les performances requises en terme de pointage sont les plus élevées.

Comme illustré dans le Tableau 1.1, dans le mode MNO on dispose de deux types d'actionneurs, dont les caractéristiques sont résumées ci-dessous.

- Roue à réaction - dont la fonction de base est de créer des couples par la modification de la vitesse de rotation de son volant d'inertie. Cette accélération ou décélération produit, suivant le principe physique d'action/réaction, un couple suivant l'axe de rotation du volant d'inertie directement appliqué à l'opposé sur la plateforme. Ce type d'actionneur peut alors saturer, c'est à dire atteindre une limite supérieure ou inférieure en vitesse, par exemple si les couples appliqués sont toujours de même signe. Il faut alors utiliser un autre actionneur à bord pour ramener la vitesse dans une plage admissible. Ces actions de réduction de la vitesse absolue de la roue, appelées "désaturations", se font par l'application d'un couple antagoniste fourni par un autre système - les magnéto-coupleurs.
- Magnéto-coupleur - constitué d'une bobine qui génère un moment magnétique lorsqu'elle est parcourue par un courant électrique. L'interaction avec le champ magnétique terrestre crée ensuite un couple, perçu par le satellite comme extérieur, ce qui rend possible la désaturation des roues à réaction.

A l'intérieur du mode MNO le satellite est ainsi contrôlé par trois roues à réaction, une sur chaque axe satellite. Grâce à la loi de commande de ces actionneurs, la position angulaire du satellite est asservie sur une consigne délivrée à partir des télécommandes de guidage fournies par le sol. Une fois cette consigne rejointe, l'influence des couples perturbateurs externes – qui font varier la vitesse du satellite – est compensée par des variations appropriées des vitesses des roues à réaction. On réalise ainsi un transfert, dont la capacité est limitée par la



FIGURE 1.4 – Actionneurs utilisés dans le mode MNO de Myriade - magnéto-coupleur (à gauche) et roue à réaction (à droite)

vitesse maximale de ces actionneurs, entre le moment cinétique du satellite et celui des volants d'inertie. Cependant, cette action n'a pas d'influence sur le moment cinétique total, i.e. celui du système "satellite + roues à réaction". En revanche, comme le couple généré à l'aide des magnéto-coupleurs est perçu comme extérieur à la structure, ces actionneurs permettent d'agir sur le moment cinétique total et sont ainsi utilisés pour désaturer les roues à réaction. Dans cette architecture, celles-ci peuvent alors être vues comme les actionneurs principaux, dans le sens où elles sont utilisées directement pour le contrôle d'attitude. C'est pourquoi nous traitons, au cours de nos travaux, le problème de commande par roues à réaction. Notons que cette restriction du cadre d'étude revient à supposer que les roues ne vont pas saturer à cause des couples perturbateurs (l'utilisation des magnéto-coupleurs n'étant alors pas nécessaire). Le sujet de l'utilisation simultanée des roues à réaction et des magnéto-coupleurs pour le contrôle d'attitude a aussi été abordé récemment et nous pouvons notamment citer Trégouët (2012), qui réalise une étude complète à ce sujet.

En revenant aux équipements utilisés dans le mode MNO, présentés dans le Tableau 1.1, on peut souligner l'absence de gyromètres qui implique la nécessité d'avoir une mesure continue de l'attitude par le capteur stellaire. Notons également qu'à l'intérieur du mode MNO l'erreur d'attitude est toujours comprise entre -25 et $+25$ degrés sur chaque axe, le passage en mode survie étant activé si un de ces seuils est franchi. A l'entrée en mode MNO, le dépointage est compris entre -20 et 20 degrés et la vitesse entre -0.15 et 0.15 degrés par seconde.

Sur la base de ces considérations, le schéma général de commande utilisé au cours de notre étude est représenté sur la Figure 1.5, où θ et ω représentent respectivement la position et la vitesse angulaire du satellite. Le but de nos recherches est alors de trouver une loi de commande qui, à partir de la position mesurée θ_m et de la vitesse estimée ω_e , calcule un couple de commande C_c , de manière à ce que la référence (θ_r, ω_r) soit asservie, en dépit de la présence du couple perturbateur C_p .

1.4.1 Modèle satellite 1 axe

Pour la structure de commande ainsi définie, nous présentons ci-dessous les éléments de modélisation permettant de mettre en place un simulateur Matlab/Simulink® du système physique, ainsi que de disposer de modèles pour la synthèse de lois de commande. Nous considérons dans un premier temps le cas simplifié d'un modèle 1 axe du satellite Demeter, qui sera utilisé dans les Chapitres 2 et 4.

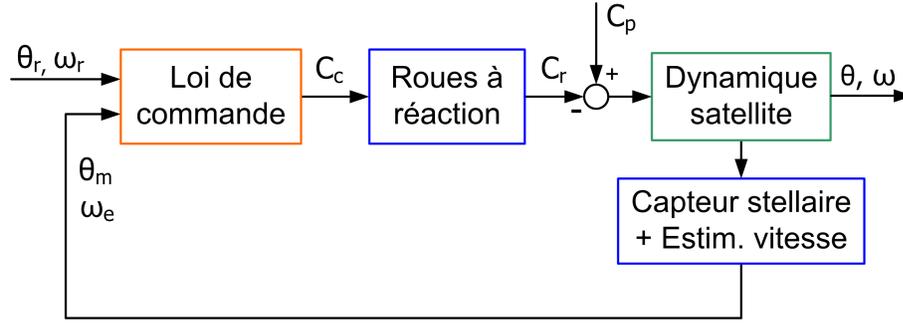


FIGURE 1.5 – Schéma général de commande d'attitude par roues à réaction

1.4.1.1 Dynamique satellite

Les équations 1-axe du mouvement d'un satellite rigide peuvent s'écrire sous la forme

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \frac{1}{J} C_t, \quad (1.1)$$

où J représente l'inertie, C_t le couple total actionnant sur le satellite et θ et ω sa position et vitesse angulaire respectivement. Ce modèle met en évidence la représentation linéaire classique sous forme de "double intégrateur" - la vitesse est proportionnelle à l'intégrale du couple et la position à l'intégrale de la vitesse. A partir de cette équation, la représentation sous forme d'état et la fonction de transfert peuvent être obtenues facilement. Nous avons ainsi :

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_t \quad ; \quad \frac{\theta(s)}{C_t(s)} = \frac{1}{Js^2}. \quad (1.2)$$

En prenant en compte les modes souples, représentés par l'état η , on obtient un modèle de satellite flexible (Biannic et al., 2011) :

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = C_t + \ddot{\eta} \\ \ddot{\eta} = \gamma_f \ddot{\theta} - c_f \dot{\eta} - k_f \eta \end{cases} \quad (1.3)$$

pouvant se représenter sous forme de schéma fonctionnel comme l'illustre la Figure 1.6. On retrouve alors le comportement de type double intégrateur auquel s'ajoute la dynamique liée aux modes flexibles.

Les équations (1.3) peuvent être réécrites sous forme d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c_f}{J-\gamma_f} & -\frac{k_f}{J-\gamma_f} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_f J}{J-\gamma_f} & -\frac{k_f J}{J-\gamma_f} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \\ \rho \\ \eta \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{J-\gamma_f} \\ 0 \\ \frac{\gamma_f}{J-\gamma_f} \\ 0 \end{pmatrix}}_B C_t, \quad (1.4)$$

la matrice A ayant deux valeurs propres égales à zéros et une paire de valeurs propres complexes conjuguées, de pulsation naturelle et amortissement :

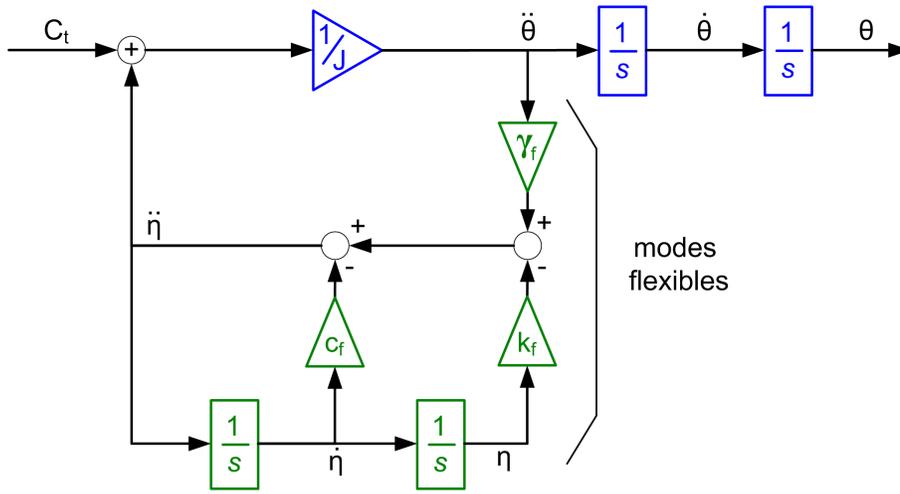


FIGURE 1.6 – Schéma-bloc du modèle satellite

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_f J}{J - \gamma_f}} \quad , \quad \zeta = \frac{c_f}{2} \sqrt{\frac{J}{(J - \gamma_f) k_f}}. \quad (1.5)$$

Pour le modèle 1 axe de Demeter que nous considérons, les valeurs numériques des différents coefficients sont :

$$J = 31.38 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad k_f = 6.9 \quad c_f = 0.026 \quad \gamma_f = 18, \quad (1.6)$$

d'où en résulte :

$$\omega_n = 4.02 \text{ rad/s} \quad , \quad \zeta = 7.67 \cdot 10^{-3}. \quad (1.7)$$

La fonction de transfert entre le couple et la position s'écrit ainsi :

$$H_{\text{sat},x}(s) = \frac{0.07473s^2 + 0.001943s + 0.5156}{s^4 + 0.06097s^3 + 16.18s^2} = \frac{0.1449s^2 + 0.0038s + 1}{31.38s^2(0.0618s^2 + 0.0038s + 1)}. \quad (1.8)$$

Remarque : Comme nous nous intéressons à la commande à l'intérieur du mode MNO, où l'écart d'attitude par rapport à la position d'équilibre est toujours inférieur à 25 degrés, les modèles linéaires que l'on vient d'introduire donnent une description fidèle de la dynamique satellite.

1.4.1.2 Roue à réaction

Le couple de commande C_r est délivré au satellite par une roue à réaction, dont nous avons décrit le principe de fonctionnement en début de cette section. Le modèle de cet actionneur (Pittet et Arzelier, 2006) est représenté sur la Figure 1.7, où la fonction de transfert $H_{\text{roue}}(s)$, représentant la dynamique de la roue, a pour expression :

$$H_{\text{roue}}(s) = \frac{1.214s + 0.7625}{s^2 + 2.40s + 0.7625}. \quad (1.9)$$

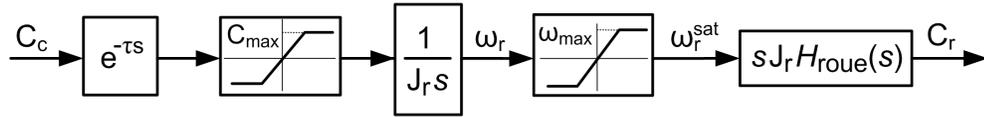


FIGURE 1.7 – Modèle de la roue à réaction

Par ailleurs, les valeurs numériques des différents paramètres sont :

$$\tau = 0.1 \text{ s} \quad J_r = 0.0041 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad C_{\max} = 5 \text{ mN} \quad \omega_{\max} = 293 \text{ rad/s.} \quad (1.10)$$

On observe sur le schéma bloc ci-dessus que le couple appliqué au satellite, C_r , est proportionnel à la dérivée de la vitesse de rotation. Ce modèle met aussi en évidence deux saturations de la roue à réaction : en couple et en vitesse de rotation. La dernière est critique, car lorsque la roue tourne à vitesse maximale ($\pm 293 \text{ rad/s} \approx 2800 \text{ rpm}$) le couple généré est, en régime stationnaire, nul. Le satellite devient alors non contrôlable, ce qui est critique car il est instable en boucle ouverte (modèle type double intégrateur). Au cours du fonctionnement du satellite, la saturation en vitesse de l'actionneur doit ainsi être absolument évitée.

Le modèle représenté sur la Figure 1.7 introduit cependant un certain conservatisme, car le signal ω_r peut devenir arbitrairement grand, sans que cela corresponde à la réalité physique. Pour améliorer ce modèle nous proposons l'utilisation d'un bloc de type "intégrateur saturé", directement implémentable sous Simulink. Le modèle ainsi modifié est représenté dans la Figure 1.8.

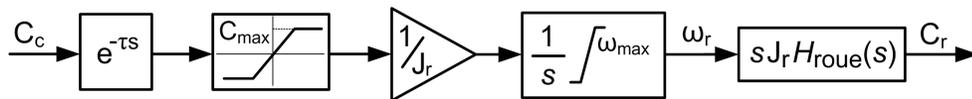


FIGURE 1.8 – Modèle de la roue à réaction - utilisation du bloc "intégrateur saturé"

Les différences entre ces deux représentations sont illustrées sur la Figure 1.9, où sont représentées les réponses obtenues avec les deux modèles, le même signal C_c étant appliqué en entrée. Les indices 1 et 2 des différents signaux correspondent aux modèles donnés sur les Figure 1.7 et 1.8 respectivement. On peut observer que l'utilisation de l'intégrateur saturé permet d'éviter le comportement de type "wind-up" généré par la présence du signal $\omega_{r,1}$, pouvant augmenter sans limite. Les réponses obtenues avec le deuxième modèle sont ainsi plus proches du comportement physique du système et - par rapport au premier modèle - moins pessimistes.

1.4.1.3 Capteur stellaire et estimateur de vitesse

La position angulaire du satellite est mesurée par un capteur stellaire. Ce dernier introduit un retard τ_m qui peut varier entre 300 et 700 ms et délivre un signal entaché de bruit que l'on peut modéliser par un bruit blanc centré, de variance $\sigma_b^2 = 9.4 \cdot 10^{-11}$ (Pittet et Arzelier, 2006) :

$$\theta_m(t) = \theta(t - \tau_m) + b(t). \quad (1.11)$$

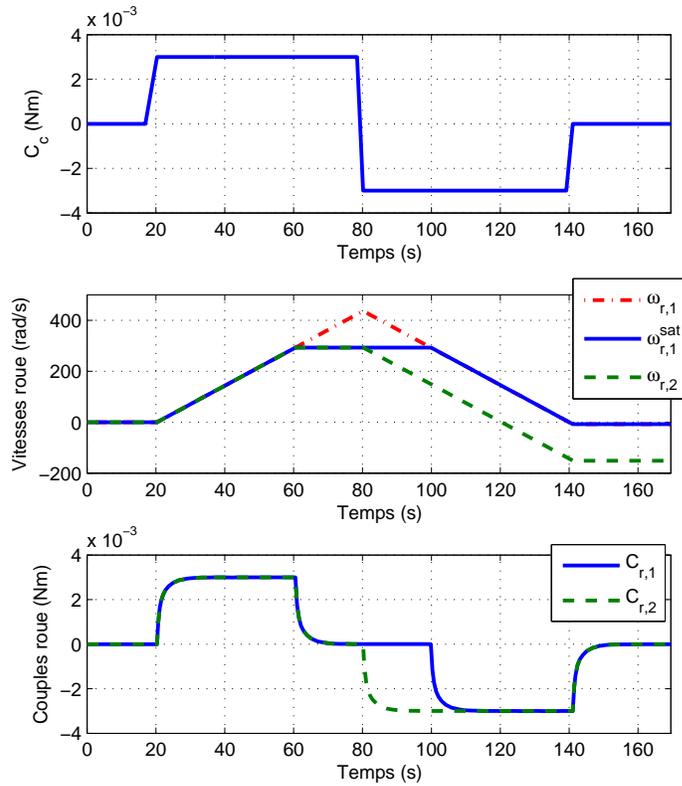


FIGURE 1.9 – Réponses temporelles avec les deux modèles de la roue à réaction

D'autre part, la mesure n'est pas toujours disponible (éblouissement du champ de vue par la lune, par exemple), ce qui nécessite la mise en place d'une stratégie traitant ce manque d'information.

Les gyromètres n'étant pas utilisés à l'intérieur du mode MNO, la mise en place d'un estimateur est nécessaire afin de disposer d'une information sur la vitesse angulaire du satellite. L'estimateur implémenté sur les satellites Myriade est construit autour d'une pseudo-dérivation de la position angulaire :

$$\omega_e = \frac{s}{1 + \tau_v s} \theta_m, \quad (1.12)$$

avec la valeur numérique de la constante de temps $\tau_v = 0.5$.

1.4.2 Synthèse d'un correcteur LTI - $C_0(s)$

Comme nous l'avons déjà souligné dans les sections précédentes, la dynamique du satellite sur la plage de fonctionnement considérée (erreur de pointage inférieure à 25 degrés) peut être décrite par un modèle linéaire. La synthèse de correcteurs peut alors être abordée en utilisant un large panel de méthodes : nous pouvons citer par exemple des techniques désormais bien connues comme la synthèse H_2 (Zhou et al., 1996), H_∞ (McFar-

lane et Glover, 1992; Gahinet, 1994; Duc et Font, 1999) ou par placement de pôles (Andry et al., 1983; Chilali et Gahinet, 1996). Des développements récents permettent aussi de trouver des correcteurs optimisant de tels critères sous contraintes d'ordre et de structure (Gumussoy et al., 2009; Arzelier et al., 2011; Apkarian et Noll, 2006). Finalement, étant donné la présence de modes flexibles dans le modèles, des techniques spécifiques à cette classe de systèmes peuvent être utilisées (Cavallo et al., 2008; Loquen et al., 2012; Guy et al., 2012).

Pour Demeter, à partir des spécifications de performance :

- bande passante en boucle fermée 0.01 Hz ;
- erreur statique inférieure à 0.04 degrés ;
- rejet des perturbations sur la commande ;
- atténuation du mode flexible à -6dB ;
- évitement des saturations en couple et en vitesse de la roue à réaction .

un correcteur linéaire a été obtenu dans un premier temps, par optimisation d'un critère mixte H_2/H_∞ avec une contrainte sur le placement des pôles (Pittet et al., 1999; Pittet et Fallet, 2002) , en s'appuyant sur la formulation de ces critères sous forme LMI (Scherer et al., 1997; Chilali, 1996). Nous notons $C_0(s)$ ce correcteur, dont l'expression est présentée dans la Section 1.4.3. Remarquons que, du point de vue du critère considéré il est optimal. La boucle fermée contenant le modèle linéaire du satellite et le correcteur $C_0(s)$ décrit ainsi le fonctionnement nominal du système.

1.4.2.1 Réponse à dépointage faible

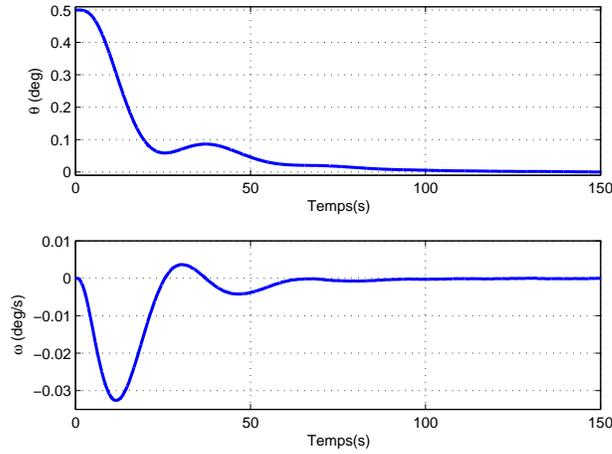
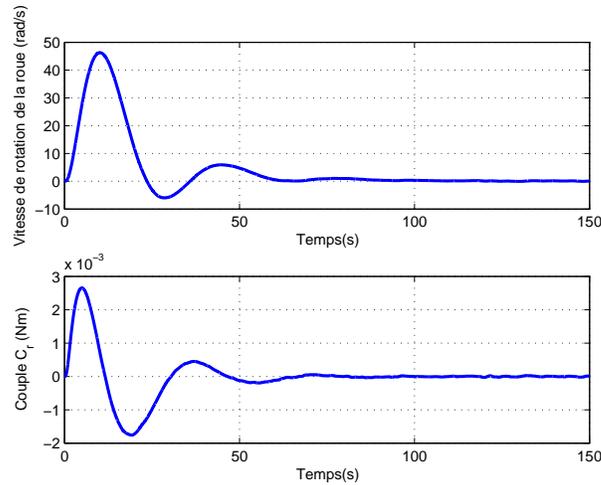
Pour illustrer le comportement engendré par l'utilisation du correcteur $C_0(s)$, nous présentons ci-dessus des résultats obtenus avec un simulateur Simulink. La boucle fermée représentée sur la Figure 1.5 est implémentée, les modèles des différents blocs étant ceux donnés dans la Section 1.4.1.

Considérons d'abord le cas d'une réponse à des conditions initiales de type dépointage faible : $\theta_0 = 0.5$ deg, $\omega_0 = 0$, avec la référence fixée à zéro. La Figure 1.10 montre l'évolution de l'attitude et de la vitesse du satellite pour cette situation, tandis que la réponse de l'actionneur (couple et vitesse de la roue à réaction) est représentée sur la Figure 1.11. On peut remarquer à partir de ces courbes que la position de référence $\theta_r = 0$ deg est rejointe avec une dynamique "propre", sans dépassement. Il est aussi intéressant d'observer que l'actionneur n'atteint pas les niveaux de saturation, et reste ainsi dans sa plage de fonctionnement linéaire.

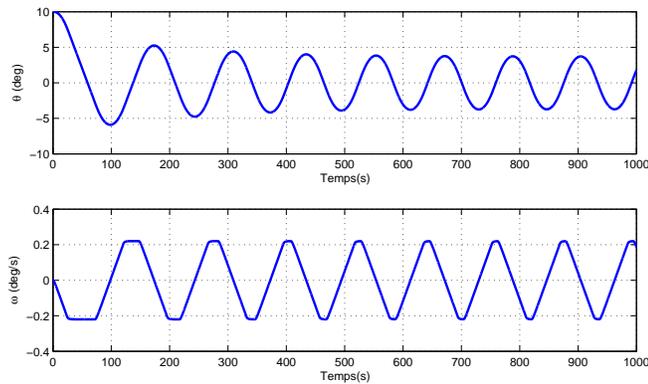
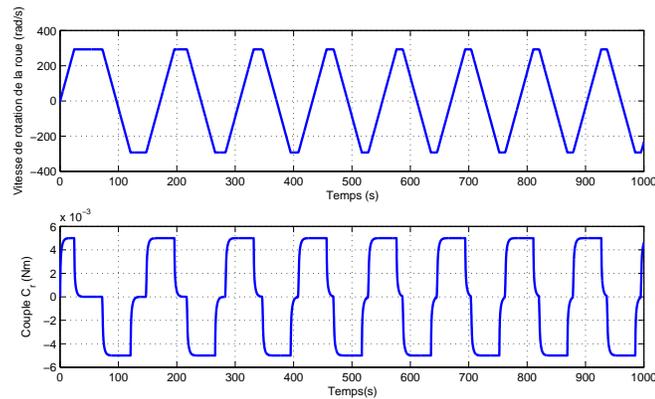
1.4.2.2 Réponse à dépointage fort : besoin d'un correcteur variant dans le temps

Considérons maintenant des conditions initiales de type dépointage fort : $\theta_0 = 10$ deg, $\omega_0 = 0$ deg/s. Les réponses en attitude et vitesse satellite sont représentées sur la Figure 1.12, tandis que la Figure 1.13 montre la vitesse de rotation de l'actionneur et le couple généré par celui-ci.

Ces résultats de simulation montrent un comportement qui ne pourrait pas être accepté en pratique : un cycle limite d'une grande amplitude apparaît et la position de consigne $\theta_r = 0$ deg n'est pas rejointe. Comme on peut facilement le voir sur la Figure 1.13, ce cycle limite est généré par la saturation en couple et en vitesse de la roue à réaction. Il est ainsi évident que le correcteur $C_0(s)$ ne peut pas être utilisé sur toute la plage de fonctionnement couverte dans le mode MNO. Une stratégie de commande différente doit alors être mise en place.

FIGURE 1.10 – Réponse en position en vitesse satellite avec le correcteur $C_0(s)$ - faible dépointage initialFIGURE 1.11 – Réponse en vitesse et couple roue avec le correcteur $C_0(s)$ - faible dépointage initial

L'approche standard proposée dans la littérature pour faire face à de telles limitations d'actionneurs est basée sur des techniques de synthèse de type anti-windup – développées au début des années soixante (Fertik et Ross, 1967) et révisées considérablement dans la littérature récente (Tarbouriech et al., 2011; Biannic et Tarbouriech, 2009; Zaccarian et Teel, 2011). L'idée centrale derrière ces stratégies est de concevoir une augmentation du correcteur, sans effet lorsque les saturations ne sont pas atteintes et dont le but est d'assurer des performances satisfaisantes malgré la possible présence de signaux de commande de grande amplitude et rapidement variables dans le temps. Le dispositif anti-windup peut alors être vu comme une boucle supplémentaire conçue *a posteriori* afin de modifier la loi de commande nominale lorsque les saturations apparaissent. Cependant, l'objectif fixé dans le cadre de la conception du SCAO Myriade était de mettre en place une stratégie de commande permettant d'éviter les saturations, cette contrainte étant principalement dûe au fait que si la saturation en vitesse est atteinte le satellite devient non-contrôlable. Les approches anti-windup, proposant des

FIGURE 1.12 – Réponse en position et vitesse satellite avec le correcteur $C_0(s)$ - fort dépointage initialFIGURE 1.13 – Réponse en vitesse et couple roue avec le correcteur $C_0(s)$ - fort dépointage initial

modifications pour les cas où les saturations sont atteintes, n'ont ainsi pas été considérées pour implémentation et ne font pas l'objet de cette étude.

La stratégie mise en place sur les satellites Myriade se base sur l'observation qu'à faible dépointage le correcteur $C_0(s)$ garantit le respect des performances nominales et assure l'évitement des saturations. Comme nous venons de le voir, l'application de cette même loi ne peut, en revanche, être envisagée pour des erreurs de grande amplitude. Ceci implique qu'un autre algorithme de commande – moins sollicitant pour l'actionneur – doit être utilisé dans cette situation. On voit ainsi apparaître l'idée d'une commande à temps variant : à cause des limitations du système à commander, le correcteur doit varier selon les conditions de fonctionnement, qui varient au cours du temps.

1.4.3 Loi à commutation

Pour résoudre le problème présenté ci-dessus, la loi de commande développée par le CNES réalise une commutation en fonction de l'erreur de pointage. Quand l'erreur est importante une loi non-linéaire de type biais de vitesse est utilisée. Dès lors que l'erreur de pointage devient faible, l'algorithme de commande des

roues commute vers une loi linéaire classique de type proportionnel-dérivé qui permet de bien maîtriser l'amortissement du système aux petits angles. Un filtre linéaire commun est ajouté en aval de la structure à commutation. La boucle fermée avec le schéma de commande ainsi constitué est représentée sur la Figure 1.14.

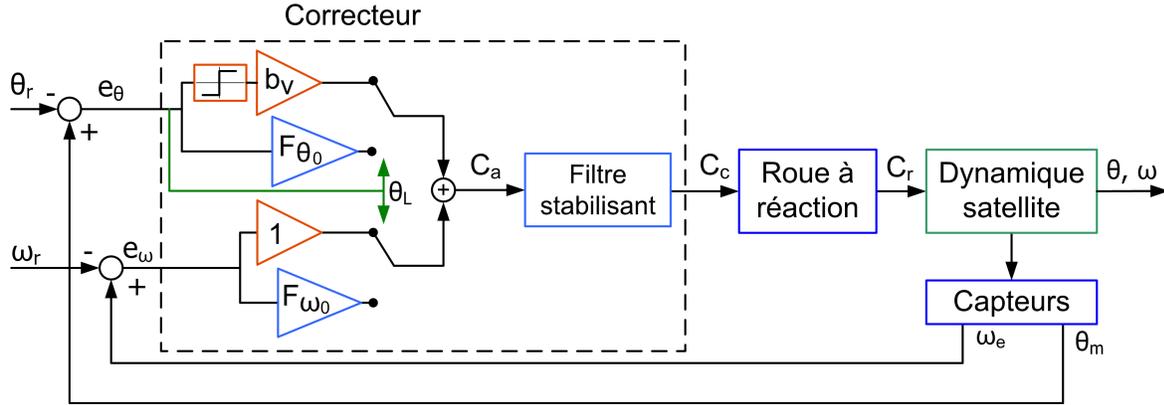


FIGURE 1.14 – Boucle fermée basée sur la loi de commande à commutation

Remarquons que dans cette structure, l'algorithme complet utilisé à faible dépointage est défini par la mise en série du filtre linéaire et des gains F_{θ_0} , F_{ω_0} . Cette connexion constitue ainsi le correcteur $C_0(s)$:

$$C_0(s) = H_{\text{filtre}}(s) \cdot \begin{bmatrix} F_{\theta_0} & F_{\omega_0} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

introduit dans les sections précédentes et optimal du point de vue du critère H_2/H_∞ considéré.

1.4.3.1 Commutation dépointage fort / dépointage faible

Lorsque le dépointage est grand, la loi de commande utilisée, de type biais de vitesse, s'écrit :

$$C_a = e_\omega + b_v \cdot \text{sign}(e_\theta) \quad , \quad |e_\theta| > \theta_L, \quad (1.14)$$

où $e_\omega = \omega_e - \omega_r$ et $e_\theta = \theta_m - \theta_r$ représentent l'erreur de vitesse et de pointage respectivement, b_v représente le biais de vitesse et θ_L le seuil de commutation.

Cette loi permet de diminuer l'erreur d'attitude, avec un effort limité pour la roue à réaction. En effet, on montre que l'erreur en vitesse converge vers $-b_v$ si l'erreur de pointage est positive et vers b_v si cette dernière est négative. De plus, lorsque la vitesse de consigne est rejointe le couple commandé est nul, ce qui permet d'éviter la saturation de la roue. Cette loi est appliquée tant que le dépointage est supérieur au seuil θ_L , car une application sur tout le domaine de fonctionnement, pour une erreur d'attitude allant jusqu'à zéro, provoquerait l'apparition d'oscillations en boucle fermée (comportement de type "chattering"). La valeur du seuil θ_L et du biais de vitesse b_v doivent ainsi être choisies afin de satisfaire un compromis entre le temps de convergence de la vitesse du satellite et la valeur maximale atteinte par la roue à réaction.

La loi de type proportionnel-dérivé, utilisée lorsque le dépointage devient faible (inférieure au seuil θ_L) s'écrit :

$$C_a = F_{\theta_0} \cdot e_\theta + F_{\omega_0} \cdot e_\omega \quad , \quad |e_\theta| \leq \theta_L, \quad (1.15)$$

où F_{θ_0} et F_{ω_0} représentent respectivement le gain proportionnel (en position) et dérivé (en vitesse).

Une condition importante à respecter lors de la commutation entre les lois (1.14) et (1.15) est la continuité du couple calculé C_a . En supposant que lors de la commutation la vitesse de consigne b_v a été rejointe, cette condition de continuité s'écrit :

$$F_{\theta_0} \cdot \theta_L = F_{\omega_0} \cdot b_v \Leftrightarrow \frac{\theta_L}{b_v} = \frac{F_{\omega_0}}{F_{\theta_0}}. \quad (1.16)$$

Pour Demeter, les valeurs numériques des paramètres de la loi à commutation sont réglés de la manière suivante :

$$b_v = 0.015 \text{ deg/s} \quad \theta_L = 0.3 \text{ deg} \quad F_{\theta_0} = 0.1 \quad F_{\omega_0} = 2. \quad (1.17)$$

Le dernier élément de la structure de commande à commutation est le filtre linéaire stabilisant, garantissant l'optimalité du correcteur à faible dépointage :

$$C_c = H_{\text{filtre}}(s)C_a, \quad (1.18)$$

défini par la fonction de transfert :

$$H_{\text{filtre}}(s) = \frac{9.117s^2 + 4.371s + 0.2891}{s^4 + 4.113s^3 + 3.788s^2 + 1.347s}. \quad (1.19)$$

1.4.3.2 Réponses aux conditions initiales

1.4.3.2.1 Fort dépointage, faible vitesse initiale L'utilisation de cette structure de commande permet de résoudre le problème des réponses aux grand dépointages, comme l'illustre la Figure 1.15. On peut ainsi observer qu'à partir de la position initiale $\theta_0 = 10$ degrés, le satellite évolue vers la position de référence $\theta_r = 0$, avec une vitesse constante, $b_v = 0.015$ deg/s, atteinte après un régime transitoire du deuxième ordre relativement rapide par rapport à l'horizon de simulation. Lorsque le seuil $\theta_L = 0.3$ degrés est atteint, on commute vers la loi proportionnel-dérivé, ce qui permet de garantir un bon amortissement et de rejoindre la position désirée.

La Figure 1.16 montre que pour les conditions initiales considérées les niveaux de saturation de la roue à réaction sont loin d'être atteints (vitesse maximale 30 rad/s sur 293 et couple maximal 1mN sur 5). Remarquons aussi qu'avec ce type de loi, l'effort demandé à l'actionneur est indépendant de l'amplitude initiale du dépointage. En effet, la dynamique de l'actionneur en début de réponse ($t = 0 \dots 100$ s sur la Figure 1.16) dépend seulement de la valeur de la vitesse angulaire par rapport à la vitesse de biais. Une fois que la vitesse satellite atteint la valeur b_v , le couple délivré est nul (phase de pilotage en vitesse - $t = 100 \dots 650$ s) et la dynamique finale ($t = 650 \dots 750$ s) dépend seulement de la valeur du seuil de commutation.

1.4.3.2.2 Dépointage faible, forte vitesse initiale Un des problèmes qui se pose avec l'utilisation de la stratégie de commande présentée ci-dessus est la continuité de la commande calculée lors de la commutation entre les deux lois. En effet, la condition (1.16), qui garantit cette propriété, se base sur l'hypothèse que lorsque le dépointage franchit le seuil θ_L la vitesse du satellite est égale à b_v . Ceci revient à supposer que le transitoire nécessaire pour atteindre cette vitesse est plus court que celui nécessaire pour que le dépointage atteigne le seuil θ_L . Lorsque le dépointage initial est important, comme dans le cas présenté dans le paragraphe antérieur,

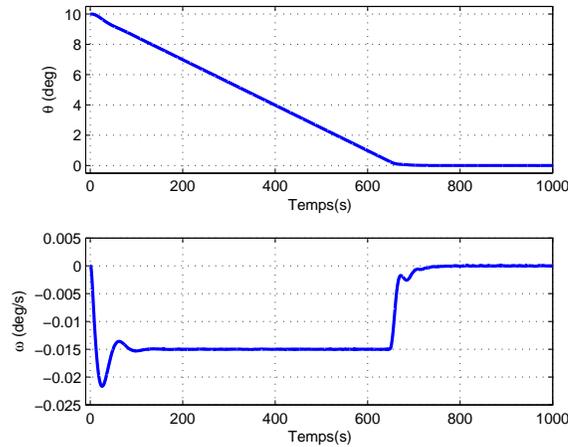


FIGURE 1.15 – Réponse en position et vitesse satellite avec la loi à commutation - fort dépointage initial

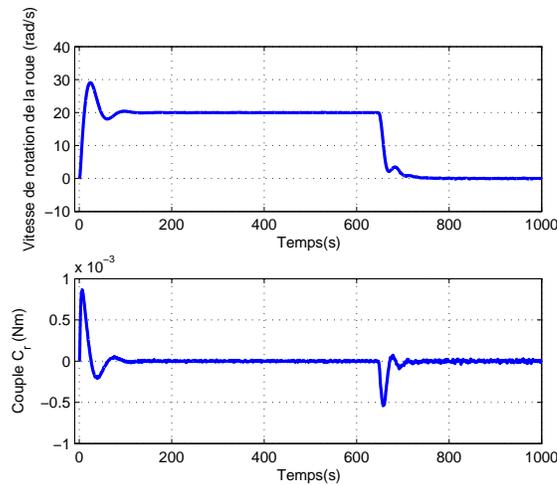


FIGURE 1.16 – Réponse en vitesse et couple roue avec la loi à commutation - fort dépointage initial

cette hypothèse est généralement respectée. Il existe cependant des situations où la commutation entre les lois biais de vitesse et proportionnel-dérivé se fait sans que la vitesse satellite ait atteint la valeur désirée, ce qui génère une discontinuité au niveau de la commande calculée en sortie de la structure à commutation.

Pour illustrer ce comportement, nous considérons la réponse à des conditions initiales définies par un dépointage légèrement supérieur au seuil de commutation : $\theta_0 = 0.4$ deg et une vitesse initiale fortement négative : $\omega_0 = -0.1$ deg/s. L'évolution de la position et de la vitesse angulaire du satellite à partir de ces conditions initiales, pour une référence nulle, est représentée dans la Figure 1.17. On observe que les seuils de commutation, représentés par les traits horizontaux discontinus sont franchis plusieurs fois ($t = 1, 8, 21$ et 58 secondes respectivement). Lors des trois premières commutations, la vitesse satellite a une valeur différente de b_v , ce qui fait que la commande C_a en sortie de la structure à commutation présente des discontinuités, comme

on peut le voir sur la Figure 1.18. Le filtre stabilisant (1.19) étant placé en aval de l'algorithme à commutation, le couple C_c commandé à l'actionneur est continu et les discontinuités au niveau de C_a correspondent à des changements brusques de pente sur C_c . Ainsi, même si ce signal est rendu continu, les discontinuités introduites par la structure à commutation posent un problème dans le fonctionnement pratique car elles induisent des dynamiques abruptes au niveau de l'actionneur.

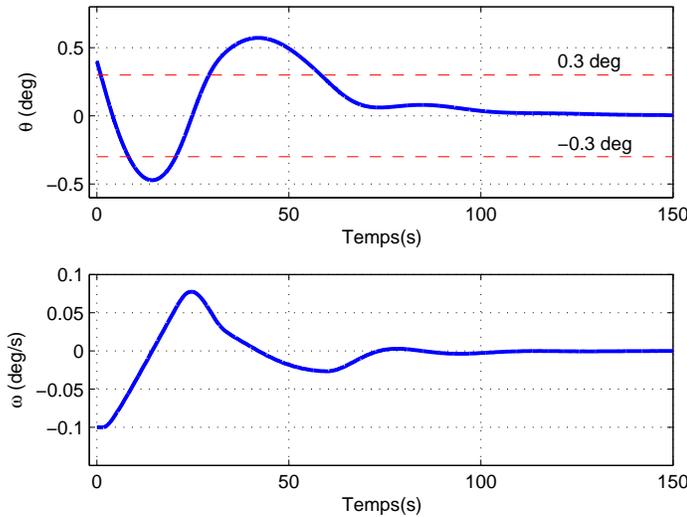


FIGURE 1.17 – Réponse en position et vitesse satellite avec la loi à commutation - faible dépointage, forte vitesse initiale

1.4.3.3 Améliorations possibles

La loi de commande présentée dans cette section répond à la nécessité d'avoir un correcteur variant dans le temps par la mise en place d'une structure à commutation, des lois de type biais de vitesse et proportionnel-dérivé respectivement étant utilisées selon la valeur de l'erreur de pointage. Ce type de structure permet de limiter ainsi l'effort de l'actionneur et d'éviter les saturations. L'algorithme peut alors être utilisé sur toute la plage de fonctionnement couverte en mode MNO et garantit le respect des spécifications en terme de robustesse et performances formulées pour les satellites Myriade, sur lesquels il est actuellement utilisé avec succès.

Malgré ces avantages significatifs, cette approche présente plusieurs inconvénients. Il faut remarquer tout d'abord que la présence de la commutation dans l'algorithme fait que l'obtention d'une preuve formelle de stabilité asymptotique globale est assez difficile². La validation doit alors se faire au moyen de campagnes de simulation qui s'avèrent complexes puisque 2 algorithmes "élémentaires" doivent être validés - la loi à biais de vitesse et la loi proportionnel-dérivé. La commutation entre ces deux algorithmes pose aussi, comme nous venons de le montrer, un problème au niveau de la continuité des signaux intervenant dans la boucle fermée. Lié à cette problématique, on remarque que si on veut modifier cette loi de commande, on doit agir sur

2. Vu la nature de la loi à commutation, une telle preuve sort du cadre classique des systèmes linéaires invariants et pourrait être établie en utilisant le formalisme des systèmes hybrides (Goebel et al., 2012).

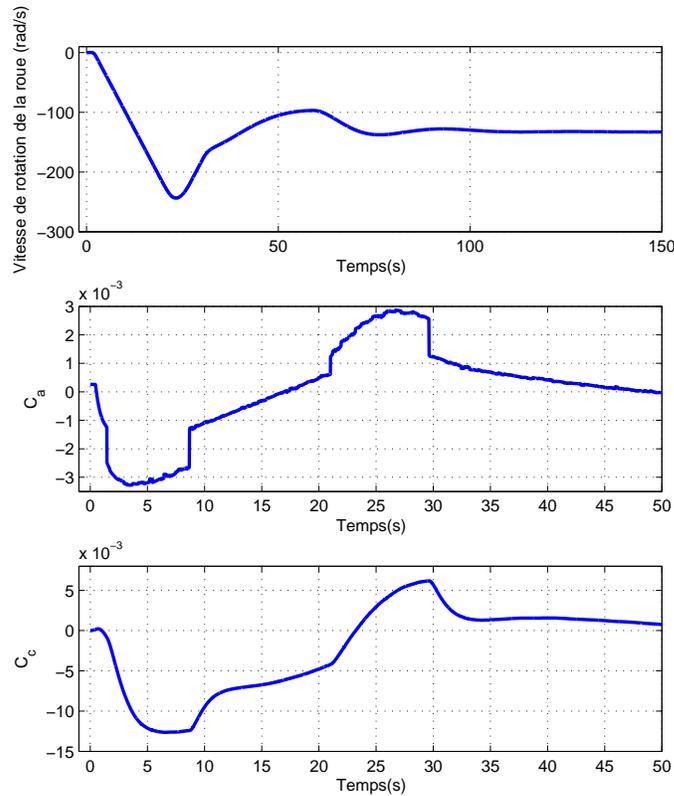


FIGURE 1.18 – Réponse de la roue à réaction avec la loi à commutation - faible dépointage, forte vitesse initiale

plusieurs paramètres, afin de satisfaire la condition de continuité (1.16). Par exemple, la modification du gain F_{θ_0} entraîne le changement d'au moins un autre paramètre de (1.16). Le réglage de cette loi de commande s'avère ainsi délicat.

1.4.4 Approximation LPV de la loi à commutation

Afin de contourner les difficultés citées plus haut, une approximation sous forme quasi-LPV de la loi à commutation est proposée dans Biannic et al. (2011). Cette nouvelle formulation permet de garantir la continuité des signaux de commande en boucle fermée, car la loi de commande LPV implémente une transition lisse entre le pilotage à grand et faible dépointage. Un autre avantage apporté par la formulation LPV est la possibilité d'utiliser des techniques d'analyse dédiées, permettant de prouver la stabilité et la robustesse en boucle fermée.

1.4.4.1 Loi de commande et boucle fermée quasi-LPV

En partant de la loi de commande à commutation, on observe que les équations (1.14 - 1.15) peuvent s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$C_a = f(e_\theta) + g(e_\theta) \cdot e_\omega, \quad (1.20)$$

où les fonctions f et g sont définies par :

$$f(e_\theta) = \begin{cases} F_{\theta 0} \cdot e_\theta & , \text{si } |e_\theta| \leq \theta_L \\ b_v \cdot \text{sign}(e_\theta) & , \text{si } |e_\theta| > \theta_L \end{cases} ; \quad g(e_\theta) = \begin{cases} F_{\omega 0} & , \text{si } |e_\theta| \leq \theta_L \\ 1 & , \text{si } |e_\theta| > \theta_L \end{cases} . \quad (1.21)$$

On peut alors observer qu'avec les valeurs numériques données dans (1.17), les deux fonctions sont discontinues, mais qu'une compensation exacte a lieu si lorsque $e_\theta = \theta_L$, la vitesse de consigne a été atteinte : $e_\omega = b_v$. Afin de garantir la continuité de la commande sous toute condition de fonctionnement, les fonctions modifiées, \hat{f} et \hat{g} , représentées dans la Figure 1.19 sont introduites :

$$\hat{f}(e_\theta) = \lambda(\rho e_\theta) \cdot F_{\theta 0} e_\theta \quad ; \quad \hat{g}(e_\theta) = 1 + \lambda(\rho e_\theta) \cdot (F_{\omega 0} - 1), \quad (1.22)$$

où $\rho = F_{\omega 0}/\theta_L$ et λ est un opérateur non-linéaire défini comme suit :

$$\lambda(v) = \begin{cases} 1 & , \text{si } |v| \leq 1 \\ \frac{1}{|v|} & , \text{si } |v| > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda(\rho e_\theta) = \begin{cases} 1 & , \text{si } |e_\theta| \leq 1/\rho \\ \frac{1/\rho}{|e_\theta|} & , \text{si } |e_\theta| > 1/\rho \end{cases} . \quad (1.23)$$

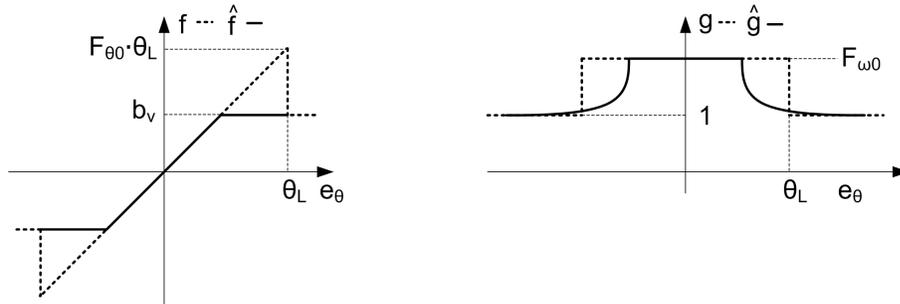


FIGURE 1.19 – Fonctions f , g et leurs approximations continues - \hat{f} , \hat{g}

En substituant dans (1.20) les fonctions f et g par leurs approximations respectives, \hat{f} et \hat{g} , nous obtenons l'expression de la commande :

$$C_a = \hat{f}(e_\theta) + \hat{g}(e_\theta) \cdot e_\omega = (F_{\theta 0} e_\theta + (F_{\omega 0} - 1) e_\omega) \cdot \lambda(\rho e_\theta) + e_\omega. \quad (1.24)$$

La boucle fermée non-linéaire peut ainsi être représentée sous forme de schéma bloc, comme sur la Figure 1.20, où le bloc Σ représente le modèle de la boucle ouverte contenant le satellite flexible, la roue à réaction, le capteur stellaire, l'estimateur de vitesse et le filtre stabilisant. Le comportement temps-variant généré par l'utilisation de la loi de commande (1.24) est dû au paramètre λ , qui varie – en tenant compte des valeurs

numériques données dans (1.17) – entre $\lambda = 0.006$, pour $e_\theta = e_\theta^{\max} = 25$ degrés et $\lambda = 1$, pour $e_\theta \leq 1/\rho = \theta_L/F_{\omega_0} = 0.15$ degrés. Comme λ varie de manière continue en fonction de e_θ , cela garantit la continuité du signal de commande, pour toute condition de fonctionnement.

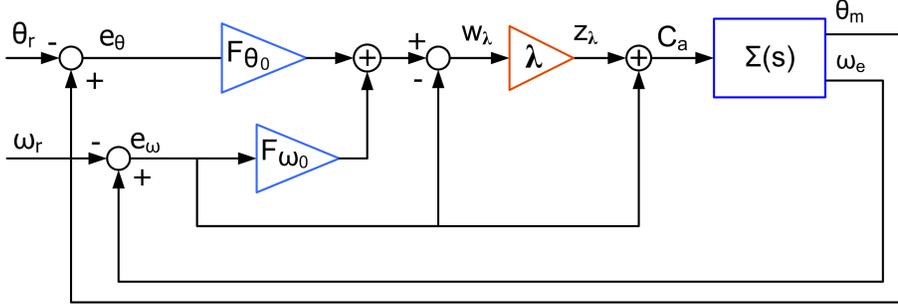


FIGURE 1.20 – Schéma bloc boucle fermée

Observons que lorsque $\lambda = 1$ la loi LPV (1.24) est identique à la loi proportionnel-dérivé (1.15) utilisée dans la structure à commutation. Pour analyser le comportement de la loi (1.24) lorsque $\lambda < 1$, supposons, afin de simplifier les notations, que l'erreur de pointage soit positive. Ainsi, en remplaçant $\lambda = \theta_L/(F_{\omega_0}e_\theta)$ nous obtenons, après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} C_a &= (F_{\theta_0}e_\theta + (F_{\omega_0} - 1)e_\omega) \cdot \frac{\theta_L}{F_{\omega_0}e_\theta} + e_\omega \\ &= \frac{F_{\omega_0}e_\theta + (F_{\omega_0} - 1)\theta_L}{F_{\omega_0}e_\theta} \cdot \left(\frac{F_{\theta_0}\theta_L e_\theta}{F_{\omega_0}e_\theta + (F_{\omega_0} - 1)\theta_L} + e_\omega \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Cette relation peut être vue comme une loi de type biais de vitesse, dont le gain et la valeur du biais varient en fonction de l'erreur de pointage. Lorsque le dépointage est grand, $e_\theta \rightarrow \infty$, on obtient :

$$C_a = \frac{F_{\theta_0}\theta_L}{F_{\omega_0}} + e_\omega. \quad (1.26)$$

D'après la condition de continuité (1.16), on note que la relation ci-dessus est identique à la loi (1.14) utilisée dans le cadre de la stratégie à commutation. Cependant, à la différence de cette stratégie, la valeur du biais de vitesse diminue dans (1.25) avec e_θ , ce qui fait que la vitesse du satellite se réduit progressivement avant l'entrée dans le "mode" proportionnel-dérivé.

1.4.4.2 Etude de la stabilité

La loi de commande LPV ainsi établie, l'analyse de stabilité sur la base de fonctions de Lyapunov polynomiales paramétrées (*PDLF* - parameter dependent Lyapunov functions) est proposée par Biannic et al. (2011). L'utilisation des fonctions paramétrées est nécessaire dans ce cas, car le choix d'une fonction constante, $V(x) = x^T P x$ ne permet pas de prouver la stabilité de la boucle fermée.

La preuve de stabilité se base sur la recherche d'une fonction de Lyapunov polynomiale de la forme

$$V(x, \delta) = x^T P(\delta)x, \quad P(\delta) = P_0 + \delta P_1 + \dots + \delta^r P_r, \quad (1.27)$$

où $\delta = 1 - \lambda$ est le paramètre variant. x représente ici l'état du système autonome en boucle fermée, dont la représentation sous forme standard donnée sur la Figure 1.21 peut être facilement obtenue à partir du schéma bloc représenté dans la Figure 1.20.

Pour prouver la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov, la fonction V doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} V(x, \delta) > 0 &\Leftrightarrow P(\delta) > 0 \\ \frac{d}{dt}V(x, \delta) < 0 &\Leftrightarrow A_c^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A_c(\delta) + \nu \frac{\partial P}{\partial \delta}(\delta) < 0 \quad , \forall \delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}], \nu \in [\underline{\nu}, \bar{\nu}], \end{aligned} \quad (1.28)$$

où l'on a noté $\nu = d\delta/dt$.

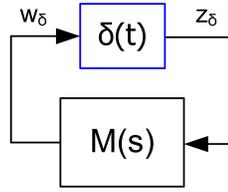


FIGURE 1.21 – Forme standard pour l'analyse de stabilité

L'algorithme proposé pour trouver une telle fonction se base sur le maillage de l'intervalle de variation de δ et le calcul d'une fonction unique permettant de vérifier les conditions (1.28) sur tous les points du maillage et pour les valeurs extrêmes de ν . Grâce à l'expression polynomiale de la fonction $P(\delta)$, ce calcul peut se faire par résolution LMI. Une fois une telle fonction obtenue, sa validité entre les points du maillage est testée par un calcul de valeurs propres.

Concernant les domaines de variation des paramètres δ et ν , nous avons tout d'abord, en tenant compte du fait que le dépointage reste inférieure à 25 degrés :

$$\begin{aligned} |\theta| < 25 \text{ deg} &\Rightarrow \lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] = [0.006, 1] \\ \delta = 1 - \lambda &\Rightarrow \delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}] = [0, 0.994] \end{aligned} \quad (1.29)$$

En exploitant la relation qui existe entre le paramètre δ et l'erreur de pointage, on peut également déduire une borne sur la vitesse de variation de ce paramètre. Aux petits angles, $|\theta| < 1/\rho = \theta_L/F\omega_0$, nous avons $\lambda \equiv 1$ et $\delta \equiv 0$ donc $\nu = \dot{\delta} = 0$. Lorsque $|\theta| > 1/\rho$ la relation suivante est valable :

$$\delta = 1 - \frac{1}{|\rho\theta|} \Rightarrow \dot{\delta} = \frac{1}{\rho} \frac{|\dot{\theta}|}{\theta^2} \leq \rho|\dot{\theta}|. \quad (1.30)$$

Finalement, en tenant compte du fait que la vitesse du satellite est maintenue, pour de grands dépointages, autour de $\pm b_v = 0.015 \text{ deg/s}$, les bornes suivantes sont obtenues :

$$\nu \in [\underline{\nu}, \bar{\nu}] = [-0.1, 0.1]. \quad (1.31)$$

Avec les domaines de variation ainsi spécifiés, l'algorithme d'analyse de stabilité décrit ci-dessus a été

TABLE 1.2 – Résultats de l'analyse de stabilité

Ordre de la fonction de Lyapunov	δ	ν
0	$[0, 0.47] \cup [0.47, 0.994]$	$\pm\infty$
1	$[0, 0.994]$	$[-0.1, 0.01]$
2	$[0, 0.994]$	$[-0.1, 0.1]$

appliqué, les résultats étant résumés dans le Tableau 1.2. On observe tout d'abord qu'une fonction de Lyapunov constante ne permet pas de prouver la stabilité sur l'ensemble du domaine considéré. Ceci se justifie par le fait que la vitesse de variation n'est pas prise en compte dans cette analyse. En revanche, si le domaine est correctement partitionné, il est possible de prouver la stabilité localement. L'utilisation d'une fonction de Lyapunov affine en δ permet de garantir la stabilité sur l'ensemble du domaine, mais avec une borne supérieure diminuée pour la vitesse de variation du paramètre. Finalement, l'utilisation d'une fonction de deuxième ordre permet de garantir la stabilité pour toute trajectoire admissible vérifiant (1.29), (1.31).

1.4.4.3 Réponses temporelles

Pour illustrer l'influence de la loi LPV formulée dans les paragraphes précédents, nous présentons ci-dessous les réponses temporelles obtenues pour la simulation du système en boucle fermée représenté sur la Figure 1.20. Les mêmes conditions initiales que celles considérées précédemment sont choisies.

Les Figures 1.22 et 1.23 montrent les réponses obtenues pour un dépointage initial de 10 degrés. Pour la première partie de la simulation les réponses obtenues avec la loi LPV et celle à commutation sont très proches, le satellite se déplaçant vers sa position d'équilibre avec une vitesse constante, atteinte après un court régime transitoire. A partir de $t \approx 400$ s on remarque que, pour le cas de la loi LPV, la vitesse satellite commence à diminuer lentement. Cette baisse de vitesse est justifiée, comme l'indique (1.25), par la baisse de l'erreur de pointage. Comme la vitesse satellite diminue plus tôt, le temps de réponse observé dans ce cas est légèrement plus grand que celui obtenu avec la loi à commutation. En revanche, comme le passage en mode proportionnel-dérivé ($\lambda = 1$) s'effectue pour la loi LPV avec une vitesse plus petite que la valeur du biais de vitesse, la phase de freinage nécessaire pour atteindre la position de référence est moins intense. Ce comportement peut être observé au niveau du couple roue, sur la Figure 1.23.

Considérons ensuite les conditions initiales $\theta_0 = 0.4$ degrés, $\omega_0 = -0.1$ deg/s. La Figure 1.24 montre l'évolution de la position et vitesse du satellite à partir de ces conditions. Les dynamiques obtenues avec les deux lois sont très proches, la commande LPV générant un dépassement légèrement inférieur. Au niveau de la dynamique actionneur, représentée dans la Figure 1.25, les réponses sont aussi très proches, la vitesse de la roue à réaction ayant une évolution similaire pour les deux cas considérés. On remarque cependant que, à la différence de l'algorithme à commutation, la loi LPV génère une commande C_a qui ne présente pas de discontinuités.

Ces résultats de simulation montrent que l'approximation LPV de la loi à commutation représente une alternative intéressante, car elle permet de dépasser les inconvénients liés aux changements brusques de dynamique générés par la loi initiale.

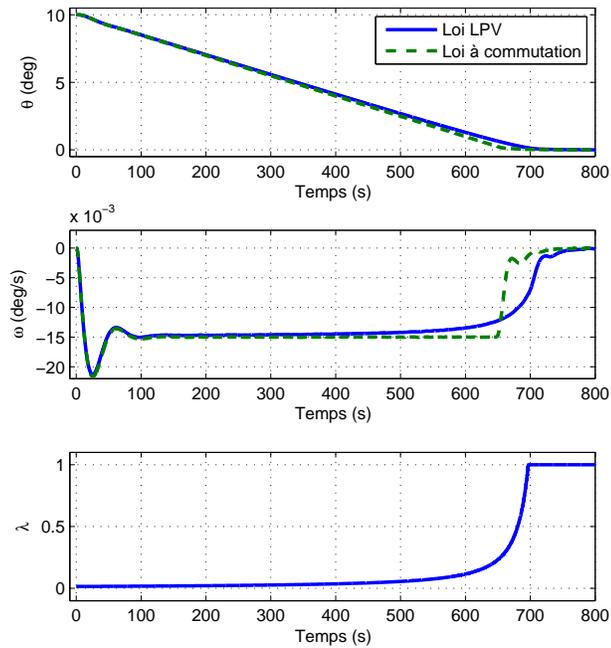


FIGURE 1.22 – Réponse en position et vitesse satellite avec la loi LPV - fort dépointage initial

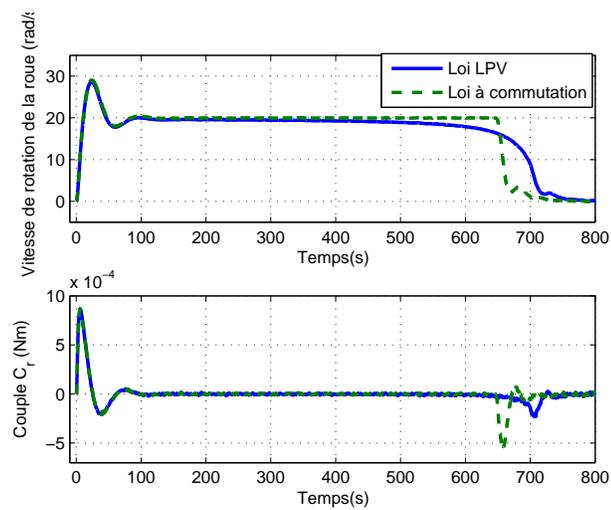


FIGURE 1.23 – Réponse en vitesse et couple roue avec la loi LPV - fort dépointage initial

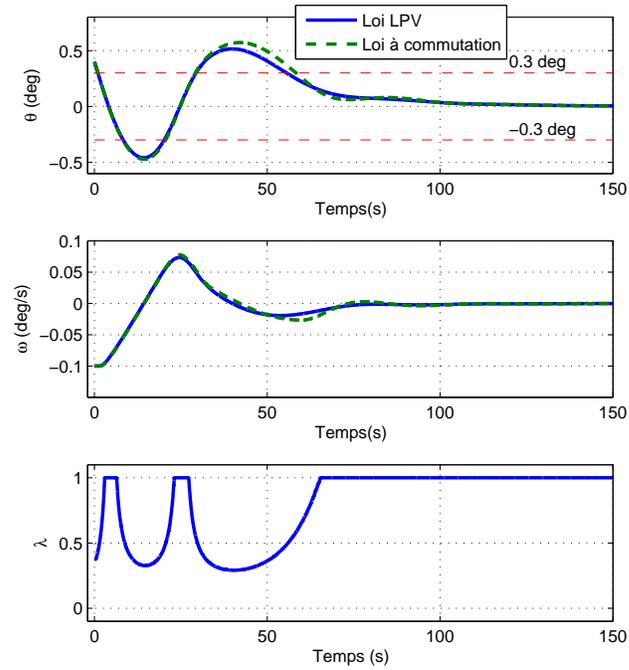


FIGURE 1.24 – Réponse en position et vitesse satellite avec la loi LPV - faible dépointage, forte vitesse initiale

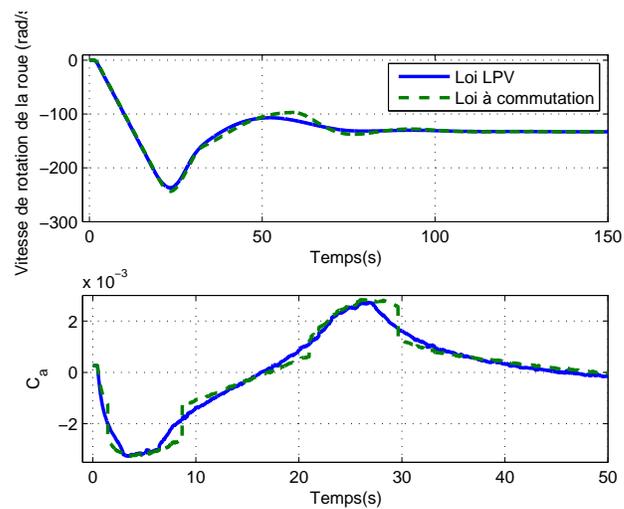


FIGURE 1.25 – Réponse en vitesse et couple roue avec la loi LPV - faible dépointage, forte vitesse initiale

1.5 Conclusions

Ce chapitre a présenté les éléments justifiant la mise en place d'une stratégie à temps variant afin de répondre aux spécifications du contrôle d'attitude à l'intérieur du mode MNO des satellites Myriade. Une première possibilité de satisfaire cette contrainte a été proposée sous la forme d'une loi de commande à commutation proportionnel-dérivé/biais de vitesse en fonction de l'erreur de pointage. Cette approche permet de limiter l'effort de commande lorsque le satellite se trouve loin de la position d'équilibre et de garder un comportement optimal lorsque le dépointage est faible. Plusieurs inconvénients apparaissent néanmoins avec la mise en place d'un tel algorithme, comme la difficulté de prouver la stabilité globale en boucle fermée, la possible apparition de discontinuités sur le signal de commande et les problèmes de réglage liées à l'interdépendance des paramètres des lois proportionnel-dérivé et biais de vitesse.

Une partie de ces inconvénients peut être contournée en approximant cette loi sous forme LPV, en choisissant un paramètre variant qui dépend de l'erreur de pointage. Le signal de commande est alors garanti continu et en utilisant des techniques d'analyse de stabilité associées à la formulation LPV certains résultats de stabilité peuvent être obtenus. Ces propriétés montrent ainsi l'intérêt de la commande LPV pour l'application considérée. Cependant, avec l'outil d'analyse présenté dans ce chapitre, il n'est pas possible de prouver la stabilité en boucle fermée pour le cas où la vitesse satellite est supérieure à la valeur du biais. Le problème d'analyse de stabilité sur tout le domaine de conditions cinématiques couvert en mode MNO reste donc ouvert. Remarquons également que la loi LPV est obtenue par la reformulation de la loi à commutation, ces deux stratégies de commande étant ainsi fortement liées. Par conséquent, en utilisant les outils présentés dans ce chapitre il n'est pas possible de trouver une loi LPV sans disposer d'une loi à commutation "de base".

A partir de ces remarques le chapitre suivant introduit une méthodologie de synthèse basée sur la commande LPV, permettant de mettre en place de nouvelles lois de commande à partir des spécifications en boucle fermée.

Chapitre 2

Commande LPV par modèle de référence

2.1 Introduction

Proches des techniques de "gain-scheduling", les méthodes de synthèse LPV - dont nous rappelons brièvement le formalisme un peu plus loin - ont été introduites dans les années 90 pour prendre en compte plus rigoureusement la nature souvent instationnaire des systèmes à commander. Ce n'est pas dans ce contexte cependant que nous proposons de mettre en oeuvre une telle stratégie ici, puisque le système que nous souhaitons commander est parfaitement stationnaire. En effet, comme nous l'avons mentionné dans le premier chapitre, celui-ci est assimilable à un double intégrateur, si l'on ne tient pas compte des modes souples et des actionneurs. En revanche, les objectifs de pilotage diffèrent en fonction d'un paramètre variant dans le temps : l'erreur de pointage. Ainsi nous avons vu au chapitre précédent qu'une loi de type LPV était parfaitement adaptée à notre problème.

Pour cette raison, on vise, au cours de ce chapitre à développer une méthode de synthèse permettant d'obtenir de nouvelles lois de commande LPV qui couvrent tout le domaine de fonctionnement associé au mode MNO. Pour ce faire, nous proposons une démarche basée sur l'utilisation d'un modèle de référence. Celui-ci décrit le comportement idéal en boucle fermée et permet de spécifier des objectifs de commande qui varient en fonction de l'erreur de pointage. On vise ainsi à trouver une loi de commande telle que, en boucle fermée, le satellite suive le comportement décrit par le modèle de référence. A partir du problème ainsi exprimé, nous proposons une structure de commande sous forme standard, approche qui ouvre la porte à l'utilisation de nombreuses méthodes de synthèse. En partant des éléments introduits dans la première partie de ce chapitre, nous nous orientons vers la synthèse H_∞ polytopique. L'utilisation de cette technique fait intervenir des choix au niveau des modèles utilisés et des filtres de pondération, choix qui sont effectués sur la base de considérations spécifiques à l'application. Finalement, à partir des correcteurs obtenus en utilisant les conditions de synthèse polytopique, des lois de commande couvrant l'intégralité du domaine de fonctionnement souhaité sont calculées par extrapolation. Une loi de commande obtenue en utilisant la procédure de synthèse ainsi développée est testée en simulation, les résultats obtenus illustrant les bonnes performances qu'elle permet d'obtenir, en

termes de respect des performances spécifiées à travers le modèle de référence.

2.2 Courte présentation du formalisme LPV

Les efforts initiaux orientés vers la commande LPV (Packard, 1994; Becker et Packard, 1994; Apkarian et Gahinet, 1995; Apkarian et Biannic, 1995; Wu et al., 1995; Biannic et al., 1997; Helmersson, 1998; Köse et Jabbari, 1999) étaient essentiellement motivés par le besoin de dépasser les inconvénients des approches basées sur la commande à séquençement de gains (gain-scheduling). Plus précisément, on visait à résoudre le problème de perte de performances qui apparaît dans le cas des variations rapides des variables de séquençement (Shamma et Athans, 1990, 1991). Plus récemment, de nombreux efforts ont été dédiés aux améliorations diverses afin de réduire le conservatisme des procédures de synthèse LPV standard (Scorletti et Ghaoui, 1998; Apkarian et Adams, 1998; Wu, 2001; Scherer, 2001; Wang et Balakrishnan, 2002; Wu et Dong, 2006; Scherer et Köse, 2007). Malheureusement, la plupart de ces extensions introduisent de nombreuses variables additionnelles et mènent à des problèmes d'optimisation qui dans certains cas s'avèrent non-convexes et dont la résolution n'est plus envisageable pour plus de trois paramètres. Ces aspects expliquent certainement pourquoi les approches plus classiques, basées sur la commande à séquençement de gains jouissent encore d'un large succès dans les applications pratiques, en particulier dans l'industrie aérospatiale. Les mêmes inconvénients ont également motivé de nombreuses études qui explorent les connexions entre la commande LPV et les méthodes à séquençement de gains (Shamma et Athans, 1991; Rugh et Shamma, 2000). Mentionnons finalement les recherches qui offrent des formalismes grâce auxquels les approches de type "gain-scheduling" peuvent être justifiées d'un point de vue théorique (Rugh, 1991; Shamma et Athans, 1990; Fromion et Scorletti, 2003).

Nous présentons dans cette section les fondements de la modélisation des systèmes sous forme LPV, en exposant brièvement les deux principales formes de représentation. On met ainsi en évidence l'intérêt de chacune d'entre elles, en fonction du problème considéré. Cette courte revue illustre les raisons qui nous ont orientés au cours de nos recherches vers la méthode de synthèse présentée dans la Section 2.3.

2.2.1 Systèmes strictement et quasi LPV

La classe de systèmes LPV, telle qu'elle est introduite dans Shamma et Athans (1991) (étude figurant parmi les premières traitant des modèles LPV), peut être définie par l'ensemble des systèmes admettant une représentation d'état sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad (2.1)$$

où le paramètre θ (scalaire ou vectoriel) varie dans le temps et évolue généralement dans un domaine borné \mathcal{D} . A titre d'exemple, notons que pour les systèmes aéronautiques, auxquels une grande partie des travaux portant sur la commande LPV a été dédiée, on retrouve classiquement la vitesse et l'altitude comme paramètres variants. Comme illustré pour le cas de la loi LPV introduite dans le chapitre précédent, page 25, la vitesse de variation des paramètres est également bornée et nous avons ainsi :

$$(\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{V} \quad (2.2)$$

Une manière classique pour obtenir une représentation LPV d'un système non-linéaire est de linéariser ce dernier autour de différents points d'équilibre, de façon à couvrir le domaine de fonctionnement complet du système initial. Même si cette approche ne fournit qu'une approximation du comportement non-linéaire de départ, elle fonctionne souvent bien dans la pratique, lorsque les paramètres liés au point de fonctionnement varient lentement par rapport à la dynamique propre du système.

Selon une terminologie largement répandue dans la littérature, on parle de système quasi-LPV dans les cas où le paramètre θ du modèle LPV contient une partie (ou la totalité) de l'état du système non-linéaire initial. Pour illustrer cette notion, nous considérons l'exemple du système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2 + x_2 u \end{cases} \quad (2.3)$$

On observe alors facilement qu'en notant $x = [x_1 \ x_2]^T$ le vecteur d'état, ce système s'écrit sous la forme quasi-LPV :

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad (2.4)$$

avec :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & -x_2 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Notons que les représentations (2.3) et (2.5) sont équivalentes. Cet aspect rend la modélisation quasi-LPV très intéressante, car elle permet de représenter exactement une classe très large de systèmes non-linéaires. Grâce à des techniques appropriées, des propriétés telles que la stabilité peuvent alors être évaluées.

2.2.2 Représentations des systèmes LPV

Afin de pouvoir mettre en place différentes techniques de synthèse, une mise en forme supplémentaire des systèmes LPV est nécessaire. Nous présentons ci-dessous, sur la base des études réalisées par Sename et al. (2013); Biannic et Apkarian (1999) les deux principaux types de représentations de ces systèmes : la représentation polytopique et la représentation LFT.

La représentation polytopique

Considérons, afin de simplifier notre exposé, un système LPV autonome défini par l'équation différentielle :

$$\dot{x} = A(\theta)x. \quad (2.6)$$

Déterminer un modèle polytopique associé à ce système revient à chercher N matrices A_1, A_2, \dots, A_N dont l'enveloppe convexe contient $A(\theta)$ pour toute valeur admissible du vecteur de paramètres :

$$\forall \theta \in \mathcal{D}, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0 / \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad A(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i. \quad (2.7)$$

Ces N matrices constituent les sommets du modèle polytopique. Afin de faciliter l'analyse et la synthèse de lois de commande, il convient d'en limiter le nombre, en veillant à ce que le conservatisme du modèle

polytopique par rapport au modèle initial soit limité. Pour illustrer ces aspects, nous considérons l'exemple suivant, basé sur les éléments introduits dans le Chapitre 1.

Exemple 1 Considérons une loi de commande similaire à celle introduite dans la Section 1.4.4, page 24 :

$$C_a = \hat{f}(e_\theta) + \hat{g}(e_\theta) \cdot e_\omega \quad (2.8)$$

où la fonction \hat{f} a la même expression que celle de (1.22), mais \hat{g} dépend du carré du paramètre variant λ :

$$\hat{f}(e_\theta) = \lambda \cdot F_{\theta 0} e_\theta \quad ; \quad \hat{g}(e_\theta) = 1 + \lambda^2 \cdot (F_{\omega 0} - 1). \quad (2.9)$$

Cette dépendance correspond à une décroissance plus accentuée de \hat{g} et donc à une "commutation" plus rapide entre le pilotage à fort et faible dépointage.

Cette loi de commande, appliquée directement (sans filtre stabilisant) sur un modèle satellite de type double intégrateur donne, en considérant une référence nulle, l'équation différentielle de la boucle fermée :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J} (1 + \lambda^2 (F_{\omega 0} - 1)) & \frac{F_{\theta 0}}{J} \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \lambda^2 & b_1 \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad \lambda \in [0.006, 1], \quad (2.10)$$

où λ représente le paramètre variant et les coefficients a_1, a_2, b_1 ont été introduits afin de simplifier les notations.

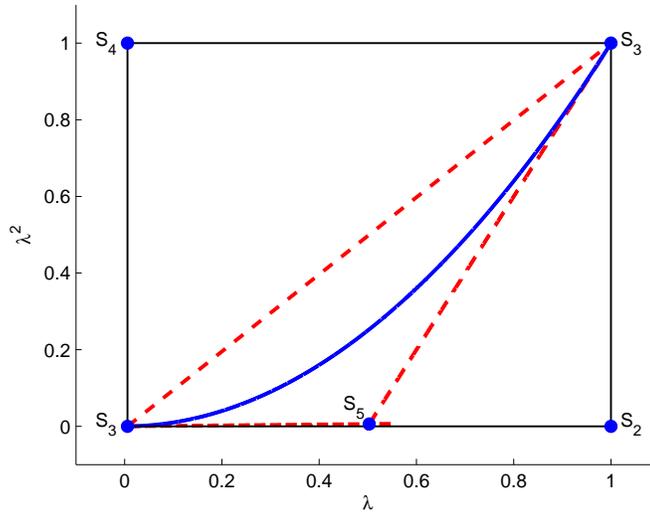
La manière la plus simple d'obtenir une représentation polytopique de ce système est de considérer que λ et λ^2 sont des paramètres indépendants. Comme illustré sur la Figure 2.1, nous obtenons ainsi un encadrement très grossier du domaine d'évolution paramétrique. De ces quatre points, nous pouvons obtenir un premier modèle polytopique à quatre sommets :

$$A(\lambda) \in \mathcal{Co} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + (0.006)^2 a_2 & 0.006 b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + (0.006)^2 a_2 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0.006 b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.11)$$

Comme illustré sur la Figure 2.1, une représentation moins conservatrice peut être obtenue en introduisant un nouveau point $S_5 = [0.503, 0.006]$, situé à l'intersection des tangentes à l'arc de parabole aux points S_1 et S_3 respectivement. Le triangle (S_1, S_3, S_5) couvre ainsi le domaine paramétrique initial et un modèle polytopique moins conservatif peut être obtenu :

$$A(\lambda) \in \mathcal{Co} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + (0.006)^2 a_2 & 0.006 b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + 0.006 a_2 & 0.503 b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.12)$$

De manière similaire, en ajoutant de nouveaux points sous l'arc de parabole il est possible de diminuer le conservatisme du modèle polytopique, en augmentant cependant sa complexité. Remarquons aussi que la couverture polytopique, nécessairement convexe, introduira toujours, pour l'exemple considéré un certain

FIGURE 2.1 – Approximations convexes du domaine (λ, λ^2)

degré de conservatisme.

Plus généralement, tout système LPV dont les paramètres sont liés entre eux par des relations non-linéaires ne peut pas être représenté de manière exacte sous forme polytopique.

La représentation LFT

Considérons maintenant la représentation des systèmes LPV sous forme LFT. De manière générale, le formalisme LFT s'étend bien au-delà de la modélisation des systèmes linéaires à paramètres variants. Introduit dans les années 90 comme un outil de représentation des systèmes linéaires incertains (voir par exemple Doyle et al. (1991); Lambrechts et al. (1993); Belcastro (1998)), il permet aujourd'hui de couvrir une classe très large de systèmes non-linéaires, non-stationnaires et incertains. Représenter ces systèmes sous forme LFT consiste à séparer les éléments "indésirables" et à les grouper dans un opérateur Δ , bouclé autour d'un modèle définissant la dynamique nominale, linéaire et invariante, $G(s)$. Le bloc Δ définit alors une perturbation qui agit sur $G(s)$, comme illustré par la Figure 2.2. Dans le cas des systèmes LPV, l'opérateur Δ , diagonal pas blocs et non stationnaire, contient les paramètres variants du système.

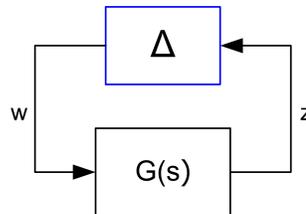


FIGURE 2.2 – Représentation des systèmes sous forme LFT

Une caractéristique importante des modèles LFT est de permettre de représenter de manière exacte tout

système LPV qui dépend de façon polynomiale ou rationnelle des paramètres. Ceci constitue un avantage important par rapport aux modèles polytopiques, qui deviennent conservatifs dès que la dépendance des paramètres n'est plus linéaire. Pour illustrer cette propriété, nous reprenons l'exemple introduit dans la section précédente.

