

Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

Présentée et soutenue par :

Thibault VOLPERT

le mardi 25 novembre 2014

Titre :

Étude d'un schéma différences finies haute précision et d'un modèle de fil mince oblique pour simuler les perturbations électromagnétiques sur véhicule aérospatial

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED AA : Mathématiques appliquées et Physique

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA MOIS

Directeur(s) de Thèse :

M. Xavier FERRIERES (directeur de thèse)
M. Bernard PECQUEUX (co-directeur de thèse)

Jury :

M. HELLUY Philippe, Professeur des Universités (IRMA)
M. PICHON Lionel, Directeur de recherche CNRS (LGEP/SUPELEC)
M. BONNET Pierre, Professeur des Universités (LASMEA)
M. GUIFFAUT Christophe, Chargé de Recherche (XLIM)
M. FERRIERES Xavier, Maître de recherche (ONERA/DEMR)
M. PECQUEUX Bernard, Ingénieur de recherche (CEA/DAM)

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Florent Christophe, directeur adjoint du Département Electromagnétisme et Radar, pour son adhésion à la conduite de ces travaux.

Je remercie Monsieur Vincent Gobin, responsable de l'unité Antenne Matériaux et Modélisations, dans laquelle je travaille, pour m'avoir soutenu dans la réalisation de ce projet.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Xavier Ferrières, directeur de Thèse, pour sa sympathie, ses compétences et sa grande disponibilité.

Je voudrais également remercier Monsieur Bernard Pecqueux co-encadrant, ingénieur de recherche au CEA, Gramat pour son éclairage sur les besoins industriels attendus pour ce type de recherche.

Je remercie Monsieur Philippe Helluy et Monsieur Lionel Pichon qui malgré leurs occupations ont accepté de porter un jugement sur mes travaux et d'en être rapporteur.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Christophe Guiffaut pour m'avoir reçu en début de Thèse, et dont les travaux m'ont été très précieux dans ma recherche.

Je remercie Monsieur Pierre Bonnet dont les travaux de Thèse, en rapport direct avec mes recherches m'ont fourni une solide base.

Je remercie Monsieur Gary Cohen dont les nombreux travaux de recherche ont inspiré ce sujet de Thèse.

Enfin je souhaite remercier tous mes collègues de travail pour leur sympathie et leurs nombreuses qualités.

Table des matières

1	Méthode numériques de résolutions des équations de Maxwell dans le domaine temporel : état de l'art.	9
1.1	Modèles et formulations mathématiques	9
1.1.1	Équations de Maxwell dans le domaine temporel.	9
1.1.2	Condition limite	11
1.1.3	Matériaux	15
1.1.4	Structures filaires	15
1.2	Schémas numériques	17
1.2.1	Méthode différences finies : schéma de Yee	17
1.2.2	Approche volumes finis	22
1.2.3	Les méthodes d'ordre élevé : schéma Galerkin Discontinuu.	28
1.3	Conclusion.	35
2	Éléments finis cartésiens d'ordre élevé	37
2.1	Formulation mathématique du problème à résoudre	37
2.2	Approximation spatiale du problème variationnel	39
2.3	Problème variationnel discret et stabilité	50
2.4	Cas particulier lorsque l'ordre d'approximation spatial est égal à 1	53
2.5	Validations	54
2.6	Ordre d'approximation spatiale variable.	57
2.7	Étude numérique de la convergence du schéma DIFOE	57
2.8	Conclusion.	62
3	Modèles physiques.	63
3.1	Matériaux	63
3.1.1	Matériaux volumiques	64
3.1.2	Matériaux minces	64
3.1.3	Modèle de sol parfait en présence d'une onde plane	68
3.2	modèles de fils	72
3.2.1	Principe de l'approche fil minces	75
3.2.2	Validations	80
3.3	Conclusion	90

4	L'approche différences finis d'ordre spatial élevé dans un contexte multi-domaines.	93
4.1	Introduction	93
4.2	Approches existantes	93
4.2.1	Couplage volumes finis/différences finies.	94
4.2.2	Couplage Galerkin Discontinu sur maillage non structuré/structuré cartésien.	97
4.2.3	Intérêt de l'utilisation d'une méthode différences finies d'ordre élevé dans une hybridation de maillages cartésien/non-structuré	104
4.3	Stratégie multi-domaines/multi-méthodes.	104
4.4	Principe d'une hybridation DIFOE/GD conservant l'énergie.	106
4.4.1	Principe	107
4.4.2	Validation numérique	111
4.5	Adaptation de la méthode d'hybridation à un couplage DIFOE/DIFOE.	113
4.5.1	Cavité avec changement brusque de permittivité	114
4.6	Conclusions	118
5	Applications numériques	119
5.1	Étude CEM d'un bâtiment.	119
5.2	Simulation foudre d'un aéronef de type Transall.	132
5.3	Conclusion	136
	Conclusion générale et perspectives	137

Introduction générale

La simulation numérique en électromagnétisme joue un rôle important dans l'étude des systèmes aéronautiques. De nombreux travaux ont été et sont encore menés pour augmenter les performances de ces simulations, afin de pouvoir prendre en compte des scènes de plus en plus complexes et réalistes. Les outils de simulation sont donc conduits à utiliser des méthodes de plus en plus performantes en terme de coût calcul (mémoire et temps CPU), mais aussi en terme de modèles physiques qui deviennent plus complets. Ceci se traduit par des stratégies de développement qui visent à augmenter les possibilités d'un schéma numérique pour tenir compte de nouvelles contraintes imposées par le problème physique. Nous pensons donc que pour répondre à la problématique actuelle de simulation, une seule méthode de calcul ne suffit pas. En effet, la complexité des problèmes impose l'utilisation d'un schéma appropriée à la configuration étudiée. Il existe des études qui montrent qu'une méthode peut s'avérer efficace sur un problème et beaucoup moins sur un autre. En effet, dans un souci d'améliorer les modèles numériques, les recherches ont conduit à des outils plus performants dans certains domaines mais moins dans d'autres. En d'autres termes les méthodes développées sont très spécialisées, et il faut pour faire une simulation, choisir si l'on veut privilégier la précision du résultat, le coût calcul, ou le temps ingénieur. Pour illustrer ces propos, prenons l'exemple de la méthode des différences finies, largement utilisée encore aujourd'hui, qui à cause du maillage en marche d'escalier ne permet pas de calculer précisément une solution à proximité d'une paroi courbe, et présente des limites de précision pour un calcul sur plusieurs longueurs d'ondes du fait de la dispersion numérique du schéma. Pour palier à ces difficultés, on a développé des schémas volumes finis pour tenir compte de la courbure de la géométrie et plus tard, des approches Galerkin Discontinu pour améliorer la précision numérique. Toutefois ces nouveaux schémas proposés ont aussi leurs inconvénients. L'approche volume finis est très intéressante lorsqu'il s'agit d'évaluer le champ électromagnétique à proximité de parois mais s'avère imprécise pour l'obtention du champ loin de l'objet. En effet, l'effet dissipatif du schéma entâche la solution calculée. En ce qui concerne le schéma Galerkin Discontinu, le coût calcul à chaque itération de celui-ci est relativement important par rapport aux autres schémas. De plus l'utilisation d'un maillage non structuré sur la totalité du domaine de calcul peut s'avérer prohibitif par rapport au gain apporté par la méthode. En particulier, dans certaines configurations très cartésiennes, il apparaît intéressant de limiter les coûts calculs de l'approche GD, tout en gardant sa précision, en étudiant une approche éléments finis qui soit une extension du schéma de

Yee. Ce point est le premier enjeu de cette thèse. L'opportunité de posséder une telle approche est très intéressante pour de nombreux utilisateurs du schéma de Yee, car elle conserve un maillage similaire et des modèles physiques existants à l'ordre 1 pour la méthode.

De manière générale, une configuration géométrique possède des zones courbes qu'il est difficile d'approcher par un maillage cartésien. Une solution envisageable consiste alors à utiliser un maillage hybride cartésien/non structuré pour lequel on couple deux types de schémas. Ce point est le deuxième enjeu de cette thèse. Nous étudierons plus particulièrement le couplage de la méthode différences finies haute précision proposée avec une approche GD.

Pour répondre aux deux enjeux de cette thèse, le document est découpé en cinq chapitres qui sont définis comme suit :

- le premier chapitre présente le problème physique à traiter et un historique des méthodes numériques existantes pour le résoudre. On montre notamment les faiblesses de ces schémas et l'intérêt d'une approche différences finies d'ordre spatial élevé ;
- le deuxième chapitre est dédié à la présentation du schéma différences finies d'ordre élevé et de ses propriétés . On donne en particulier les espaces d'approximation et les fonctions de bases relatives au schéma. On précise ensuite un critère de stabilité et on évalue la convergence du schéma par une étude numérique. Pour finir, l'intérêt de l'utilisation d'un ordre spatial variable par direction est présenté sur quelques exemples par rapport au schéma de Yee ;
- le troisième chapitre concerne la définition de modèles physiques minimaux pour pouvoir traiter un problème de CEM. En particulier, on étudie un modèle de fil mince oblique adapté à notre schéma, ainsi que l'introduction de matériaux minces de conductivité finie et de matériaux épais. Un modèle de prise en compte d'une onde plane pour des configurations contenant un sol parfaitement métallique est aussi abordé pour pouvoir traiter des problèmes de CEM sur bâtiments ;
- le quatrième chapitre présente une méthode de couplage entre les schémas différences finies d'ordre élevé et Galerkin Discontinue qui conserve l'énergie du problème continue afin d'assurer une certaine stabilité au schéma hybride. Après avoir détaillé le principe de la méthode de couplage, on donne deux exemples de validation dont l'un est sur le couplage Galerkin Discontinu/Différences finies d'ordre élevé et l'autre sur une extension de ce couplage à une approche Différences finies d'ordre élevé/Différences finies d'ordre élevé. Ce dernier type de couplage permet d'envisager des raffinements de maillages locaux dans l'approche différence finies qui soient stables ;
- enfin, le dernier chapitre est consacré à des résultats numériques effectués sur des configurations quasi-industrielles qui concernent l'étude CEM d'un bâtiment et celle d'un avion de transport militaire. On montre sur ces exemples les gains obtenus par rapport au schéma de Yee.

Chapitre 1

Méthode numériques de résolutions des équations de Maxwell dans le domaine temporel : état de l'art.

Dans ce chapitre nous présentons dans un premier paragraphe les équations mathématiques et les modèles décrivant le phénomène électromagnétique dans un contexte lié à la compatibilité électromagnétique (CEM). Pour cela, nous rappelons les équations de Maxwell, puis, nous précisons un formalisme de couches limites absorbantes pour restreindre le domaine de calcul. Nous introduisons ensuite, les modèles de matériaux et de structures filaires nécessaires à l'étude des problèmes de CEM.

Dans un deuxième paragraphe, nous décrivons les méthodes numériques mises actuellement en oeuvre pour résoudre les modèles précédents. Différents schémas numériques classiquement utilisés par la communauté sont rappelés et leurs limitations et avantages sont précisés afin de montrer l'intérêt d'une approche différences finies d'ordre spatial élevé (DIFOE).

1.1 Modèles et formulations mathématiques

Dans ce paragraphe, nous rappelons les équations de Maxwell, puis, un ensemble de modèles physiques nécessaires à la simulation des problèmes de CEM. Dans ces rappels, on ne cherche pas à être exhaustif sur l'ensemble des modèles physiques, mais on définit plutôt, pour l'approche DIFOE, quelques modèles de base pour pouvoir résoudre à minima un problème de CEM.

1.1.1 Équations de Maxwell dans le domaine temporel.

Le formalisme proposé par J.C. Maxwell au 19^{ième} siècle qui permet de décrire les phénomènes électromagnétiques, est composé de quatre équations aux dérivées partielles faisant intervenir quatre grandeurs vectorielles [1]. Ces grandeurs définissent le champ et

l'induction électrique notés respectivement E et D et le champ et l'induction magnétiques notés H et B . Soit un domaine $\Omega \in \mathbb{R}$, alors ces valeurs vectorielles vérifient sur $\Omega \times]0, T[$, où $T \in \mathbb{R}^+$ décrit un temps, les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} + \sigma(x)E(x,t) - \nabla \times H(x,t) = -J_E(x,t) \\ \frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + \nabla \times E(x,t) = 0 \\ \nabla \cdot D(x,t) = \rho(x,t) \\ \nabla \cdot B(x,t) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans ces équations, $J_E(x,t)$ et $\rho(x,t)$ définissent respectivement les densités de courant électrique et de charge présentes dans le domaine Ω . On peut écrire aussi que $J(x,t) = J_E(x,t) + \sigma(x)E(x,t)$ et remplacer la première équation du système (1.1) par :

$$\frac{\partial D(x,t)}{\partial t} + J(x,t) - \nabla \times H(x,t) = 0$$

Dans le système de Maxwell, les termes J_E et ρ jouent le rôle de sources qui vérifient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J_E = 0 \quad (1.2)$$

On peut aussi noter dans le système (1.1) que si on prend la divergence des deux premières équations, on obtient les deux dernières équations de celui-ci. On peut donc ramener le système des quatre équations à un système à deux équations. De plus, dans le contexte de nos applications, nous faisons l'hypothèse que le milieu est isotrope et ne possède pas de matériaux avec des déplacement de charges en interne. On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned} D(x,t) &= \varepsilon(x)E(x,t) \\ B(x,t) &= \mu(x)H(x,t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $\varepsilon(x)$ et $\mu(x)$ définissent respectivement la permittivité et la perméabilité du milieu. Dans le cas du vide $\varepsilon(x) = \varepsilon_0$ et $\mu(x) = \mu_0$ avec $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c_0^2$ où c_0 est la vitesse de la lumière. En tenant compte de tous ces éléments, le système de Maxwell que nous devons résoudre consiste à chercher $E(x,t)$ et $H(x,t)$, $\forall (x,t) \in \Omega \times]0, T[$, vérifiant :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} + \sigma(x)E(x,t) - \nabla \times H(x,t) = -J_E(x,t) \\ \mu \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} + \nabla \times E(x,t) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Pour poser correctement le problème mathématique, nous imposerons que $E(x,t=0) = H(x,t=0) = 0$ et sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω , que $n \times E(x,t) = 0$ où n définit la normale sortante à la frontière. Comme nous le verrons par la suite cette condition n'est pas contraignante car elle est aussi imposée lorsqu'on utilise des couches PML pour simuler un domaine de calcul infini.

Existence et unicité de solutions au problème de Maxwell

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$ et $T \in \mathbb{R}^+$. Soit $(E(t, x), H(t, x))$ les champs électriques et magnétiques vérifiant :

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times H + \sigma(x)E + J = 0 \text{ sur } \Omega \times [0, T] \\ \mu(x) \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E = 0 \text{ sur } \Omega \times [0, T] \\ E \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ E(0, x) = E_0(x), H(0, x) = H_0(x) \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

Si $\varepsilon(x), \mu(x) \in \mathbb{R}^{+*}$, $\sigma(x) \in \mathbb{R}^+$ et sont bornés sur Ω alors, si $J \in C^0((0, T), L^2(\Omega))$, il existe une solution (E, H) unique au problème (1.5), telle que :

$$(E, H) \in C^1((0, T), L^2(\Omega)) \cap C^0((0, T), H(\text{rot}, \Omega))$$

La démonstration de ce théorème se trouve en particulier dans la thèse de M. Remacki [4] qui démontre en plus que si on mixe des conditions limites de type Silver-Muller, c'est-à-dire $n \times E + Zn \times n \times H = 0$, pour simuler la non réflexion, aux conditions de type métal parfait $n \times E = 0$, il existe encore une solution unique au problème de Maxwell. Dans la suite de notre rapport, nous ne reviendrons pas sur ce théorème d'existence et d'unicité qui permet de bien poser notre problème mathématique.

1.1.2 Condition limite

Dans le problème de Maxwell, le champ diffracté s'atténue et s'annule à l'infini suivant la loi de Sommerfeld. Dans les simulations, le domaine de calcul n'est pas infini et nous tronquons celui-ci en posant des conditions aux limites qui simulent l'infini et évitent les réflexions sur sa frontière. Pour cela, la solution actuelle la plus efficace consiste à entourer le domaine de calcul par plusieurs couches absorbantes où les ondes sont absorbées sans réflexion. Ce modèle fut proposé par J.P. Berenger dans les années 90 [5] et pratiquement adopté à l'heure actuelle par tous les développeurs de méthodes numériques pour les équations de Maxwell.

Plus précisément, la méthode dite PML (Perfectly Matched Layer) consiste, à ajouter aux frontières du domaine de calcul un ensemble de couches définissant un milieu absorbant sans réflexion dans le domaine de calcul pour les ondes électromagnétiques. Pour cela, on définit dans chaque couche une conductivité électrique $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ et une conductivité magnétique $\sigma^* = (\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*)$ dépendant de la direction des couches et de la distance de la couche à l'interface air/PML comme indiqué sur la figure (1.1).

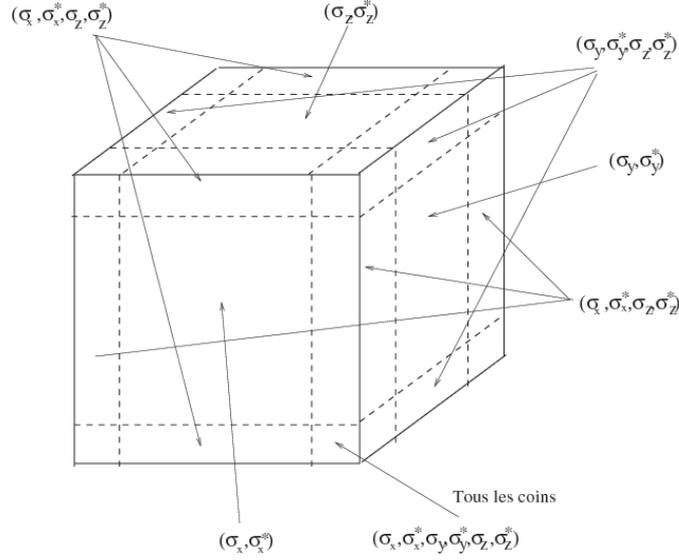


figure 1.1: Position des couches PML et des conductivités dans celles-ci.

Les conductivités électriques et magnétiques choisies vérifient en plus des conditions d'adaptation, pour éviter les réflexions air/PML, décrites par :

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_x^*}{\mu_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_y^*}{\mu_0}, \quad \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_z^*}{\mu_0}$$

Il existe plusieurs lois de variation de la conductivité dans les couches PML qui fournissent de bons résultats [6, 7, 8].

Le modèle proposé par J.P. Béranger consiste à décomposer les champs en deux composantes que l'on absorbe différemment dans les couches. Les équations de Maxwell sont réécrites dans les couches sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} & \varepsilon \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} &= -\frac{\partial H_y}{\partial z} & \varepsilon \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \varepsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} & \mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} &= -\frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} &= -\frac{\partial H_x}{\partial y} & \mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} & \mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z} & \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned}$$

Ce formalisme ne peut être directement programmé tel quel car il s'avère instable sur des simulations longues. Pour éviter cela, il faut reformuler celui-ci. Dans la suite, nous allons décrire cette nouvelle formulation sur la composante E_x . Pour les autres composantes de champs électrique et magnétique, les calculs menés sur E_x seront identiques.

Dans le domaine fréquentiel, l'équation en $E_x = E_{xy} + E_{xz}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} + \sigma_y\hat{E}_{xy} &= \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} \\ j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} + \sigma_z\hat{E}_{xz} &= -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} \end{aligned}$$

On obtient 2 systèmes identiques pour E_y et E_z . On réécrit les deux équations précédentes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon})j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} = \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} \\ (1 + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon})j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} = -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_y j\omega\varepsilon\hat{E}_{xy} = \frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} \\ S_z j\omega\varepsilon\hat{E}_{xz} = -\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z} \end{cases}$$

où $\begin{cases} S_x = 1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\varepsilon} \\ S_y = 1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\varepsilon} \\ S_z = 1 + \frac{\sigma_z}{j\omega\varepsilon} \end{cases}$

La somme des deux équations précédentes donne : $j\omega\varepsilon(\hat{E}_{xy} + \hat{E}_{xz}) = \frac{1}{S_y}\frac{\partial\hat{H}_z}{\partial y} - \frac{1}{S_z}\frac{\partial\hat{H}_y}{\partial z}$, soit :

$$j\omega\varepsilon\hat{E}_x = \frac{\partial_y}{S_y}\hat{H}_z - \frac{\partial_z}{S_z}\hat{H}_y$$

On peut alors réécrire le précédent système PML de 12 équations proposé par J.P.berenger en un système équivalent de 6 équations :

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon\hat{E} - \nabla_S \times \hat{H} = 0 \\ j\omega\mu_0\hat{H} + \nabla_S^* \times \hat{E} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

où on définit l'opérateur $(\nabla_S \times)$ par

$$(\nabla_S \times) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial_z}{S_z} & \frac{\partial_y}{S_y} \\ \frac{\partial_z}{S_z} & 0 & -\frac{\partial_x}{S_x} \\ -\frac{\partial_y}{S_y} & \frac{\partial_x}{S_x} & 0 \end{pmatrix}$$

Dans l'équation liée au champ magnétique, l'opérateur $(\nabla_S^* \times)$ a la même forme que $(\nabla_S \times)$, à ceci près que les S_i deviennent des S_i^* où $S_i^* = 1 + \frac{\sigma_i^*}{j\omega\mu_0}$.

Or la condition d'adaptation des milieux PML implique $\frac{\sigma_i^*}{\mu_0} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0}$, il en découle que

$$\begin{aligned} S_i^* &= S_i, \forall i = x, y, \text{ ou } z \\ \Rightarrow (\nabla_S^* \times) &= (\nabla_S \times) \end{aligned}$$

Soient M et N les matrices diagonales telles que :

$$M = S_x S_y S_z N = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix} = S_x S_y S_z \begin{pmatrix} \frac{1}{S_y S_z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_x S_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_x S_y} \end{pmatrix}$$

On peut écrire alors

$$(\nabla_S \times) = N(\nabla \times)M$$

On reprend le système (1.6) dans lequel on introduit la re-écriture de $(\nabla_s \times)$:

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon\hat{E} - N(\nabla \times)M\hat{H} = 0 \\ j\omega\mu_0\hat{H} + N(\nabla \times)M\hat{E} = 0 \end{cases}$$

En faisant le changement de variables $\begin{cases} \hat{H}' = M\hat{H} \\ \hat{E}' = M\hat{E} \end{cases}$, on obtient :

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon M^{-1}\hat{E}' = N(\nabla \times)\hat{H}' \\ j\omega\mu_0 M^{-1}\hat{H}' = -N(\nabla \times)\hat{E}' \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon N^{-1}M^{-1}\hat{E}' = (\nabla \times)\hat{H}' \\ j\omega\mu_0 N^{-1}M^{-1}\hat{H}' = -(\nabla \times)\hat{E}' \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans ce système, la première équation s'écrit encore :

$$j\omega\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{S_y S_z}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_x S_z}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_x S_y}{S_z} \end{pmatrix} \hat{E}' = (\nabla \times)\hat{H}'$$

on pose alors [9] :

$$\begin{cases} \hat{D}'_x = \varepsilon \frac{S_z}{S_x} \hat{E}'_x \\ \hat{D}'_y = \varepsilon \frac{S_z}{S_y} \hat{E}'_y \\ \hat{D}'_z = \varepsilon \frac{S_z}{S_z} \hat{E}'_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{B}'_x = \mu_0 \frac{S_z}{S_x} \hat{H}'_x \\ \hat{B}'_y = \mu_0 \frac{S_z}{S_y} \hat{H}'_y \\ \hat{B}'_z = \mu_0 \frac{S_z}{S_z} \hat{H}'_z \end{cases} \quad (1.8)$$

Le système (1.7) devient : $\begin{cases} j\omega K_S \hat{D}' = (\nabla \times)\hat{H}' \\ j\omega K_S \hat{B}' = -(\nabla \times)\hat{E}' \end{cases}$, où $K_S = \begin{pmatrix} S_y & 0 & 0 \\ 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & S_x \end{pmatrix}$

En repassant dans le domaine temporel, et compte tenu de la définition des S_i , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} D' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_1} D' = (\nabla \times) H' \\ \partial_t D' + \frac{1}{\varepsilon} \sigma D' = \varepsilon (\partial_t E' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_2} E') \\ \frac{\partial}{\partial t} B' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_1} B' = -(\nabla \times) E' \\ \partial_t B' + \frac{1}{\varepsilon} \sigma B'_x = \mu_0 (\partial_t H' + \frac{1}{\varepsilon} K_{\sigma_2} H') \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\text{où } K_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}$$

Dans cette nouvelle expression des champs, on note que $E' = E$ et $H' = H$ en dehors des couches PML et que le système précédent se réduit aux équations de Maxwell. A l'intérieur des couches PML, on peut démontrer que les champs E' et H' s'atténuent suivant une loi exponentielle [10].

1.1.3 Matériaux

Il existe de nombreux modèles de matériaux plus ou moins spécifiques à l'application étudiée. Bien évidemment, nous n'allons pas dans cette thèse expliciter chacun des modèles connus, mais plutôt nous limiter à un minima que l'on juge utile pour raisonnablement arriver à traiter un problème de CEM. Dans ce minima, nous incluons uniquement deux modèles particulièrement nécessaires pour pouvoir simuler la pénétration des ondes électromagnétiques dans les structures à étudier. Le premier modèle concerne les matériaux épais qui peuvent être représentés par une ou plusieurs cellules dans le maillage et auxquels sont affectés des caractéristiques diélectriques et magnétiques. En ce qui nous concerne, dans notre contexte, nous nous limitons exclusivement aux matériaux ayant des caractéristiques diélectriques, données par une conductivité σ et une permittivité ε , variables en espace mais constantes en temps. Les matériaux magnétiques sont quant à eux supposés constants en espace et en temps et donnés par une conductivité magnétique nulle et une perméabilité égale à celle du vide. En termes de modèle, ce type de matériaux est contenu dans le système de Maxwell :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \varepsilon_r(x, y, z) \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma(x, y, z) E = \nabla \times H \\ \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \times E \end{cases} \quad (1.10)$$

avec $\varepsilon_r(x, y, z)$ et $\sigma(x, y, z)$ des matrices 3×3 dépendant de la position spatiale.