Exemple 2 Considérons le système LPV défini par (2.10) et réécrivons cette équation sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda(b_1x_2 + \lambda a_2x_1) + a_1x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (2.13)$$

A partir de cette expression, le passage à la forme LFT est mis en évidence sur la Figure 2.3, les équations associées à cette représentation pouvant être directement obtenues à partir de (2.13). Le modèle LTI $G(s)$ est ainsi défini par :

$$G(s) : \begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 + w_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ z_1 = b_1x_2 + w_2 \\ z_2 = a_2x_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

et la loi de bouclage :

$$\begin{cases} w_1 = \lambda(t)z_1 \\ w_2 = \lambda(t)z_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

rend le système bouclé variant dans le temps.

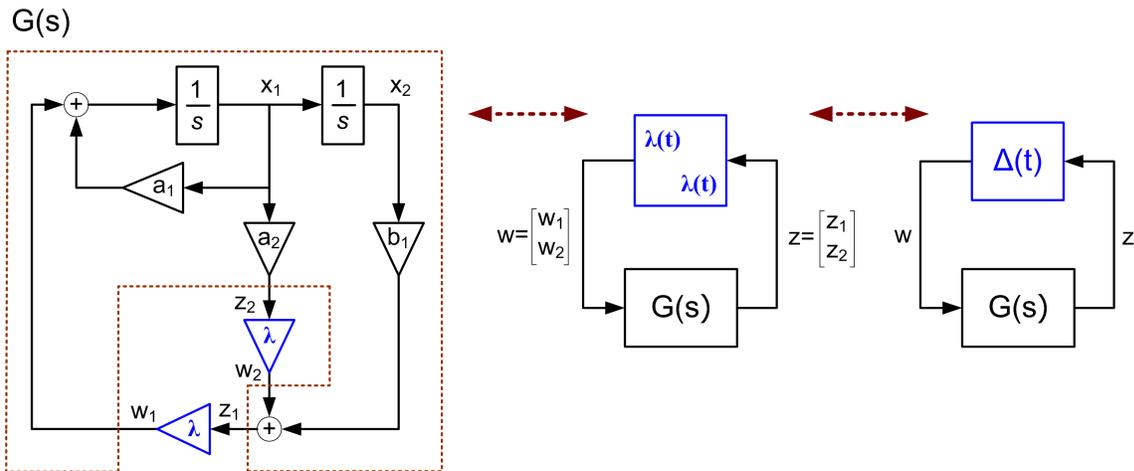


FIGURE 2.3 – Représentation sous forme LFT

On observe que le modèle LFT représente de manière exacte le système LPV initial, ce qui n'était pas le cas des représentations polytopiques (2.11) et (2.12) précédemment considérées. A noter également que le paramètre λ apparaît deux fois dans le bloc Δ de la LFT, dont la taille est ici minimale. Il n'est pas possible en effet de représenter sous forme LFT le système (2.10) en faisant apparaître λ une seule fois.

Concernant la modélisation sous forme LFT, il est aussi utile de remarquer qu'il existe des outils complets, tels que la LFR Toolbox (Magni, 2002; Biannic et al., 2006) ou la Robust Control Toolbox (Balas et al., 2006),

permettant d'obtenir des modèles LFT d'une large classe de systèmes non linéaires et incertains, ainsi que de les manipuler facilement.

2.2.3 Considérations sur les conditions d'analyse - choix d'un type de représentation

Le problème fondamental de synthèse de compensateurs LPV se base sur la connaissance de θ , le vecteur des paramètres variants. La structure haut niveau de la boucle fermée LPV peut alors être représentée comme sur la Figure 2.4, où on a choisi une expression sous forme standard.

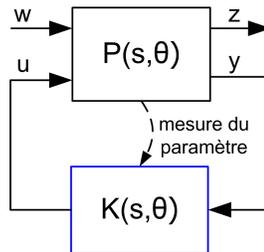


FIGURE 2.4 – Boucle fermée LPV sous forme standard

En outre, si le correcteur reproduit la structure du système à commander, le problème de synthèse peut s'écrire sous forme convexe (Apkarian et Gahinet, 1995), ce qui constitue un avantage important pour la recherche d'une loi de commande. Selon la représentation choisie, la boucle fermée met alors en évidence une interconnexion de deux systèmes polytopiques ou LFT respectivement, illustrée dans la Figure 2.5. Le choix entre ces deux types de représentations doit ainsi se faire en tenant compte non seulement des propriétés de la modélisation du système physique, mais également de celles des méthodes d'analyse et de synthèse qui leurs sont associées.

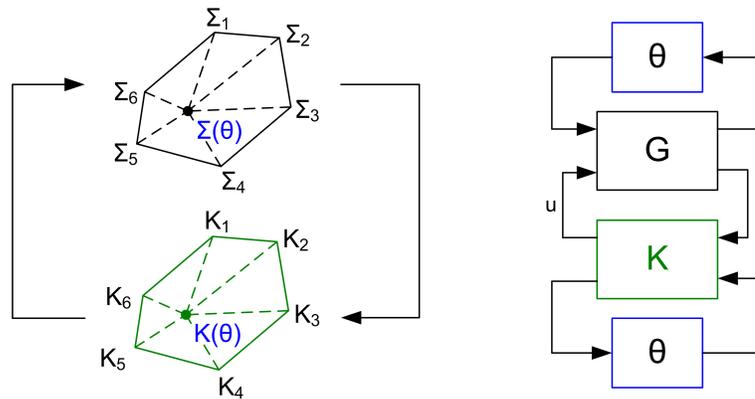


FIGURE 2.5 – Boucle fermée LPV à base de modèles polytopiques et LFT respectivement

La section précédente a mis en évidence un certain avantage offert par les modèles LFT, car ils permettent de représenter de manière exacte tout système LPV qui dépend des paramètres de manière polynomiale ou rationnelle. Cependant, on note que dans le cas d'une dépendance affine les deux représentations sont équivalentes et reproduisent fidèlement le système LPV à partir duquel elles sont obtenues. Nous considérons

maintenant les propriétés des conditions d'analyse et de synthèse et nous intéressons au conservatisme que celles-ci introduisent. A ce sujet, nous présentons dans la suite un résumé de l'étude réalisée par Biannic (2010), dont les résultats sont à la base de nos choix au niveau de la méthode de synthèse utilisée dans la suite du chapitre.

Considérons un système LPV qui affiche une dépendance affine des paramètres, décrit par :

$$\dot{x} = \mathcal{A}(\theta)x \quad (2.16)$$

avec

$$\mathcal{A}(\theta) = A + B\Theta C = \mathcal{F}_l \left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathbf{0} \end{array} \right), \Theta \right), \quad (2.17)$$

qui représente l'interconnexion sous forme LFT du système de représentation d'état $(A, B, C, \mathbf{0})$ avec l'opérateur Θ . Ce dernier est défini par :

$$\Theta(t) = \text{diag}(\theta_1(t)I_{n_1}, \dots, \theta_r(t)I_{n_r}), \quad (2.18)$$

les indices $n_j, j = 1 \dots r$ indiquant combien de fois chaque paramètre scalaire θ_j est répété dans le bloc Θ . On suppose que cet opérateur vérifie également :

$$\|\Theta(t)w(t)\|_2 \leq \|w(t)\|_2, \quad (2.19)$$

ce qui revient à normaliser les paramètres θ_j constituant le vecteur θ .

Compte tenu de la dépendance affine du système par rapport aux paramètres, la description LFT (2.17) est équivalente à la représentation sous forme polytopique :

$$\mathcal{A}(\theta) \in \text{Co}\{A + B\Theta_1 C, \dots, A + B\Theta_N C\}, \quad (2.20)$$

où chaque matrice Θ_i est associée à une combinaison de valeurs extrémales (± 1) des r paramètres indépendants θ_j :

$$\Theta_i = \text{diag}(\epsilon_{i1}I_{n_1}, \dots, \epsilon_{ir}I_{n_r}), \quad \epsilon_{ij} = \pm 1. \quad (2.21)$$

Nous avons donc $N = 2^r$ et on observe que chacune des matrices Θ_i vérifie :

$$\Theta_i^2 = I_q, \quad q = n_1 + n_2 + \dots + n_r. \quad (2.22)$$

La stabilité quadratique du système LPV (2.16) repose sur l'existence d'une matrice symétrique définie positive P , associée à la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, telle que :

$$\forall \theta \in \mathcal{D}, \mathcal{A}(\theta)^T P + P \mathcal{A}(\theta) < \mathbf{0} \Leftrightarrow (A + B\Theta C)^T P + P(A + B\Theta C) < \mathbf{0}. \quad (2.23)$$

Dans le cas de la représentation sous forme polytopique (2.20), cette condition peut s'écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i (A + B\Theta_i C) \right)^T P + P \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i (A + B\Theta_i C) \right) < \mathbf{0}, \text{ où } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \quad (2.24)$$

ce qui conduit à :

$$(A + B\Theta_i C)^T P + P(A + B\Theta_i C) < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.25)$$

Considérons maintenant une modélisation sous forme LFT du système (2.16). Une condition suffisante de stabilité peut alors être obtenue en utilisant le théorème du faible gain (voir, par exemple, Desoer (2009)). En effet, comme Θ vérifie (2.19), si nous avons en plus :

$$\left\| \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathbf{0} \end{array} \right) \right\|_{\infty} < 1, \quad (2.26)$$

alors la stabilité de l'interconnexion LFT (2.17) est vérifiée. D'après le lemme borné réel (Boyd et al., 1994), cette inégalité est satisfaite si et seulement s'il existe une matrice définie positive P telle que :

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -L & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} & -L^{-1} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (2.27)$$

où L est une matrice de scaling qui commute avec Θ : $\forall \Theta \in \mathcal{D}_{\Theta}, \Theta L = L\Theta$. Proposée par Apkarian et Gahinet (1995), l'utilisation des variables de scaling L permet de prendre en compte la structure de l'opérateur Θ et de réduire ainsi le conservatisme des conditions de stabilité. Remarquons également qu'à la différence du cas de la modélisation polytopique, une seule condition permet, lorsque l'on considère la forme LFT de prouver la stabilité. En appliquant le complément de Schur sur cette dernière inégalité nous avons :

$$A^T P + PA + C^T L C + P B L^{-1} B^T P < \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

En introduisant les matrices X_i définies par :

$$X_i = P B L^{-1/2} - C^T L^{1/2} \Theta_i \quad (2.29)$$

nous obtenons, en utilisant la propriété (2.22) et la commutativité de L et Θ_i :

$$X_i X_i^T = P B L^{-1/2} B^T P + C^T L C - P B \Theta_i C - C^T \Theta_i B^T P. \quad (2.30)$$

Il résulte alors, par substitution, que l'inégalité (2.28) peut se réécrire :

$$(A + B\Theta_i C)^T P + P(A + B\Theta_i C) + X_i X_i^T < \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

En comparant les conditions (2.31) et (2.25), associées aux deux type de représentations considérées, il en résulte clairement (puisque $X_i X_i^T > \mathbf{0}$) que la caractérisation de la stabilité sur la base du modèle polytopique

est ici moins conservatrice que celle obtenue sur le modèle LFT. Notons aussi que les conditions que nous venons de présenter constituent le point de départ des méthodes de synthèse associées à chacune des deux représentations. On peut ainsi conclure que la synthèse polytopique est préférable dès que la modélisation associée n'introduit pas de conservatisme excessif par rapport à une représentation LFT. Comme nous l'avons vu plus tôt, c'est le cas dès que la dépendance par rapport aux paramètres est affine. En tenant compte de cette analyse, les résultats présentés dans la suite du chapitre se basent d'un coté sur des modèles LPV affines et de l'autre sur des méthodes de synthèse polytopique.

2.3 Recherche d'une loi de commande assurant le suivi d'un modèle LPV

Dans le contexte du problème de contrôle d'attitude que nous considérons, la synthèse d'une loi de commande LPV apparaît comme difficile, voire non-naturelle, car le modèle satellite considéré est invariant dans le temps. En effet, le caractère temps-variant introduit par les lois présentées dans le Chapitre 1 est lié à la variation des objectifs de commande avec les conditions de fonctionnement. Ainsi, même si le modèle du satellite est LTI, la représentation "satellite + objectifs de commande" peut être vue comme un système variant dans le temps.

2.3.1 Suivi d'un modèle LPV : formulation du problème

L'approche que nous développons au cours de ce chapitre se base sur la représentation de ces objectifs de commande sous la forme d'un modèle de référence à temps variant, qui définit un comportement idéal et qui doit être suivi en boucle fermée. En nous appuyant sur les résultats présentés dans le chapitre précédent, nous choisissons ce modèle sous la forme d'un système LPV, dont la dépendance par rapport aux paramètres variants est affine, car cette classe de systèmes peut être utilisée pour décrire un "bon comportement" du satellite en boucle fermée. Pour soutenir cette affirmation, considérons la représentation d'état suivante, associée à la connexion en boucle fermée du satellite avec la loi de commande LPV présentée dans le chapitre précédent :

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \\ \dot{x}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \vdots \\ (\lambda \cdot (F_{\omega 0} - 1) + 1)B_f & \lambda F_{\theta 0} B_f & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/J \\ 0 \\ A_f \end{pmatrix} C_f \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \\ x_f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda F_{\theta 0} B_f \end{pmatrix} \theta_r \quad (2.32)$$

où le satellite est modélisé par une dynamique de type double intégrateur, J étant son moment d'inertie. x_f représente ici l'état du filtre (1.19) et (A_f, B_f, C_f) les matrices d'état associées à ce filtre. L'attitude de référence est notée θ_r et la vitesse angulaire de référence est supposée ici nulle. Comme l'ont montré les résultats de simulation associés à l'utilisation de la loi LPV à base de ce modèle, celui-ci garantit le respect des spécifications en boucle fermée, en particulier la limitation de la commande lorsque le dépointage est important. Remarquons aussi, dans l'équation ci-dessus, la présence du paramètre variable λ , qui intervient de manière linéaire dans les matrices d'état de la boucle fermée.

En choisissant de représenter les spécifications à respecter en boucle fermée sous la forme d'un modèle de

référence LPV et en tenant compte du caractère invariant du système à commander, le problème de synthèse que nous considérons se formule comme suit :

Problème 1. *Etant donné le système LTI :*

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x}_s = A_s x_s + B_s u_s \\ y_s = C_s x_s \end{cases} \quad (2.33)$$

et le modèle de référence LPV :

$$(M) : \begin{cases} \dot{x}_m = A_m(\theta)x_m + B_m(\theta)u_m \\ y_m = C_m(\theta)x_m \end{cases} \quad (2.34)$$

qui dépend de manière affine du paramètre variant θ , évoluant dans le polytope $\mathcal{D} = \text{Co}(\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\})$, trouver un correcteur LPV, K :

$$(K) : \begin{cases} \dot{x}_K = A_K(\theta)x_K + B_K(\theta)y \\ u_s = C_K(\theta)x_K + D_K(\theta)y \end{cases}, \quad y = [y_s \ y_m]^T \quad (2.35)$$

tel que, en boucle fermée, la sortie du système y_s suive la sortie du modèle de référence y_m .

Une fois une première formulation du problème de commande donnée, une mise en forme est nécessaire en vue de sa résolution. La méthode de synthèse que nous proposons se base sur la forme standard, illustrée sur la Figure 2.4. Cette formulation a l'avantage de fournir un cadre commun à de nombreuses techniques de synthèse, garantissant la stabilité, la robustesse et la performance en boucle fermée. Pour le cas du suivi de modèle que nous traitons ici, la boucle fermée sous forme standard peut se représenter de manière plus détaillée comme illustré sur la Figure 2.6. Remarquons dans un premier temps que le caractère temps-variant de la représentation $P(s, \theta)$ provient seulement du modèle de référence. Dans ce contexte, la sortie de performance z est définie par la différence entre la sortie du système et celle du modèle de référence, $z = y_s - y_m$. Le correcteur $\bar{K}(s, \theta)$ doit alors, à partir de la sortie mesurée y , calculer la commande u , de manière à assurer la stabilité de la boucle fermée et de minimiser l'influence de l'entrée de performance w sur z . A partir de ces considérations l'objectif que nous nous fixons dans ce chapitre peut se formuler de manière formelle. On cherche ainsi un correcteur $K(s, \theta)$ tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

Propriété 1. *La boucle fermée LPV représentée sur la Figure 2.4 est stable pour toute trajectoire admissible de θ dans \mathcal{D} .*

Propriété 2. *La norme \mathcal{L}_2 induite du transfert entre w et z est bornée par un paramètre γ à minimiser :*

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt. \quad (2.36)$$

2.3.2 Synthèse LPV polytopique

Le problème de suivi de modèle se ramène ainsi à un problème "classique" de commande LPV et les différentes techniques de synthèse associées à ce formalisme peuvent alors être utilisées. Comme expliqué

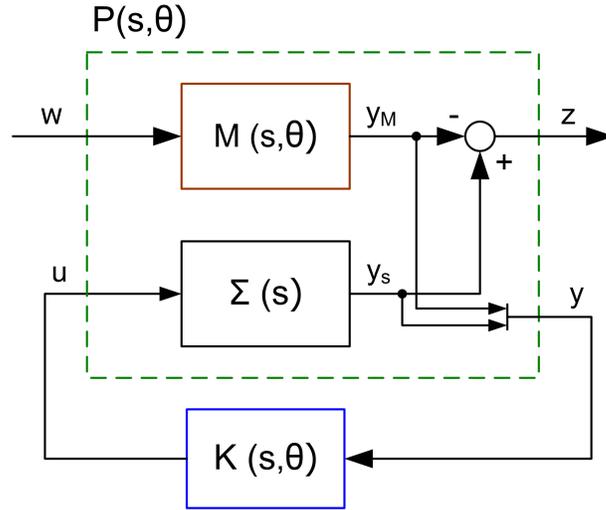


FIGURE 2.6 – Forme standard mettant en évidence la présence du modèle de référence

plus tôt, étant donné la dépendance affine des paramètres dans le système LPV considéré, nous nous sommes orientés vers une modélisation et une synthèse polytopiques.

Les résultats de la littérature qui traitent ce problème (que nous reprenons ci-dessous), se basent sur l'expression suivante de $P(s, \theta)$, système "vu" par le correcteur et mis en évidence sur la Figure 2.6 :

$$(P) : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B_1(\theta)w + B_2u \\ z = C_1(\theta)x + D_{11}(\theta)w + D_{12}u \\ y = C_2(\theta)x + D_{21}w \end{cases} , \quad (2.37)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état, $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ et $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ l'entrée et la sortie de performance respectivement, $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ l'entrée de commande et $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ la sortie mesurée. Dans cette équation, l'indépendance vis-à-vis de θ des matrices B_2 , D_{12} et D_{21} est nécessaire afin de rendre le problème de synthèse convexe. On note que, avec les expressions (2.34) et (2.33) de M et Σ respectivement, cette propriété est vérifiée dans le cas du suivi de modèle.

La représentation de $P(s, \theta)$ sous forme polytopique s'écrit alors :

$$P(s, \theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\theta) P_i(s) \quad , \quad P_i = \left(\begin{array}{c|cc} A_i & B_{1i} & B_2 \\ \hline C_{1i} & D_{11i} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right) , \quad (2.38)$$

où N représente le nombre de sommets du polytope \mathcal{D} et les coefficients polytopiques α_i vérifient :

$$\theta = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\theta) \theta_i, \quad \alpha_i(\theta) > 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i(\theta) = 1 . \quad (2.39)$$

Dans ce contexte, le théorème suivant, énoncé par Apkarian et al. (1995), utilise le lemme de projection afin d'exprimer les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un correcteur polytopique optimal

du point de vue de la performance quadratique H_∞ . Il est basé sur la formulation LMI des conditions de synthèse d'un correcteur H_∞ LTI, introduites par Gahinet (1994).

Théorème 1 (Apkarian et al. (1995)). *Soit la représentation (2.38-2.39) de $P(s, \theta)$. Il existe un correcteur polytopique :*

$$K(s, \theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\theta) K_i(s), \quad K_i(s) = \left(\begin{array}{c|c} A_{K_i} & B_{K_i} \\ \hline C_{K_i} & D_{K_i} \end{array} \right) \quad (2.40)$$

tel que les Propriétés 1 et 2 soient respectées si et seulement si il existe deux matrices symétriques R et S , telles que les inégalités matricielles suivantes soient vérifiées :

$$\tilde{\mathcal{N}}_R^T \left(\begin{array}{ccc} A_i R + R A_i^T & R C_{1i}^T & B_{1i} \\ C_{1i} R & -\gamma I & D_{11i} \\ B_{1i}^T & D_{11i}^T & -\gamma I \end{array} \right) \tilde{\mathcal{N}}_R < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.41)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_S^T \left(\begin{array}{ccc} A_i S + S A_i^T & S B_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T S & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{array} \right) \tilde{\mathcal{N}}_S < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.42)$$

$$\left(\begin{array}{cc} R & I \\ I & S \end{array} \right) \geq 0 \quad (2.43)$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}}_R &= \text{diag}(\mathcal{N}_R, \mathbf{1}) & \tilde{\mathcal{N}}_S &= \text{diag}(\mathcal{N}_S, \mathbf{1}), \\ \mathcal{N}_R &= \text{Ker} \left(\begin{array}{cc} B_2^T & D_{12}^T \end{array} \right) & \mathcal{N}_S &= \text{Ker} \left(\begin{array}{cc} C_2 & D_{21} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

A partir des matrices R et S solutions aux conditions LMI ci-dessus, les matrices du correcteur en chaque sommet, $(A_{K_i}, B_{K_i}, C_{K_i}, D_{K_i})$ peuvent être obtenues soit par la résolution LMI, soit par des opérations algébriques, comme indiqué dans Gahinet et Apkarian (1994) et Gahinet (1994). Notons également que la convexité des conditions exprimées dans ce théorème repose sur la recherche d'un correcteur d'ordre plein, $n_K = n$.

Une autre possibilité pour trouver un correcteur vérifiant les Propriétés 1 et 2 est d'utiliser les conditions de synthèse énoncées dans Scherer et al. (1997), obtenues à partir des conditions d'analyse en effectuant un changement de variable linéarisant. Formulées sous forme LMI, ces nouvelles conditions ont l'avantage de pouvoir être combinées avec des résultats similaires associés à des critères différents (H_2 , placement de pôles, temps de réponse, etc) afin de mettre en place une synthèse multi-objectifs. Nous considérons que ce résultat présente également un intérêt d'un point de vue de la méthode utilisée, car il étend le changement de variable linéarisant $W = KP^{-1}$ utilisé pour la synthèse d'un correcteur par retour d'état statique. La synthèse d'un correcteur par retour de sortie dynamique est alors analogue au calcul d'un retour d'état et suit la démarche changement de variable direct – résolution LMI – calcul du correcteur par changement de variable inverse.

Le théorème suivant utilise les conditions H_∞ énoncées par Scherer et al. (1997), afin de trouver un correcteur polytopique optimal d'ordre plein.

Théorème 2. *Soit la représentation (2.38-2.39) de $P(s, \theta)$. Il existe un correcteur polytopique :*

$$K(s, \theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\theta) K_i(s), \quad K_i(s) = \left(\begin{array}{c|c} A_{K_i} & B_{K_i} \\ \hline C_{K_i} & D_{K_i} \end{array} \right) \quad (2.45)$$

vérifiant les Propriétés 1 et 2 si et seulement si il existe X et Y symétriques et $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)_{i=1 \dots N}$, telles que :

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} A_i X + X A_i^T + B_2 \hat{C}_i + (B_2 \hat{C}_i)^T & \hat{A}_i^T + A_i + B_2 \hat{D}_i C_2 & * & * & \\ \hat{A}_i + (A_i + B_2 \hat{D}_i C_2)^T & A_i^T Y + Y A_i + \hat{B}_i C_2 + (\hat{B}_i C_2)^T & * & * & \\ (B_{1i} + B_2 \hat{D}_i D_{21})^T & Y B_{1i} + \hat{B}_i D_{21} & -\gamma I & * & \\ C_{1i} X + D_{12} \hat{C}_i & C_{1i} + D_{12} \hat{D}_i C_2 & D_{1i} + D_{12} \hat{D}_i D_{21} & -\gamma I & \end{array} \right) < 0 \quad (2.46)$$

$i = 1 \dots N$

$$\left(\begin{array}{cc} X & I \\ I & Y \end{array} \right) > 0 \quad (2.47)$$

Après résolution des conditions LMI ci-dessus, les matrices du correcteur en chaque sommet du polytope peuvent être obtenues en effectuant le changement de variable inverse :

$$\begin{aligned} D_{K_i} &= \hat{D}_i \\ C_{K_i} &= (\hat{C}_i - D_{K_i} C_2 X) M^{-T} \\ B_{K_i} &= N^{-1} (\hat{B}_i - Y B_2 D_{K_i}) \\ A_{K_i} &= N^{-1} (\hat{A}_i - N B_{K_i} C_2 X - Y B_2 C_{K_i} M^T - Y (A_i + B_2 D_{K_i} C_2) X) M^{-T} \end{aligned} \quad (2.48)$$

où M et N sont deux matrices non-singulières vérifiant $MN^T = I - XY$. Remarquons aussi que la matrice P , associée à la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, permettant de prouver la stabilité en boucle fermée est définie par :

$$P = \left(\begin{array}{cc} I & Y \\ \mathbf{0} & N^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} X & I \\ M^T & 0 \end{array} \right)^{-1} \quad (2.49)$$

2.4 Synthèse sur un modèle satellite 1 axe

Ayant à disposition les outils théoriques nécessaires, la synthèse d'une loi de commande qui répond aux besoins de notre application peut être abordée. Nous présentons ainsi dans cette section la procédure basée sur les résultats de synthèse LPV introduits ci-dessus, procédure qui permet de prendre en compte les spécificités du problème de commande d'attitude de satellite décrit au Chapitre 1.

2.4.1 Forme standard - spécifications sous forme de sensibilité mixte

Afin de pouvoir appliquer les méthodes de synthèse LPV polytopique introduites par les Théorèmes 1 et 2, l'expression de $P(s, \theta)$ de la Figure 2.6 doit être développée, afin de correspondre au problème traité. Le schéma représenté sur la Figure 2.7 donne cette vue détaillée et met en évidence la connexion entre le modèle de référence et celui du satellite, ainsi que la présence de différents filtres de pondération.

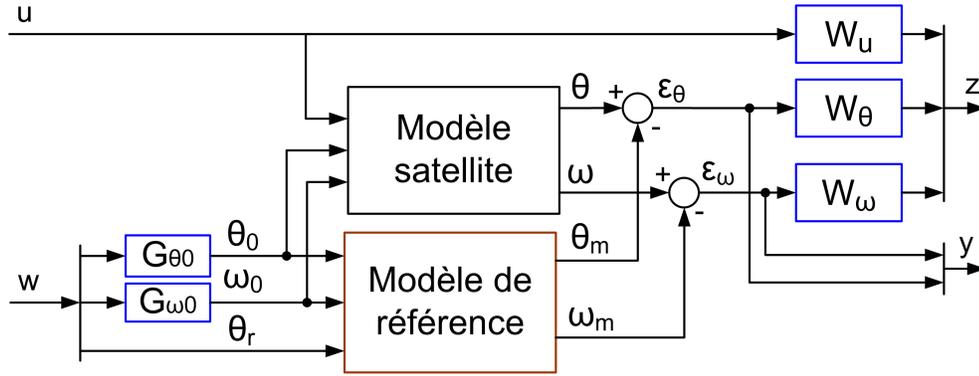


FIGURE 2.7 – Modèle de synthèse sous forme standard - sensibilité mixte

Pour l'application considérée, les sorties du système sont la position et la vitesse angulaire du satellite, $y = [\theta \ \omega]^T$ et les sorties du modèle de référence, $y_m = [\theta_m \ \omega_m]^T$, définissent une dynamique idéale pour la boucle fermée. L'objectif est alors de trouver une loi de commande telle que le satellite suive cette dynamique idéale pour toutes conditions initiales et valeurs de la référence d'attitude possible en mode MNO. Autrement dit, le correcteur doit assurer la minimisation de l'influence de l'entrée $w = [\theta_r \ \theta_0 \ \omega_0]^T$ sur la différence entre la dynamique réelle et celle désirée, $\varepsilon = [\varepsilon_\theta \ \varepsilon_\omega]^T = [\theta - \theta_m \ \omega - \omega_m]^T$, mais aussi la limitation de l'effort de commande $u = C_c$, le couple commandé. Remarquons que cet objectif varie en fonction de la fréquence : la bande passante désirée en boucle fermée définit ainsi la plage fréquentielle sur laquelle les performances de suivi de modèle doivent être accrues, tandis que le fonctionnement des actionneurs impose une commande limitée en hautes fréquences.

Le problème de synthèse peut ainsi être formulé sous forme d'une spécification de sensibilité mixte, avec l'ajout de plusieurs filtres fictifs. Les sorties ε_θ et ε_ω sont pondérées par des filtres passe-bas, dont le gain en basse fréquence spécifie la précision désirée et la bande passante définit la plage fréquentielle d'intérêt. Également intégrée dans les sorties de performance, la commande u est pondérée par un filtre passe-haut, qui impose la limitation de la commande en hautes et en basses fréquences respectivement, selon les valeurs des gains associées. Finalement, les gains G_{θ_0} et G_{ω_0} pondèrent les entrées θ_0 et ω_0 afin de limiter l'influence des conditions initiales sur les sorties de performance.

Dans ce contexte, l'entrée du correcteur est le vecteur $y = [\varepsilon_\theta \ \varepsilon_\omega]$ et sa sortie u représente le couple commandé. Les matrices d'état peuvent être obtenues en minimisant γ dans les conditions LMI des Théorèmes 1 ou 2, une valeur $\gamma < 1$ garantissant le respect des spécifications définies par les filtres fictifs :

$$\|T_{zw}\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} T_{u\theta_r}W_u & T_{u\theta_0}W_uG_{\theta_0} & T_{u\omega_0}W_uG_{\omega_0} \\ T_{\varepsilon_\theta\theta_r}W_\theta & T_{\varepsilon_\theta\theta_0}W_\thetaG_{\theta_0} & T_{\varepsilon_\theta\omega_0}W_\thetaG_{\omega_0} \\ T_{\varepsilon_\omega\theta_r}W_\omega & T_{\varepsilon_\omega\theta_0}W_\omegaG_{\theta_0} & T_{\varepsilon_\omega\omega_0}W_\omegaG_{\omega_0} \end{array} \right\|_\infty < 1 \Rightarrow \begin{cases} |T_{u\theta_r}| < |W_u^{-1}| \\ |T_{\varepsilon_\theta\theta_r}| < |W_\theta^{-1}| \\ |T_{\varepsilon_\omega\theta_r}| < |W_\omega^{-1}| \\ \vdots \end{cases} \quad (2.50)$$

2.4.2 Choix des modèles et des filtres

Une fois la structure de synthèse fixée, les différents modèles et filtres qui interviennent dans le schéma de la Figure 2.7 doivent être définis. Cette section présente la démarche qui nous a permis d'effectuer ces choix.

2.4.2.1 Choix d'un modèle de référence

Le choix du modèle de référence joue un rôle central dans le schéma de commande proposé, car cet élément spécifie le comportement à suivre par le satellite en boucle fermée. C'est aussi à travers ce modèle que l'on impose explicitement à la loi de commande son caractère temps-variant. Pour que les conditions de synthèse soient respectées, le modèle de référence doit être choisi sous la forme d'un système LPV dépendant de manière affine des paramètres variants.

Nous partons ici d'un modèle de référence défini par la représentation d'état (2.32), obtenue avec la loi LPV introduite dans le Chapitre 1. Ces équations décrivent la manière dont la position et la vitesse doivent évoluer en réponse à une consigne d'attitude (et, implicitement aux conditions initiales). Elles correspondent à la boucle fermée contenant un modèle de type double intégrateur du satellite et le correcteur composé de la loi LPV (1.24), en série avec le filtre stabilisant (1.18). Avec ce choix, les améliorations qui peuvent être obtenues se situent au niveau du comportement vis-à-vis des éléments négligés du système à commander (dynamique actionneur, modes souples). Le suivi d'un modèle de référence idéal est ainsi recherché, en minimisant l'influence de ces éléments. L'intégration de ce modèle dans la procédure de synthèse offre également la possibilité de faire des retouches, en spécifiant les niveaux de performance et d'effort de commande à respecter. Grâce à l'ajout des filtres de pondération, l'effort demandé à l'actionneur par le suivi du modèle de référence peut être mieux maîtrisé. Remarquons également que la méthode de synthèse proposée n'est pas limitée à ce choix particulier au niveau du modèle de référence. Ainsi, une fois que de nouvelles spécifications pour la dynamique désirée auront été traduites sous la forme des équations vérifiant (2.34), cette procédure sera toujours applicable et de nouvelles loi de commande pourront alors être obtenues.

Concernant le modèle de référence choisi, on rappelle que λ – le paramètre variant qui y est associé – varie entre 0.06 (valeur qui correspond à un dépointage de 25 degrés) et 1 (pour une erreur de pointage inférieure à 0.15 degrés). Pour illustrer la variation de la dynamique en fonction du paramètre λ , on représente dans la Figure 2.8 deux diagrammes de Bode associées aux valeurs extrêmes de λ . A gauche de la figure, la représentation du transfert entre la position de référence θ_r et la position du modèle θ_m illustre la diminution de la bande passante entre les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 0.006$. On peut aussi observer, sur le diagramme à droite de la Figure 2.8 que l'effort de commande (qui est défini, selon les équations (2.32), par $u = C_f x_f$) diminue lorsque λ augmente.

2.4.2.2 Choix du modèle de satellite

Le choix d'un modèle satellite a été fait en se basant sur les équations de la dynamique introduites dans la Section 1.4.1. Pour la synthèse du correcteur LPV nous avons ainsi dû choisir entre un modèle de type satellite rigide (1.1) avec une dynamique double intégrateur et un modèle de type satellite flexible (1.3), intégrant des modes souples.

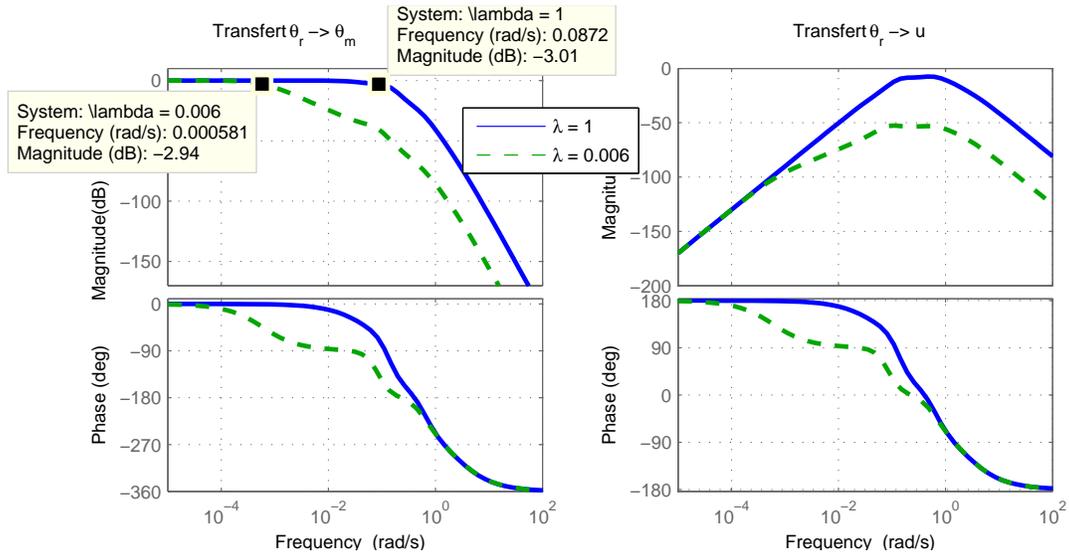


FIGURE 2.8 – Diagrammes de Bode du modèle de référence

Le critère permettant de faire ce choix est la bande passante désirée en boucle fermée. Comme nous pouvons l’observer sur la Figure 2.9, la fréquence du mode souple est très grande par rapport à la bande passante désirée en boucle fermée (transfert $\theta_r - \theta_m$ du modèle de référence, pour $\lambda = 1$). Ainsi, sur la plage fréquentielle d’intérêt le modèle rigide approxime très bien le modèle complet. Par conséquent, ce premier a été choisi comme modèle de synthèse. Ce choix permet également de limiter l’ordre du modèle global représenté sur la Figure 2.7 et par suite l’ordre du correcteur synthétisé.

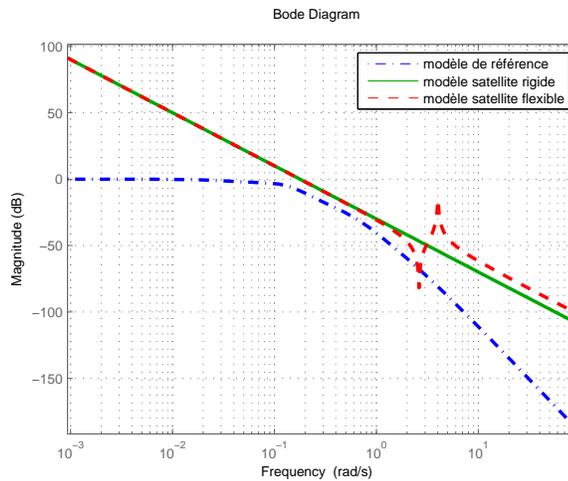


FIGURE 2.9 – Diagrammes de Bode des modèles satellite

Remarquons également que l’influence des conditions initiales peut être prise en compte en représentant le modèle du satellite et le modèle de référence sous forme de schéma bloc. θ_0 et ω_0 figurent alors comme

entrées de ces modèles, comme l'illustre la Figure 2.10.

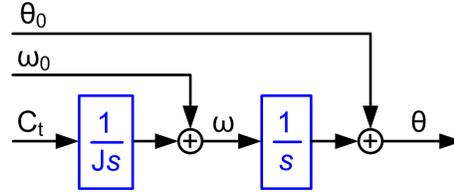


FIGURE 2.10 – Prise en compte des conditions initiales dans le modèle de synthèse du satellite

2.4.2.3 Choix des filtres de pondération

Les filtres W_θ , W_ω , W_u , $G_{\theta 0}$ et $G_{\omega 0}$ sont ajoutés afin de spécifier les plages fréquentielles sur lesquelles les différents objectifs de synthèse doivent être respectés. W_θ , W_ω et W_u sont choisis sous la forme de filtres de premier ordre, passe-bas et passe-haut respectivement. Ils sont obtenus par l'inversion des gabarits imposant, comme montré par (2.50), le gabarit des différentes fonctions de transfert en boucle fermée. On choisit ces filtres sous la forme :

$$W_i^{-1} = K_i \frac{s + \omega_i^* k_i}{s + \omega_i^* K_i}, \quad i \in \{\theta, \omega\} \quad W_u = \frac{1}{K_u} \frac{s + \omega_u^* K_u}{s + \omega_u^* k_u}. \quad (2.51)$$

La signification des différents paramètres qui interviennent dans ces expressions est illustrée sur les diagrammes de Bode asymptotiques représentés dans la Figure 2.11. Les pondérations $G_{\theta 0}$ et $G_{\omega 0}$ sont choisies sous forme de gains statiques, afin de limiter l'ordre du correcteur synthétisé.

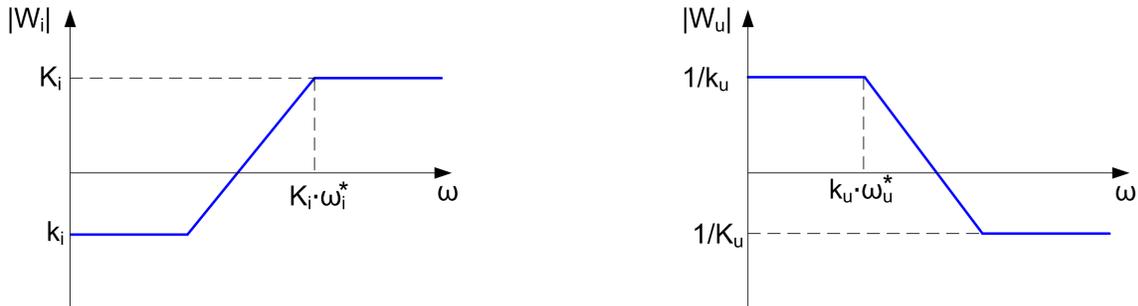


FIGURE 2.11 – Diagrammes de Bode asymptotiques des filtres de pondération

Les valeurs numériques des différents paramètres définissant les filtres de pondération sont données dans le Tableau 2.1. Ces valeurs ont été choisies selon une procédure de type "essai-erreur", selon les principes suivants. Les filtres W_θ et W_ω ont été fixés dans un premier temps. Leur bande passante correspond à la plus grande valeur de la bande passante du modèle de référence, selon les valeurs du paramètre λ (voir Figure 2.8). Les gains k_θ , k_ω ont été choisis de manière à imposer en basse fréquence une erreur faible par rapport au modèle de référence : la valeur 0.001 correspond à une erreur en régime statique inférieure à 0.1%, soit 0.02 degrés pour le cas de l'attitude (la consigne étant limitée à 20 degrés). Le gain $G_{\theta 0}$ est choisi égal à un, car on souhaite obtenir les mêmes performances par rapport à la position de référence et à la position initiale.

TABLE 2.1 – Filtres de pondération - valeurs numériques des paramètres

	θ	ω	u
ω^*	0.1	0.1	0.5
k	0.01	0.01	2
K	1	1	100
G_{-0}	1	0.001	-

Avec ces valeurs fixées, le filtre W_u a été ensuite réglé. Sa bande passante doit être inférieure à la fréquence du mode souple, afin de ne pas exciter la dynamique flexible du satellite, mais suffisamment élevée pour que les objectifs en termes de performances soient atteints. D'une manière similaire, le gain en basses fréquences doit être limité, mais une valeur trop faible dégrade les performances de suivi de modèle. Le gain en hautes fréquences est choisi, quant à lui, de manière à ce qu'il assure le "roll-off" sur une plage de fréquence suffisamment élevée. Selon ces principes, les valeurs numériques qui figurent dans le Tableau 2.1 ont été fixées, après avoir testé en simulation plusieurs correcteurs obtenus pour des différentes valeurs de ces paramètres.

2.4.3 Résultats de synthèse

Avec les éléments du schéma bloc 2.7 ainsi définis, le modèle de synthèse mis sous forme standard respecte les hypothèses des Théorèmes 1 et 2. Un correcteur polytopique peut alors être recherché par résolution LMI, sur le domaine de variation du paramètre λ :

$$\lambda \in \Lambda \stackrel{\text{not}}{=} [\underline{\lambda} , \bar{\lambda}] = [0.006 , 1] . \quad (2.52)$$

Pour ce faire, les conditions (2.41 - 2.43) ou (2.46 - 2.47) doivent être dans un premier temps testées et leur faisabilité assurée. En effectuant ce test pour l'intervalle de variation de λ le résultat est négatif : les conditions LMI sont infaisables, ce qui indique qu'il n'existe pas de correcteur garantissant la stabilité en boucle fermée pour des variations arbitraires du paramètre λ dans Λ . On remarque cependant que ces conditions LMI sont vérifiées sur des intervalles Λ restreints. Ceci conduit à des correcteurs dont les domaines prouvés de validité sont limités, mais qui permettent de vérifier les propriétés de suivi de modèle. La démarche permettant d'obtenir de tels correcteurs est présentée dans la suite.

2.4.3.1 Calcul des plages de stabilité

Un correcteur LPV stabilisant sur toute la plage de variation de λ ne pouvant pas être trouvé, des domaines de validité restreints, constituant des sous-ensembles de Λ , sont recherchés. Plus spécifiquement, en commençant par chaque extrémité de l'intervalle complet, on cherche les domaines

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= [\lambda_{\min} , \bar{\lambda}] \\ \Lambda_2 &= [\underline{\lambda} , \lambda_{\max}] , \end{aligned} \quad (2.53)$$

tels que les conditions (2.46 - 2.47) ou (2.41 - 2.43) y soient respectivement vérifiées.

Afin de déterminer ces domaines nous avons mis en place une procédure itérative, consistant à augmenter progressivement le domaine puis à tester si sur le nouvel intervalle les conditions LMI sont vérifiées. La

première étape de cette procédure est l'initialisation des intervalles recherchés par

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,0} &= [(1 - \varepsilon) \bar{\lambda} , \bar{\lambda}] \\ \Lambda_{2,0} &= [\underline{\lambda} , \underline{\lambda} (1 + \varepsilon)] \end{aligned} \quad (2.54)$$

où ε est suffisamment faible pour garantir la faisabilité des conditions LMI sur $\Lambda_{1,0}$ et $\Lambda_{2,0}$ respectivement. Les valeurs λ_{\min} et λ_{\max} sont ensuite obtenues après un nombre suffisant d'itérations où l'on augmente ε si au pas courant les conditions sont faisables et on le diminue dans le cas contraire. Lorsque les LMI sont faisables, elles sont résolues en minimisant γ .

En appliquant cette procédure, les valeurs numériques suivantes sont obtenues pour Λ_1 et Λ_2 , pour lesquelles les correcteurs K^1 et K^2 assurent respectivement l'existence d'un γ fini :

$$\begin{aligned} (K^1) : \Lambda_1 &= [0.0353 , 1] ; \Delta\Theta_1 = [0 , 4.25] \text{ deg} \\ (K^2) : \Lambda_2 &= [0.006 , 0.6522] ; \Delta\Theta_2 = [25 , 0.23] \text{ deg} \end{aligned} \quad (2.55)$$

où les intervalles $\Delta\Theta$ correspondent aux plages de dépointage sur lesquelles les correcteurs assurent la stabilité (rappelons que $\lambda = 0.15/|e_\theta|$ si $|e_\theta| > 0.15$ deg et $\lambda = 1$ si $|e_\theta| < 0.15$). Remarquons que, du fait de la relation entre λ et l'erreur de pointage e_θ , le domaine Λ_1 est plus étendu que Λ_2 , alors que $\Delta\Theta_1$ est plus restreint que $\Delta\Theta_2$.

L'évolution de la valeur de γ en fonction du domaine de variation considéré est représentée sur la Figure 2.12, les courbes à gauche illustrant la variation de γ avec Λ et celle à droite avec $\Delta\Theta$, sur une échelle logarithmique. A remarquer sur cette figure la forte augmentation de γ lorsque l'on se rapproche des limites des domaines de validité (2.55).

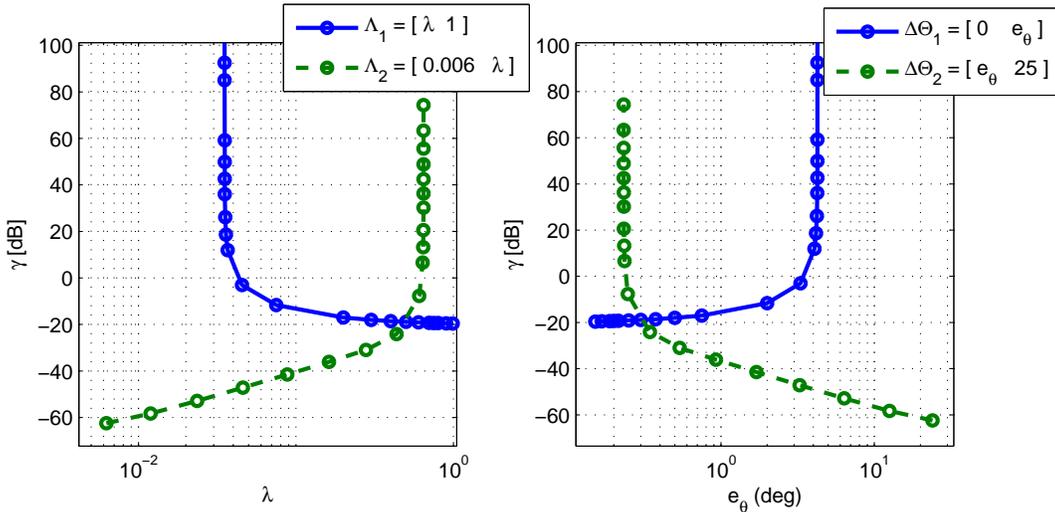


FIGURE 2.12 – Evolution de γ en fonction du domaine de variation du paramètre λ

Concernant les conditions d'existence (2.41-2.43) et (2.46-2.47), il est aussi intéressant d'analyser la complexité numérique (nombre de variables scalaires et dimension de la contrainte) qui leur est associée. Dans (2.41-2.43), les variables de décision sont les matrices R et S et le scalaire γ . Comme R et S sont sym-

triques, le nombre de variables scalaires associées à ces conditions est :

$$n_{\text{var},1} = \frac{n(n+1)}{2}2 + 1 = n(n+1) + 1 \approx n^2. \quad (2.56)$$

Concernant la dimension des contraintes, les matrices associées aux conditions (2.41), (2.42) et (2.43) sont de dimension $n + p_1 + m_1 - m_2$, $n + m_1 + p_1 - p_2$ et $2n$ respectivement. La taille de la contrainte (2.41 - 2.43) est alors :

$$\begin{aligned} n_{\text{contr},1} &= (2n)^2 + ((n + p_1 + m_1 - m_2)^2 + (n + m_1 + p_1 - p_2)^2) N \\ &\approx 4n^2 + 2Nn^2 = (4 + 2N)n^2, \end{aligned} \quad (2.57)$$

où l'approximation est faite en considérant que le nombre d'états n est très grand devant le nombre d'entrées et de sorties m_1, m_2, p_1, p_2 .

Les variables intervenant dans les conditions (2.46 - 2.47) sont les matrices symétriques R et S , les matrices "pleines" $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)_{i=1\dots N}$, et le scalaire γ , ce qui donne le nombre total de variables scalaires :

$$n_{\text{var},2} = \frac{n(n+1)}{2}2 + (n^2 + np_2 + m_2n + m_2p_2)N + 1 \quad (2.58)$$

$$\approx n^2 + Nn^2 = (N+1)n^2. \quad (2.59)$$

Les matrices associées aux conditions (2.46) et (2.47) étant de dimension $2n + m_1 + p_1$ et $2n$ respectivement, la taille de la contrainte (2.46 - 2.47) est :

$$\begin{aligned} n_{\text{contr},2} &= (2n)^2 + (2n + p_1 + m_1)^2 N \\ &\approx 4n^2 + 4Nn^2 = (4 + 4N)n^2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Il est alors évident que les conditions associées au Théorème 2 sont plus complexes, en termes de variables de décision, comme en terme de dimension des contraintes. Ceci est principalement dû à la présence dans les conditions LMI des matrices $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$, qui donnent une représentation du correcteur dans une nouvelle base, associée au changement de variable (2.48).

Pour le problème de commande LPV que nous considérons dans ce chapitre, l'ordre du modèle de synthèse, n , est déterminé par l'ordre du modèle de référence, n_{MR} , l'ordre du modèle satellite, n_{sat} et l'ordre de la combinaison des filtres fictifs, n_{filtres} . Nous avons ainsi :

$$n = n_{\text{MR}} + n_{\text{sat}} + n_{\text{filtres}}. \quad (2.61)$$

En tenant compte des expressions présentées dans la section précédente, les valeurs numériques de ces paramètres sont :

$$n_{\text{MR}} = 6, \quad n_{\text{sat}} = 2, \quad n_{\text{filtres}} = 3 \Rightarrow n = 11 \quad (2.62)$$

et les dimensions des vecteurs des entrées et des sorties, de performance et de commande respectivement sont :

$$m_1 = 3, \quad p_1 = 3, \quad m_2 = 1, \quad p_2 = 2. \quad (2.63)$$

Rappelons finalement que pour le polytope considéré nous avons $N = 2$. A partir de ces valeurs numériques, l'ordre de complexité des conditions d'existence associées au problème de commande considéré peut être calculé, les résultats figurant dans le Tableau 2.2. Comme pour les expressions littérales, on observe que la différence en termes de variables de décision est la plus significative, la complexité des deux conditions restant cependant du même ordre de grandeur, pour les cas où la valeur de N est faible.

La résolution des conditions LMI considérées a été effectuée sous Matlab, en utilisant les algorithmes de programmation semi-définie implémentés dans le solveur SeDuMi (Sturm, 1999) et l'interface YALMIP (Löfberg, 2004). Les temps de calcul pour la résolution de ces conditions, en minimisant γ sur un intervalle Λ fixé figurent dans le Tableau 2.2. Ces calculs ont été réalisés sur un ordinateur avec un processeur Intel Core I7 à 2.2GHz et 8GB de mémoire vive et on peut remarquer que leur durée est assez courte, pour les deux jeux de conditions. Remarquons que le rapport entre les temps de calcul associés aux conditions (2.41 - 2.43) et (2.46 - 2.47) respectivement est très proche du rapport entre le nombre de variables scalaires intervenant dans chaque cas : $t_{\text{calc},1}/t_{\text{calc},2} \approx n_{\text{var},1}/n_{\text{var},2} \approx 0.7$. Cependant, sur l'application considérée, étant donnée la durée limitée des calculs nécessaires à la résolution des deux types de conditions, on peut juger que les temps de calculs qui leur sont associés sont équivalents.

TABLE 2.2 – Complexité numérique des conditions d'existence d'un correcteur LPV

Conditions LMI considérées	Nombre de variables scalaires	Taille de la contrainte	Temps de calcul
(2.41 - 2.43)	133	1446	1.7 s
(2.46 - 2.47)	445	2052	2.4 s

2.4.3.2 Calcul des correcteurs - extrapolation linéaire

Une fois les domaines de stabilité (2.55) déterminés, le problème du calcul d'un correcteur pouvant couvrir tout le mode MNO se pose. Comme les intervalles $\Delta\Theta_1$ et $\Delta\Theta_2$ couvrent seulement une partie de la plage 0-25 degrés, des manipulations supplémentaires apparaissent comme nécessaires afin d'obtenir un correcteur pouvant couvrir toute la plage désirée.

Du point de vue des objectifs considérés, afin de garantir le respect des performances spécifiées par les filtres de pondération, le correcteur recherché doit assurer une valeur γ de la norme H_∞ inférieure à un. Sur la Figure 2.12 on observe que la vérification d'une telle contrainte exige un partitionnement en deux sous-domaines :

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,\gamma} &= [0.042 \quad , \quad 1 \quad] \quad ; \quad \Delta\Theta_{1,\gamma} = [0 \quad , \quad 3.57 \quad] \text{ deg} \\ \Lambda_{2,\gamma} &= [0.006 \quad , \quad 0.63 \quad] \quad ; \quad \Delta\Theta_{2,\gamma} = [25 \quad , \quad 0.238 \quad] \text{ deg} . \end{aligned} \quad (2.64)$$

Sur ces deux domaines, les matrices d'état des correcteurs K^1 et K^2 ont été calculées à partir de la solution au problème LMI (2.46 - 2.47), en utilisant le changement de variable inverse (2.48). Une autre possibilité pour obtenir les matrices d'état des correcteurs est d'utiliser la solution au problème (2.41 - 2.42) pour mettre en place les manipulations algébriques décrites dans Gahinet et Apkarian (1994) ou Gahinet (1994). Cette deuxième méthode nécessite des opérations plus complexes, tandis que l'effort de calcul nécessaire à la résolution des deux types de conditions d'existence considérées est en pratique proche. Nos calculs des matrices

d'états associées aux correcteurs LPV ont été ainsi effectués en utilisant la méthode basée sur le changement de variable inverse.

A partir des représentations ainsi calculées $K^1 : (A_{K_i^1}, B_{K_i^1}, C_{K_i^1}, D_{K_i^1})_{i \in \{1,2\}}$, $K^2 : (A_{K_i^2}, B_{K_i^2}, C_{K_i^2}, D_{K_i^2})_{i \in \{1,2\}}$, le problème du calcul d'un correcteur couvrant l'intégralité de l'intervalle Λ se pose. Des réponses à cette question sont apportées par Stilwell et Rugh (1999, 2000), qui proposent la construction d'un correcteur global basé sur l'interpolation des correcteurs valables localement. On montre ainsi que, dans le cas des correcteurs dynamiques d'ordre plein, il existe une formule d'interpolation, permettant de garantir la stabilité sur l'intégralité du domaine de variation. Cette méthode d'interpolation se base sur des fonctions de Lyapunov qui peuvent être calculées hors ligne, mais son implantation reste assez lourde et demande d'importantes capacités de calcul en ligne.

L'approche que nous proposons ici afin de réduire cet effort de calcul se base sur l'extrapolation linéaire des correcteurs K^1 et K^2 à l'extrémité non contenue dans les domaines $\Lambda_{1,\gamma}$ et $\Lambda_{2,\gamma}$ respectivement. Cette opération est illustrée dans la Figure 2.13 et s'écrit, en considérant l'exemple de la matrice A associée au correcteur K^1 :

$$A_{K_3^1} = A_{K_1^1} + \frac{A_{K_2^1} - A_{K_1^1}}{\lambda_2^1 - \bar{\lambda}} (\lambda - \lambda_2^1). \quad (2.65)$$

Les correcteurs ainsi construits, $\bar{K}^1 : (A_{K_i^1}, B_{K_i^1}, C_{K_i^1}, D_{K_i^1})_{i \in \{1,3\}}$, $\bar{K}^2 : (A_{K_i^2}, B_{K_i^2}, C_{K_i^2}, D_{K_i^2})_{i \in \{1,3\}}$ sont définis sur l'intervalle complet Λ et leur mise en œuvre nécessite les mêmes capacités de calculs que celles demandées par l'implémentation des correcteur initiaux, K^1 et K^2 .

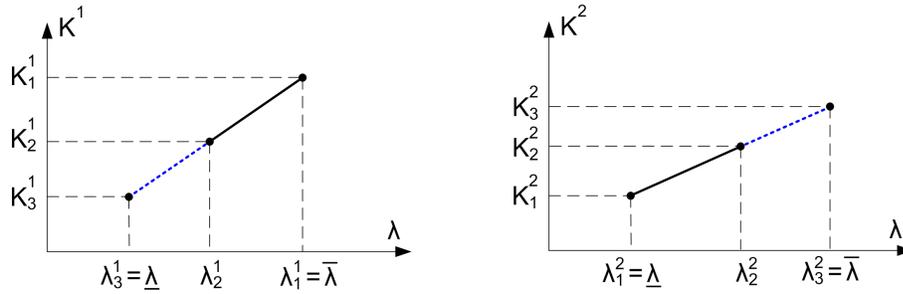


FIGURE 2.13 – Extrapolation linéaire des correcteurs LPV

Une fois les correcteurs \bar{K}^1 et \bar{K}^2 obtenus, la stabilité de la boucle fermée avec λ égale aux valeurs extrêmes initialement non contenues dans $\Lambda_{1,\gamma}$ et $\Lambda_{2,\gamma}$ respectivement est testée. On trouve ainsi que $\bar{K}^1(\lambda)$ stabilise $P(\lambda)$ pour $\lambda = 0.006$ et que $\bar{K}^2(\lambda)$ stabilise $P(\lambda)$ pour $\lambda = 1$. En choisissant d'autres points de test dans les intervalles $\Lambda \setminus \Lambda_{1,\gamma}$ et $\Lambda \setminus \Lambda_{2,\gamma}$ le même résultat est obtenu. Ceci n'implique cependant pas la stabilité des boucles fermées (P, \bar{K}^1) et (P, \bar{K}^2) pour λ variant sur l'intégralité du domaine Λ , mais seulement dans les intervalles initiaux (2.55) et pour les valeurs constantes associées aux points additionnels testés. En effet, en considérant le cas du correcteur \bar{K}^1 , la dérivée de la fonction de Lyapunov $V_1(x) = x^T P_1 x$, (où P_1 est construite selon (2.49)), calculée pour la boucle fermée $(P(\lambda), \bar{K}^1(\lambda))$, au point $\lambda = \underline{\lambda} = 0.006$, n'est pas négative. Le même résultat est obtenu pour le cas de $V_2(x)$ calculée pour $(P(\lambda), \bar{K}^2(\lambda))$ au point $\lambda = \bar{\lambda} = 1$.

D'un point de vue des propriétés de stabilité garanties, le correcteur \bar{K}^1 est plus intéressant car l'intervalle

$\Lambda_{1,\gamma}$ contient l'extrémité $\lambda = 1$, associée à une erreur de pointage $0 < |e_\theta| < 0.15$ degrés. Ainsi, pour les cas où e_θ est inférieure à 3.57 degrés (réponse aux conditions initiales avec un dépointage de l'ordre de 3 degrés et une vitesse initiale faible, par exemple), \bar{K}^{-1} garantit la stabilité asymptotique de la boucle fermée. Ce type de propriété n'est pas vérifiée par le correcteur \bar{K}^{-2} , car dès que l'erreur de pointage devient inférieure à 0.238 degrés ($\lambda > 0.63$), la preuve de la stabilité est perdue. Cependant, il faut remarquer le conservatisme introduit par les conditions de stabilité utilisées, car la vitesse de variation du paramètre λ est supposée non-bornée. Cette vitesse de variation – qui dépend de la vitesse angulaire du satellite – étant en pratique limitée, on peut s'attendre à ce que \bar{K}^{-1} garantisse la stabilité de la boucle fermée pour des variations de λ sur l'intégralité du domaine Λ . Cette propriété est illustrée par les résultats de simulation présentés dans la section suivante, obtenus avec \bar{K}^{-1} .

Au delà de la stabilité, ce correcteur assure également le respect des spécifications imposées par les filtres de pondération. Le respect de ces gabarits fréquentiels peut être observé sur les Figures 2.14 et 2.15, où les diagrammes de Bode du transfert entre la position de référence et les erreurs ε_θ , ε_ω et la commande u respectivement sont représentées. Le caractère temps-variant de la boucle fermée contenant le correcteur LPV est mis en évidence sur la Figure 2.16, où l'on a représenté le diagramme de Bode de la fonction de sensibilité (transfert entre la position de référence et l'erreur d'attitude par rapport à la référence $e_\theta = \theta_r - \theta$), pour des différentes valeurs de λ . La variation de la bande passante en boucle fermée en fonction de ce paramètre peut ainsi être facilement observée. Notons que toutes les fonctions de transfert représentées sur ces figures ont été calculées en utilisant le modèle flexible du satellite.

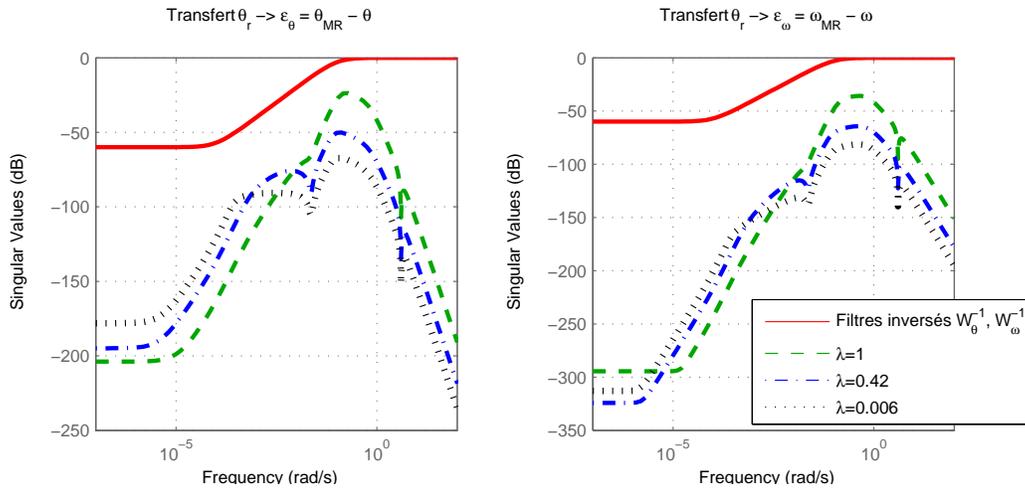


FIGURE 2.14 – Transfert en boucle fermée entre la position de référence et les erreurs d'attitude et de vitesse, par rapport au modèle de référence

2.5 Résultats de simulation

Nous présentons dans cette section les résultats de simulation obtenus suite à la mise en œuvre de la loi de commande LPV polytopique avec modèle de référence, dont la méthode de synthèse vient d'être décrite. Ces résultats ont été obtenus avec une implémentation sous Simulink de la boucle de contrôle d'attitude, contenant :

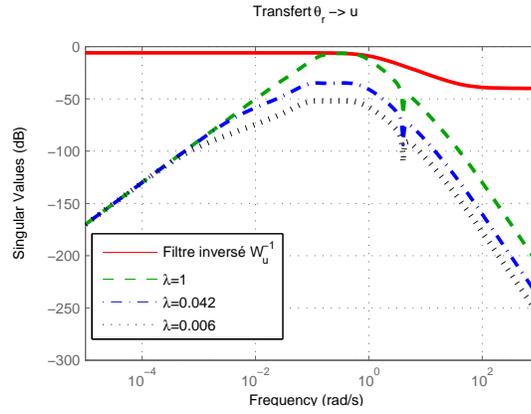


FIGURE 2.15 – Transfert en boucle fermée entre la position de référence et la commande

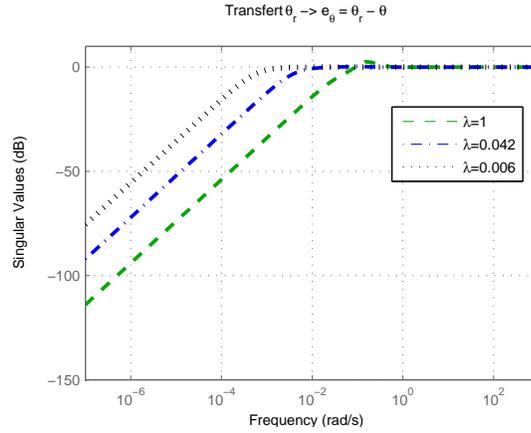


FIGURE 2.16 – Transfert en boucle fermée entre la position de référence et l'erreur d'attitude

- le modèle du satellite flexible,
- le modèle de la roue à réaction,
- le modèle du capteur stellaire,
- l'estimateur de vitesse,
- le modèle de référence,
- le correcteur LPV \bar{K}^{-1} obtenu précédemment.

Ce dernier est exprimé sous forme polytopique :

$$\bar{K}^{-1}(s, \lambda) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(\lambda) \bar{K}_i^{-1}(s), \quad K_i^{-1}(s) = \left(\begin{array}{c|c} A_{K_i^{-1}} & B_{K_i^{-1}} \\ \hline C_{K_i^{-1}} & D_{K_i^{-1}} \end{array} \right), \quad (2.66)$$

où $(A_{K_i^{-1}}, B_{K_i^{-1}}, C_{K_i^{-1}}, D_{K_i^{-1}})_{i=1:2}$ sont les matrices d'état associées au sommets $\underline{\lambda}$ et $\bar{\lambda}$ du polytope Λ^1 . Les coefficients polytopiques α_1 et α_2 sont calculés selon l'expression :

1. Les matrices $A_{K_3^{-1}}, B_{K_3^{-1}}, C_{K_3^{-1}}, D_{K_3^{-1}}$ obtenues par extrapolation dans la section précédente sont renotées ici, pour l'homogénéité, $A_{K_2^{-1}}, B_{K_2^{-1}}, C_{K_2^{-1}}, D_{K_2^{-1}}$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda - \underline{\lambda}}{\bar{\lambda} - \underline{\lambda}}, \quad \alpha_2 = \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\bar{\lambda} - \underline{\lambda}} \quad (2.67)$$

et on peut observer que pour $\lambda = \bar{\lambda}$ on a $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ et $K^1(\lambda) = K_1^1$, tandis que si $\lambda = \underline{\lambda}$ cela implique $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ et $K^1(\lambda) = K_2^1$.

Finalement, le paramètre variant λ est calculé en simulation à partir de l'erreur d'attitude entre la position de référence et la position angulaire mesurée, $e_\theta = \theta_r - \theta_m$. Avec les valeurs numériques considérées, son expression s'écrit :

$$\lambda(e_\theta) = \begin{cases} 1 & , \text{si } |e_\theta| \leq 0.15 \text{ deg} \\ 1/|e_\theta| & , \text{si } |e_\theta| > 0.15 \text{ deg} \end{cases} \quad (2.68)$$

2.5.1 Réponse aux conditions initiales : faible dépointage, forte vitesse initiale

Nous considérons dans un premier temps les réponses en boucle fermée aux mêmes conditions initiales considérées dans le Chapitre 1, définies par un faible dépointage, $\theta_0 = 0.4$ degrés et une vitesse initiale importante $\omega_0 = -0.1$ deg/s. Les réponses en attitude et vitesse angulaire du satellite et du modèle de référence, ainsi que l'évolution du paramètre variant λ sont représentées sur la Figure 2.17. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, les sorties du satellite sont très proches de celles du modèle de référence et la position du satellite converge vers la valeur d'équilibre. On peut aussi observer que, par rapport aux réponses présentées sur la Figure 1.24, page 30, la dynamique générée par le correcteur polytopique est légèrement améliorée, le dépointage restant à l'intérieur de la plage ± 0.45 degrés. Cette amélioration est justifiée par le fait que le modèle de référence décrit le comportement idéal en boucle fermée (loi LPV initiale - (1.24), page 25 - satellite rigide, en négligeant les retards et dynamiques liées aux capteurs et à l'actionneur), tandis que les réponses de la Figure 1.24 sont obtenues avec la prise en compte de tous ces éléments. L'utilisation du correcteur LPV polytopique génère ainsi une dynamique moins bonne que celle définie par le modèle de référence, mais meilleure que celle obtenue avec la loi LPV initiale.

La Figure 2.18 montre la réponse de l'actionneur aux mêmes conditions initiales. On observe qu'un effort de contrôle important est nécessaire en début de réponse, afin de réduire la vitesse du satellite. Ceci fait que la saturation en couple de roue à réaction est atteinte entre $t \approx 10$ s et $t \approx 20$ s. Cependant, sa vitesse de rotation reste au cours de la réponse loin de la valeur maximale, ± 293 rad/s, et se stabilise vers -130 rad/s. Comme le correcteur polytopique varie de manière continue en fonction du paramètre λ , la continuité du couple commandé est également garantie.

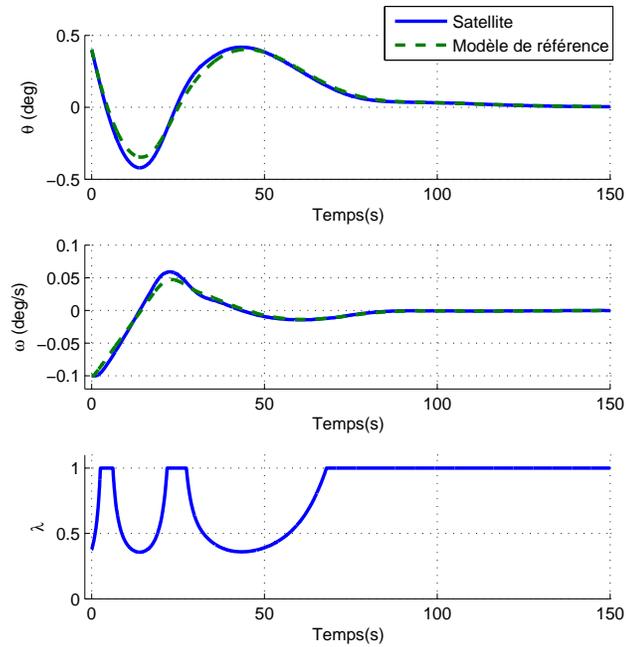


FIGURE 2.17 – Réponse en position et vitesse satellite avec le correcteur LPV polytopique - faible dépointage, forte vitesse initiale

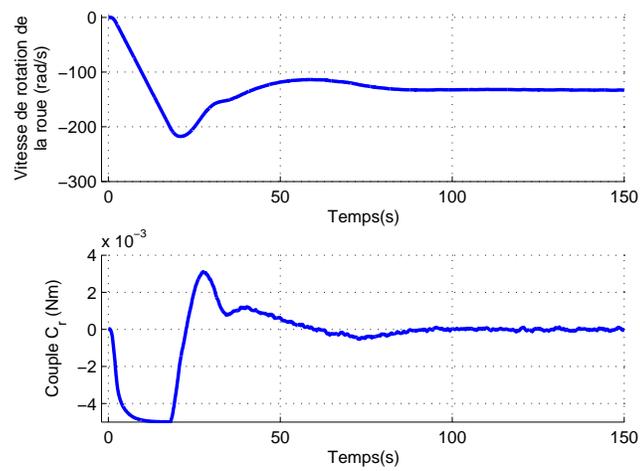


FIGURE 2.18 – Réponse en vitesse et couple roue avec le correcteur LPV polytopique - faible dépointage, forte vitesse initiale

2.5.2 Réponse aux grands dépointages : suivi de consignes de grande amplitude

Considérons maintenant la réponse à une consigne d'attitude en échelon, de 20 degrés d'amplitude, appliquée à $t = 200$ s. Afin de rendre les résultats plus visibles, la Figure 2.19 montre l'évolution dans le temps des erreurs d'attitude et de vitesse par rapport au modèle de référence, $\varepsilon_\theta = \theta_{MR} - \theta_m$ et $\varepsilon_\omega = \omega_{MR} - \omega_e$. On peut ainsi voir que le modèle de référence est suivi avec une bonne précision, l'erreur d'attitude et de vitesse restant, au cours de cette simulation inférieures à 0.1 degrés et à 0.002 deg/s respectivement, pour se stabiliser, en régime stationnaire, autour de zéro. Il est aussi intéressant d'observer la variation de ε_θ et ε_ω avec λ : lorsque ce paramètre augmente le suivi du modèle de référence devient moins précis et les maximums des erreurs en attitude et vitesse sont atteints pour $t \approx 1570$ s, lorsque λ vient d'atteindre sa valeur maximale. Cette variation des performances avec λ est aussi illustrée au niveau des diagrammes de Bode représentées dans la Figure 2.14.

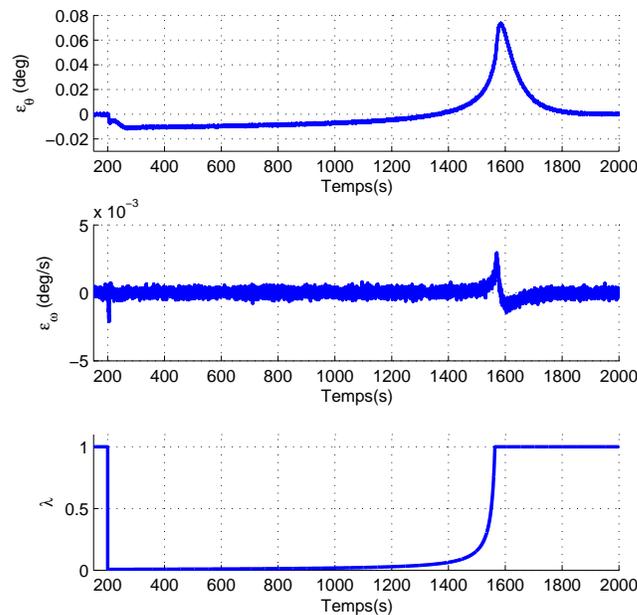


FIGURE 2.19 – Réponse en position et vitesse satellite avec le correcteur LPV polytopique - consigne d'attitude de 20 degrés en échelon

L'évolution de la vitesse et du couple produits par la roue à réaction suite à l'application de la consigne d'attitude peut être observée sur la Figure 2.20. On note ici que la sollicitation de l'actionneur est assez limitée. En particulier, la propriété de pilotage à couple nul pendant la plus grande partie de la réponse est conservée.

Ces réponses temporelles montrent que le correcteur LPV polytopique synthétisé peut en pratique garantir la stabilité de la boucle fermée, pour λ parcourant l'intégralité de son domaine de variation avec une vitesse qui correspond aux conditions de fonctionnement du satellite.

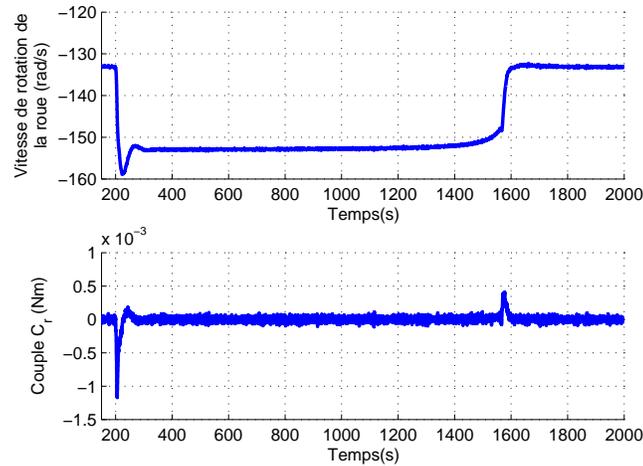


FIGURE 2.20 – Réponse en vitesse et couple roue avec le correcteur LPV polytopique - consigne d’attitude de 20 degrés en échelon

2.6 Conclusions

Ce chapitre a présenté nos travaux portant sur la commande LPV. Dans ce domaine, notre principale contribution est le développement d’une méthode de synthèse basée sur un modèle de référence LPV. Cette approche permet d’imprimer au correcteur un caractère temps variant et de répondre ainsi au besoin de notre application.

L’intégration du modèle de référence dans un schéma de commande basé sur la forme standard nous a permis d’utiliser les conditions de synthèse H_∞ polytopique. Les lois de commande calculées à partir de ces conditions assurent la stabilité de la boucle fermée, ainsi que les niveaux de performance spécifiée en termes de bornes sur l’erreur de suivi du modèle et sur l’effort de commande. Le problème du conservatisme généré par l’utilisation d’une fonction de Lyapunov unique a été dépassé en effectuant une extrapolation linéaire des correcteurs initialement déterminés. Des lois de commande définies sur tout le domaine de fonctionnement sont ainsi obtenues.