Le deuxième modèle de matériaux nécessaire aux études CEM sont les matériaux minces. En effet, Il existe de nombreuses structures en aéronautiques constituées de matériaux composites qui ne sont pas totalement imperméables aux ondes électromagnétiques. Il faut donc, soit mailler cette couche mince de matériaux, soit trouver des modèles surfaciques équivalents. Le modèle le plus simple qui donne déjà une bonne approximation du comportement filtrant de ce type de matériaux est un modèle d'impédance $Z_s = 1/(\sigma e)$ [11], où σ est la conductivité du matériau et e son épaisseur supposée dans ce cas plus petite que la dimension de la maille. La prise en compte de cette impédance localisée sur la surface de l'objet se fait en écrivant sur celle-ci

$$n \times H^{**} - n \times H^* = -\frac{1}{Z_s} n \times n \times E^* \quad (1.11)$$

avec n étant la normale de la surface pointant vers l'extérieur de l'objet, H^{**} le champ magnétique sur la surface à l'extérieur de l'objet et H^*, E^* , les champs magnétique électrique sur la surface à l'intérieur de l'objet.

1.1.4 Structures filaires

Pour tenir compte de fils dans le système des équations de Maxwell, on utilise le modèle décrit par R. Holland [12]. Ce modèle consiste à rajouter au système de Maxwell, deux autres équations liées aux structures filaires définies par un ensemble de segments droits de rayon a . Ces équations proviennent des équations de Maxwell réécrites autour du fil en coordonnées cylindriques. Considérant un fil de direction z et l'équation en

champs magnétique, notée encore équation de Faraday, dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} + \mu_0 \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$$

On intègre celle-ci sur un rayon r petit devant la longueur d'onde :

$$\int_a^r \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} + \mu_0 \frac{\partial H_\theta}{\partial t} dr = 0$$

que l'on peut encore écrire :

$$E_z(a) - E_z(r) + \int_a^r \frac{\partial E_r}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial H_\theta}{\partial t} dr = 0$$

On a la condition $E_z(a) = 0$ sur un fil parfaitement conducteur, ce qui implique :

$$\int_a^r \frac{\partial E_r}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial H_\theta}{\partial t} dr = E_z(r)$$

En faisant l'hypothèse d'un rayon a petit devant la longueur d'onde, nous pouvons utiliser les équations de la statique suivantes :

$$E_r = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ et } H_\theta = \frac{I}{2\pi r}$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} & \int_a^r \frac{\partial \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}}{\partial z} + \mu_0 \frac{\partial \frac{I}{2\pi r}}{\partial t} dr = E_z(r) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial q}{\partial z} \int_a^r \frac{1}{r} dr + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial I}{\partial t} \int_a^r \frac{1}{r} dr = E_z(r) \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nu^2 \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{E_z(r)}{L(r)}$$

avec

$$L(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

Nous pouvons alors choisir une valeur $r = R$ et moyenner cette dernière expression entre a et R pour obtenir une valeur de self moyenne :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\int_a^R \ln(r/a) r dr}{\int_0^R r dr} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2R^2} \right)$$

correspondant à un champ moyen sur le fil noté $\langle E_z \rangle$. On obtient alors sur le fil, une première équation donnée par :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nu^2 \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\langle E_z \rangle}{L} \quad (1.12)$$

En prenant ensuite, la divergence de l'équation en E du système de Maxwell, nommée aussi équation d'Ampère, on obtient une deuxième équation sur le fil, donnée par :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} q = -\frac{\partial I}{\partial z} \quad (1.13)$$

En ajoutant les deux équations (1.12) et (1.13) nous obtenons le formalisme mathématique modélisant les fils minces, à rajouter aux équations de Maxwell, défini par le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = -\nu^2 \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\langle E_z \rangle}{L} \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} q = -\frac{\partial I}{\partial z} \end{cases} \quad (1.14)$$

Sur les structures filaires, on peut aussi rajouter des composants linéaires localisés tels que des résistances R , des inductances M , des capacités C et des générateurs de tension V en remplaçant la première équation du système (1.14) par :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{R}{L} I + \frac{M}{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{C Q_c}{L} + \frac{V}{L} = -\nu^2 \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\langle E_z \rangle}{L}$$

et en rajoutant pour la capacité une équation sur la charge Q_c de celle-ci, donnée par :

$$\frac{\partial Q_c}{\partial t} = I$$

La technique consiste ensuite à coupler ce système d'équations 1D aux équations de Maxwell. Ce couplage se fait par le biais du champ électrique tangent au fil $\langle E_z \rangle$, calculé par le système de Maxwell, et par l'ajout du terme de densité de courant J dans l'équation de Faraday, calculé à partir des courants évalués sur le fil.

1.2 Schémas numériques

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à quelques méthodes numériques existantes pour résoudre les équations et modèles posés dans le paragraphe précédent. Nous nous focalisons plus particulièrement sur 3 types de schémas qui sont couramment utilisés dans la littérature et qui ont été conçus progressivement dans un but d'améliorer les inconvénients des méthodes précédentes. Ces schémas sont, par ordre d'apparition dans le milieu de la simulation électromagnétique : la méthode différences finies, les approches volumes finis et plus récemment les méthodes Galerkin Discontinues. Pour chacune de ces méthodes, nous donnons un ensemble de références et nous décrivons un schéma particulier qui fixe les grands principes de chacune.

1.2.1 Méthode différences finies : schéma de Yee

Le méthode différences finies utilisée pour la résolution des équation de Maxwell est aujourd'hui incontestablement la référence dans le domaine de la simulation électromagnétique. Cette méthode est basée sur un schéma proposé par Yee en 1966 [13]. Dans ce paragraphe, nous allons rappeler la discrétisation du domaine de calcul en espace et en temps pour le schéma de Yee et nous donnons ensuite les propriétés de celui-ci en termes de stabilité et de convergence.

Discrétisation spatiale et temporelle

Dans la méthode différences finies basée sur le schéma de Yee, on approxime le domaine de calcul par une grille cartésienne sur laquelle on détermine des inconnues $E(x, t)$ et $H(x, t)$ localisées sur chaque cellule parallélépipédique du maillage comme indiqué sur la figure (1.2).

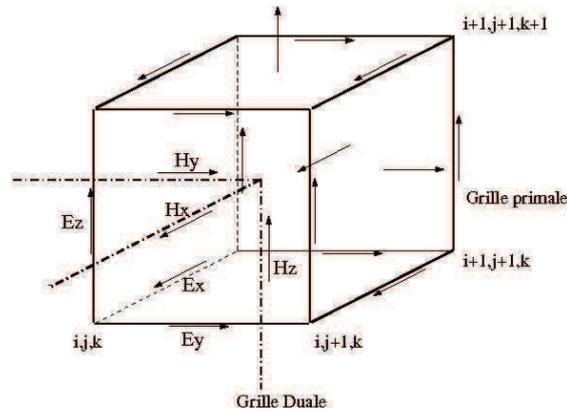


figure 1.2: Localisation des inconnues sur une cellule du maillage cartésien

Dans cette approximation on peut aussi décrire la position des inconnues comme le centre des cotés d'un maillage primal (pour les E) et dual (pour les H) comme sur la figure (1.3).

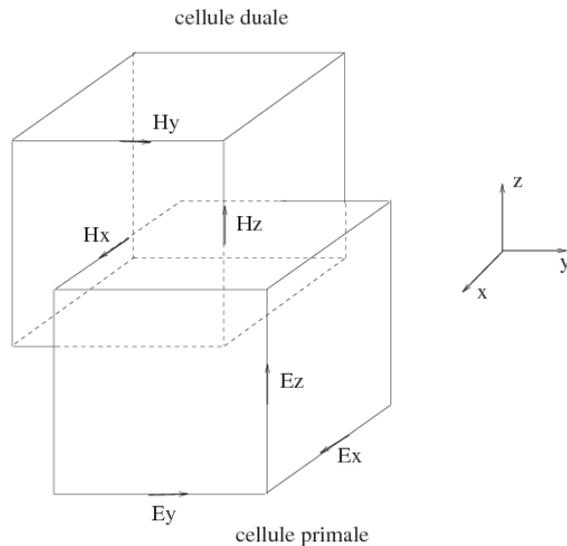


figure 1.3: Position des inconnues en considérant un maillage primal et dual.

Ce type d'approximation, très adapté pour des structures cartésiennes, pose des difficultés en termes de précision pour des géométries courbes. La définition de la grille est obtenue par une discrétisation spatiale 1D indépendante dans chaque direction x , y et z avec un pas soit constant, soit variable et dont la taille est donnée par $dl \leq \frac{\lambda}{n}$ où $n \geq 10$ et λ est la longueur d'onde minimale du spectre de la source. Dans le cas d'un maillage variable, la différence entre deux pas consécutifs ne doit pas excéder un facteur 1.2. Ce critère empirique a été établi par l'expérience numérique.

En ce qui concerne le domaine temporel, celui-ci est discrétisé sous forme d'un ensemble de segments constants de longueur dt . Les inconnues de champs électrique E sont alors calculées aux temps $t_n = n dt$, $t_{n+1} = (n + 1) dt$, \dots et les champs magnétiques H sont décalés d'un demi pas de temps et donc évalués aux temps $t_{n+1/2} = (n + 1/2)dt$, $t_{n+3/2} = (n + 3/2)dt$, \dots , suivant un schéma leap-frog.

Le schéma de Yee est donc un schéma leap frog espace/temps explicite qui est stable sous la condition suivante :

$$dt \leq \frac{1}{\nu} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2}}} \quad (1.15)$$

avec $\nu = 1/\sqrt{\varepsilon\mu_0}$, la vitesse du milieu et dx , dy , dz les pas minimaux suivant les trois directions d'espace. Pour plus de détails sur la méthode différences finies, on peut se référer à l'ouvrage de Taflové [14].

L'approximation induite pour l'obtention d'un schéma induisent deux types d'erreurs numériques qu'il est important de connaître pour l'utilisation de celui-ci. Il s'agit des erreurs numériques de dispersion et de dissipation qui entraînent des modifications sur la propagation du signal physique :

- la dispersion qui est une modification de la vitesse de propagation du signal dans l'espace au cours du temps, conduit à un déphasage ou un décalage de ce dernier ;
- la dissipation qui est un amortissement de l'énergie, conduit à une atténuation de l'amplitude des signaux dans l'espace au cours du temps.

Pour le schéma de Yee, on peut montrer que celui-ci présente uniquement une erreur de dispersion [14], à cause du choix d'un schéma centré en espace.

La méthode différences finies reste aujourd'hui celle qui est la plus utilisée pour traiter de nombreux problèmes, mais son maillage en marches d'escalier réduit son intérêt dans le calcul de champs à proximité de parois courbes comme cela est souvent le cas dans les problèmes de CEM. Cette limitation a donc fait naître dans les années 90 un gain d'intérêt pour les méthodes de type volumes finis permettant de gérer des maillages non structurés.

Introduction des modèles de matériaux et des structures filaires dans le schéma de Yee

Matériaux

Pour tenir compte de la présence de matériaux diélectriques volumiques ou de matériaux minces de conductivité finie dans le schéma de Yee, nous évaluons pour chaque composante électrique la permittivité et la conductivité attribuée à celle-ci. Pour cela, nous

considérons la face S^* de la cellule duale telle que la composante de champ électrique qui nous intéresse soit normale et centrale à celle-ci. Nous projetons ensuite l'équation en E du système de Maxwell sur la normale n à cette face et nous intégrons cette nouvelle équation sur la face. La figure (1.4) représente la face d'intégration dans le cas d'un matériaux volumique et surfacique.

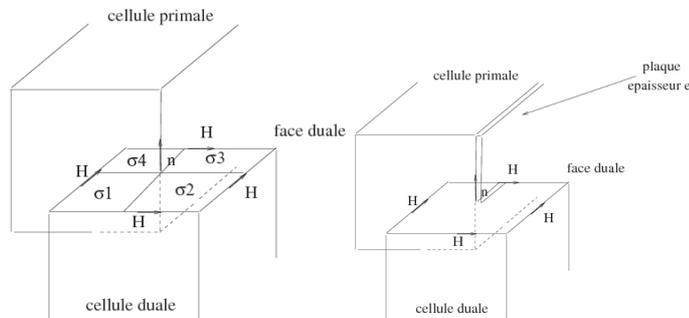


figure 1.4: Surfaces d'intégration dans le cas de matériaux volumiques et surfaciques.

Nous obtenons alors :

$$\int_S^* \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \cdot n \, ds + \int_S^* \sigma E \cdot n \, ds = \int_S^* \nabla \times H \cdot n \, ds$$

$$\Rightarrow dy^* dy^* \varepsilon_0 \frac{\partial(E \cdot n)}{\partial t} + \sigma_{moy}(E \cdot n) = \int_C^* H \, dl$$

Dans cette expression, en supposant la face S^* perpendiculaire à x et en considérant les numérotations des faces décrites sur la figure (1.4), σ_{moy} est défini :

- pour le matériau diélectrique volumique, par $\sigma_{moy} = dz_1^* dy_1^* \sigma_1 + dz_1^* dy_2^* \sigma_2 + dz_2^* dy_1^* \sigma_3 + dz_2^* dy_2^* \sigma_4$ où $dy^* = dy_1^* + dy_2^*$ et $dz^* = dz_1^* + dz_2^*$
- pour un matériau mince (épaisseur e) de conductivité σ , par $\sigma_{moy} = \sigma \frac{e}{dz^*}$

avec σ_i , dy_i et dz_i définissant respectivement la conductivité, la dimension y et z de la cellule i participant au calcul comme indiqué sur la figure (1.4).

Structures filaires

L'introduction des modèles de structures filaires dans le schéma de Yee consiste à discrétiser sur un ensemble de segments 1D, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = -\nu^2 \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\langle E \rangle}{L} \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \sigma q = -\frac{\partial I}{\partial l} \end{cases} \quad (1.16)$$

où l définit la coordonnée curviligne sur le segment. Pour fermer le système (1.16), on considère les conditions limites suivantes :

- $q = 0$ pour un fil rattaché à une plaque métallique
- $I = 0$ pour un fil en l'air
- $I = \pm \nu q$ pour un fil adapté à l'infini

Il existe plusieurs formalismes permettant de prendre en compte des fils qui ne suivent pas les arêtes du maillage. Dans cette présentation, nous rappellerons brièvement le modèle, dit de Holland [12], qui a servi de base aux autres formulations. Pour plus de détails sur les approches fils obliques, on pourra se référer aux travaux de F. Edelvik [15] et plus récemment à ceux de C. Guiffaut [16] qui apportent un plus indéniable sur la modélisation des fils dans le schéma de Yee.

Dans l'approche originale de R. Holland, le fil est découpé en un ensemble de segments droits qui suivent généralement les arêtes du maillage. On pose trois inconnues par segments qui correspondent à un courant I au centre et 2 charges q_1 et q_2 en extrémités de celui-ci. Le schéma utilisé pour discrétiser les équations (1.16) est comme pour les champs, un schéma de type leap-frog en espace et en temps. Si on considère le système (1.16) avec l'ajout d'éléments de circuit discrets sur une maille de longueur dl , on a :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{R}{Ldl} I + \frac{M}{Ldl} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{C Q_c}{Ldl} + \frac{V}{Ldl} = -\nu^2 \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\langle E \rangle}{L} \quad (1.17)$$

En écrivant cette dernière équation au temps $n dt$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{M}{Ldl}\right) \frac{I^{n+\frac{1}{2}} - I^{n-\frac{1}{2}}}{dt} + \frac{R}{Ldl} \frac{I^{n+\frac{1}{2}} + I^{n-\frac{1}{2}}}{dt} = \\ -\nu^2 \frac{q_2^n - q_1^n}{dl} + \frac{\langle E^n \rangle}{L} - \frac{V^n}{Ldl} - \frac{C Q_c^n}{Ldl} \end{aligned}$$

Au niveau de la charge sur l'élément capacitif on a :

$$\frac{Q_c^{n+1} - Q_c^n}{dt} = I^{n+\frac{1}{2}}$$

Si maintenant, on considère le calcul des charges, l'équation à discrétiser est la suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sigma q = -\frac{\partial I}{\partial l}$$

En fait chaque segment possède 2 charges extrémales et il n'y a pas a priori continuité de cette charge d'un segment à l'autre.

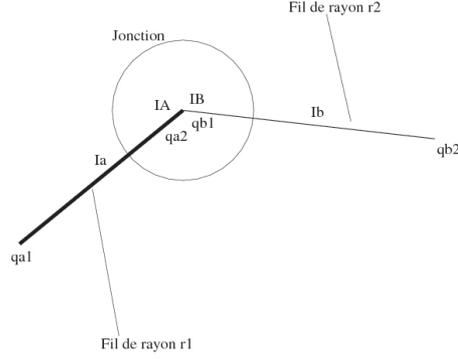


figure 1.5: Jonction entre deux segments.

Au niveau de la jonction entre deux segments a et b , nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial qa_2^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} + \sigma_a qa_2^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{IA - I_a^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{dl_a}{2}} \\ \frac{\partial qb_1^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} + \sigma_b qb_1^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{I_b^{n+\frac{1}{2}} - IB}{\frac{dl_b}{2}} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dl_a}{2} \left(\frac{qa_2^{n+1} - qa_2^n}{dt} + \sigma_a \frac{qa_2^{n+1} + qa_2^n}{2} \right) = -(IA - I_a^{n+\frac{1}{2}}) \\ \frac{dl_b}{2} \left(\frac{qb_1^{n+1} - qb_1^n}{dt} + \sigma_b \frac{qb_1^{n+1} + qb_1^n}{2} \right) = -(I_b^{n+\frac{1}{2}} - IB) \end{cases}$$

où (IA, IB) , (I_a, I_b) , (σ_a, σ_b) et (dl_a, dl_b) sont respectivement les courants pris aux extrémités et au centre des segments a et b , la conductivité du milieu dans lequel se trouve les segment a et b et la longueur de ceux-ci. qa_2 et qb_1 représentent la charge pour l'extrémité commune sur chacun des segments.

Au niveau de la jonction on applique les conditions limites suivantes :

- loi de Kirchoff : $IA - IB = 0$
- égalité des potentiel : $V_a = V_b$

On peut aussi écrire que $q = CV$ et $LC = \frac{1}{\nu}$ où ν est la vitesse des ondes dans la milieu, L l'inductance par unité de longueur du segment et C la capacité par unité de longueur par rapport à une référence ; Ce qui conduit à $\nu_a^2 L_a qa_2 = \nu_b^2 L_b qb_1$, et on obtient :

$$\begin{aligned} qa_1 &= \frac{dl_a}{2} \sigma_a + \frac{dl_b}{2} \sigma_b \frac{\nu_a^2}{\nu_b^2} \frac{L_a}{L_b} \\ qa_2 &= \frac{dl_a}{2} + \frac{dl_b}{2} \frac{\nu_a^2}{\nu_b^2} \frac{L_a}{L_b} \\ qb_1 &= \frac{dl_b}{2} \sigma_b + \frac{dl_a}{2} \sigma_a \frac{\nu_b^2}{\nu_a^2} \frac{L_b}{L_a} \\ qb_2 &= \frac{dl_b}{2} + \frac{dl_a}{2} \frac{\nu_b^2}{\nu_a^2} \frac{L_b}{L_a} \end{aligned}$$

1.2.2 Approche volumes finis

La grande force de l'algorithme de Yee réside dans sa simplicité, mais la contre partie est l'utilisation d'un maillage en marche d'escalier, ce qui ne permet pas de prendre en

compte de manière optimale une géométrie courbe, si ce n'est qu' en réduisant excessivement le pas de discrétisation spatiale qui entraîne alors un coût calcul très important et n'assure pas non plus une plus grande précision [17].

La technique des volumes finis dans le domaine temporel (FVTD) [18],[19] évite cet écueil par l'utilisation d'un maillage non structuré suivant plus précisément la courbure de la géométrie avec moins d'éléments. Les équations de Maxwell dans le domaine temporel sont un système différentiel hyperbolique que l'on peut écrire sous une forme conservative, pour laquelle on peut écrire un schéma volumes finis. Il existe plusieurs approches volumes finis dont les deux grandes familles présentes en électromagnétisme sont des schémas cell-centered à flux centrés ou bien à flux décentrés [20]. La méthode présentée ici est un approche cell-centered à flux décentrée, similaire à la méthode de Steger-Warming utilisée pour la mécanique des fluides [21].

Principe de la méthode

Soit les équations de Maxwell dans le domaine temporel en espace libre, données par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot}\left(\frac{E}{\mu_0}\right) &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} - \text{rot}\left(\frac{H}{\varepsilon_0}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

avec ε_0 et μ_0 définissant les permittivité et perméabilité du vide et (E, H) les champs électriques et magnétiques. Nous pouvons réécrire ce système sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}F(U) = 0 \quad (1.19)$$

où $U = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)^t$, $F(U) = \begin{pmatrix} F_1(U) \\ F_2(U) \\ F_3(U) \end{pmatrix}$ et

$$\text{div}F(U) = \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(U)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(U)}{\partial z}$$

$$\text{avec } F_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H_z}{\varepsilon_0} \\ -\frac{H_y}{\varepsilon_0} \\ 0 \\ -\frac{E_z}{\mu_0} \\ \frac{E_y}{\mu_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_2(U) = \begin{pmatrix} -\frac{H_z}{\varepsilon_0} \\ 0 \\ -\frac{H_x}{\varepsilon_0} \\ \frac{E_z}{\mu_0} \\ 0 \\ -\frac{E_x}{\mu_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_3(U) = \begin{pmatrix} \frac{H_y}{\varepsilon_0} \\ -\frac{H_x}{\varepsilon_0} \\ 0 \\ -\frac{E_y}{\mu_0} \\ \frac{E_x}{\mu_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit un domaine Ω inclus dans \mathbb{R}^3 partitionné sous forme d'un ensemble de cellules. Soit une cellule V de Ω , en intégrant l'équation (1.19) sur celle-ci, dont la frontière est

définie par la surface S , nous obtenons :

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div} F(U) dV = 0 \quad (1.20)$$

L'utilisation de la formule d'Ostrogradski dans l'expression (1.20), permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_S F(U^*) \cdot n dS = 0 \quad (1.21)$$

où n définit la normale à S sortante du volume V et $U^* = (E^*, H^*)$ les traces des champs E et H dans V sur la surface S . Enfin le terme $F(U^*) \cdot n$ s'exprime sous la forme

$$\begin{pmatrix} n \times H^* \\ \varepsilon_0 \\ n \times E^* \\ \mu_0 \end{pmatrix}$$

Discrétisation spatiale et temporelle

En termes d'inconnues dans un schéma cell-centered, nous prenons les champs E et H localisés au centre de gravité de chaque cellule V . Pour pouvoir écrire le schéma numérique, il reste donc à évaluer les champs aux frontières des cellules en fonction des inconnues. Pour cela, il existe deux approches :

- une approche dite à flux centrés où les champs frontières sont considérés comme étant la demie-somme des inconnues des cellules voisines ;
- une approche dite à flux décentrés où les champs frontières sont établis à l'aide d'une étude des courbes caractéristiques de l'équation des ondes. C'est sur cette deuxième approche que nous nous focalisons dans la suite.

Soit le volume V_i nous obtenons la forme semi-discrète du schéma suivante :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{1}{\|V_i\|} \sum_{k=1}^{n_s} \|S_k\| F(U_k^*) n_k \quad (1.22)$$

Avec U_i les valeurs au centre pour le volume V_i , n_s le nombre de surfaces S_k frontières du volume i , et n_k la normale sortante unitaire à la surface S_k . Soit τ la coordonnée paramétrique suivant n d'un point (x, y, z) . Le flux $F(U_k^*)$ sur la surface S_k entre deux volumes est obtenu grâce à la valeur U_k^* de U au centre de S_k . En projetant l'équation (1.19) sur $\tau \cdot n$ avec $n(n_x, n_y, n_z)$ la normale unitaire à S_k , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial U} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial U} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial U} \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) \frac{\partial U}{\partial \tau} &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

où $\frac{\partial \tau}{\partial x} = n_x$, $\frac{\partial \tau}{\partial y} = n_y$ et $\frac{\partial \tau}{\partial z} = n_z$.

Nous pouvons maintenant écrire l'équation (1.23) sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (1.24)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n_z}{\varepsilon_0} & -\frac{n_y}{\varepsilon_0} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{n_z}{\varepsilon_0} & 0 & \frac{n_x}{\varepsilon_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_y}{\varepsilon_0} & -\frac{n_x}{\varepsilon_0} & 0 \\ 0 & -\frac{n_z}{\mu_0} & \frac{n_y}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n_z}{\mu_0} & 0 & -\frac{n_x}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n_y}{\mu_0} & \frac{n_x}{\mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les équations de Maxwell forment un système hyperbolique, donc les valeurs propres λ_i de la matrice A sont réelles, et sont données par : $(\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}, \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}, -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}, -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}, 0, 0)$. Après avoir trouvé six vecteurs propres indépendants, nous pouvons écrire A sous la forme $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$ avec $\Lambda = (diag(\lambda_i))_{i=1,6}$ une matrice diagonale, et

$$P = \begin{pmatrix} n_x & 0 & \frac{n_x n_z}{v \mu_0} & -\frac{n_x n_y}{v \mu_0} & -\frac{n_x n_z}{v \mu_0} & \frac{n_x n_y}{v \mu_0} \\ n_y & 0 & \frac{n_y n_z}{v \mu_0} & \frac{n_x^2 + n_z^2}{v \mu_0} & -\frac{n_y n_z}{v \mu_0} & -\frac{n_x^2 + n_z^2}{v \mu_0} \\ n_z & 0 & -\frac{n_x^2 + n_y^2}{v \mu_0} & -\frac{n_y n_z}{v \mu_0} & \frac{n_x^2 + n_y^2}{v \mu_0} & \frac{n_y n_z}{v \mu_0} \\ 0 & n_x & -n_y & -n_z & -n_y & -n_z \\ 0 & n_y & n_x & 0 & n_x & 0 \\ 0 & n_z & 0 & n_x & 0 & n_x \end{pmatrix}$$

où $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$ est la vitesse de la lumière dans le milieu.