Les résultats de simulation montrent que les algorithmes LPV assurent la stabilité en boucle fermée et le suivi du modèle de référence variant dans le temps. Ces lois de commande répondent ainsi à la spécificité de notre application en imposant des dynamique différentes en boucle fermée, selon la valeur de l’erreur de pointage. L’étape suivante pour l’implémentation de ce type d’algorithmes serait leur discrétisation et la réduction de leur ordre, afin de limiter l’effort de calcul au niveau de l’ordinateur de bord. Cependant, la principale difficulté de la méthode proposée dans ce chapitre est le choix du modèle de référence, qui nécessite une analyse et une modélisation complexes du comportement désiré en boucle fermée.

Afin de limiter l’effort de calcul nécessaire à l’implémentation des lois de commande proposées et de surmonter le problème du choix d’un modèle de référence, nous nous orientons dans la suite du manuscrit vers la commande adaptative. A ce sujet, le chapitre suivant résume le principaux résultats sur lesquels nos recherches sont basées. A partir de cette étude bibliographique, le Chapitre 4 présente nos contributions dans le domaine, ainsi que leur intérêt pour le contrôle d’attitude de satellite.

Chapitre 3

Commande adaptative directe - état de l'art

3.1 Introduction

La commande adaptative représente une stratégie de commande qui consiste à modifier en ligne les paramètres du correcteur, afin d'améliorer le comportement en boucle fermée face aux perturbations extérieures, incertitudes et non-linéarités. Le domaine de la commande adaptative étant très vaste, une revue complète du sujet serait très difficile à effectuer et n'apporterait pas une valeur ajoutée à cette étude. Ce chapitre présente ainsi les développements et contributions majeures existantes avant le début de notre thèse et qui ont été utiles au cours de nos recherches.

Les lois de commande adaptatives sont souvent classifiées en deux grandes catégories : commande adaptative directe et indirecte (Landau et Dugard, 1986). Dans les schémas adaptatifs directs, les gains du correcteur sont modifiés directement à partir des sorties mesurées. Un cas souvent rencontré est l'adaptation en fonction d'une erreur de suivi, définie par rapport à un modèle de référence qui décrit le comportement désiré du système en boucle fermée (voir Figure 3.1). Les schémas adaptatifs indirects comprennent un estimateur de paramètres incertains, les gains de la loi de commande étant ensuite modifiés en fonction de l'estimé de ces paramètres. Introduite par des travaux tels que ceux de Kalman (1958) et Åström et Wittenmark (1973), cette approche est illustrée sur la Figure 3.2. Remarquons que la dépendance du correcteur des paramètres du système rend cette structure similaire à celle présentée dans la cadre LPV, à différence que les paramètres ne sont pas supposés connus, mais obtenus à l'aide d'un estimateur. Ces schémas procèdent ainsi selon le principe bien connu en automatique de séparation entre observation, estimation et commande. Malheureusement, ce principe est invalidé dans de nombreuses situations, en particulier pour le cas des systèmes incertains. Les lois de commande synthétisées selon cette démarche sont ainsi complexes à valider. L'impact négatif des dynamiques non-modélisées sur la stabilité des systèmes adaptatifs a été notamment mis en évidence par le très connu exemple de Rohrs (Rohrs et al., 1985), discuté par Anderson (1982); Åström (1983, 1984). Le besoin d'augmenter la robustesse des algorithmes adaptatifs a ainsi motivé de nombreux travaux, dont nous pouvons en particulier citer Ioannou et Kokotovic (1982, 1984), ou encore Kreisselmeier et Narendra (1982); Peterson

et Narendra (1982); Narendra et Annaswamy (1987). Ces études introduisent différentes modifications des algorithmes d'adaptation, dont une des plus importantes consiste à limiter les gains adaptatifs¹. Ainsi est apparue, par exemple, σ -modification, que nous présentons dans la Section 3.3 et qui joue un rôle important dans nos travaux, comme le montrent les chapitres suivants du manuscrit. Notons finalement que parmi les ouvrages de référence dans le domaine de la commande adaptative indirecte on peut citer Åström et Wittenmark (1989); Ioannou et Sun (1996); Krstić et al. (1995), mais aussi des travaux plus récents comme ceux de Ioannou et Fidan (2006); Hovakimyan et Cao (2010). L'étude de Kharisov et al. (2013) réalise une ample comparaison des différents algorithmes ainsi proposés.

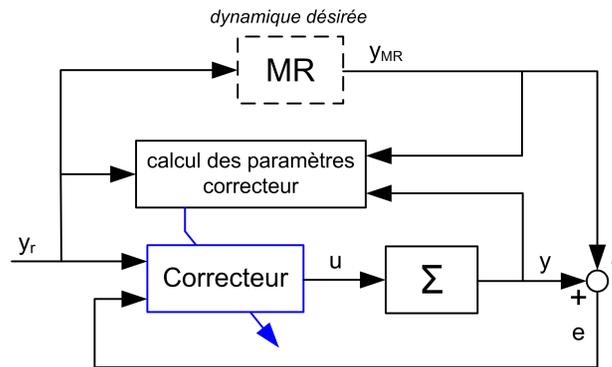


FIGURE 3.1 – Schéma de commande adaptative directe à modèle de référence

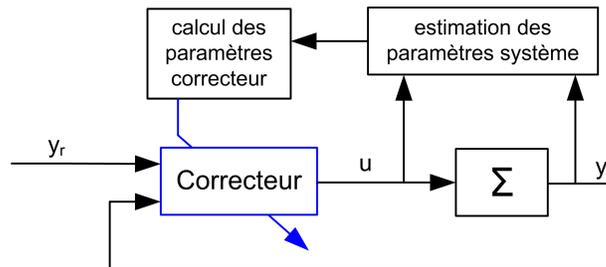


FIGURE 3.2 – Schéma d'adaptation indirecte par identification des paramètres inconnus

S'intéressant également au problème de la robustesse vis-à-vis des dynamiques non-modélées (voir par exemple Barkana et Kaufman (1988); Tsakalis (1992); Feng et Palaniswami (1994) ou encore Barkana (1991b); Iwai et Mizumoto (1992) où l'exemple de Rhors est discuté), la commande adaptative directe présente l'avantage d'une mise en œuvre plus simple. Cette facilité d'implantation est liée à un besoin moins important de puissance de calcul, car les gains sont adaptés directement en fonction des mesures, sans nécessiter l'implantation d'un estimateur. Cela fait de la commande adaptative directe un candidat plus intéressant pour l'implantation à bord d'un satellite. En plus, cette stratégie de commande est proche de celle utilisée actuellement sur la plateforme Myriade, où le correcteur change de structure et de paramètres en fonction de l'erreur de pointage. Ce sont les raisons principales qui nous ont poussés à orienter nos recherches vers les méthodes liées

1. Nous discutons amplement l'aspect de la bornitude du gain adaptatif dans le cadre de la présentation de la commande adaptative directe, dans les Sections 3.2.3 et 3.2.4.

à la commande adaptative directe.

Bien que plus faciles à mettre en œuvre, les lois adaptatives directes se basent sur des hypothèses fortes sur le système à commander, la liaison entre la stabilité de la boucle fermée adaptative et les propriétés de passivité ou de passifiabilité du système en boucle ouverte étant mise en évidence dès les premiers développements sur le sujet (Parks, 1966; Fradkov, 1974). Afin de rendre la commande adaptative applicable sur des problèmes concrets, une attention particulière a ainsi été accordée au cours du temps à la relaxation de ces conditions. Cette recherche d'hypothèses moins fortes est essentielle pour l'applicabilité de la commande adaptative au contrôle d'attitude satellite. C'est pourquoi nous traitons en détail ces développements dans les sections qui suivent.

3.2 Lois d'adaptation et relaxation des hypothèses

Parmi les premières recherches sur l'utilisation de la commande adaptative directe nous pouvons citer la loi de type "règle MIT" (Whitaker et al., 1958; Osburn et al., 1961) qui proposait une règle empirique pour l'adaptation des gains. L'application d'une loi basée sur cette règle pour le système de commandes de vol de l'avion X-15 (Taylor et Adkins, 1965) et le tristement célèbre vol de 1967 (Dydek et al., 2010) ont par la suite illustré le besoin de développer un cadre théorique solide et des preuves de stabilité formelles. Comme avec une loi de commande adaptative la boucle fermée est, de manière inhérente, non-linéaire, les preuves basées sur la stabilité au sens de Lyapunov présentent alors un intérêt particulier. Parmi les premiers résultats dans ce sens nous pouvons citer Butchart et Shackcloth (1965); Parks (1966); Fradkov (1974). Une grande partie des travaux sur le sujet, allant jusqu'à nos jours, sont ainsi basées sur la théorie de Lyapunov et impliquent une fonction de la forme :

$$V(x, K) = e_x^T P e_x + \text{Tr} \left((K - \tilde{K}) \Gamma^{-1} (K - \tilde{K})^T \right), \quad (3.1)$$

où $e_x = x - x^*$ est l'erreur entre l'état du système et une trajectoire idéale x^* , K représente les gains variables du correcteur, \tilde{K} une valeur constante de ces gains et P et Γ sont des matrices symétriques définies positives. Les conditions pour que la dérivée de cette fonction soit négative le long des trajectoires du système sont souvent liées à des propriétés de passivité, ce qui a conduit au nom de commande adaptative basée sur la passivité. Nos recherches sont situées dans la continuité de ces résultats. Le formalisme de Lyapunov et l'utilisation des propriétés de passivité, couplé à des outils plus récents comme la formulation LMI et la commande robuste (Yaesh et Shaked, 2006; Peaucelle et Fradkov, 2007; Peaucelle et al., 2009) sont employés pour obtenir un cadre théorique à la fois solide et flexible.

Un autre aspect lié à la commande adaptative (aussi bien directe qu'indirecte) est l'utilisation d'un modèle de référence. Un grand nombre d'études menées dans ce domaine considèrent des schémas de type Model Reference Adaptive Control (MRAC), permettant le suivi d'une dynamique désirée (voir par exemple Landau (1974, 1979); Narendra et Valavani (1979); Åström et Wittenmark (1989); Barkana (2007)). Un de ces schémas, présenté dans Åström et Wittenmark (1989), se base sur une loi d'adaptation du type "règle MIT", modifiée afin de garantir la stabilité en boucle fermée avec la fonction de Lyapunov (3.1). La loi de commande adaptative s'écrit alors, pour le cas d'un système MIMO :

$$\begin{cases} u = Ky + My_r \\ \dot{K} = -ey^T \Gamma_K, \quad e = y - y_r, \quad \Gamma_K > 0 \\ \dot{M} = -ey_r^T \Gamma_M, \quad \Gamma_M > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

et garantit la stabilité de la boucle fermée adaptative ainsi que le suivi asymptotique du modèle de référence, sous l'hypothèse de passivité du système à commander. Un schéma similaire, où l'on ajoute un gain adaptatif multipliant l'état x_m , associé au modèle de référence, est présenté dans Kaufman et al. (1998). La loi de commande suivante est alors proposée :

$$\begin{cases} u = Ky + Lx_m + My_r \\ \dot{K} = -ey^T \Gamma_K, \quad \Gamma_K > 0 \\ \dot{L} = -ex_m^T \Gamma_L, \quad \Gamma_L > 0 \\ \dot{M} = -ey_r^T \Gamma_M, \quad \Gamma_M > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Ces structures de commande sont représentées de manière simplifiée dans la Figure 3.3, les traits discontinus correspondant à l'utilisation du correcteur défini par (3.3). Les dérivées des gains dans (3.2) et (3.3) sont définies par des termes généralement appelés "de type gradient", car ces lois d'adaptation permettant de minimiser l'erreur de suivi selon la méthode du gradient (aussi appelée "speed gradient method" par Fradkov et Stotsky (1992) ou bien "steepest descent" par Barkana (2005b)). Les coefficients d'adaptation Γ sont des matrices définies positives et définissent la vitesse de variation des gains.

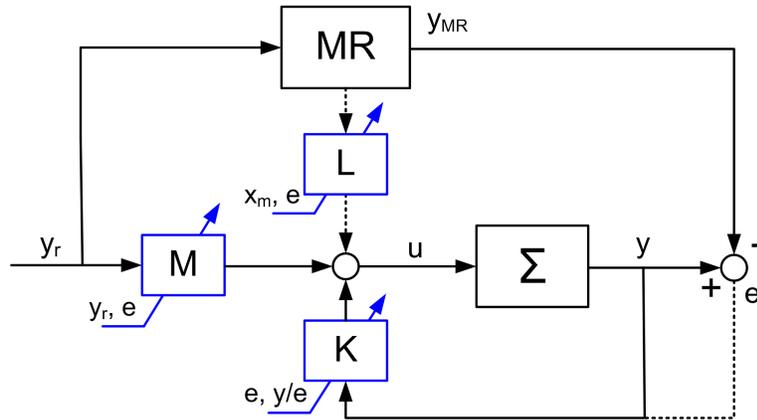


FIGURE 3.3 – Schémas de commande adaptative à modèle de référence

Les schémas à modèle de référence jouent un rôle central dans le paradigme de la commande adaptative, car ils permettent d'assurer le suivi d'une trajectoire de référence. Dans le cas d'utilisation de modèles linéaires – qui sont donc valables localement, autour d'un point d'équilibre – le suivi de modèle représente un problème important. En effet, en restant proche d'une trajectoire *a priori* connue – qui peut être générée par un modèle de référence – le point de fonctionnement du système est contrôlé et la validité des modèles linéaires est gardée. En découle ainsi un potentiel inconvénient des schémas à modèle de référence : le choix d'un modèle définissant cette trajectoire idéale. Liée à ce choix, une hypothèse souvent rencontrée dans le cas d'utilisation de ces schémas est l'existence d'un jeu de gains constants, assurant un suivi de modèle parfait. Le choix

du modèle de référence doit ainsi se faire de manière judicieuse, afin d'assurer, en fonction du système à commander, le respect de cette hypothèse.

Même si les résultats de la commande adaptative sont souvent énoncés en termes de suivi de modèle, une partie des propriétés restent aussi valables si on considère le problème de stabilité asymptotique globale de la boucle fermée adaptative (convergence vers zéro de l'état du système pour toute condition initiale). En effet, comme mentionné dans Barkana (2007), l'utilisation d'un modèle de référence n'est pas forcément nécessaire pour assurer la stabilité en boucle fermée. Ainsi, plusieurs études ont traité le problème de stabilité de la boucle fermée avec un correcteur adaptatif qui prend la forme d'un retour de sortie (Peaucelle et al., 2006; Peaucelle et Fradkov, 2008; Fradkov et Andrievsky, 2007), comme illustré dans la Figure 3.4. Pour le cas d'application

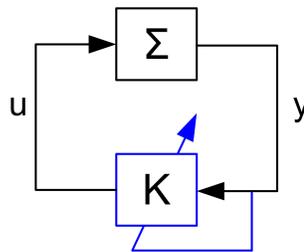


FIGURE 3.4 – Commande adaptative sous forme de retour de sortie

que nous considérons, nous avons montré dans le Chapitre 2 que le choix d'un modèle de référence peut s'avérer compliqué, d'autant plus que celui-ci doit être temps-variant. Il est alors plus intéressant d'étudier la stabilisabilité du système avec un retour de sortie adaptatif plutôt que le suivi d'un modèle de référence. Les recherches que nous avons menées ont, en conséquence, été orientées dans cette direction. On ramène ainsi le problème de suivi de trajectoire à un problème plus simple de stabilisation à l'origine ($x = 0$). Cependant, pour le cas du contrôle d'attitude de satellite (dont le modèle linéaire contient un double intégrateur), cela correspond de fait à une régulation autour de n'importe quelle référence de valeur constante.

Pour cette raison nous nous intéressons, dans la revue que nous faisons dans la suite, à la commande adaptative par retour de sortie, sans entrée de référence. Pour cette structure, la loi de commande adaptative :

$$\begin{cases} u(t) = K(t)y(t) \\ \dot{K}(t) = -y(t)y^T(t)\Gamma, \quad \Gamma > 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

peut être considérée comme classique. Elle assure la stabilité asymptotique de l'origine en boucle fermée, sous condition que le système Σ respecte certaines hypothèses de passivité, qui se sont, au cours du temps, avérées assez contraignantes. La passivité étant originellement définie seulement pour les systèmes carrés (ayant le même nombre d'entrées et de sorties), cela restreint encore plus le champ potentiel d'application d'une loi de ce type. Le cas d'un modèle 1 axe du satellite ayant comme entrée le couple de commande et comme sorties la vitesse et la position angulaire ne pourrait par exemple pas être traité directement. Les sections suivantes montrent comment ces hypothèses ont pu être relaxées, et comment la loi d'adaptation (3.4) a évolué afin de garantir la stabilité en boucle fermée d'une classe de systèmes de plus en plus large. Ces évolutions sont représentées de manière schématique dans la Figure 3.5.

Remarque : Dans la revue que nous proposons ci-dessous, les résultats présentés dans les Sections 3.2.1 et

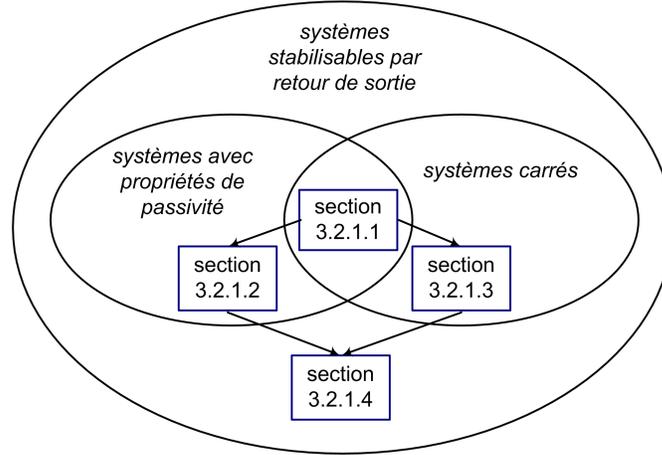


FIGURE 3.5 – Relaxation des hypothèses nécessaires pour l'application de la commande adaptative directe

3.2.3 ont été reformulés, afin de correspondre au cas du retour de sortie.

3.2.1 Systèmes carrés, presque passifs

Nous commençons cette revue par la définition de la propriété de passivité, dans le cas général des systèmes non-linéaires ainsi que pour les systèmes linéaires - systèmes auxquelles nous nous sommes intéressés dans le cadre de notre étude. Ces définitions sont utiles afin de définir la classe des systèmes qui peuvent être stabilisés par la loi de commande adaptative (3.4).

Définition 1. (Fradkov, 2003) Soit le système carré, affine en l'entrée :

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.5)$$

où $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y = y(t) \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie.

Le système (3.5) est dit strictement passif (SP - "strictly passive") vis-à-vis du couple (u, y) s'il existe une fonction scalaire non-négative $V(x)$ et une fonction scalaire $\mu(x)$, avec $\mu(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ tels que :

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^t [u(\tau)^T y(\tau) - \mu(x(\tau))] d\tau \quad (3.6)$$

pour toute solution du système (3.5) ayant comme condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Dans le cas des systèmes linéaires cette définition peut être reformulée comme suit :

Définition 2. (Barkana, 2007) Le système linéaire carré :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.7)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ayant comme matrice de transfert $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ est dit strictement passif et sa matrice de transfert strictement positive réelle (SPR - "strictly positive real") s'il existe deux matrices $P > 0$, $Q > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -Q \\ PB &= C^T \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'équivalence entre ces deux définitions est basée sur le fait que la fonction de stockage $V(x)$ peut toujours être choisie du type $V(x) = x^T P x$ avec $P > 0$ pour les systèmes linéaires, comme indiqué dans Fradkov (2003). Les relations (3.8) peuvent aussi être réécrites comme :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB - C^T \\ B^T P - C & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.9)$$

relation connue comme le lemme positif-réel (Boyd et al., 1994) et qui représente un cas particulier du lemme de Yakubovich-Kalman-Popov (voir Yakubovitch (1962); Kalman (1963) et l'article plus récent de Rantzer (1996)). Observons aussi que la propriété de passivité peut ainsi être exprimée sous forme LMI.

Remarquons que la première condition de (3.8) est l'équation de Lyapunov, ce qui montre que tous les systèmes strictement passifs sont asymptotiquement stables. Comme indiqué dans Barkana (2007), les conditions (3.8) impliquent que le système est strictement à minimum de phase (tous les zéros de la matrice de transfert sont à partie réelle négative). Cependant, les conditions (3.8) ne sont pas vérifiées par tous les systèmes asymptotiquement stables et à minimum de phase. Pour illustrer le fait que peu de systèmes sont strictement passifs, notons que, par exemple, un système SISO stable, défini par les matrices d'état $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne vérifie pas les hypothèses mentionnées.

Afin de relâcher la condition de passivité stricte, les notions de système "presque strictement passif" (ASP - almost strictly passive) et "presque strictement positif réel" (ASPR - almost strictly positive real) ont été introduites. Elles définissent les systèmes qui ne sont pas forcément passifs en boucle ouverte mais qui peuvent l'être rendus en boucle fermée, par un retour de sortie statique, pas forcément connu.

Définition 3. (Kaufman et al., 1998) *Le système (3.7) est dit presque strictement passif et sa matrice de transfert $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ presque strictement positive réelle s'il existe $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ un retour de sortie statique, tel que la loi de commande :*

$$u = \tilde{K}y + v \quad (3.10)$$

rende le système en boucle fermée, illustré dans la Figure 3.6, strictement passif vis-à-vis du couple (v, y) .

La boucle fermée représentée dans la Figure 3.6 étant définie par les équations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B\tilde{K}C)x + Bv \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3.11)$$

il suit, en utilisant la Définition 2 qu'un système de représentation d'état (A, B, C) est ASP s'il existe deux matrices définies positives P et Q et un retour de sortie \tilde{K} tel que :

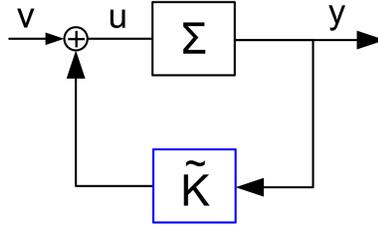


FIGURE 3.6 – Système en boucle fermée définissant la propriété ASPR

$$\begin{aligned} (A + B\tilde{K}C)^T P + P(A + B\tilde{K}C) &= -Q < 0 \\ PB &= C^T \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sur la base de cette propriété, le théorème suivant, qui peut être considéré comme un résultat central de la commande adaptative directe, apparaît dans l'ouvrage Kaufman et al. (1998).

Théorème 3. (Kaufman et al., 1998) Soit le système

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.13)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$.

S'il existe $P > 0$, $Q > 0$, et \tilde{K} tel que :

$$\begin{aligned} (A + B\tilde{K}C)^T P + P(A + B\tilde{K}C) &= -Q < 0 \\ PB &= C^T \end{aligned} \quad (3.14)$$

alors la loi de commande :

$$\begin{aligned} u &= Ky \\ \dot{K} &= -yy^T \Gamma, \quad \Gamma > 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

assure la convergence asymptotique de l'état x vers zéro et la bornitude du gain adaptatif K pour toute condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $K(0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

La loi de commande prend ainsi la forme d'un retour de sortie variant dans le temps. La loi d'adaptation du gain contient le terme de type gradient, $-yy^T \Gamma$, similaire aux formules utilisées dans le cas de la commande par modèle de référence. Le coefficient d'adaptation Γ définit la vitesse d'adaptation du gain - pour la même valeur de y , K varie plus ou moins vite selon la valeur de Γ . Remarquons que la propriété de stabilité est valable pour tout choix de $\Gamma > 0$.

Le théorème précédent montre que si un système donné peut être rendu passif par un retour de sortie statique, alors la loi de commande (3.15) est stabilisante. Le principe de la loi d'adaptation est de faire évoluer le gain dans une direction dont on sait, d'après les propriétés de passivité du système, qu'elle assure la stabilité de la boucle fermée. Cette direction est définie par le terme gradient $-yy^T \Gamma$ qui est toujours semi-négatif défini. Ainsi, tant que la sortie n'est pas nulle, le gain diminue pour devenir négatif (au sens de $K + K^T < 0$) et sa norme croît.

Remarquons aussi qu'il n'est pas nécessaire de connaître le retour de sortie passifant, \tilde{K} , mais seulement de garantir son existence. La question naturelle qui apparaît alors est de savoir quels sont les systèmes pour lesquels l'existence d'un tel gain est garantie. Autrement dit, quelles sont les propriétés structurelles des systèmes "presque strictement passifs"?. La prochaine proposition donne un résultat important dans ce sens.

Proposition 1. (Barkana, 2007) *Un système carré de représentation d'état (A, B, C) est ASP et sa matrice de transfert $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ est ASPR si $H(s)$ est strictement à minimum de phase et la matrice CB est symétrique définie positive.*

Pour la clarté de notre présentation, nous rappelons la définition des systèmes à minimum de phase, telle qu'elle est utilisée dans le cadre de ce manuscrit.

Définition 4. (Fradkov, 2003) *Un système carré de représentation d'état (A, B, C) est dit strictement à minimum de phase si tous ses zéros, i.e. les racines du polynôme $\varphi(s) = \det(sI - A) \cdot \det(C(sI - A)^{-1}B)$, sont à partie réelle strictement négative.*

Les conditions de symétrie de CB ont été relâchées dans Barkana et al. (2006), où l'on prouve que si le produit CB a une forme diagonale Jordan et toutes les valeurs propres positives et si le système est strictement à minimum de phase, alors la loi adaptative (3.15) assure les mêmes propriétés de stabilité définies dans le Théorème 3. La classe des systèmes MIMO stabilisables par la loi de commande considérée reste néanmoins restreinte, ce qui a motivé les recherches présentées dans les sections suivantes.

Pour le cas particulier des systèmes SISO, la proposition suivante donne une condition plus intuitive pour qu'un système soit stabilisable par la loi de commande (3.15).

Proposition 2. (Zeheb, 1986) *Soit un système SISO défini par la fonction de transfert :*

$$H(s) = \frac{\sum_{j=1}^{n_z} b_j s^j}{\sum_{i=1}^{n_p} a_i s^i} \quad (3.16)$$

tel que $a_{n_p} \neq 0$, $b_{n_z} \neq 0$, $b_{n_z}/a_{n_p} > 0$. Si $H(s)$ est strictement à minimum de phase et de degré relatif zéro ou un, alors il est ASPR et la loi de commande (3.15) assure les propriétés de stabilité définies dans le Théorème 3.

Illustrons cette propriété à l'aide de l'exemple suivant :

Exemple 3 Soit le système SISO défini par la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{s + 1}{s(s - 1)} \quad (3.17)$$

qui est instable, mais à minimum de phase et de degré relatif égal à un, donc ASPR. La loi de commande :

$$\begin{aligned} u &= Ky \\ \dot{K} &= -y^2 \gamma, \quad \gamma > 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

assure alors la convergence de l'erreur vers zéro et la bornitude du gain pour toute condition initiale. Cette propriété peut être justifiée de manière intuitive en analysant le lieu des racines de $H(s)$, représenté dans la Figure 3.7. On observe que tout gain K négatif de valeur absolue suffisamment grande, $K < -1$, est

stabilisant. On peut aussi voir que, selon la loi d'adaptation (3.18), K diminue tant que $y \neq 0$. Ainsi, pour toute condition initiale non-nulle, on ne peut pas avoir $y \equiv 0$ tant que $K > -1$. Mais comme K diminue tant que $y \neq 0$, il finit par franchir à un certain moment le seuil $K = -1$. Une fois ce seuil franchi, le gain ne peut prendre que des valeurs stabilisantes et donc la sortie converge vers zéro. Ce comportement est illustré par les réponses temporelles représentées dans la Figure 3.8, obtenues à partir des conditions initiales donnant $y(0) = 2$, pour une valeur initiale du gain $K(0) = 10$, donc non-stabilisante. La valeur numérique du coefficient d'adaptation est $\gamma = 10$. On observe que tant que $K > -1$ la sortie diverge et qu'une fois que le gain entre dans la région qui assure la stabilité, y converge vers zéro et le gain tend vers une valeur constante. Cette analyse simplifiée fait abstraction du côté dynamique de $K(t)$, car la région "stabilisante" correspond au cas des gains constants. Cependant, ces remarques s'avèrent pertinentes pour comprendre intuitivement le fonctionnement de la loi adaptative.

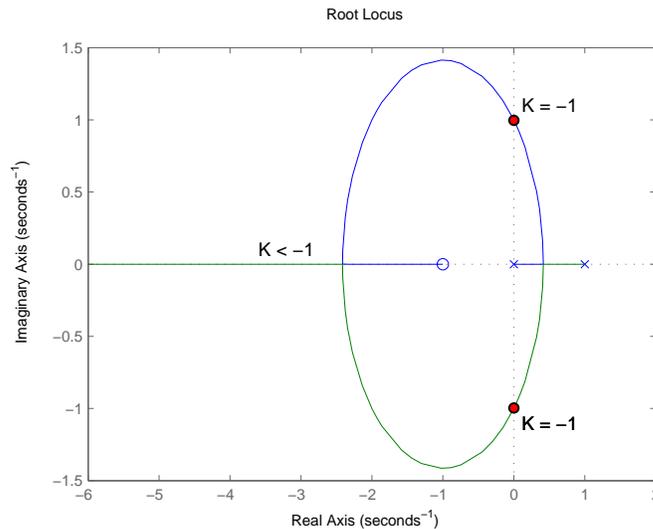


FIGURE 3.7 – Lieu de racines de $H(s)$

La loi que nous venons d'introduire a l'avantage d'être très générale et de ne pas utiliser pour son implémentation d'information sur le système à contrôler. Par exemple, la même loi de commande adaptative assure la stabilité du système (3.17) quelques soit les valeurs de ses pôles. De ce point de vue, la commande adaptative présente des propriétés de robustesse intéressantes. D'un autre côté, la classe des systèmes pour lesquels cette loi est applicable apparaît comme très restreinte, car les systèmes doivent être carrés et presque passifs. Dans la suite de ce chapitre nous présentons les résultats grâce auxquels ces deux limitations ont pu être relâchées. Nous considérons dans un premier temps les développements qui ont permis d'appliquer une loi de commande adaptative similaire à (3.15) pour des systèmes non-carrés qui présentent certaines propriétés de passivité.

3.2.2 Systèmes non-carrés, presque passifs

Nous présentons dans un premier temps le concept de G -passivité, introduit dans Fradkov (1974) qui étend la notion de passivité pour le cas des systèmes non-carrés. Cette notion permettra par la suite d'introduire une

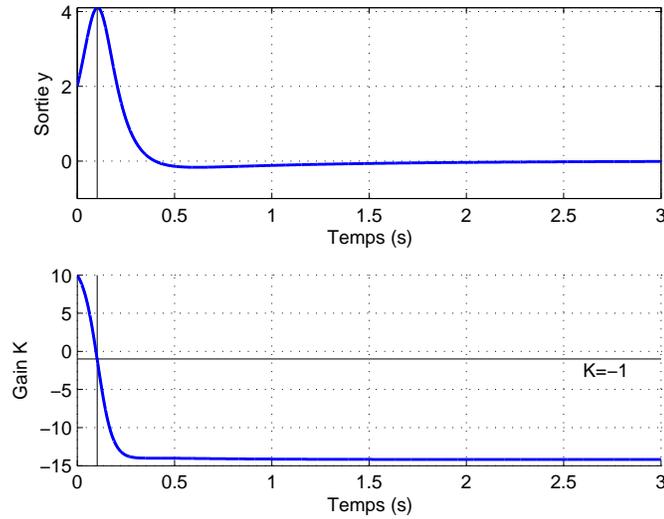


FIGURE 3.8 – Réponse temporelle de $H(s)$ en boucle fermée avec la loi d'adaptation $\dot{K} = -y^2\gamma$, $K(0) = 10$, $\gamma = 10$

loi de commande adaptative stabilisante pour des systèmes non-carrés présentant des propriétés de G -passivité.

L'extension de la notion de passivité pour le cas des systèmes non-carrés est basée sur le choix d'une combinaison linéaire des sorties, Gy , de manière à ce que les vecteurs Gy et u soient de même dimension. Le transfert de u à Gy est alors carré et la passivité peut être définie comme suit :

Définition 5. (Fradkov, 1974, 2003) Soit le système suivant, affine en l'entrée :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.19)$$

où $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y = y(t) \in \mathbb{R}^p$ représentent les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie respectivement et $p \geq m$. Soit G une matrice réelle, $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

Le système (3.19) est dit strictement G -passif s'il existe une fonction scalaire non-négative $V(x)$ et une fonction scalaire $\mu(x)$, avec $\mu(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ tels que :

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \int_0^t [u(\tau)^T G y(\tau) - \mu(x(\tau))] d\tau \quad (3.20)$$

pour toute solution du système (3.19) ayant comme condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Comme dans le cas de la passivité, la définition de la G -passivité peut être reformulée pour le cas des systèmes linéaires :

Définition 6. (Fradkov, 2003) Le système linéaire :

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.21)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est dit strictement G -passif si, pour une matrice donnée $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$, il existe deux matrices $P > 0$, $Q > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -Q \\ PB &= C^T G^T \end{aligned} \quad (3.22)$$

Les relations (3.22) peuvent aussi être réécrites sous forme compacte LMI :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB - C^T G^T \\ B^T P - C G^T & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.23)$$

Sur la base de la propriété de G -passivité, la classe des systèmes " G -passifiables" (qui sont G -passifs en boucle fermée avec un retour de sortie statique) est définie dans Fradkov (2003). Elle peut être vue comme l'extension de la classe des systèmes ASPR au cas non-carré.

Définition 7. (Fradkov, 2003) Le système 3.21 est dit strictement G -passifiable si pour une matrice $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$ donnée il existe $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ un retour de sortie statique tel que la loi de commande :

$$u = \tilde{K}y + v \quad (3.24)$$

rend le système en boucle fermée représentée dans la Figure 3.9 strictement passif.

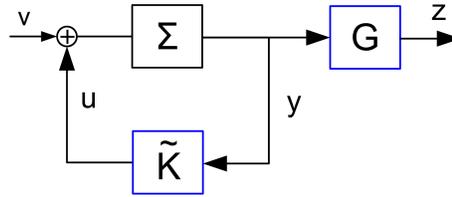


FIGURE 3.9 – Système en boucle fermée définissant la propriété de G -passifiabilité

Il est important de noter que la matrice G qui intervient dans cette définition a seulement un rôle instrumental. Plus exactement, elle est utilisée pour définir une propriété du système à commander, dont elle ne modifie pas la structure. Ainsi, sur la Figure 3.9, le système "vu" par le gain \tilde{K} est bien Σ , le retour se faisant en fonction des sorties y et non de $z = Gy$. Par conséquent, le fait qu'un système non-carré Σ soit G -passifiable n'est pas équivalent au fait que le système $G \cdot \Sigma$ soit ASPR.

Comme la boucle fermée représentée sur la Figure 3.9 est définie par les équations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B\tilde{K}C)x + Bv \\ y &= Cx \\ z &= GCx \end{aligned} \quad (3.25)$$

il suit, en utilisant la Définition 6 qu'un système de représentation d'état (A, B, C) est strictement G -passifiable s'il existe deux matrices définies positives P et Q et un retour de sortie \tilde{K} tel que :

$$\begin{aligned} (A + B\tilde{K}C)^T P + P(A + B\tilde{K}C) &= -Q < 0 \\ PB &= C^T G^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sur la base de cette propriété, le théorème suivant a été énoncé dans Fradkov (2003). Il introduit une loi adaptative stabilisante pour les systèmes strictement G -passifiables.

Théorème 4. (Fradkov, 2003) Soit le système

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.27)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$ une matrice donnée.

S'il existe $P > 0$, $Q > 0$, et \tilde{K} tel que :

$$\begin{aligned} (A + B\tilde{K}C)^T P + P(A + B\tilde{K}C) &= -Q < 0 \\ PB &= C^T G^T \end{aligned} \quad (3.28)$$

alors la loi de commande :

$$\begin{aligned} u &= Ky \\ \dot{K} &= -Gyy^T \Gamma, \quad \Gamma > 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

assure la convergence asymptotique de l'état x vers zéro et la bornitude du gain adaptatif K pour toute conditions initiale $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $K(0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

La loi d'adaptation du gain K , similaire à celle présentée dans le cadre des systèmes carrés, est définie par un terme de type gradient, $-Gyy^T \Gamma = -zy^T \Gamma$. Remarquons que la variation du gain dépend dans ce cas non seulement du produit vectoriel yy^T , mais aussi de la matrice G . A différence du gain \tilde{K} , la matrice G doit donc être connue pour que la loi de commande soit implémentée. L'extension de la commande adaptative au cas des systèmes non-carrés est ainsi faite sous condition de connaître une matrice G telle que le système à commander soit G -passifiable. A partir de cette propriété de passivité la direction d'adaptation du gain est définie, de manière à assurer la stabilité en boucle fermée.

Comme dans le cas des systèmes carrés, le problème de trouver des conditions faciles à tester pour vérifier si un système est G -passifiable – et donc stabilisable par la loi adaptative (3.29) – apparaît naturellement. Similaire à la Proposition 1, le résultat suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes dans ce sens.

Proposition 3. (Fradkov, 2003) Un système de représentation d'état (A, B, C) est strictement G -passifiable si et seulement si la matrice de transfert $GC(sI - A)^{-1}B$ est strictement à minimum de phase et la matrice $GCB = (GCB)^T > 0$.

En se basant sur de la propriété de G -passivité, la classe des systèmes stabilisables par une loi de commande adaptative directe a été étendue au cas des systèmes non-carrés. En effet, la loi (3.29) peut être appliquée aux systèmes ayant des vecteurs d'entrée et de sortie de dimensions différentes, à conditions qu'ils soient G -passifiables. Similaire à la condition ASPR, cette propriété implique toutefois que l'on dispose d'informations supplémentaires sur le système, notamment la connaissance d'une matrice G , nécessaire pour l'implémentation de la loi adaptative. Ainsi, ce n'est pas suffisant d'assurer l'existence d'une matrice G telle que le système à commander soit G -passifiable, mais une valeur exacte de G doit être connue. A première vue, ceci pourrait indiquer que l'application de la commande adaptative aux systèmes non-carrés est plus restrictive, car la connaissance d'une matrice G n'est pas nécessaire pour les systèmes carrés. Il faut néanmoins observer que

dans ce dernier cas, la condition ASPR se base sur le choix (implicite) $G = I$, mais que d'autres choix sont bien évidemment possibles. A ce sujet, on remarque également que si la propriété de G -passivité est vérifiée pour une certaine matrice G_1 elle peut aussi l'être pour $G_2 \neq G_1$. Dès lors, le choix $G = I$ peut, en fonction du critère que l'on considère, ne pas être le meilleur. La liberté de choix au niveau de la matrice G ouvre ainsi des possibilités qui peuvent être explorées, pour les systèmes carrés ou non-carrés.

Telle qu'elle a été définie dans la Section 3.2.1, la classe qui a été initialement considérée pour l'application de la commande adaptative contenait les systèmes carrés ayant la propriété d'être ASPR. Une autre extension possible de cette classe peut être faite en relâchant les conditions de passivité que le système doit respecter. Cette relaxation est présentée dans la suite du manuscrit et, comme dans le cas de l'extension que nous venons de présenter, se fait à condition de disposer d'informations supplémentaires sur le système à commander.

3.2.3 Systèmes carrés, stabilisables par retour de sortie LTI (statique ou dynamique)

L'idée principale derrière l'extension de la commande adaptative pour le cas non-ASPR est de concevoir une "augmentation" pour le système à commander telle que le nouveau système ainsi obtenu soit ASPR et donc stabilisable par commande adaptative. On peut considérer que la proposition suivante donne le point de départ de cette démarche :

Proposition 4. *Barkana (1991a); Kaufman et al. (1998) Tout système Σ qui est strictement à minimum de phase et a une représentation d'état (A, B, C, D) telle que $\det(D) \neq 0$ est ASPR.*

On voit ainsi ainsi que les systèmes ayant $D \neq 0, \det(D) \neq 0$ sont ASPR s'il sont à minimum de phase. Comme la plupart des systèmes physiques sont strictement propres, i.e. $D = 0$, cette Proposition peut être interprétée dans le sens où en ajoutant un transfert direct à un système on peut le rendre ASPR. Ce terme de transmission directe est appelé PFC (*parallel feedforward compensator*) dans Kaufman et al. (1998). La question du choix du terme PFC se pose alors, car il ne suffit pas de prendre n'importe quel $D \neq 0, \det(D) \neq 0$: il faut aussi assurer que le système augmenté est à minimum de phase pour qu'il soit ASPR.

Une réponse intéressante à cette question vient en analysant le cas SISO. Considérons un système décrit sous forme de fonction de transfert :

$$(\Sigma) : H(s) = \frac{y}{u} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.30)$$

pour lequel un retour de sortie statique stabilisant \bar{K} , $u = \bar{K}y$ est connu. Le polynôme caractéristique en boucle fermée, $A(s) - B(s)\bar{K}$ est alors Hurwitz. Considérons maintenant l'ajout en parallèle de l'inverse de ce gain, $-\bar{K}^{-1}$. Le système ainsi augmenté est décrit par :

$$(\Sigma_a) : H_a(s) = H(s) - \bar{K}^{-1} = \frac{B(s)}{A(s)} - \frac{1}{\bar{K}} = \frac{A(s) - B(s)\bar{K}}{-\bar{K}A(s)} \quad (3.31)$$

et il est facile de voir que Σ_a est à minimum de phase car $A(s) - B(s)\bar{K}$ est Hurwitz. Il suit donc, d'après la Proposition 4, que Σ_a est ASPR. La Proposition suivante, énoncée dans Kaufman et al. (1998) généralise ce résultat pour le cas des systèmes MIMO.

Proposition 5. *Kaufman et al. (1998) Soit Σ un système carré de matrice de transfert $H(s)$ et \bar{K} un gain constant tel que la matrice de transfert en boucle fermée*

$$H_{bf} = (I - H(s)\bar{K})^{-1}H(s) \quad (3.32)$$

soit asymptotiquement stable. Le système augmenté

$$(\Sigma_a) : H_a(s) = H(s) - \bar{K}^{-1} \quad (3.33)$$

est alors ASPR.

La structure de la boucle fermée avec l'ajout du terme PFC est représentée dans la Figure 3.10. Le système Σ_a étant ASPR, l'adaptation du gain K selon la loi $\dot{K} = -y_a y_a^T \Gamma$, introduite dans la Section 3.2.1, assure la stabilité de cette boucle fermée. Ce diagramme peut aussi être représenté comme dans la Figure 3.11, où le terme PFC est placé en rétroaction sur le gain adaptatif K . Le gain "complet" K_c (K avec \bar{K} en rétroaction) est ainsi défini par :

$$K_c = (I + K\bar{K})^{-1}K. \quad (3.34)$$

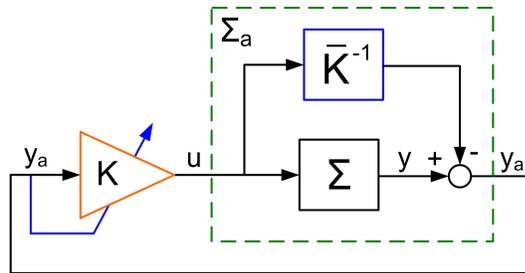


FIGURE 3.10 – Boucle fermée avec système augmenté par le terme de transmission directe

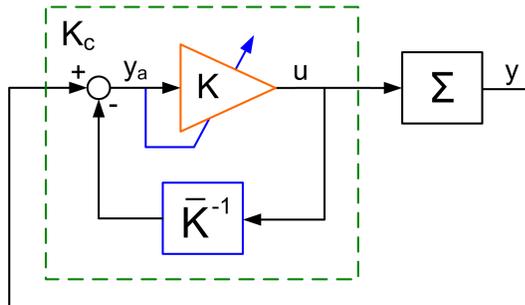


FIGURE 3.11 – Boucle fermée avec le terme PFC placé en rétroaction sur le gain

On peut alors observer que le gain complet est borné par \bar{K} : dans le cas des systèmes SISO, si le gain adaptatif K tend vers moins l'infini, K_c tend vers \bar{K} , donc lui reste toujours inférieur, en valeur absolue. Cette propriété reste aussi valable – au sens de normes sur les gains – dans le cas des systèmes MIMO et illustre le fait que les systèmes non-ASPR ne sont pas stabilisables par des gains arbitrairement grands, mais que cela n'empêche pas d'envisager une loi de commande adaptative. Afin d'assurer la stabilité de ce systèmes

le gain doit alors être borné. D'un autre côté, on voit que l'on dispose ainsi d'un critère de choix sur \bar{K} : si on souhaite que le gain adaptatif complet ne dépasse pas une valeur maximale, K_{\max} (pour des raisons liées à l'implémentation, par exemple) le choix $\bar{K} = K_{\max}$ garantit cette borne (Kaufman et al., 1998).

Avec l'introduction du terme PFC, la classe des systèmes stabilisables par commande adaptative a été élargie aux systèmes stabilisables par retour de sortie statique, comme on vient de le montrer, mais aussi dynamique. En effet, le résultat suivant, énoncé par Kaufman et al. (1998) montre que le terme PFC peut être obtenu en inversant tout correcteur stabilisant, pas forcément statique.

Proposition 6. *Kaufman et al. (1998) Soit Σ un système à m entrées et m sorties, de matrice de transfert $H(s)$ et $\bar{C}(s)$ un correcteur stabilisant. Le système augmenté :*

$$(\Sigma_a) : H_a(s) = H(s) - \bar{C}^{-1}(s) \quad (3.35)$$

est alors à minimum de phase et ASPR si le degré relatif de $H_a(s)$ est 0 ou m .

Remarquons que la condition de degré relatif sur H_a n'est pas restrictive, puisque une factorisation $\bar{C}(s) = \bar{C}_1(s)\bar{C}_2(s)$ peut être utilisée afin d'implémenter le système augmenté $H_a(s) = \bar{C}_2(s)H(s) - \bar{C}_1^{-1}(s)$ et satisfaire ainsi la condition de degré relatif.

Sur la base de ces considérations, le résultat central de cette section peut être énoncé comme suit :

Théorème 5. *Kaufman et al. (1998) Soit le système*

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.36)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$. Si $\bar{C}(s)$ est un correcteur stabilisant il existe une factorisation $\bar{C}(s) = \bar{C}_1(s)\bar{C}_2(s)$ telle que le système augmenté :

$$(\Sigma_a) : H_a(s) = H(s)\bar{C}_2(s) - \bar{C}_1^{-1}(s) \quad (3.37)$$

soit à minimum de phase et de degré relatif 0 ou m , donc ASPR.

La loi de commande

$$\begin{aligned} u &= Ky_a \\ \dot{K} &= -y_a y_a^T \Gamma, \quad \Gamma > 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

où $y_a = H_a(s)u = C_a x_a + D_a u$ assure alors la convergence asymptotique de l'état x_a vers zéro et la bornitude du gain adaptatif K , pour toute condition initiale $x_a(0) \in \mathbb{R}^n$, $K(0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

La structure de commande introduite dans ce Théorème est illustrée dans la Figure 3.12. La loi adaptative proposée pour le cas des systèmes non-ASPR utilise ainsi la sortie y_a du système augmenté et non la sortie y du système à commander. De même, le gain adaptatif multiplie y_a et non y . Ce schéma peut donc paraître non-naturel car le but du système de commande est de contrôler y et non y_a . En effet, dans le cas de la commande par modèle de référence, cette loi adaptative peut poser des problèmes, comme indiqué dans Kaufman et al. (1998). En particulier, lorsque l'on souhaite suivre une consigne constante de valeur non-nulle, une erreur statique apparaît entre celle-ci et la sortie y . Dans le cas du retour de sortie, considéré ici, y s'exprime comme

$y = Cx$ et l'état x est un sous-vecteur de l'état x_a du système augmenté. Pour $x_a = 0$ on a ainsi $y = 0$ et la stabilité asymptotique de l'état du système augmenté implique la convergence vers zéro de la sortie y .

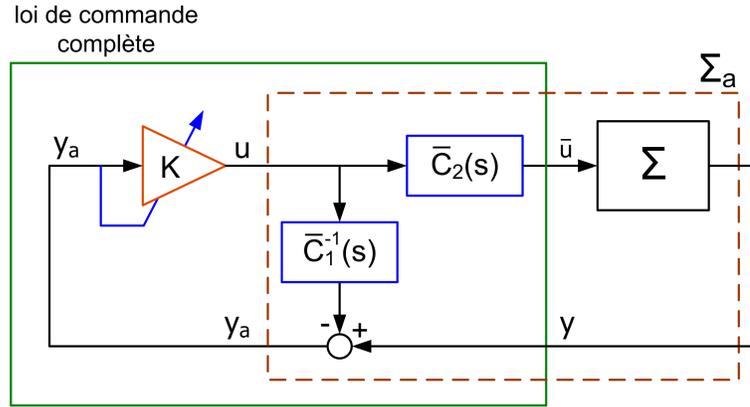


FIGURE 3.12 – Boucle fermée avec adaptative avec le système augmenté par un terme dynamique de transmission directe

Remarquons aussi que le fait d'obtenir le terme PFC en inversant un correcteur peut être intéressant, car cela permet de considérer des correcteurs stabilisants non-causaux et donc qui ne pourraient pas être implémentés dans une structure à réaction classique. C'est par exemple le cas des correcteurs de type proportionnel-dérivé non-filtré, dont l'inverse est un filtre de premier ordre, implémentable dans le cadre d'une structure PFC. Les correcteurs utilisant un retour d'état (qui peut s'interpréter comme un retour de sortie utilisant les dérivées de celle-ci) peuvent également être intégrés dans cette structure.

Nous illustrons maintenant les propriétés présentées dans cette section à l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 4 Considérons la fonction de transfert introduite dans l'Exemple 3, mais avec un zéro instable :

$$H(s) = \frac{s-1}{s(s-2)} \quad (3.39)$$

qui n'est pas ASPR. Le choix d'un terme PFC est donc nécessaire pour l'application de la loi de commande adaptative (3.38).

Soit le correcteur stabilisant suivant, de type proportionnel-dérivé :

$$\bar{C}(s) = \bar{C}_1(s) = 1.128s - 0.5128 \quad (3.40)$$

qui assure un amortissement des pôles à 0.7 et correspond, pour ce système d'ordre deux, à un retour d'état. Remarquons que pour rendre ce correcteur implémentable l'ajout d'un pôle supplémentaire serait nécessaire. Ce problème n'apparaît pas lors de la définition du système augmenté, car on implémente $\bar{C}^{-1}(s)$, un système du premier ordre :

$$H_a(s) = H(s) - \bar{C}(s)^{-1} = \frac{s-1}{s^2-2s} - \frac{1}{1.128s-0.5128} = \frac{0.1136s^2 + 0.3182s + 0.4545}{s^3 - 2.455s^2 + 0.9091s} \quad (3.41)$$

Ce système est à minimum de phase (ses zéros sont $\{-1.4 \pm 1.43i\}$) et de degré relatif 1, donc ASPR et

stabilisable par la loi adaptative (3.38). Cette propriété peut aussi être observée sur le lieu de racines de $H_a(s)$, représenté dans la Figure 3.13, où l'on voit que tout gain négatif de valeur absolue suffisamment grande est stabilisant.

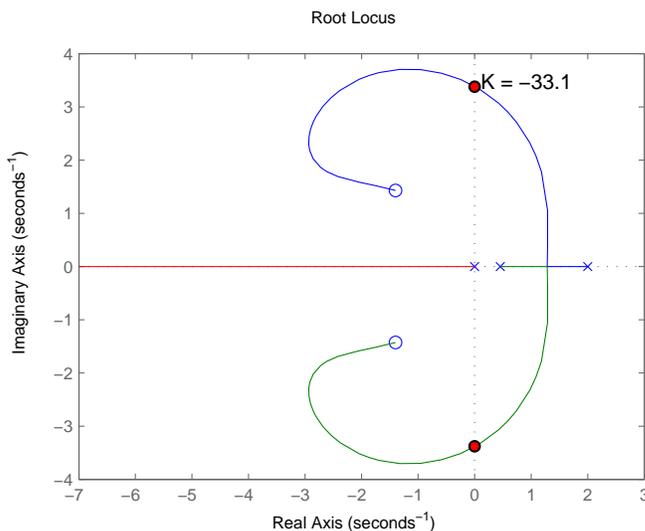


FIGURE 3.13 – Lieu de racines du système augmenté

La Figure 3.14 montre les réponses temporelles obtenues avec la loi adaptative (3.38), à partir des conditions initiales $y(0) = 0.5$, $K(0) = 0$, la valeur du coefficient d'adaptation étant $\gamma = 10$. On observe que la sortie y du système tend vers zéro alors que le gain adaptatif K se stabilise près de la valeur -60 , inférieure à la valeur maximale stabilisante, -33.1 . Comme dans le cas de l'Exemple 3, on observe que tant que le gain K est supérieur à cette valeur limite ($t \approx 2.5s$) la sortie y diverge et qu'une fois K rentré dans la zone stabilisante y converge vers zéro.

La Figure 3.15 montre une comparaison entre les sorties y et y_a . On observe que les oscillations sont beaucoup plus importantes sur y que sur y_a , ce qui est justifié par l'utilisation du terme PFC : comme l'adaptation et le retour se font en fonction de la sortie y_a , l'évolution de y pendant le régime transitoire est moins bien maîtrisée. Le terme PFC ayant une action stabilisante, il est aussi normal que l'ajout de ce terme à la sortie fasse que y_a soit plus faible que y . Ce comportement montre l'inconvénient de l'utilisation d'un terme PFC et illustre le besoin de choisir ce terme "petit".

Comme dans le cas de l'extension de l'applicabilité de la commande adaptative aux systèmes non-carrés, l'extension aux systèmes non-ASPR se fait, comme nous venons de le voir, à condition de disposer de connaissances supplémentaires sur le système à commander. Plus précisément, la loi adaptative proposée peut être appliquée à condition de connaître un correcteur stabilisant $\bar{C}(s)$. La propriété intéressante de la structure proposée, basée sur le terme PFC, est que le correcteur $\bar{C}(s)$ ne doit pas être implémentable, i.e. peut être non-causal. En considérant la factorisation $\bar{C}(s) = \bar{C}_1(s)\bar{C}_2(s)$ introduite par le Théorème 5, c'est $\bar{C}_2(s)$ qui doit être causal, tandis que $\bar{C}_1(s)$ doit être anti-causal, car on implémente $\bar{C}_1^{-1}(s)$. Pour le cas où $\bar{C}_2(s) = I$, le correcteur $\bar{C}(s)$ doit ainsi être anti-causal. Lorsque un tel correcteur est connu, la structure de commande adaptative avec terme PFC peut être mise en œuvre, à différence d'une boucle à rétroaction classique basée

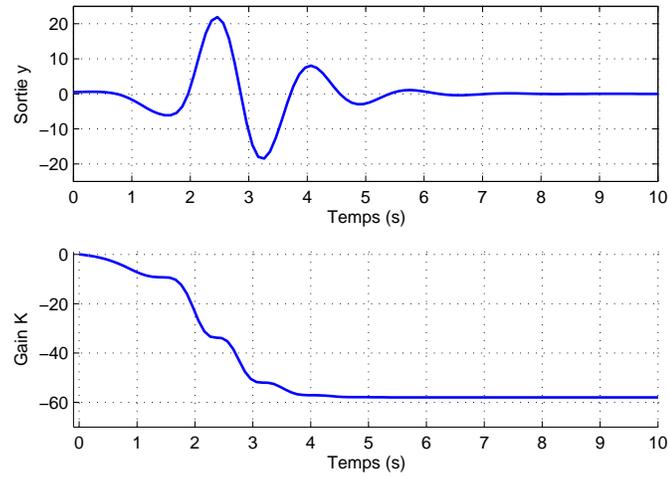


FIGURE 3.14 – Sortie du système en boucle fermée et évolution du gain avec la loi d'adaptation $\dot{K} = -y_a y_a^T \gamma$, $\gamma = 10$, à partir de $y(0) = 0.5$, $K(0) = 0$

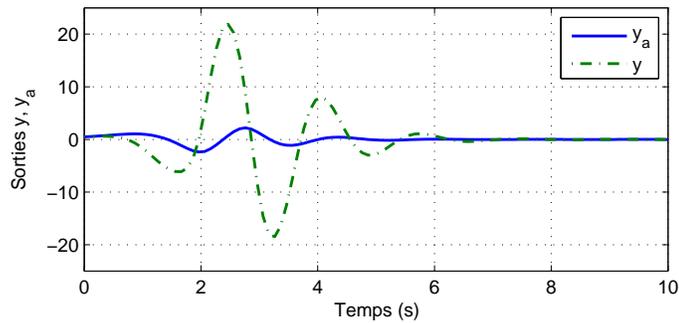


FIGURE 3.15 – Sortie du système et du système augmenté en boucle fermée avec la loi d'adaptation $\dot{K} = -y_a y_a^T \gamma$, $\gamma = 10$, à partir de $y(0) = 0.5$, $K(0) = 0$

seulement sur $\bar{C}(s)$. Il est également intéressant de remarquer que les propriétés de robustesse de la loi adaptative sont les mêmes que celles assurées par le correcteur $\bar{C}(s)$. En effet, selon les conditions du Théorème 5 la loi adaptative est stabilisante tant que $\bar{H}_a(s)$ est ASPR et donc tant que $\bar{C}(s)$ est stabilisant.

Une autre caractéristique de la structure de commande que nous venons de présenter est l'utilisation de la sortie du système augmenté, par la boucle à rétroaction principale, comme par la loi d'adaptation. Comme nous l'avons montré dans l'exemple précédent, cela peut faire que la sortie du système physique se stabilise plus lentement que la sortie du système augmenté. Le résultat présenté dans la section suivante montre comment cet inconvénient peut être dépassé. Il étend aussi l'application de la commande adaptative aux systèmes non-carrés non-passifiables, toujours sous condition de connaître un correcteur stabilisant.

3.2.4 Systèmes non-carrés, stabilisables par retour de sortie statique

L'extension de la commande adaptative pour le cas des systèmes non-carrés sans propriété de passivité peut être vue comme une combinaison des résultats concernant l'ajout d'un transfert direct autour du système à commander et l'utilisation d'une matrice G pour définir une combinaison linéaire des sorties.

Plus précisément, le problème de chercher (G, D) tel que le système représentée dans la Figure 3.16 soit strictement passif avec un retour de sortie statique \tilde{K} est posé dans Peaucelle et Fradkov (2008). Remarquons que le cas $D = 0$ correspond aux systèmes G -passifiables, définies dans la Section 3.2.2. Si le gain statique \tilde{K} est inconnu, le problème apparait alors comme difficile, car la recherche simultanée de G, D et \tilde{K} prend la forme d'une inégalité matricielle bilinéaire.

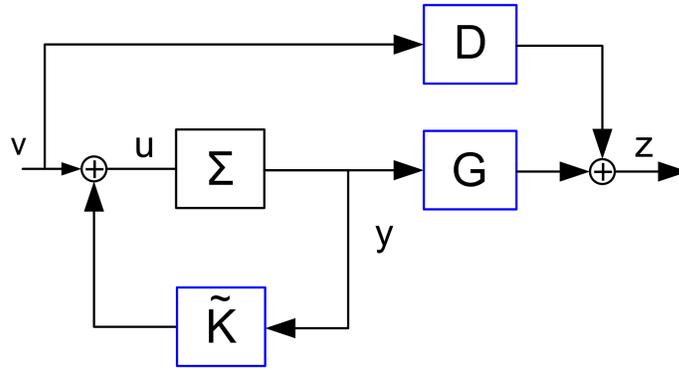


FIGURE 3.16 – Système passif défini par les matrices G et D

Comme démontré dans Peaucelle et al. (2011b), la recherche de G et D peut être transformé en un problème LMI, à condition de connaître un retour de sortie statique stabilisant. Ce gain de valeur connue est noté F_0 pour illustrer le fait qu'il peut être considéré comme nominal. Des valeurs pour les matrices G et D peuvent être alors trouvées par résolution LMI.

Proposition 7. *Soit le système*

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.42)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

Si F_0 est un retour de sortie statique stabilisant, i.e. $\hat{x} = A(F_0)x$, $A(F_0) = A + BF_0C$, est asymptotiquement stable, alors il existe $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $D > 0$ tel que :

$$\begin{bmatrix} A^T(F_0)P + PA(F_0) & PB - C^T G^T \\ B^T P - GC & -D - D^T \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (3.43)$$

Le système représenté dans la Figure 3.16, avec $\tilde{K} = F_0$ est alors strictement passif.

L'hypothèse faite sur la connaissance d'un gain stabilisant F_0 permet ainsi de résoudre le problème du choix de G et D . Comme montré par la suite, cette hypothèse devient ainsi la seule condition pour l'application de la commande adaptative aux système non-carrés qui ne présentent pas de propriétés de passivité. Par rapport

aux résultats présentés dans la section précédente on peut aussi remarquer que dans la Figure 3.16 le retour est fait en fonction des sorties y du système à commander, et non en fonction de z .

L'utilisation du terme de transmission directe D (aussi appelé "shunt") nécessite que le gain adaptatif soit borné, propriété similaire à celle obtenues avec l'utilisation du terme PFC,. Ainsi, la loi adaptative proposée dans Peaucelle et Fradkov (2008) utilise la fonction Φ - de type "barrière" - pour assurer la bornitude du gain :

$$\begin{cases} u = Ky \\ \dot{K} = -Gyy^T\Gamma - \Phi_{D,\alpha}(K - F_0)\Gamma, \quad \Gamma > 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

où $\Phi_{D,\alpha}(K - F_0) = \psi_{D,\alpha}(\|K - F_0\|_D^2) \cdot (K - F_0)$.

La fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prend comme argument la norme de Frobenius pondérée par D de l'écart entre K et F_0 , $\|K - F_0\|_D^2 = \text{Tr}((K - F_0)D(K - F_0)^T)$. Définie par la matrice $D > 0$ et les scalaires $\alpha > 0$, $\beta > 1$, cette fonction a une expression de type zone morte pour $\|K - F_0\|_D^2 < \alpha$ et barrière croissante jusqu'à l'infini pour $\alpha < \|K - F_0\|_D^2 < \alpha\beta$. Le graphique d'une fonction vérifiant cette propriété est représenté de manière schématique dans la Figure 3.17 et l'expression $\psi(\alpha \leq k \leq \alpha\beta) = (k - \alpha)/(\alpha\beta - k)$ est proposée dans Peaucelle et Fradkov (2008).

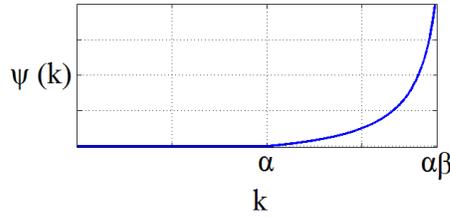


FIGURE 3.17 – Illustration de la fonction barrière ψ

Le prochain résultat exprime formellement la propriété de bornitude du gain adaptatif K dans un voisinage de F_0 , dans le cas de l'utilisation de la loi adaptative (3.44).

Lemme 1. (Peaucelle et Fradkov, 2008; Peaucelle et al., 2011b) Si $y(t)$ est borné pour tout $t \geq 0$, alors $K(t)$ défini par (3.44) vérifie :

$$\|K(t) - F_0\|_D^2 \leq \alpha\beta, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.45)$$

Le rôle de D dans la définition du domaine de variation de K peut ainsi être observé : pour α et β constants, $D = 0$ (cas des systèmes G -passifables) donne un domaine de variation infini pour K . Pour $D > 0$, plus D est "grand" (e.g. sa valeur singulière maximale est grande), plus le domaine de variation de K est petit : par exemple, pour $D = I$, on a $\text{Tr}((K - F_0)(K - F_0)^T) \leq \alpha\beta$, alors que $D = 2I$ implique $\text{Tr}((K - F_0)(K - F_0)^T) \leq \alpha\beta/2$.

Sur la base de la connaissance de D et G , le Théorème suivant exprime des conditions nécessaires permettant d'obtenir des valeurs numériques pour α et β , derniers paramètres nécessaires pour la définition complète d'une loi adaptative stabilisante sous la forme (3.44).

Théorème 6. Peaucelle et Fradkov (2008); Peaucelle et al. (2011b) Soit $\beta > 1$ un scalaire donné. Si (F_0, G, D) sont une solution faisable du problème LMI (3.43) alors il existe $Q > 0, R, T, F, \alpha$ solution au

problème LMI suivant :

$$\begin{bmatrix} R & QB - C^T G^T \\ B^T Q - GC & D \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.46)$$

$$\begin{bmatrix} T & (F - F_0)^T \\ (F - F_0) & D^{-1} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \text{Tr}(T) \leq \alpha \quad (3.47)$$

$$\{QA(F_0)\}^S + \alpha\beta C^T C + R + C^T(G^T(F - F_0) + (F - F_0)^T G)C < \mathbf{0}. \quad (3.48)$$

tel que la loi de commande (3.44) assure la convergence asymptotique de l'état x vers zéro et la bornitude du gain K pour toutes conditions initiales $x(0) \in \mathbb{R}^n$, $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$ tel que $\|K(0) - F_0\|_D^2 \leq \alpha\beta$.

A partir de la connaissance d'un gain statique stabilisant F_0 , les conditions de la Proposition 7 et du Théorème 6 permettent ainsi de définir une loi de commande adaptative sous forme (3.44), assurant la stabilité en boucle fermée du système (3.42).

En se basant sur l'hypothèse de stabilisabilité par un gain statique, la loi adaptative que nous venons de présenter peut être appliquée à tout système LTI stabilisable par un retour de sortie dynamique, condition identique à celle présentée dans la Section 3.2.3. En effet, si Σ est stabilisé avec une loi dynamique $u = C(s)y$, alors en factorisant $C(s) = \tilde{C}(s) \cdot F_0$, F_0 est un gain statique qui stabilise $\Sigma \cdot \tilde{C}(s)$. Ce gain statique peut être remplacé par un gain adaptatif $K(t)$ et la loi de commande complète devient alors $u = \tilde{C}(s)K(t)y$, où l'on peut identifier une partie LTI - $\tilde{C}(s)$ et la partie adaptative, variante dans le temps - $K(t)$ (voir figure 3.18).

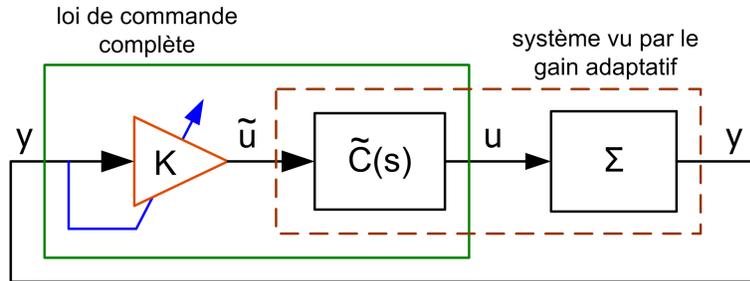


FIGURE 3.18 – Loi de commande adaptative avec une partie fixe

Les conditions présentées dans cette section ont l'avantage d'être applicables à une large classe de systèmes et de nécessiter seulement la connaissance d'un correcteur stabilisant pour le système à commander, sans faire aucune hypothèse sur les propriétés de passivité. Exprimés sous forme LMI, elles ont aussi l'avantage de pouvoir être facilement étendues afin de garantir des propriétés de robustesse de la boucle fermée adaptative (voir Peaucelle et al. (2008); Peaucelle et Fradkov (2008)).

3.2.5 La commande adaptative "pure" n'existe pas

Les résultats présentés dans les sections précédentes montrent que pour la plupart des systèmes réels (i.e. systèmes sans propriété de passivité), la connaissance d'un correcteur LTI est nécessaire pour la définition d'une loi adaptative stabilisante. L'adaptation est dans ce cas construite "autour" du correcteur statique stabilisant : par exemple, pour la loi présentée dans la Section 3.2.4 le gain adaptatif K varie dans un domaine borné

centré en F_0 . La loi de commande complète contient alors une partie adaptative, variante dans le temps et une partie fixe, définie par des filtres LTI. Cette structure peut être observée sur la Figure 3.12 pour le cas de la loi basée sur le terme PFC et sur la Figure 3.18 pour la loi basée sur la fonction barrière. Une structure similaire de loi de commande adaptative contenant une partie LTI est présentée dans Hovakimyan et Cao (2010), où l'utilisation d'un filtre linéaire $C(s)$ – qui influence les performances de la boucle fermée – est proposée. Des nombreuses études (voir par exemple Calise et al. (1998); Yang et al. (2004); Yao et Tomizuka (1997); Lavretsky (2009)) considèrent également une "augmentation adaptative" de la loi de commande linéaire de base (*baseline controller*) afin d'améliorer les propriétés de la boucle fermée vis-à-vis des incertitudes. Dans le cas des applications aux systèmes aérospatiaux, plusieurs méthodes de synthèse basées sur cette structure sont présentées par Lavretsky et Wise (2012).

On voit ainsi que la conception de lois adaptatives "pures" apparaît comme difficile dans le cas de la plupart des systèmes réels. Au-delà de l'aspect contre-intuitif de ces conditions (pourquoi mettre en place une loi adaptative stabilisante si une loi statique avec la même propriété est connue ?), cette approche est intéressante car elle permet d'utiliser une large palette de techniques de synthèse pour trouver un correcteur stabilisant LTI. Une fois ce correcteur trouvé, une loi d'adaptation peut être ajoutée à la structure de commande afin d'améliorer les propriétés du système bouclé. Dans Barkana (2005a) on montre que cette approche permet de diminuer l'influence des incertitudes sur la dynamique de la boucle fermée et dans Peaucelle et al. (2011a) on propose l'utilisation de la commande adaptative afin d'améliorer les propriétés de stabilité robuste assurés par le correcteur statique. Dans le cas d'application que nous considérons, l'adaptation est utilisée afin d'élargir le domaine de fonctionnement (défini par les valeurs de l'erreur de pointage et de la vitesse angulaire) couvert par le correcteur statique.

Avant de présenter les développements qui ont permis d'atteindre cet objectif, nous continuons la revue des résultats existants dans le domaine de la commande adaptative par la présentation de la σ -modification. Celle-ci joue un rôle important dans la conception d'une loi de commande adaptative pour le contrôle d'attitude de satellite, car elle permet de réaliser le changement de dynamique de la boucle fermée, selon les valeurs des sortie mesurées.

3.3 Etude de la σ -modification

En parallèle des études sur les conditions théoriques permettant l'application de la commande adaptative, des recherches sur les aspects pratiques, liés à l'implémentation ont été aussi menées. Nous présentons dans cette section une modification très souvent considérée dans le domaine de la commande adaptative, aussi bien dans le cas de l'adaptation directe qu'indirecte (dans ce dernier cas étant aussi appelée "facteur d'oubli" (Hsu et Costa, 1986)). Cette modification consiste à ajouter à la loi d'adaptation un terme qui pousse les gains vers une valeur connue et constante. En partant d'une loi adaptative de la forme (3.15), applicable aux systèmes carrés presque passifs, la loi modifiée s'écrit :

$$\dot{K} = -y(t)y^T(t) - w(y, K) \cdot (K - K_0) \quad (3.49)$$

où la fonction $w(y, K) > 0$ peut dépendre de la sortie mesurée du système ou de la valeur du gain et. K_0 représente ici la valeur vers laquelle le gain adaptatif est ramené.

Cette modification apparaît dès les premiers travaux dans le domaine et parmi les premières études la mentionnant on peut citer Lindorff et Carroll (1973); Narendra et al. (1971). Elle est ensuite reprise dans Fomin et al. (1981); Ioannou et Sun (1996); Kaufman et al. (1998) et en général utilisée dans les travaux visant des implémentations physiques (voir par exemple Barkana (2005a); Maganti et Singh (2007)). Le nom de σ -modification apparaît dans Ioannou et Kokotović (1983) où la fonction $w(y, K)$ est choisie égale à une constante, notée σ :

$$w(y, K) = \sigma \quad (3.50)$$

D'autres choix de la fonction $w(y, K)$ sont possibles, comme par exemple :

$$w = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \|K - K_0\| < N_0 \\ \sigma_0 & , \text{ si } \|K - K_0\| > N_0 \end{cases}, M_0 = \text{const}; \quad w = \|e\| \cdot \nu_0, \nu_0 = \text{const} \quad (3.51)$$

qui sont donnés dans Ioannou et Sun (1996) où l'on analyse les avantages et inconvénients de chacune de ces possibilités. Dans le cadre de la thèse nous nous sommes concentrés dans un premier temps sur le choix (3.50) qui est le plus facile à implémenter et qui - comme montré par la suite - répond aux besoins de notre application. Une version de la σ -modification dépendant de la sortie du système, y , est aussi présentée dans la partie applicative.

3.3.1 Compensation des bruits et des perturbations permanentes

La première raison pour l'introduction de la σ -modification (voir les références ci-dessus) a été la compensation des bruits et des perturbations persistantes. En effet, si l'on considère des bruits affectant la sortie, celle-ci n'est jamais identiquement nulle. Comme le terme gradient de la loi d'adaptation fait intervenir le produit $y(t)y(t)^T$ contenant des carrés de signaux scalaires, certaines composantes du gain peuvent dériver dans une direction, voire diverger dans le cas où l'on ne considère pas le terme barrière. Cet inconvénient est encore plus clair dans le cas des systèmes SISO, où le terme gradient devient $-y(t)^2$. Le terme σ , qui pousse le gain vers F_0 , compense cette dérive et empêche la divergence, en limitant ainsi l'influence des perturbations sur le gain. Pour cette raison, les lois adaptatives utilisant un terme de type σ sont souvent appelées robustes (Kaufman et al. (1998), Ioannou et Sun (1996)).

A titre d'exemple, la propriété de compensation des bruits peut être mise en évidence pour le cas d'un système SISO, où le gain adaptatif est scalaire. L'équation d'adaptation s'écrit, pour le cas d'un système presque passif :

$$\dot{K}(t) = -(y^2(t) + \sigma(K(t) - K_0)) \gamma \quad (3.52)$$

qui devient, en introduisant la variable de Laplace :

$$K = -\frac{\gamma}{s + \sigma\gamma} y^2 + \frac{\sigma\gamma}{s + \sigma\gamma} K_0 \quad (3.53)$$

Pour analyser l'influence d'un bruit persistant, supposons que l'on se trouve en régime permanent et que la sortie $y(t)$ est représentée par un bruit aléatoire gaussien de moyenne nulle, $E[y] = 0$ et de variance $\text{var}[y] > 0$.

Nous pouvons alors exprimer la moyenne de $y^2(t)$:

$$E[y^2] = \text{cov}[y, y] + (E[y])^2 = \text{var}[y] \quad (3.54)$$

et sa variance respectivement :

$$\text{var}[y^2] = E[y^4] - (E[y^2])^2 = 3\text{var}^2[y] - \text{var}^2[y] = 2\text{var}^2[y] \quad (3.55)$$

En première approximation cela signifie que le gain K est affecté par un bruit de moyenne $\frac{\text{var}[e]}{\sigma}$ et de variance $2 \left(\frac{\text{var}[y]}{\sigma} \right)^2$. On observe ainsi que plus σ est petit, plus l'influence du bruit sur K est importante. Ceci peut être aussi remarqué dans l'équation (3.53) : le filtre de premier ordre défini par σ devient un intégrateur si σ est égal zéro : K va ainsi diverger si y n'est pas identiquement nulle.

3.3.2 Influence sur la stabilité globale

Avec l'utilisation de la σ -modification et sans aucune hypothèse sur le gain K_0 les propriétés de stabilité de la boucle fermée sont dégradées : la sortie et le gain sont garantis d'être bornés, mais la propriété de convergence de la sortie vers zéro est perdue (Kaufman et al. (1998)). Ce comportement est justifié par le fait que dans l'équation (3.49), avoir un point d'équilibre avec $y \equiv 0$ impliquerait $K \equiv K_0$. Or, si K_0 n'est pas stabilisant, le point d'équilibre ($e = 0, K = K_0$) n'est pas stable. Des cycles limites apparaissent sur le gain K , ainsi que sur la sortie du système y , cycles dont l'amplitude dépend de la valeur de σ . Comme dans le cadre de nos recherches on considère connaître un gain F_0 stabilisant, le choix $K_0 = F_0$ apparaît comme naturel. La loi (3.49) s'écrit alors :

$$\dot{K}(t) = - (y(t)y^T + \sigma(K(t) - F_0)) \Gamma \quad (3.56)$$

Pour illustrer l'influence de la σ -modification sur les propriétés de stabilité, nous considérons dans la suite un exemple académique.

Exemple 5 Soit la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s-1)} \quad (3.57)$$

qui est à minimum de phase et de degré relatif 1, donc ASPR ; tout retour de sortie statique $u(t) = Ky(t)$ avec $K < -1$, constant rend la boucle fermée stable.

Le système étant ASPR, la loi de commande adaptative :

$$\begin{cases} u(t) = K(t)y(t) \\ \dot{K}(t) = -y(t)^2\gamma \end{cases} \quad (3.58)$$

avec $\gamma > 0$ est asymptotiquement stabilisante : en absence de perturbations extérieures la sortie du système tend vers zéro pour toute condition initiale.

Considérons maintenant que la mesure est affectée par la perturbation $b(t)$, comme illustré dans la figure 3.19 et que $b(t)$ est un bruit blanc gaussien de variance $\text{var}[b] = 10^{-3}$ et de moyenne nulle $E[b] = 0$.