Nous écrivons alors l'équation (1.24) sous la forme :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial \tau} = 0 \quad (1.25)$$

avec $V = P^{-1} \cdot U$.

En utilisant l'équation (1.25), nous obtenons une équation caractéristique pour chaque valeurs propres. En négligeant le temps de propagation entre le centre et la frontière des cellules, nous obtenons une relation entre les valeurs de chaque coté de la surface S et les valeurs aux centre de la cellule adjacente (figure 1.2.2). Sur la courbe caractéristique définie par $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$, nous avons $V^L = V^*$ et sur la courbe caractéristique définie par $-\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$, nous avons $V^R = V^{**}$.

Considérons maintenant les champs E et H , nous obtenons alors [18] :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n \times E^* - n \times n \times H^* = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n \times E^L - n \times n \times H^L \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n \times E^{**} + n \times n \times H^{**} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n \times E^R + n \times n \times H^R \end{cases} \quad (1.26)$$

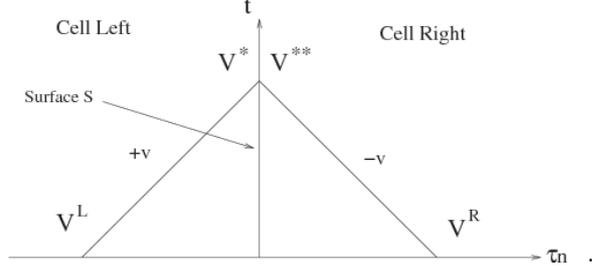


figure 1.6: Courbes caractéristiques définies par $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Nous pouvons maintenant ajouter à ces relations, les conditions de continuité des champs sur la frontière entre deux cellules données par :

- En espace libre :

$$\begin{cases} n \times E^* = n \times E^{**} \\ n \times H^* = n \times H^{**} \end{cases}$$

- Sur une surface parfaitement conductrice :

$$\begin{cases} n \times E^* = n \times E^{**} = 0 \\ n \times H^* = n \times H^{**} \end{cases}$$

- Pour une plaque mince d'épaisseur d et de conductivité σ :

$$\begin{cases} n \times E^* = n \times E^{**} \\ n \times H^{**} - n \times H^* = -(\sigma d) n \times n \times E^* \end{cases}$$

- Pour une condition de non réflexion :

$$n \times E^* + n \times n \times H^* = 0$$

Les relations de continuité des champs sur S , et les équations (1.26) permettent d'évaluer les valeurs des champs frontière (E^*, H^*) et (E^{**}, H^{**}) sur cette surface en fonction des champs E et H pris aux centres de chaque volume adjacent à la face. Si on considère ces valeurs pour calculer les flux numériques, on obtient un schéma peu efficace en termes de précision (voir [22]). Pour augmenter celle-ci, on peut évaluer un gradient de la solution dans chaque cellule en fonction des voisines et calculer par un développement de Taylor une valeur frontière en fonction de la valeur centrale à la cellule ([23]). On utilise ensuite ces valeurs pour déterminer (E^*, H^*) avec les formules précédentes. On obtient ainsi un pseudo ordre 1 en espace qui améliore la précision de notre schéma.

Le schéma temporel utilisé pour résoudre notre forme conservative des équations de Maxwell est un schéma prédicteur-correcteur qui s'écrit :

- en étape prédictrice : $(\tilde{E}, \tilde{H}) = (E^n, H^n) + \frac{dt}{2} flux(E^n, H^n)$
- en étape correctrice : $(\tilde{E}^{n+1}, \tilde{H}^{n+1}) = (E^n, H^n) + dt flux(\tilde{E}, \tilde{H})$

Ce schéma, pour un pas de temps constant, est d'ordre 2. On peut montrer que le schéma discret obtenu converge sous une condition non optimale donnée par :

$$dt \leq \min_{K \in \tau_h} \left(\frac{V_K}{\nu_K \sum_{i=1, ns_K} S_{i,K}} \right)$$

où τ_h , ν_K , V_K , ns_K et $S_{i,K}$ sont respectivement la triangularisation de Ω , la vitesse des ondes dans la cellule K , le volume et le nombre de surfaces frontières de celle-ci et finalement l'aire de la surface frontière i de la cellule K . Cette condition a été déterminée en étudiant l'énergie du système [25].

L'utilisation de maillages non structurés entraîne une disparité qui peut être importante sur la taille des cellules de ceux-ci. Ceci permet, en particulier, de pouvoir raffiner plus ou moins précisément une zone de calcul, mais entraîne aussi un pas de temps très petit à cause du critère de stabilité qui doit être vérifié sur toutes les mailles. Pour pallier à ce problème des études de stratégies de pas de temps local ont été mises en oeuvre [26][27]. Ces méthodes définissent des classes de pas de temps, où le pas temporel est donné par $dt_k = 2^k dt_{min}$, avec k un entier supérieur ou égal à 1 et dt_{min} la valeur de pas de temps la plus petite dans le maillage. On obtient alors à chaque pas de temps, correspondant à la classe la plus élevée $\hat{dt}_{(\max(k))}$, un schéma récursif en temps représenté pour 3 classes par la figure 1.7. Sur cette figure, les étapes sont numérotées et on indique pour chacune s'il s'agit d'une étape prédictrice \hat{p} ou correctrice \hat{c} .

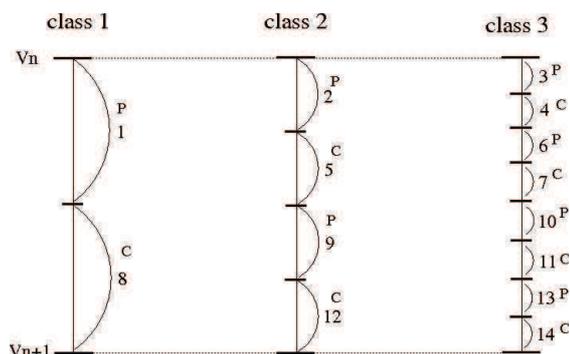


figure 1.7: Etape nécessaires à un pas du schéma prédicteur correcteur à 3 classes de temps.

Introduction des modèles de matériaux et de fils minces dans le schéma volumes finis

Les modèles de matériaux décrits dans le paragraphe précédent ne posent aucune difficulté pour être introduit dans le schéma volumes finis [22]. En effet les matériaux volumiques sont associés aux volumes et donc intégrés sur ceux-ci, quant aux matériaux minces, ils sont pris en compte comme une condition limite particulière à l'interface entre deux cellules. En ce qui concerne les fils minces, des travaux ont été menés sur des formalisme prenant en compte des fils qui suivent les arêtes du maillage [22] ou prenant

en compte des fils dits obliques [28], c'est-à-dire indépendant du maillage. Pour ce qui est de la discrétisation des équations liées aux fils, on utilise principalement comme pour la méthode de Yee, un schéma leap-frog en espace et en temps. Il est possible aussi de prendre un schéma de type volumes finis pour cette discrétisation, mais cela n'apporte pas de réels gains. Dans le formalisme où les fils suivent les arêtes du maillage du domaine de calcul, on définit un tube maillé autour du fil sous forme de prismes comme décrit dans la figure 1.8. Pour la remise à jour des champs, dans les cellules autour du fil, le courant est réparti suivant un secteur angulaire (voir thèse de P. Bonnet [22]). Dans le cas du formalisme fil obliques, Jeffrey définit un cylindre fictif où les champs sont relevés pour calculer le courant sur les câbles, et où la remise à jour de ces champs est aussi effectuée. Cette technique s'inspire du modèle de fils obliques développé par F. Edelvik pour le schéma de Yee et possède les mêmes inconvénients quant aux jonctions entre fils.

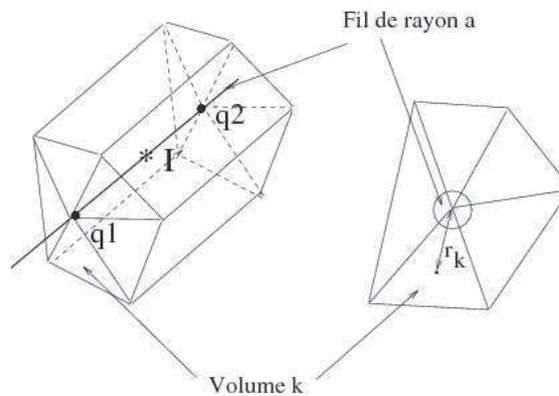


figure 1.8: Définition des mailles autour d'un segment filaire

La mise en oeuvre de la méthode volumes finis permet d'obtenir des gains calcul et précisions sur les champs localisés à proximité des parois des structures étudiées, mais le caractère dissipatif du schéma limite son application. Une solution alors envisagée est de monter en ordre d'approximation spatiale à l'intérieur de chaque cellule, ce qui a conduit dans le début des années 2000, à de nombreux papiers sur l'étude de schéma Galerkin discontinu pour la résolution du système de Maxwell.

1.2.3 Les méthodes d'ordre élevé : schéma Galerkin Discontinu.

Si nous considérons un maillage de type volumes finis pour un domaine de calcul, les schéma Galerkin Discontinus sont des approches permettant d'avoir des approximations spatiales différentes dans chaque cellule du maillage et d'ordre plus ou moins élevé. Ces schémas sont donc un palliatif au problème de dissipation ou de dispersion numérique dont souffrent les approches volumes finis et différences finies. En revanche, le fait de

pouvoir avoir un nombre important de degrés de liberté dans une cellule entraîne des coûts mémoire, pour stocker les matrices de masse, de rigidité et de saut, pouvant être non négligeable suivant l'ordre d'approximation demandé. Nous présentons ici un schéma Galerkin Discontinu étudié conjointement à l'Onera et à l'Inria pour palier à ce problème. Cette approche est différente de celle proposée par J. Hesthaven [29] qui est une approche Galerkin discontinu utilisant des éléments tétraédrique, dont les positions des degrés de libertés sont judicieusement choisis pour minimiser le stockage mémoire. Notre méthode est basée sur un maillage constitué de cellules hexaédriques et dont les matrices de masse et de rigidité ne nécessitent pas de stockage. Dans ce paragraphe, nous présentons le principe de cette formulation et pour plus de détails, on pourra se référer à la thèse de S. Pernet [30].

Formulation mathématique GD des équations de Maxwell

Soit le domaine de calcul Ω , tel que $\Omega = \cup_{i=1,n} K_i$ où K_i définit un élément hexaédrique et l'ensemble de ces N éléments constitue une partition de Ω . En reprenant la formulation générale d'une approche volumes finis ou Galerkin Discontinue, on peut alors écrire sur chaque élément K :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} + \beta [\mathbf{H} \times \mathbf{n}]_{\partial K}^K \delta_{\partial K} + \alpha [\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})]_{\partial K}^K \delta_{\partial K}, \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} + \gamma [\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\partial K}^K \delta_{\partial K} + \delta [\mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})]_{\partial K}^K \delta_{\partial K}, \end{cases} \quad \text{\textcircled{a}1.27}$$

où $[\mathbf{u}]_{\partial K}^K$ définit le saut au travers de la frontière ∂K du volume K . Plus en détails, le saut s'exprime comme : $[\mathbf{u}]_{\partial K}^K = \mathbf{u}_K^+ - \mathbf{u}_K^-$ où \mathbf{u}_K^- est la trace sur la frontière ∂K de la valeur \mathbf{u} prise dans l'élément K et \mathbf{u}_K^+ la trace sur ∂K de la valeur \mathbf{u} prise dans l'autre volume adjacent à la frontière ∂K . Lorsque $\Gamma = \partial K \cap \partial \Omega \neq \emptyset$ alors $\mathbf{u}_K^+ = 0$. Dans les expressions précédentes, le symbole de Kronecker $\delta_{\partial K}$, égal à 1 sur ∂K et à 0 ailleurs, marque le fait que les termes de saut sont uniquement ajoutés sur les surfaces des éléments.

Dans ce chapitre, on a pu montrer que pour assurer l'équivalence du système \textcircled{a}1.27 avec le système de Maxwell, les coefficients α , β , δ et γ doivent vérifier :

$$\begin{cases} \alpha = \delta = 0 \\ 1 + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{\textcircled{a}1.28}$$

En fait, il suffit d'avoir $1 + \beta - \gamma = 0$ et $\alpha, \delta \geq 0$ pour avoir le système \textcircled{a}1.27 bien posé.

Approximation numérique du formalisme GD pour les équations de Maxwell

Dans notre approximation nous considérons les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} suffisamment réguliers pour appartenir à $(H^1(K))^3$. Nous définissons ensuite, l'espace :

$$\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h) = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}|_K \in (H^1(K))^3\}$$

Nous définissons alors la formulation variationnelle de âl.27û suivante :
Chercher $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h))^2$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \times \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \\ \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \beta \int_{\partial K} [[\mathbf{H} \times \mathbf{n}]]_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\varphi} \, ds \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_K \nabla \times \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx + \gamma \int_{\partial K} [[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]] \cdot \boldsymbol{\psi} \, ds \right) \end{array} \right. \quad \text{âl.29û}$$

où $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$ et $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$.