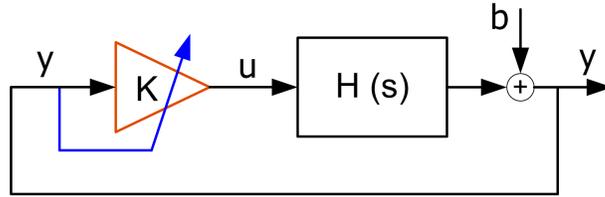
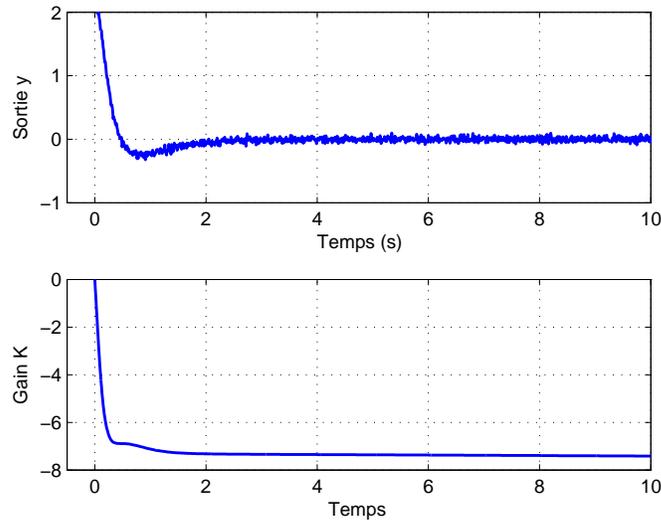


FIGURE 3.19 – La boucle fermée adaptative affectée par le bruit

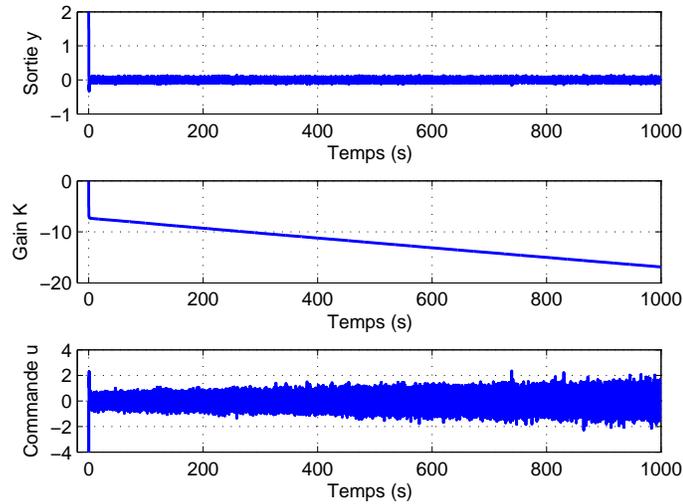
La Figure 3.20 montre les résultats d'une simulation à court terme ($t \leq 10$ s), obtenus en appliquant la loi adaptative (3.58) avec $\gamma = 10$, à partir des conditions initiales $y(0) = 2$. On observe que la sortie du système, affectée par le bruit, se stabilise autour de zéro et que le gain K tend vers une valeur constante. En regardant les réponses à plus long terme ($t \leq 1000$ s), Figure 3.21, on voit que la sortie reste toujours autour de zéro. En revanche, le gain K diverge, car on intègre le carré de la sortie, affectée par le bruit. Ce comportement pose des inconvénients majeurs, comme par exemple l'amplification du niveau de bruit sur la commande. D'un point de vue pratique, la loi (3.58) n'est pas implémentable telle quelle.

FIGURE 3.20 – Réponses à court terme de la boucle fermée adaptative avec la loi non-modifiée - $\gamma = 10$, $\sigma = 0$

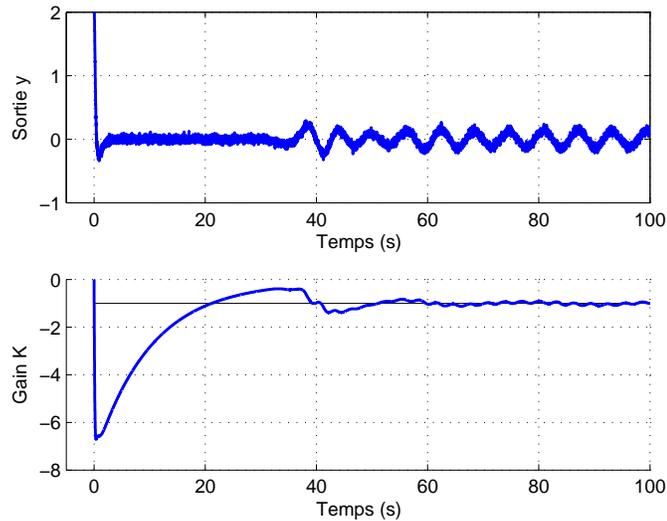
Comme décrit dans la section précédente, cet inconvénient peut être remédié en partie avec l'utilisation de la σ -modification. La loi modifiée s'écrit :

$$\begin{cases} u(t) = K(t)y(t) \\ \dot{K}(t) = -(y(t)^2 + \sigma(K(t) - K_0))\gamma \end{cases} \quad (3.59)$$

Considérons d'abord le cas où K_0 n'est pas stabilisant et choisissons $K_0 = 0$. Les résultats obtenus avec la loi modifiée (3.59), en prenant $\sigma = 0.01$ sont donnés sur la Figure 3.22. On observe que dans un premier temps le système se stabilise, la sortie tend vers zéro et le gain K diminue (sa valeur absolue augmente), mais

FIGURE 3.21 – Réponses à long terme de la boucle fermée adaptative avec la loi non-modifiée - $\gamma = 10$, $\sigma = 0$

reste borné. Assez rapidement K commence à augmenter ($t \approx 2.5s$), ce qui correspond au fait que le terme gradient de la loi d'adaptation devient plus petit que le terme σ (on peut alors dire que la sortie y est "faible"). Le gain continue d'augmenter et franchit le seuil d'instabilité $K = -1$. Ensuite, lorsque K se trouve dans la zone d'instabilité, des oscillations apparaissent sur la sortie : comme celle-ci s'éloigne de zéro ($t \approx 38s$) le gain diminue à nouveau, puis remonte et ainsi de suite. Le cycle limite apparaît : la sortie oscille autour de zéro et le gain autour de la valeur limite du domaine de stabilité, $K = -1$.

FIGURE 3.22 – Réponses de la boucle fermée adaptative avec la loi modifiée - $\gamma = 10$, $\sigma = 0.01$, $K_0 = 0$

Notons que ce comportement apparaît même en absence de perturbations extérieures et que l'amplitude des cycles limites dépend de la valeur de σ : plus σ est grand, plus les oscillations sont importantes. La Figure 3.23, qui montre les résultats de simulation avec $\sigma = 0.01$ et $\sigma = 0.1$ respectivement, pour une sortie non affectée par des bruits, illustre cette propriété. Ceci indique que, afin de réduire les oscillations, σ doit être choisi "petit". En pratique, la valeur de σ peut être fixée de manière à ce que l'amplitude des oscillations introduites par l'ajout de la σ -modification soit inférieure à l'amplitude du bruit de mesure.

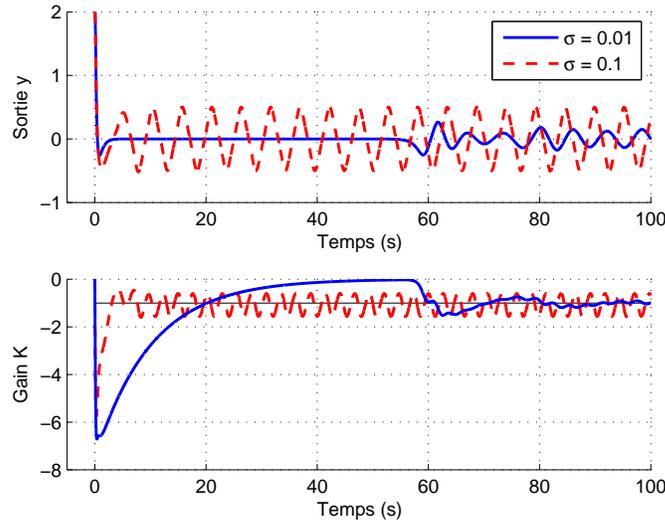


FIGURE 3.23 – Réponses de la boucle fermée adaptative, avec la loi modifiée - $\gamma = 10$, $\sigma = 0.01 / \sigma = 0.1$, sans bruit de mesure

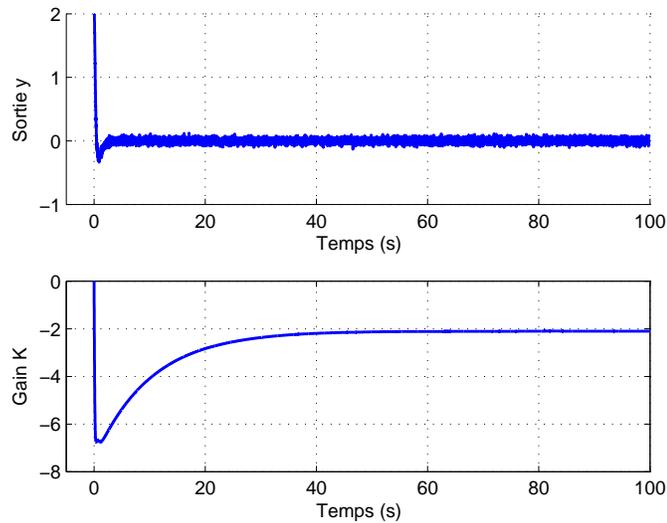
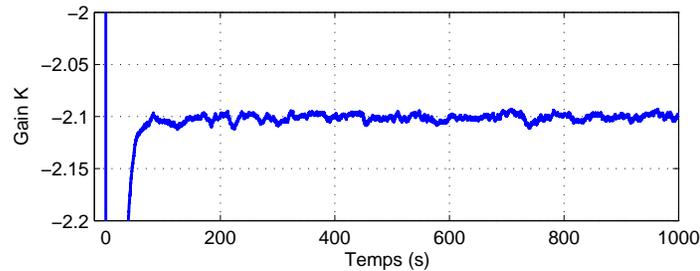
Considérons maintenant le cas où $K_0 = F_0$, gain stabilisant et choisissons $F_0 = -2$. La Figure 3.24 montre que les cycles limites disparaissent : la sortie, influencée par le bruit, est proche de zéro et le gain se stabilise vers une valeur proche de K_0 . Le décalage par rapport à K_0 , introduit par le bruit, de valeur $\frac{\text{var}[e]}{\sigma} = \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = 0.1$ peut être observé plus en détail sur la Figure 3.25. Pour le même choix $K_0 = F_0$ stabilisant, en l'absence de bruit, le gain K converge asymptotiquement vers F_0 , avec une dynamique qui dépend de la valeur de σ , comme montré par la Figure 3.26.

3.3.3 Evolution entre deux valeurs stabilisantes

Nous avons vu que dans le cas où $K_0 = F_0$, la loi avec σ -modification peut assurer la convergence vers zéro de la sortie y . Toujours sous l'hypothèse de connaissance d'un gain stabilisant F_0 , la loi (3.44) assure la stabilité asymptotique en boucle fermée pour tout système non-carré. L'application de la σ -modification s'écrit dans ce cas :

$$\dot{K}(t) = -(Gy(t)y(t)^T + \Phi_{D,\alpha}(K(t) - F_0) + \sigma \cdot (K(t) - F_0)) , \quad (3.60)$$

où l'on fait intervenir la fonction barrière Φ qui garantit que le gain reste à l'intérieur d'un domaine borné.

FIGURE 3.24 – Réponses de la boucle fermée adaptative, avec la loi modifiée - $\gamma = 10$, $\sigma = 0.01$, $K_0 = -2$ FIGURE 3.25 – Réponses de la boucle fermée adaptative, avec la loi modifiée - $\gamma = 10$, $\sigma = 0.01$, $K_0 = -2$ -zoom sur l'évolution du gain K

Outre la limitation de l'influence des perturbations persistantes, l'application de la σ -modification génère aussi une évolution du gain entre deux "valeurs" : lorsque la sortie est proche de zéro le terme σ est dominant et le gain varie peu autour de sa valeur nominale F_0 , dont on sait qu'elle est stabilisante. Lorsque la sortie est grande, le système s'éloigne de son point de fonctionnement nominal et le gain adaptatif évolue selon une loi qui peut être approximée par (3.44), que l'on sait aussi être stabilisante. Dès que la sortie redevient faible, K évolue vers F_0 et le comportement nominal est retrouvé.

L'utilisation de la σ -modification se révèle ainsi particulièrement utile lorsque le comportement désiré du système dépend de son point de fonctionnement : on souhaite garder un gain nominal lorsque la sortie est faible et faire évoluer le gain (éventuellement dans une direction "convenable") lorsque celle-ci est importante. Des remarques similaires sur l'évolution des gains sont faites dans Barkana (2007), où l'on affirme que le terme σ "rend le correcteur réellement adaptatif" et "associe le juste gain à la juste situation, en accord avec les besoins opérationnels changeants". Comme nous l'avons montré dans les chapitres précédents, ceci est le cas pour le problème de contrôle d'attitude que nous considérons, où une manière d'obtenir un comportement adéquat est

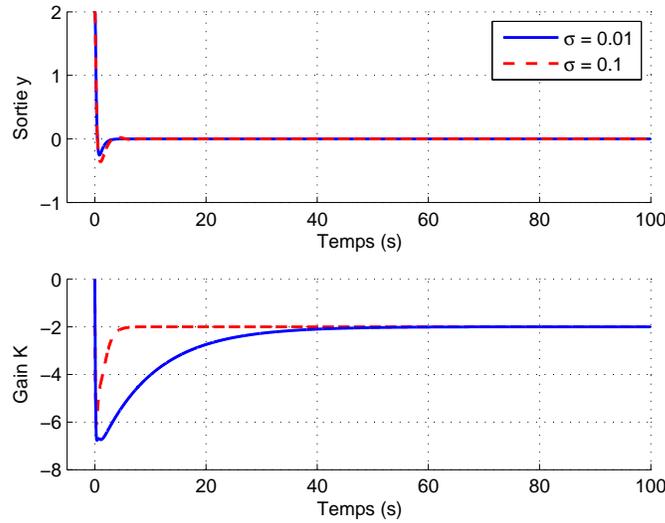


FIGURE 3.26 – Réponses de la boucle fermée adaptative, avec la loi modifiée - $\gamma = 10$, $\sigma = 0.01 / \sigma = 0.1$, $K_0 = -2$, sans bruit de mesure

en imposant des dynamiques différentes en fonction de la valeur de l'erreur de pointage.

L'influence de la σ -modification sur l'évolution des gains est représentée de manière schématique dans les Figures 3.27 et 3.28, pour le cas d'un gain scalaire et pour le cas d'un gain bidimensionnel, $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ respectivement. A observer que lorsque le gain est scalaire le terme gradient et le terme σ ont toujours des actions opposées : le premier tend à faire éloigner le gain de F_0 , dans une direction définie par le signe de g , alors que le terme σ "pousse" toujours vers la valeur nominale. Dans le cas bidimensionnel l'influence du terme gradient se traduit par une évolution dans plusieurs direction possibles (représentées par les flèches bleus), alors que le terme σ tend toujours à faire évoluer le gain vers F_0 .

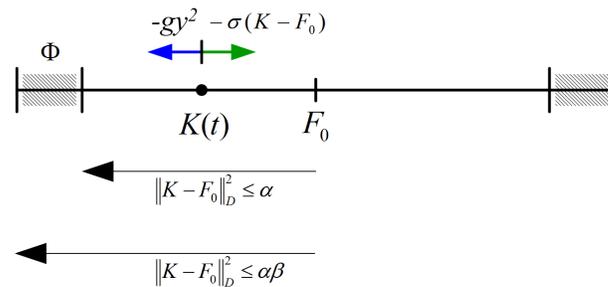
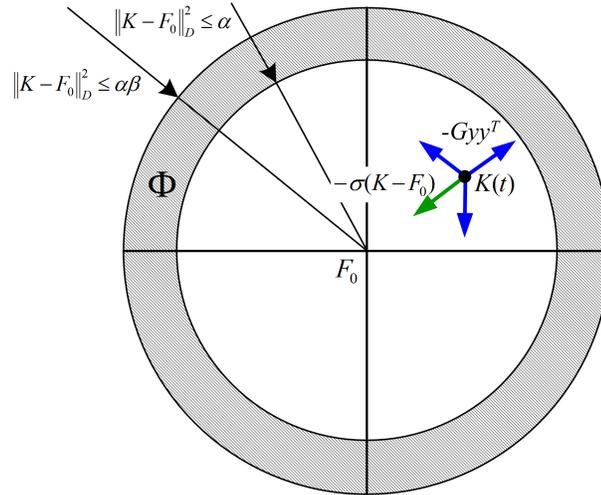


FIGURE 3.27 – Influence de la σ -modification - gain scalaire

FIGURE 3.28 – Influence de la σ -modification - gain bidimensionnel

3.4 Conclusions

Ce chapitre a présenté un résumé des principaux résultats existants dans le domaine de la commande adaptative directe que nous avons considérés utiles pour notre étude. Cette présentation permet de situer nos recherches dans le domaine, même si toutes les techniques associées au paradigme de la commande adaptative n'ont pas été détaillées. Afin de répondre aux besoins de notre application, la revue bibliographique a été principalement orientée vers des lois formulées sous forme de retour de sortie. Cette approche permet de s'affranchir du choix – complexe, pour le problème considéré – d'un modèle de référence. Les lois adaptatives ainsi exprimées ont également l'avantage d'être de complexité réduite, ce qui constitue un avantage important du point de vue de l'implémentation à bord d'un satellite.

Dans ce contexte, nous avons montré dans un premier temps comment les travaux portant sur la relaxation des hypothèses ont permis l'application de la commande adaptative à une vaste classe de systèmes, constituée par des modèles linéaires multi-entrées multi-sorties, non-carrés et sans propriétés de passivité. Le problème de commande des modèles de satellite que nous considérons peut ainsi être abordé sur la base de la commande adaptative. Notre étude bibliographique illustre également comment les hypothèses de passivité ont été remplacées par l'hypothèse de connaissance d'un gain statique stabilisant, utilisé par la loi de commande. Les lois adaptatives mises en œuvre de cette manière peuvent être considérées comme "mixtes", car l'adaptation est construite "autour" d'un gain stabilisant connu et la loi de commande peut également contenir un filtre linéaire. La structure de commande complète inclut ainsi une partie variable et une partie fixe. Cet aspect est intéressant du point de vue de notre étude, car la loi de commande initialement utilisée pour le contrôle d'attitude était exprimée sous une forme similaire, faisant intervenir un correcteur de type proportionnel dérivé. Un retour de sortie statique stabilisant est donc connu, ce qui fait que l'hypothèse nécessaire à l'application des lois adaptatives considérées est vérifiée. Couplée à ces résultats, l'utilisation de la σ -modification permet d'imposer des dynamiques différentes en boucle fermée en fonction des conditions de fonctionnement. Cet aspect est également d'intérêt pour notre application, car on est ainsi en mesure de répondre au besoin d'avoir

des comportements différents à fort et faible dépointage.

A partir de ces résultats, le chapitre suivant présente les contributions que nous avons apportées dans le domaine de la commande adaptative. Il s'agit en particulier de travaux portant sur la structuration des lois d'adaptation et sur les preuves de stabilité asymptotique des lois incluant la σ -modifications.

Chapitre 4

Commande adaptative structurée

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner des conditions de synthèse de lois adaptatives stabilisantes, permettant de couvrir, dans le cas de l'application au contrôle d'attitude de satellite, un domaine de fonctionnement élargi, allant jusqu'à ± 20 degrés.

Pour cela, nous proposons une loi de commande adaptative structurée et nous donnons les conditions garantissant la stabilité asymptotique en boucle fermée. L'utilisation d'une telle loi permet de spécifier la structure de l'adaptation et de limiter ainsi l'effort de commande en réponse aux conditions initiales/consignes de grande amplitude.

Afin de garantir l'utilisation d'un correcteur optimal à faible dépointage l'ajout de la σ -modification à la loi structurée est proposée, ce qui permet aux gains du correcteur de retourner vers leurs valeurs nominales respectives lorsque le système est proche du point d'équilibre. Des conditions de stabilité asymptotique de la loi ainsi modifiée sont données, garantissant que l'ajout des termes σ ne dégrade pas les propriétés de la loi structurée non-modifiée.

Ces développements offrent d'importants degrés de liberté, se traduisant par de nombreux paramètres qui doivent être déterminés. La procédure de synthèse associée à la loi de commande proposée permet d'obtenir, selon des critères clairs, des valeurs numériques pour tous ces paramètres. La nouvelle loi adaptative ainsi définie est appliquée pour le contrôle d'attitude de satellite, son intérêt étant illustré par les résultats de simulation.

4.2 Illustration du besoin, application de la loi adaptative non-structurée au satellite

Pour illustrer le besoin de développements supplémentaires sur les lois adaptatives existantes, nous présentons dans cette section des résultats obtenus avec l'application de la loi adaptative présentée dans la Section 3.2.4 au problème de contrôle d'attitude considéré. Cette loi a l'avantage d'être applicable aux systèmes non-carrés, ce qui correspond au fait que la vitesse angulaire du satellite peut être utilisée dans l'adaptation du correcteur.

La structure de commande faisant intervenir le correcteur adaptatif, introduite dans Peaucelle et al. (2011b) est représentée dans la Figure 4.1. Les gains adaptatifs remplacent alors la loi à commutation présentée dans la Section 1.4.3 et le filtre stabilisant est gardé comme partie de la nouvelle loi de commande.

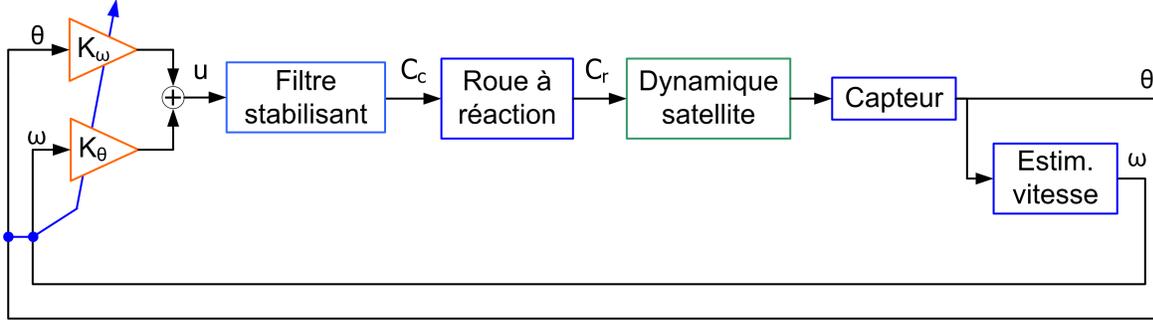


FIGURE 4.1 – Boucle fermée avec correcteur proportionnel - dérivé adaptatif

Le système vu par le correcteur adaptatif est ainsi défini par :

$$y = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \Sigma u \quad (4.1)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ H_{EV}(s) \end{bmatrix} \cdot H_{sat,x}(s) \cdot H_{roue}(s) \cdot H_{filtre,x}(s)$$

et la loi de commande adaptative, exprimée sous forme de retour de sortie, a l'expression présentée dans la Section 3.2.4 :

$$\begin{cases} u = Ky = K_\theta \theta + K_\omega \omega \\ \dot{K} = -Gyy^T \Gamma - \Phi_{D,\alpha}(K - F_0)\Gamma, \quad \Gamma > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Pour appliquer la procédure de synthèse nous considérons, comme dans le Chapitre 1, l'axe x du satellite Demeter, les expressions des fonctions de transfert figurant dans (4.1) étant celles données dans les Sections 1.4.1 et 1.4.2, pages 12-16, 21. Le gain statique stabilisant pour le système Σ est alors $F_0 = [0.1 \ 2]$ et le correcteur adaptatif évolue autour de cette valeur.

En appliquant la procédure de synthèse décrite dans la Section 3.2.4 et dans Peaucelle et al. (2011b), nous obtenons les valeurs numériques suivantes pour les paramètres qui définissent la loi adaptative 4.2 :

$$G = [27.13 \ -470.5], \quad D = 568, \quad \alpha = 1.54, \quad \beta = 1.1, \quad \gamma = 0.005. \quad (4.3)$$

Ces valeurs ont été obtenues en maximisant D lors de la résolution des conditions LMI (3.43) et en minimisant α dans (3.46 - 3.48), page 82 ce qui permet de maximiser le domaine de variation permis à $K(t)$. Le coefficient d'adaptation γ est calculé de manière à assurer une borne supérieure pour la vitesse de variation du gain, tandis que le choix $\beta = 1.1$ définit une fonction barrière de croissance "raisonnable", qui peut être implémentée en simulation. Ces choix sont discutés en détail dans les sections suivantes, en particulier lors de la définition de la procédure de synthèse proposée dans la partie applicative, en fin de ce chapitre.

Avec les valeurs numériques ci-dessus, le gain adaptatif K évolue dans le domaine borné :

$$\|K - F_0\|_D^2 \leq \alpha\beta = 1.6931 \Leftrightarrow \|K - F_0\|_I \leq \sqrt{\frac{\alpha\beta}{D}} = 0.0546. \quad (4.4)$$

Pour comparer cette loi adaptative avec la loi statique, définie par le gain F_0 , nous considérons, comme dans la Section 1.4.2.2 la réponse à des conditions initiales $\theta_0 = 10$ deg, $\omega_0 = 0$ deg/s. La réponse en position et vitesse du satellite est représentée dans la Figure 4.2 et les réponses observées au niveau de l'actionneur (couple et vitesse de la roue à réaction) sont illustrées dans la Figure 4.3.

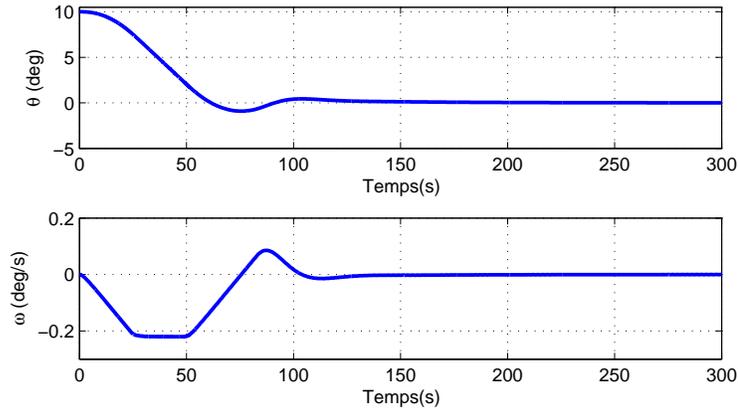


FIGURE 4.2 – Réponse en position en vitesse satellite avec la loi adaptative

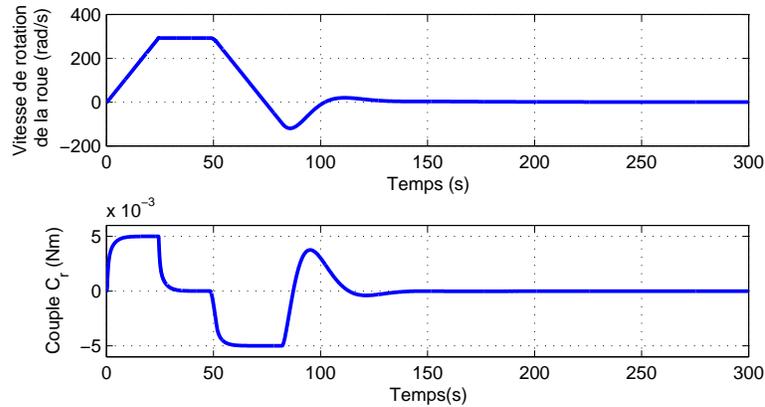


FIGURE 4.3 – Réponse en vitesse et couple roue avec la loi adaptative

Ces résultats montrent une amélioration notable par rapport aux réponses données dans les Figures 1.12 et 1.13, pages 19-19, obtenues avec la loi de commande statique, basée sur le retour de sortie F_0 . Cette amélioration peut être expliquée en analysant l'évolution des gains dans le temps, représentée dans la Figure 4.4. Remarquons tout d'abord que le gain en position varie d'approximativement 50% par rapport à sa valeur nominale, alors que K_ω varie de seulement 0.2%. On peut ainsi considérer que l'amélioration de la réponse est

principalement due à la variation de K_θ , la variation sur K_ω étant négligeable. Concernant l'évolution du gain en position, on observe que celui-ci diminue pendant les premières 12 secondes, pour ensuite garder une valeur à peu près constante. Le fait que cette valeur, plus petite que la valeur nominale, soit gardée à partir de $t = 12\text{s}$ fait que la commande calculée en sortie du correcteur adaptatif soit plus petite que celle obtenue en sortie du gain statique F_0 , comme illustré par la Figure 4.5. Cette diminution de l'effort de commande fait que le cycle limite généré par les saturations de l'actionneur est évité et le satellite rejoint sa position d'équilibre. On observe ainsi que, afin de pouvoir répondre à des conditions initiales de type grand dépointage, le gain en position doit diminuer lorsque l'erreur en attitude est importante. Plus la variation permise à ce gain est significative, plus l'amplitude des dépointages auxquels la loi adaptative peut faire face sera grande.

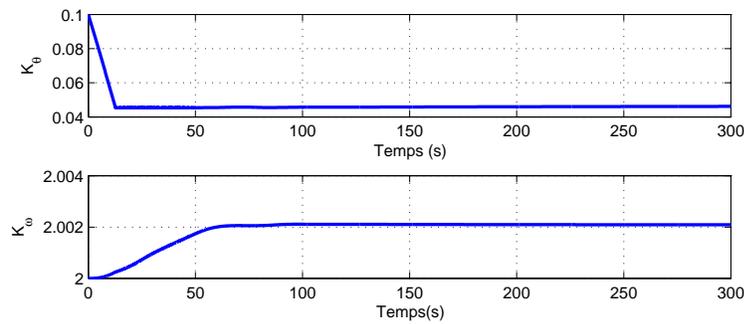


FIGURE 4.4 – Evolution des gains adaptatifs en fonction du temps

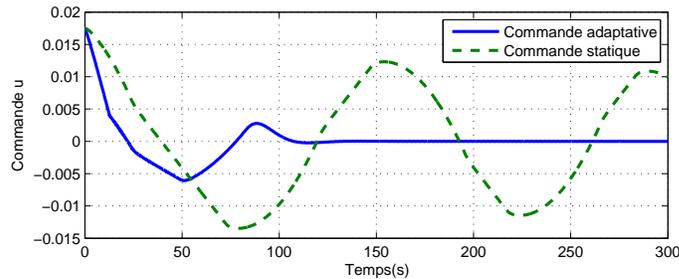


FIGURE 4.5 – Commande en sortie du gain statique/adaptatif

Il est également intéressant d'analyser la variation des gains dans un plan de phase, comme représentée dans la Figure 4.6. On peut ainsi observer que les gains évoluent en effet dans le domaine borné $\|K - F_0\|_I \leq \sqrt{\alpha\beta/D} = 0.055$ et qu'ils convergent à l'intérieur du domaine $\|K - F_0\|_I \leq \sqrt{\alpha/D} = 0.052$. Remarquons aussi que le domaine admis de variation correspond à seulement 2.5% de la valeur nominale de K_ω . Ceci est dû au fait que ce domaine prend la forme d'un cercle et que les valeurs nominales des gains en position et vitesse diffèrent d'un ordre de grandeur. De plus, pour les réponses présentées en Figure 4.4, K_ω varie très peu, même par rapport à ce domaine restreint. Ainsi, sa variation représente seulement 4% par rapport à l'intervalle qui lui serait permis, alors que K_θ varie sur l'intégralité du domaine. Sur la Figure 4.6, ceci correspond au fait que le domaine de variation est entièrement parcouru sur l'axe des abscisses, mais très peu sur celle des ordonnées.

Pour expliquer cette différence, il est utile de développer l'expression de la loi d'adaptation du gain, dans

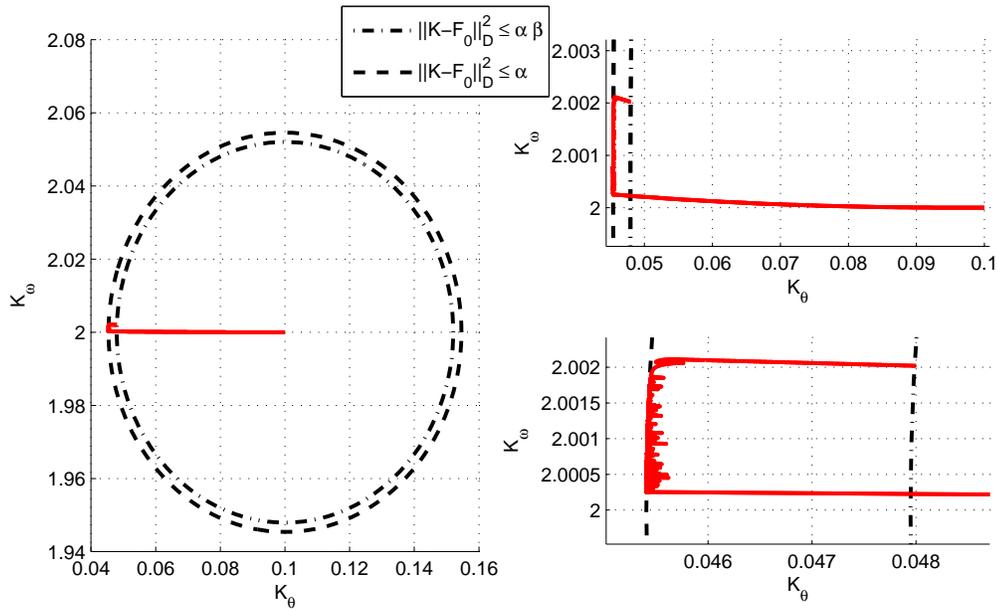


FIGURE 4.6 – Représentation paramétrée de l'évolution des gains - à droite zoom sur deux parties de la courbe

la zone où la fonction barrière n'est pas active :

$$\begin{aligned} \dot{K} &= -Gyy^T\Gamma = - \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & \omega \end{bmatrix} \Gamma \\ \begin{bmatrix} \dot{K}_\theta \\ \dot{K}_\omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -g_1\theta^2 - g_2\theta\omega \\ -g_1\theta\omega - g_2\omega^2 \end{bmatrix} \Gamma \end{aligned} \quad (4.5)$$

et d'observer que pour le type de condition initiale considérée nous avons en général $|\theta| \gg |\omega|$, le rapport entre la position et la vitesse étant encore plus grand en début de réponse. Ainsi, dans les secondes qui suivent $t = 0$, la dérivée de K_θ est très grande devant celle de K_ω et le gain varie dans la direction du gain en position (celui-ci diminue, car le terme prédominant est $-g_1\theta^2$, $g_1 > 0$). Cette variation se poursuit jusqu'à ce que la limite du domaine de variation est atteinte. Une diminution de K_θ n'étant plus possible à partir de ce point, le gain commence alors à évoluer dans la direction de K_ω , mais comme cette dérivée est faible, la variation est limitée.

Outre la différence en terme d'évolution et de domaines de variation entre les gains en position et vitesse, un autre inconvénient de cette loi d'adaptation est qu'elle génère principalement des variations dans un seul sens (comme on peut le voir sur la Figure 4.4, K_θ diminue et K_ω augmente). Ainsi, si suite à la réponse aux conditions initiales, une consigne d'attitude de l'ordre de 10 degrés en échelon était appliquée, les gains varieraient très peu, car lors de l'application de la consigne ils seraient déjà très proches de la limite du domaine de variation permis.

Une partie des inconvénients de cette loi pourraient être dépassés si les gains en position et en vitesse étaient adaptés séparément, à l'intérieur de domaines de variations indépendants. Aussi, afin de limiter la commande en sortie du correcteur adaptatif, $u = K_\theta\theta + K_\omega\omega$, K_ω devrait être adapté seulement en fonction

de la vitesse et K_θ seulement en fonction de la position angulaire et l'adaptation des deux gains devrait se faire dans une direction appropriée pour que cette limitation soit réalisée. D'un point de vue plus général, ceci indique le besoin de disposer d'une procédure de synthèse qui permette de prendre en compte une structure désirée pour l'adaptation. Cette structure correspond à la spécification des signaux à prendre en compte pour l'adaptation de chaque composante du gain, ainsi que de la direction de l'adaptation. Les domaines de variation pour chaque composante doivent être indépendants et, comme nous l'avons mentionné, plus ces domaines sont grands, plus l'amplitude des consignes que l'on peut suivre est importante.

Finalement, afin d'éviter que les gains varient dans un seul sens et pour retrouver le correcteur nominal quand le satellite est proche du point d'équilibre, les gains devraient retourner vers F_0 lorsque le dépointage et la vitesse angulaire sont faibles.

4.3 Proposition d'une loi d'adaptation structurée

Nous présentons dans cette section les conditions qui permettent d'obtenir des lois adaptatives structurées stabilisantes, qui répondent aux besoins que nous venons de détailler. Ces lois sont exprimées sous forme d'un retour de sortie dont les gains varient en fonction des signaux spécifiés par le développeur, à l'intérieur de domaines bornés indépendants.

4.3.1 Systèmes considérés, hypothèse principale

Considérons des systèmes LTI MIMO :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx = \begin{bmatrix} C_1^T & \dots & C_{\bar{i}}^T \end{bmatrix}^T x = \begin{bmatrix} y_1^T & \dots & y_{\bar{i}}^T \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (4.6)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées de commande et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des mesures. Ce dernier est structuré en sous vecteurs $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$, $i = 1 \dots \bar{i}$, avec $y_i = C_i x$. Le choix des sous-vecteurs y_i ainsi que de leur nombre \bar{i} peut se faire librement.

Exemple 6 Pour illustrer la notion de structuration du vecteur de mesure, considérons l'exemple d'un système dont la sortie mesurée est :

$$y = \mathbb{R}^3 = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ \phi \end{pmatrix}$$

où θ , ω et ϕ sont des scalaires.

Un premier choix de structuration peut être fait en prenant $\bar{i} = 3$ et les sous-vecteurs correspondants : $y_1 = \theta$, $y_2 = \omega$, $y_3 = \phi$ qui sont tous de même dimension, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Les sous-matrices C_i associées sont, dans ce cas : $C_i = C(i, :)$, $i = 1 : 3$.

Un autre choix peut être de prendre $\bar{i} = 2$ et $y_1 = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}$, $y_2 = \phi$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $C_1 = C(1 : 2, :)$, $C_2 = C(3, :)$. Toujours pour $\bar{i} = 2$, une autre possibilité est de diviser y dans : $y_1 = \theta$, $y_2 = \begin{pmatrix} \omega \\ \phi \end{pmatrix}$ avec

$p_1 = 1, p_2 = 2, C_1 = C(1, :), C_2 = C(2 : 3, :)$.

Par rapport au problème de stabilisation, présenté dans la section précédente, nous traitons ici le cas du suivi de référence $y_r(t)$, que nous supposons constante, $y_r(t) = y_c$. Remarquons que cette consigne n'est pas "filtrée" par un modèle de référence, mais appliquée directement à la boucle d'asservissement. On suppose ainsi l'existence d'une loi de commande stabilisante par retour de sortie statique :

$$u = F_0 e + M_0 y_r = \sum_{i=1}^{\bar{i}} F_{0i} e_i + M_0 y_r \quad (4.7)$$

où $e = y - y_r$ représente l'erreur de suivi, $F_0 = [F_{01} \dots F_{0\bar{i}}]$ assure la stabilité de la matrice d'état en boucle fermée : $A(F_0) = A + BF_0C$ et terme d'anticipation M_0 garantit une erreur statique $e(\infty)$ nulle en réponse à une consigne constante $y_r(t) = y_c$. Cette dernière propriété implique aussi l'existence de x_0 pour tout $y_r(t) = y_c$ tel que $Cx_0 = y_c$ et $Ax_0 = -M_0 y_c$. D'une manière similaire au vecteur de mesure, la référence y_r et l'erreur de suivi e sont structurées en sous-vecteurs : $e_i = y_i - y_{r_i}, i = 1 \dots \bar{i}$ et chaque bloc F_{0i} représente le gain associé au sous-vecteur e_i .

A partir de l'existence de la loi statique (4.7) la problématique de stabilisation et de suivi de consigne avec une loi adaptative $u(t) = K(t)e(t) + M_0 y_r(t)$ est explorée. Par rapport à la solution $K(t) = F_0$, on s'attend à ce que la commande adaptative puisse faire face à des problématiques de robustesse et d'amélioration de réponse transitoire. Le gain F_0 peut être idéal pour le système sans incertitudes, sans non-linéarités et proche du point d'équilibre, cependant l'adaptation du gain en temps réel peut aider à maintenir ou à améliorer les propriétés de la boucle fermée lorsque l'on s'éloigne de cette situation idéale.

Le schéma présenté propose seulement l'adaptation du gain de rétroaction $K(t)$, qui garantit la stabilité de la boucle fermée. Le terme d'anticipation M_0 pourrait lui-aussi être adapté selon des équations similaires à celles présentées dans la Section 3.2, afin d'améliorer les performances de suivi. Cette piste n'a pas été explorée dans le cadre de la thèse, le terme d'anticipation n'étant pas nécessaire pour assurer le suivi des références constantes pour le cas du contrôle d'attitude de satellite. En effet, comme dans ce cas le modèle contient un intégrateur en boucle ouverte, le choix $M_0 = 0$ est satisfaisant pour suivre des consignes constantes. Bien évidemment on ne s'attend pas à ce que les références de type échelon soit suivies de manière parfaite, mais seulement à ce que la position de consigne soit rejointe, avec une réponse transitoire "propre" (i.e. en évitant la saturation des actionneurs). Comme nous le montrons dans la partie applicative, l'utilisation d'un gain de rétroaction adaptatif permet de satisfaire cette contrainte et le choix d'un terme $M_0 = 0$, constant, permet de limiter l'effort de calcul.

4.3.2 Expression de la nouvelle loi d'adaptation

La loi adaptative structurée que nous proposons s'écrit :

$$\begin{cases} u(t) = K(t)e(t) + M_0 y_r(t) = \sum_{i=1}^{\bar{i}} K_i(t)e_i(t) + M_0 y_r(t) \\ \dot{K}_i(t) = -G_i e(t) e_i(t)^T \Gamma_i - \Phi_{D_i, \alpha_i} (K_i(t) - F_{0i}) \Gamma_i, \quad i = 1 : \bar{i} \end{cases} \quad (4.8)$$

où $K = [K_1 \dots K_{\bar{i}}]$ est le retour de sortie adaptatif, $K_i \in \mathbb{R}^{m \times p_i}$ et $G_i \in \mathbb{R}^{m \times p}$. La fonction barrière $\Phi_{D_i, \alpha_i} : \mathbb{R}^{m \times p_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p_i}$ agit sur chaque composante K_i du gain et s'exprime comme $\Phi_{D_i, \alpha_i}(K_i - F_{0i}) =$

$\psi_{D_i, \alpha_i}(\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2) \cdot (K_i - F_{0i})$. La fonction scalaire $\psi_{D_i, \alpha_i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle pour $\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 < \alpha_i$ et augmente jusqu'à l'infini lorsque son argument varie de α_i à $\alpha_i\beta$. Avec l'expression introduite dans la Section 3.2.4 nous avons, en notant $k_i = \|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2$:

$$\psi_{D_i, \alpha_i}(k_i) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0 < k_i < \alpha_i \\ \frac{k_i - \alpha_i}{\alpha_i\beta - k_i} & , \text{ si } \alpha_i \leq k_i \leq \alpha_i\beta. \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans (4.8), la structuration des vecteurs de mesure et d'erreur permet la décomposition de la commande en une somme de termes $K_i(t)e_i(t)$, dont chaque gain $K_i(t)$ est adapté séparément. Cela permet, comme il le sera illustré pour l'application du satellite, de prendre en compte des connaissances sur le processus à stabiliser. On peut, par exemple, imposer une adaptation plus rapide par rapport au sous-vecteur d'erreur e_1 et une adaptation plus lente par rapport aux autres sous-vecteurs d'erreur. Au-delà de la vitesse d'adaptation (spécifiée via les matrices définies positives Γ_i), chaque gain est adapté dans une certaine "direction", qui peut être imposée par le choix de la matrice G_i . En imposant $G_1e = g_1e_1$ avec g_1 un scalaire positif on force K_1 à évoluer seulement en fonction de e_1 et à diminuer lorsque $e_1e_1^T$ est grand. Au contraire, en imposant $G_1e = -g_1e_1$ on force K_1 à augmenter. La contrainte $G_1e = e_2$ impose l'évolution de K_1 en fonction des produits entre les erreurs de suivi et l'arrêt de l'adaptation lorsque soit e_1 soit e_2 est nul. Nous considérons que la structure proposée, avec la décomposition dans une somme de termes indépendants et les degrés de liberté offerts par les choix au niveau des matrices G_i , peut apporter une plus-value importante pour les applications pratiques.

Le deuxième terme de la loi d'adaptation contient la fonction Φ_{D_i, α_i} qui a l'effet d'une barrière, empêchant les gains de sortir d'un certain voisinage du gain statique, *a priori* connu, F_0 . Remarquons que les jeux de paramètres (D_i, α_i) sont différents pour chaque K_i ce qui signifie que les domaines dans lesquelles les composantes du gain évoluent sont indépendants. Cette propriété de bornitude est exprimée par le lemme suivant :

Lemme 2. *Si $e(t)$ est borné pour tout $t \geq 0$ alors $\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 < \alpha_i\beta$ pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. Considérons les fonctions de Lyapunov $V_i(K_i) = \text{Tr}((K_i - F_{0i})^T D_i (K_i - F_{0i}))$, $i = 1 \dots \bar{i}$. Leurs dérivées le long des trajectoires de (4.6) avec la loi de commande (4.8) s'écrivent, pour $\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 > \alpha_i$:

$$\dot{V}_i(K_i) = -2\text{Tr}(\Gamma_i e_i e_i^T G_i^T D_i (K_i - F_{0i}) - \Gamma_i \Phi_{D_i, \alpha_i}^T (K_i - F_{0i}) D_i (K_i - F_{0i})) \quad (4.10)$$

Comme $\text{Tr}(2A) = \text{Tr}(A + A^T)$ and $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(K_i) &= -\text{Tr}(e^T G_i^T D_i (K_i - F_{0i}) \Gamma_i e_i + e_i^T \Gamma_i (K_i - F_{0i})^T D_i G_i e - 2\Gamma_i \Phi_{D_i, \alpha_i}^T (K_i - F_{0i}) D_i (K_i - F_{0i})) \\ &= \{e^T G_i^T D_i (K_i - F_{0i}) \Gamma_i e_i\}^S - 2 \frac{\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 - \alpha_i}{\alpha_i\beta - \|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2} \cdot \text{Tr}(\Gamma_i (K_i - F_{0i})^T D_i^2 (K_i - F_{0i})) \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette équation tend vers l'infini lorsque $\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2$ tend vers $\alpha_i\beta$. Par conséquent, pour des valeurs bornées de e et de K , il existe des scalaires k_i , $i = 1 \dots \bar{i}$, tel que $\dot{V}_i(K_i) < 0$ pour tout K_i

vérifiant $k_i < \|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 < \alpha_i \beta$ ce qui implique que les trajectoires sont décroissantes et $\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2$ ne peut pas dépasser $\alpha_i \beta$. \square

4.3.3 Conditions de stabilité

La stabilité de la boucle fermée avec la loi adaptative n'est bien sûr pas garantie pour toute valeur des paramètres $(G_i, D_i, \alpha_i)_{i=1..n}$. Énoncées ci-dessous, les conditions de synthèse que nous proposons permettent de trouver des valeurs numériques pour ces paramètres, afin de garantir la stabilité de la boucle fermée avec la loi de commande adaptative structurée.

En se basant sur la propriété de G -passivité, présentée dans la Section 3.2.2, et sur l'utilisation d'un "shunt" instrumental similaire au celui introduit dans la Section 3.2.4, la proposition suivante donne des conditions suffisantes pour trouver (G_i, D_i) tels que le système représenté dans la Figure 4.7 soit passif. Exprimées sous forme LMI, ces conditions ont l'avantage de permettre l'ajout de contraintes linéaires supplémentaires sur les matrices G_i et D_i . Rappelons à ce stade que la structure qui apparaît dans la Figure 4.7 n'est pas implémenté en pratique. Les matrices G_i et D_i ont ainsi un rôle instrumental, dans le sens où elles définissent une certaine propriété de passivité du système à commander, nécessaire à la mise en place de la loi adaptative proposée.

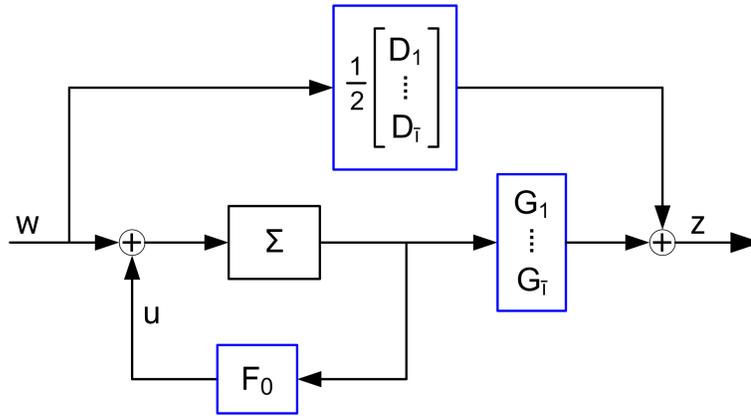


FIGURE 4.7 – Système passif défini par les matrices G_i et D_i

Proposition 8. Si F_0 est un gain stabilisant pour le système (4.6), i.e. $\dot{x} = A(F_0) = (A + BF_0C)x$ est asymptotiquement stable, alors il existe (P, D_i, G_i) , $i = 1 \dots n$, solution au problème LMI suivant :

$$P > \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \{PA(F_0)\}^S & PB - C^T G_1^T & \dots & PB - C^T G_n^T \\ B^T P - G_1 C & -D_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B^T P - G_n C & \mathbf{0} & \dots & -D_n \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

Les matrices (G_i, D_i) définissent alors un système strictement passif :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(F_0)x + Bw \\ z = \begin{bmatrix} G_1 C \\ \vdots \\ G_{\bar{i}} C \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_{\bar{i}} \end{bmatrix} w. \end{cases} \quad (4.12)$$

Démonstration. Soit $x^T P x$, $P > \mathbf{0}$, une fonction quadratique de Lyapunov qui prouve la stabilité asymptotique de $\dot{x} = A(F_0)x$. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que :

$$A^T(F_0)P + PA(F_0) \leq -\epsilon I \quad (4.13)$$

Pour toutes matrices $(G_i)_{i=1:\bar{i}}$ il existe des matrices $D_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $D_i > 0$, $i = 1 : \bar{i}$, de norme suffisamment grande, telles que :

$$\begin{bmatrix} PB - C^T G_1^T & \cdots & PB - C^T G_{\bar{i}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & D_{\bar{i}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T P - G_1 C \\ \vdots \\ B^T P - G_{\bar{i}} C \end{bmatrix} < \epsilon I \quad (4.14)$$

En sommant les inégalités (4.13) et (4.14) et en appliquant le complément de Schur on obtient la LMI (4.11). La passivité de la boucle fermée en découle directement, en utilisant, par exemple, les résultats de (Boyd et al., 1994). \square

Associé à la Proposition 8, le théorème donne des conditions pour la stabilité du système en boucle fermée avec la loi de commande adaptative.

Théorème 7. Si (F_0, G_i, D_i) , $i = 1 \dots \bar{i}$ sont une solution faisable du problème LMI (4.11) et $\beta > 1$ un scalaire donné, alors il existe $Q > 0$, $R_i, T_i, F_i, \alpha_i, \epsilon$ solutions du problème LMI suivant :

$$\begin{bmatrix} R_i & QB - C^T G_i^T \\ B^T Q - G_i C & D_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, i = 1 \dots \bar{i} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} T_i & (F_i - F_{0i})^T \\ (F_i - F_{0i}) & D_i^{-1} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \text{Tr}(T_i) \leq \alpha_i, i = 1 \dots \bar{i} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & \{QA(F_0)\}^S + \epsilon I + \\ & + \sum_{i=1}^{\bar{i}} \left(\alpha_i \beta C_i^T C_i + R_i + \{C_i^T (F_i - F_{0i})^T G_i C\}^S \right) < \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La solution du problème donne une loi de commande $u = F e$ où $F = \begin{bmatrix} F_1 & \dots & F_{\bar{i}} \end{bmatrix}$ est un retour de sortie stabilisant qui respecte $\|F_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 \leq \alpha_i$.

Pour tout $\Gamma_i > \mathbf{0}$ les paramètres $(\Gamma_i, G_i, \alpha_i, D_i, \beta)$ définissent un correcteur adaptatif de la forme (4.8) garantissant la stabilité asymptotique de l'état x . Si $y_r(t) = y_c = \text{const}$ et M_0 est tel que $Cx_0 = y_c$, $Ax_0 = -M_0 y_c$, alors l'erreur de suivi $e = y - y_r$ converge asymptotiquement vers zéro.

Avant de formuler la preuve de ce résultat, nous énonçons un lemme qui y sera utilisé.

Lemme 3. Pour tout F, K satisfaisant $\|F - F_0\|_D^2 \leq \alpha$ et $\|K - F_0\|_D^2 \leq \alpha\beta$ nous avons $\text{Tr}(\Phi_{D,\alpha}(K - F_0) \cdot (K - F)^T) \geq 0$.

Démonstration. Si $\|K - F_0\|_D^2 \leq \alpha$ alors $\Phi(K - F_0) = 0$ et le résultat est trivial.

Soit T tel que $\text{Tr}(T) \leq \alpha$ avec $(F - F_0)D(F - F_0)^T \leq T$. Par complément de Schur nous avons :

$$\begin{bmatrix} T & (F - F_0)^T \\ (F - F_0) & D^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.18)$$

En pre et post multipliant cette inégalité par $[1 \quad -(K - F_0)^T D]$ et son transposé respectivement nous obtenons :

$$T - (K - F_0)^T D(F - F_0) - (F - F_0)^T D(K - F_0) + (K - F_0)^T D(K - F_0) \geq 0. \quad (4.19)$$

En additionnant et soustrayant $(K - F_0)^T D(K - F_0)$ nous avons :

$$\begin{aligned} T + (K - F_0)^T D(K - F) + (K - F)^T D(K - F_0) - (K - F_0)^T D(K - F_0) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (K - F_0)^T D(K - F) + (K - F)^T D(K - F_0) &\geq (K - F_0)^T D(K - F_0) - T \end{aligned} \quad (4.20)$$

et en prenant la trace de l'inégalité :

$$\begin{aligned} 2\text{Tr}((K - F_0)^T D(K - F)) &= 2\text{Tr}(D(K - F_0)(K - F)^T) \geq \text{Tr}((K - F_0)^T D(K - F_0) - T) \\ &\geq \text{Tr}((K - F_0)^T D(K - F_0)) - \alpha \end{aligned} \quad (4.21)$$

Grace à cette inégalité nous avons, pour tout K tel que $\alpha \leq \|K - F_0\|_D^2 \leq \alpha\beta$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Phi(K - F_0) \cdot (K - F)^T) &= \frac{\text{Tr}((K - F_0)^T D(K - F_0)) - \alpha}{\alpha\beta - \text{Tr}((K - F_0)^T D(K - F_0))} \cdot \text{Tr}(D(K - F_0)(K - F)^T) \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{(\text{Tr}((K - F_0)^T D(K - F_0)) - \alpha)^2}{\alpha\beta - \text{Tr}((K - F_0)^T D(K - F_0))} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

□

Démonstration du Théorème 7. Nous prouvons dans un premier temps l'existence d'une solution au problème. Soit $(P, F_0, (G_i, D_i)_{i=1:\bar{i}})$ vérifiant (4.11). En appliquant le complément de Schur nous avons :

$$A^T(F_0)P + PA(F_0) + (PB - C^T G_i^T)D_i^{-1}(B^T P - G_i C) < \mathbf{0}, \quad i = 1 : \bar{i} \quad (4.23)$$

En prenant des ϵ_i suffisamment petits nous avons :

$$\begin{aligned} A^T(F_0)P + PA(F_0) + R_i &< \mathbf{0} \\ R_i &= (PB - C^T G_i^T)D_i^{-1}(B^T P - G_i C) + \epsilon_i I, \quad i = 1 : \bar{i} \end{aligned} \quad (4.24)$$

En appliquant le complément de Schur nous obtenons les inégalités (4.15) et (4.17) avec $Q = P, F = F_0, \alpha_i = 0, i = 1 : \bar{i}$ et $\varepsilon = 0$. Pour ces valeurs, les inégalités (4.16) ont une solution triviale avec $T_i = \mathbf{0}$,

$i = 1 : \bar{i}$. Avec un raisonnement de faible perturbation nous obtenons l'existence d'une solution avec $\varepsilon \neq 0$, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1 : \bar{i}$.

Montrons maintenant le résultat concernant le retour de sortie statique F . Multiplions (4.15) à gauche et à droite par $[I - C_i^T(F_i - F_{0i})^T]$ et son transposé respectivement et sommons les inégalités résultantes pour $i = 1 \dots \bar{i}$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\bar{i}} R_i + \sum_{i=1}^{\bar{i}} \{C_i^T G_i^T (F_i - F_{0i}) C_i\}^S \\ & \geq \sum_{i=1}^{\bar{i}} \{C_i^T (F_i - F_{0i})^T B^T Q\}^S - C_i^T (F_i - F_{0i})^T D_i (F_i - F_{0i}) C_i \\ & = \{Q(A(F) - A(F_0))\}^S - \sum_{i=1}^{\bar{i}} C_i^T (F_i - F_{0i})^T D_i (F_i - F_{0i}) C_i. \end{aligned} \quad (4.25)$$

En combinant cette inégalité avec (4.17) nous avons :

$$\{QA(F)\}^S + \varepsilon e_x^T e_x + \sum_{i=1}^{\bar{i}} C_i^T (\alpha_i \beta I - (F_i - F_{0i})^T D_i (F_i - F_{0i})) C_i \leq \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

En appliquant le complément de Schur sur (4.16) nous obtenons :

$$\|F_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 \leq \text{Tr}(T_y) \leq \alpha_i \quad (4.27)$$

ce qui représente la borne sur $F_i - F_{0i}$. Comme $\beta > 1$ et $(F_i - F_{0i})^T D_i (F_i - F_{0i}) \leq \|F_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 I$, cela implique aussi la stabilité en boucle fermée : $A^T(F)Q + QA(F) < \mathbf{0}$.

Les gains F_i ont seulement un rôle instrumental. Ils ne sont pas uniques (les solutions d'un problème LMI se trouvent dans un ensemble convexe) et correspondent aux valeurs vers lesquelles les gains adaptatifs $K_i(t)$ pourraient converger. En effet, la fonction Lyapunov suivante est considérée pour le système en boucle fermée avec la commande adaptative :

$$V(x, K) = e_x^T Q e_x + \sum_{i=1}^{\bar{i}} \text{Tr}((K_i - F_i) \Gamma_i^{-1} (K_i - F_i)^T). \quad (4.28)$$

Cette fonction est positive définie et si sa dérivée est négative des propriétés de stabilité peuvent être déduites. La stabilité est analysée par rapport à son minimum $V(x_0, F_i) = 0$. Cet valeur correspond à l'équilibre $e_x = x - x_0 = 0$ (où x_0 est tel que $Cx_0 = y_c$, comme mentionné ci-dessus) et $K_i = F_i$ où F_i définissent les gains statique stabilisant $F = [\dots F_i \dots]$ et sont une solution des contraintes LMI.

La dérivée de V le long des trajectoires de (4.6) avec la loi de commande (4.8) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2e_x^T Q (Ax + BKe + BM_0 Cx) + 2 \sum_{i=1}^{\bar{i}} \text{Tr}(\dot{K}_i \Gamma_i^{-1} (K_i - F_i)^T) \\ &= 2e_x^T Q (Ae_x + BKe) + 2 \sum_{i=1}^{\bar{i}} \text{Tr}(\dot{K}_i \Gamma_i^{-1} (K_i - F_i)^T) \end{aligned} \quad (4.29)$$

En multipliant (4.17) à gauche et à droite par e_x^T et e_x respectivement nous obtenons :

$$2e_x^T Q (Ae_x + BF_0 e) \leq -\varepsilon e_x^T e_x - \sum_{i=1}^{\bar{i}} (\alpha_i \beta e_i^T e_i + e_x^T R_i e_x + 2e_i^T (F_i - F_{0i})^T G_i e) \quad (4.30)$$

En utilisant l'expression de \dot{V} cela donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & 2e_x^T QB(K - F_0)e \\ & - \varepsilon e_x^T e_x - \sum_{i=1}^{\bar{i}} \left(\alpha_i \beta e_i^T e_i + e_x^T R_i e_x + 2e_i^T (F_i - F_{0i})^T G_i e + 2\text{Tr}(\dot{K}_i \Gamma_i^{-1} (K_i - F_i)^T) \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Pre et post multiplions (4.15) par $[e_x^T \quad -e_i^T (K_i - F_{0i})^T]$ et sa transposée respectivement. En sommant les inégalités résultantes pour $i = 1 \dots \bar{i}$ nous obtenons :

$$2e_x^T QB(K - F_0)e - \sum_{i=1}^{\bar{i}} (e_x^T R_i e_x + 2e_i^T (K_i - F_{0i})^T G_i e) \leq \sum_{i=1}^{\bar{i}} e_i^T (K_i - F_{0i})^T D_i (K_i - F_{0i}) e_i \quad (4.32)$$

et ensuite :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\varepsilon e_x^T e_x + \sum_{i=1}^{\bar{i}} e_i^T \left((K_i - F_{0i})^T D_i (K_i - F_{0i}) - \alpha_i \beta I \right) e_i \\ & + \sum_{i=1}^{\bar{i}} \left(2e_i^T (K_i - F_i)^T G_i e + 2\text{Tr}(\dot{K}_i \Gamma_i^{-1} (K_i - F_i)^T) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

La première somme est strictement négative d'après le Lemme 2. Comme $\text{Tr}(G_i e e_i^T (K_i - F_i)^T) = e_i^T (K_i - F_i)^T G_i e$ nous obtenons, en remplaçant la valeur de \dot{K}_i :

$$\dot{V} \leq -\varepsilon e_x^T e_x - 2 \sum_{i=1}^{\bar{i}} \text{Tr}(\Phi_{D_i, \alpha_i} (K_i - F_{0i}) \cdot (K_i - F_i)^T) \quad (4.34)$$

En utilisant le Lemme 3 on prouve que la dérivé de la fonction de Lyapunov est négative le long des trajectoires. Elle est strictement négative tant que l'erreur e_x est non-nulle, prouvant ainsi la convergence de l'état x vers x_0 (et donc de y vers la référence y_c). \dot{V} est aussi strictement négative tant que $\Phi_{D_i, \alpha_i} (K_i - F_{0i})$ est non-nulle. Cela prouve que les gains $K_i(t)$ convergent vers l'ensemble $\{K_i \text{ t.q. } \|K_i - F_{0i}\|_{D_i} \leq \alpha_i\}$ où $\Phi_{D_i, \alpha_i} (K_i - F_{0i})$ est nulle, mais n'implique pas la convergence des gains vers F_i , utilisés dans la définition de la fonction de Lyapunov. \square

Résumons maintenant les principales hypothèses et résultats. Les conditions de synthèse sont basées sur la connaissance d'un gain statique stabilisant F_0 . Connaissant cette valeur, la Proposition 8, à laquelle on peut ajouter des éventuelles contraintes linéaires, donne, par résolution LMI, des matrices $(G_i, D_i)_{i=1 \dots \bar{i}}$. Ces matrices étant choisies, deux informations sont obtenues en appliquant le Théorème 7. Le premier résultat est un nouveau gain stabilisant F . Celui-ci est purement instrumental et n'est pas utilisé par la loi adaptative. Le deuxième résultat obtenu en appliquant le Théorème 7 est l'ensemble de scalaires $(\alpha_i)_{i=1 \dots \bar{i}}$. Ce sont les derniers coefficients qui doivent être choisis de manière précise afin de garantir la propriété de stabilité de la commande adaptative.

Ces scalaires définissent la distance, à partir de F_0 , à laquelle le gain adaptatif $K(t)$ peut évoluer (voir le Lemme 2). Si les α_i sont nuls, aucune variation autour de F_{0i} n'est permise et les gains ne sont pas adaptés. Si les α_i sont proches de zéro, les gains $K_i(t)$ pourront peu varier autour de F_{0i} et plus les α_i sont grands, plus

l'adaptation peut être grande, sans perdre les propriétés de stabilité de la boucle fermée. Comme les ensembles $\{K_i \text{ t.q. } \|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 \leq \alpha_i \beta\}$ dépendent non seulement des coefficients α_i mais aussi de valeurs de D_i , une recherche combinée de (D_i, α_i) est nécessaire si l'on veut maximiser l'ensemble des variations possibles de K_i autour de F_{0i} . Une procédure heuristique en deux pas est ainsi proposée pour la synthèse de la loi adaptative :

1. Minimiser $\sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \text{Tr}(D_i)$ sous (4.11) et, le cas échéant, sous d'autres contraintes linéaires sur les matrices (G_i, D_i) , où $w_i > 0$ sont des pondérations positives choisies en fonction des composantes du gain que l'on veut autoriser à varier plus ou moins.
2. Maximiser $\sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \alpha_i$ sous (4.15-4.17).

Comme énoncé dans l'hypothèse du Théorème 7, les conditions qui y figurent sont suffisantes pour prouver la stabilité de la boucle fermée adaptative, mais pas nécessaires. Ce conservatisme implique que l'on ne peut pas prouver l'optimalité des paramètres trouvés avec la procédure en deux pas présentée ci-dessus, quelque soit le critère que l'on cherche à optimiser. Dans le cas considéré, ce critère est donné par $\sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \alpha_i / \text{Tr}(D_i)$, correspondant à la "taille" des domaines bornés, définissant $\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 \leq \alpha_i$. La procédure proposée permet alors de trouver des valeurs faisables, garantissant la stabilité avec la commande adaptative. En revanche, on ne peut pas prouver l'optimalité de ces valeurs vis-à-vis du critère défini ; c'est la raison pour laquelle nous considérons cette procédure comme heuristique.

L'objectif proposée pour la procédure synthèse – la maximisation des domaines de variation des gains – peut être justifié dans un premier temps de manière intuitive, car afin d'obtenir une amélioration avec la loi adaptative par rapport à la loi statique il faut que des variations significatives soient permises aux gains. Pour le cas spécifique de l'application visée, de grandes variations des gains, dans une direction appropriée, permettent de limiter la commande calculée en réponse à des conditions initiales et consignes de grande amplitude, comme illustré dans la Section 4.2.

4.4 Application de la σ -modification et influence sur la stabilité

Une fois les conditions de synthèse de lois adaptatives structurées stabilisantes trouvées, l'ajout de la σ -modification permet aux gains adaptatifs K_i de retourner vers leurs valeurs nominales F_{0i} , lorsque les erreurs sont faibles, i.e. lorsque le système se trouve proche du point de fonctionnement nominal. La forme ainsi modifiée de la loi adaptative structurée (4.8) s'écrit :

$$\begin{cases} u(t) = K(t)e(t) + M_0 y_r(t) \\ \dot{K}_i(t) = -G_i e e_i^T \Gamma_i - \sigma_i (K_i(t) - F_{0i}) \Gamma_i - \Phi_{D_i, \alpha_i} (K_i(t) - F_{0i}) \Gamma_i, \quad i = 1 : \bar{n}, \end{cases} \quad (4.35)$$

où σ_i sont des scalaires positifs. Les gains adaptatifs sont alors poussés par les termes σ vers F_{0i} , composantes du gain stabilisant F_0 , avec des dynamiques d'ordre un : plus les σ_i sont grands, plus ces dynamiques sont rapides. Lorsque les erreurs sont faibles, les gains adaptatifs vont être proches de F_{0i} et en régime stationnaire, si les erreurs sont identiquement nulles, le gain adaptatif $K(t)$ est constant et égal à F_0 .

Comme montré dans la Section 3.3, l'utilisation de la σ -modification avec un gain F_0 stabilisant peut permettre la convergence vers le point d'équilibre ($e = 0$, $K = F_0$), en absence de bruits. Cependant, avec

l'introduction du terme σ , les preuves de convergence de l'erreur vers zéro restent difficiles. Le théorème suivant donne un résultat de stabilité avec la convergence de l'erreur vers un ensemble borné, qui dépend des valeurs des paramètres σ_i .

Théorème 8. *Si (F_0, G_i, D_i) , $i = 1 \dots \bar{i}$ sont une solution faisable du problème LMI (4.11) et $\beta > 1$ un scalaire donné, alors il existe $Q > 0, R_i, T_i, F_i, \alpha_i, \varepsilon > 0$ solutions au problème LMI (4.15-4.17).*

Pour tout $\sigma_i > 0, \Gamma_i > \mathbf{0}$ les paramètres $(\Gamma_i, G_i, \alpha_i, D_i, \sigma_i, \beta)$ définissent un correcteur adaptatif (4.35) tel que l'erreur $e_x = x - x_0$ est bornée.

Avant de donner la preuve du théorème nous présentons un résultat technique qui y sera utilisé.

Lemme 4. *Pour tout F, K satisfaisant $\|F - F_0\|_D^2 \leq \alpha$ et $\|K - F_0\|_D^2 \leq \alpha\beta$ nous avons :*

$$\text{Tr}((K - F_0)(K - F)^T) \geq -\alpha / (2\lambda_D).$$

Démonstration. Notons d'abord que pour une matrice X quelconque nous avons :

$$\sqrt{\lambda_D} \cdot \|X\| \leq \|X\|_D \leq \sqrt{\bar{\lambda}_D} \cdot \|X\| \quad (4.36)$$

où $\|X\|$ est la norme Frobenius de X , $\|X\| = \sqrt{\text{Tr}(X^T X)}$. λ_D et $\bar{\lambda}_D$ représentent la valeur propre la plus petite et la plus grande respectivement de la matrice D , définie positive.

En effet, comme :

$$\lambda_D I \leq D \leq \bar{\lambda}_D I \quad (4.37)$$

nous obtenons, en pre et post-multipliant cette inégalité par X^T et X respectivement :

$$\lambda_D X^T X \leq X^T D X \leq \bar{\lambda}_D X^T X \quad (4.38)$$

puis en prenant la trace et la racine carrée :

$$\sqrt{\lambda_D} \cdot \sqrt{\text{Tr}(X^T X)} \leq \sqrt{\text{Tr}(X^T D X)} \leq \sqrt{\bar{\lambda}_D} \cdot \sqrt{\text{Tr}(X^T X)} \quad (4.39)$$

ce qui donne :

$$\sqrt{\lambda_D} \cdot \|X\| \leq \|X\|_D \leq \sqrt{\bar{\lambda}_D} \cdot \|X\| \quad (4.40)$$

Comme $\|F - F_0\|_D^2 \leq \alpha$ cela implique $\|F - F_0\|^2 \leq \alpha / \lambda_D$.

Le reste de la preuve suit les lignes de celle du Lemme 3. Soit T tel que $\text{Tr}(T) \leq \alpha / \lambda_D$ avec $(F - F_0)D(F - F_0)^T \leq T$. Par complément de Schur nous avons : $\begin{bmatrix} T & (F - F_0)^T \\ (F - F_0) & I \end{bmatrix} \geq 0$. En pre et post multipliant cette inégalité par $[1 \quad -(K - F_0)^T]$ et sa transposée respectivement nous obtenons :

$$T - (K - F_0)^T(F - F_0) - (F - F_0)^T(K - F_0) + (K - F_0)^T(K - F_0) \geq 0. \quad (4.41)$$

En additionnant et soustrayant $(K - F_0)^T(K - F_0)$ nous avons :

$$\begin{aligned} T + (K - F_0)^T(K - F) + (K - F)^T(K - F_0) - (K - F_0)^T(K - F_0) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (K - F_0)^T(K - F) + (K - F)^T(K - F_0) &\geq (K - F_0)^T(K - F_0) - T \end{aligned} \quad (4.42)$$

et en prenant la trace de l'inégalité :

$$2\text{Tr}((K - F_0)^T(K - F)) = 2\text{Tr}((K - F_0)(K - F)^T) \geq \text{Tr}((K - F_0)^T(K - F_0) - T) \geq -\alpha/\lambda_D.$$

□

Démonstration du Théorème 8. La preuve est très similaire à celle du théorème 7. La stabilité de la boucle fermée avec la loi commande adaptative (4.35) est basée sur l'étude de la fonction de Lyapunov :

$$V(x, K) = e_x^T Q e_x + \sum_{i=1}^{\bar{i}} \text{Tr}((K_i - F_i)\Gamma_i^{-1}(K_i - F_i)^T) \quad (4.43)$$

dont la dérivé vérifie (voir preuve du théorème 7) :

$$\dot{V} \leq -\varepsilon e_x^T e_x + \sum_{i=1}^{\bar{i}} \left(2e_i^T (K_i - F_i)^T G_i e + 2\text{Tr}(\dot{K}_i \Gamma_i^{-1} (K_i - F_i)^T) \right) \quad (4.44)$$

En remplaçant \dot{K}_i selon (4.35) nous obtenons :

$$\dot{V} \leq -\varepsilon e_x^T e_x - 2 \sum_{i=1}^{\bar{i}} \text{Tr}(\sigma_i (K_i - F_{0i})(K - F_i)^T) - 2 \sum_{i=1}^{\bar{i}} \text{Tr}(\Phi_{D_i, \alpha_i} (K_i - F_{0i}) \cdot (K_i - F_i)^T) \quad (4.45)$$

D'après le Lemme 4 nous avons : $-\text{Tr}(\sigma_i (K_i - F_{0i})(K - F_i)^T) \leq \sigma_i \alpha_i / (2\lambda_{D_i})$, $i = 1 \dots \bar{i}$, ce qui donne :

$$\dot{V} \leq -\varepsilon e_x^T e_x + \sum_i^{\bar{i}} \frac{\sigma_i \alpha_i}{\lambda_{D_i}} - 2 \sum_{i=1}^{\bar{i}} \text{Tr}(\Phi_{D_i, \alpha_i} (K_i - F_{0i}) \cdot (K_i - F_i)^T) \quad (4.46)$$

En utilisant le Lemme 3 on prouve que la dérivé de cette fonction de Lyapunov est strictement négative tant que $e_x^T e_x > \frac{1}{\varepsilon} \sum \frac{\sigma_i \alpha_i}{\lambda_{D_i}}$. En notant $v_\sigma > 0$ la plus petite constante telles que si $V(x, K) > v_\sigma$ alors $\dot{V} < 0$, cela implique la convergence de V vers le domaine $V(x, K) \leq v_\sigma$ et don la bornitude de e_x . Notons que cet ensemble peut être rendu arbitrairement petit par des choix de σ_i petits.

□

4.4.1 Test de stabilité asymptotique globale à l'aide de la commande robuste

La section précédente illustre la difficulté de prouver la stabilité asymptotique globale de la boucle fermée, dans le cas d'utilisation de la σ -modification. Néanmoins, comme nous l'avons illustré dans la Section 3.3, cette propriété peut être gardée si le gain F_0 est stabilisant, hypothèse que nous faisons dans le cadre des développements proposés. Comme la σ -modification représente un aspect important d'un point de vue de

l'implémentation pratique, nous considérons qu'il est important de d'établir une preuve formelle qui montre que l'ajout de la σ -modification ne dégrade pas les propriétés de stabilité/convergence de la loi initiale. Nous proposons ainsi dans cette section des conditions suffisantes pour prouver la stabilité asymptotique dans le cas d'utilisation de la loi modifiée (4.35). Ces conditions sont basées sur les outils spécifiques à la commande robuste, notamment l'analyse de stabilité en présence d'incertitudes bornées en norme.

Notre démarche se base sur l'observation qu'un système bouclé avec un retour de sortie K adaptatif peut être vu comme un système incertain, car les gains adaptatifs peuvent être considérés – du point de vue de l'analyse robuste – comme des paramètres incertains, variants dans le temps. En effet, comme illustré sur la Figure 4.8 en remplaçant, dans la représentation de la boucle fermée adaptative la notation K par Δ , nous retrouvons la forme standard qui définit la problématique de l'analyse robuste. Sur cette figure, Σ_Δ est obtenu, comme montré par la suite, à partir du système à commander, Σ , et du gain F_0 .

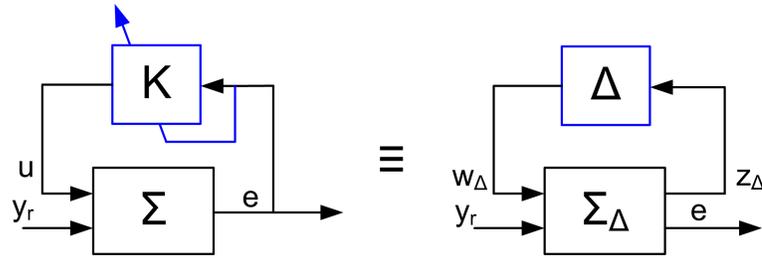


FIGURE 4.8 – Équivalence boucle fermée adaptative - système incertain

Dans le cas de la loi de commande adaptative que nous proposons, l'utilisation de la fonction barrière permet de garantir que ces "paramètres incertains" varient à l'intérieur d'un domaine borné. Ainsi, selon le Lemme 2, nous avons :

$$\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 \leq \alpha_i \beta \quad (4.47)$$

En notant $\Delta_i = K_i - F_{0i}$ l'incertitude sur chaque paramètre K_i par rapport à sa valeur nominale F_{0i} , nous avons :

$$\|\Delta_i\|_{D_i}^2 \leq \alpha_i \beta \quad (4.48)$$

ce qui illustre que cette incertitude est bornée. En plus, cette borne est connue, α , β et D pouvant être obtenus selon la procédure décrite dans la Section 4.3.3. La boucle fermée adaptative est alors équivalente à un système incertain qui peut être représenté comme dans la Figure 4.9, où les incertitudes vérifient (4.48) et varient, dans le cas de la loi avec σ -modification selon (4.35). Comme on s'intéresse dans un premier temps au problème de stabilité, la référence y_r est égale dans ce cas à zéro. Pour que la représentation du retour de sortie F_0 dans la Figure 4.9 soit correcte, le système $\bar{\Sigma}$ est légèrement modifié par rapport au du système à commander $\Sigma \sim (A, B, C)$. On a ainsi : $\bar{\Sigma} \sim (A, \bar{B}, C)$, avec : $\bar{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} B^T & \dots & B^T \end{bmatrix}}_{\bar{i}}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m\bar{i}}$.

Une condition suffisante pour prouver la stabilité asymptotique de ce système peut alors être obtenue en appliquant le lemme borné réel (Bounded Real Lemma - Boyd et al. (1994)), pour le cas des incertitudes

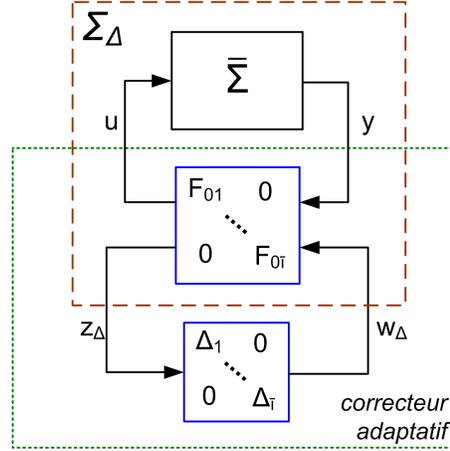


FIGURE 4.9 – Boucle fermée adaptative avec adaptation structurée représentée du point de vue de l'analyse robuste

bornées en norme, variant dans le temps avec une vitesse arbitraire. Avant d'énoncer le résultat général valable dans le cas de l'adaptation structurée du gain, nous illustrons cette approche pour le cas simple, $\bar{r} = 1$, qui correspond à une adaptation non-structurée du gain.

Dans un premier temps, nous avons, à partir de (4.48) et puisque la norme Frobenius d'une matrice est supérieure à sa norme 2 :

$$\|\Delta\|_D^2 \leq \alpha\beta \Rightarrow \Delta^T D \Delta \leq \alpha\beta I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & \Delta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha\beta I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Delta \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (4.49)$$

ce qui définit une incertitude dissipative bornée en norme. La stabilité asymptotique du système incertain représenté dans la Figure 4.9, avec un incertitude bornée par $\|\Delta\|_D^2 < \alpha\beta$, variant dans le temps avec une vitesse arbitraire est alors garantie s'il existe une matrice définie positive P telle que¹ :

$$\begin{bmatrix} A_\Delta & B_\Delta \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P \\ P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\Delta & B_\Delta \\ I & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\alpha\beta I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta\Delta} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

où $(A_\Delta, B_\Delta, C_\Delta, D_{\Delta\Delta})$ est une représentation d'état du système sans incertitudes Σ_Δ , ayant comme entrée w_Δ et comme sortie z_Δ (voir Figure 4.9) :

$$(\Sigma_\Delta) : \begin{cases} \dot{x}_\Delta = A_\Delta x_\Delta + B_\Delta w_\Delta \\ z_\Delta = C_\Delta x_\Delta + D_{\Delta\Delta} w_\Delta \end{cases} \quad (4.51)$$

Pour prouver cette propriété, considérons la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$. En pré et post multipliant (4.50) par $\begin{bmatrix} x^T & w_\Delta^T \end{bmatrix}$ et sont transposé respectivement nous obtenons, on tenant compte de (4.51) :

1. Notons que l'inégalité (4.50) correspond au lemme borné réel, tout comme la formulation (2.27), page 41, que nous avons introduite dans le cadre de la commande LPV.

Remarquons tout d'abord que le test LMI (4.55) est inclus dans des outils logiciels dédiés à la commande robuste, tels que RoMulOC (Peaucelle, 2005; Peaucelle et Arzelier, 2006). La stabilité de la boucle fermée avec la loi adaptative modifiée peut ainsi être facilement vérifiée.

Le Théorème 9 peut être facilement intégré dans la procédure de synthèse de la loi adaptative structurée que nous avons proposée. Ainsi, la démarche décrite dans la Section 4.3.3, basée sur la Proposition 8 et le Théorème 7, permet d'obtenir des domaines de variations des gains, tels que la loi structurée sans σ -modification assure la stabilité asymptotique. Une fois ces domaines connus, le Théorème 9 peut être appliqué afin de valider la loi avec σ -modification, implémentée en pratique. En analysant les conditions de ce dernier théorème, il est évident qu'un certain degré de conservatisme est introduit. En effet, ces conditions sont seulement nécessaires, car elles garantissent la stabilité en présence de variations arbitraires des gains. Ceci n'est clairement pas le cas pour la loi adaptative considérée, où la variation de gains est définie selon (4.56).

Néanmoins, sur les cas d'application que nous avons testés, ce conservatisme s'est montré limité par rapport aux conditions de synthèse d'une loi sans σ -modification. En prenant comme exemple la loi non-structurée présentée dans la Section 4.2, le domaine de variation du gain adaptatif est défini par :

$$\alpha = 1.54, \quad \beta = 1.1, \quad D = 568 \Rightarrow \|K - F_0\|_F^2 \leq 0.003 \quad (4.57)$$

Avec ces valeurs numériques, la LMI (4.55) a été testée et le résultat a été positif : il existe une solution $P > 0$ définissant une fonction de Lyapunov de dérivée négative pour K variant dans le domaine borné considéré. La σ -modification pourrait alors être appliquée pour cette loi, sans dégrader les conditions de stabilité garanties. Dans la section suivante de ce chapitre, dédiée à l'application au contrôle d'attitude de satellite, nous montrons que ce test peut aussi être appliqué avec succès dans le cas de la loi adaptative structurée. Ceci montre qu'en pratique, une fois les domaines de variations connus à l'aide du Théorème 7, le conservatisme introduit par le Théorème 9 est limité.

Le fait que ces conditions ne soient pas restrictives en pratique ajoute, d'un point de vue de la rigueur de notre démarche, une plus-value indéniable : on prouve ainsi que l'utilisation de la σ -modification, indispensable pour une implémentation pratique, ne dégrade pas les propriétés de stabilité garanties par la loi initiale. D'un autre côté, ce résultat peut, dans une certaine mesure, contester l'intérêt des approches basées sur la stabilité Lyapunov spécifiques à la commande adaptative. En effet, si on peut prouver que la boucle fermée est stable avec des gains qui varient de manière arbitraire, quel est l'intérêt de prendre en compte de manière explicite, lors de la construction des preuves, la loi d'adaptation des gains ? Pour répondre à cette question, remarquons que les domaines de variation des gains doivent être connus afin de pouvoir tester la condition (4.55). Ainsi, sans disposer de la procédure de synthèse présentée dans la Section 4.3.3 on serait amenés à choisir ces domaines sur la base d'une démarche essai-erreur. L'existence de cette procédure – qui exploite la connaissance de la loi d'adaptation – permet d'obtenir directement les domaines de variation à valider par le Théorème 9.

Le respect de ces conditions implique, du point de vue de la σ -modification qu'il n'existe aucune contrainte sur le choix des paramètres σ_i . Ils peuvent alors être choisis librement, en fonction de la spécificité de chaque application. La section suivante, consacrée au problème du contrôle d'attitude, montre comment ce choix peut être fait en pratique. En plus, du point de vue de la loi adaptative en général, le respect des conditions du Théorème 9 enlève toutes les contraintes sur l'adaptation des gains. Ainsi, les connaissances "empiriques"

sur le processus à commander, indiquant qu'une certaine expression serait préférable pour la loi d'adaptation, peuvent être prises en compte, tant que les gains restent bornés. D'un point de vue applicatif nous considérons que cet aspect représente un avantage important. Le Chapitre 5 montre comment ce degré de liberté a pu être exploité pour la réalisation pratique d'une loi de commande à bord d'un satellite.

4.5 Application au contrôle d'attitude de satellite

Nous présentons dans cette section l'application de la commande adaptative structurée avec σ -modification pour le problème de contrôle d'attitude de satellite. Afin de valider l'intérêt de la structure de commande présentée dans les sections précédentes, la commande adaptative est appliquée dans un premier temps ici pour un modèle de satellite un axe, représentant l'axe x du satellite Demeter.

La structure de commande, similaire à celle introduite dans la Section 4.2, faisant intervenir le correcteur adaptatif est représentée dans la figure 4.10.

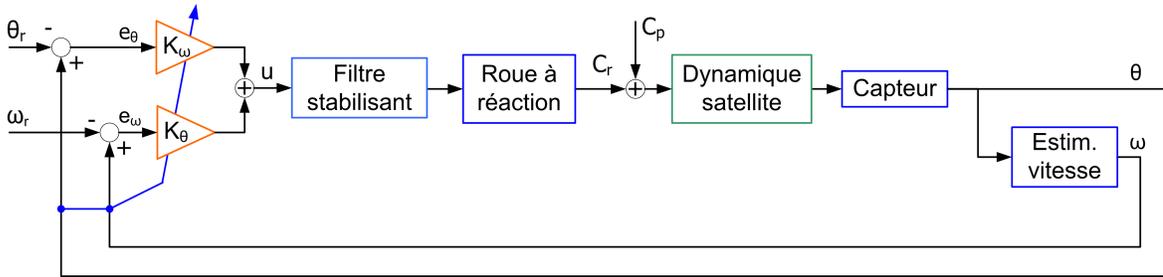


FIGURE 4.10 – Boucle fermée avec correcteur proportionnel - dérivé adaptatif

Le modèle à une entrée et deux sorties utilisé pour la synthèse du correcteur adaptatif est défini par :

$$y = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \Sigma u \quad (4.58)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ H_{EV}(s) \end{bmatrix} \cdot H_{sat,x}(s) \cdot H_{roue}(s) \cdot H_{filtre,x}(s)$$

et on note (A, B, C) sa représentation sous forme d'état. Les expressions des différentes fonctions de transfert intervenant dans cette expressions sont, comme dans le cas de l'application de la loi adaptative non-structurée, celles données dans les Sections 1.4.1 et 1.4.2, pages 12-16, 21.

Le correcteur adaptatif peut alors être exprimé sous forme de retour de sortie :

$$u(t) = K(t) \cdot (y(t) - y_r(t)) = K_\theta(t)e_\theta(t) + K_\omega(t)e_\omega(t), \quad (4.59)$$

où y_r représente la consigne et le gain $K(t) = [K_\theta(t) \ K_\omega(t)]$ est adapté autour de $F_0 = [F_{\theta 0} \ F_{\omega 0}] = [0.1 \ 2]$, gain qui stabilise Σ en boucle fermée.

4.5.1 Procédure de synthèse de la loi adaptative

Une fois la loi de commande adaptative formulée sous forme de retour de sortie, l'adaptation du gain est faite selon la loi avec σ -modification, exprimée sous sa forme générale par (4.35). Remarquons à ce point que cette formulation fait intervenir un grand nombre de variables. Il y a tout d'abord les paramètres qui fixent la structure de la sortie et de l'erreur : \bar{i} et les sous-vecteurs y_i et e_i , $i = 1 \dots \bar{i}$, ainsi les matrices G_i qui définissent la propriété de passivité du système et la "direction" de l'adaptation en fonction des erreurs. Nous avons ensuite D_i , α_i et β , qui délimitent les domaines de variation des gains et finalement les paramètres σ_i et les coefficients d'adaptation Γ_i .

A première vue, le réglage de tous ces paramètres peut paraître fastidieux. Nous considérons néanmoins que, sous condition de disposer d'une procédure de synthèse et de critères de choix claires, le fait de disposer d'un grand nombre de degrés de liberté représente un avantage de la loi adaptative que nous proposons, car la loi de commande peut alors être adaptée selon les besoins de chaque application. Une telle procédure est présentée dans ce qui suit, pour le cas de l'application au contrôle d'attitude de satellite. Elle illustre un avantage majeur de la loi adaptative que nous proposons : même si les paramètres qui doivent être réglés sont nombreux, ils peuvent être facilement interprétés, ce qui fait que l'on est capable de proposer de critères de choix pour chacun d'entre eux. La procédure que nous proposons, détaillée dans les sections suivantes, peut être résumée comme suit :

- choix de \bar{i} et des vecteurs y_i et e_i , $i = 1 \dots \bar{i}$
- obtention par résolution LMI de G_i et des paramètres (D_i, α_i) et β définissant les domaines de variation des gains
- validation des domaines de variation pour le cas de la loi avec σ -modification
- choix des paramètres σ_i
- choix des coefficients d'adaptation Γ_i

4.5.1.1 Définition de la structure de la loi d'adaptation

Le premier pas de la définition de la loi de commande adaptative consiste ainsi à structurer le vecteur de sortie du système Σ . Comme celui-ci est de dimension 2, nous choisissons :

$$\begin{aligned} y_1 &= y(1) = C(1, :) \cdot x = \theta \\ y_2 &= y(2) = C(2, :) \cdot x = \omega \end{aligned} \quad (4.60)$$

Afin de garder la spécificité de notre application, les indices 1 et 2 de la formulation générale introduite dans la section 4.3 seront remplacés par les indices θ et ω respectivement.

La commande adaptative étant appliquée dans le but de suivre des sauts de consigne sans guidage, les références considérées sont du type $y_r = [\theta_c \ 0]^T$, avec θ_c constant. Les erreurs de suivi correspondantes s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} e_1 &= e_\theta = \theta - y_{r_\theta} = \theta - \theta_c \\ e_2 &= e_\omega = \omega - y_{r_\omega} = \omega \\ e &= y - y_r = [e_\theta \ e_\omega]^T \end{aligned} \quad (4.61)$$

ce qui donne la loi adaptative :

$$\begin{aligned} u &= K_\theta e_\theta + K_\omega \omega \\ \dot{K}_\theta &= -(G_\theta e e_\theta + \Phi_{D_\theta, \alpha_\theta} (K_\theta - F_{\theta 0}) + \sigma_\theta \cdot (K_\theta - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta \\ \dot{K}_\omega &= -(G_\omega e \omega + \Phi_{D_\omega, \alpha_\omega} (K_\omega - F_{\omega 0}) + \sigma_\omega \cdot (K_\omega - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega \end{aligned} \quad (4.62)$$

où, les gains K_θ et K_ω sont scalaires et, par rapport à la forme générale (4.8), nous avons $M_0 = 0$.

En notant $G_\theta = [g_{\theta_1} \ g_{\theta_2}]$ et $G_\omega = [g_{\omega_1} \ g_{\omega_2}]$ les équations d'adaptation des gains s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{K}_\theta &= -(g_{\theta_1} e_\theta^2 + g_{\theta_2} e_\theta \omega + \Phi_{D_\theta, \alpha_\theta} (K_\theta - F_{\theta 0}) + \sigma_\theta \cdot (K_\theta - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta \\ \dot{K}_\omega &= -(g_{\omega_1} e_\theta \omega + g_{\omega_2} \omega^2 + \Phi_{D_\omega, \alpha_\omega} (K_\omega - F_{\omega 0}) + \sigma_\omega \cdot (K_\omega - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega \end{aligned} \quad (4.63)$$

Remarquons que les coefficients g qui interviennent dans les équations d'adaptation sont différents pour K_θ et K_ω . Les domaines de variation – définis par $(D_\theta, \alpha_\theta)$ et par $(D_\omega, \alpha_\omega)$ respectivement – sont eux aussi indépendants pour les deux gains, ce qui met en évidence les degrés de liberté offerts par la loi structurée que nous proposons.

4.5.1.2 Détermination des paramètres (G_i, D_i, α_i) et β -résolution LMI

Une fois le gain adaptatif structuré en composantes indépendantes, les paramètres définissant la direction de l'adaptation et les domaines de variation peuvent être obtenus selon la démarche présentée dans la Section 4.3.3, basée sur la résolution LMI. La première étape de cette procédure est la résolution des LMIs (4.11), à partir des matrices d'état du système $\Sigma : (A, B, C)$ et du gain statique stabilisant connu, $F_0 = [0.1 \ 2]$.

Lors de cette étape on peut ajouter des contraintes linéaires sur les différentes variables. Afin de limiter l'amplitude de la commande en sortie du correcteur adaptatif, nous imposons pour les éléments des matrices G :

$$\begin{aligned} g_{\theta_1} &> 0 & g_{\theta_2} &= 0 \\ g_{\omega_1} &= 0 & g_{\omega_2} &< 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

ce qui donne la loi d'adaptation

$$\begin{aligned} \dot{K}_\theta &= -(g_\theta e_\theta^2 + \Phi_{D_\theta, \alpha_\theta} (K_\theta - F_{\theta 0}) + \sigma_\theta \cdot (K_\theta - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta \\ \dot{K}_\omega &= -(g_\omega \omega^2 + \Phi_{D_\omega, \alpha_\omega} (K_\omega - F_{\omega 0}) + \sigma_\omega \cdot (K_\omega - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega \end{aligned} \quad (4.65)$$

où l'on a noté, pour simplification, $g_\theta \equiv g_{\theta_1}$ et $g_\omega \equiv g_{\omega_2}$.

Ceci implique que la vitesse angulaire ω ne va pas influencer le gain K_θ , qui va évoluer seulement en fonction de l'erreur d'attitude e_θ . Comme g_θ est contraint à être positif, le gain va diminuer tant que l'erreur d'attitude est non-nulle. Si l'adaptation est suffisamment rapide, cela permet d'avoir un petit gain K_θ pour une grande erreur d'attitude e_θ . On limite ainsi le produit $K_\theta e_\theta$ et donc le signal de commande (4.59). Concernant le gain K_ω , les contraintes sur la matrice G correspondante impliquent que le gain va évoluer seulement en fonction de la vitesse angulaire ω . Comme $g_\omega < 0$, le gain va augmenter pour toute valeur non-nulle de la vitesse angulaire : on cherche ainsi avoir un grand gain K_ω afin de limiter la vitesse angulaire imprimée au satellite.

Une fois les contraintes linéaires (4.64) sur les matrices G définies, la résolution des LMIs (4.11) se fait,

comme indiqué dans la procédure introduite dans Section 4.3.3, en minimisant $w_\theta D_\theta + w_\omega D_\omega$. Avec les résultats obtenus lors de cette première étape, le deuxième pas est de résoudre les LMIs (4.15-4.17) en maximisant $w_\theta \alpha_\theta + w_\omega \alpha_\omega$. Le choix des pondérations $w = [w_\theta \ w_\omega]$ est donc nécessaire. Ces paramètres reflètent le poids que l'on veut donner à la variation de chaque gain. En choisissant $w_\theta > w_\omega$ on privilégie la variation de K_θ , tandis que si $w_\theta < w_\omega$ la variation de K_ω est privilégiée. L'influence de ces pondérations sur les domaines de variation permis aux gains est illustrée sur la figure 4.11. Les domaines obtenus après les résolutions LMI (4.11) et (4.15-4.17) pour de différentes valeurs de w , ainsi que pour le cas de l'adaptation non-structurée y sont représentés.

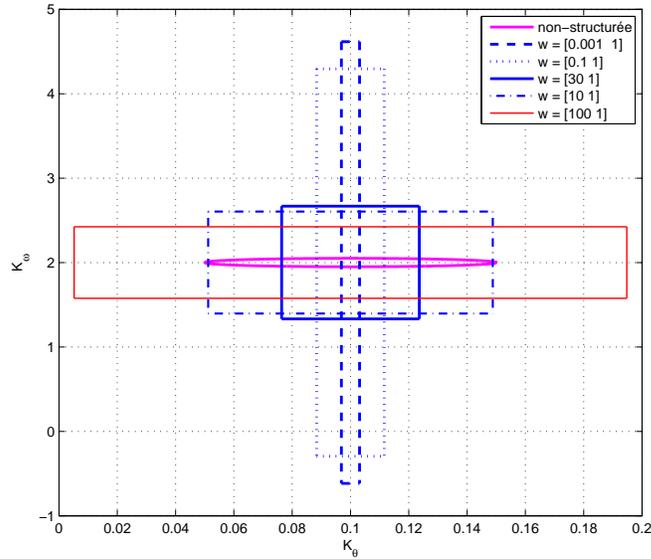


FIGURE 4.11 – Influence des pondérations w sur les domaines des variations permises des gains, $\|K - F_0\|_D^2 \leq \alpha\beta$

Pour notre application nous avons choisi $w = [100 \ 1]$ car il permet d'augmenter de manière significative les domaines de variation permis pour les deux gains, par rapport au cas de l'adaptation non-structurée : une variation de près de 100 % est permise pour K_θ (par rapport à 50 % obtenu dans le cas de l'adaptation non-structurée) et 20 % pour K_ω (par rapport à 2.5% sans structuration).

Nous obtenons ainsi, en résolvant les LMIs (4.11), avec les contraintes supplémentaires (4.64) les valeurs numériques :

$$\begin{aligned} g_\theta &= 53.53 & g_\omega &= -941.44 \\ D_\theta &= 1135 & D_\omega &= 9683 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ces valeurs sont ensuite utilisées dans les LMIs (4.15-4.17) dont la résolution donne les paramètres α :

$$\alpha_\theta = 8.9 \quad \alpha_\omega = 1831 \quad (4.67)$$

Lors de ces résolution LMI le scalaire $\beta > 1$ a dû être fixé et le choix $\beta = 1.1$ a été fait. Comme illustré

par la Figure 3.17, page 83, ce scalaire définit la pente de la fonction barrière qui assure la bornitude des gains adaptatifs. Si β est proche de 1, la fonction barrière est fortement croissante et plus la valeur de β est grande, plus cette pente s'adoucit. Ainsi, pour des raisons d'implémentation de la fonction barrière β ne doit pas être choisi trop près de 1. En même temps, ce paramètre a aussi une influence sur la taille des domaines de variation des gains et un choix de β grand augmente le conservatisme des conditions LMIs, comme indiqué dans Peaucelle et Fradkov (2008). Le choix $\beta = 1.1$ est ainsi un compromis entre ces deux contraintes. On peut aussi ajouter que la fonction barrière agit ainsi dans une zone dont la taille est de 10% de la zone où l'adaptation est libre.

Avec ces valeurs numériques, les domaines dans lesquels les gains seront bornés sont ainsi définis par :

$$\begin{aligned} K_\theta &\in \left[F_{\theta 0} - \sqrt{\frac{\alpha_\theta \beta}{D_\theta}}, F_{\theta 0} + \sqrt{\frac{\alpha_\theta \beta}{D_\theta}} \right] \Rightarrow K_\theta \in [0.0071 \ 0.1929] \\ K_\omega &\in \left[F_{\omega 0} - \sqrt{\frac{\alpha_\omega \beta}{D_\omega}}, F_{\omega 0} + \sqrt{\frac{\alpha_\omega \beta}{D_\omega}} \right] \Rightarrow K_\omega \in [1.5439 \ 2.4561] \end{aligned} \quad (4.68)$$

Et la loi d'adaptation structurée sans σ -modification :

$$\begin{aligned} \dot{K}_\theta &= -(g_\theta e_\theta^2 + \Phi_{D_\theta, \alpha_\theta}(K_\theta - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta \\ \dot{K}_\omega &= -(g_\omega \omega^2 + \Phi_{D_\omega, \alpha_\omega}(K_\omega - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega \end{aligned} \quad (4.69)$$

garantit la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée.

4.5.1.3 Validation des domaines de variation pour l'application de la σ - modification

Avec les domaines de variation ainsi obtenus, le test décrit dans la Section 4.4.1 est effectué, afin de vérifier que l'ajout de la σ -modification ne dégrade pas les propriétés de stabilité de la loi adaptative (4.69).

Selon (4.68), les incertitudes sur les gains autour de leurs valeurs nominales respectives sont définies par :

$$\begin{aligned} F_{\theta 0} = 0.1 \quad , \quad \Delta_\theta^2 &\leq 0.086 \\ F_{\omega 0} = 2 \quad , \quad \Delta_\omega^2 &\leq 0.208 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Avec ces valeurs numériques, en résolvant le problème LMI (4.55) sous RoMulOC le résultat est négatif : il n'existe pas de fonction Lyapunov unique qui prouve la stabilité de ce système "incertain". Ce résultat peut paraître décourageant dans un premier temps car il ne permet pas de prouver que la loi avec terme σ assure la stabilité asymptotique.

Cependant, en analysant les équations d'adaptation (4.65) et en tenant compte des signes des coefficients g - (4.66), on voit que le gain K_θ peut seulement diminuer par rapport à sa valeur nominale, $F_{\theta 0}$. De même, K_ω peut prendre seulement des valeurs supérieures à $F_{\omega 0}$. Ainsi, comme on peut le voir sur la Figure 4.12, le domaine dans lequel les gains varient en pratique représente seulement un quart du domaine pour lequel on prouve la stabilité asymptotique avec la loi non-modifiée. En terme d'incertitude autour d'une valeur nominale, ce domaine restreint est défini par :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\theta 0} = 0.0536 \quad , \quad \bar{\Delta}_\theta^2 &\leq 0.0022 \\ \bar{F}_{\omega 0} = 2.2281 \quad , \quad \bar{\Delta}_\omega^2 &\leq 0.0520 \end{aligned} \quad (4.71)$$

En effectuant le même test sous RoMulOC, le résultat cette-fois-ci est positif : il existe une solution au

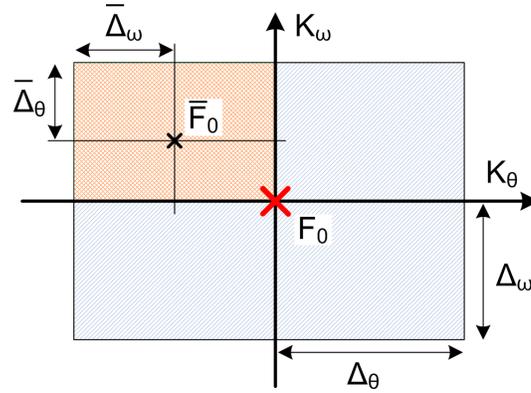


FIGURE 4.12 – Domaines de variation du gain adaptatif

problème LMI (4.55) prouvant la stabilité asymptotique du système incertain. Ainsi, on prouve que la σ -modification peut être appliquée sans détériorer les propriétés de stabilité de la boucle fermée.

Remarquons que l'application du test basé sur l'analyse robuste donne des résultats plus conservatifs dans ce cas : ainsi, pour le domaine de variation plus grand, (4.70), obtenu après l'application du Théorème 7, les conditions du Théorème 9 ne sont pas vérifiées. Même si en pratique cela n'est pas contraignant, car les gains vont varier dans le domaine restreint (4.71), il existe des cas qui illustrent des différences entre ces deux conditions. Ainsi, en considérant par exemple que la valeur initiale du gain, $K(0)$, se trouve à l'intérieur du domaine (4.70), mais à l'extérieur du domaine (4.71), on peut prouver la stabilité selon le Théorème 7, mais pas selon le Théorème 9. Ceci illustre comment la prise en compte explicite de la loi d'adaptation permet de prouver des résultats plus généraux.

4.5.1.4 Choix des paramètres σ

Une fois la "permission" d'appliquer la σ -modification obtenue, les valeurs numériques de σ_θ et σ_ω doivent être choisies. Rappelons qu'un des rôles des termes σ dans les équations (4.65) est de pousser le gain adaptatif vers sa valeur nominale, $F_0 = [F_{\theta 0} \ F_{\omega 0}]$, dont on sait qu'elle est "optimale"² lorsque le système est proche du point d'équilibre. Ainsi, afin de limiter l'effort de commande on veut que les gains varient de manière significative lorsque les erreurs sont grandes, selon les 2 premiers termes de (4.65), qui sont dominants dans ces conditions de fonctionnement. Lorsque les erreurs sont faibles, les gains doivent retrouver leurs valeurs nominales afin de garder l'optimalité près du point d'équilibre. Les seuils qui définissent les "erreurs faibles" dépendent des valeurs numériques de σ_θ et σ_ω , comme nous l'illustrons ci-dessous. Cette dépendance est à la base du raisonnement que nous proposons pour choisir les valeurs des paramètres σ .

Considérons d'abord le choix de σ_θ et supposons qu'une consigne d'attitude de grande amplitude est appliquée. La variation de K_θ dans ce cas est représentée de manière schématique sur la Figure 4.13. Dans un premier temps le gain est poussé par le premier terme de (4.65) et atteint une valeur constante, $K_{\theta,b}$, sur la barrière de son domaine de variation ($K_{\theta,b} = 0.0071$ dans notre cas, selon (4.68)). A ce point, la somme

2. Au sens du critère décrit dans le Chapitre 1

du terme erreur et du terme σ est compensée par le terme barrière. K_θ va revenir vers sa valeur nominale, $F_{\theta 0}$ seulement lorsque le terme σ va équilibrer le terme erreur. Ceci a lieu lorsque l'erreur d'attitude atteint le seuil $e_{\theta,s}$ vérifiant :

$$-g_\theta \cdot e_{\theta,s}^2 = \sigma_\theta \cdot (K_{\theta,b} - F_{\theta 0}) \quad (4.72)$$

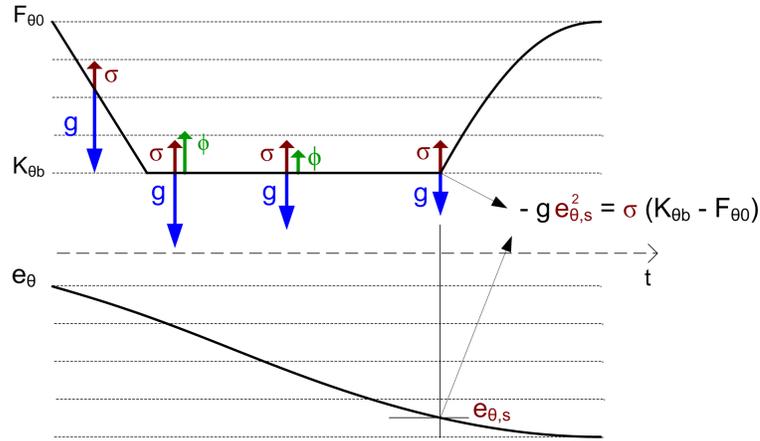


FIGURE 4.13 – Evolution de K_θ en fonction de l'erreur d'attitude

Le paramètre σ_θ peut donc être calculé à partir de la valeur désirée pour le seuil $e_{\theta,s}$, à partir duquel le gain va retourner vers sa valeur nominale. Nous considérons deux valeurs numériques pour ces seuils, 2.5 et 5 degrés respectivement, qui donnent les valeurs numériques suivantes pour σ_θ :

$$\begin{aligned} e_{\theta,s} = 2.5^\circ &\Rightarrow \sigma_\theta = 4.4 \\ e_{\theta,s} = 5^\circ &\Rightarrow \sigma_\theta = 1.1 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Pour σ_ω , le raisonnement est similaire ; nous choisissons un seuil $\omega_s = 0.03^\circ/s$, ce qui donne :

$$\omega_s = 0.03^\circ/s \Rightarrow \sigma_\omega = 5.66 \cdot 10^{-4} \quad (4.74)$$

Si, porté par le premier terme de la loi d'adaptation, K_ω augmente jusqu'à rejoindre la barrière du domaine de variation permis, le retour vers sa valeur nominale $F_{\omega 0}$ a lieu si $|\omega| < \omega_s$.

4.5.1.5 Choix des coefficients d'adaptation - γ

La loi adaptative (4.65) fait aussi apparaître les coefficients γ_θ et γ_ω , qui définissent les vitesses d'adaptation des gains. Pour que la loi d'adaptation puisse suivre les variations dans les conditions de fonctionnement du système, l'adaptation des gains doit être rapide et donc γ_θ et γ_ω doivent être choisis "grands". Cependant, si les gains sont adaptés trop vite, i.e. leurs dérivées ont des valeurs trop grandes, l'implémentation de la commande adaptative sera impossible. En effet, l'implémentation se faisant en temps discret, il convient de réaliser des variations bornées sur un pas d'échantillonnage. Nous proposons ainsi de choisir les γ_θ et γ_ω maximales,

tels que les dérivées des gains restent inférieures à un seuil fixé, pour toute condition de fonctionnement du satellite.

Ainsi, pour les simulations en temps continu nous avons supposé que les dérivées doivent être bornées par $|\dot{K}_\theta| \leq 1$, $|\dot{K}_\omega| \leq 1$. Les plus grandes valeurs de ces dérivés sont atteintes pour les plus grandes valeurs des signaux e_θ et ω . Plus précisément, en approximant l'équation d'adaptation (4.65) par son premier terme nous avons :

$$|\dot{K}_\theta| \leq |g_\theta| e_\theta^2 \gamma_\theta \quad , \quad |\dot{K}_\omega| \leq |g_\omega| \omega^2 \gamma_\omega \quad (4.75)$$

L'ordre de grandeur de l'erreur de pointage dépend principalement du type de signal de référence appliqué. Nous supposons que ceux-ci sont représentés par des échelons non-filtrés, d'amplitude maximale de 20 degrés, qui correspond à la plage de fonctionnement couverte par le mode MNO des satellites Myriade. En supposant que pour l'implémentation on requiert $|\dot{K}_\theta| \leq 1$, le choix

$$\gamma_\theta = 0.15 \quad (4.76)$$

permet de respecter cette contrainte. Le même raisonnement est utilisé pour le coefficient d'adaptation du gain K_ω . En supposant $|\dot{\omega}_i| \leq 0.5$ °/s (qui est loin d'être atteint, même lorsque la saturation des actionneurs a lieu, voir la Figure 1.13), nous choisissons, afin d'avoir $|\dot{K}_\theta| \leq 1$:

$$\gamma_\omega = 15 \quad (4.77)$$

4.5.2 Implémentation de la fonction barrière Φ

Une fois tous les paramètres numériques de la loi de commande (4.65) choisis, il reste à aborder le problème de l'implémentation de cette loi. On s'intéresse dans ce chapitre à l'implémentation en temps continu, sous Simulink. Pour ce cas, les termes gradient et σ ne posent pas de difficulté particulière et ils peuvent être implémentés tels-quels.

Cependant, la fonction barrière nécessite plus d'attention, car des problèmes liés à son implémentation peuvent apparaître. Ces problèmes sont principalement causés par l'utilisation de schémas de discrétisation numérique, indispensables pour l'approximation des équations différentielles sur toute machine numérique. Pour illustrer ces effets, nous prenons comme exemple l'équation différentielle qui décrit l'adaptation du gain K_θ , selon une loi sans σ -modification. Pour plus de clarté l'indice θ est éludé dans les paragraphes ci-dessous. En considérant l'expression de la fonction barrière utilisée dans la Section 4.3.2 nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi_{D,\alpha}(K - F_0) &= \psi_{D,\alpha}(\|K - F_0\|_D^2) \cdot (K - F_0) \\ \text{où } \psi_{D,\alpha}(\|K - F_0\|_D^2) &= \begin{cases} \frac{D(K-F_0)^2 - \alpha}{\alpha\beta - D(K-F_0)^2} \quad , & \text{si } \alpha < D(K - F_0)^2 < \alpha\beta \\ 0 \quad , & \text{si } D(K - F_0)^2 < \alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Lors de l'implémentation sous Simulink de l'équation différentielle (4.69), un schéma de discrétisation doit être choisi. La méthode d'Euler représente le choix le plus simple et l'approximation selon cette méthode de l'équation d'adaptation en temps continu (4.69), avec l'expression donnée ci-dessus pour la fonction barrière

s'écrit, pour $\alpha < D(K - F_0)^2 < \alpha\beta$:

$$\begin{aligned} K(k+1) &= K(k) - (ge(k)^2 + \Phi_{D,\alpha}(K(k) - F_0)) \gamma T_e \\ &= K(k) - \left(ge(k)^2 + \frac{D(K(k) - F_0)^2 - \alpha}{\alpha\beta - D(K(k) - F_0)^2} \cdot (K(k) - F_0) \right) \gamma T_e \end{aligned} \quad (4.79)$$

où k représente le temps discret et T_e la période de discrétisation associée. Bien évidemment, des schémas de discrétisation plus performants peuvent être utilisés en pratique, mais nous considérons ici la méthode d'Euler seulement pour illustrer l'apparition de problèmes numériques.

Comme montré par le Lemme 2, l'utilisation de cette fonction barrière garantit, pour une adaptation en temps continu, la bornitude de K :

$$(K - F_0)^2 \leq (\alpha\beta)/D \Leftrightarrow F_0 - \sqrt{(\alpha\beta)/D} < K < F_0 + \sqrt{(\alpha\beta)/D}. \quad (4.80)$$

Avec l'approximation (4.79) de l'équation différentielle, cette propriété n'est pas respectée. En effet, en imposant dans (4.79) :

$$K(k+1) < K_{\min} = F_0 - \sqrt{(\alpha\beta)/D}, \quad (4.81)$$

i.e. K en dehors du domaine à l'intérieur duquel il devrait évoluer, nous obtenons :

$$e(k)^2 > \left(\frac{K(k) - K_{\min}}{\gamma T_e} - \frac{D(K(k) - F_0)^2 - \alpha}{\alpha\beta - D(K(k) - F_0)^2} \cdot (K(k) - F_0) \right) / g \stackrel{not}{=} f(K(k)) \quad (4.82)$$

En supposant qu'à l'instant courant, le gain se trouve dans la zone où la fonction barrière est active :

$$F_0 - \sqrt{(\alpha\beta)/D} < K(k) < F_0 - \sqrt{\alpha/D}, \quad (4.83)$$

cette inégalité indique qu'il existe $e(k)$ finie, telle que la valeur du gain à l'instant futur, $K_\theta(k+1)$, sorte de l'intervalle permis de variation.

La représentation graphique de la fonction $f(K(k))$ définie dans (4.82) est donnée sur la Figure 4.14, pour $K(k)$ vérifiant (4.83) et pour différentes valeurs de γ . La courbe représentée dans la partie gauche de cette figure a été obtenue avec les valeurs numériques de g, α, β, D et γ obtenues dans les sections précédentes. Pour T_e on a choisi $T_e = 0.25s$, soit la période d'échantillonnage utilisée pour la boucle de commande sur Myriade (ceci suppose donc que la boucle d'adaptation fonctionne à la même fréquence que la boucle de commande). On remarque que pour ces valeurs numériques la bornitude du gain est garantie seulement si l'erreur vérifie $e^2 < 2.12 \cdot 10^{-3}$, ce qui correspond à un dépointage de 2.64 degrés, loin de la plage de 20 degrés que l'on souhaite couvrir avec la loi adaptative. Une possibilité d'augmenter la valeur maximale de l'erreur pour laquelle la bornitude du gain est gardée est de diminuer le coefficient d'adaptation γ , comme l'illustrent les deux courbes au milieu et à droite de la Figure 4.14. Ainsi, pour $\gamma = 10^{-4}$, on observe que la bornitude du gain est garantie si l'erreur de pointage vérifie $e^2 < 0.12$, donc $|e| < 20$ degrés. Mais pour cette valeur de γ l'adaptation du gain serait très lente, ce qui ne permettrait pas au correcteur de répondre aux variations des conditions de fonctionnement.

Pour résoudre ce problème nous avons utilisé une fonction barrière directement mise en œuvre sous Si-

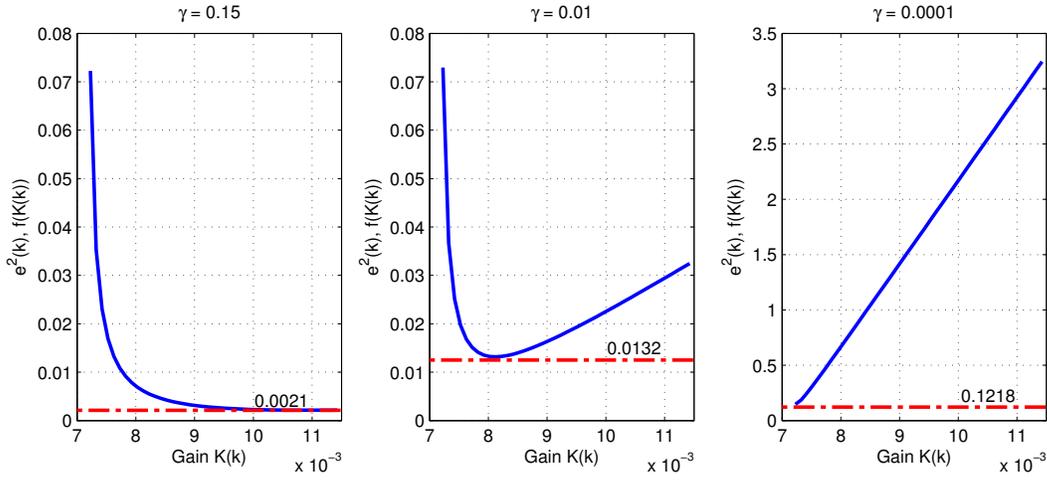


FIGURE 4.14 – Tracé de la fonction $f(K(k))$ pour différentes valeurs de γ . Le gain au pas courant $K(k)$ se trouve dans le domaine (4.83), où la fonction barrière est active. Pour que sa valeur au pas $k + 1$ se trouve dans le domaine de variation permis, (4.80), il faut que $e^2(k) < \min_{K(k)} f(K(k))$.

mulink et réglée de manière à garantir la bornitude des gains, pour les conditions cinématiques associées au fonctionnement du satellite. Le schéma Simulink décrivant cette fonction est représentée dans la Figure 4.15.

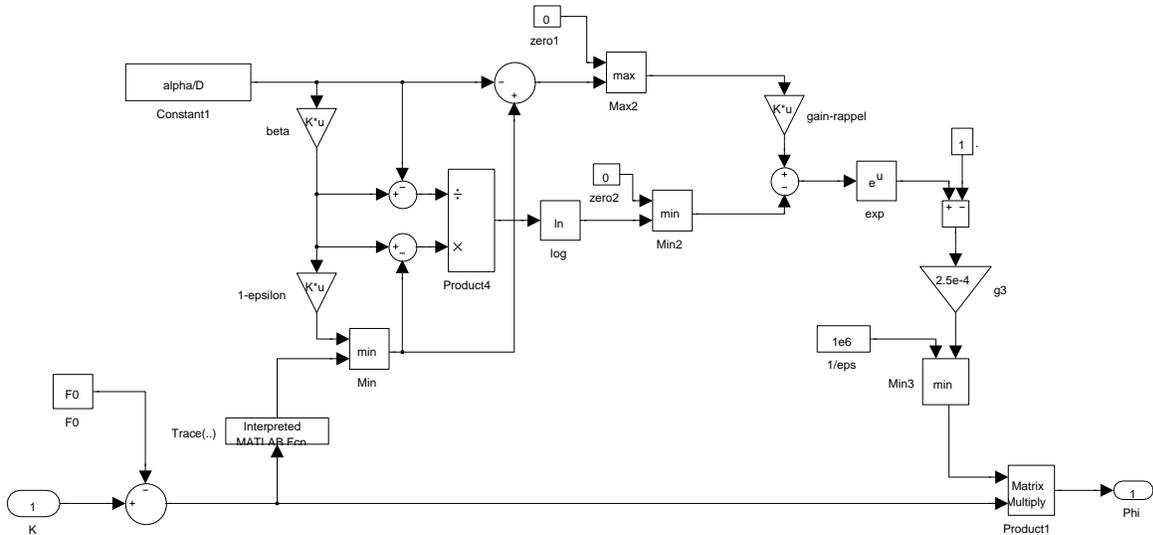


FIGURE 4.15 – Fonction barrière "numérique" implémentée Simulink

L'utilisation de cette fonction permet d'éviter l'ajout de conditions supplémentaires sur les coefficients d'adaptation. Pour illustrer l'amélioration obtenue par rapport à l'utilisation de l'expression (4.78), la Figure 4.16 montre l'évolution du gain K pour une valeur constante de l'erreur e , avec $\gamma = 0.15$ (ces simulations testent seulement l'équation d'adaptation du gain, aucune connexion n'étant faite avec le satellite). Les deux fonctions sont implémentées sous Simulink et le solveur utilisé est basé sur le schéma à pas variable Dormand

- Prince (ode45). A gauche de la figure, l'évolution du gain pour $e = 0.035 \approx 2$ degrés est représentée et on peut observer que la bornitude est assurée avec les deux fonctions. L'évolution des gains pour $e = 0.35 \approx 20$ degrés est montrée à droite de la même figure. L'amélioration apportée par l'utilisation de la fonction barrière représentée dans la Figure 4.15 est alors facilement observable : cette fonction maintient le gain dans le domaine borné *a priori* calculé, alors qu'avec la fonction donnée par (4.78), le gain adaptatif "explose" (i.e. franchit la frontière $\alpha\beta$ et au delà n'est plus contrôlé).

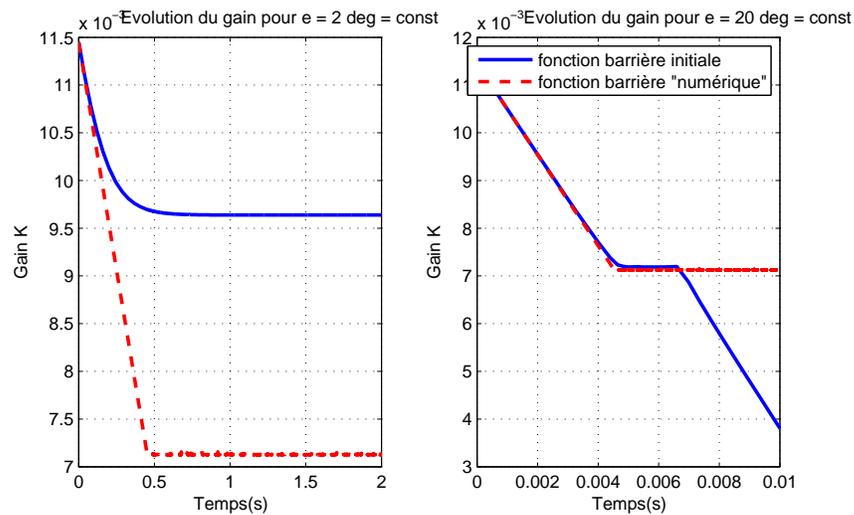


FIGURE 4.16 – Réponse du gain avec les deux variantes de fonction barrière

Des essais similaires, effectués pour l'adaptation du gain K_ω , ont montré que l'utilisation de la fonction barrière "numérique" permet de garantir la bornitude des gains en simulation, pour la plage de conditions cinématiques correspondant au fonctionnement du satellite. Cette expression de la fonction barrière a ainsi été retenue et utilisée dans les simulations dont les résultats sont présentés dans la section suivante.

Les résultats présentés dans cette section illustrent les problèmes numériques qui peuvent apparaître lors de l'utilisation d'une loi adaptative avec fonction barrière. Il faut cependant remarquer que ces problèmes sont générés par la simulation sur machine numérique d'une équation différentielle en temps continu. Du point de vue de l'applicabilité, cela ne signifie pas forcément que l'implémentation pratique (sur l'ordinateur de bord d'un satellite, par exemple) posera de problèmes numériques, car cette implémentation sera de toute manière faite directement sous forme d'équations en temps discret. Ainsi, même si la fonction barrière proposée ici pour l'implémentation sous Simulink a une expression complexe, nous considérons que faire des efforts visant à la simplifier ne serait pas forcément justifié. En effet, le but de nos recherches n'est pas d'avoir des lois de commande "propres" d'un point de vue numérique en simulation, mais en pratique, lors de l'implémentation sur ordinateur embarqué. Pour cette raison, le problème de la mise en œuvre de la fonction barrière en temps discret est abordé dans le chapitre suivant et une solution permettant d'éviter les problèmes numériques est alors donnée.

4.5.3 Résultats de simulation

La loi adaptative que nous proposons étant complètement définie, nous présentons dans la suite les résultats de simulation obtenus avec son application pour le contrôle d'attitude satellite. Ces résultats sont comparés avec les réponses données par l'application de la loi à commutation, définie dans la Section 1.4.3, page 19. Le schéma de simulation est celui défini dans la Figure 4.10 et par rapport au modèle de synthèse, plusieurs éléments supplémentaires sont pris en compte :

- la modèle utilisé pour la roue à réaction est celui donné dans la Figure 1.8, page 15, faisant apparaître un retard ainsi que les saturations en couple et en vitesse de rotation
- le couple perturbateur est défini par :

$$\begin{aligned} C_p(t) &= C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \sin(2\omega_0 t) \\ C_1 &= 3.1 \cdot 10^{-5} \text{Nm}, \quad C_2 = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{Nm}, \quad \omega_0 = 10^{-3} \text{rad/s} \end{aligned} \quad (4.84)$$

- le capteur stellaire est modélisé par un retard $\tau_m = 0.45 \text{s}$ et l'ajout d'un bruit blanc centré de variance $\sigma_b^2 = 9.4 \cdot 10^{-11}$.

Deux cas de simulation sont considérés : le premier correspond à une réponse du système à des conditions initiales avec une grande valeur pour l'attitude et une vitesse nulle, suivie par une consigne d'attitude de grande amplitude. Dans le deuxième cas on considère la réponse à des conditions initiales où la vitesse angulaire est importante et la valeur de l'attitude est faible.

4.5.3.1 Réponse aux conditions initiales en position angulaire et suivi de consigne de grande amplitude

Le but de ce scénario de simulation est de montrer que la commande adaptative permet de remplacer la stratégie de commande par commutation initialement mise en place en étendant le domaine de validité du correcteur LTI autour duquel les gains adaptatifs varient. Ainsi, si le correcteur LTI était initialement limité pour une plage d'erreur de pointage de 0.3 degrés (son application pour des grandes erreurs de pointage donnant de mauvais résultats - voir Figure 1.12), nous montrons ci-dessus que le correcteur adaptatif permet d'étendre cette plage et assurer des bonnes performances pour des erreurs de pointage allant jusqu'à 20 degrés.

Les figures suivantes montrent la réponse du système à des conditions initiales $\theta_0 = 10 \text{ deg}$, $\omega_0 = 0 \text{ deg/s}$, suivies par une consigne d'attitude de 20 degrés en échelon, appliquée à $t = 800 \text{s}$. Considérons d'abord l'évolution de la position et de la vitesse angulaire, ainsi que des gains associés, représentées dans les Figures 4.17 et 4.18. Lorsque $t = 0 \text{ s}$, la forte valeur de l'erreur d'attitude fait que le gain K_θ évolue rapidement ($|e_\theta| = 10 \text{ deg} \Rightarrow \dot{K}_\theta \approx 0.5$) et rejoint la limite du domaine de variation qui lui est permis. Peu après, la vitesse angulaire augmente (en valeur absolue) de manière importante, ce qui fait que K_ω augmente aussi jusqu'à toucher la limite de son domaine de variation. Comme la vitesse descend en dessous du seuil $|\omega| < 0.03 \text{ deg/s}$ (défini par la valeur numérique de σ_ω) assez rapidement ($t \approx 30 \text{s}$), le gain K_ω commence à évoluer vers sa valeur nominale, poussé par le terme σ_ω de la loi d'adaptation. Comme θ se rapproche de la valeur d'équilibre, l'erreur d'attitude diminue au cours du temps et à $t \approx 250 \text{ s}$, lorsqu'elle atteint le seuil de 5 degrés (défini par $\sigma_\theta = 4.4$), le terme erreur de la loi d'adaptation est équilibré par le terme σ . K_θ commence alors à évoluer vers sa valeur nominale, $F_{\theta 0} = 0.1$. Ceci imprime une accélération au satellite et le gain K_ω évolue jusqu'à atteindre la limite de son domaine de variation, où il reste jusqu'à ce que $|\omega| < 0.03 \text{ deg/s}$. A partir de ce

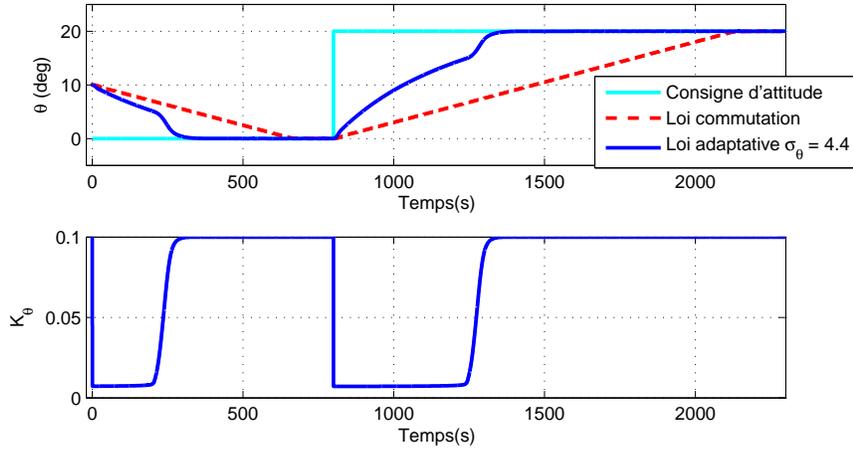
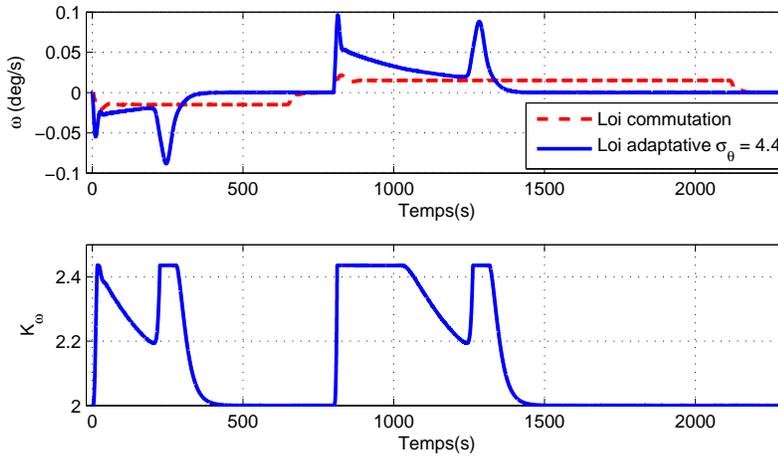
moment, K_ω et K_θ évoluent vers leurs valeurs nominales respectives et le satellite vers le point d'équilibre $\theta = 0$, $\omega = 0$, qui est rejoint à $t \approx 300$ s.

Les réponses à des consigne en échelon sont similaires, la différence principale pouvant être observée au niveau de la vitesse angulaire atteinte dans les instants suivant l'application de la consigne. Cette vitesse est imprimée par le terme $K_\theta e_\theta$ de la loi de commande, qui est prédominant quand $\omega \approx 0$. Comme le gain K_θ ne peut pas diminuer en dessous du seuil $K_{\theta,b} = 0.007$, plus e_θ est grand, plus la vitesse imprimée au satellite est importante. Ceci peut être observé sur la Figure 4.17, où l'on voit que le pic de vitesse qui suit l'application de la consigne est presque deux fois supérieur, en valeur absolue, à celui obtenu en réponse aux conditions initiales. Le fait que la vitesse soit plus grande fait que le gain K_ω reste plus de temps sur la limite du domaine de variation, jusqu'à ce que la vitesse diminue en dessous du seuil 0.03 deg/s, à $t \approx 1050$ s. A partir de ce moment l'évolution est très similaire avec celle obtenue en réponse aux conditions initiales : le pic de vitesse qui apparait lorsque l'erreur d'attitude franchit le seuil $e_\theta = 5$ deg ayant la même amplitude dans les deux cas. Une fois ce pic passé, les gains rejoignent leurs valeurs nominales et le satellite le point d'équilibre $e_\theta = 0$ ($\theta = 20$ deg), $\omega = 0$ deg/s.

L'évolution des gains $K_\theta(t)$ et $K_\omega(t)$ pour $t \in [0\text{s}, 700\text{s}]$ est représentée paramétrée en fonction du temps dans la Figure 4.19, les flèches indiquant le sens d'évolution à partir de $F_0 = [0.1 \ 2]$, figuré au centre du domaine. Les rectangles bleus représentent les deux limites du domaines de variation des gains : les fonctions $\Phi_{D_\theta, \alpha_\theta}$ et $\Phi_{D_\omega, \alpha_\omega}$ sont nulles à l'intérieur du rectangle plus petit et elles sont fortement croissantes dans la zone comprise entre les deux rectangles, afin d'empêcher les gains de sortir du domaine de variation permis, calculé à partir de la procédure LMI. On peut observer que les gains évoluent en effet seulement à l'intérieur de ce domaine, avec le gain K_θ qui reste sur la barrière extérieure pour une partie du temps. A noter aussi que l'évolution se fait dans seulement un quart du domaine permis, ce qui correspond au fait que les gains K_θ et K_ω ne peuvent prendre que des valeurs inférieures et supérieures respectivement par rapport aux valeurs nominales $F_{\theta 0}$ et $F_{\omega 0}$.

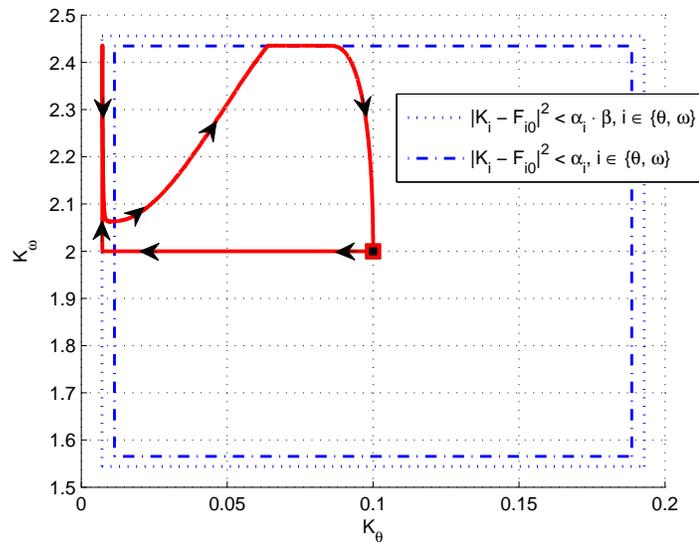
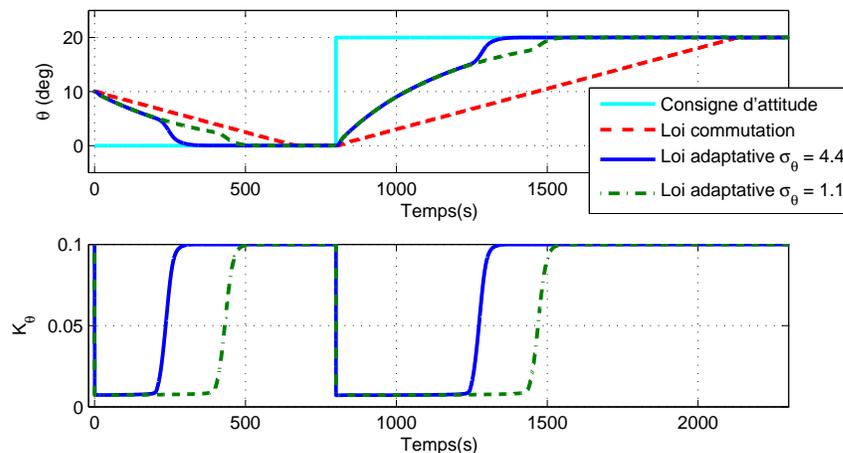
Les Figures 4.20 et 4.21 montrent les réponses précédentes comparées avec celles obtenues par l'application de la même loi adaptative, avec une valeur numérique différente pour le paramètre σ_θ , $\sigma_\theta = 1.1$. Cette valeur correspond à un seuil $e_{\theta,s} = 2.5$ deg, deux fois plus petit que celui défini par $\sigma_\theta = 4.4$, valeur utilisée pour les premières réponses représentées. On observe que dans une première phase, les réponses obtenues avec les deux valeurs numériques sont identiques : la position et la vitesse angulaire, ainsi que les gains associés évoluent de manière très proche jusqu'à un certain point. Mais, alors que dans le premier cas K_θ commence à évoluer vers sa valeur nominale à $t \approx 250$ s (pour la réponse aux conditions initiales) et $t \approx 1250$ s (pour la réponse à la consigne), ce retour a lieu, pour le cas où $\sigma_\theta = 1.1$ à $t \approx 400$ s et $t \approx 1400$ s respectivement. Ces instants correspondent aux franchissements des seuils $e_{\theta,s} = 5$ degrés dans le premier cas et $e_{\theta,s} = 2.5$ degrés dans le second. Le gain K_θ garde ainsi une valeur faible, qui génère une réponse lente, pendant plus de temps. La phase d'accélération qui apparait lorsque le gain commence à retourner vers sa valeur nominale intervient plus tard et le pic de vitesse associé à cette phase est de plus petite amplitude, ce qui génère un temps de réponse plus grand. La rapidité de la boucle fermée adaptative peut donc être influencée par la valeur numérique de σ_θ , qui peut ainsi être utilisé comme paramètre de réglage.

La réponse de la roue à réaction pour ce scénario de simulation est donnée en Figure 4.22, où sont représentées la vitesse angulaire ainsi que le couple généré, avec un zoom pour $t \in [790, 860]$ s. Par rapport à loi de commande par commutation, il est évident que la loi adaptative demande un effort d'actionnement plus

FIGURE 4.17 – Réponse aux conditions initiales et suivi de consigne de grande amplitude - $\theta(t)$, $K_\theta(t)$ FIGURE 4.18 – Réponse aux conditions initiales et suivi de consigne de grande amplitude - $\omega(t)$, $K_\omega(t)$

important. Ceci peut être notamment observé au niveau du couple généré après l'application de la consigne, à $t = 800$ s. Néanmoins, il est important de remarquer que l'application de la commande adaptative permet de respecter la contrainte de non-saturation de la vitesse de rotation de la roue à réaction. L'amplitude maximale de cette vitesse est, pour le cas présenté, d'approximativement 130 rad/s, soit $\approx 40\%$ de la valeur de saturation, 293 rad/s.

Il est intéressant d'analyser les liaisons qui existent entre les paramètres de la loi adaptative proposée et l'amplitude de la vitesse de rotation de la roue à réaction. On peut d'abord observer que des pics de vitesse apparaissent dans les instants qui suivent l'apparition d'une erreur d'attitude importante ($e_\theta = 10\text{deg}$ à $t = 0$ s, $e_\theta = 20\text{deg}$ à $t = 800$ s). Afin de limiter ces pics, générés par le terme $K_\theta(t)e_\theta(t)$ de la loi de commande, des valeurs suffisamment petites doivent pouvoir être atteintes par le gain en position. Ceci justifie la procédure de synthèse mise en place, qui privilégie la variation de K_θ . Mais la valeur minimale qui peut être prise par ce gain

FIGURE 4.19 – Réponse aux conditions initiales et suivi de consigne de grande amplitude - (K_θ, K_ω) FIGURE 4.20 – Réponse aux conditions initiales et suivi de consigne de grande amplitude - θ, K_θ - influence du paramètre σ_θ

ne peut pas être rendue arbitrairement petite et donc ce premier pic de sollicitation ne peut pas être diminué arbitrairement. L'autre élément qui influe sur cette forte sollicitation de l'actionneur est la valeur initiale de e_θ . Cette dépendance peut être utilisée pour définir le domaine de fonctionnement sur lequel la loi adaptative peut être appliquée : si on impose que pour des consignes d'attitude en échelon la vitesse angulaire de la roue doit rester entre -100 rad/s et $+100$ rad/s, l'application des consignes de 20 degrés ne sera pas possible, tandis que les consignes d'amplitude de 10 degrés pourront être admises.

Un deuxième pic au niveau de la réponse de l'actionneur apparaît lorsque l'erreur d'attitude franchit le

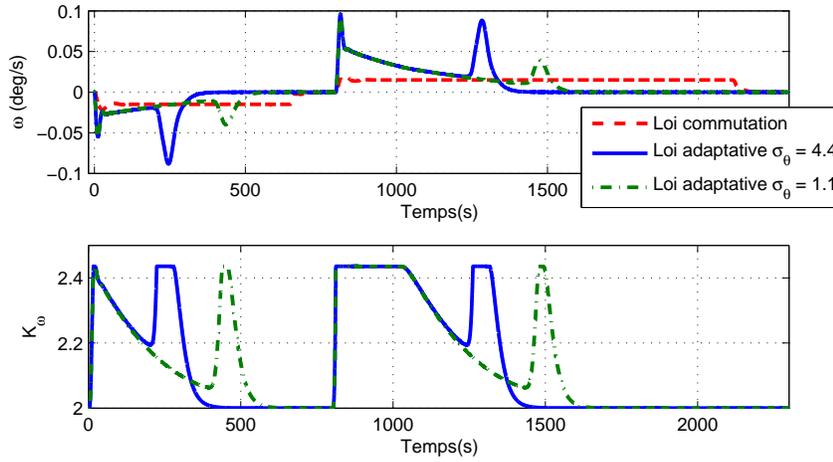


FIGURE 4.21 – Réponse aux conditions initiales et suivi de consigne de grande amplitude - ω , K_ω - influence du paramètre σ_θ

seuil $e_{\theta,s}$, défini par la valeur numérique de σ_θ . Ces pics peuvent être observés à $t \approx 250$ s et $t \approx 1250$ s pour $\sigma_\theta = 4.4$ et à $t \approx 400$ s et $t \approx 1400$ s pour $\sigma_\theta = 1.1$ et leur amplitude dépend de la valeur du paramètre σ_θ : plus ce paramètre est grand, plus le pic de vitesse associé est important. Si on suppose qu'on désire limiter la vitesse de la roue à réaction à ± 100 rad/s, la valeur $\sigma_\theta = 4.4$ ne serait pas admissible, tandis que le choix $\sigma_\theta = 1.1$ serait permis.

Observons aussi que la vitesse angulaire du satellite suit celle de la roue à réaction. Ainsi, le fait que le gain K_ω augmente lorsque la vitesse du satellite est importante limite aussi la vitesse de rotation de la roue.

Notons finalement que l'évolution lente qui peut être observée au niveau de la vitesse de rotation de la roue et qui continue même lorsque le point d'équilibre est atteint correspond à la compensation du couple perturbateur défini dans (4.84).

4.5.3.2 Réponse aux conditions initiales en forte vitesse angulaire

Le deuxième cas de simulation que nous considérons est la réponse à des conditions initiales définies par une faible position et une vitesse angulaire de signe opposé et de grande valeur absolue : $\theta_0 = 0.4$ deg, $\omega_0 = -0.1$ deg/s. La consigne d'attitude est dans ce cas fixée à zéro. Les réponses obtenues avec la loi adaptative, comparées avec celles données par la loi par commutation sont présentées dans les Figures 4.23 - 4.25. Notons que, par rapport au précédent cas de simulation, le paramètre σ_θ n'influence pas les réponses obtenues avec la loi adaptative – une seule courbe représentant cette loi est donc tracée.

La Figure 4.23 montre que les réponses en attitude obtenues avec les deux lois de commande sont assez proches, la loi adaptative générant une convergence légèrement plus rapide. Comme on peut l'observer, l'erreur d'attitude franchit plusieurs fois le seuil $|\theta_L| = 0.3$ deg. Ceci fait que plusieurs commutations ont lieu entre la loi proportionnel-dérivé et la loi biais de vitesse, pour le cas de la loi par commutation. Mais, comme aux moments où le seuil θ_L est franchi, la vitesse de consigne $\pm b_v = \pm 0.015$ deg/s n'est pas encore atteinte (voir Figure 4.24), la commande calculée par cette loi présente plusieurs discontinuités, comme cela peut être

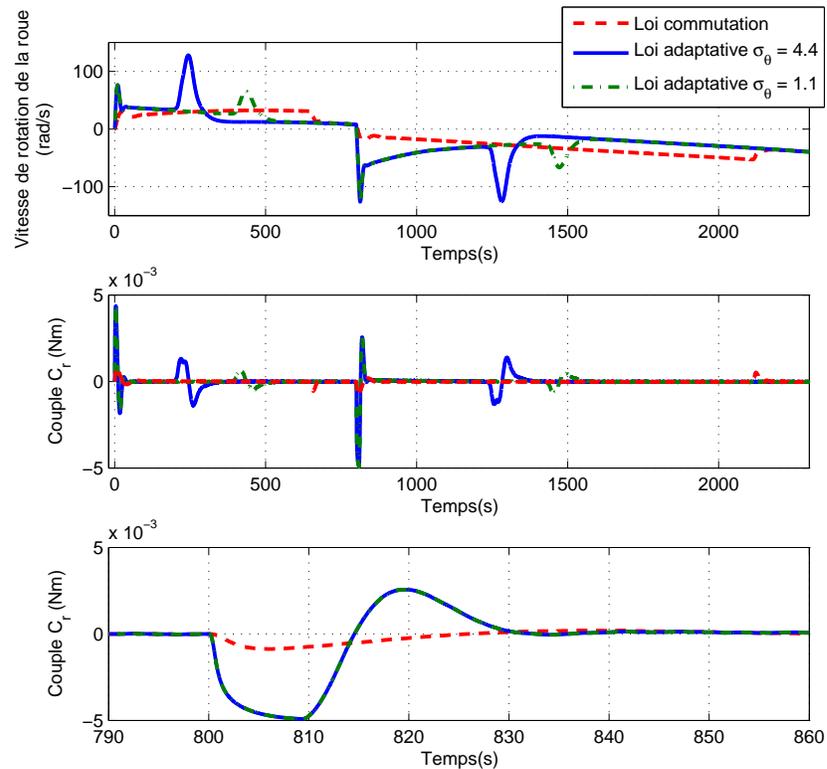
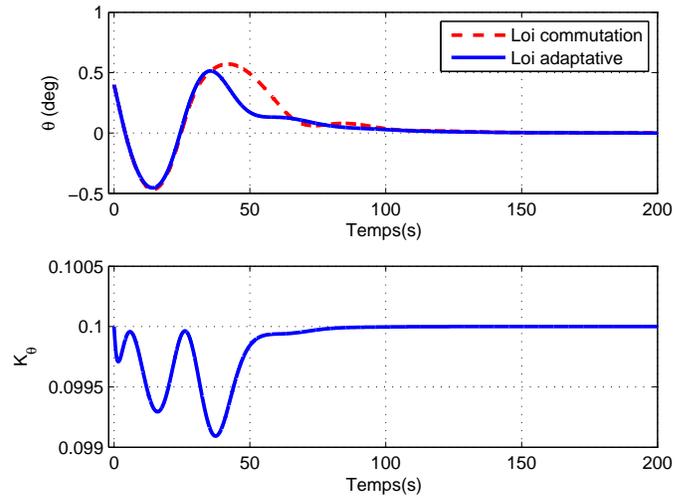
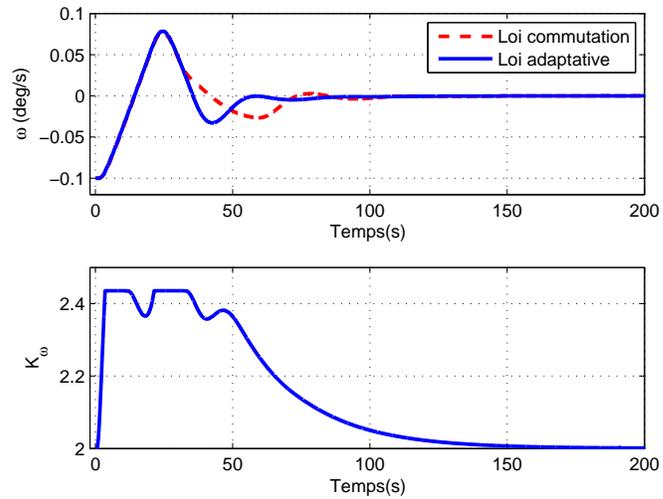


FIGURE 4.22 – Réponse aux conditions initiales et suivi de consigne de grande amplitude - sollicitation de l'actionneur

observé sur la FSSigure 4.25. Ces discontinuités n'apparaissent pas avec l'utilisation de la loi adaptative, qui génère un signal de commande continu. Même si celui-ci est de plus grande amplitude, les valeurs maximales atteintes par la vitesse de rotation de la roue à réaction sont proches pour les deux stratégies de commande.

Concernant l'évolution des gains adaptatifs, K_θ varie peut, comme on peut l'observer sur la Figure 4.23 car l'erreur d'attitude reste dans ce cas de simulation proche de zéro. Comme la vitesse angulaire atteint des valeurs importantes, le gain K_ω varie de manière significative et atteint plusieurs fois la barrière du domaine de variation permis, comme on peut le voir sur la Figure 4.24.

FIGURE 4.23 – Réponse aux conditions initiales de forte vitesse angulaire - θ , K_θ FIGURE 4.24 – Réponse aux conditions initiales de forte vitesse angulaire - ω , K_ω

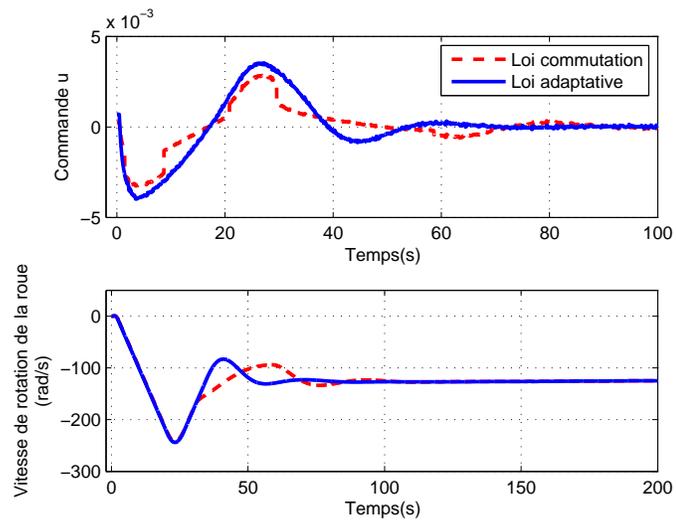


FIGURE 4.25 – Réponse aux conditions initiales de forte vitesse angulaire - sollicitation de l'actionneur

4.6 Conclusions

Ce chapitre a présenté les principales contributions apportées dans le domaine de la commande adaptative et leur intérêt dans le cadre de l'application considérée.

Ainsi, l'application de la loi d'adaptation structurée que nous avons proposée a permis l'obtention de domaines de variations des gains plus grands par rapport à ceux obtenus avec l'application d'une adaptation non-structurée. Grâce à ce développement et à l'ajout de la σ -modification, l'application de la commande adaptative pour le contrôle d'attitude de satellite a donné des résultats positifs en simulation, des consignes de l'ordre de 20 degrés pouvant être suivies, avec une sollicitation de l'actionneur limitée à 50 % de sa capacité maximale.

Bien évidemment, l'application de la σ -modification ne représente pas, en soi, une contribution. Néanmoins, les conditions que nous avons énoncées permettent de prouver que la loi intégrant le terme σ garantit la stabilité asymptotique de la boucle fermée. Ceci représente, de notre point de vue, un résultat à la fois nouveau (seulement des propriétés de bornitude pouvant être garanties jusqu'à présent), mais aussi important, car la σ -modification joue un rôle considérable dans l'implémentation pratique des lois adaptatives.

Une autre contribution présentée dans ce chapitre est la procédure de synthèse permettant de déterminer des valeurs numériques pour tous les paramètres de la loi de commande proposée. Un rôle central dans cette procédure est joué par les domaines de variation à l'intérieur desquels les gains adaptatifs sont autorisés à évoluer. Ces domaines sont obtenus par résolution LMI à partir des conditions liées à la structure désirée de l'adaptation et validés afin de garantir la stabilité asymptotique avec la loi incluant la σ -modification. Ils influencent directement les performances obtenues avec la loi de commande adaptative, car l'amplitude des consignes d'attitude qui peuvent être suivies sans saturer la roue à réaction en dépend. Le calcul des paramètres σ et des coefficients d'adaptation γ est intégré dans la procédure de synthèse et se fait à partir de considérations sur la dynamique des gains et sur l'implémentation de leur lois d'adaptation respectives.

Même si la loi adaptative présentée dans ce chapitre permet d'obtenir un bon comportement pour l'application au contrôle du satellite, le fait qu'elle soit exprimée en temps continu constitue un inconvénient. Ainsi, afin de se rapprocher de la situation d'une implémentation concrète, une expression en temps discret de cette loi est nécessaire. Une autre possibilité d'extension des résultats que nous venons de présenter vient du fait que les conditions de stabilité du Théorème 9 enlèvent toute contraintes sur la loi d'adaptation des gains, sous conditions que ceux-ci restent bornés dans les intervalles calculés. Les degrés de liberté ainsi offerts peuvent être exploités afin d'améliorer la réponse dynamique du satellite avec la loi de commande adaptative. Les développements effectués à partir de ces observations sont présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Application sur un simulateur satellite complet

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner, à partir des résultats théoriques introduits dans le Chapitre 4, des formulations de lois de commande adaptatives appropriées à la mise en œuvre sur un satellite. Cette propriété se traduit par le fait que les algorithmes proposés doivent répondre à la problématique de commande à fort/faible dépointage et générer une dynamique adéquate en boucle fermée, tout en étant implémentables sur l'ordinateur de bord. D'un point de vue des expérimentations en vol, l'objectif du chapitre correspond à la validation des lois de commande adaptatives en vue de la campagne d'essais planifiée sur le satellite Picard en début de l'année 2014.