Nous introduisons l'espace d'approximation de $\mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h)$ par :

$$U_h = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3; \forall K \in \mathcal{T}_h, DF_K^* \mathbf{v}|_K \circ \mathbf{F}_K \in [Q_r(\hat{K})]^3 \},$$

où $Q_r(\hat{K})$ définit l'ensemble des polynômes de $\hat{K} = [0, 1]^3$ d'ordre inférieur ou égal à r sur chaque variable. Soit $K \in \mathcal{T}_h$, alors \mathbf{F}_K définit un isomorphisme tel que $\mathbf{F}_K(\hat{K}) = K$. DF_K définit la matrice Jacobienne de cet isomorphisme et $J_K = \det(DF_K)$ son Jacobien. Comme on le verra dans la suite, la définition non classique de l'espace d'approximation U_h va permettre par l'utilisation d'une transformation H-rot d'avoir peu de stockage pour les matrices de rigidité et de saut et donc de gagner aussi en temps calcul.

Le problème approximé consiste alors à chercher :

$(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h) \in (U_h)^2$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, dx = - \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \times \mathbf{H}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, dx \\ \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \alpha \int_{\partial K} [[\mathbf{H}_h \times \mathbf{n}]]_{\partial K}^K \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, ds \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{H}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_K \nabla \times \mathbf{E}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, dx + \gamma \int_{\partial K} [[\mathbf{E}_h \times \mathbf{n}]] \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, ds \right) \end{array} \right. \quad \text{âl.30û}$$

Définition des fonctions de base et des degrés de liberté

Pour définir les fonctions de base sur U_h , nous définissons d'abord les fonctions de base sur l'élément de référence \hat{K} âFig. 1.9û Soit \hat{K} l'élément de référence, les degrés de liberté sont positionnés aux points $\vec{\xi}_{ijk} = (\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j, \hat{\xi}_k)$, $1 \leq i \leq r+1$, $1 \leq j \leq r+1$, $1 \leq k \leq r+1$, de \hat{K} , tels que $\hat{\xi}_\ell$ représente l'abscisse d'un point de quadrature de Gauss sur l'intervalle $[0, 1]$. Par ailleurs, nous introduisons un ensemble de $(r+1)^3$ polynômes de

Lagrange $\hat{\varphi}_{ijk} \in Q_r$ tels que $\hat{\varphi}_{ijk}(\vec{\xi}_{\ell,m,n}) = \delta_{i\ell}\delta_{jm}\delta_{kn}$, où $\delta_{ij} = \delta_{x_i}(x_j) = 1$ si $i = j$ sinon 0. Finalement, nous définissons l'ensemble $\hat{\mathcal{B}}$ des fonctions de base vectorielles sur \hat{K} données en un point $\vec{\xi}_{ijk}$ par : $\hat{\varphi}_{ijk}^{(1)} = (\hat{\varphi}_{ijk}, 0, 0)^T$, $\hat{\varphi}_{ijk}^{(2)} = (0, \hat{\varphi}_{ijk}, 0)^T$, $\hat{\varphi}_{ijk}^{(3)} = (0, 0, \hat{\varphi}_{ijk})^T$.

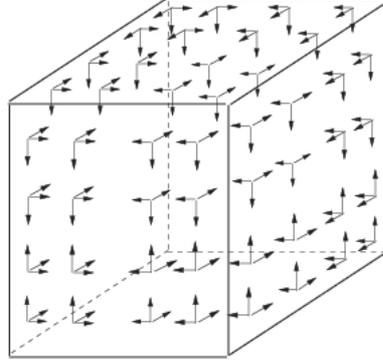


figure 1.9: Localisation des fonctions de base sur l'élément de référence pour une approximation Q_3

On déduit ensuite de $\hat{\mathcal{B}}$ une base de fonctions \mathcal{B} sur l'espace U_h . Pour chaque élément K , nous définissons un ensemble de $3(r+1)^3$ fonctions de base $\varphi_{ijk,K}^{(\ell)}$ telles que $\varphi_{ijk,K}^{(\ell)} = DF_K^{*-1}\hat{\varphi}_{ijk}^{(\ell)}$, pour $\ell = 1..3$. L'espace \mathcal{B} est alors donné par :

$$\mathcal{B} = \{\varphi_{ijk,K}^{(\ell)}, \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall (ijk) \in \{1..r+1\}^3, \forall \ell \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Dans leur définition, le support de chaque fonction de base est réduit à un élément. De manière évidente, on a $\dim U_h = 3(r+1)^3 N_e$ pour un maillage dont le nombre d'éléments est N_e .

En utilisant cette approximation, nous pouvons montrer que :

- le terme général des matrices de masse se réduit à :

$$\int_K \mathbf{u} \cdot \varphi_{ijk,K}^l dx = \omega_{ijk} \sum_{p=1}^3 \mathbf{u}_{ijk,K}^p (DF_K^{-1}(DF_K^*)^{-1})_{pl} |J_K|$$

où ω_{ijk} est le poids de la formule de quadrature de Gauss au point \hat{x}_{ijk} et le terme générique $(M)_{pl}$ définit la composante (p, l) de la matrice M . Donc en choisissant une numérotation point par point des composantes, nous obtenons une matrice de masse bloc-diagonale 3×3 et diagonale dans le cas de maillages cartésiens.

- le terme général des matrices de rigidité se réduit à :

$$\int_K \nabla \times \mathbf{u}(t, x) \cdot \varphi_{ijk,K}^l(x) dx = \sum_{p=1}^3 \sum_{m,n,q=1,N} \text{sign}(J(\hat{x}_{mnq})) \omega_{mnq} \mathbf{u}_{mnq,K}^l(t) (\hat{\nabla} \times \hat{\varphi}_{mnq}^p)^l(\hat{x}_{ijk})$$

On note sur cette expression que pour un élément K donné, il suffit de connaître le signe du jacobien sur celui-ci pour évaluer le terme de rigidité. Le reste étant donné sur l'élément de référence.

– le terme des matrices de saut est donné par :

$$\int_{\Gamma_{i,K}} \llbracket \mathbf{u} \times \mathbf{n}_{i,K} \rrbracket \cdot \varphi_{ijk,K}(x)^l ds = \text{sign}(J_{K'}) \int_{\hat{\Gamma}_{i'}} (DF_K^{-1} \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} DF_{K'}) (\hat{\mathbf{u}}_{K'} \times \hat{\mathbf{n}}_{i'}) \cdot \hat{\varphi}_{ijk}^l \circ \mathcal{G}_{K' \rightarrow K} d\hat{s}' - \text{sign}(J_K) \int_{\hat{\Gamma}_i} (\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{n}}_i) \cdot \hat{\varphi}_{ijk}^l d\hat{s}$$

avec $\mathcal{G}_{K' \rightarrow K}$ représentant la permutation qui fait correspondre la numérotation locale des inconnues sur les éléments K et K' au niveau de la face adjacente à ceux-ci. $\hat{\mathbf{n}}_i$ est la normale sortante de \hat{K} associée à la face de référence $\hat{\Gamma}_i$. On note encore une fois que seul le signe du jacobien est nécessaire.

Formulation du schéma numérique lié aux équations de Maxwell

Grâce au choix de l'espace d'approximation et des éléments hexaédriques, les intégrales des différents termes concernant les matrices de masse, de rigidité et de saut se résument à peu de calcul et de stockage. On peut écrire de manière matricielle le système de Maxwell approximé en espace sous la forme :

$$\begin{aligned} M_\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + M_\sigma \mathbf{E} &= R \mathbf{H} + S_E \mathbf{E} \\ M_\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -R \mathbf{E} + S_H \mathbf{H} \end{aligned} \tag{1.31}$$

où les matrices de masses M_ε , M_μ , M_σ sont des matrices bloc-diagonales 3×3 . Concernant les matrices de rigidité R et de saut S_E , S_H , nous obtenons celles-ci à partir du signe du jacobien sur l'élément K considéré et d'un calcul générique sur l'élément de référence. Donc au final, nous obtenons un schéma peu coûteux en mémoire et très rapide en temps puisqu'on évite l'inversion d'une grande matrice de masse.

Pour compléter notre schéma numérique, nous choisissons un schéma leap-frog pour l'approximation temporelle, comme dans le cas du schéma de Yee.

Le schéma Galerkin discontinu proposé allie à la fois la possibilité de tenir compte des géométries courbes des objets et le fait de diminuer considérablement les erreurs de dispersion et de dissipation numériques. Toutefois cela à un coût, notamment en termes d'opérations nécessaires à une itération temporelle. En effet, comme dans l'approche volumes finis, la gestion d'un maillage non structuré peut impliquer un pas de temps très petit. Il existe alors des stratégies de pas de temps local [31][32] qui permettent de réduire ces coûts calculs. Pour le schéma présenté, la stratégie utilisée est basée sur un schéma leap-frog récursif comme décrit dans la figure 1.10 pour 3 classes.

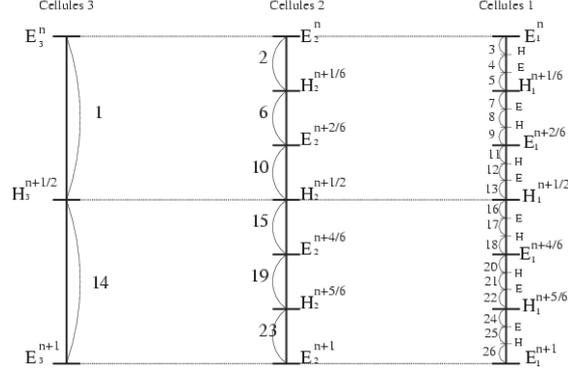


figure 1.10: Opérations effectuées pour une étape du schéma Leap-frog à 3 classes.

Chaque classe k a un pas de temps égal à $2(k+1)dt_{min}$, où dt_{min} est le pas le plus petit sur le domaine, pour assurer un rendez-vous sur les champs électriques et magnétiques à chaque étape [32].

Contrairement aux volumes finis, il est aussi possible de jouer sur l'ordre d'approximation spatiale de la solution à l'intérieur de chaque cellule. On peut donc affecter des ordres faibles aux petites cellules et des ordres plus grands sur les cellules de grandes dimensions. Cela permet, à précision égale, d'augmenter le pas de temps et donc de diminuer les coûts calculs [33]. Les gains calcul obtenus grâce à l'utilisation de ce type de stratégies sont notables, toutefois, si on ne fait pas attention à la réalisation du maillage, on peut faire chuter cet avantage.

Introduction de modèles de matériaux et de fils minces dans le schéma Galerkin Discontinu

L'introduction du modèle de matériau volumique ne pose aucune difficulté dans le formalisme GD. En effet, il suffit simplement de modifier les matrices de masses obtenues pour introduire celui-ci. Dans cette approche, on peut même considérer des tenseurs de matériaux non diagonaux, la formule discrète du schéma restera analogue.

Pour un matériau mince d'épaisseur e et de conductivité σ localisé sur une face, on définit sur celle-ci, comme pour les autres méthodes, une impédance par $Z_s = \frac{1}{\sigma e}$, telle que si (E^*, H^*) et (E^{**}, H^{**}) sont les champs pris de part et d'autre de la face, ils satisfont :

$$n \times H^{**} - n \times H^* = -\frac{1}{Z_s} n \times n \times E^*$$

où n est la normale sur la face orientée de (E^*, H^*) vers (E^{**}, H^{**}) . Comme pour l'approche volumes finis, pour tenir compte du matériau mince, on modifie les sauts au niveau de la face et on écrit sur les cellules adjacentes à celle-ci :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E = \nabla \times H \\ \mu \partial_t H = -\nabla \times E - Z_s [n \times (H \times n)] - (E \times n) \end{cases}$$

La discrétisation de cette équation s'effectuera sans aucune difficulté comme vu précédemment pour les termes du schéma général.

Concernant les fils minces, il existe encore peu d'études réalisées dans la littérature. On peut toutefois citer des travaux menés à l'ONERA [34] sur un formalisme de fils suivant les arêtes, mais aussi plus récemment les travaux de thèse de Bo Zhao [35] sur un formalisme de fils obliques similaire encore une fois au modèle de F. Edelvik. Il reste cependant, pour ce schéma des difficultés à avoir un modèle de fil mince efficace.

L'approximation fil mince étudiée à l'ONERA, se base sur un schéma Galerkin Discontinu. Pour cela, le fil est découpé en segments suivant les arêtes du maillage sur lesquels on calcul un courant et une charge vérifiant :

$$\begin{cases} \partial_t I = -\nu^2 \partial_l q + \frac{E}{L} \\ \partial_t q = -\partial_l I \end{cases} \quad \text{â1.32û}$$

Dans ces équations, on calcule une self moyenne $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{r_{moy} + a_0}{2a_0}\right)$ avec a_0 définissant le rayon du fil et r_{moy} la distance moyenne entre le fil et les degrés de liberté des cellules adjacentes au segment. Pour fermer le problème â1.32û, on pose comme conditions limites :

- $q = 0$ sur les extrémités de fil connectées à des parois métalliques ffi
- $I = 0$ sur les extrémités de fil non connectées ffi
- Loi de Kirchoff et égalité des tensions sur jonctions entre fils.

On reformule le problème sur chaque segment i , en intégrant les conditions limites sous formes de sauts :

$$\begin{cases} \int_{S_i} \partial_t I \cdot \psi dl = - \int_{S_i} \nu^2 \partial_l q \cdot \psi dl + \int_{S_i} \frac{E}{L} \cdot \psi dl + \alpha \int_{\partial S_i} \llbracket \nu^2 q \rrbracket \cdot \psi dl \\ \int_{S_i} \partial_t q \cdot \psi dl = - \int_{S_i} \partial_l I \cdot \psi dl + \beta \int_{\partial S_i} \llbracket I \rrbracket \cdot \psi dl \end{cases} \quad \text{â1.33û}$$

Les valeurs α et β sont choisies pour conserver une énergie donnée par :

$$\sum_{i=1, N_s} \left(\int_{S_i} I \cdot I dl + \nu^2 \int_{S_i} q \cdot q dl \right)$$

En tenant compte des conditions limites, on obtient :

- $\alpha = -1, \beta = 0$ pour un segment connecté à un plan métallique ffi
- $\alpha = 0, \beta = -1$ pour un segment non connecté ffi
- $\alpha = -1/2, \beta = -1/2$ pour une jonction.

Soit F_s la transformation entre un segment s et $[0, 1]$. Pour une approximation d'ordre r , on définit $r + 1$ degrés de liberté sur $[0, 1]$ aux points de Gauss, ainsi qu'une fonction de base scalaire $\hat{\varphi}_j(\hat{x})$ par degrés j , telle que $\hat{\varphi}_j$ soit le polynôme de Lagrange sur $[0, 1]$, vérifiant $\hat{\varphi}_j(\hat{x}_k) = \delta_{j,k}$ pour tout point de Gauss \hat{x}_k . Les fonctions de bases sur le segment s sont données par : $\varphi_j \circ F_s(\hat{x}) = \hat{\varphi}_j(\hat{x})u$, où u définit le vecteur directeur du segment s .

En écrivant sur chaque segment s , $I(t, x) = \sum_{i=1}^{r+1} I_i(t) \varphi_i(x)$ et $q(t, x) = \sum_{i=1}^{r+1} q_i(t) \varphi_i(x)$, on obtient :

$$\begin{cases} M \frac{I^{n+1/2} - I^{n-1/2}}{\Delta t} = c^2 R Q^n + S_I Q^n + B E^n \\ M \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} = -R I^{n+1/2} + S_Q I^{n+1/2} \end{cases} \quad \text{âl.34û}$$

où M est une matrice diagonale par blocs, R , S_Q et S_I sont des matrices définies sur l'élément unité. Concernant la matrice B , pour chaque élément K voisin du segment s , on doit stocker DF_K^{*-1} en chaque degrés de liberté du segment. F_K définit la transformation de l'élément K sur le cube unité.

Le formalisme de fil minces ainsi défini a été utilisé dans le cadre de maillages cartésiens et a montré un bon comportement [34, 36]. Toutefois pour des maillages non structurés et des fils obliques, ce formalisme ne convient pas.

1.3 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons présenté, pour un contexte CEM, les équations et certains modèles physiques nécessaires à la mise en équation du problème. A ce titre, nous avons rappelé les équations de Maxwell, l'introduction dans celles-ci d'un formalisme de couches parfaitement absorbantes pour borner le domaine de calcul, ainsi que des modèles de matériaux et de structures filaires. Nous avons ensuite donné un ensemble non exhaustif de méthodes utilisées aujourd'hui pour résoudre les équations de Maxwell, avec les modèles proposés, dans le domaine temporel. Pour cela, nous avons choisi de montrer trois schémas qui illustrent la progression effectuée dans les outils de simulation actuels, ainsi que les limitations actuelles encore existantes sur ces outils. Les derniers développements effectués autour de schémas Galerkin Discontinus montrent tout le potentiel de ces méthodes pour résoudre les équations de Maxwell, mais malheureusement aussi toute la difficulté de leur mise en oeuvre dans la génération des maillages dont les coûts calculs sont intimement liés. Aujourd'hui, de nombreux industriels veulent pouvoir obtenir des maillages rapidement et la solution de maillages cartésiens reste encore très attractive et très utilisée. Toutefois l'intérêt de la montée en ordre des schémas numériques est aussi nécessaire pour de nombreuses configurations. Un objectif de cette thèse est de proposer un nouveau schéma alliant la montée en ordre et le maillage cartésien pour répondre à ce besoin. Pour cela, nous nous sommes orientés sur une approche de type éléments finis particulière qui s'assimile au schéma de Yee à l'ordre 1 et qui utilise des fonctions de bases similaires à l'approche Galerkin Discontinue décrite dans ce chapitre.

Chapitre 2

Éléments finis cartésiens d'ordre élevé

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une méthode d'éléments finis particulière, adaptée aux maillages structurés cartésiens pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel [38]. Cette méthode, de part le choix effectué sur les espaces d'approximations et les fonctions de bases pour le calcul des champs électriques et magnétiques, est similaire à l'ordre 1 au schéma différences finies de Yee. C'est pourquoi, par abus de langage, dans ce document, nous appellerons aussi cette méthode : méthode différences finies d'ordre élevée $\hat{\text{DIFOE}}$. Avant de présenter la méthode DIFOE, nous allons donner le formalisme mathématique des équations de Maxwell approximé par celle-ci, puis nous précisons les espaces d'approximation et le schéma numérique de la méthode. Nous donnons ensuite, une condition de stabilité et une étude numérique de la convergence du schéma. Enfin, nous montrons comment utiliser une approximation spatiale locale à chaque cellule, définie dans chaque direction, pour augmenter les performances de calcul de la méthode.

2.1 Formulation mathématique du problème à résoudre

Soit Ω un domaine de calcul borné de \mathbb{R}^3 et $T \in \mathbb{R}^+$ une quantité relative à un temps d'observation. Le problème qui nous intéresse, consiste à chercher le champ électrique $E(t, x)$ et le champ magnétique $H(t, x)$, pour $x \in \Omega$ et $t \in [0, T[$, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J = \nabla \times H \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \times E \text{ sur } \Omega \\ E(t, x) \times n = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \\ E(t = 0, x) = H(t = 0, x) = 0 \end{array} \right. \quad \hat{\text{a2.1}} \hat{u}$$

où n définit le vecteur normal à $\partial\Omega$, extérieur à Ω .

Soit $\varphi(x) \in H^0(\text{rot}, \Omega)$ et $\psi(x) \in L^2(\Omega)$. On peut alors montrer que le problème $\hat{a}2.1\hat{u}$ est équivalent à chercher $(E, H) \in H(\text{rot}, \Omega)$, vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J) \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega} \nabla \times H \cdot \varphi \, dx \text{ sur } \Omega \\ \int_{\Omega} (\frac{\partial H}{\partial t} \cdot \psi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \times E \cdot \psi \, dx \text{ sur } \Omega \\ E(t, x) \times n = 0 \, \forall x \in \partial\Omega \\ E(t = 0, x) = H(t = 0, x) = 0 \end{cases} \quad \hat{a}2.2\hat{u}$$

En effectuant une intégration par partie sur la première équation du système $\hat{a}2.2\hat{u}$, nous obtenons pour celle-ci :

$$\int_{\Omega} (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J) \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega} H \cdot \nabla \times \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} H \cdot \varphi \times n \, ds \quad \hat{a}2.3\hat{u}$$

De part le fait que $\varphi \in H^0(\text{rot}, \Omega)$, on en déduit que l'équation $\hat{a}2.3\hat{u}$ se réduit à :

$$\int_{\Omega} (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J) \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega} H \cdot \nabla \times \varphi \, dx \quad \hat{a}2.4\hat{u}$$

Dans cette formulation, nous voyons que l'on n'a pas besoin d'autant de régularité sur H que sur E . Notre problème va donc consister à chercher $(E, H) \in H^0(\text{rot}, \Omega) \times L^2(\Omega)$, vérifiant la forme variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J) \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega} H \cdot \nabla \times \varphi \, dx \\ \int_{\Omega} (\frac{\partial H}{\partial t} \cdot \psi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \times E \cdot \psi \, dx \end{cases} \quad \hat{a}2.5\hat{u}$$

Toutefois, on veut aussi imposer sur le bord du domaine de calcul $\partial\Omega$ la condition $H \cdot n = 0$. Du fait que la trace normale du champ H ne peut être définie directement dans $L^2(\Omega)$, on va donc chercher H dans un espace plus régulier où on peut définir cette trace c'est-à-dire sur $H^0(\text{div}, \Omega)$.

Notre problème mathématique final consistera donc à chercher $(E, H) \in H^0(\text{rot}, \Omega) \times H^0(\text{div}, \Omega)$ tels que $\forall(\varphi, \psi) \in H^0(\text{rot}, \Omega) \times H^0(\text{div}, \Omega)$ on ait :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J) \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega} H \cdot \nabla \times \varphi \, dx \\ \int_{\Omega} (\frac{\partial H}{\partial t} \cdot \psi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \times E \cdot \psi \, dx \end{cases} \quad \hat{a}2.6\hat{u}$$

En établissant les équations $\hat{a}2.6\hat{u}$, nous avons aussi montré que si (E, H) vérifiait les équations de Maxwell, ces valeurs étaient aussi solutions du problème variationnel précédent. Il reste maintenant à prouver l'inverse. Pour cela soit (E, H) vérifiant $\hat{a}2.6\hat{u}$, alors en prenant 2 fonctions de base φ et ψ à support compact dans C^∞ qui est inclus dans $H^0(\text{rot}, \Omega)$ et $H^0(\text{div}, \Omega)$, nous pouvons montrer au sens des distribution que (E, H) vérifient les équations du problème de Maxwell. Pour cela, on se sert du fait que l'espace

des fonctions C^∞ à support compact est dense dans l'espace des distributions et de la définition de la dérivée au sens des distributions. Les conditions aux limites du problème de Maxwell sont directement déduites des espaces fonctionnels choisis. On peut donc, pour résoudre notre problème de Maxwell, chercher une solution au problème variationnel

2.2 Approximation spatiale du problème variationnel

Soit τ_h un maillage cartésien de Ω et un ensemble de parallélépipèdes $(K_i)_{i=1,N}$ tels que $\cup_{i=1}^N K_i = \Omega$. Nous supposons de plus que cet ensemble d'éléments est une partition de Ω . Chaque élément K appartenant à τ_h est de dimensions $dx_K \times dy_K \times dz_K$, et on peut aussi écrire $K = [x1_K, x2_K] \times [y1_K, y2_K] \times [z1_K, z2_K]$.

Soit Q^r l'espace polynomial de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} tel que chaque monôme est de degré inférieur ou égal à r . Définissons les espaces d'approximations de $H^0(\text{rot}, \Omega) \times H^0(\text{div}, \Omega)$ par U et V tels que :

$$U = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in H^0(\text{rot}, \Omega) / \forall K \in \tau_h, (u_1)|_K \in Q^r \times Q^{r+1} \times Q^{r+1}, \\ (u_2)|_K \in Q^{r+1} \times Q^r \times Q^{r+1}, (u_3)|_K \in Q^{r+1} \times Q^{r+1} \times Q^r\}$$

$$V = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in H^0(\text{div}, \Omega) / \forall K \in \tau_h, (v_1)|_K \in Q^{r+1} \times Q^r \times Q^r, \\ (v_2)|_K \in Q^r \times Q^{r+1} \times Q^r, (v_3)|_K \in Q^r \times Q^r \times Q^{r+1}\}$$

Nous définissons ensuite un ensemble de fonctions de bases $\varphi \in U$ et $\psi \in V$ par :

$$\begin{aligned} \forall (K, l_1, l_2, l_3) \in \tau_h \times [1, r] \times [1, r+1] \times [1, r+1] \quad \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x(x, y, z) &= L_{l_1}^g L_{l_2}^{gl} L_{l_3}^{gl} \vec{e}_x \\ \forall (K, l_1, l_2, l_3) \in \tau_h \times [1, r+1] \times [1, r] \times [1, r+1] \quad \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^y(x, y, z) &= L_{l_1}^{gl} L_{l_2}^g L_{l_3}^{gl} \vec{e}_y \\ \forall (K, l_1, l_2, l_3) \in \tau_h \times [1, r+1] \times [1, r+1] \times [1, r] \quad \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^z(x, y, z) &= L_{l_1}^{gl} L_{l_2}^{gl} L_{l_3}^g \vec{e}_z \\ \\ \forall (K, l_1, l_2, l_3) \in \tau_h \times [1, r+1] \times [1, r] \times [1, r] \quad \psi_{l_1 l_2 l_3, K}^x(x, y, z) &= L_{l_1}^{gl} L_{l_2}^g L_{l_3}^g \vec{e}_x \\ \forall (K, l_1, l_2, l_3) \in \tau_h \times [1, r] \times [1, r+1] \times [1, r] \quad \psi_{l_1 l_2 l_3, K}^y(x, y, z) &= L_{l_1}^g L_{l_2}^{gl} L_{l_3}^g \vec{e}_y \\ \forall (K, l_1, l_2, l_3) \in \tau_h \times [1, r] \times [1, r] \times [1, r+1] \quad \psi_{l_1 l_2 l_3, K}^z(x, y, z) &= L_{l_1}^g L_{l_2}^g L_{l_3}^{gl} \vec{e}_z \end{aligned}$$

avec $L_{l_1}^g(x)$ le polynôme de Lagrange d'ordre r dont les racines sont les points de Gauss dans $[x1_K, x2_K]$. et $L_{l_1}^{gl}(x)$ le polynôme de Lagrange d'ordre $r+1$ dont les racines sont les points de Gauss-Lobatto dans $[x1_K, x2_K]$. La définition de $L_{l_2}^g(y)$ et de $L_{l_2}^{gl}(y)$, ainsi que de $L_{l_3}^g(z)$ et $L_{l_3}^{gl}(z)$ est respectivement identique à la précédente en utilisant pour les deux premiers termes l'intervalle $[y1_K, y2_K]$ et l'intervalle $[z1_K, z2_K]$, pour les deux derniers. Comme indiqué dans la figure 2.1, nous utilisons des points de Gauss ou de Gauss-Lobatto en fonction de la composante des champs. Concernant les champs électriques nous utilisons des points de Gauss dans la direction parallèle à la composante et des points de Gauss-Lobatto dans les deux autres directions. Pour les champs magnétiques

nous utilisons, à l'inverse, des points de Gauss-Lobatto dans la direction parallèle à la composante et des points de Gauss dans les deux autres directions.