Afin d'atteindre cet objectif nous proposons dans un premier temps des modifications de la loi d'adaptation obtenue dans la fin du Chapitre 4. Deux nouveaux termes sont ainsi ajoutés dans les équations d'adaptation, ce qui permet d'améliorer la dynamique du satellite en boucle fermée. Grâce au cadre théorique introduit précédemment, l'ajout de ces termes ne modifie pas les résultats de stabilité établis. En effet, les gains adaptatifs restant bornés dans les domaines calculés et validés en utilisant la procédure de synthèse proposée, la stabilité asymptotique en boucle fermée est garantie.

Une fois ces nouvelles expressions d'adaptation proposées, leur implémentation en temps discret est abordée. A ce sujet, une attention particulière est accordée à la fonction barrière que nous proposons de mettre en œuvre en projetant les gains sur les frontières des domaines de variation permis. Des expressions discrètes basées sur des schémas de type Euler et Tustin sont proposées pour les autres termes de la loi d'adaptation et l'effort de calcul associé à chacune de ces méthodes est également discuté.

A partir des résultats de simulation positifs obtenus avec les lois exprimées en temps discret, nous considérons par la suite la validation de ces algorithmes sur un simulateur complet du satellite Picard. La première étape dans cette démarche est l'application de la procédure de synthèse pour un modèle trois axes du satellite. A ce stade nous mettons en évidence la flexibilité de cette procédure, qui permet d'obtenir, pour le système complet à trois entrées et six sorties, une loi de commande qui respecte plusieurs contraintes de structure.

La loi adaptative basée sur les paramètres ainsi calculés est par la suite intégré dans un simulateur complet du satellite Picard, construit sur un noyau Fortran. Cette intégration a permis le déroulement des plans de simulation nécessaires à l'obtention de l'accord du CNES pour tester en vol les lois de commande adaptatives proposées. Nous présentons en fin de ce chapitre et en Annexe C des extraits de simulations qui illustrent le comportement dans des cas pratiques qui apparaissent au cours du fonctionnement du satellite : réponses aux grands dépointages, transition entre le mode MGT et MNO, réponses en cas de non-disponibilité de la mesure.

5.2 Évolutions de la loi d'adaptation

Nous commençons ce chapitre en abordant l'amélioration de la dynamique générée par l'utilisation de la loi de commande proposée dans le Chapitre 4. En analysant les réponses aux grands dépointages présentées dans la Section 4.5.3.1, page 126, obtenues avec la loi adaptative :

$$\begin{aligned} \dot{K}_\theta &= -(g_\theta e_\theta^2 + \sigma_\theta \cdot (K_\theta - F_{\theta 0}) + \Phi_{D_\theta, \alpha_\theta}(K_\theta - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta \\ \dot{K}_\omega &= -(g_\omega \omega^2 + \sigma_\omega \cdot (K_\omega - F_{\omega 0}) + \Phi_{D_\omega, \alpha_\omega}(K_\omega - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega, \end{aligned} \quad (5.1)$$

on observe que le gain K_θ reste constant pour de longues périodes de temps. Sur la Figure 4.20, cette durée varie entre 50% et 90% du temps de réponse, selon le réglage et l'amplitude du dépointage initial. Ce comportement est généré par le fait que le seuil $e_{\theta, s}$ (défini par (4.72) - page 121) doit être choisi de l'ordre de quelques degrés, afin d'éviter que la vitesse roue n'atteigne des valeurs trop importantes lors de son franchissement. Ce type d'évolution de K_θ constitue un inconvénient non seulement du point de vu de la philosophie de la commande adaptative (car, si le gain est "presque constant" dans certains cas, alors la loi est-elle "vraiment" adaptative ?), mais surtout à cause des dynamiques satellite qu'elle génère. Pour analyser ces réponses, considérons la Figure 4.21, page 130, qui montre l'évolution de la vitesse angulaire du satellite pour le cas des grands dépointages initiaux. On observe alors que suite à l'accélération initiale, une phase de freinage lent apparaît, lorsque $K_\theta = K_{\theta, b}$, valeur minimale qui lui est permise. Lorsque l'erreur d'attitude franchit le seuil $e_{\theta, s}$, K_θ augmente et le satellite accélère fortement, pour ensuite ralentir et rejoindre la position d'équilibre. Nous avons ainsi plusieurs phases d'accélération dont la plus "troublante" est celle de forte accélération juste avant le freinage final. Par rapport à la dynamique idéale que l'on souhaiterait obtenir en réponse à un grand dépointage (une phase d'accélération suivie par une phase de freinage), le comportement observé est ainsi assez éloigné. Ces observations sont à la base des améliorations que nous proposons dans cette section pour la loi adaptative (5.1).

5.2.1 Terme σ variable

Nous pouvons déduire des observations précédentes que le gain en position devrait commencer à augmenter plus tôt, de manière à éviter le freinage du satellite, mais avec une dynamique plus lente – pour que la commande soit limitée. La loi adaptative (5.1) ne permet pas imposer ce comportement, car le seuil en dépointage ainsi que la dynamique de K_θ lors du franchissement de ce seuil sont imposés par σ_θ . Un paramètre supplémentaire est donc nécessaire, de manière à ce que le seuil à partir duquel K_θ commence à retourner vers $F_{\theta 0}$, ainsi que sa dynamique puissent être imposés indépendamment.

La loi adaptative que nous proposons, permettant d'obtenir ce comportement s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{K}_\theta &= -(g_\theta e_\theta^2 + \sigma_\theta \cdot (1 + \rho_\theta e_\theta^2)(K_\theta - F_{\theta 0}) + \Phi_{D_\theta, \alpha_\theta}(K_\theta - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta \\ \dot{K}_\omega &= -(g_\omega \omega^2 + \sigma_\omega \cdot (K_\omega - F_{\omega 0}) + \Phi_{D_\omega, \alpha_\omega}(K_\omega - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega\end{aligned}\quad (5.2)$$

et fait intervenir le nouveau paramètre, ρ_θ . Dans ces expressions, le facteur $\sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta^2)$, qui multiplie la différence entre la valeur courante du gain et sa valeur nominale, varie en fonction de l'erreur. On désigne ainsi cette nouvelle loi comme à "terme σ variable", par opposition à la loi (5.1), à terme σ fixe (le facteur multipliant $K_\theta - F_{\theta 0}$ étant alors constant et égal à σ_θ). Remarquons que la loi (5.1) est un cas particulier de la loi (5.2) avec $\rho_\theta = 0$. Comme expliqué ci-dessus, cette modification est introduite dans le cadre de cette étude afin d'améliorer l'adaptation du gain K_θ et n'apparaît pas ainsi sur K_ω . Cependant, un terme σ avec une expression similaire, $\sigma_\omega \cdot (1 + \rho_\omega \omega^2)$, pourrait être introduit dans l'adaptation du gain en vitesse, si l'ajout de ce paramètre se relevait intéressant pour des applications futures.

Nous commençons la présentation des modalités de réglage des paramètres définissant la nouvelle loi d'adaptation en remarquant que, avec l'expression proposée pour le terme σ , le seuil $e_{\theta, s}$ est défini par :

$$g_\theta e_{\theta, s}^2 = -\sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_{\theta, s}^2)(K_\theta - F_{\theta 0}), \quad (5.3)$$

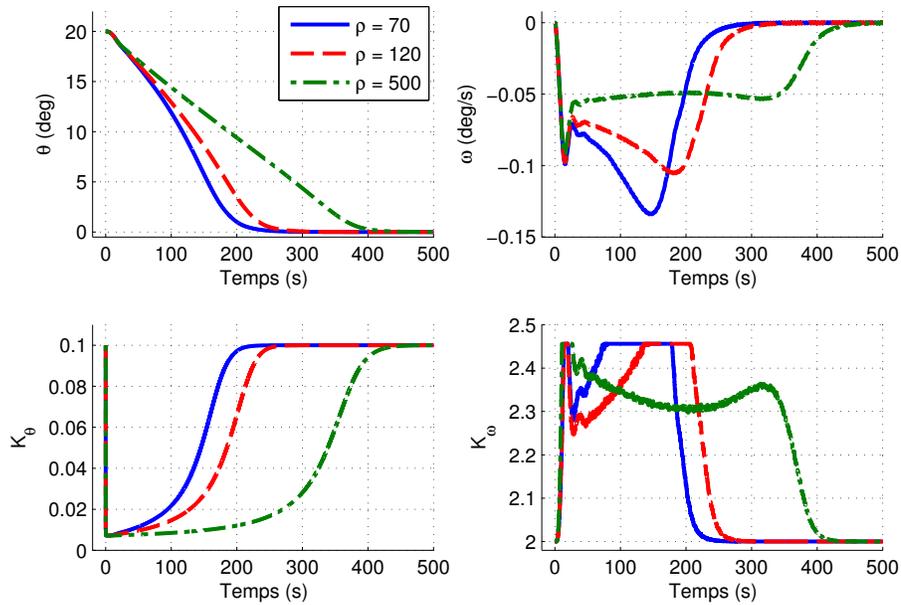
égalité qui correspond à l'équilibre entre les termes σ et erreur. Cette équation contient 3 inconnues : $e_{\theta, s}$, σ_θ et ρ_θ . Dans une démarche similaire à celle mise en place pour le réglage du terme σ fixe, nous proposons de choisir $e_{\theta, s}$ et ρ_θ sur la base de considérations liées à la dynamique de la boucle fermée. Une fois ces deux choix effectués, σ_θ reste la seule inconnue de (5.3) et peut donc être obtenu par calcul direct.

Le but de la loi proposée dans cette section étant d'imprimer au gain K_θ une variation appropriée sur la plus grande partie de la plage de fonctionnement couverte en mode MNO, on choisit $e_{\theta, s} = 20$ degrés. Ce choix assure que si K_θ atteint sa valeur minimale, il va retourner vers $F_{\theta 0}$, avec une dynamique définie par ρ_θ , dès que $|e_\theta| < |e_{\theta, s}| = 20$ deg. Pour des valeurs du dépointage initial inférieures à ce seuil, le gain ne va jamais atteindre sa valeur minimale, mais va diminuer fortement en début de réponse, pour ensuite retourner vers sa valeur nominale.

Concernant le choix de ρ_θ , ce paramètre permet, comme illustré par les figures suivantes de régler la dynamique de K_θ et par ce biais la sollicitation de l'actionneur et la dynamique du satellite en boucle fermée. La Figure 5.1 montre la réponse du premier axe du satellite Demeter et l'évolution des gains adaptatifs, pour un dépointage initial de 20 degrés. La même structure de simulation que celle utilisée dans le Chapitre 4 est mise en place et trois valeurs différentes sont considérées pour ρ_θ . On peut observer que pour tous ces choix le gain K_θ varie tout au long de la réponse, à la différence du cas de l'utilisation du terme σ fixe, où le gain gardait une valeur constante pendant une longue durée de temps. Ainsi, dans les instants qui suivent $t = 0$, K_θ diminue fortement (terme erreur dominant devant le terme σ) pour ensuite retourner lentement vers $F_{\theta 0}$, avec une dynamique qui dépend de la valeur de ρ_θ . Remarquons que plus ce paramètre est petit, plus la dynamique vers $F_{\theta 0}$ est rapide (si $\rho_\theta = 0$ on retrouve le cas du terme σ fixe).

Analysons maintenant l'influence de ρ_θ sur la dynamique satellite. Le premier réglage, $\rho_\theta = 70$, a été effectué de manière à ce que, suite à l'accélération initiale causant un premier pic de vitesse, le satellite évolue vers sa position d'équilibre avec une vitesse approximativement constante. On retrouve alors un comportement

similaire à celui imprimé par la loi de commande à commutation biais de vitesse/proportionnel-dérivé. En choisissant $\rho_\theta = 120$ le type de dynamique observée est assez différente, la loi adaptative imprimant un deuxième pic de vitesse (qui apparaît autour de $t = 200$ s) de la même amplitude que celui qui apparaît en début de réponse. Ceci fait qu'au niveau de la vitesse de la roue à réaction (Figure 5.2), le deuxième pic est dans ce cas – lui aussi – de la même amplitude que le premier. Ainsi, la vitesse maximale atteinte par la roue au cours de la simulation se situe, comme dans le cas de la loi adaptative à terme σ fixe (voir Figure 4.22 - page 131), autour de 140 rad/s. Cependant, avec la loi à terme σ variable, le temps de réponse est significativement diminué, se situant maintenant autour de 250, au lieu de 500 secondes dans le cas précédent. Ce comportement est dû à la phase d'accélération qui peut être observée pour $t = 30 \dots 175$ s sur la Figure 5.1, au niveau de l'évolution de la vitesse du satellite. Cette phase remplace – grâce à l'augmentation constante de K_θ – le freinage qui apparaissait entre les deux pics de vitesse, lorsque l'on utilisait la forme initiale de la loi adaptative ($t = 850 \dots 1250$ sur la Figure 4.21 - page 130). Le dernier choix au niveau de la valeur numérique de ρ_θ illustre le fait que en diminuant ce paramètre, la dynamique de la boucle fermée est accélérée, cette fois ci au prix d'une vitesse augmentée de la roue à réaction. L'utilisation d'un terme σ variable donne ainsi de la flexibilité dans la synthèse de la loi adaptative, en permettant de réaliser un compromis entre rapidité et sollicitation de l'actionneur. Il permet également de rendre plus uniformes les réponses aux grands dépointages en remplaçant les freinages et accélérations brusques par des variations de vitesse plus lentes et réparties sur une plus grande partie de la réponse.

FIGURE 5.1 – Influence de ρ_θ sur la dynamique satellite

La discussion qui précède fait émerger un critère de choix vis-à-vis de la valeur numérique de ρ_θ , ce paramètre pouvant être réglé par rapport à la vitesse maximale que l'on autorise pour la roue à réaction. De ce point de vue, un choix intéressant est celui qui génère un deuxième pic de vitesse de la même amplitude que le premier (qui dépend, quant à lui de la borne minimale autorisée à K_θ). Ainsi, afin de fixer la valeur de ρ_θ qui assure le respect du critère proposé, une démarche de type "essai-erreur" peut être adoptée, en augmentant ρ_θ

si l'on souhaite réduire la sollicitation de l'actionneur et en le diminuant si on dispose d'une certaine marge à ce niveau.

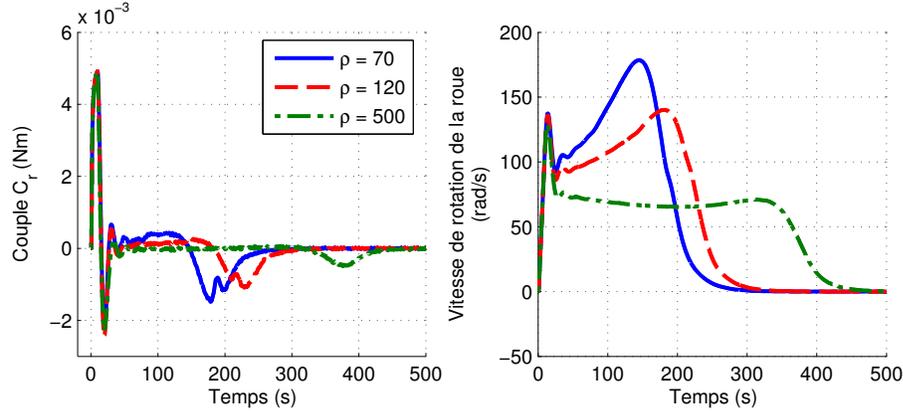


FIGURE 5.2 – Influence de ρ_θ sur la sollicitation de l'actionneur

Avec l'ajout du terme σ variable, la loi adaptative offre la possibilité d'obtenir des comportements améliorés en boucle fermée : la dynamique satellite peut être réglée afin d'avoir des réponses rapides et uniformes, tandis que la vitesse de rotation des roues à réaction peut être limitée. Cette flexibilité est obtenue au prix de l'introduction d'un paramètre supplémentaire, dont l'influence sur la dynamique globale du système est facilement perceptible, ce qui rend son réglage transparent.

5.2.2 Pris en compte de la vitesse de la roue à réaction

Étendons maintenant notre analyse pour des cas de simulation qui prennent en compte non seulement les conditions initiales au niveau de la dynamique satellite, mais également celles de la roue à réaction.

Il est en effet intéressant de remarquer que, pour la même valeur du dépointage initial, les lois de commande précédemment introduites peuvent, selon la vitesse initiale de la roue à réaction, amener ou non l'actionneur en saturation. Ainsi, en considérant le cas d'un dépointage initial de 20 degrés, une loi réglée de manière à imprimer une vitesse maximale de 200 rad/s (en supposant des conditions initiales nulles au niveau de l'actionneur) va générer la saturation si la vitesse initiale de la roue à réaction est de 150 rad/s (la vitesse maximale serait alors de $150 + 200 = 350$ rad/s supérieure à la valeur de saturation). Afin d'utiliser de manière optimale les capacités de l'actionneur, on souhaiterait donc que ses conditions de fonctionnement soient prises en compte au niveau de la loi de commande. Si l'actionneur est loin de la saturation il peut être sollicité de manière à avoir une réponse rapide, tandis que si on se rapproche de la limite de sa zone de fonctionnement linéaire, le correcteur devrait s'adapter afin de limiter l'effort de commande.

Une manière de répondre à ce besoin est de prendre en compte la vitesse de rotation de la roue à réaction dans l'adaptation du gain K_θ . La loi d'adaptation que nous proposons, mettant en œuvre cette dépendance, s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{K}_\theta &= -(g_\theta e_\theta^2 + g_{\omega r} \omega_r^2 + \sigma_\theta \cdot (1 + \rho_\theta e_\theta^2))(K_\theta - F_{\theta 0}) + \Phi_{D_\theta, \alpha_\theta}(K_\theta - F_{\theta 0}) \cdot \gamma_\theta \\ \dot{K}_\omega &= -(g_\omega \omega^2 + \sigma_\omega \cdot (1 + \rho_\omega e_\omega^2))(K_\omega - F_{\omega 0}) + \Phi_{D_\omega, \alpha_\omega}(K_\omega - F_{\omega 0}) \cdot \gamma_\omega \end{aligned} \quad (5.4)$$

Le nouveau terme qui apparaît dans l'adaptation de K_θ agit d'une manière similaire au terme erreur : pour $g_{\omega_r} > 0$, il tend à faire diminuer le gain lorsque ω_r (la vitesse de la roue à réaction) est non nulle. De cette manière, si la vitesse roue est importante, le gain K_θ diminue, ce qui limite la commande et donc l'augmentation de la vitesse roue.

Pour illustrer les améliorations obtenues avec la loi 5.2, ainsi que les modalités de réglage du nouveau paramètre, g_{ω_r} , nous mettons en place un nouveau cas de simulation. Il vise à mettre en évidence les différences en termes de dynamique qui sont obtenues en considérant, pour la même valeur de 20 degrés de dépointage initial, des valeurs différentes pour la vitesse de la roue à réaction. Cette simulation est définie comme suit :

- un couple perturbateur :

$$C_p(t) = A \cdot (10^{-6} + 3 \cdot 10^{-5} \sin(\omega_0 t) + 1.5 \cdot 10^{-5} \sin(2\omega_0 t)) , \quad \omega_0 = 10^{-3} \text{rad/s} , \quad (5.5)$$

est appliqué afin de faire varier la vitesse de la roue à réaction au cours du temps. La valeur de l'amplitude A définit ainsi la valeur maximale atteinte par la vitesse roue en régime permanent. En prenant $A = 1.23$, on obtient valeur maximale de 150 rad/s au cours de la simulation. Cette valeur est choisie car, avec toutes les lois adaptatives considérées, on obtient, pour un dépointage initial de 20 degrés, un pic de vitesse roue de l'ordre de 140 rad/s. Ce pic est dû au domaines de variations bornés des gains, communs pour toutes lois adaptatives proposées et sera donc toujours présent. Pour des vitesses initiales de la roue à réaction supérieures à 150 rad/s, on ne peut ainsi pas espérer d'éviter la saturation.

- à $t = 0$, l'attitude du satellite est de 20 degrés et la référence est à zéro.
- à $t = 4000$ s, moment où la vitesse roue atteint, en valeur absolue sa valeur maximale en régime permanent (150 rad/s), une référence de 20 degrés en échelon est appliquée.

On obtient ainsi, à $t = 0$ s et $t = 4000$ s des dépointage "initiaux" de la même amplitude, mais avec des vitesses roue différentes à ces instants.

Les réponses obtenues en boucle fermée, en appliquant la loi de commande (5.4), avec le réglage (expliqué dans la suite) $\rho_\theta = 30$, $g_{\omega_r} = 1.88 \cdot 10^{-5}$ sont représentées dans les Figures 5.3 et 5.4. Elles illustrent le fait que la nouvelle loi d'adaptation permet d'imprimer au satellite une dynamique qui dépend des conditions de fonctionnement de l'actionneur.

Remarquons tout d'abord que pour la même amplitude du dépointage "initial" (20 degrés pour la réponse aux conditions initiales comme pour la consigne en échelon) les temps de réponse sont différents : approximativement 250 secondes dans le premier cas et 450 dans le deuxième). Cette différence est illustrée en détail sur la Figure 5.5, où l'erreur de pointage et la vitesse satellite entre $t = 0$ et $t = 500$ secondes et entre $t = 4000$ et $t = 4500$ secondes respectivement sont représentées par des courbes superposées.

La différence de dynamique entre les deux situations est générée par le fait que lors de l'application de la consigne ($t = 4000$ s), K_θ garde des petites valeurs pendant plus de temps, par rapport au cas de la réponse aux conditions initiales. Ce comportement, obtenu grâce à l'ajout du terme "vitesse roue" dans l'équation d'adaptation, est illustré en détail sur la Figure 5.6, où l'on peut observer l'évolution de K_θ entre $t = 0$ et $t = 500$ secondes et entre $t = 4000$ et $t = 4500$ secondes respectivement.

Notons finalement que l'écart de vitesse roue générée lors du suivi de consigne est de 133 rad/s, alors que pour la condition initiale de même amplitude, cet écart est de 170 rad/s. L'évolution des écarts de la vitesse roue par rapport aux valeurs $\omega_r(t = 0) = 0$ et $\omega_r(t = 4000) = 155$ rad/s respectivement est représentée en

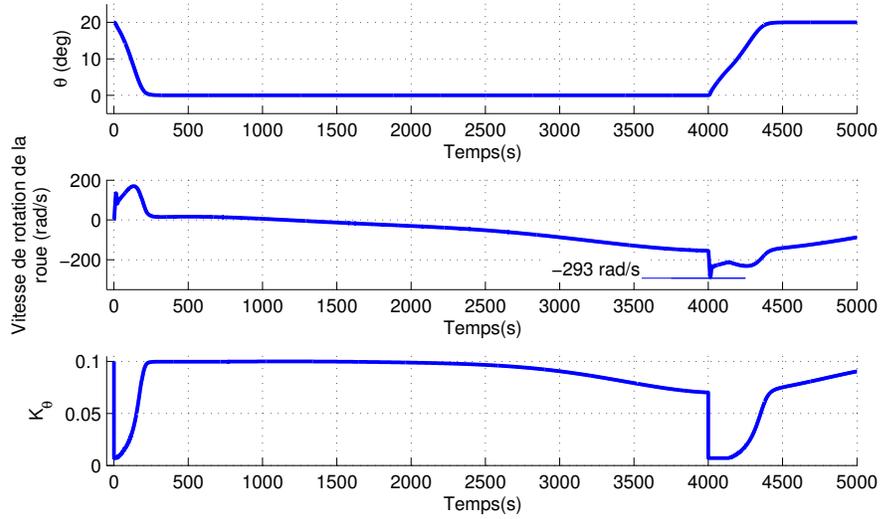


FIGURE 5.3 – Effet de l'utilisation de la vitesse roue sur la dynamique en boucle fermée – attitude, vitesse roue, gain K_θ

détail sur la Figure 5.7. On peut observer sur cette figure que la baisse en terme de vitesse relative de la roue à réaction au niveau du deuxième pic est également très significative : 77 rad/s par rapport au 133 rad/s.

En analysant la Figure 5.3, un autre effet de l'application de la loi (5.4) peut être observé : la variation du gain K_θ en régime stationnaire. Ce comportement apparait car, avec l'ajout du terme $g_{\omega_r}\omega_r$ dans l'équation d'adaptation, le point d'équilibre $K_\theta \approx F_{\theta 0}$, $e_\theta \approx 0$ est perdu. En effet, pour $e_\theta \approx 0$, K_θ peut être approximée en posant $\dot{K}_\theta = 0$ (ce qui revient à faire l'hypothèse que K_θ s'adapte très rapidement aux variations de ω_r) par :

$$K_\theta \approx \frac{-g_{\omega_r}\omega_r^2 + \sigma_\theta F_{\theta 0}}{\sigma_\theta} = F_{\theta 0} - \frac{g_{\omega_r}}{\sigma_\theta}\omega_r^2 \quad (5.6)$$

En régime stationnaire, K_θ varie ainsi en fonction ω_r , selon les valeurs de g_{ω_r} et σ_θ . Ce dernier paramètre peut être considéré comme connu, choisi selon la démarche décrite dans la section précédente. En régime stationnaire, la vitesse de la roue à réaction varie essentiellement en fonction du couple perturbateur, à l'intérieur d'un intervalle du type $[-\omega_{r,\max}, \omega_{r,\max}]$, dont on peut obtenir une estimation, car l'ampleur des perturbations qui agissent sur le satellite est connue. Sous ces hypothèses, g_{ω_r} peut être choisi afin de contrôler l'influence de ω_r sur K_θ en régime stationnaire. Cette influence correspond à une baisse du gain par rapport à $F_{\theta 0}$, ce qui fait qu'à faible dépointage, le correcteur n'est plus garanti à être optimal. En particulier, les propriétés de rejet des perturbations sont modifiées. De ce point de vue, une valeur d'intérêt particulier est $K_{\theta,\min}^{\text{stat}}$, valeur minimale qui peut être atteinte par K_θ en régime stationnaire. En fixant cette limite, on obtient, selon (5.6), la valeur de g_{ω_r} :

$$g_{\omega_r} = \frac{\sigma_\theta \cdot (F_{\theta 0} - K_{\theta,\min}^{\text{stat}})}{\omega_{r,\max}^2}, \quad (5.7)$$

qui garantit que si, en régime stationnaire, $|\omega_r| < \omega_{r,\max}$, alors $K_\theta > K_{\theta,\min}^{\text{stat}}$.

Le choix de $K_{\theta,\min}^{\text{stat}}$ peut être fait en remarquant que lorsque K_θ diminue, les perturbations sont moins bien

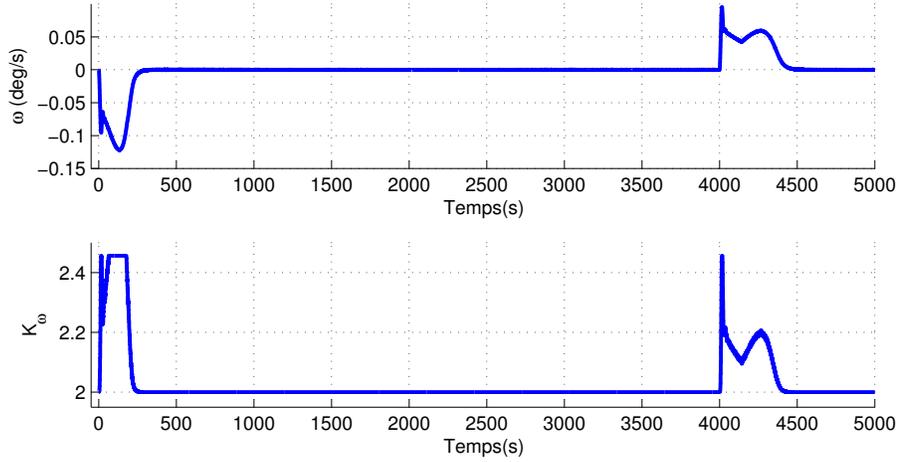
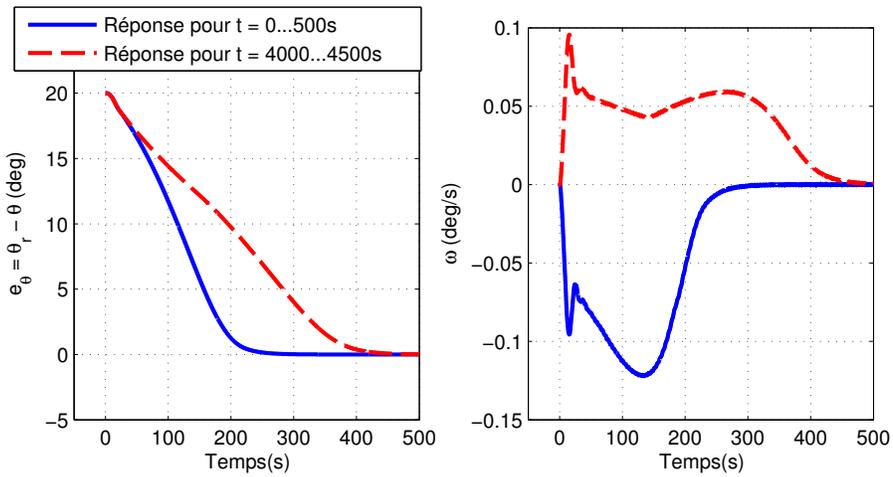
FIGURE 5.4 – Effet de l'utilisation de la vitesse roue sur la dynamique en boucle fermée – vitesse satellite, K_ω 

FIGURE 5.5 – Utilisation de la vitesse roue – détail sur l'attitude et la vitesse satellite

rejetées. Cette propriété peut être observée sur la Figure 5.8, où les diagrammes de Bode du transfert entre le couple perturbateur et la position angulaire sont représentées pour différentes valeurs de K_θ . On observe ainsi que pour $K_\theta = 0.07$ et $K_\theta = 0.05$ la perte de performance, par rapport au cas nominal $K_\theta = 0.1$, est de 3dB et 6 dB respectivement. Cette différence est mesurée aux fréquences 10^{-3} rad/s et $2 \cdot 10^{-3}$ rad/s, qui définissent le couple perturbateur, selon (5.5).

Reprenons maintenant la procédure complète de réglage des nouveaux paramètres qui interviennent dans (5.4), en illustrant notre raisonnement sur l'application numérique traitée ci-dessus. Comme expliqué lors de l'introduction du terme σ variable, le réglage commence par fixer $e_{\theta,s} = 20$ degrés. On choisit ensuite un ρ_θ petit (par rapport aux valeurs numériques considérées dans la section précédente), $\rho_\theta = 30$, afin d'imposer une dynamique rapide lorsque la vitesse de la roue à réaction est faible. σ_θ est ensuite calculé selon (5.3) et on obtient $\sigma_\theta = 0.0051$. Pour l'environnement de simulation considéré, la vitesse maximale que la roue peut atteindre en régime permanent est $\omega_{r,max} = 150$ rad/s et $K_{\theta,min}^{stat} = 0.07$ est choisi, pour que que la perte

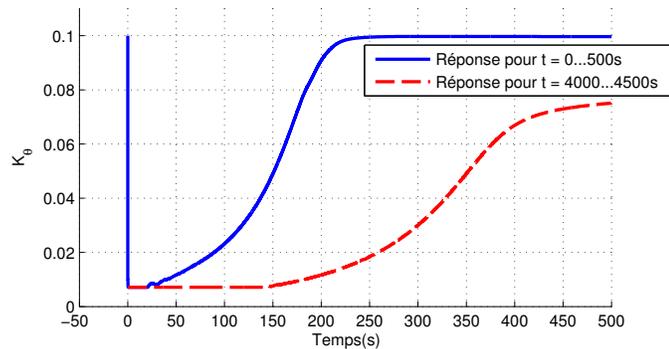
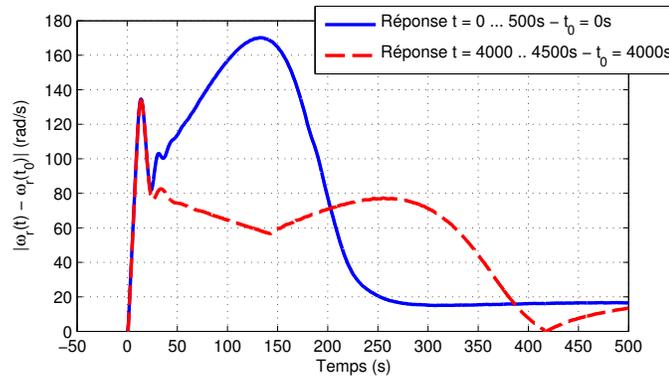
FIGURE 5.6 – Utilisation de la vitesse roue – détail sur le gain K_θ 

FIGURE 5.7 – Utilisation de la vitesse roue – détail sur la vitesse roue

de performance en termes de rejet de perturbations soit, en régime stationnaire, inférieure à 3dB. On obtient ainsi, selon (5.7), $g_{\omega r} = 1.88 \cdot 10^{-5}$, valeur utilisée dans la simulation dont les résultats viennent d'être présentés. Cette procédure peut être également complétée par une étape d'itération sur les valeurs numériques des paramètres de la loi de commande. Ceux-ci peuvent ainsi être modifiés en fonction des résultats obtenus en simulation, afin d'améliorer le comportement en boucle fermée, pour les différentes conditions de fonctionnement considérées.

5.3 Discrétisation des lois de commande proposées

Grâce aux améliorations pratiques apportées dans la section précédente à la loi d'adaptation proposée dans le Chapitre 4, ainsi qu'aux outils théoriques développés dans cette même partie du manuscrit, l'implémentation à bord d'un satellite d'une loi de commande adaptative peut être envisagée. En particulier, la loi utilisant la mesure de la vitesse de rotation de la roue à réaction pourrait offrir un certain avantage opérationnel, car elle permet d'adapter l'agilité du satellite en fonction des capacités des actionneurs.

Le prochain pas dans les développements nécessaires aux expérimentations en vol est de formuler en temps discret (en vue de l'implémentation sur ordinateur de bord) les lois de commande précédemment proposées. Les algorithmes discrets présentés dans cette section sont obtenus à partir des équations d'adaptation en temps

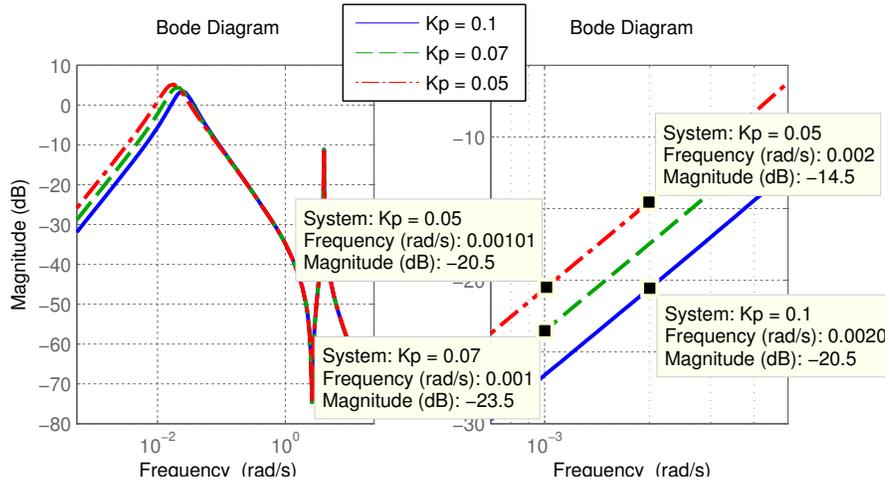


FIGURE 5.8 – Transfert couple perturbateur – attitude pour différentes valeurs de K_θ (à droite zoom sur la zone autour de 10^{-3} rad/s)

continu considérées jusqu'à présent. Lors de la discrétisation de ces équations, on fait l'hypothèse que si la période d'échantillonnage est suffisamment petite, les lois exprimées en temps discret garderont les propriétés de stabilité associées aux lois continues dont elles sont obtenues.

5.3.1 Loi sans fonction barrière - schémas d'Euler et de Tustin

Comme nous l'avons illustré dans la discussion de la Section 4.5.2, page 122, la discrétisation (au sens de l'application d'un schéma de type Euler, Tustin ou autre) de la fonction barrière Φ s'avère problématique. Nous avons ainsi choisi de traiter séparément l'implémentation en temps discret d'une fonction garantissant la bornitude des gains et nous nous intéressons dans un premier temps aux autres termes des équations proposées.

Considérons une expression générale de la loi d'adaptation :

$$\dot{K}_i(t) = f_i(K_i(t), \mathbf{y}_i(t)) , \quad i = 1 \dots N \quad (5.8)$$

où les fonctions f_i ne présentent pas de singularités (à différence de la fonction barrière Φ) et les vecteurs \mathbf{y}_i représentent les signaux en fonction desquels chaque gain K_i évolue. Pour le cas de la commande adaptative du satellite, l'expression proposée dans la Section 5.2.2 est choisie :

$$\begin{aligned} \dot{K}_\theta &= -(g_\theta e_\theta^2 + g_{\omega_r} \omega_r^2 + \sigma_\theta (1 + \rho_\theta e_\theta^2) (K_\theta - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta \\ \dot{K}_\omega &= -(g_\omega \omega^2 + \sigma_\omega (K_\omega - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega , \end{aligned} \quad (5.9)$$

ce qui donne $\mathbf{y}_\theta(t) = [e_\theta(t) \ \omega_r(t)]$, $\mathbf{y}_\omega(t) = \omega(t)$.

Nous considérons dans un premier temps la discrétisation de l'équation (5.8) en utilisant un schéma basé sur la méthode d'Euler, usuellement utilisé en commande adaptative (Barkana, 1989; Shibata et al., 2002; Barkana, 2005c; Ben Yamin et al., 2007) :

$$K_i(q) = K_i(q-1) + f_i(K_i(q), \mathbf{y}_i(q)) \cdot T_{e,ad} , \quad i = 1 \dots N , \quad (5.10)$$

où q représente l'échelle discrète de temps associée à la période d'échantillonnage $T_{e,ad}$. A partir de cette formulation, les gains au pas de temps courant, $K_i(q)$ peuvent être explicitement calculés en remplaçant les expressions des fonctions f_i . En appliquant ce schéma à l'équation (5.9) nous obtenons :

$$K_\theta(q) = \frac{1}{1 + \sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta^2(q))\gamma_\theta T_{e,ad}} \cdot K_\theta(q-1) - \frac{g_\theta e_\theta^2(q) + g_{\omega r} \omega_r^2(q) - \sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta^2(q))F_0}{1 + \sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta^2(q))\gamma_\theta T_{e,ad}} \gamma_\theta T_{e,ad} \quad (5.11)$$

$$K_\omega(q) = \frac{1}{1 + \sigma_\omega \gamma_\omega T_{e,ad}} \cdot K_\omega(q-1) - \frac{\omega^2(q) - \sigma_\omega F_{\omega 0}}{1 + \sigma_\omega \gamma_\omega T_{e,ad}} \gamma_\omega T_{e,ad} ,$$

ce qui illustre une évolution typique en temps discret : les nouveaux gains $K_\theta(q)$, $K_\omega(q)$ sont calculés à partir de leurs valeurs précédentes respectives $K_\theta(q-1)$, $K_\omega(q-1)$, en ajoutant un incrément dépendant des signaux qui influencent leurs évolutions. L'utilisation d'un schéma implicite peut être également observée dans l'équation précédente, les deux termes intervenant dans son membre droit étant obtenus suite à des divisions qui n'apparaissent pas dans les lois d'adaptation continues. Du point de vue de l'implémentation, ces opérations sont à éviter, car les divisions peuvent nécessiter, selon le processeur utilisé, des temps de calculs plus grands que ceux associés aux additions et multiplications.

Ce problème peut être évité en utilisant un schéma d'Euler explicite modifié, qui s'écrit, dans le cas général :

$$K_i(q) = K_i(q-1) + f_i(K_i(q-1), \mathbf{y}_i(q)) \cdot T_{e,ad} , \quad i = 1 \dots N , \quad (5.12)$$

où l'on a remplacé $\mathbf{y}_i(q-1)$ (qui apparaîtrait en considérant un schéma d'Euler explicite classique) par $\mathbf{y}_i(q)$, pour que les gains soient adaptés en fonction de la dernière mesure disponible. Appliqué à l'équation (5.9), ce schéma donne la loi discrète :

$$\begin{aligned} K_\theta(q) &= K_\theta(q-1) - (g_\theta e_\theta(q)^2 + g_{\omega r} \omega_r(q)^2 + \sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta(q)^2)(K_\theta(q-1) - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta T_{e,ad} \\ K_\omega(q) &= K_\omega(q-1) - (g_\omega \omega(q)^2 + \sigma_\omega(K_\omega(q-1) - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega T_{e,ad} , \end{aligned} \quad (5.13)$$

où, comme dans la loi continue d'origine, n'apparaissent que des additions et des multiplications.

Même si les méthodes de type Euler sont souvent considérées pour l'implémentation en temps discret des gains adaptatifs, l'application d'autres schémas de discrétisation est cependant possible. En effet, comme les équations d'adaptation en temps continu se représentent sous la forme d'équations différentielles, toutes les méthodes de discrétisation associées à ces dernières peuvent être appliquées pour le cas particulier des lois d'adaptation. Considérons par exemple, le schéma implicite basé sur la transformée bilinéaire (ou de Tustin), qui consiste à approximer s , la variable de Laplace en temps continu, selon :

$$s \rightarrow \frac{2}{T_{e,ad}} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} , \quad (5.14)$$

où z représente la variable associée à la transformée en Z (ou transformée de Laplace discrète) et z^{-1} peut être interprété comme l'opérateur retard : $z^{-1} \cdot f(q) = f(q-1)$. La transformée bilinéaire est en général intéressante du point de vue de l'implémentation des lois de commande car elle réalise la transformation entre les plans de variation de s et z en associant au demi-plan complexe gauche le cercle unité.

TABLE 5.1 – Opérations nécessaires à l'implémentation des lois d'adaptation en temps discret

	Additions	Multiplications	Divisions
Euler implicite	12	6	3
Euler explicite	11	8	0
Tustin	14	11	3

Approximée selon ce schéma de discrétisation, l'équation (5.8) devient :

$$K_i(q) = K_i(q-1) + \frac{1}{2} (f_i(K_i(q), \mathbf{y}_i(q)) + f_i(K_i(q-1), \mathbf{y}_i(q-1))) T_{e,ad} , \quad i = 1 \dots N. \quad (5.15)$$

L'adaptation des gains K_θ et K_ω selon (5.9) s'écrit alors en temps discret :

$$\begin{aligned} K_\theta(q) &= \frac{2 - h_{2\theta}(q-1)T_{e,ad}}{2 + h_{2\theta}(q)T_{e,ad}} K_\theta(q-1) - \frac{h_{1\theta}(q) + h_{1\theta}(q-1)}{2 + h_{2\theta}(q)T_{e,ad}} T_{e,ad} \\ K_\omega(q) &= \frac{2 - h_{2\omega}(q-1)T_{e,ad}}{2 + h_{2\omega}(q)T_{e,ad}} K_\omega(q-1) - \frac{h_{1\omega}(q) + h_{1\omega}(q-1)}{2 + h_{2\omega}(q)T_{e,ad}} T_{e,ad} \end{aligned} \quad (5.16)$$

où l'on a noté, afin de simplifier l'expression précédente :

$$\begin{aligned} h_{1\theta}(q) &= (g_\theta e_\theta^2(q) + g_{\omega r} \omega_r^2(q) - \sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta^2(q)) F_{\theta 0}) \gamma_\theta \\ h_{2\theta}(q) &= \sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta^2(q)) \gamma_\theta \\ h_{1\omega}(q) &= (g_\omega \omega^2(q) - \sigma_\omega F_{\omega 0}) \gamma_\omega \\ h_{2\omega}(q) &= \sigma_\omega \gamma_\omega \end{aligned} \quad (5.17)$$

En analysant les trois schémas de discrétisation proposées : (5.11) - basé sur la méthode d'Euler implicite, (5.13) - sur une méthode d'Euler explicite modifiée et (5.16) - sur la transformée de Tustin, une différence en termes d'effort de calcul demandé se fait remarquer. Comme montré dans le Tableau 5.1, la loi discrète (5.11) est la moins complexe en termes d'opérations nécessaires (en particulier elle peut être implémentée sans effectuer des divisions), ce qui montre son intérêt. La loi (5.16) qui, grâce à la transformée bilinéaire, réalise l'approximation la plus exacte de l'équation continue (5.9) est, comme on pouvait s'y attendre, la plus complexe, sans cependant demander un effort de calcul excessif. Cette courte analyse montre ainsi que les trois expressions considérées peuvent être implémentées en pratique. La plus simple des ces lois est cependant préférable, à partir du moment où elle vérifie les contraintes en termes de fonctionnement en boucle fermée (dynamique du satellite, sollicitation de la commande) et les effets liés à la numérisation (bruit sur la commande, oscillations introduites par l'échantillonnage) sont négligeables.

Les formulations en temps discret que nous venons d'introduire considèrent, comme nous l'expliquons en début de cette section, des lois d'adaptation qui ne font pas intervenir de fonction barrière. Nous présentons ci-dessous une modalité dont ces lois peuvent être complétées, par des termes actifs lorsque les gains recalculés, $K_i(q)$, sortent des domaines de variations permis.

5.3.2 Approximation de la fonction barrière - fonction "projecteur"

Afin de garantir la bornitude de gains adaptés en temps discret, nous proposons de remplacer la fonction barrière Φ par une fonction de type "projecteur", inspirée des travaux de Hovakimyan et Cao (2010). Pour illustrer le principe derrière cette fonction, considérons une expression générale de la loi d'adaptation discrète, et introduisons la variable intermédiaire $\tilde{K}_i(q)$ qui correspond aux gains adaptés selon un des schémas décrits ci-dessus :

$$\tilde{K}_i(q) = f_{i1}(\mathbf{y}(q), \mathbf{y}(q-1)) \cdot K_i(q-1) + f_{i2}(\mathbf{y}(q), \mathbf{y}(q-1)) \quad , \quad i = 1 \dots N \quad , \quad (5.18)$$

où les expressions des fonctions f_{i1} et f_{i2} dépendent de la loi d'adaptation en temps continu et du schéma de discrétisation utilisé.

Les propriétés de stabilité des lois de commande proposées se basent sur le fait que, à tout moment, les gains sont bornés, vérifiant $\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 \leq \alpha_i \beta$. Une possibilité de garantir cette propriété en temps discret est de projeter les gains \tilde{K}_i sur la frontière du domaine de variation, $\|K_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 = \alpha_i \beta$, si, lors de la mise à jours selon (5.18), on a $\|\tilde{K}_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 > \alpha_i \beta$. L'effet de cette opération est illustré sur la Figure 5.9, pour le cas d'un gain bidimensionnel. Dans le cas général, l'expression de la fonction projecteur s'écrit¹ :

$$K_i(q) = \text{proj}_{D_i, \alpha_i}(\tilde{K}_i(q), F_{0i}) = \begin{cases} F_{0i} + \sqrt{\alpha_i \beta} \frac{\tilde{K}_i - F_{0i}}{\|\tilde{K}_i - F_{0i}\|_{D_i}} & , \text{ si } \|\tilde{K}_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 > \alpha_i \beta \\ \tilde{K}_i & , \text{ si } \|\tilde{K}_i - F_{0i}\|_{D_i}^2 \leq \alpha_i \beta \end{cases} \quad (5.19)$$

la fonction étant sans effet si \tilde{K}_i se trouve à l'intérieur du domaine de variation permis. Lorsque cette condition n'est pas respectée, la différence $\tilde{K}_i - F_{0i}$ est normée :

$$\|K_i - F_{0i}\|_{D_i} = \left\| \sqrt{\alpha_i \beta} \frac{\tilde{K}_i - F_{0i}}{\|\tilde{K}_i - F_{0i}\|_{D_i}} \right\|_{D_i}^2 = \alpha_i \beta \quad , \quad (5.20)$$

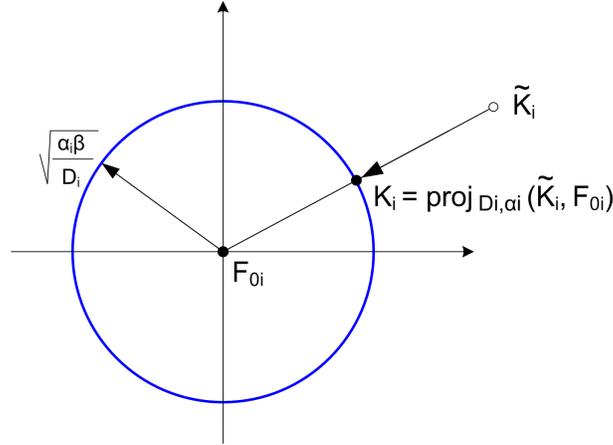
ce qui fait que la nouvelle valeur du gain se trouve sur la frontière de son domaine de variation et les vecteurs singuliers (et propres, dans le cas des gains carrés) de $\tilde{K}_i - F_{0i}$ et de $K_i - F_{0i}$ sont identiques.

Remarquons que dans le cas des gains scalaires, le projecteur peut s'exprimer sous la forme d'une fonction de type saturation, ce qui met en évidence la facilité d'implantation d'une telle fonction :

$$\text{proj}_{D_i, \alpha_i}(\tilde{K}_i, F_{0i})|_{\tilde{K}_i \in \mathbb{R}} = \text{sat}_{D_i, \alpha_i}(\tilde{K}_i, F_{0i}) = \begin{cases} \tilde{K}_i & , \text{ si } F_{0i} - \sqrt{\frac{\alpha_i \beta}{D_i}} \leq \tilde{K}_i \leq F_{0i} + \sqrt{\frac{\alpha_i \beta}{D_i}} \\ F_{0i} - \sqrt{\frac{\alpha_i \beta}{D_i}} & , \text{ si } \tilde{K}_i < F_{0i} - \sqrt{\frac{\alpha_i \beta}{D_i}} \\ F_{0i} + \sqrt{\frac{\alpha_i \beta}{D_i}} & , \text{ si } \tilde{K}_i > F_{0i} + \sqrt{\frac{\alpha_i \beta}{D_i}} \end{cases} \quad (5.21)$$

En ayant ainsi exprimé en temps discret tous les termes intervenant dans les équations d'adaptation en temps continu, la loi de commande adaptative proposée pour l'application au contrôle d'attitude de satellite

1. Il est intéressant d'observer que l'expression introduite par Ben-Yamin et Barkana (2013), pour une fonction de type barrière exprimée en temps discret, est similaire à celle de la fonction projecteur que nous proposons.

FIGURE 5.9 – Effet de la fonction projecteur sur un gain bidimensionnel, $K_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

s'écrit, pour le cas d'une approximation selon la méthode d'Euler explicite (5.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}_\theta(q) = K_\theta(q-1) - (g_\theta e_\theta(q)^2 + g_{\omega r} \omega_r(q)^2 + \sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta(q)^2)(K_\theta(q-1) - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta T_{e,ad} \\ \tilde{K}_\omega(q) = K_\omega(q-1) - (g_\omega \omega(k)^2 + \sigma_\omega(K_\omega(q-1) - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega T_{e,ad} \\ K_\theta(q) = \text{sat}_{D_\theta, \alpha_\theta}(\tilde{K}_\theta(q), F_{\theta 0}) \\ K_\omega(q) = \text{sat}_{D_\omega, \alpha_\omega}(\tilde{K}_\omega(q), F_{\omega 0}) \\ K_\theta(k) = K_\theta(q) \text{ , } k \in [qM, (q+1)M - 1[\\ K_\omega(k) = K_\omega(q) \text{ , } k \in [qM, (q+1)M - 1[\\ u(k) = K_\theta(k) \cdot e_\theta(k) + K_\omega(k) \cdot \omega(k) \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Cette équation fait intervenir deux échelles de temps, k et q , associées aux périodes d'échantillonnage T_e et $T_{e,ad}$ respectivement, avec $M = T_{e,ad}/T_e \geq 1$. On met ainsi en évidence la possibilité de faire fonctionner les deux boucles à rétroaction associées à la loi de commande adaptative à des fréquences différentes : la boucle "classique" de commande est échantillonnée à $f_e = 1/T_e$ et la boucle d'adaptation à $f_{e,ad} = 1/T_{e,ad}$, les gains pouvant être recalculés moins souvent que la commande. Même si usuellement ces deux périodes d'échantillonnage sont choisies égales, nos résultats présentés dans Luzi et al. (2013b) montrent que les comportements obtenus en boucle fermée avec $M = 1, 2, 4$ sont très proches. Cet aspect est intéressant du point de vue de l'effort de calcul nécessaire à l'implémentation de la commande adaptative, car celui-ci peut être diminué si les gains sont mis à jour moins souvent. La charge de calcul de la loi de commande (5.22) a cependant été estimée comme étant relativement réduite, par rapport aux capacités des ordinateurs de bord des satellites Myriade (sur lesquels on vise à réaliser les essais en vol). Le choix $M = 1$ a ainsi été retenu, ce qui permet également de limiter les modifications qui doivent être apportées au logiciel de vol en vue de l'implémentation de la nouvelle loi de commande.

Une fois les lois d'adaptation formulées en temps discret, elles ont été testées en simulation. Les résultats obtenus avec l'application de l'algorithme (5.22), ainsi qu'avec ses équivalents basés sur les schémas implicites d'Euler et de Tustin respectivement sont très proches de ceux obtenus avec la loi d'adaptation continue. Ces résultats permettent ainsi de faire une validation préliminaire des schémas de discrétisation utilisés, ainsi

que la forme proposée pour la fonction barrière². Etant donné que les réponses obtenues en boucle fermée en implémentant les différents schémas de discrétisation considérés sont très similaires, notre choix en vue d'implémentation sur satellite s'est porté sur l'adaptation des gains selon la méthode d'Euler explicite. Simple à mettre en œuvre, cette méthode permet de limiter le nombre d'opérations supplémentaires à ajouter dans le logiciel de vol. Ce choix est confirmé par les simulations complètes résumées dans la Section 5.6, qui montrent que la loi adaptative (5.22) n'introduit pas de problèmes numériques et est ainsi adéquate pour l'implémentation sur processeur cible.

5.4 Un court bilan

Les résultats présentés jusqu'à ce stade mettent en évidence plusieurs aspects positifs liés aux lois de commande adaptatives proposées. Ainsi, grace aux développements présentés dans le Chapitre 4 et aux modifications introduites dans la Section 5.2, ces algorithmes permettent d'obtenir de bons comportements en boucle fermée. En particulier, la contrainte de non-saturation de l'actionneur est vérifiée, pour des dépointages initiaux de l'ordre de 20 degrés. Notons également que, selon les valeurs choisies pour les différents paramètres de réglage, les réponses obtenues en boucle fermée peuvent être significativement différentes. La loi adaptative peut ainsi être réglée de manière à ce que la rapidité du satellite varie en fonction de la capacité de la roue à réaction, alors qu'un réglage différent génère des évolutions similaires à celles obtenues avec la loi de commande à commutation biais de vitesse/proportionnel-dérivé. Ces variations significatives en termes de comportement imprimé au satellite illustrent la grande flexibilité qu'offrent nos propositions.

Les formulations introduites dans la Section 5.3 montrent que les lois adaptatives exprimées en temps discret peuvent être facilement implémentées en pratique, tout en préservant les propriétés des lois continues dont elles sont obtenues. Lié à cet aspect, on peut remarquer que la stabilité de la boucle fermée représentée en temps discret n'a pas été prouvée formellement. Le respect de cette propriété se base malgré cela sur l'hypothèse (vérifiée en pratique, pour les nombreux cas de simulations testés) que les lois discrètes approximent de manière suffisamment exacte les lois continues. Comme montré dans le Chapitre 4, ces dernières garantissent formellement la stabilité de la boucle fermée. L'établissement de preuves de stabilité dans le cas discret constitue ainsi une direction dans laquelle nos travaux pourraient être continués. Remarquons à ce sujet l'existence de nombreux résultats dans la littérature (par exemple ceux présentés par Shibata et al. (2002); Barkana et al. (2013); Ben-Yamin et Barkana (2013)), basés sur les conditions de passivité des systèmes échantillonnés. Ces propriétés s'expriment, comme dans le cas continu, sous forme LMI (voir par exemple de Oliveira et al. (1999); Kottenstette et Antsaklis (2010)) et pourraient, de ce fait, être intégrées dans l'approche proposée dans la Section 4.3. Les conditions de stabilité basées sur la robustesse, présentées dans la Section 4.4.1, peuvent également être exprimées en temps discret, ce qui permettrait de transposer l'intégralité de la procédure de synthèse proposée pour les systèmes continus.

En revenant aux aspects liés à l'implémentation pratique, mentionnons que les résultats positifs obtenus avec la commande adaptative permettent de valider, de manière partielle, cette structure de commande. Sur cette base, un accord de principe a été donné par le CNES pour effectuer des essais en vol sur le satellite

2. La représentation de ces résultats (dont une partie figurent dans Luzi et al. (2013b), pour le cas d'une adaptation avec terme σ fixe) ne nous paraît pas pertinente à ce stade, car les réponses sont très similaires à celles précédemment illustrées. Notons également que des résultats de simulation avec la loi discrète (5.22), implémentée sur un simulateur satellite avancé sont représentés dans la Section 5.6.

Picard, dans le cadre des expérimentations en fin de vie, planifiées en début de l'année 2014 (Picard News, sep 2013). Pour que ces essais soient définitivement approuvés, une validation complète de la loi adaptative sur un simulateur avancé mise à disposition par le CNES a été demandée. Les développements nécessaires à la mise en place de cette campagne de simulations, ainsi qu'un résumé des résultats obtenus sont présentés dans la suite du manuscrit.

5.5 Synthèse sur un modèle satellite 3 axes

En vue de l'implémentation d'une loi de commande adaptative sur un simulateur avancé, la première étape est de prendre en compte un modèle décrivant la dynamique 3-axes du satellite. Un tel modèle, linéaire, est présenté dans la section suivante et est utilisé dans la procédure de synthèse mise en place. Le système en boucle ouverte défini sur la base de ce modèle fait apparaître trois entrées (commandes aux roues à réaction) et six sorties (trois positions mesurées et trois vitesses estimées). Afin de pouvoir manipuler cette nouvelle structure, la démarche mise en place pour traiter le cas d'application présentée dans le chapitre précédent doit être adaptée.

Nous présentons ainsi dans la Section 5.5.2 la procédure qui permet de définir une loi adaptative, exprimée en temps continu, qui garantit la stabilité de la boucle fermée basée sur le modèle satellite trois axes. La démarche que nous proposons pour obtenir cette loi commence par le calcul des domaines des variations des gains, selon les conditions exprimées dans la Section 4.3.3. Une fois ces domaines calculés, ils sont validés en testant les conditions introduites dans la Section 4.4.1, afin de garantir que les différentes modifications de la loi d'adaptation ne vont pas dégrader ses propriétés de stabilité. La procédure de calcul de ces domaines de variation, spécifique au modèle trois axes du satellite, illustre la flexibilité de la démarche fondée sur les outils que nous proposons.

Une fois les domaines de variation des gains calculés et validés, les autres paramètres (σ , ρ ...) de la loi adaptative peuvent être réglés en appliquant, pour chaque axe, les critères discutés précédemment. S'agissant de la même approche que celle utilisée jusqu'à ce point, le réglage de ces paramètres n'est pas détaillé pour le cas du modèle trois axes. Finalement, la loi adaptative ainsi obtenue est discrétisée, selon la méthode décrite dans la Section 5.3, ce qui permet d'obtenir une expression implémentable sur le simulateur que l'on introduit dans la Section 5.6.1.

5.5.1 Modèle de synthèse

Le modèle utilisé pour la synthèse d'une loi de commande sur les trois axes est similaire à celui utilisé pour le cas 1 axe, introduit dans la Section 4.5, page 115. Ce modèle est ainsi défini par :

$$\Sigma(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H_{EV} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & H_{EV} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_{EV} \end{bmatrix} \cdot H_{SAT} \cdot \begin{bmatrix} H_{roue} & 0 & 0 \\ 0 & H_{roue} & 0 \\ 0 & 0 & H_{roue} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{filtre,x} & 0 & 0 \\ 0 & H_{filtre,y} & 0 \\ 0 & 0 & H_{filtre,z} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

et correspond à la mise en série des capteurs (estimateurs de vitesse et senseur stellaire supposé idéal), du modèle caractérisant la dynamique du satellite, des roues à réaction (une par axe) et des filtres stabilisants. Le modèle de l'actionneur et l'expression de l'estimateur de vitesse sont les mêmes que ceux utilisés dans le cas de Demeter, tandis que les expressions numériques des filtres sont données en Annexe B³.

Modèle satellite 3 axes

Concernant la modélisation du satellite, la dynamique de celui-ci est caractérisée par l'équation suivante (Pittet et Arzelier, 2006) :

$$\begin{pmatrix} J & J_f \\ J_f^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -C_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -K_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} C_t \quad (5.24)$$

où $\theta \in \mathbb{R}^3$ représente la position angulaire autour des axes x, y et z et $\eta \in \mathbb{R}^{2n_f}$ est le vecteur d'état associé aux modes flexibles (2 états par mode). J et J_f correspondent respectivement au moment d'inertie du satellite rigide et au couplage entre la position angulaire θ et la dynamique flexible. C_s et K_s sont les matrices diagonales d'amortissement et de raideur respectivement (Manceaux-Cumer, 2001), tandis que $C_t \in \mathbb{R}^3$ représente le couple total agissant sur la structure.

Dans le cas du satellite Picard, la présence de modes souples est négligeable, ce qui fait que sa dynamique peut être représentée par un modèle de type double intégrateur :

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} C_t, \quad (5.25)$$

la valeur numérique de J figurant dans l'Annexe B. Remarquons que le modèle (5.24) du satellite flexible a été utilisé pour l'application en simulation de la commande adaptative sur Demeter, les résultats étant présentés dans Luzi et al. (2013c).

3. Afin de rendre notre présentation plus compacte, cette annexe regroupe les différentes valeurs numériques intervenant dans la section 5.5

5.5.2 Adaptation de la procédure de synthèse

En tenant compte de l'expression (5.23), le système considéré s'écrit, du point de vue entrée-sortie :

$$\begin{aligned} y &= [\theta_x \ \omega_x \ \theta_y \ \omega_y \ \theta_z \ \omega_z]^T = \Sigma(s)u \\ u &= [u_x \ u_y \ u_z]^T \end{aligned} \quad (5.26)$$

où les indices x, y et z indiquent l'axe correspondant du satellite.

Sur les plateformes Myriade, la commande d'attitude est implémentée sous forme décentralisée, chaque axe étant contrôlé séparément. La loi de commande basée sur le gain statique $F_{0,j} = [F_{\theta 0} \ F_{\omega 0}]$, $j \in \{x, y, z\}$ s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} u_j &= F_{\theta 0} e_{\theta,j} + F_{\omega 0} e_{\omega,j} \ , \quad e_{\theta,j} = \theta_j - \theta_{r,j} \ , \quad j \in \{x, y, z\} \\ e_{\omega,j} &= \omega_j - \omega_{r,j} \end{aligned} \quad (5.27)$$

ou sous forme compacte :

$$u = \begin{bmatrix} F_{\theta 0} & F_{\omega 0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\theta 0} & F_{\omega 0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{\theta 0} & F_{\omega 0} \end{bmatrix} e = F_0 e \ , \quad \begin{aligned} e &= y - y_r \\ y_r &= [\theta_{r,x} \ \omega_{r,x} \ \theta_{r,y} \ \omega_{r,y} \ \theta_{r,z} \ \omega_{r,z}]^T \end{aligned} \quad (5.28)$$

les valeurs numériques pour le satellite Picard étant $F_{\theta 0} = 0.1$, $F_{\omega 0} = 1.2533$.

Cette expression met en évidence une certaine structure du gain statique F_0 , dont de nombreux éléments sont nuls. En vue de la mise en œuvre d'une loi de commande adaptative, le gain $K(t)$, par lequel nous visons à remplacer F_0 , doit reprendre cette même structure. Cette contrainte est générée d'un côté par le besoin de limiter les calculs à bord du processeur (l'adaptation de 18 gains scalaires nécessite trois fois plus de ressources que celle de 6). La commande décentralisée jouit également d'une très bonne réputation (bâtie sur des décennies d'application avec succès) parmi les ingénieurs SCAO, ce qui rend son utilisation souhaitable. Grâce à la méthode de synthèse introduite dans le chapitre précédent, nous montrons ci-dessous comment le respect de cette contrainte est garantie, en même temps que la stabilité de la boucle fermée basée sur le gain adaptatif ainsi structuré.

On cherche plus précisément à avoir un gain adaptatif qui s'écrit :

$$K(t) = \begin{bmatrix} K_{\theta,x}(t) & K_{\omega,x}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta,y}(t) & K_{\omega,y}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{\theta,z}(t) & K_{\omega,z}(t) \end{bmatrix} \ , \quad (5.29)$$

ce qui illustre dans la notion de structure au niveau de la commande. Au delà de cet aspect, chaque composante K_{θ} , K_{ω} doit – pour les mêmes raisons que dans le cas 1 axe – être adaptée seulement en fonction de la mesure de position ou vitesse lui correspondant. On cherche ainsi des lois d'adaptation du type :

$$\dot{K}_{\theta,j} \approx -g_{\theta,j} \cdot e_{\theta,j}^2 \ , \quad \dot{K}_{\omega,j} \approx -g_{\omega,j} \cdot e_{\omega,j}^2 \quad (5.30)$$

ce qui fait ressortir la structure désirée au niveau de l'adaptation.

5.5.2.1 Définition de la structure de commande et d'adaptation

Dans une démarche similaire à celle présentée pour le modèle un axe, la procédure de synthèse commence par la structuration du vecteur de sortie, en 6 composantes scalaires :

$$y_1 = \theta_x \quad , \quad y_2 = \omega_x \quad , \quad y_3 = \theta_y \quad , \quad y_4 = \omega_y \quad , \quad y_5 = \theta_z \quad , \quad y_6 = \omega_z \quad (5.31)$$

On obtient alors les signaux d'erreur correspondants :

$$\begin{aligned} e_1 = e_{\theta,x} = y_{r_1} - y_1 = \theta_x - \theta_{r,x} \quad , \quad e_2 = e_{\omega,x} = y_{r_2} - y_2 = \omega_x - \omega_{r,x} \\ e_3 = e_{\theta,y} = y_{r_3} - y_3 = \theta_y - \theta_{r,y} \quad , \quad e_4 = e_{\omega,y} = y_{r_4} - y_4 = \omega_y - \omega_{r,y} \\ e_5 = e_{\theta,z} = y_{r_5} - y_5 = \theta_z - \theta_{r,z} \quad , \quad e_6 = e_{\omega,z} = y_{r_6} - y_6 = \omega_z - \omega_{r,z} \end{aligned} \quad (5.32)$$

auxquelles sont associées 6 gains adaptatifs $K_i(t) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1 : 6$ qui définissent la loi de commande :

$$\begin{aligned} u = Ke = \sum_{i=1}^6 K_i e_i \\ \dot{K}_i(t) = -G_i e(t) e_i(t)^T \Gamma_i - \Phi_{D_i, \alpha_i} (K_i(t) - F_{0i}) \Gamma_i \quad , \quad i = 1 : 6 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Dans cette expression, les vecteurs K_i et F_{0i} représentent les colonnes de K et F_0 respectivement. Cependant, alors que les composantes F_{0i} ont une structure particulière, définie selon (5.28) (par exemple $F_{03} = [0 \ F_{\theta 0} \ 0]^T$), tous les éléments de $K_i = [K_i(1) \ K_i(2) \ K_i(3)]^T$ varient selon (5.33) et donc sont, *a priori*, non-nuls. Sans imposer de contraintes à la loi d'adaptation, la structure du retour de sortie est ainsi perdue.

Une possibilité de structurer la loi de commande adaptative est d'imposer que certains éléments ne soient pas adaptés et de les initialiser à zéro. Comme nous le montrons ci-dessous, les paramètres de la loi d'adaptation qui permettent de prendre en compte ces contraintes sont les matrices G_i . Prenons comme exemple le gain K_3 , pour lequel on souhaite que seulement $K_3(2) = K_{\theta,y}$ varie et que les autres éléments, $K_3(1)$ et $K_3(3)$ soient constants et égaux à zéro. Ce type d'évolution peut être obtenue en imposant que la matrice G_3 respecte $G_3([1 \ 3], :) = \mathbf{0}$. En procédant de manière similaire pour tous les gains K_i , on peut forcer $K(t)$ à reproduire la structure de F_0 en imposant que différentes lignes des matrices G_i soient nulles (et en initialisant les gains correspondants à zéro). L'intégralité de ces contraintes est détaillée plus bas.

Considérons maintenant l'adaptation des gains scalaires, $K_{\theta,j}$, $K_{\omega,j}$, $j \in \{x, y, z\}$. Comme dans le cas de l'application sur le modèle satellite 1 axe, on souhaite que chacun de ces gains évolue seulement en fonction du signal d'erreur qu'il multiplie, ce qui permet de limiter la commande, $u_j = K_{\theta,j} e_{\theta,j} + K_{\omega,j} e_{\omega,j}$. Reprenons comme exemple le gain K_3 , dont, en tenant compte des contraintes introduites précédemment, le seul élément qui varie est $K_3(2)$. Nous avons ainsi :

$$\dot{K}_3(2) = \dot{K}_{\theta,y} = -G_3(2, :) \cdot e e_3^T = -G_3(2, :) \cdot [e_{\theta,x} \ e_{\omega,x} \ e_{\theta,y} \ e_{\omega,y} \ e_{\theta,z} \ e_{\omega,z}]^T \cdot e_{\theta,y} \quad (5.34)$$

et en imposant

$$g_{\theta,y} \stackrel{\text{not}}{=} G_3(2, 3) > 0 \quad , \quad G_3(2, [1 : 2, 4 : 6]) = \mathbf{0} \quad (5.35)$$

le type d'évolution désirée est obtenue. Chaque matrice G_i doit ainsi avoir seulement un élément non-nul,

4. L'indice $i = 1 : 6$ correspond ici à la structuration des vecteurs de sortie et d'erreur, tandis que $j \in \{x, y, z\}$ indique l'axe correspondant du satellite.

contraint à être positif, dans les cas où il définit l'adaptation des gains en position et négatif s'il intervient dans l'évolution des gains en vitesse : $g_{\theta,j} > 0$, $g_{\omega,j} < 0$.

A partir de ces considérations, les contraintes sur les matrices G_i permettant de spécifier la structure du retour de sortie, ainsi que celle des lois d'adaptation s'écrivent :

$$\begin{aligned} G_i = 0, \text{ sauf : } G_i(i \setminus 2 + 1, i) &\stackrel{\text{not}}{=} g_{\theta,j} > 0, \text{ si } i \in \{1, 3, 5\} \\ G_i(i \setminus 2, i) &\stackrel{\text{not}}{=} g_{\omega,j} < 0, \quad \text{si } i \in \{2, 4, 6\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

où l'opérateur \setminus représente la division entière. En tenant compte de ces aspects, la loi de commande adaptative (5.33) appliquée au modèle 3 axes du satellite peut être réécrite :

$$\begin{aligned} u_j &= K_{\theta,j} e_{\theta,j} + K_{\omega,j} e_{\omega,j} \\ \dot{K}_{\theta,j} &= -g_{\theta,j} \cdot e_{\theta,j}^2 \Gamma_{\theta,j} - \Phi_{D_{\theta,j}, \alpha_{\theta,j}} (K_{\theta,j}(t) - F_{\theta 0}) \Gamma_{\theta,j} \quad , \quad j \in \{x, y, z\} \\ \dot{K}_{\omega,j} &= -g_{\omega,j} \cdot e_{\omega,j}^2 \Gamma_{\omega,j} - \Phi_{D_{\omega,j}, \alpha_{\omega,j}} (K_{\omega,j}(t) - F_{\omega 0}) \Gamma_{\omega,j} \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.5.2.2 Calcul et validation des domaines de variation

Considérons maintenant la calcul des domaines de variation permis aux gains et à ce sujet, intéressons nous aux expressions des fonctions barrières qui interviennent dans les équations (5.33) et (5.37) respectivement. Remarquons ainsi que dans la loi générale (5.33), les gains $K_i(t)$ sont des vecteurs, $K_i(t) \in \mathbb{R}^3$ et donc les valeurs de $\Phi_{D_i, \alpha_i}(K_i - F_{0i})$ sont également vectorielles. En revanche, comme les gains intervenant dans (5.37) sont scalaires, les fonctions barrière ont, dans cette équation, des valeurs scalaires. De plus, tandis que dans les deux expressions les coefficients α (α_i et $(\alpha_{\theta,j}, \alpha_{\omega,j})$) sont scalaires, les paramètres D ont des types de valeurs différentes. En effet, D_i sont des matrices, $D_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, alors que $D_{\theta,j}$ et $D_{\omega,j}$ sont des scalaires.

Pour expliquer ces différences et montrer que (5.37) représente une reformulation de la loi de commande (5.33) bien équivalente à cette dernière, reprenons l'exemple du gain K_3 . En tenant compte des contraintes sur la matrice G_3 , celui-ci respecte la structure $K_3(t) = [0 \ K_{\theta,y}(t) \ 0]^T$. Dans (5.33), la fonction barrière qui agit sur K_3 s'écrit :

$$\Phi_{D_3, \alpha_3} = \psi_{D_3, \alpha_3} (\|K_3 - F_{03}\|_{D_3}^2) \cdot (K_3 - F_{03}) \quad , \quad \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.38)$$

et garantit la bornitude dans le domaine :

$$\|K_3 - F_{03}\|_{D_3}^2 \leq \alpha\beta \Leftrightarrow \text{Tr}((K_3 - F_{03})^T D_3 (K_3 - F_{03})) \leq \alpha\beta \quad (5.39)$$

En tenant compte de la structure de K_3 , nous avons :

$$\begin{aligned} \|K_3 - F_{03}\|_{D_3}^2 &= \text{Tr}([0 \ K_{\theta,y}(t) - F_{\theta 0} \ 0]^T D_3 [0 \ K_{\theta,y}(t) - F_{\theta 0} \ 0]) \\ &= \text{Tr}((K_{\theta,y}(t) - F_{\theta 0}) D_3(2, 2) (K_{\theta,y}(t) - F_{\theta 0})) \\ &= \|K_{\theta,y}(t) - F_{\theta 0}\|_{D_3(2,2)}^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

et en notant $\alpha_{\theta,y} = \alpha_3$ et $D_{\theta,y} = D_3(2, 2)$ cela implique :

$$\psi_{D_3, \alpha_3}(\|K_3 - F_{03}\|_{D_3}^2) = \psi_{D_{\theta,y}, \alpha_{\theta,y}}(\|K_{\theta,y} - F_{\theta 0}\|_{D_{\theta,y}}^2) \Rightarrow \Phi_{D_3, \alpha_3} = [0 \ \Phi_{D_{\theta,y}, \alpha_{\theta,y}} \ 0]^T, \quad (5.41)$$

ce qui montre que, pour une initialisation à zéro de $K_3(1, 1)$ et $K_3(3, 1)$, ces deux gains restent nuls et l'expression (5.37) est équivalente à (5.33).

Cette équivalence est également valable pour les autres gains de la loi de commande, en notant :

$$\begin{aligned} D_{\theta,x} &= D_1(1, 1) & D_{\omega,x} &= D_2(1, 1) & \alpha_{\theta,x} &= \alpha_1 & \alpha_{\omega,x} &= \alpha_2 \\ D_{\theta,y} &= D_3(2, 2) & D_{\omega,y} &= D_4(2, 2) & \alpha_{\theta,y} &= \alpha_3 & \alpha_{\omega,y} &= \alpha_4 \\ D_{\theta,z} &= D_5(3, 3) & D_{\omega,z} &= D_6(3, 3) & \alpha_{\theta,z} &= \alpha_5 & \alpha_{\omega,z} &= \alpha_6. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Les domaines de variation des gains en vitesse et position sont alors définis par :

$$K_{\theta,j} - F_{\theta 0} \leq \sqrt{\frac{\alpha_{\theta,j}\beta}{D_{\theta,j}}}, \quad K_{\omega,j} - F_{\omega 0} \leq \sqrt{\frac{\alpha_{\omega,j}\beta}{D_{\omega,j}}}, \quad j \in \{x, y, z\} \quad (5.43)$$

5.5.2.2.1 Résolutions LMI

Suite à cette analyse, les paramètres qui définissent les domaines de variation peuvent être calculés en résolvant les conditions LMIs introduites dans la Section 4.3.3, page 103. Plus spécifiquement, la démarche consiste à résoudre dans un premier temps les conditions (4.11), associées à la Proposition 8 et ensuite d'assurer le respect des conditions du Théorème 7 en résolvant (4.15 - 4.17). Rappelons que le critère associé à la résolution de ces LMIs est la maximisation des domaines de variation, définis pour le cas du modèle trois axes du satellite par (5.43). Ainsi, lors de la résolution des LMI (4.11), où apparaissent les variables $D_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, une première approche serait de minimiser un critère défini par une somme du type $D_1(1, 1) + D_3(2, 2) + D_5(2, 2) + \dots$. Cependant, ceci conduit à des matrices D mal conditionnées, ce qui pose des problèmes numériques lors de la résolution de conditions (4.15 - 4.17), où sont utilisées leurs inverses.

Nous proposons ainsi la résolution du premier jeu de conditions LMI en minimisant :

$$\begin{aligned} w_{\theta} (D_1(1, 1) + D_3(2, 2) + D_5(3, 3) + \rho \cdot \text{Tr}(D_1 + D_3 + D_5)) \\ + D_2(1, 1) + D_4(2, 2) + D_6(3, 3) + \rho \cdot \text{Tr}(D_2 + D_4 + D_6) \end{aligned} \quad (5.44)$$

sous les contraintes (5.36), liées aux matrices G_i . $w_{\theta} > 0$ correspond ici au poids donné à la variation des gains K_{θ} devant K_{ω} et $\rho > 0$ assure un conditionnement numérique acceptable, du point de vue de la résolution du deuxième jeu de LMIs, des matrices D_i . Pour ces deux paramètres nous choisissons $w_{\theta} = 100$ (comme pour le cas du modèle un axe, voir la discussion de la page 118) et $\rho = 0.02$ (la plus petite valeur telle que le conditionnement des matrices D_i ne génère pas de problèmes numériques lors de la résolution des LMIs (4.15 - 4.17)). Les conditions (4.11) sont ainsi résolues, les résultats étant présentés dans l'Annexe B. Ces valeurs numériques sont ensuite utilisées pour résoudre les LMIs (4.15 - 4.17) en maximisant $w_{\theta}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5) + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$. Les domaines de variation des gains K_{θ} et K_{ω} ainsi obtenus figurent dans le Tableau 5.2, tandis que les valeurs numériques des paramètres α_i sont données en Annexe B. On observe dans ce tableau que les variations permises sont très grandes aux niveaux des gains K_{θ} et assez limitées en ce qui concerne les gains en vitesse. Ces résultats sont justifiés, car le choix $w_{\theta} = 100$ fait que la variation des gains en position

est privilégiée au niveau du critère associé aux conditions LMI. Cependant, on note que les gains K_ω sont autorisés à varier de seulement 5 à 10% par rapport à leur valeur nominale, tandis que dans le cas du modèle un axe de Demeter, cette variation était de l'ordre de 20% (voir (4.68), page 119).

TABLE 5.2 – Domaines de variations des gains autour des valeurs nominales $F_{\theta_0} = 0.1$, $F_{\omega_0} = 1.25$ - synthèse avec un modèle 3 axes du satellite

	axe x	axe y	axe z
$K_{\theta,j}$	[0.0058 0.1942]	[0.0047 0.1953]	[0.0031 0.1969]
$K_{\omega,j}$	[1.1786 1.328]	[1.1821 1.3245]	[1.1069 1.3997]

A partir de ce résultat, on peut remarquer que les domaines de variation peuvent également être calculés en appliquant la procédure de synthèse sur des modèles un axe (trois fois, afin de définir la loi de commande complète). Cette approche revient à négliger dans un premier temps les couplages existants entre les axes du satellite. Par conséquent, l'application de la loi adaptative (5.37) avec les domaines de variation ainsi obtenus ne garantit pas, *a priori*, la stabilité de la boucle fermée contenant le modèle complet du satellite. Rappelons cependant que la procédure de synthèse nécessite, en vue de l'application des modifications introduites en début de ce chapitre, la validation des domaines de variation, selon les conditions du Théorème 9, page 113. Cette validation peut être réalisée en utilisant un modèle trois axes du satellite, indifféremment de la méthode dont les intervalles de variation des gains ont été calculés. De ce fait, si les domaines obtenus en appliquant la procédure de synthèse un axe respectent les conditions du Théorème 9, ils peuvent être retenus pour l'implémentation.

En appliquant ainsi pour chacun des axes x, y, z du satellite Picard la procédure de synthèse décrite dans les Sections 4.5.1.1 et 4.5.1.2, les intervalles figurant dans le Tableau 5.3 sont obtenues, à partir des valeurs numériques données en Annexe B. Ces valeurs correspondent à des variations des gains K_θ du même ordre de grandeur que celles précédemment calculées, représentées dans le Tableau 5.2. Au niveau des gains en vitesse cependant, la variation autorisée est sensiblement plus grande et représente plus de 20 % de la valeur nominale.

TABLE 5.3 – Domaines de variations des gains autour des valeurs nominales $F_{\theta_0} = 0.1$, $F_{\omega_0} = 1.25$ - synthèse avec des modèles 1 axe du satellite

	axe x	axe y	axe z
$K_{\theta,j}$	[0.0037 0.1963]	[0.0034 0.1966]	[0.0031 0.1969]
$K_{\omega,j}$	[0.8809 1.6257]	[0.8964 1.6101]	[0.9037 1.6199]

Concernant la comparaison entre l'application de la procédure de synthèse sur les modèles trois et un axe, il est également intéressant de regarder les temps de calculs associés aux résolutions LMI dans ces deux situations. Le Tableau 5.4 montre les durées de temps nécessaires pour résoudre les deux jeux de conditions, dans le cas de l'utilisation d'un modèle satellite complet et des modèles un axe respectivement. Dans ce dernier cas, la procédure est appliquée trois fois, une fois pour chaque axe. Une différence est surtout remarquable aux niveaux des conditions (4.15 - 4.17), l'augmentation étant exponentielle lors du passage du modèle simple au modèle complet. De ce point de vue, l'application de la procédure utilisant des modèles de satellite réduits est donc plus avantageuse.

TABLE 5.4 – Temps de calculs nécessaires pour la résolution des conditions LMIs

	(4.11)	(4.15 - 4.17)
modèle 3 axes	1.5 s	60 s
modèles 1 axe	0.86 s	1.11 s

5.5.2.2 Validation des domaines de variation

Une fois les intervalles figurant dans les Tableaux 5.2 et 5.3 obtenus, le test décrit dans la Section 4.4.1, page 110 doit être effectué, afin de vérifier que l’ajout des modification de la loi d’adaptation (5.37) ne dégrade pas les propriétés de stabilisation de celle-ci. Les conditions (4.55) du Théorème 9 sont testées à l’aide de la toolbox RoMulOC, la stabilité de la boucle fermée contenant le modèle trois axes du satellite étant ainsi analysée. De manière similaire au cas du test sur le modèle un axe du satellite Demeter – Section 4.5.1.3, page 119 – des intervalles de variation réduits par rapport à ceux donnés dans les Tableaux 5.2 et 5.3 sont considérés. En effet, en tenant compte de l’expression de la loi d’adaptation (5.37) et des contraintes de signe (5.36) on remarque que les gains en position peuvent prendre seulement des valeurs inférieures à $F_{\theta 0}$, tandis que les gains en vitesse peuvent seulement augmenter par rapport à $F_{\omega 0}$. Cette constatation, faite en supposant une initialisation à $(F_{\theta 0}, F_{\omega 0})$, reste aussi valable si on considère les modifications introduites dans la Section 5.2, comme l’illustrent les figurent présentées dans cette partie du manuscrit.

Les intervalles de variation du type $[K_{\theta, j}^{\min} \ F_{\theta 0}]$ et $[F_{\omega 0} \ K_{\omega, j}^{\max}]$ sont ainsi testés, où $K_{\theta, j}^{\min}$ et $K_{\omega, j}^{\max}$ représentent respectivement les valeurs minimales que peuvent prendre les gains K_{θ} et les valeurs maximales des gains K_{ω} . Avec les domaines de ce type obtenus à partir des données présentées dans le Tableau 5.2, on trouve une solution aux conditions du Théorème 9, ce qui prouve que l’ajout des modifications précédemment mentionnées ne dégrade pas la stabilité de la boucle fermée. Le même résultat est obtenu avec les domaines construits à partir de ceux présentés dans le Tableau 5.3, ce qui prouve que l’hypothèse de découplage entre les axes du satellite est vérifiée. Etant plus étendus, les domaines calculés sur des modèles un axe sont ainsi retenus pour l’implémentation.

5.6 Résultats de simulation

5.6.1 Simulateur complet du satellite Picard

Le simulateur d’études SCAO de la mission Picard a été développé au CNES en s’appuyant sur le simulateur Demeter (Allain et Monaret, 2005), premier satellite de la série Myriade. Il reprend ainsi l’architecture et le fonctionnement de ce dernier, en tenant compte des spécificités de la nouvelle mission. Il s’agit en particulier (voir Samson (2007)) de l’absence du mode control d’orbite (MCO), car la dérive au cours de la durée de vie estimée de la mission est acceptable. Les équipements associées à ce mode sont ainsi supprimés. Deuxièmement, les besoins en termes de précision de pointage de la mission Picard ont nécessité l’ajout d’un capteur stellaire de haute précision, non présent sur la plateforme Myriade de base. Associé à l’utilisation de ce nouveau capteur, un nouveau mode SCAO (MPF - mode pointage fin) a été créé. Au delà de l’utilisation d’un capteur spécifique, son architecture de contrôle est identique à celle du mode MNO. Pour cette raison, les simulations que nous présentons dans la suite concernent, tout comme les résultats précédents, le mode MNO.

Le simulateur Picard se décompose ainsi selon le schéma représenté sur la Figure 5.10. Il représente les fonctions SCAO présentes à bord du satellite :

- les fonctions du logiciel de vol des différents modes SCAO (MLT, MAS, MGT, MNO et MPF),
- la gestion des modes SCAO (transitions de modes par télécommande ou replis en survie),
- la gestion des déploiements du générateur solaire,
- la gestion des télécommandes SCAO (guidage, transitions de modes, déploiements),
- les équipements SCAO (faisant partie de la boucle SCAO) et les équipements perturbateurs,
- la dynamique du satellite et celle du générateur solaire,
- l'environnement et l'orbite du satellite (orbite héliosynchrone 6h/18h à 710 km d'altitude).

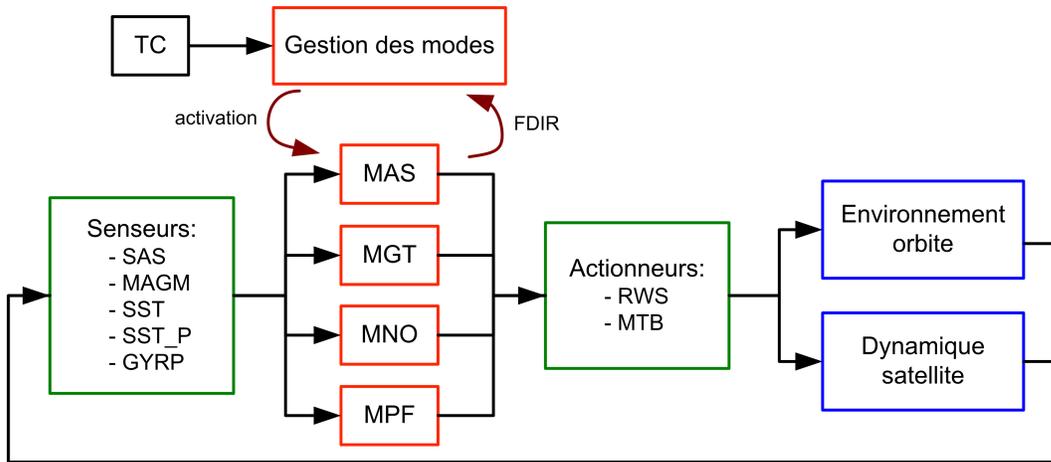


FIGURE 5.10 – Structure du simulateur Picard

Ces fonctions sont implémentées à travers des modèles de base codés sous la forme de fichiers Fortran. Sans rentrer dans les détails de la construction du simulateur, nous présentons dans un premier temps des informations sur le modèle non-linéaire de dynamique qui y est implémenté. Le deuxième module du simulateur auquel nous nous intéressons est celui qui décrit la loi de commande des roues à réaction en mode MNO. La Section 5.6.1.2 décrit les modifications que nous y avons apportées afin d'implémenter la loi de commande adaptative proposée.

5.6.1.1 Dynamique non-linéaire du satellite

Nous rappelons dans cette section les équations décrivant la dynamique satellite implémentées dans le simulateur du satellite Picard. Cette présentation succincte est construite à partir des résultats présentés par Trégouët (2012); Goudy (2011); Wertz (1978), où sont amplement discutés les aspects théoriques liés à la représentation reprise ci-dessous.

Dans un repère lié au satellite, l'équation de la dynamique rigide s'écrit :

$$\frac{dH}{dt} + \Omega_{\text{sat}} \times H = \sum C_{\text{ext}}, \quad (5.45)$$

où $H \in \mathbb{R}^3$ représente le moment cinétique total de la structure et $\Omega_{\text{sat}} \in \mathbb{R}^3$ la vitesse de rotation du satellite par rapport à un repère inertiel, H et Ω_s étant exprimés dans le repère satellite. L'opérateur \times correspond au

produit vectoriel et C_{ext} représente les couples extérieurs qui agissent sur la structure. Le moment cinétique de celle-ci s'exprime, en tenant compte de ω_{roue} , la vitesse de rotation des roues à réaction :

$$H = H_{\text{sat}} + H_{\text{roue}} = J_{\text{sat}}\Omega_{\text{sat}} + J_{\text{roue}}\omega_{\text{roue}}, \quad (5.46)$$

où H_{sat} , H_{roue} et J_{sat} , J_{roue} représentent les moments cinétiques et les moments d'inertie du satellite et des roues à réaction respectivement. L'équation (5.45) peut ainsi être réécrite :

$$J_{\text{sat}}\dot{\Omega}_{\text{sat}} + \Omega_{\text{sat}} \times (J_{\text{sat}}\Omega_{\text{sat}} + J_{\text{roue}}\omega_{\text{roue}}) = \sum C_{\text{ext}} - C_{\text{roue}} \quad (5.47)$$

et fait apparaître C_{roue} , le couple généré par les roues à réaction.

La position angulaire du satellite, décrite en utilisant les quaternions d'attitude est définie par l'équation différentielle :

$$\dot{Q}_{\text{sat}} = \frac{1}{2} Q_{\text{sat}} \otimes \Omega_{\text{sat}}, \quad (5.48)$$

où Q_{sat} représente le quaternion d'attitude du satellite et $\Omega_{\text{sat}} = [0 \ \Omega_{\text{sat}}]^T$ le quaternion construit à partir de Ω_{sat} . L'opérateur \otimes correspond ici au produit des quaternions. L'erreur par rapport à un quaternion de consigne Q_{cons} se définit comme :

$$Q_{\text{err}} = Q_{\text{sat}} \otimes Q_{\text{cons}}. \quad (5.49)$$

A partir du quaternion Q_{err} , la position angulaire du satellite exprimée en utilisant les angles de Cardan θ_x , θ_y , θ_z (qui interviennent dans le cas du modèle linéaire) peut être obtenue à partir de la relation :

$$Q_{\text{err}} = \begin{bmatrix} Q_{\text{err}}(1) \\ Q_{\text{err}}(2) \\ Q_{\text{err}}(3) \\ Q_{\text{err}}(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_x}{2} \cos \frac{\theta_y}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} + \sin \frac{\theta_x}{2} \sin \frac{\theta_y}{2} \sin \frac{\theta_z}{2} \\ \sin \frac{\theta_x}{2} \cos \frac{\theta_y}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} + \cos \frac{\theta_x}{2} \sin \frac{\theta_y}{2} \sin \frac{\theta_z}{2} \\ \cos \frac{\theta_x}{2} \sin \frac{\theta_y}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} + \sin \frac{\theta_x}{2} \cos \frac{\theta_y}{2} \sin \frac{\theta_z}{2} \\ \cos \frac{\theta_x}{2} \cos \frac{\theta_y}{2} \sin \frac{\theta_z}{2} + \sin \frac{\theta_x}{2} \sin \frac{\theta_y}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

A petits angles (valeurs inférieures à 20 - 30 degrés), cette relation peut être approximée en posant $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \theta_x &\approx 2Q_{\text{err}}(2) \\ \theta_y &\approx 2Q_{\text{err}}(3) \\ \theta_z &\approx 2Q_{\text{err}}(4) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Le modèle non-linéaire implémenté dans le simulateur utilisé est basé sur l'approximation selon la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 des équations (5.45) et (5.48). Les angles θ_x , θ_y et θ_z sont calculés en utilisant une méthode numérique permettant de "inverser" (5.50). A bord du satellite, les valeurs utilisées dans le mode MNO sont obtenues selon (5.50).

5.6.1.2 Implémentation de la loi de commande adaptative

Considérons maintenant l'implémentation dans le simulateur de la loi de commande adaptative proposée. Grâce à sa structure, celle-ci peut être intégrée facilement dans le logiciel de vol initial, basé sur la loi de commande à commutation biais de vitesse / proportionnel-dérivé. Il s'agit ainsi d'enlever la branche biais de

vitesse de cet algorithme et de remplacer le gains constants par des gains adaptés. Concernant les équations d'adaptation, nous retenons leur dernière forme, (5.22) et considérons que l'adaptation est réalisée à la même fréquence que la commande (4Hz pour le logiciel de vol de Picard).

La première partie de la loi (5.22) peut être implémentée telle-quelle. Nous avons, pour chacun des axes, en sous-entendant les indices x, y, z :

$$\begin{aligned} K_\theta(k) &= K_\theta(k-1) - (g_\theta e_\theta(k)^2 + g_{\omega r} \omega_r(k)^2 + \sigma_\theta(1 + \rho_\theta e_\theta(k)^2)(K_\theta(k-1) - F_{\theta 0})) \cdot \gamma_\theta T_{e,ad} \\ K_\omega(k) &= K_\omega(k-1) - (g_\omega \omega(k)^2 + \sigma_\omega(K_\omega(k-1) - F_{\omega 0})) \cdot \gamma_\omega T_{e,ad} \end{aligned} \quad (5.52)$$

La fonction projecteur, qui garantit que les gains en position et en vitesse sur chaque axe sont bornés à chaque instant dans des intervalles de type $[K_\theta^{\min} \ F_{\theta 0}]$ et $[F_{\omega 0} \ K_\omega^{\max}]$, peut également être codée facilement. Nous avons ainsi, en prenant comme exemple K_θ :

PSEUDO-CODE 1 - Gain K_θ - Implémentation de la fonction projecteur

```
SI Ktheta < Ktheta_min
ALORS Ktheta = Ktheta_min
  SINON SI Ktheta > Ftheta0
    ALORS Ktheta = Ftheta0
  FINSI
FINSI
```

et les gains ainsi obtenus sont utilisés pour le calcul de la commande.

En plus de des équations définissant l'évolution des gains adaptatifs, le problème de leur initialisation doit également être pris en compte. Comme l'initialisation des gains se fait à l'entrée en mode MNO – donc possiblement avec un dépointage et une vitesse importantes – nous avons proposé l'initialisation de K_θ à K_θ^{\min} et de K_ω à K_ω^{\max} .

Une autre situation qui doit être prise en compte lors de l'implémentation de la loi adaptative est le comportement des gains dans le cas de l'indisponibilité de la mesure. Dans ce cas, le capteur solaire ne fournissant pas d'information sur la position angulaire du satellite, la mesure d'attitude et l'estimation de vitesse sont inaccessibles. La stratégie mise en place sur les satellite Myriade (Pittet et Arzelier, 2006) consiste à supposer que dans le cas d'un trou de mesure de courte durée (inférieure à 2 secondes pour le cas de Picard) l'état du satellite n'as pas le temps d'évoluer de manière significative. La commande est alors gardée constante, égale à la valeur calculée avec la dernière mesure valide. Afin de garder le même comportement avec la loi adaptative, les gains ne sont pas adaptés dans le cas d'une perte de mesure de courte durée. Pendant ces périodes, ils sont constants et gardent les valeurs calculées avant la perte de la mesure.

Si la mesure est indisponible pendant plus de temps, on peut supposer que le satellite diverge sous l'effet des couples perturbateurs, donc le dépointage et la vitesse du satellite augmentent. Leur évolution étant inconnue, il serait alors dangereux d'appliquer une couple non-nul. Dans cette situation la commande est ainsi fixée à zéro. Cependant, les gains doivent continuer à s'adapter même si l'évolution de la dynamique satellite n'est pas connue. Une évolution des gains à vitesse constante vers leurs valeurs extrêmes (K_θ^{\min} pour K_θ et K_ω^{\max}

pour K_ω) est proposée pour cette situation :

$$\begin{aligned} K_\theta(k) &= K_\theta(k-1) - (F_{\theta 0} - K_\theta^{\min}) \cdot T_{\text{adapt}} \\ K_\omega(k) &= K_\omega(k-1) + (K_\omega^{\max} - F_{\omega 0}) \cdot T_{\text{adapt}} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Le paramètre T_{adapt} définit le nombre de périodes d'échantillonnage nécessaires aux gains pour rejoindre leurs valeurs extrêmes en partant de leur valeur nominales respectives. Cette durée doit être du même ordre de grandeur que le temps moyen nécessaire au satellite pour se dépointer de 20 degrés, sous le seul effet du couple perturbateur.

Remarquons également qu'en implémentant l'équation d'adaptation (5.52), plusieurs type de lois de commande peuvent être obtenues. Ainsi, en choisissant des valeurs non-nulles pour tous les coefficients, la loi d'adaptation introduite dans la Section 5.2.1, qui prend en compte la vitesse des roues à réaction est obtenue. En fixant $g_{\omega r} = 0$, cette information n'est pas utilisée et on obtient la loi présentée dans la Section 5.2.2, tandis que pour $\rho_\theta = 0$ la loi de commande se réduit à celle introduite dans le Chapitre 4. En vue des essais en vol, la forme générale (5.52) offre ainsi un grand niveau de flexibilité : pour tester différents comportements en boucle fermée il suffit de changer certaines valeurs numériques dans le logiciel de vol. Il n'est donc pas nécessaire d'embarquer plusieurs lois et de commuter entre elles pour chaque cas de test.

5.6.2 Cas de simulation et réglages considérés

Nous clôturons ce chapitre en présentant des résultats de simulations obtenus en implémentant sur le simulateur Picard décrit ci-dessus les lois adaptatives développées au cours de nos travaux de recherche. Deux algorithmes de commande sont considérés :

- Loi adaptative 1 (LA1) : loi à terme σ variable, sans prise en compte de la vitesse de rotation des roues à réaction. Cette loi a été réglée de manière à générer, pour des dépointages initiaux de l'ordre de 20 degrés, des réponses avec des vitesses satellite approximativement constantes et des écarts de vitesses roues de l'ordre de 50 rad/s.
- Loi adaptative 2 (LA2) : loi à terme σ variable, utilisant les mesures des vitesses angulaires des actionneurs pour l'adaptation des gains. Les paramètres ont été réglés de manière à ce que, en régime stationnaire, pour des vitesses roues inférieures, en valeur absolue, à 250 rad/s, les gains en position restent supérieurs à 0.05. Pour des réponses à des dépointages importants, avec des vitesses initiales des roues à réaction nulles, cette loi adaptative génère des écarts de vitesse roues de l'ordre de 100 rad/s.

Les valeurs numériques des différents paramètres définissant ces lois de commande sont données en Annexe B, page 183.

Concernant les simulations effectuées, nous présentons dans la suite du chapitre les réponses avec les lois adaptatives 1 et 2 à des dépointages de 20 degrés sur chaque axe du satellite. Pour le cas de la LA2, deux jeux de conditions initiales au niveau des vitesses des roues à réaction sont considérées : $\omega_{r,i}(t=0) = 0$ et $\omega_{r,i}(t=0) = 2000 \text{ RPM} \approx 210 \text{ rad/s}$, $i \in \{x, y, z\}$. Les résultats pour deux autres cas de simulation figurent en Annexe C. Il s'agit des réponses lors d'une transition entre le mode MGT et le mode MNO, ainsi que des réponses à un trou de mesure de 100 secondes. Pour ce dernier cas de simulation, dont la durée est de 60000 secondes, les vitesses des roues à réaction sont asservies à 1350 RPM $\approx 140 \text{ rad/s}$. Les réponses à ce scénario illustrent ainsi l'influence sur les gains de la LA2 des vitesses roues de valeurs importantes en régime

stationnaire. Sur la base de ces trois types de scénario, des plans de simulation qui ont permis la validation, en vue des essais en vol, de la commande adaptative ont été également effectués.

5.6.2.1 Réponses aux grands dépointages

5.6.2.1.1 Loi adaptative sans prise en compte de la vitesse roue

Les réponses obtenues avec la LA1, pour un dépointage initial de -20 , -20 et 20 degrés sur les axes x , y et z respectivement figurent ci-dessous. La Figure 5.11 montre les réponses sur l'axe x , tandis que les signaux associés aux axes y et z sont représentés sur la Figure 5.12.

Au niveau de ces réponses nous pouvons remarquer dans un premier temps un comportement similaire, d'un point de vue qualitatif, avec celui observé lors des simulations basées sur les modèles linéaires. Ainsi, à partir du dépointage initial, le satellite évolue vers sa position angulaire d'équilibre qui est rejointe sans dépassement. Au fur et à mesure que la valeur absolue du dépointage diminue, les gains en position augmentent. Cette augmentation, lente lorsque le dépointage est important, s'accélère lorsque les erreurs de pointage diminuent, ce qui fait que la vitesse angulaire est approximativement constante sur la plus grande partie de la réponse temporelle. Les valeurs numériques des paramètres de la loi de commande ont été choisies de manière

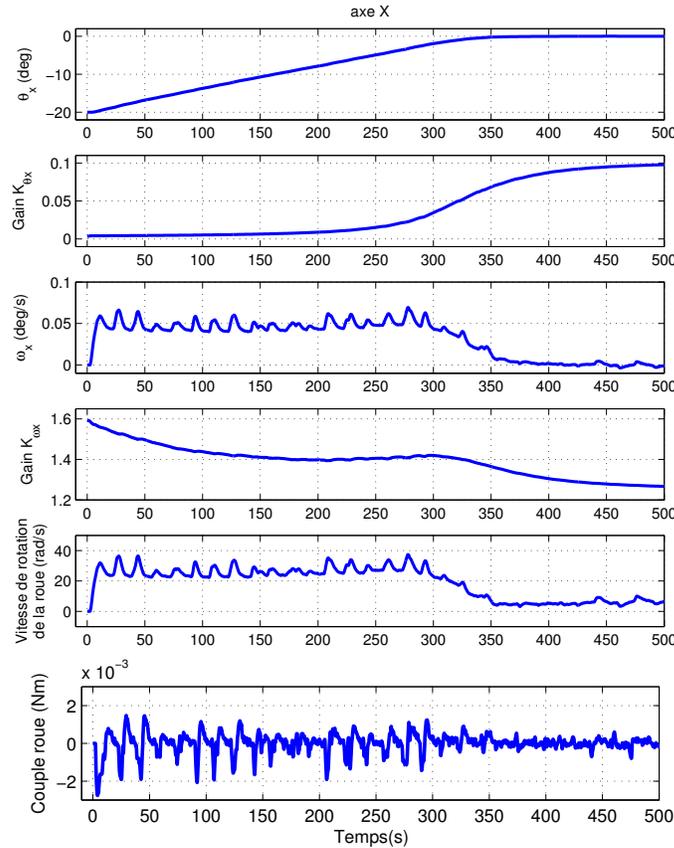
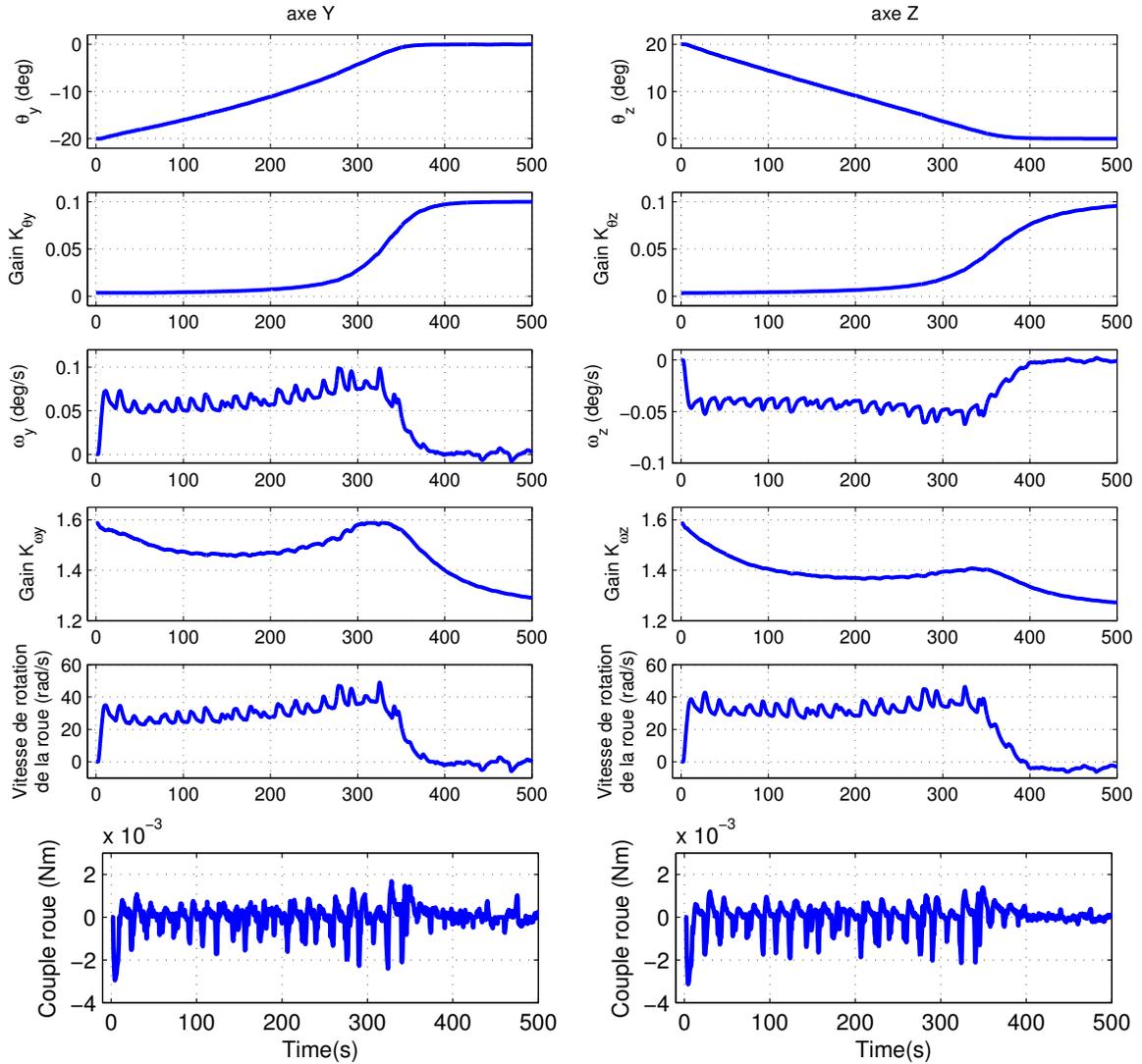


FIGURE 5.11 – Réponse aux grands dépointages - axe x - loi adaptative 1

à limiter la sollicitation au niveau de la vitesse de rotation des roues à réaction à 50 rad/s. Le respect de cette

FIGURE 5.12 – Réponse aux grand dépointages - axes y et z - loi adaptative 1

contrainte peut être observée sur les Figure 5.11 et 5.12, pour les trois axes du satellite. Les vitesses des roues à réaction sont ainsi très loin des valeurs de saturation ± 293 rad/s. La limitation de la commande peut également être observée au niveau des couples générés par les actionneurs, dont les valeurs ne dépassent pas les seuils de saturation $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ Nm. Par rapport aux simulations présentées précédemment (voir par exemple la Figure 5.2, page 139), la présence de nombreux pics sur le couple de commande peut être remarquée. Ces perturbations font apparaître des variations, relativement hautes fréquences et d'amplitude limitée, sur la vitesse du satellite. Elles sont dues à la présence, tout au long de la simulation, de nombreuses périodes où le capteur stellaire ne délivre pas de mesure valide. Plus exactement, lorsque ces périodes prennent fin, l'estimation de la vitesse angulaire est loin de sa valeur réelle, pendant une durée définie par le temps de convergence du filtre pseudo-dérivateur. L'utilisation de ces estimées dans le calcul de la commande génère ainsi une dynamique

non-désirée en boucle fermée. L'apparition de ces perturbations est illustrée plus en détail en Annexe C, page 192.

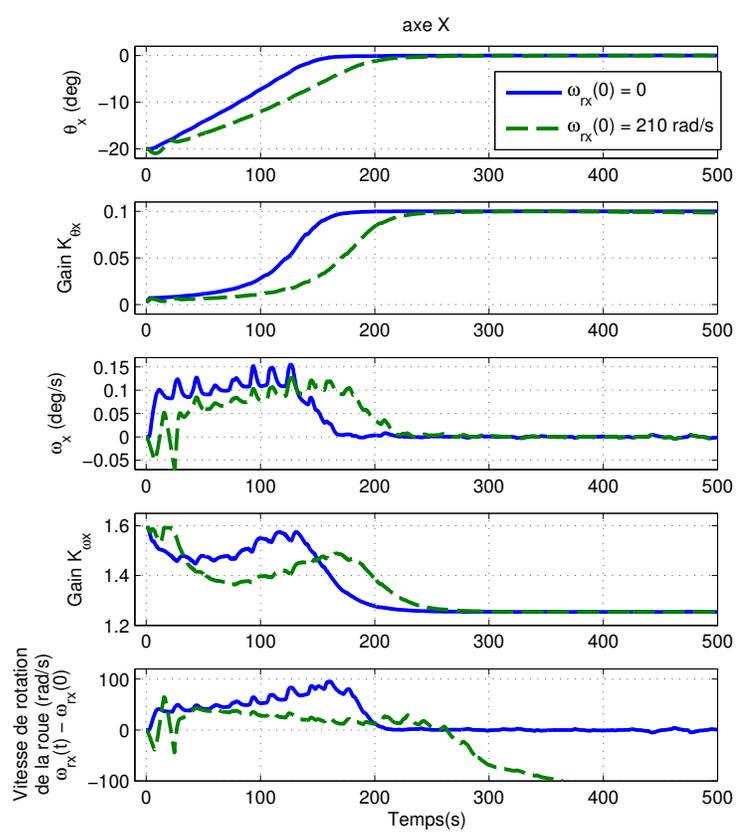
Remarquons toutefois que, malgré cet effet néfaste de l'utilisation d'un estimateur de vitesse dans un environnement perturbé, la dynamique de la boucle fermée basée sur la commande adaptative reste conforme au comportement désiré. Notons également que l'apparition de perturbations sur le couple commandé est propre au logiciel de vol des satellites Myriade et n'est pas un effet de la commande adaptative.

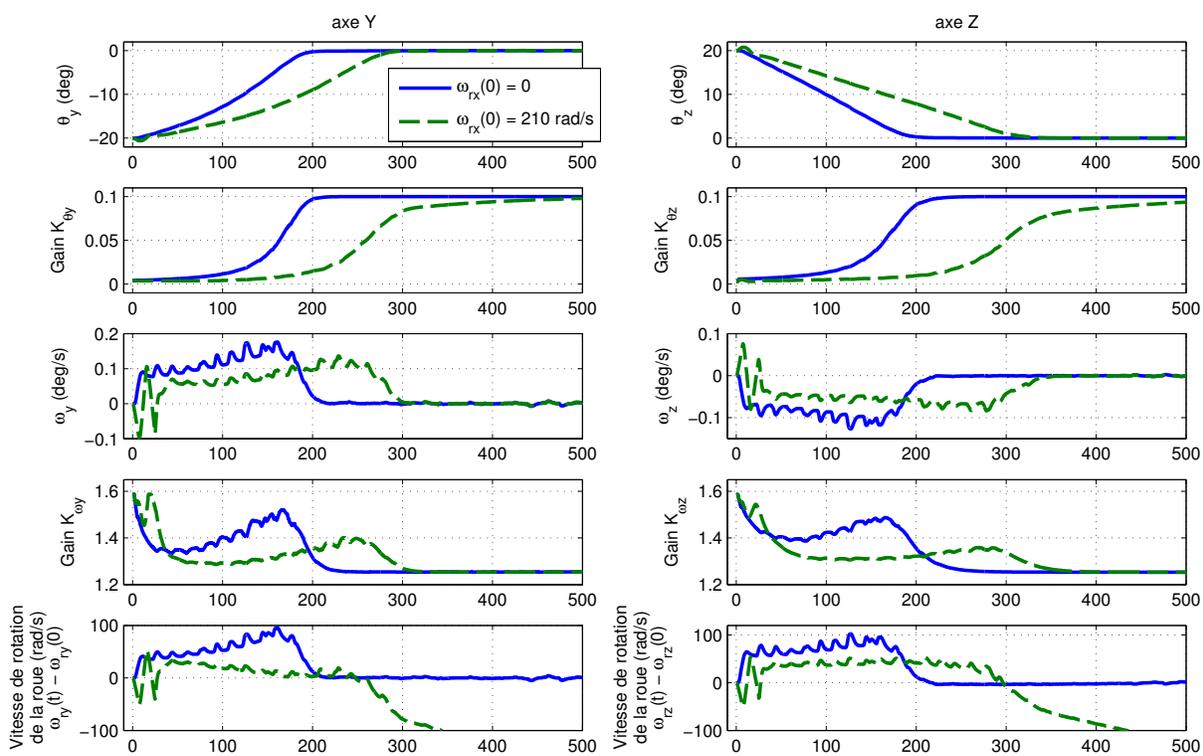
5.6.2.1.2 Loi adaptative prenant en compte la vitesse de la roue à réaction

Considérons maintenant l'application de la loi adaptative 2 pour des cas de simulation similaires. Les réponses à un dépointage initial de $(-20, -20, 20)$ degrés sont présentées sur la Figure 5.13 pour l'axe x et sur la Figure 5.14 pour les axes y et z respectivement. L'influence des vitesses initiales des roues à réaction est également illustrée sur ces figures : les courbes représentées par des traits continus correspondent aux conditions initiales nulles aux niveau des actionneurs, tandis que les traits discontinus montrent les réponses à partir des conditions initiales $\omega_{ri}(t = 0) = 2000 \text{ RPM} \approx 210 \text{ rad/s}$, $i \in \{x, y, z\}$.

Ces résultats confirment l'intérêt de prendre en compte, dans la loi d'adaptation, l'information sur le niveau du commande atteint. On peut facilement observer sur les courbes montrant l'évolution de la position angulaire du satellite que la réactivité en boucle fermée varie selon les capacités disponibles des actionneurs. Ainsi, lorsque les conditions initiales au niveau des actionneurs sont nulles, des écarts de vitesses des roues à réaction de l'ordre de 100 rad/s peuvent être observés. Lorsque les valeurs initiales de ces vitesses sont de 210 rad/s, les écarts au long de la réponse sont de l'ordre de 50 rad/s, y compris pour la phase transitoire en début de réponse. De cette manière, le niveau de saturation en vitesse de rotation des actionneurs n'est pas atteint, les valeurs maximales obtenues pour ce cas de simulation étant de l'ordre de 260 rad/s. Remarquons que si la dynamique du cas de simulation avec les conditions initiales nulles avait été gardée, les maximales des vitesses des rotation des roues à réaction auraient été de l'ordre de 310 rad/s (valeur initiale 210 rad/s + écart 100 rad/s), donc supérieures à la valeur de saturation de 293 rad/s.

La différence de dynamique observée entre les deux situations présentées ici est due au fait que dans la deuxième cas de simulation les vitesses de rotation des roues à réaction sont plus importantes. Les gains K_θ augmentent ainsi plus lentement ce qui fait que la réponse en position du satellite est, elle-aussi, plus lente. Sur l'axe x la différence en terme de temps de réponse est ainsi de l'ordre de 50 secondes, tandis que sur les axes y et z , elle se situe autour de 100 secondes.

FIGURE 5.13 – Réponse aux grand dépointages - axe x - loi adaptative 2

FIGURE 5.14 – Réponse aux grand dépointages - axes y et z - loi adaptative 2

5.7 Conclusions

Ce chapitre a présenté les principales contributions que nous avons apportées au niveau de l'implémentation d'une loi de commande adaptative à bord d'un satellite.

On peut remarquer dans un premier temps l'adaptation de la procédure de synthèse introduite dans le Chapitre 4, pour traiter le cas d'un modèle linéaire à trois entrées et six sorties du satellite complet. Par rapport au cas un axe considéré précédemment, la procédure permet dans cette situation de prendre en compte la structure désirée au niveau des équations d'adaptation, mais également au niveau du retour de sortie. En contraignant certains de ses éléments à être nuls, une loi de commande adaptative stabilisante et décentralisée est obtenue, chaque axe étant contrôlé indépendamment. Cette application illustre ainsi la flexibilité de la procédure de synthèse proposée et montre son intérêt dans le contexte de la commande structurée.

Une autre contribution apportée dans le cadre de ce chapitre est l'ajout de deux nouvelles modifications dans les équations d'adaptation. La première de ces modifications s'exprime sous la forme d'un terme σ variable. En imprimant aux gains en position une variation sur tout le domaine de fonctionnement considéré, elle permet d'obtenir une dynamique du satellite plus uniforme. La deuxième modification consiste à ajouter dans la loi d'adaptation un terme qui dépend des vitesses des roues à réaction. Grâce à ce nouvel élément les réponses du satellite en boucle fermée sont rendues plus ou moins rapides, selon les conditions de fonctionnement des actionneurs. La loi de commande adaptative ainsi enrichie permet d'obtenir un avantage opérationnel par rapport à la loi de commande à commutation, actuellement implémentée sur les satellites, qui génère des réponses avec la même dynamique, indépendamment des capacités disponibles des actionneurs. L'introduction des nouveaux termes d'adaptation fait également apparaître deux paramètres supplémentaires de la loi de commande, dont le réglage s'effectue selon des critères liés au fonctionnement des actionneurs. Ces choix s'intègrent ainsi dans la démarche générale que nous proposons et qui permet de fixer des valeurs numériques pour tous les paramètres de la loi de commande.

Concernant l'implémentation du schéma de commande proposé, son expression discrète a été validée suite à l'implémentation sous le langage Fortran dans le simulateur SCAO du satellite Picard. Les simulations effectuées dans cet environnement ont montré l'absence de problèmes numériques liés aux expressions des lois d'adaptation. En particulier, les gains restent bornés dans des domaines *a priori* déterminés et leur évolution est conforme à celle attendue. Comme l'effort de calcul associé au schéma de commande développé est limité, celui-ci a été évalué par les ingénieurs du CNES comme implémentable à bord d'un satellite. Les nombreux résultats de simulation, dont nous avons présenté dans ce chapitre un court extrait, montrent que les nouvelles lois de commande donnent de bons résultats sur des cas d'utilisation pratique, comme l'entrée en mode MNO, qui peut se faire avec des grands dépointages. Ces simulations mettent également en évidence les propriétés de robustesse des lois adaptatives, en particulier vis-à-vis des non-linéarités du modèle et de la non-disponibilité récurrente de la mesure.

Nous considérons ainsi qu'à travers les résultats présentés dans ce chapitre nous avons contribué à l'augmentation du niveau de maturité de la technique de commande adaptative considérée au cours de cette étude. Sur la base de ces développements, les essais en vol sur le satellite Picard ont été approuvés.

Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse nous nous sommes intéressés au développement de stratégies de commande à temps variant pour le contrôle d'attitude de satellites. Dans ce contexte, nous avons illustré dans un premier temps le besoin d'implémenter de telles stratégies et analysé les solutions existantes avant le début de notre étude.

Suite à cette analyse, détaillée dans le premier chapitre, la première contribution de notre étude est présentée dans le Chapitre 2. Il s'agit du développement d'une méthode de synthèse grâce à laquelle de nouvelles lois de commande LPV peuvent être obtenues. La méthode que nous proposons s'appuie sur la formulation des spécifications en boucle fermée à travers un modèle de référence LPV. Cette approche permet d'obtenir des lois de commande à temps-variant à partir des modèles de synthèse stationnaires. La démarche qui a permis de mettre en œuvre cette méthode de commande se fonde sur l'expression sous forme standard du problème de suivi de modèle. De nombreuses techniques de synthèse sont alors accessibles et nous nous sommes orientés vers une synthèse polytopique H_∞ à sensibilité mixte, ce qui nous a permis d'imposer des contraintes au niveau des performances de suivi de modèle. Les conditions utilisées dans ce cadre peuvent être facilement enrichies afin de répondre à des critères mixtes de type H_2 ou placement de pôles, mais également de robustesse. Afin de limiter le conservatisme introduit par les conditions de stabilité basées sur une fonction de Lyapunov unique, les correcteurs obtenus dans un premier temps sont extrapolés, couvrant ainsi l'intégralité du domaine de fonctionnement considéré. Testés en simulation, ces algorithmes permettent d'imprimer au satellite des dynamiques différentes à faible et fort dépointage, ce qui répond à la problématique de commande considérée. Ces résultats montrent l'intérêt de la méthode de synthèse que nous avons développée.

On remarque cependant que les lois de commande obtenues en utilisant cette approche sont assez complexes. L'utilisation des filtres de pondération et du modèle de référence fait que l'ordre du correcteur calculé est élevé, l'implémentation du modèle de référence et d'une politique de gestion de ses états étant également nécessaire. La complexité de cette stratégie de commande peut être réduite en approximant le correcteur initialement obtenu par des algorithmes d'ordre réduit, cette simplification pouvant cependant entraîner une perte de performances. Une deuxième limitation qui reste à dépasser et peut, par conséquent, être à l'origine de futures études est le choix de modèles de références LPV. Afin d'obtenir de tels systèmes décrivant la dynamique idéale en boucle fermée, une modélisation approfondie du comportement désiré du satellite est ainsi nécessaire. Dans cette vision d'amélioration de la stratégie de commande LPV nous pouvons mentionner la possibilité d'ajouter plusieurs paramètres variants. De cette manière, des problèmes allant au-delà de la commutation entre le fonctionnement à dépointage faible et fort pourraient être abordés. On pourrait ainsi envisager de commuter entre plusieurs actionneurs similaires, par exemple d'une roue à réaction proche de

la saturation à une autre disposant d'une capacité plus grande. La commutation entre des actionneurs ayant des fonctionnements différents peut également être considérée dans le cadre LPV, par l'ajout de paramètres indiquant la disponibilité de chaque système d'actionnement. Par exemple, une commutation entre les roues à réaction et les magnéto-coupleurs pourrait ainsi être mise en œuvre.

La deuxième approche investiguée au cours de notre étude repose sur la théorie de la commande adaptative. Dans ce cadre, nous avons cherché à développer des algorithmes facilement implémentables, qui répondent aux objectifs de commande variants selon les conditions de fonctionnement. Nos contributions dans ce domaine ont comme point de départ les travaux présentés dans le cadre de l'étude bibliographique du Chapitre 3. Dans cette partie du manuscrit nous avons accordé une attention particulière aux schémas stabilisants sans modèle de référence, applicables aux systèmes MIMO non-carrés, sous l'hypothèse de la connaissance d'un retour de sorties statique stabilisant. Une classe assez vaste de systèmes est ainsi définie, qui inclut les modèles de satellites que nous utilisons.

Nos contributions théoriques dans le domaine de la commande adaptative sont présentées dans le Chapitre 4. Des conditions de synthèse d'une loi adaptative structurée y sont énoncées dans un premier temps. La loi adaptative que nous introduisons s'exprime sous la forme d'un retour de sortie dont chaque composante est adaptée séparément. Le gain adaptatif varie ainsi à l'intérieur d'un domaine borné, centré autour du gain statique stabilisant connu. Les conditions de stabilité que nous formulons permettent de spécifier les signaux en fonction desquels chaque composante du gain est adaptée, ainsi que de calculer leurs domaines respectifs de variation. En utilisant ces conditions, les gains sont autorisés à varier dans des domaines plus grands que ceux obtenus avec l'utilisation d'une adaptation non-structurée. La loi adaptative structurée peut ainsi être utilisée pour couvrir l'intégralité du domaine de fonctionnement auquel nous nous intéressons.

Couplée à l'adaptation structurée des gains de commande, l'utilisation de la σ -modification permet de faire évoluer la dynamique de la boucle fermée selon le point de fonctionnement. En particulier, l'ajout des termes σ dans les équations d'adaptation fait que les gains retournent vers leurs valeurs nominales respectives lorsque le système est proche de l'équilibre, une dynamique plus rapide étant alors obtenue. Dans ce contexte, la deuxième contribution apportée dans le Chapitre 4 est la formulation de conditions de stabilité asymptotique pour des lois d'adaptation incluant les termes σ . Le respect de ces conditions, inspirées de résultats formulés dans la commande robuste, permet d'aller plus loin que la σ -modification : on prouve ainsi que la loi de commande assure la stabilité asymptotique pour toute adaptation des gains à l'intérieur des domaines connus. Ce résultat offre une importante liberté dans la construction de la loi d'adaptation, exploitée au cours du Chapitre 5. Le dernier résultat important présenté au cours du Chapitre 4 est la mise en place d'une démarche permettant de choisir tous les paramètres de la loi adaptative proposée. Ces choix s'effectuent selon des critères claires et font que les gains de la loi adaptative évoluent de manière à limiter l'effort de commande lorsque les erreurs sont grandes et assurent une dynamique rapide à faible dépointage. La procédure de réglage ainsi construite permet de calculer les domaines à l'intérieur desquels les gains adaptatifs évoluent, en privilégiant éventuellement la variation d'une composante par rapport à une autre. Notons que ces domaines de variation définissent la plage de fonctionnement qui peut être couverte par la loi adaptative. Cet aspect constitue la principale limitation de l'approche que nous proposons, car les variations des gains ne peuvent pas être arbitrairement grandes. Les domaines de fonctionnement couverts sont, par conséquent, eux-aussi limités.

Sur la base de ces résultats théoriques prometteurs, des aspects pratiques liés à l'implémentation d'une loi adaptative à bord d'un satellite ont été par la suite abordés. Les résultats que nous avons obtenus à ce niveau

ont été présentés dans le Chapitre 5. Notre première contribution consiste à proposer deux modifications pour la loi adaptative introduite dans le Chapitre 4. La première modification s'exprime sous la forme d'un terme σ qui varie en fonction du dépointage. L'ajout de ce nouveau terme permet d'obtenir, selon le réglage choisi, des comportements différents en boucle fermée et des dynamiques plus uniformes. Une flexibilité importante est ainsi offerte au niveau du réglage. Une deuxième évolution des lois de commande a été proposée en intégrant à l'équation d'adaptation un terme qui dépend des vitesses des roues à réaction. Grâce à cette composante, la dynamique en boucle fermée varie en fonction des capacités disponibles au niveau des actionneurs : les réponses sont rapides lorsque les vitesses des roues sont faibles et plus lentes lorsque l'on se rapproche de la valeur de saturation. Une fois les lois adaptatives améliorées obtenues leur formulation en temps discret a été abordée. Des expressions basées sur les méthodes d'Euler et de Tustin ont été proposées, mettant en évidence l'effort de calcul limité nécessaire pour l'implémentation des algorithmes considérés. A ce niveau, notre contribution consiste à reformuler la fonction barrière, qui garantit la bornitude des gains dans les domaines fixés et dont l'implémentation est problématique en temps continu. Son expression en temps discret, basée sur une fonction de type projecteur, permet de résoudre ces problèmes numériques.

Au cours de ce dernier chapitre on a également montré comment les conditions de synthèse introduites au Chapitre 4 peuvent être utilisées sur un modèle complet du satellite, à trois entrées et six sorties. L'utilisation de ces conditions permet d'imposer une structure globale au niveau de la commande, chaque axe étant contrôlé indépendamment. La notion de structure intervient également au niveau de l'adaptation, chaque composante du retour de sortie évoluant dans un domaine de variation spécifique. On a ainsi mis en évidence la flexibilité et l'intérêt de la méthode proposée pour des systèmes MIMO. Suite à ces développements, une campagne de validation des algorithmes de commande proposés a été lancée, en vue de la réalisation des essais en vol sur le satellite Picard. Les résultats de ces simulations montrent que les nouvelles lois de commande sont robustes aux non-linéarités du modèle et aux perturbations liées à l'environnement orbital. Ces algorithmes ont ainsi été jugés propices à une première implémentation d'essai. On estime également qu'ils peuvent offrir certains avantages opérationnels en vol grâce, notamment, à la possibilité d'adapter l'agilité du satellite en fonction des capacités disponibles des actionneurs. Nous considérons ainsi que la dernière contribution majeure de cette thèse est l'augmentation du niveau de maturité technologique des méthodes de commande adaptative étudiées.

Au niveau des perspectives ouvertes par les résultats que nous avons obtenus, l'adaptation du correcteur en fonction du niveau de sollicitation de l'actionneur apparaît comme intéressante. Dans un cadre plus vaste que celui de la commande d'attitude de satellites, cette approche pourrait être appliquée afin d'éviter la saturation des actionneurs et d'adapter la dynamique de la boucle fermée en fonction des capacités de commande disponibles. Une comparaison avec les schémas de type anti-windup, où l'on agit directement sur la commande (et non sur le correcteur) en fonction du niveau de saturation semble alors pertinente.

En revenant à l'application considérée, la validation des lois de commande constitue un domaine d'intérêt majeur. Dans ce contexte, les algorithmes adaptatifs pourraient, par rapport aux structures basées sur la commutation, apporter certains avantages. En effet, s'agissant d'algorithmes uniques sur tout le domaine de fonctionnement d'intérêt, leur validation pourrait se faire plus facilement que dans le cas où plusieurs lois doivent être validées. Rappelons à ce sujet que les algorithmes que nous avons proposés permettent de prouver la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée, à la différence de la stratégie de commande actuellement mise en place. Ceci dit, les lois adaptatives font intervenir des états supplémentaires (les gains

en position et en vitesse) qui varient de manière non-linéaire en fonction des autres états du système. Une deuxième non-linéarité est également introduite, la commande étant obtenue en multipliant les états associés au correcteur et au système physique. De ce point de vue, la validation apparaît plus complexe que pour les lois linéaires classiques. Le développement de techniques spécifiques constitue ainsi un aspect à investiguer dans le futur.

Une autre perspective ouverte par cette étude est l'application de la commande adaptative pour couvrir des domaines et modes de fonctionnement allant au delà du mode MNO. Comme pour le cas de l'utilisation d'une commande LPV, on peut ainsi envisager l'utilisation de plusieurs types d'actionneurs, les roues à réaction et les magnéto-coupleurs, par exemple. Les modes de fonctionnement MNO et MGT pourraient de cette manière être unifiés. Dans cette direction, les aspects liés à la périodicité de la disponibilité des magnéto-coupleurs devront être considérés et nous pouvons remarquer la proximité avec d'autres études menées par le CNES, notamment celle de Trégouët (2012). Si la voie de l'utilisation simultanée de plusieurs type d'actionneurs s'avère prometteuse, l'intégration dans cette structure de dispositifs de contrôle de type tuyères, fonctionnant en tout-ou-rien, peut être à plus long terme être envisagée. Ceci conduirait ainsi à la fusion des modes de type "contrôle d'attitude" avec ceux de ceux de contrôle d'orbite, ce qui simplifierait de manière significative l'architecture logicielle des satellites.

Annexe A

Commande adaptative structurée pour la résolution des LMIs

Nous présentons dans cet article une méthode permettant de résoudre des inégalités matricielles linéaires. La méthode que nous proposons est basée sur le fait que les solutions au problème donné sont des points d'équilibre d'un système stable d'équations différentielles. Plus exactement, ces équations correspondent à une loi de commande adaptative appliquée à un système linéaire invariant dans le temps. La loi adaptative se base sur des propriétés de passivité et fait apparaître deux contraintes structurelles. La première impose que le retour de sortie soit, à tout instant, bloc-diagonal, ce qui peut être interprété comme une commande décentralisée. La deuxième contrainte de structure est vérifiée asymptotiquement et peut, par exemple, revenir à imposer que le gain soit symétrique quand le temps tend vers l'infini. La stabilité asymptotique ponctuelle du système bouclé avec ce type de loi de commande est prouvée à l'aide de fonctions de Lyapunov quadratiques. Les résultats sont illustrés sur une LMI associée au problème de calcul de la norme H_∞ d'un système linéaire, des solutions à cette LMI étant obtenues à l'aide de simulations effectuées sous Simulink.

Structured adaptive control for solving LMIs

Alexandru-Razvan Luzi ^{*,**,***} Alexander L. Fradkov ^{****}
Jean-Marc Biannic ^{*,**} Dimitri Peaucelle ^{**,***}

^{*} ONERA, The French Aerospace Lab, 2 av. Edouard Belin, F-31055
Toulouse, France. (e-mail: alexandru.luzi@onera.fr).

^{**} CNRS, LAAS, 7 av. du Colonel Roche, F-31400 Toulouse, France. (e-mail:
peaucelle@laas.fr)

^{***} Univ. de Toulouse, LAAS, F-31400 Toulouse, France.

^{****} Institute for Problems of Mechanical Engineering of RAS 61 Bolshoy av.
V.O., St Petersburg, 199178, Russia

Abstract: Numerical problems such as finding eigenvalues, singular value decomposition, linear programming, are traditionally solved with algorithms that can be interpreted as discrete-time processes. One can also find in the literature continuous-time methods for these same problems where solutions are the equilibrium points to which converge stable differential equations. The paper exposes one such continuous-time method for solving linear matrix inequalities. The proposed differential equations are those of an adaptive control feedback loop on an LTI system. The adaptive law is passivity-based with additional structural constraints of two types. The first constraint imposes the gain to be block-diagonal at all times. It can be interpreted as a decentralized control structure. The second constraint is only required asymptotically. It for example reads as requiring the feedback gain to be symmetric when time goes to infinity. Point-wise global stability is proved with quadratic Lyapunov functions. Results are illustrated on LMIs related to an H_∞ norm computation problem. Solutions to the LMIs are obtained by simulations in Simulink.

1. INTRODUCTION

Passivity-based adaptive control is a rich and lively field of research. At the core of all results is the assumption that the system can be made passive via static output feedback. This property is sometimes called "almost passivity". Based on almost passivity assumption, adaptive laws are constructed both for stabilization and for model reference tracking (MRAC: model reference adaptive control). Since almost passive properties do not hold in general, most theoretical efforts have been dedicated to modifications of the adaptive control scheme that relax the assumptions. See for example Kaufman et al. [1994], Barkana et al. [2006], Fradkov [2003], Peaucelle et al. [2011], Hsu et al. [2011], Son and Seo [2002] to cite just a few. But when reading all of these results remains a question: why doing adaptive control if one knows the existence of a static law that does as good a job? The usual answer is that computing the static law needs knowledge of model parameters while adaptation will find these values by itself. The adaptive law hence works as a solver for finding static gains that stabilize linear systems. If a stabilizing static gain exists it is usually not unique, but the adaptive law will converge to one of such.

The contribution of the paper is to take advantage of this feature for solving linear matrix inequalities (LMIs). Finding solutions to LMI constraints, also known as semi-definite programming (SDP), is a major issue in applied mathematics with many applications to control problems. The references Boyd et al. [1994], El Ghaoui and Niculescu [2000], Scherer [2006] give an idea of how important is this issue for the robust control

field, and these are only part of all applications of LMIs. The other reason for which LMI-based results have become popular is that SDP is a convex problem for which polynomial-time algorithms have been proposed. LMILab by Gahinet and Nemirovskii [1993] was the first one and many others have been proposed since. All are interfaced by a unique easy to use parser YALMIP by Löfberg [2001].

Our aim is not to compete with these solvers, but to explore an alternative continuous-time approach. Most optimization tools are algorithms that can be interpreted as discrete-time systems $x_{k+1} = f_d(x_k)$. Convergence to optimal values is from this view point related to uniqueness of asymptotically stable equilibrium points. An interesting related topic is finding continuous-time versions of the algorithms, that is differential equations $\dot{x}(t) = f_c(x(t))$ with the same stable equilibria. Amazing results exist in that field and many are described in Helmke and Moore [1996]. One of such continuous-time algorithm solves by simulation of ODEs the linear programming (LP) problem, see Brockett [1991]. Since LP is a sub case of SDP, our contribution can be seen as an extension of that result. Yet, our result is not obtained by the same approach. Our contribution takes advantage of adaptive control properties for solving LMIs via continuous-time algorithms.

The paper is organized as follows. First, we recall classical passivity-based adaptive control results and state that solving the LMIs for passifying static gain design and simulating the adaptive law are linked problems. In the next section, we show that all LMI problems can be rewritten as static output feedback passification problems provided that some structural constraints are added to the static feedback gains. The fourth section gives a new adaptive law for solving this structured pacification issue. The structural constraints are twofold. One

* This work was supported in part by the French Space Agency CNES and by part by Ministry of Education and Science of Russian Federation, the Federal Program "Cadres" (agreements 8846, 8855).

is that the gains are block diagonal. This is handled at all times via decentralized-like adaptive control. The second structural constraints are only required asymptotically. It for example reads as requiring the feedback gain to be symmetric when time goes to infinity. Convergence of the LMI solving adaptive law is proved by means of Lyapunov theory. In section 6 the results are illustrated on a simple LMI problem. The adaptive laws are simulated in Simulink. It is shown how the gains converge to the structured (symmetric) solution of the LMI problem. Finally, conclusions are drawn and orientations are given for future work.

Notation: $\mathbf{1}$ stands for the identity matrix. A^T is the transpose of A . $\{A\}^S$ stands for the symmetric matrix $\{A\}^S = A + A^T$. $\text{Tr}(A)$ is the trace of A . $a = \text{vec}(A)$ is a vector composed of all the components of the matrix A taken column-wise. $\text{mat}(a)$ is the reverse operation such that $\text{mat}(\text{vec}(A)) = A$. $\text{diag}[\dots F_i \dots]$ stands for a bloc-diagonal matrix whose diagonal blocs are the F_i matrices.

2. MATRIX INEQUALITIES FOR PASSIVITY BASED ADAPTIVE CONTROL

Consider the following static output-feedback stabilization and passification problems (see Peaucelle and Fradkov [2008] for the passivity-related definitions):

Problem 1. (Stabilization) Given an LTI system:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t), \quad y(t) = \mathbb{C}x(t) \quad (1)$$

find a static output feedback gain F_s such that the control law:

$$u(t) = F_s y(t) \quad (2)$$

makes the closed loop system asymptotically stable.

Problem 2. (Passification) Given an LTI system:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t), \quad y(t) = \mathbb{C}x(t), \quad z(t) = y(t) \quad (3)$$

find a static output feedback gain F_p such that the control law:

$$u(t) = F_p y(t) + w(t) \quad (4)$$

makes the closed loop system strictly passive with respect to inputs w and outputs z .

A system is said to be strictly passive if it is passive and asymptotically stable. Hence, all solutions to Problem 2 are solutions to Problem 1. The converse is not true.

In terms of matrix inequalities, Problem 1 reads as the existence of Q_s and F_s solution to the Lyapunov inequalities:

$$Q_s > 0, \quad \{Q_s(\mathbb{A} + \mathbb{B}F_s\mathbb{C})\}^S < 0, \quad (5)$$

while Problem 2 contains an additional equality constraint:

$$Q_p > 0, \quad \{Q_p(\mathbb{A} + \mathbb{B}F_p\mathbb{C})\}^S < 0, \quad Q_p\mathbb{B} = \mathbb{C}^T. \quad (6)$$

This result corresponds to the positive-real lemma (Boyd et al. [1994]) written for the system (3) connected in closed-loop with the static control law (4). Notice that while (5) is in general a hard non-convex problem, the inequalities for the passification problem happen to reduce to convex LMI conditions:

$$Q_p > 0, \quad \{Q_p\mathbb{A}\}^S + \mathbb{C}^T\{F_p\}^S\mathbb{C}, \quad Q_p\mathbb{B} = \mathbb{C}^T. \quad (7)$$

Moreover, the passification problem has the following important feature in terms of adaptive control (see for example Fradkov and Andrievsky [2007], Barkana [2007]):

Theorem 1. If there exists a solution to Problem 2, then, for any $\Gamma > 0$, the following adaptive control law

$$u(t) = K(t)y(t) + w(t), \quad \dot{K}(t) = -y(t)y^T(t)\Gamma \quad (8)$$

makes the closed-loop globally x -strictly passive.

The proof of the theorem is only sketched here, a detailed proof of a similar result is given in Section 4. Consider the Lyapunov function: $V(x, K) = x^T Q_p x + \text{Tr}((K - F_p)\Gamma^{-1}(K - F_p)^T)$ where F_p and Q_p are a solutions to (6). After several computations, the time-derivative of V along the trajectories of the closed-loop system is proved to satisfy: $\dot{V} = -\varepsilon x^T x + wz$ for some positive $\varepsilon > 0$. This proves x -strict passivity (passivity of the closed-loop and asymptotic convergence to zero of the systems state x).

This nowadays classical result is the core of adaptive control strategies, for example for adaptive stabilization of systems without knowledge of the \mathbb{A} , \mathbb{B} and \mathbb{C} matrices. We shall not detail these results. Let us rather focus our attention to the asymptotic behavior of the adapted gain K .

Theorem 2. If there exists a solution to Problem 2, then, for any $\Gamma > 0$, the adaptive control law (8) makes the closed-loop globally x -strictly passive and if there are no disturbances K converges asymptotically to a value F_s solution of the stabilization Problem 1.

Proof: The proof follows the reasoning developed in Ioannou and Sun [1996]. If $w = 0$ and there are no disturbances on the closed-loop system, the condition $\dot{V} = -\varepsilon x^T x < 0$ implies that $x \in L_2$. As $y = \mathbb{C}x$ it also follows that $y \in L_2$ is square integrable. Taking into account the expression (8) of \dot{K} , one gets that $K(t)$ is expressed in terms of the integral of the square of y . It therefore converges $K(t) \rightarrow K(\infty) = F$. At this stage ($x = 0, K = F$) is an equilibrium point proved to be asymptotically stable for the non-linear system with adaptive control. The first method of Lyapunov implies that the linearized system at the equilibrium point is asymptotically stable as well, that is $F = F_s$ is a solution to Problem 1. ■

The value F_s to which $K(t)$ converges is not unique. It depends on the initial conditions ($x(0), K(0)$). Stability of the system with adaptive control is hence a pointwise stability property (see Goebel [2011]) of the set $\{(0, F_s) / F_s \text{ verifies (5)}\}$. If Problem 2 has a solution then simulating the closed-loop system (3)-(8) gives asymptotically a solution to Problem 1. Assuming Problem 2 is feasible the simulation gives a solution to the matrix inequality constraints (5). This property is used in the following for solving general LMI problems by means of simulation. More precisely, it is used in the following special case of symmetric systems for which Problems 1 and 2 are equivalent.

Lemma 1. Assume \mathbb{A} is symmetric and $\mathbb{B} = \mathbb{C}^T$, then all symmetric solutions $F_s = F_s^T$ to Problem 1 are symmetric solutions $F_s = F_p = F_p^T$ to Problem 2.

Proof: For any symmetric matrix: $S < 0 \Leftrightarrow 2S = \{S\}^S < 0$. Applied to $S = \mathbb{A} + \mathbb{B}F_s\mathbb{C}$ this means that $Q_s = \mathbf{1}$ is a trivial solution to the constraint (5). Moreover, since $Q_s\mathbb{B} = \mathbb{B} = \mathbb{C}^T$, $Q_p = Q_s = \mathbf{1}$ is also solution to (6). ■

The property of Lemma 1 is essential. It paves the way for adaptive control based algorithms for solving the LMIs. Solutions of Problems 1 and 2 being the same, based on Theorem 2 these solutions may be obtained asymptotically by simulation.

3. LMIS ARE STRUCTURED PASSIFICATION PROBLEMS

This section shows that all LMIs can be seen as passivity problems, provided a structure property is added on the passifying

gain. Namely, finding a solution to an LMI problem is equivalent to finding a structured, passifying gain for a fictive LTI system. This result is first proved for a classical LMI example: computation of the H_∞ norm of an LTI system. Then, starting from the canonical LMI expression, it is shown that the same property holds for any LMIs.

3.1 Example of LMIs: the H_∞ norm computation

Consider the example of the H_∞ analysis problem of an LTI system defined by the state space matrices (A, B, C, D) , $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $C \in \mathbb{R}^{p,n}$ (see Boyd et al. [1994]): find P and γ^2 such that:

$$\begin{bmatrix} \{PA\}^S + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 \mathbf{1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, P = P^T > \mathbf{0}. \quad (9)$$

As any LMI problem it can be compacted into one inequality constraint :

$$\begin{bmatrix} \{PA\}^S + C^T C & PB + C^T D & \mathbf{0} \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} < \mathbf{0}, P = P^T. \quad (10)$$

It can further be decomposed in a sum with elementary matrix variables:

$$\mathbb{A} + \mathbb{C}_1^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P & \mathbf{0} \\ P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} \mathbb{C}_2 < \mathbf{0}, P = P^T \quad (11)$$

where $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$, $\mathbb{C}_1 = \begin{bmatrix} A & B & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, $\mathbb{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$.

Equivalently, by gathering all variables in a block-diagonal matrix one gets:

$$\mathbb{A} + \mathbb{C}^T F \mathbb{C} < \mathbf{0} \quad (12)$$

with $\mathbb{C} = [\mathbb{C}_1 \ \mathbb{C}_2]$, F block-diagonal $F = \text{diag}[F_1, F_2]$ and blocks F_1 and F_2 structured as follows:

$$F_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P & \mathbf{0} \\ P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P \end{bmatrix}, P = P^T, F_2 = -\gamma^2 \mathbf{1}. \quad (13)$$

Let $\mathbb{B} = \mathbb{C}^T$. The constraint (12) corresponds to the statement that $\mathbb{A} + \mathbb{B} F \mathbb{C}$ is symmetric and Hurwitz stable. The LMI problem is hence transformed into a stabilization problem. Moreover, due to Lemma 1, in the considered case of symmetric matrices, the stabilization problem is equivalent to the passification problem. Yet, remains the important issue of imposing a structure to F (constraints (13) for the considered H_∞ norm example). For the sake of handling this issue, the structure constraints (13) are re-written as follows:

$$U_i \text{vec}(F_i) = 0, \quad i \in \{1, 2\} \quad (14)$$

To illustrate how the U_i matrices can be constructed, consider the example of F_2 , with $m = 2$: $F_2 = \begin{bmatrix} f_{21} & f_{22} \\ f_{23} & f_{24} \end{bmatrix}$. Imposing that F_2 verifies the structure constraint $F_2 = -\gamma^2 \mathbf{1}$ amounts to choosing U_2 :

$$U_2 \text{vec}(F_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{21} \\ f_{23} \\ f_{22} \\ f_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

This imposes the off-diagonal elements to be zero (first two lines of U_2) and the two diagonal elements to be equal one to the other (third line). U_1 is constructed similarly.

3.2 Passification problems of canonical LMI representations

Proposition 1. Consider the canonical LMI problem:

$$L_0 + \sum_{j=1}^M \hat{x}_j L_j < \mathbf{0} \quad (16)$$

where $L_j = L_j^T$ and $\hat{x}_j \in \mathbb{R}$ are the scalar decision variables, $j = 1 \dots M$. Finding a solution \hat{x}_j to (16) is equivalent to finding a gain \hat{F} which strictly passifies a system $(\hat{\mathbb{A}} = \hat{\mathbb{A}}^T, \hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{B}}^T)$ and respects structure constraints of the type:

$$\begin{cases} \hat{F} = \text{diag}[\dots \hat{F}_j \dots] \\ \hat{U}_j \text{vec}(\hat{F}_j) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

that impose (among other constraints) the gain to be symmetric. The system matrices $(\hat{\mathbb{A}}, \hat{\mathbb{B}})$ are build based on L_0, L_j and the constraint matrices \hat{U}_j depend of the number of positive and negative eigenvalues of L_j .

Proof. The matrices L_j are symmetric, they can therefore be factorized as $L_j = \bar{N}_j^T \bar{H}_j \bar{N}_j$, where $\bar{H}_j = \text{diag}(\dots \lambda_k \dots)$ is diagonal and contains the non zero eigenvalues of L_j . Equivalently, taking $N_j = \text{diag}(\dots \sqrt{|\lambda_k|} \dots) \bar{N}_j$, one gets $L_j = N_j^T H_j N_j$ where H_j is diagonal with diagonal elements equal to either 1 or -1. Hence, (16) reads as:

$$L_0 + \sum_{j=1}^M N_j^T \hat{F}_j N_j = \hat{\mathbb{A}} + \sum_{j=1}^M \hat{\mathbb{C}}_j^T \hat{F}_j \hat{\mathbb{C}}_j < \mathbf{0} \quad (18)$$

where $\hat{\mathbb{A}} = L_0$, $\hat{\mathbb{C}}_j = N_j$ and

$$\hat{F}_j = \begin{bmatrix} \hat{x}_j \mathbf{1}_{r_{j1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\hat{x}_j \mathbf{1}_{r_{j2}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

depend of each individual variables x_j . r_{j1} and r_{j2} are respectively the number of positive and negative eigenvalues of matrices L_j . Similarly to the construction of U_2 in the previous example, the structure constraint (19) can be written as: $\hat{U}_j \text{vec}(\hat{F}_j) = 0$ where the constraint matrices \hat{U}_j depend on r_{j1} and r_{j2} . The end of the proof is based on Lemma 1. ■

A similar property can be formulated for LMI expressions containing matrix-valued variables.

Proposition 2. Consider the generic LMI problem:

$$\mathbb{A} + \sum_{i=1}^N \{R_i(G_i \otimes X_i)M_i\}^S + N_i^T(H_i \otimes X_i)N_i < \mathbf{0} \quad (20)$$

where X_i are matrix-valued decision variables and matrices G_i and H_i are invertible diagonal. Finding a solution to (20) is equivalent to finding a symmetric gain $F = F^T$ which strictly passifies the system $(\mathbb{A} = \mathbb{A}^T, \mathbb{B}, \mathbb{C} = \mathbb{B}^T)$ and respects structure constraints of the type:

$$\begin{cases} F = \text{diag}[\dots \hat{F}_i \dots] \\ U_i \text{vec}(F_i) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

that impose (among other constraints) the gain to be symmetric. The matrix \mathbb{B} depends only of the R_i, M_i, N_i matrices and the constraint matrices U_i are built out of G_i, H_i .

First note that the inequality in (11) enters the general formulation (20). The proof of the proposition follows the lines of the one given in the H_∞ example, where the variables are matrix valued. For conciseness reasons the proof is thus not reproduced here.

Remark 1. Note that (20) includes all possible LMI problems. Indeed, consider (18) which is equivalent to the canonical form (16). By taking $\mathbb{A} = L_0$, $N_i = N_j$, $H_i = \text{diag}[\mathbf{1}_{r_{j1}}, -\mathbf{1}_{r_{j2}}]$ and $X_i = \hat{x}_j$, $R_i = \mathbf{0}$, $M_i = \mathbf{0}$, $i = j = 1 \dots N$, one can see that (18) is included in the formulation (20).

In comparison with the canonical LMI form (16), the expression (20) where the variables can be matrix-valued allows to keep close to the original formulations encountered in control theory. This is the case in the H_∞ problem, illustrated previously, but also in any other case from Boyd et al. [1994]. The second advantage of the matrix-valued formulation (20) is that the related structured passification problem is of lower dimensions in terms of size of the gain F and number of constraints U_i .

To illustrate the influence of the chosen LMI formula on the size of the structured passification problem let us consider the H_∞ norm analysis problem. The fictive system and the structure constraint matrices are constructed based on the two representations of the LMIs applied to (10). Results are given in Table 1, where n and m are respectively the order and number of inputs of the system to be analysed and $M = n(n+1)/2 + 1$.

Table 1. Size of the passification problem

	Considered LMI representation	
	(11)	(16)
Nb. of outputs of the fictive system	$3n + m$	$\sum_{j=1}^M r_j$
Nb. of coefficients in F	$(3n)^2 + m^2$	$\sum_{j=1}^M r_j^2$
Nb. scalar constraints	$(3n)^2 - \frac{n(n+1)}{2} + m - 1$	$\sum_{j=1}^M (r_j^2 - 1)$

When considering the canonical LMI representation, the size of the associated passification problem depends on $r_j = \text{rank}(L_j)$. Although these ranks cannot be precisely estimated, some upper bounds can be evaluated. By looking at the initial LMI (10), one can see that diagonal coefficients of P appear three times, off-diagonal coefficients appear six times and γ appears m times. The corresponding ranks thus verify: $r_{p_{ii}} \leq 3$, $r_{p_{ij}} \leq 6$, $r_\gamma = m$. Examples show that these ranks are generally close to these upper bounds. Thus when starting from the compact matrix-valued form (11), much smaller passification problems are obtained. This is illustrated on a numerical example in Section 5.

4. STRUCTURED ADAPTIVE CONTROL

The previous section has shown that searching a solution to a given LMI problem is equivalent to searching a passifying, structured static output feedback gain for a system constructed based on the given LMI. Theorem 1 shows how adaptive control can be used for finding stabilizing gains, but the structure issue is not regarded. The structure constraints are of two types. First, the gains are block diagonal. To handle this constraint, a decentralized control law is considered, $u_i(t) = K_i(t)y_i(t)$, where the gains $K_i(t)$ are adapted independently. The gain $K = \text{diag}[\dots K_i \dots]$ thus satisfies at all times the diagonal constraint. Second, the gains should satisfy (21). A modified adaptive law is proposed in order to constrain the gains K_i to satisfy the constraints asymptotically. The constraints are not satisfied at all times but gains converge to values $F_i = K_i(\infty)$, satisfying (21).

Theorem 3. Assume $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$ and $\mathbb{B} = [\dots \mathbb{B}_i \dots] = \mathbb{C}^T$ then the following two conditions are equivalent:

i) There exists a decentralized static control $u_i(t) = F_i y_i(t)$ satisfying the structural constraints $U_i \text{vec}(F_i) = 0$ (which include symmetry constraints $F_i = F_i^T$) that stabilizes asymptotically the system

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \sum \mathbb{B}_i u_i(t), \quad y_i(t) = \mathbb{C}_i x(t). \quad (22)$$

ii) For any $\Gamma_i > 0$, $\alpha_i > 0$ the following adaptive control

$$\begin{aligned} u_i(t) &= K_i(t)y_i(t) \\ \dot{K}_i(t) &= -y_i(t)y_i^T(t)\Gamma_i - \alpha_i \cdot \text{mat}(U_i^T U_i \cdot \text{vec}(K_i(t)))\Gamma_i \end{aligned} \quad (23)$$

makes the closed-loop system globally asymptotically stable and the adaptive gains converge to constant values $F_i = K_i(\infty)$ solution to condition i).

Proof. First consider the implication i) \Rightarrow ii). It's proof is rather standard in adaptive control. The existence of a structured stabilizing static gain implies (see Lemma 1):

$$\mathbb{A} + \mathbb{B}F\mathbb{C} < -\epsilon \mathbf{1} < 0 \quad (24)$$

for some positive ϵ and where $F = \text{diag}[\dots F_i \dots]$. For that values F_i let the following Lyapunov function

$$V = \frac{1}{2} \left(x^T x + \sum_i \text{Tr}((K_i - F_i)\Gamma_i^{-1}(K_i - F_i)^T) \right)$$

The derivative of the Lyapunov function is such that

$$\dot{V} = \dot{x}^T x + \sum_i \text{Tr}(\dot{K}_i \Gamma_i^{-1} (K_i - F_i)^T)$$

which, when incorporating the dynamics of the system and those of the control system, reads as

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T \mathbb{A}^T x + y_i^T K_i^T \mathbb{B}_i^T x - \text{Tr}(y_i y_i^T (K_i - F_i)^T) \\ &\quad - \alpha_i \text{Tr}(\text{mat}(U_i^T U_i \cdot \text{vec}(K_i)) (K_i - F_i)^T). \end{aligned}$$

Equivalently (add and subtract $x^T \mathbb{C}^T F^T \mathbb{B} x = \sum_i y_i^T F_i^T \mathbb{B}_i^T x$) it gives:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T (\mathbb{A} + \mathbb{B}F\mathbb{C})^T x \\ &\quad + y_i^T (K_i - F_i)^T \mathbb{B}_i^T x - \text{Tr}(y_i y_i^T (K_i - F_i)^T) \\ &\quad - \alpha_i \text{Tr}(\text{mat}(U_i^T U_i \cdot \text{vec}(K_i)) (K_i - F_i)^T). \end{aligned}$$

Since $\mathbb{B}_i = \mathbb{C}_i^T$ one gets that $y_i^T (K_i - F_i)^T \mathbb{B}_i^T x = y_i^T (K_i - F_i)^T y_i$. Moreover, the following property holds:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(y_i y_i^T (K_i - F_i)^T) \\ = \text{Tr}(y_i^T (K_i - F_i)^T y_i) = y_i^T (K_i - F_i)^T y_i. \end{aligned}$$

Hence, two terms of the sum cancel by subtraction. Remains in the derivative of the Lyapunov function:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T (\mathbb{A} + \mathbb{B}F\mathbb{C})^T x \\ &\quad - \sum_i \alpha_i \text{Tr}(\text{mat}(U_i^T U_i \cdot \text{vec}(K_i)) (K_i - F_i)^T). \end{aligned}$$

The properties of the trace function also state that

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{mat}(U_i^T U_i \cdot \text{vec}(K_i)) (K_i - F_i)^T) \\ = (\text{vec}(K_i - F_i))^T U_i^T U_i \cdot \text{vec}(K_i) \end{aligned}$$

where $(\text{vec}(K_i - F_i))^T U_i^T = (U_i(\text{vec}(K_i) - \text{vec}(F_i)))^T = (U_i \cdot \text{vec}(K_i))^T$ because the matrices F_i are assumed to satisfy the structural constraints. Finally, one gets

$$\dot{V} \leq -\epsilon x^T x - \sum_i \alpha_i (U_i \cdot \text{vec}(K_i))^T (U_i \cdot \text{vec}(K_i)).$$

The first element of this sum is negative for all non zero x . The last term is strictly negative when $U_i \text{vec}(K_i) \neq 0$, that is, as long as the adaptive gains K_i do not satisfy the structure constraints. Hence, the Lyapunov function is strictly decreasing

until $x = 0$ and $U_i \text{vec}(K_i) = 0$. The state of the system thus converges to zero and the gains K_i to a set where the structure constraint is satisfied.

To prove that the gains converge to constant values inside these sets first recall (as for the proof of Theorem 2) that $x \in L_2$ and thus $y_i \in L_2$. Then, apply the vec operator to (23) and denote $\bar{K}_i = \text{vec}(K_i)$, $V_i = -\alpha_i(\Gamma_i \otimes \mathbf{1})U_i^T U_i$:

$$\dot{\bar{K}}_i(t) = V_i \bar{K}_i(t) - \text{vec}(y_i(t)y_i^T(t)\Gamma_i). \quad (25)$$

The general solution of this differential equation is:

$$\bar{K}_i(t) = e^{V_i t} \bar{K}_{i0} + \int_0^t e^{V_i(t-\tau)} \cdot \text{vec}(y_i(\tau)y_i^T(\tau)\Gamma_i) d\tau \quad (26)$$

where $V_i \leq 0$ and $y_i \in L_2$. Therefore, the first term, as well as the integral in this expression converge as $t \rightarrow \infty$. We thus have $\bar{K}_i \rightarrow \bar{K}_i(\infty) = F_i$ a constant, included in the set such that $U_i \text{vec}(K_i(\infty)) = 0$. Applying first method of Lyapunov as in the proof of Theorem 2, the control gain F is proved to stabilize the system.

The proof of the implication $i) \Rightarrow ii)$ follows directly: if the adaptive controller converges to a stabilizing value $F = K(\infty)$ which respects the structure constraints, it is clear that such a value exists. ■

Theorem 3 applies to the stabilization/passification problems build out of the generic LMI constraints. Hence, finding a solution to the LMIs can be done by simulating the corresponding systems with adaptive control. This feature is illustrated in the next section on a simple example.

5. NUMERICAL EXAMPLE

Consider the stable system: $H(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+s+2}$. We aim at using the results presented in the previous sections in order to compute its H_∞ norm, or at least some upper bound on it. The exact value of the norm computed in Matlab with the `norm` function is $\|H\|_\infty = \gamma_{opt} = 1.3251$.

The problem amounts to solving LMIs (10). Based on the state-space representation of $H(s) - (A, B, C, D)$, the fictive system $(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} = \mathbb{B}^T)$ is constructed, as shown in Section 3.1. Theorem 3 states that by applying the adaptive control law (23) a solution to the LMI is given by the values of the adaptive gains, once they have converged.

As discussed, in the considered case, the adaptive control is decentralized, composed of two gains. $u_1 = K_1 y_1$ is adapted and converges to a static gain F_1 solution to the constraints (13). $u_2 = K_2 y_2$ is adapted and converges to $F_2 = -\gamma^2 \mathbf{1}$. The following parameters are chosen for the adaptation law: $\Gamma_1 = 1000 \cdot \mathbf{1}_6$, $\Gamma_2 = 10$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Time responses of the simulations starting from the initial conditions $x = (1 \dots 1)$, $K_i = \mathbf{0}$ are given in the following figures. The simulation is done using Simulink. Convergence of control gains is obtained after 1000 seconds of simulation time. The actual computation time is approximately 30 seconds on a personal computer. In comparison, solving this same LMI problem with SeDuMi solver Sturm [1999] takes less than 2 seconds.

Figure 1 illustrates the stability of the system. All outputs y_i converge to zero. The left-hand side figure plots the outputs $y_1 \in \mathbb{R}^6$ involved in the control $u_1 = K_1 y_1$. The right-hand side figure plots the scalar output y_2 .

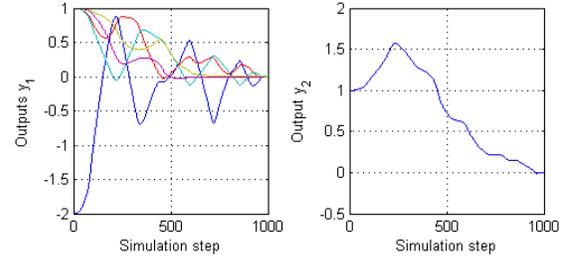


Fig. 1. System outputs

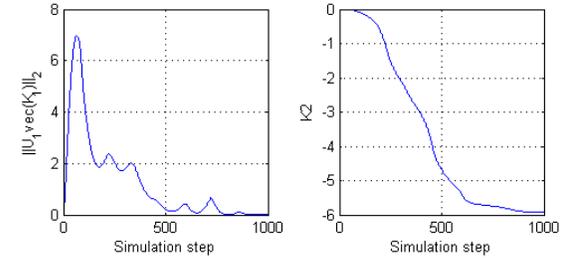


Fig. 2. Controller gains evolution

Figure 2 (left-hand side) is the time history of the norm of $U_1 \text{vec}(K_1)$. It shows that the gain K_1 indeed converges to a value such that the structure constraint is satisfied. At simulation time $t = 1000$ the value is:

$$K_1(1000) = F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4.01 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.96 & 10.8 & 0 & 0 \\ 4.01 & 0.96 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.96 & 7.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.01 & -0.96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.96 & -7.25 \end{bmatrix}$$

Figure 2 (right-hand side) shows the time history of the gain K_2 . It also converges and $K_2(1000) = F_2 = -5.9263 = -\gamma^2$. (P, γ) solution to LMI (10) are thus directly obtained from F_1 and F_2 . The numerical values are:

$$P = \begin{bmatrix} 4.0062 & 0.9584 \\ 0.9584 & 7.2525 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 2.4344 \quad (27)$$

P is indeed symmetric positive definite. Its eigenvalues are $\{3.7443, 7.5143\}$. Moreover, the pair (P, γ) is indeed a solution to the LMI (10). The eigenvalues of the associated matrix are all negative: $\{-9.7975, -0.7571, -3.3010, -3.7443, -7.5143\}$.

Figure 3 illustrates the time histories of the coefficients $K_{1,13}, K_{1,14}, K_{1,23}, K_{1,24}$ which converge to the coefficients $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$. It is interesting to notice that the symmetry constraint $P = P^T$ is satisfied quite fast and not only in steady-state.

It has thus been shown that it is possible in practice to solve an LMI problem through adaptive control simulations when this LMI is feasible. The theory exposed upper also states that if the LMI is not feasible the adaptive law shall not converge.

To illustrate this feature the adaptive law is tested for several, fixed, values of γ . Results are shown in Figure 4: as one would expect, the system converges for all values $\gamma > 1.3251$ ($-\gamma^2 < -1.7559$, represented by the horizontal line) and goes into unstable oscillatory behavior if $\gamma < 1.3251$. When $\gamma > 1.3251$ but close to this limit, the convergence is rather slow which is not surprising since the system is close to be unstable.

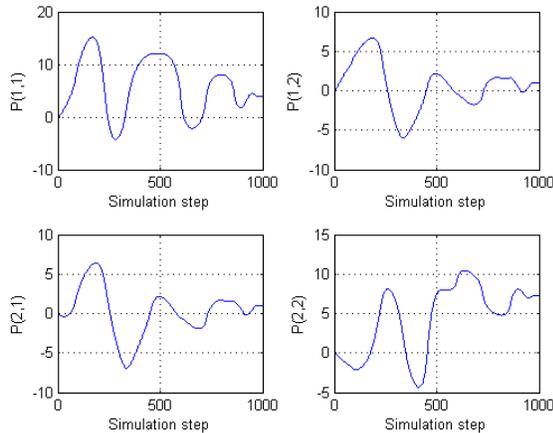


Fig. 3. Evolution of matrix P

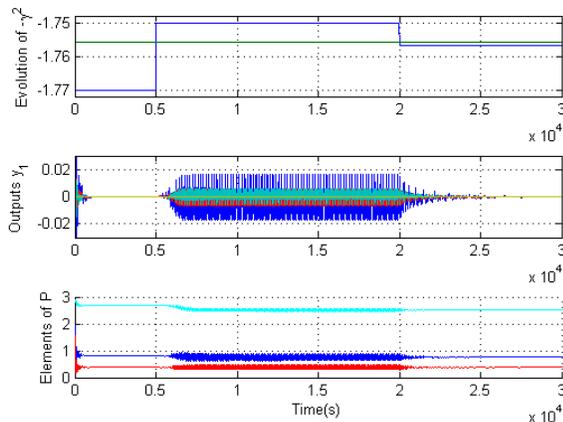


Fig. 4. System response to variation of K_2

Finally, the size of the adaptive problem associated to the numerical example is considered. Matrices L_j corresponding to the canonical representation (16) of the H_∞ LMI (10) are obtained by using the YALMIP *getbase* function (see Löfberg [2001]). The ranks r_j are found to be: $r_1 = 3$, $r_2 = 5$, $r_3 = 3$, $r_4 = 1$. The dimensions of the associated adaptive problems, when considering the representations (11) and (16) respectively, can thus be computed and are given in Table 2. As expected, the matrix-valued variables representation yields a smaller adaptive problem and this confirms its interest.

Table 2. Numerical example - dimensions of the related adaptive control problem

	Considered LMI representation	
	(11)	(16)
Nb. of outputs of the fictive system	7	12
Nb. of coefficients in F	37	45
Nb. scalar constraints	33	40

6. CONCLUSIONS

A new methodology is exposed for solving LMI feasibility problems. It is based on adaptive control methods. Feasible solutions are obtained by simulation (continuous-time algorithm). The methodology is applied successfully on a simple numerical

example. In comparison with existing LMI solvers, the computation time is rather long. More numerical tests will be done in the near future to establish a precise evaluation of the numerical properties. Future work will also be devoted to extending the method to optimization problems under LMI constraints.

REFERENCES

- I. Barkana. Simple adaptive control - a stable direct model reference adaptive control methodology - brief survey. In *IFAC - ALCOSP 2007*, Saint Petersburg, Russia, August 29-31 2007.
- I. Barkana, M.C.M. Teixeira, and L. Hsu. Mitigation of symmetry condition in positive realness for adaptive control. *Automatica*, 42(9):1611–1616, September 2006.
- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- R.W. Brockett. Dynamical systems that sort lists, diagonalize matrices, and solve linear programming problems. *Linear Algebra and its Applications*, 146:79–91, 1991.
- L. El Ghaoui and S.-I. Niculescu, editors. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphia, 2000.
- A.L. Fradkov. Passification of non-square linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov lemma. *European J. of Control*, 6:573–582, 2003.
- A.L. Fradkov and B. Andrievsky. Passification-based adaptive control with implicit reference model. In *IFAC - ALCOSP*, St. Petersburg, August 2007.
- P. Gahinet and A. Nemirovskii. LMILab: a package for manipulating and solving LMIs, 1993. A computer software.
- R. Goebel. Set-valued lyapunov functions for difference inclusions. *Automatica*, 47(1):127–132, January 2011.
- U. Helmke and J.B. Moore. *Optimization and Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- L. Hsu, M.C.M. Teixeira, R.R. Costa, and E. Assunção. Necessary and sufficient condition for generalized passivity, passification and application to multivariable adaptive systems. In *IFAC World Congress*, Milano, 2011.
- P. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc, 1996.
- H. Kaufman, I. Barkana, and K. Sobel. *Direct adaptive control algorithms*. Springer, New York, 1994.
- J. Löfberg. YALMIP: Yet Another LMI Parser, August 2001. URL: www.control.isy.liu.se/~johanl/yalmip.html.
- D. Peaucelle and A.L. Fradkov. Robust adaptive L_2 -gain control of polytopic MIMO LTI systems - LMI results. *Systems & Control Letters*, 57(11):881–887, 2008.
- D. Peaucelle, B. Andrievsky, V. Mahout, and A. Fradkov. Robust simple adaptive control with relaxed passivity and PID control of a helicopter benchmark. In *IFAC World Congress*, 2011.
- C.W. Scherer. Lmi relaxations in robust control. *European J. of Control*, 12:3–29, 2006.
- Y.I. Son and J.H. Seo. Passivity-based robust control of non-square linear systems using a parallel feedforward compensator. In *American Control Conference*, pages 3902–3907, Anchorage, July 2002.
- J.F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625–653, 1999. URL sedumi.mcmaster.ca.

Annexe B

Valeurs numériques associées à l'application au satellite Picard

Définition du système en boucle ouverte

Fonctions de transferts des filtres stabilisants :

$$\begin{aligned}H_{\text{filtre},x}(s) &= \frac{2.191s^4 + 46.26s^3 + 71.63s^2 + 21.15s + 0.3369}{s^4 + 12.22s^3 + 37.68s^2 + 7.79s} \\H_{\text{filtre},y}(s) &= \frac{1.677s^4 + 35.41s^3 + 54.83s^2 + 16.19s + 0.258}{s^4 + 12.22s^3 + 37.68s^2 + 7.79s} \\H_{\text{filtre},z}(s) &= \frac{2.815s^4 + 59.44s^3 + 92.04s^2 + 27.18s + 0.4324}{s^4 + 12.22s^3 + 37.68s^2 + 7.79s}\end{aligned}\tag{B.1}$$

Moment d'inertie du satellite Picard :

$$J = \begin{pmatrix} 16.14 & -2.16 & 0.57 \\ -2.16 & 13.74 & -0.27 \\ 0.57 & -0.27 & 21 \end{pmatrix}\tag{B.2}$$

Commande adaptative - calcul des domaines de variation des gains

Résultats de l'application de la procédure LMI sur le modèle satellite 3 axes

Matrices $G_i \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$, $i = 1 \dots 6$:

$$\begin{aligned}G_1(1,1) &= 0.6928 & G_3(2,3) &= 0.7815 & G_5(3,5) &= 1.2264 \\G_2(1,2) &= -5.7438 & G_4(2,4) &= -4.1453 & G_6(3,6) &= -11.9031\end{aligned}\tag{B.3}$$

Les autres éléments de ces matrices sont égaux à zéro.

Matrices D_i :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{pmatrix} \mathbf{17.5238} & -11.4855 & 4.0777 \\ -11.4855 & 454.2698 & -5.7502 \\ 4.0777 & -5.7502 & 773.3354 \end{pmatrix} & D_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0.0307} & -0.0140 & 0.0035 \\ -0.0140 & 2.0147 & -0.0228 \\ 0.0035 & -0.0228 & 2.3099 \end{pmatrix} \cdot 10^4 \\
D_3 &= \begin{pmatrix} 434.8597 & -7.0461 & 24.7977 \\ -7.0461 & \mathbf{18.9344} & -2.9632 \\ 24.7977 & -2.9632 & 775.8908 \end{pmatrix} & D_4 &= \begin{pmatrix} 1.9370 & -0.0215 & 0.0285 \\ -0.0215 & \mathbf{0.0369} & -0.0024 \\ 0.0285 & -0.0024 & 2.3177 \end{pmatrix} \cdot 10^4 \\
D_5 &= \begin{pmatrix} 437.7795 & -171.3567 & 1.4626 \\ -171.3567 & 500.4376 & -1.0040 \\ 1.4626 & -1.0040 & \mathbf{28.2000} \end{pmatrix} & D_6 &= \begin{pmatrix} 2.0106 & -0.1266 & 0.0055 \\ -0.1266 & 2.0568 & -0.0056 \\ 0.0055 & -0.0056 & \mathbf{0.0448} \end{pmatrix} \cdot 10^4
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Scalars α_i :

$$\alpha_1 = 0.1556 \quad \alpha_2 = 1.7062 \quad \alpha_3 = 0.1719 \quad \alpha_4 = 1.8646 \quad \alpha_5 = 0.2648 \quad \alpha_6 = 9.5527 \tag{B.5}$$

Résultats de l'application de la procédure LMI sur les modèles satellite 1 axe

Matrices $G_{\theta,j} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $G_{\omega,j} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $j \in \{x, y, z\}$:

$$\begin{aligned}
G_{\theta,x} &= [1.2612 \ 0] & G_{\theta,y} &= [1.3829 \ 0] & G_{\theta,z} &= [1.3182 \ 0] \\
G_{\omega,x} &= [0 \ -49.2774] & G_{\omega,y} &= [0 \ -57.6554] & G_{\omega,z} &= [0 \ -51.9382]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Scalars $D_{\theta,j}$, $D_{\omega,j}$:

$$\begin{aligned}
D_{\theta,x} &= 47.0681 & D_{\theta,y} &= 54.0950 & D_{\theta,z} &= 49.3184 \\
D_{\omega,x} &= 428.3119 & D_{\omega,y} &= 498.9157 & D_{\omega,z} &= 517.0314
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Scalars α_i :

$$\begin{aligned}
\alpha_{\theta,x} &= 0.4394 & \alpha_{\theta,y} &= 0.5013 & \alpha_{\theta,z} &= 0.4629 \\
\alpha_{\omega,x} &= 59.398 & \alpha_{\omega,y} &= 63.5323 & \alpha_{\omega,z} &= 63.1971
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Lois adaptatives pour le satellite Picard - valeurs numériques

TABLE B.1 – Valeurs numériques des paramètres définissant la loi adaptative 1

	g_θ	g_θ	σ_θ	σ_ω	ρ_θ	$g_{\omega r}$	γ_θ	γ_ω
axe x	1.2612	-49.2774	0.0129	$2.171 \cdot 10^{-4}$	1000	0	1.59	81.2
axe y	1.3829	-57.6554	0.0352	$2.543 \cdot 10^{-4}$	400	0	1.45	69.4
axe z	1.3182	-51.9382	0.0135	$2.29 \cdot 10^{-4}$	1000	0	0.38	77

TABLE B.2 – Valeurs numériques des paramètres définissant la loi adaptative 2

	g_θ	g_θ	σ_θ	σ_ω	ρ_θ	$g_{\omega r}$	γ_θ	γ_ω
axe x	1.2612	-49.2774	0.0638	$6.38 \cdot 10^{-4}$	200	$4.98 \cdot 10^{-8}$	1.59	81.2
axe y	1.3829	-57.6554	0.106	$1.52 \cdot 10^{-3}$	130	$7.87 \cdot 10^{-8}$	1.45	69.4
axe z	1.3182	-51.9382	0.0513	$6.84 \cdot 10^{-4}$	260	$3.85 \cdot 10^{-4}$	0.38	77

Annexe C

Résultats complémentaires de simulation

Transition MGT/MNO

Afin de valider la transition MGT/MNO, une simulation de 60000 secondes avec une transition en mode MNO à 36000 secondes est effectuée, avec la loi adaptative 1. Les réponses obtenues pour ce cas de simulation

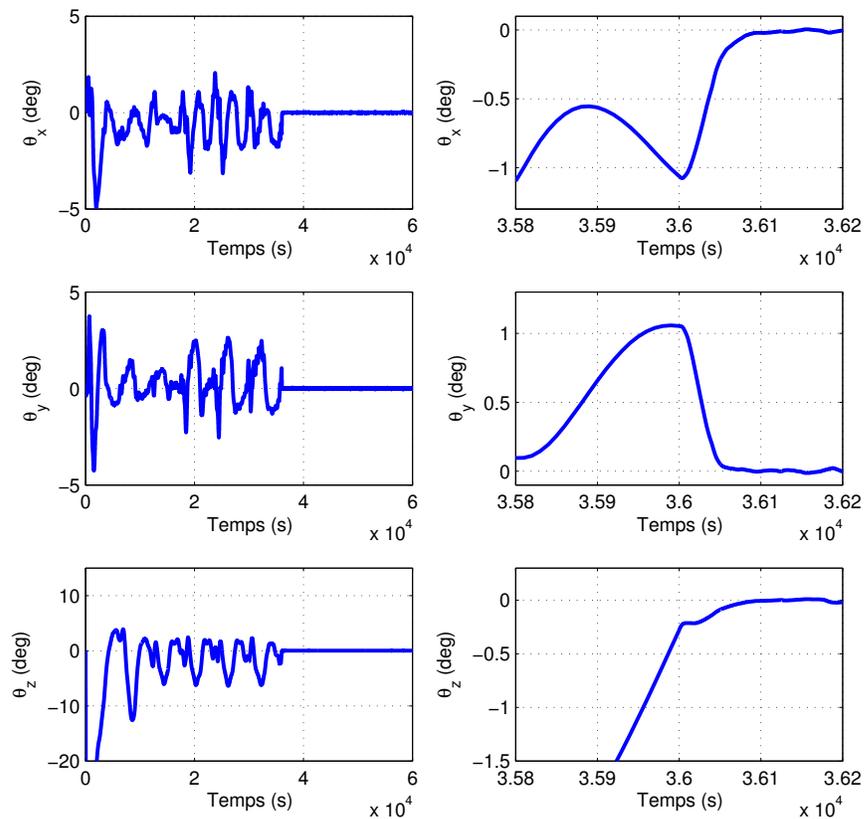


FIGURE C.1 – Transition MGT/MNO - position angulaire du satellite - à droite zoom sur l'entrée en mode MNO

sont représentées dans les Figures C.1 - C.4. L'évolution de la position et de la vitesse angulaire du satellite est montrée sur les Figures C.1 et C.2. On observe ainsi que suite au passage en mode MNO ($t = 36000$ s), la position angulaire du satellite converge vers la valeur désirée et que la vitesse angulaire se stabilise également, les temps de convergence étant de 50-100 secondes. Lors du passage en mode MNO les gains K_θ et K_ω sont initialisés avec leurs valeurs minimales (autour de $4 \cdot 10^{-3}$) et maximales (autour de 1.5) respectivement, et convergent ensuite vers leurs valeurs nominales respectives, comme on peut l'observer sur la Figure C.3. Ces valeurs sont gardées ensuite en régime stationnaire, ce qui assure le maintien des propriétés de rejet de perturbations.

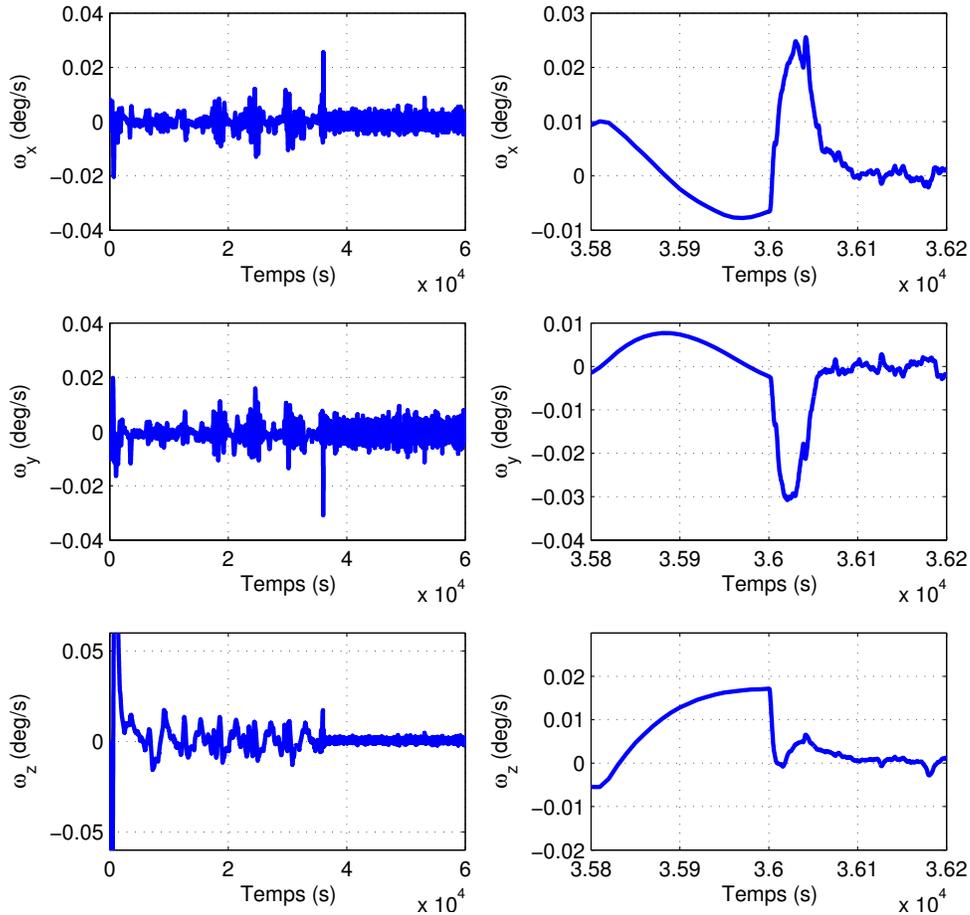


FIGURE C.2 – Transition MGT/MNO - vitesse angulaire du satellite - à droite zoom sur l'entrée en mode MNO

La Figure C.4 montre l'évolution des vitesses angulaires des roues à réaction. On observe sur cette figure que, suite au passage en mode MNO, un pic d'amplitude réduite apparaît au niveau des actionneurs qui commandent les axes x et y . Après cet effort initial de commande, nécessaire pour que le satellite rejoigne sa position d'équilibre, les vitesses des roues à réaction évoluent de manière périodique, compensant les perturbations extérieures. Au niveau de l'axe z , on observe que l'entrée se fait avec une vitesse initiale de 200 rad/s, valeur qui correspond au fonctionnement en mode MGT. Suite au passage en mode MNO, la vitesse de

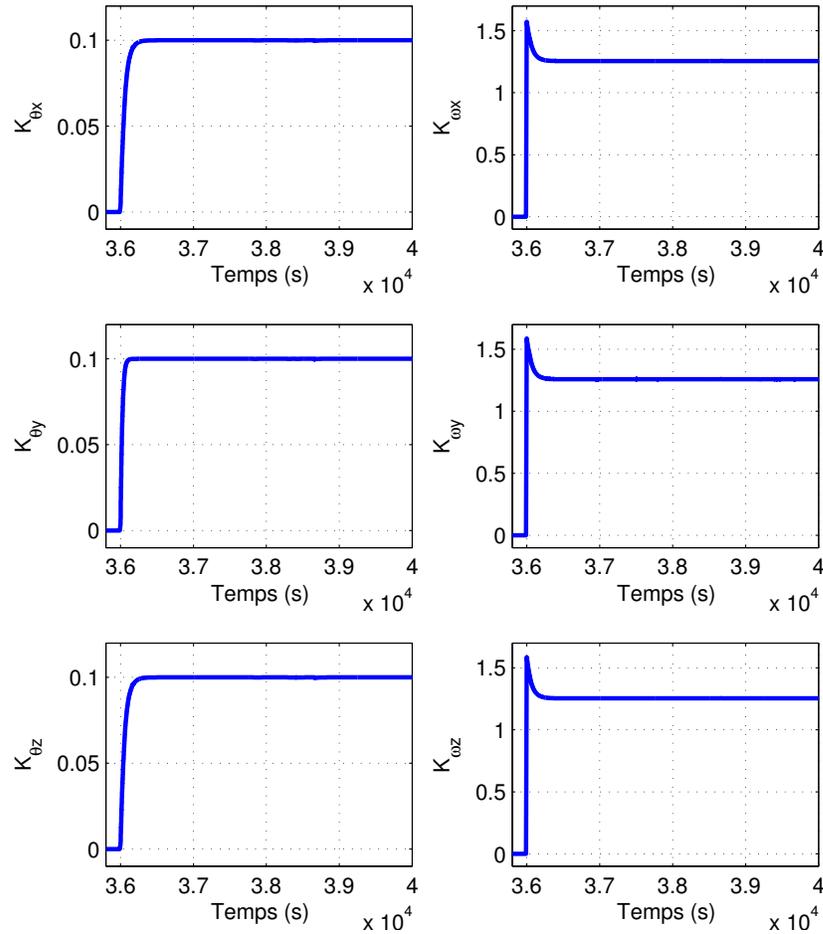


FIGURE C.3 – Transition MGT/MNO - gains adaptatifs en position et vitesse

la roue à réaction est ramenée, à l'aide des magnéto-coupleurs autour de zéro. Un pic de commande de faible amplitude est également visible sur l'axe z lors de l'entrée au mode MNO, mais, tout comme sur les axes x et y , les vitesses de rotation des actionneurs sont loin des valeurs de saturation. En régime stationnaire, ces vitesses sont comprises entre -30 et 30 rad/s.

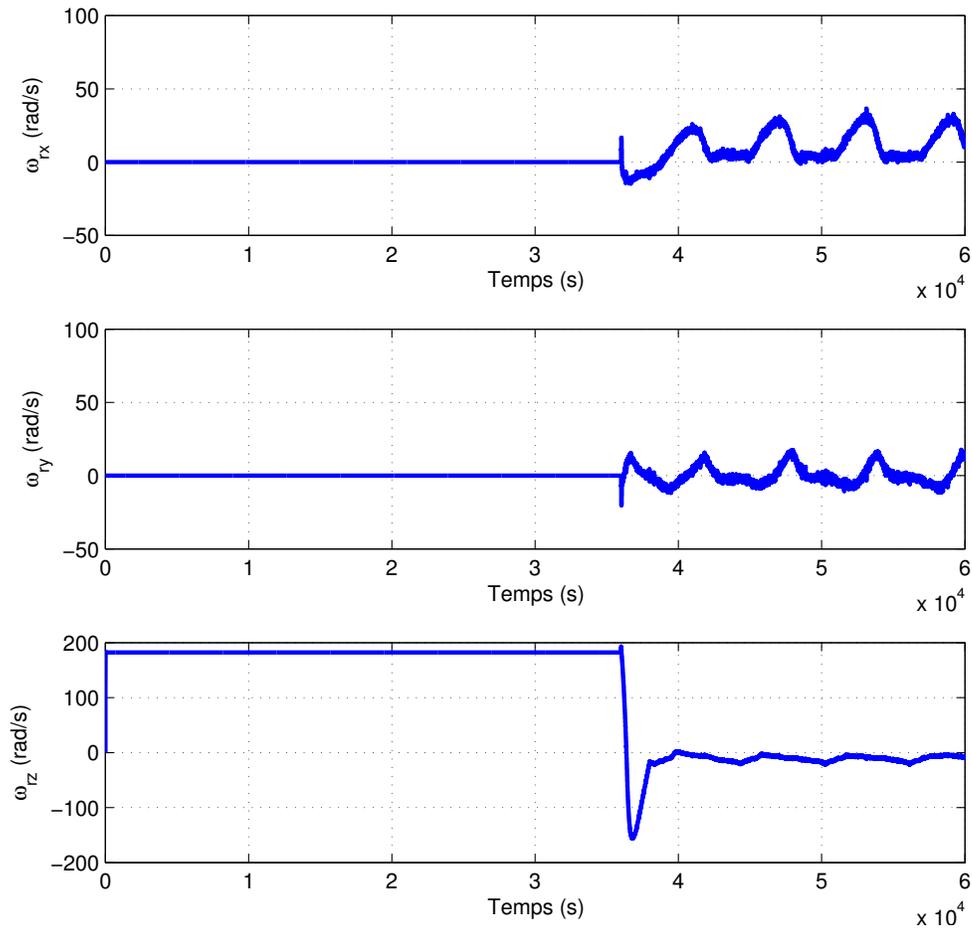


FIGURE C.4 – Transition MGT/MNO - vitesses de rotation des roues à réaction

Réponse à un trou de mesure de longue durée

Ce scénario de simulation vise à vérifier le comportement de la loi adaptative 2 dans le cas d'une absence de mesure stellaire de 100 secondes, ainsi que le comportement en régime stationnaire, lorsque les vitesses des roues à réaction sont asservies à ± 140 rad/s. Dans cette simulation effectuée sur 36000 secondes, le trou de mesures est introduit sur à $t = 5000$ s.

L'évolution de l'attitude du satellite ainsi que des gains adaptatifs en position et des vitesses roues au cours de cette simulation sont représentées sur les Figures C.5 - C.7. La Figure C.5 montre que la position du satellite reste proche de zéro tout le long de cette simulation, le seul dépointage significatif pouvant être observée entre $t = 5000$ et $t = 5100$ s. Comme pendant cette période la mesure du capteur stellaire n'est pas valide, la commande appliquée est nulle. Cet aspect peut être observé à droite de la Figure C.7, où l'on voit que les vitesses des roues à réaction restent constantes entre $t = 5000$ et $t = 5100$ s, le couple de commande

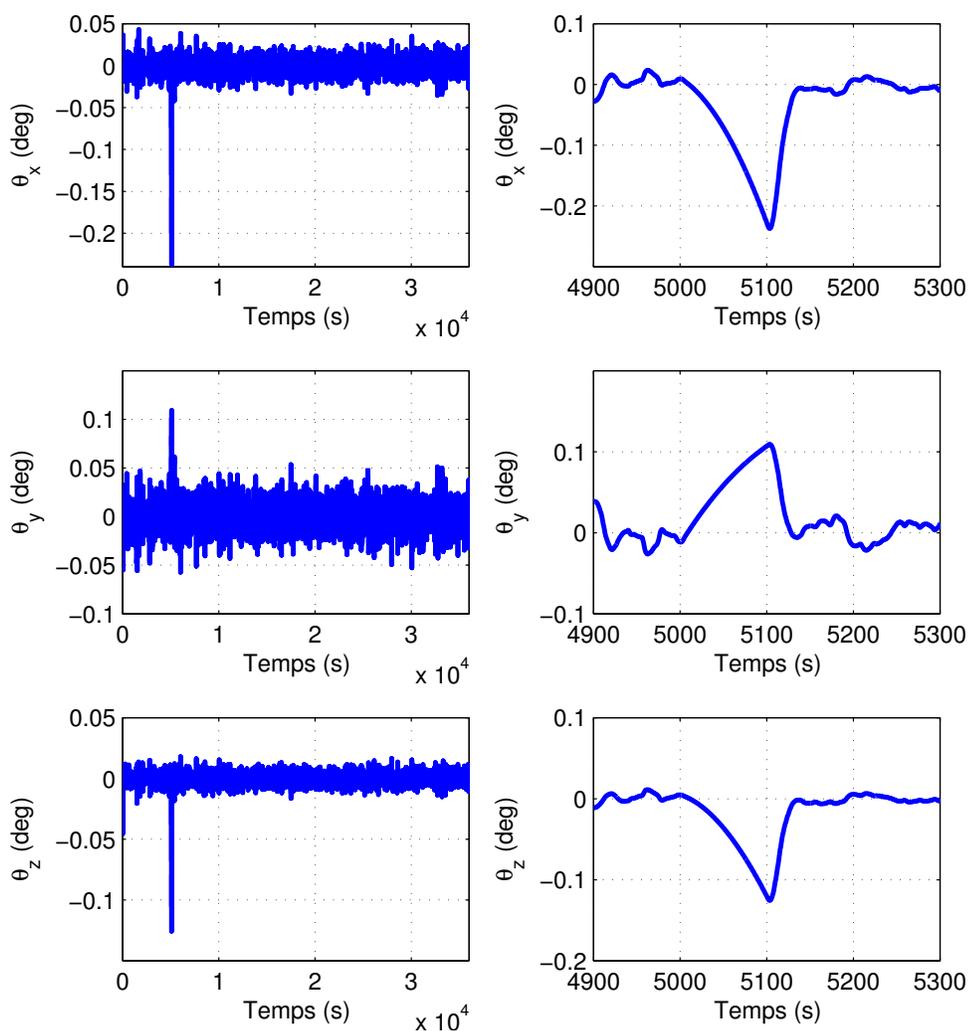


FIGURE C.5 – Réponse à un trou de mesure - positions angulaire du satellite

étant donc nul. Le satellite s'éloigne ainsi de sa position de consigne, sous l'effet des couples perturbateurs. A $t = 5100s$, lorsque le capteur fournit des mesures valides, le satellite est à nouveau commandé et le dépointage retourne vers zéro.

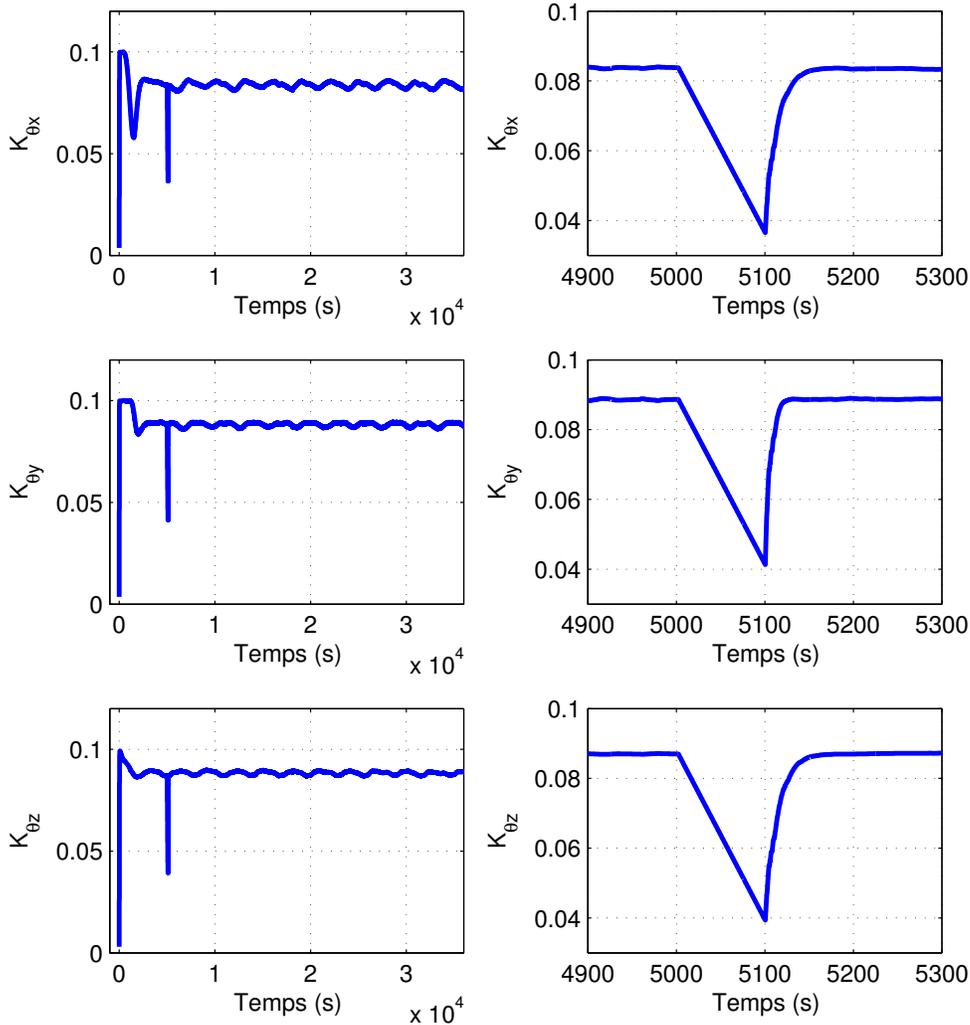


FIGURE C.6 – Réponse à un trou de mesure - gains adaptatifs en position

A droite de la Figure C.6 on peut observer l'évolution des gains en position pendant la période d'indisponibilité de mesure : comme spécifié dans la Section 5.6.1.2, ils évoluent avec une vitesse constante vers leurs valeurs minimales respectives. Pour le réglage présenté ici, le temps de retour à la valeur minimale (≈ 0.003) en partant de la valeur nominale (0.1) est fixé à 200 secondes. En 100 secondes, le gain varie ainsi, pour le cas d'une absence de mesure, d'approximativement 0.05. A $t = 5100s$, lorsque la politique nominale est réactivé, les gains commencent à augmenter, car les valeurs des dépointages sont faibles. Cependant, en régime stationnaire, les gains ne retrouvent pas leurs valeurs nominales, mais sont inférieurs à celles-ci. Ce comportement est celui attendu, compte tenu de l'expression de la loi d'adaptation utilisée ici. Ainsi, comme nous pouvons le voir à gauche de la Figure C.6, les gains en position suivent en régime stationnaire l'évolution

des vitesses des roues à réaction. En particulier, une baisse importante peut être observée pour K_{θ_x} lorsque, en début de réponse, la vitesse ω_{rx} atteint des valeurs proches de 250 rad/s. Cependant, les gains restent supérieurs à 0.05, pour ce cas de simulation où les vitesses roues sont inférieures à 250 rad/s en valeur absolue. La limite spécifiée par le réglage présenté dans la Section 5.6.2, est ainsi respectée.

Concernant l'évolution en régime stationnaire, on observe sur la Figure C.5 que le dépointage reste inférieur à 0.05 degrés sur chaque axe, le critère de validation à ce niveau étant donc respecté. Ainsi, avec le réglage proposé, l'ajout de l'adaptation en fonction des vitesses des roues à réaction ne nuit pas aux performances, en termes de rejet de perturbation, de la loi de commande.

Remarquons finalement que l'augmentation en début de réponse des vitesses des roues à réaction n'est pas due à la loi de commande adaptative, mais à l'asservissement, à l'aide des magnéto-coupleurs, des vitesses roues à 140 rad/s à partir des valeurs initiales nulles.

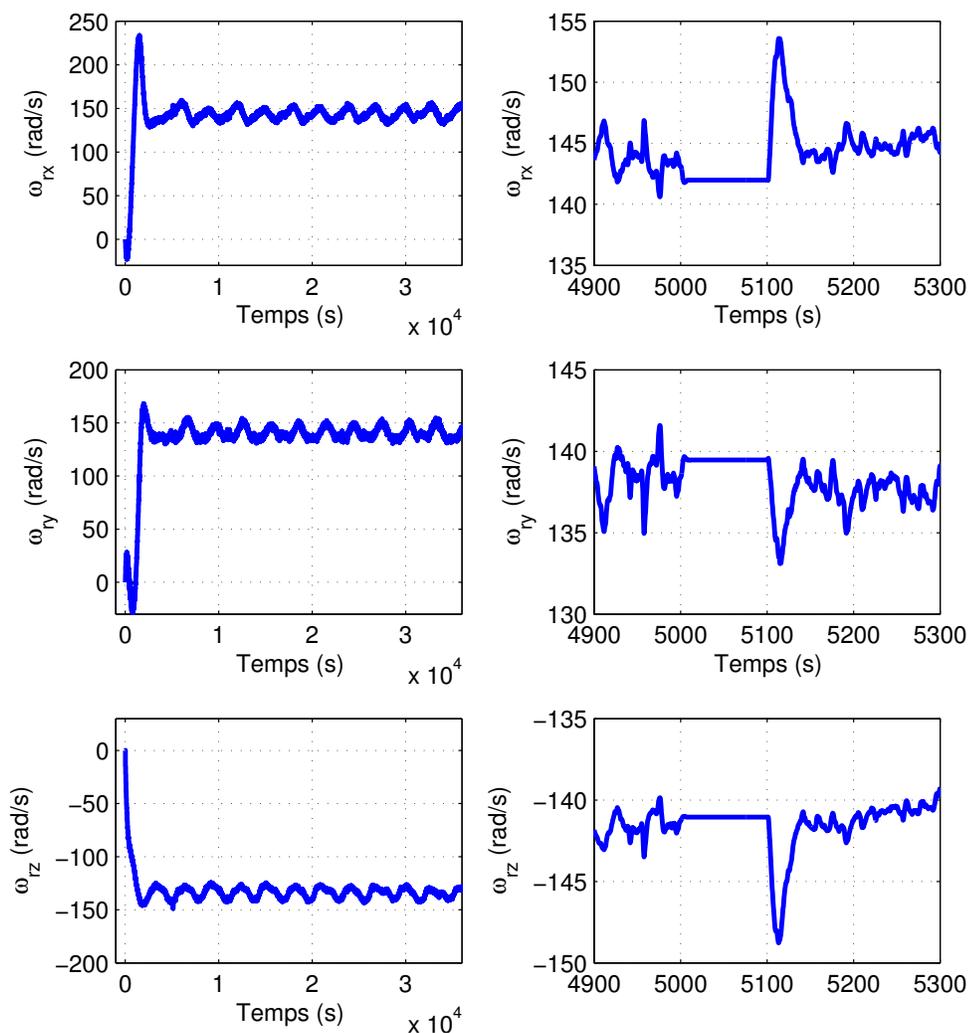


FIGURE C.7 – Réponse à un trou de mesure - vitesses de rotation des roues à réaction

Influence de la perte de mesure sur la commande

La figure C.8 illustre l'apparition de variations au niveau du couple généré par les roues à réaction suite aux périodes de courte durée où le capteur stellaire ne délivre pas de mesure valide. En haut de la figure on montre l'évolution de la disponibilité de mesure, pour le cas de simulation considéré dans la Section 5.6.2.1.1, page 162. La vitesse vraie du satellite sur l'axe z , ainsi que celle estimée peuvent être observées au milieu de cette figure, tandis que le couple généré par la roue à réaction associée à cet axe est montré sur la dernière planche.

On peut observer sur cette figure que dans la première partie de la réponse, lorsque la mesure est valide, le couple de commande est proche de zéro. Le premier pic apparaît à $t \approx 340$ s, suite aux périodes d'indisponibi-

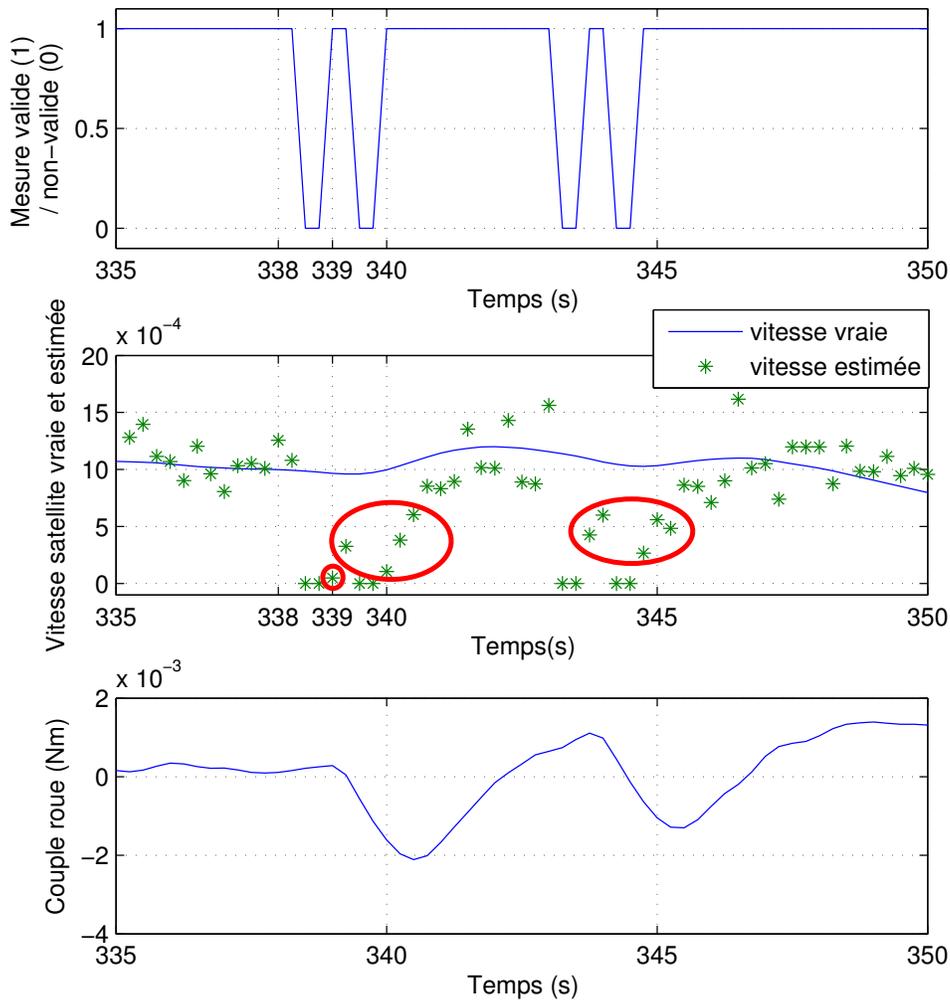


FIGURE C.8 – Apparition des perturbations sur la commande suite à la non-disponibilité de la mesure

lité de mesure entre $t = 338\text{s}$ et $t = 340\text{s}$. Pendant ces périodes, la vitesse estimée du satellite est réinitialisée à zéro et la commande en sortie du correcteur est constante, égale à la dernière valeur calculée avec une mesure valide. Lorsque le capteur stellaire fournit à nouveau des mesures valides d'attitude, l'estimateur de vitesse est réactivé et la commande recommence à être calculée. Cependant, des vitesses estimées assez éloignées de la valeur vraie – points encerclés en rouge sur la Figure C.8 – sont utilisées dans le calcul de la commande. Ces mesures sont perçues comme des perturbations au niveau de la vitesse : celle-ci est vue par le correcteur comme ayant des valeurs faibles, et donc un couple important est appliqué afin d'accélérer le satellite. Des pics de commande comme ceux apparaissant à $t \approx 340\text{s}$ et $t \approx 345\text{s}$ sont ainsi présents tout au long de la réponse.

Ce comportement indésirable pourrait être évité en gardant, pendant les courtes périodes sans disponibilité de mesure, les vitesses estimées calculées avec les dernières mesures valides. Ainsi, lorsque le capteur fournit à nouveau des mesures, on utilisera la dernière vitesse estimée valide, au lieu des estimées éloignées mises en évidence sur la Figure C.8. Cet aspect n'étant pas directement lié à l'implémentation des lois de commande adaptative, les modifications de logiciel de vol à ce niveau n'ont pas été considérées au cours de notre étude.

Bibliographie

- Allain, D. et O. Monaret, 2005 : Dossier de description de simulateur. Description du simulateur Demeter. Ref RSO/037.07.04/L2/DDS_DMT. CNES.
- Anderson, B. D. O., 1982 : Exponential convergence and persistent excitation. *Proceedings of the IEEE CDC*, 12–17, doi :10.1109/CDC.1982.268393.
- Andry, A., E. Shapiro, et J. C. Chung, 1983 : Eigenstructure assignment for linear systems. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, **AES-19 (5)**, 711–729, doi :10.1109/TAES.1983.309373.
- Apkarian, P. et R. Adams, 1998 : Advanced gain scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **6 (1)**, 21–32.
- Apkarian, P. et J.-M. Biannic, 1995 : Self-scheduled H_∞ control of missiles via Linear Matrix Inequalities. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, **18 (3)**, 532–538.
- Apkarian, P. et P. Gahinet, 1995 : A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers. *IEEE Trans. on Automat. Control*, **40 (5)**, 853–864.
- Apkarian, P., P. Gahinet, et G. Becker, 1995 : Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems : a design example. *Automatica*, **31 (9)**, 1251 – 1261, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(95\)00038-X](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(95)00038-X).
- Apkarian, P. et D. Noll, 2006 : Nonsmooth H_∞ Synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **51 (1)**, 71–86.
- Arzelier, D., G. Deaconu, S. Gumussoy, et D. Henrion, 2011 : H_2 for HIFOO. *International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications*, Ankara, Turkey.
- Åström, K., 1983 : Analysis of rohfs counterexamples to adaptive control. *Proceedings of the IEEE CDC*, 982–987, doi :10.1109/CDC.1983.269671.
- Åström, K., 1984 : Interactions between excitation and unmodeled dynamics in adaptive control. *Proceedings of the IEEE CDC*, 1276–1281, doi :10.1109/CDC.1984.272226.
- Åström, K. et B. Wittenmark, 1973 : On self tuning regulators. *Automatica*, **9 (2)**, 185 – 199, doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(73\)90073-3](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(73)90073-3).
- Åström, K. et B. Wittenmark, 1989 : *Adaptive Control*. Addison-Wesley.

- Balas, G., R. Chiang, A. Packard, et M. Safonov, 2006 : *Robust Control Toolbox – For Use With MATLAB*. Natick, MA, The Mathworks, Inc.
- Barkana, I., 1989 : *Control and Dynamic Systems - Vol. 31*, chap. Absolute Stability and Robust Discrete Adaptive Control of Multivariable Systems, 157–183. Academic Press.
- Barkana, I., 1991a : Positive realness in multivariable continuous-time systems. *Journal of the Franklin Institute*, **328** (4), 403–418.
- Barkana, I., 1991b : Rohrs example and robust stability of simple adaptive control. *Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **121**, 721–728, doi :10.1080/00207179208934294.
- Barkana, I., 2005a : Classical and simple adaptive control for nonminimum phase autopilot design. *Journal of Guidance, control and Dynamics*, **28** (4), 631–638.
- Barkana, I., 2005b : Gain conditions and convergence of simple adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **19** (1), 13–40.
- Barkana, I., 2005c : On stability and gain convergence in discrete simple adaptive control. *IFAC World Congress*, Prague.
- Barkana, I., 2007 : Simple adaptive control - a stable direct model reference adaptive control methodology - brief survey. *IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, Saint Petersburg, Russia.
- Barkana, I. et H. Kaufman, 1988 : Simple adaptive control of uncertain systems. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, **2**, 133–143, doi :10.1002/acs.4480020206.
- Barkana, I., I. Rusnak, et H. Weiss, 2013 : Almost passivity and simple adaptive control in discrete-time systems. *Asian Journal of Control*, doi :10.1002/asjc.771.
- Barkana, I., M. Teixeira, et L. Hsu, 2006 : Mitigation of symmetry condition in positive realness for adaptive control. *Automatica*, **42** (9), 1611–1616.
- Becker, G. et A. Packard, 1994 : Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems and Control Letters*, **23** (3), 205–215.
- Belcastro, C., 1998 : Parametric uncertainty modeling : an overview. *American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998*, Vol. 2, 992–996 vol.2, doi :10.1109/ACC.1998.703558.
- Ben-Yamin, R. et I. Barkana, 2013 : Simple adaptive L2-gain control for discrete-time systems. *IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, Caen, 414–419.
- Ben Yamin, R., I.Yaesh, et U.Shaked, 2007 : Robust discrete-time simple adaptive tracking. *Mediterranean Conference on Control and Automation*, Athens.
- Biannic, J.-M., 2010 : Contributions théoriques à la commande des systèmes aéronautiques et spatiaux. Aux frontières du linéaire. Habilitation à diriger des recherches, Université Paul Sabatier de Toulouse, France, URL <http://jm.biannic.free.fr>.

- Biannic, J.-M. et P. Apkarian, 1999 : Missile autopilot design via a modified LPV synthesis technique. *Journal of Aerospace Science and Technology*, **3 (3)**, 153–160.
- Biannic, J.-M., P. Apkarian, et W. Garrard, 1997 : Parameter-varying control of a high performance aircraft. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, **20 (2)**, 225–231.
- Biannic, J.-M., C. Doll, et J.-F. Magni, 2006 : Simulink-based tools for creating and simulating interconnected LFR objects. *Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 1922–1927, doi :10.1109/CACSD-CCA-ISIC.2006.4776934.
- Biannic, J.-M., C. Roos, et C. Pittet, 2011 : LPV analysis of switched controllers for attitude control systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **34 (5)**, 1561–1566.
- Biannic, J.-M. et S. Tarbouriech, 2009 : Optimization and implementation of dynamic anti-windup compensators in aircraft control systems with multiple saturations. *Control Engineering Practice*, **17 (6)**, 703–713.
- Boyd, S., L. E. Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan, 1994 : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.
- Butchart, R. L. et B. Shackcloth, 1965 : Synthesis of model reference adaptive systems by Lyapunov's second method. *2nd IFAC Symp. on Theory of Self-adaptive Control Systems*, Teddington, UK, 145–152.
- Calise, A., S. Lee, et M. Sharma, 1998 : Direct adaptive reconfigurable control of a tailless fighter aircraft. *Proceedings of the AIAA GNC Conference*, doi :10.2514/6.1998-4108.
- Cavallo, A., G. D. Maria, C. Natale, et S. Pirozzi, 2008 : Robust control of flexible structures with stable band-pass controllers. *Automatica*, **44 (5)**, 1251 – 1260, doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2007.10.020>.
- Chilali, M., 1996 : Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multi-critère. Thèse de doctorat, Paris IX, Dauphine.
- Chilali, M. et P. Gahinet, 1996 : H_∞ design with pole placement constraints : An LMI approach. *IEEE Trans. on Automat. Control*, **41**, 358–367.
- de Oliveira, M., J. Bernussou, et J. Geromel, 1999 : A new discrete-time robust stability condition. *Systems and Control Letters*, **37 (4)**, 261 – 265, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6911\(99\)00035-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00035-3).
- Demeter, sep 2013 : URL <http://smsc.cnes.fr/DEMETER/>.
- Desoer, C., 2009 : *Feedback Systems : Input-Output Properties*. Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition.
- Doyle, J., A. Packard, et K. Zhou, 1991 : Review of LFTs, LMIs and μ . *IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, England, 1227–1232.
- Duc, G. et S. Font, 1999 : *Commande H_∞ et μ -analyse : des outils pour la robustesse*. Hermes Science, Paris.

- Dydek, Z., A. Annaswamy, et E. Lavretsky, 2010 : Adaptive control and the NASA X-15-3 flight revisited. *Control Systems, IEEE*, **30** (3), 32–48, doi :10.1109/MCS.2010.936292.
- Feng, G. et M. Palaniswami, 1994 : Robust direct adaptive controllers with a new normalization technique. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39** (11), 2330–2334, doi :10.1109/9.333788.
- Fertik, H. et C. Ross, 1967 : Direct digital control algorithm with antiwindup feature. *ISA Transactions*, **6** (4), 317–328.
- Fomin, V., A. Fradkov, et V. Yakubovich, 1981 : *Adaptive control of dynamic plants*. Nauka, Moscow, in Russian.
- Fradkov, A., 1974 : Adaptive stabilization of a linear dynamic plant. *Autom. Remote Contr.*, **35** (12), 1960–1966.
- Fradkov, A., 2003 : Passification of non-square linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov lemma. *European J. of Control*, **6**, 573–582.
- Fradkov, A. et B. Andrievsky, 2007 : Passification-based adaptive control with implicit reference model. *IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, St. Petersburg.
- Fradkov, A. L. et A. A. Stotsky, 1992 : Speed gradient adaptive control algorithms for mechanical systems. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, **6**, 211–220, doi :10.1002/acs.4480060309.
- Fromion, V. et G. Scorletti, 2003 : A theoretical framework for gain scheduling. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **13** (10), 951–982.
- Gahinet, P., 1994 : Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. *Proceedings of the ACC*, Vol. 3, 2396–2400 vol.3, doi :10.1109/ACC.1994.734988.
- Gahinet, P. et P. Apkarian, 1994 : A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **4** (4), 421–448.
- Goebel, R., R. Sanfelice, et A. Teel, 2012 : *Hybrid Dynamical Systems : Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press, URL <http://books.google.fr/books?id=L8qqFWbt3L8C>.
- Goudy, P., 2011 : *Techniques et technologies des véhicules spatiaux - Volume 5 : Plateformes*. CNES.
- Gumussoy, S., D. Henrion, M. Millstone, et M. Overton, 2009 : Multi-objective Robust Control with HIFOO 2.0. *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design*, Haifa, Israël.
- Guy, N., D. Alazard, C. Cumer, et C. Charbonnel, 2012 : Reduced Order H_∞ Controller Synthesis for Flexible Structures Control. *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, Denmark.
- Helmersson, A., 1998 : μ Synthesis and LFT gain scheduling with real uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **8** (7), 631–642.
- Hovakimyan, N. et C. Cao, 2010 : \mathcal{L}_1 Adaptive Control Theory - Guaranteed Robustness with Fast Adaptation. *Advances in Design and Control*, SIAM.

- Hsu, L. et R. Costa, 1986 : Adaptive control with discontinuous forgetting factor and saturation for improved robustness. *American Control Conference, 1986*, 1075–1080.
- Ioannou, P. et B. Fidan, 2006 : *Adaptive Control Tutorial*. Advances in Design and Control, SIAM.
- Ioannou, P. et P. Kokotovic, 1982 : An asymptotic error analysis of identifiers and adaptive observers in the presence of parasitics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **27** (4), 921–927, doi : 10.1109/TAC.1982.1103028.
- Ioannou, P. et P. Kokotović, 1983 : *Adaptive Systems with Reduced Models*. Springer-Verlag, Berlin.
- Ioannou, P. et P. Kokotovic, 1984 : Robust redesign of adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **29** (3), 202–211, doi :10.1109/TAC.1984.1103490.
- Ioannou, P. et J. Sun, 1996 : *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc.
- Iwai, Z. et I. Mizumoto, 1992 : Robust and simple adaptive control systems. *International Journal of Control*, **55** (6), 1453–1470, doi :10.1080/00207179208934294.
- Kalman, R., 1958 : Design of self-optimizing control systems. *ASME Transactions*, **80**, 468 – 478.
- Kalman, R. E., 1963 : Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **49** (2), 201–205, URL <http://www.pnas.org/content/49/2/201.short>.
- Kaufman, H., I. Barkana, et K. Sobel, 1998 : *Direct adaptive control algorithms : Theory and Applications*. Springer, New York.
- Kharisov, E., N. Hovakimyan, et K. J. Åström, 2013 : Comparison of architectures and robustness of model reference adaptive controllers and \mathcal{L}_1 adaptive controllers. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, doi :10.1002/acs.2419.
- Köse, I. et F. Jabbari, 1999 : Control of LPV systems with partly measured parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44** (3), 658–663.
- Kottenstette, N. et P. Antsaklis, 2010 : Relationships between positive real, passive dissipative & positive systems. *American Control Conference (ACC), 2010*, 409–416.
- Kreisselmeier, G. et K. Narendra, 1982 : Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **27** (6), 1169–1175, doi : 10.1109/TAC.1982.1103093.
- Krstić, M., I. Kanellakopoulos, et P. Kokotović, 1995 : *Nonlinear and adaptive control design*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control, John Wiley & Sons.
- Lambrechts, P., J. Terlouw, S. Bennani, et M. Steinbuch, 1993 : Parametric uncertainty modeling using LFTs. *American Control Conference, 1993*, 267–272.

- Landau, I., 1974 : A survey of model reference adaptive techniques—theory and applications. *Automatica*, **10 (4)**, 353 – 379, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(74\)90064-8](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(74)90064-8).
- Landau, I., 1979 : *Adaptive Control : The Model Reference Approach*. Marcel Dekker, Inc. New York, NY.
- Landau, I. et L. Dugard, 1986 : *Commande adaptative : aspects pratiques et théoriques*. Série automatique, Masson, Paris.
- Lavretsky, E., 2009 : Combined/composite model reference adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **54 (11)**, 2692–2697, doi :[10.1109/TAC.2009.2031580](https://doi.org/10.1109/TAC.2009.2031580).
- Lavretsky, E. et K. Wise, 2012 : *Robust and Adaptive Control : With Aerospace Applications*. Advanced textbooks in control and signal processing, Springer.
- Lindorff, D. P. et R. L. Carroll, 1973 : Survey of adaptive control using Liapunov design. *International Journal of Control*, **18 (5)**, 897–914, doi :[10.1080/00207177308932569](https://doi.org/10.1080/00207177308932569).
- Löfberg, J., 2004 : *YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB*. URL control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php.
- Loquen, T., H. de Plinval, C. Cumer, et D. Alazard, 2012 : Attitude control of satellites with flexible appendages : a structured H_∞ control design. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Minneapolis, USA.
- Luzi, A.-R., J.-M. Biannic, D. Peaucelle, et J. Mignot, 2012a : Time varying attitude control strategies for the myriade satellites. *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, 1328–1333, doi : [10.1109/CCA.2012.6402675](https://doi.org/10.1109/CCA.2012.6402675).
- Luzi, A.-R., Fradkov, J.-M. Biannic, D. Peaucelle, et J. Mignot, 2012b : Commande adaptative structurée avec sigma-modification et application au contrôle d'attitude satellite. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, 394–399.
- Luzi, A.-R., A. L. Fradkov, J.-M. Biannic, et D. Peaucelle, 2013a : Structured adaptive control for solving LMIs. *IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, 426–431, doi : [10.3182/20130703-3-FR-4038.00075](https://doi.org/10.3182/20130703-3-FR-4038.00075).
- Luzi, A.-R., J. Mignot, J.-M. Biannic, et D. Peaucelle, 2013b : Structured adaptive attitude control applied on a Myriade simulation benchmark. *Proceedings of the AIAA GNC Conference*, Boston.
- Luzi, A.-R., D. Peaucelle, J.-M. Biannic, C. Pittet, et J. Mignot, 2013c : Structured adaptive attitude control of a satellite. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, URL <http://dx.doi.org/10.1002/acs.2406>.
- Maganti, G. B. et S. N. Singh, 2007 : Simplified adaptive control of an orbiting flexible spacecraft. *Acta Astronautica*, **61**, 575–589, doi :[10.1016/j.actaastro.2007.02.004](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2007.02.004).

- Magni, J.-F., 2002 : Presentation of the linear fractional representation toolbox (LFRT). *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*, 248–253, doi : 10.1109/CACSD.2002.1036962.
- Manceaux-Cumer, C., 2001 : Minimal LFT form of a spacecraft built up from two bodies. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference.*, Montreal, Canada.
- McFarlane, D. et K. Glover, 1992 : A loop-shaping design procedure using h_∞ synthesis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, **37** (6), 759–769, doi :10.1109/9.256330.
- Missions Myriade, sep 2013 : URL http://smc.cnes.fr/MYRIADE/GP_missions.htm.
- Narendra, K. et A. Annaswamy, 1987 : A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **32** (2), 134–145, doi :10.1109/TAC.1987.1104543.
- Narendra, K., S. Tripathi, G. Luders, et P. Kudva, 1971 : Tech. Rep. N-CT-43, Yale Univ., New Haven.
- Narendra, K. et L. Valavani, 1979 : Direct and indirect model reference adaptive control. *Automatica*, **15** (6), 653 – 664, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(79\)90033-5](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(79)90033-5), URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109879900335>.
- Osburn, P. V., A. P. Whitaker, et A. Kezer, 1961 : New developments in the design of model reference adaptive control systems. *Paper 61 -39, Institute of the Aeronautical Sciences, Easton, PA*.
- Packard, A., 1994 : Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems and Control Letters*, **22** (2), 79–92.
- Parks, P., 1966 : Liapunov redesign of model reference adaptive control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, **11** (3), 362–367, doi :10.1109/TAC.1966.1098361.
- Peaucelle, D., 2005 : RoMulOC : a YALMIP-Matlab based robust multi-objective control toolbox. Tech. Rep. 05377, LAAS-CNRS, Toulouse. URL www.laas.fr/OLOCEP/romuloc.
- Peaucelle, D., B. Andrievsky, V. Mahout, et A. Fradkov, 2011a : Robust simple adaptive control with relaxed passivity and PID control of a helicopter benchmark. *IFAC World Congress*.
- Peaucelle, D. et D. Arzelier, 2006 : Robust multi-objective control toolbox. *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design*, Munich.
- Peaucelle, D., A. Drouot, C. Pittet, et J. Mignot, 2011b : Simple adaptive control without passivity assumptions and experiments on satellite attitude control DEMETER benchmark. *IFAC World Congress*.
- Peaucelle, D. et A. Fradkov, 2007 : LMI conditions for robust adaptive control of LTI systems. *IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, St. Petersburg, paper in Invited Session "Passification-based Adaptive and Robust Control".
- Peaucelle, D. et A. Fradkov, 2008 : Robust adaptive L_2 -gain control of polytopic MIMO LTI systems - LMI results. *Systems & Control Letters*, **57** (11), 881–887.

- Peaucelle, D., A. Fradkov, et B. Andrievsky, 2006 : Passification-based adaptive control : Robustness issues. *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, paper in an invited session.
- Peaucelle, D., A. Fradkov, et B. Andrievsky, 2008 : Passification-based adaptive control of linear systems : Robustness issues. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, **22** (6), 590–608, doi : 10.1002/acs.1009.
- Peaucelle, D., H. Khan, et P. Pakshin, 2009 : LMI-based analysis of robust adaptive control for linear systems with time-varying uncertainty. *Autom. Remote Contr.*, **70** (9), 1540–1552, doi : 10.1134/S0005117909090070.
- Peterson, B. et K. Narendra, 1982 : Bounded error adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **27** (6), 1161–1168, doi : 10.1109/TAC.1982.1103112.
- Picard, sep 2013 : URL <http://smc.cnes.fr/PICARD/>.
- Picard News, sep 2013 : URL http://smc.cnes.fr/PICARD/GP_actualites.htm.
- Pittet, C. et D. Arzelier, 2006 : DEMETER : a benchmark for robust analysis and control of the attitude of flexible microsatellites. *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France.
- Pittet, C. et C. Fallet, 2002 : Gyroless attitude control of a flexible microsatellite. *Conference on Dynamics and Control of Systems and Structures in Space*, Cambridge, UK.
- Pittet, C., J. Mignot, et C. Fallet, 1999 : LMI based multi-objective H_∞ control of flexible microsatellites. *IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia.
- Proteus Series, sep 2013 : URL <http://smc.cnes.fr/PROTEUS/>.
- Rantzer, A., 1996 : On the Kalman-Yakubovitch-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, **28**, 7–10.
- Rohrs, C., L. Valavani, M. Athans, et G. Stein, 1985 : Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. *IEEE Trans. on Automat. Control*, **30**, 881–889.
- Rugh, W., 1991 : Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control System Magazine*, **11** (1), 79–84.
- Rugh, W. et J. Shamma, 2000 : Research on gain-scheduling. *Automatica*, **36**, 1401–1425.
- Samson, P., 2007 : High pointing accuracy with the picard microsatellite. *Proceedings of the IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, ICT, Universitas Studii Tolosana, France, doi : 10.3182/20070625-5-FR-2916.00051.
- Scherer, C., 2001 : LPV control and full block multipliers. *Automatica*, **37** (3), 361–375.
- Scherer, C., P. Gahinet, et M. Chilali, 1997 : Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. on Automat. Control*, **42** (7), 896–911.
- Scherer, C. et I. Köse, 2007 : Gain-scheduling synthesis with dynamic D -scalings. *Proceedings of the IEEE CDC*, New Orleans, LA, USA.

- Scorletti, G. et L. E. Ghaoui, 1998 : Improved LMI conditions for gain scheduling and related control problems. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, **8**, 845–877.
- Sename, O., P. Gaspar, et J. Bokor, (Eds.) , 2013 : *Robust Control and Linear Parameter Varying Approaches*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 437. Springer Berlin Heidelberg.
- Shamma, J. et M. Athans, 1990 : Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35 (8)**, 898–907.
- Shamma, J. et M. Athans, 1991 : Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **27 (3)**, 559–564.
- Shibata, H., Y. Sun, T. Fujinaka, et G. Chen, 2002 : Extension of discrete simple adaptive control with asymptotically perfect tracking. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **16 (2)**, 107–121, doi :10.1002/acs.673.
- Stilwell, D. et W. Rugh, 1999 : Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44 (6)**, 1225–1229.
- Stilwell, D. et W. Rugh, 2000 : Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers. *Automatica*, **36 (5)**, 665–671.
- Sturm, J., 1999 : Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, **11-12**, 625–653, URL sedumi.mcmaster.ca.
- Tarbouriech, S., G. Garcia, J.-M. Gomes da Silva Jr, et I. Queinnec, 2011 : *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer.
- Taylor, L. et E. Adkins, 1965 : Adaptive control and the X-15. *Princeton University Conference on Aircraft Flying Qualities*, Princeton, NJ.
- The Myriade Evolution series, sep 2013 : URL <http://smsc.cnes.fr/MYRIADE-EVOLUTIONS/>.
- The Myriade series, sep 2013 : URL <http://smsc.cnes.fr/MYRIADE/>.
- Tréguoët, J.-F., 2012 : Synthèse de correcteurs robustes périodiques à mémoire et application au contrôle d'attitude de satellites par roues à réaction et magnéto-coupleurs. Thèse de doctorat, Université de Toulouse - Insitut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, France.
- Tsakalis, K. S., 1992 : Robustness of model reference adaptive controllers : an input-output approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37 (5)**, 556–565, doi :10.1109/9.135489.
- Wang, F. et V. Balakrishnan, 2002 : Improved stability analysis and gain-scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47 (5)**, 720–734.
- Wertz, J., 1978 : *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Kluwer Academic Publishers.
- Whitaker, H., J. Yamron, et A. Kezer, 1958 : Design of model reference adaptive control systems for aircraft. *Report R-164, Instrumentation Laboratory, MIT, Cambridge, MA*.

- Wu, F., 2001 : A generalized LPV system analysis and control synthesis framework. *International Journal of Control*, **74** (7), 745–759.
- Wu, F. et K. Dong, 2006 : Gain scheduling control of LFT systems using parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, **42** (1), 39–50.
- Wu, F., A. Packard, et G. Balas, 1995 : LPV control design for pitch-axis missile autopilots. *Proceedings of the IEEE CDC*, New Orleans, LA, USA.
- Yaesh, I. et U. Shaked, 2006 : Simplified adaptive control via improved robust positive real conditions. *Systems & Control Letters*, **55**, 1033–1040.
- Yakubovitch, V., 1962 : Solution of certain matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1304–1307.
- Yang, B.-J., A. Calise, et N. Hovakimyan, 2004 : Augmenting adaptive output feedback control of uncertain nonlinear systems with actuator nonlinearities. *Proceedings of the ACC*, Vol. 5, 4675–4680.
- Yao, B. et M. Tomizuka, 1997 : Adaptive robust control of SISO nonlinear systems in a semi-strict feedback form. *Automatica*, **33** (5), 893 – 900, doi :[http://dx.doi.org/10.1016/S0005-1098\(96\)00222-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0005-1098(96)00222-1).
- Zaccarian, L. et A. Teel, 2011 : *Modern Anti-windup Synthesis : Control Augmentation for Actuator Saturation*. Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press.
- Zeheb, E., 1986 : A sufficient condition of output feedback stabilization of uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31** (11), 1055–1057, doi :[10.1109/TAC.1986.1104174](https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104174).
- Zhou, K., J. Doyle, et K. Glover, 1996 : *Robust and Opimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.