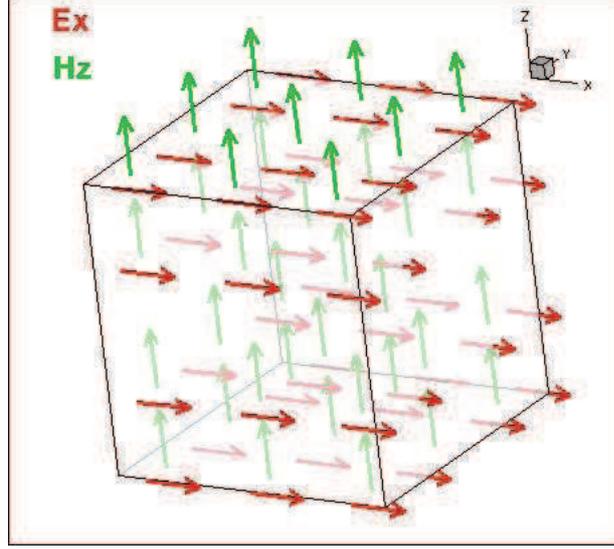


figure 2.1: Composante E_x en rouge, H_y en vert, et H_z en bleu.

En utilisant les espaces d'approximations définis précédemment, sur chaque cellule K nous choisissons l'approximation suivante pour les champs électriques et magnétiques :

$$\tilde{E}_K = \sum_{l_1=1}^r \sum_{l_2=1}^{r+1} \sum_{l_3=1}^{r+1} E_{K,l_1l_2l_3}^x \varphi_{l_1l_2l_3}^x + \sum_{l_1=1}^{r+1} \sum_{l_2=1}^r \sum_{l_3=1}^{r+1} E_{K,l_1l_2l_3}^y \varphi_{l_1l_2l_3}^y + \sum_{l_1=1}^{r+1} \sum_{l_2=1}^{r+1} \sum_{l_3=1}^r E_{K,l_1l_2l_3}^z \varphi_{l_1l_2l_3}^z \quad \hat{a}2.7\hat{u}$$

$$\tilde{H}_K = \sum_{l_1=1}^{r+1} \sum_{l_2=1}^r \sum_{l_3=1}^r H_{K,l_1l_2l_3}^x \psi_{l_1l_2l_3}^x + \sum_{l_1=1}^r \sum_{l_2=1}^{r+1} \sum_{l_3=1}^r H_{K,l_1l_2l_3}^y \psi_{l_1l_2l_3}^y + \sum_{l_1=1}^r \sum_{l_2=1}^r \sum_{l_3=1}^{r+1} H_{K,l_1l_2l_3}^z \psi_{l_1l_2l_3}^z \quad \hat{a}2.8\hat{u}$$

En reprenant les équations de Maxwell nous cherchons à présent (\tilde{E}, \tilde{H}) , que nous noterons aussi (E, H) pour faciliter les notations, dans $U \times V$ vérifiant :

$$\forall \varphi_{l_1l_2l_3,K} \in U, \int_{\Omega} \left(\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E \right) \cdot \varphi_{l_1l_2l_3,K} dx = \int_{\Omega} H \cdot (\nabla \times \varphi_{l_1l_2l_3,K}) dx \quad \hat{a}2.9\hat{u}$$

et

$$\forall \psi_{l_1l_2l_3,K} \in V, \int_{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) \cdot \psi_{l_1l_2l_3,K} dx = - \int_{\Omega} (\nabla \times E) \cdot \psi_{l_1l_2l_3,K} dx \quad \hat{a}2.10\hat{u}$$

Nous allons par la suite détailler le calcul des intégrales des équations $\hat{a}2.9\hat{u}$ et $\hat{a}2.10\hat{u}$. Pour cela, nous utiliserons des formules de quadrature, et grâce au choix des points

d'intégration et à l'orthogonalité des fonctions de bases, nous obtiendrons des matrices de masses diagonales et des matrices de rigidité tri-diagonales.

Soit l'équation 2.9, le terme de masse est donné par :

$$\int_{\Omega} (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E) \cdot \varphi_{l_1 l_2 l_3, K} dx$$

et le terme de rigidité par :

$$\int_{\Omega} H \cdot (\nabla \times \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}) dx$$

Considérons la fonction test $\varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x \forall l_1, l_2, l_3 \in [1, r] \times [1, r+1] \times [1, r+1]$. Soit le terme $M_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x}$ défini par :

$$M_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x} = \int_{\Omega} (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E) \cdot \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x dx$$

L'intégrale n'est non nulle que sur le support $\varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x$, c'est-à-dire l'élément K . Nous pouvons donc écrire :

$$M_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x} = \int_K (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E) \cdot \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x dx$$

Afin d'avoir une précision suffisante dans le calcul des intégrales dans la cellule K , nous utilisons une formule de quadrature, avec $r(r+1)^2$ points. Plus précisément nous utilisons r points de Gauss dans la direction x et $r+1$ points de Gauss Lobatto dans les directions y et z .

Pour appliquer les formules de quadrature de Gauss, nous définissons une transformation F , entre chaque cellule K et l'élément de référence $[0, 1]^3$. Cette transformation est une simple homothétie précédée d'une translation, définie par le changement de variable suivant :

$$\hat{x} = dx_K \cdot x + x0_K$$

$$\hat{y} = dy_K \cdot y + y0_K$$

$$\hat{z} = dz_K \cdot z + z0_K$$

Cette transformation F laisse inchangées les fonctions de bases, c'est-à-dire : $\varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x \circ F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{\varphi}_{l_1 l_2 l_3, K}^x(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. avec $\hat{\varphi}_{l_1 l_2 l_3, K}^x(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = L_{l_1}^g L_{l_2}^{gl} L_{l_3}^{gl} \vec{e}_x$.

Pour l'évaluation du terme $M_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x}$, nous voyons apparaître un facteur $|J_K| = dx_K dy_K dz_K$ issus du changement de variable ainsi que les poids de Gauss et Gauss Lobatto $\omega_{ijk}^{gl} = \omega_i^g \omega_j^{gl} \omega_k^{gl}$ dus à la formule de quadrature. Ceci nous amène à l'expression suivante :

$$M_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} |J_K| \omega_{ijk}^{gl} \left(\varepsilon \frac{\partial E(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k)}{\partial t} + \sigma E(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k) \right) \cdot \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k) dx$$

Avec \hat{x}_i le i^{eme} point de Gauss, \hat{y}_j le j^{eme} point de Gauss Lobatto, \hat{z}_k le k^{eme} point de Gauss Lobatto. Nous pouvons alors remarquer que les points $\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k$ sont les racines de notre fonction test $\varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x = L_{l_1}^g L_{l_2}^{gl} L_{l_3}^{gl} \vec{e}_x$ et donc : $\varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k) = \delta_{l_1 i} \delta_{l_2 j} \delta_{l_3 k} \vec{e}_x$. Ce qui permet alors d'écrire :

$$M_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x} = |J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{gl} \left(\varepsilon \frac{\partial E(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_{l_3})}{\partial t} + \sigma E(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_{l_3}) \right) \cdot \vec{e}_x dx$$

En utilisant la formule 2.7 pour expliciter $E(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_{l_3})$, nous pouvons écrire :

$$E(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_{l_3}) \cdot \vec{e}_x = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} E_{Kijk}^x \varphi_{ijk}^x(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_{l_3})$$

$$E(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_{l_3}) \cdot \vec{e}_x = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} E_{Kijk}^x \delta_{il1} \delta_{jl2} \delta_{kl3} = E_{Kl_1 l_2 l_3}^x$$

d'où :

$$\frac{\partial E(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_{l_3})}{\partial t} \cdot \vec{e}_x = \frac{\partial E_{Kl_1 l_2 l_3}^x}{\partial t}$$

Nous pouvons finalement écrire :

$$M_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x} = |J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{gl} \left(\varepsilon \frac{\partial E_{Kl_1 l_2 l_3}^x}{\partial t} + \sigma E_{Kl_1 l_2 l_3}^x \right) \quad \hat{a}2.11 \hat{u}$$

Toutes les sommes ayant été simplifiées dans l'écriture du terme $M_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x}$. Dans ce terme, il n'y a pas de dépendance entre plusieurs inconnues et donc, la matrice M_E est diagonale.

En utilisant une méthode similaire pour calculer le terme de rigidité :

$$R_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x} = \int_{\Omega} H \cdot (\nabla \times \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x) dx$$

Soit H^x, H^y , et H^z les composantes du vecteur H .

$$R_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x} = \int_{\Omega} \left(H^y \frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial z} - H^z \frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial y} \right) dx$$

Nous décomposons cette intégrale en une somme d'intégrales afin de pouvoir utiliser une formule de quadrature adaptée à chacun des termes.

$$R_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x} = \int_{\Omega} \left(H^y \frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial z} \right) dx - \int_{\Omega} \left(H^z \frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial y} \right) dx$$

La première intégrale va s'écrire ainsi :

$$I_1 = \int_{\Omega} (H^y \frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial z}) dx = \int_K (H^y \frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial z}) dx$$

En remplaçant H^y par son expression, nous avons :

$$I_1 = \int_K ((\sum_{l=1}^r \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^r H_{Klmn}^y \psi_{lmn, K}^y) \frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial z}) dx$$

Pour écrire la formule de quadrature, nous allons utiliser $r^2(r+1)$ points, soit r points dans les directions x et z et $r+1$ points dans la direction y . Ceci nous assure une précision suffisante, et nous permet d'avoir une matrice de rigidité tri-diagonale.

Il est nécessaire ici d'utiliser le changement de variables défini par la transformation F pour pouvoir exprimer les termes contenus dans l'intégrale. Ce changement de variables donne $\psi_{lmn, K} \circ F = \hat{\psi}_{lmn, K}$. Les dérivées spatiales des fonctions de bases $\varphi_{l_1 l_2 l_3, K}$ vont s'écrire ainsi :

$$\frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial z}(x, y, z) = L_{l_1}^g(\hat{x}) L_{l_2}^{gl}(\hat{y}) \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z})}{\partial \hat{z}}$$

Ce qui donne alors :

$$I_1 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^r (|J_K| \omega_{ijk}^{glg} (\sum_{l=1}^r \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^r H_{Klmn}^y \psi_{lmn, K}^y(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k)) L_{l_1}^g(\hat{x}_i) L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j) \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}})$$

Nous pouvons alors remarquer que $L_{l_1}^g(\hat{x}_i) = \delta_{l_1 i}$ et $L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j) = \delta_{l_2 j}$, ce qui nous permet de simplifier la formule précédente :

$$I_1 = \sum_{k=1}^r (|J_K| \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} (\sum_{l=1}^r \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{m=1}^r H_{Klmn}^y \psi_{lmn, K}^y(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_k)) \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}})$$

Et de même nous avons pour la fonction ψ :

$$\psi_{lmn, K}^y(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_k) = L_{l_1}^g(\hat{x}_{l_1}) L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_{l_2}) L_{l_3}^g(\hat{z}_k) = \delta_{l_1 l_1} \delta_{l_2 l_2} \delta_{l_3 k}$$

Ce qui simplifie encore l'expression :

$$I_1 = \sum_{k=1}^r \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} \frac{|J_K|}{dz_K} H_{K l_1 l_2 k}^y \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}}$$

La seconde intégrale $I_2 = \int_{\Omega} (H^z \frac{\partial \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x}{\partial y}) dx$ se calcule de la même manière, mais en utilisant les racines de $\psi_{lmn, K}^z$ comme points de quadrature, ce qui nous amène à l'expression :

$$I_2 = \sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j l_3}^{ggl} \frac{|J_K|}{dy_K} H_{K l_1 j l_3}^z \frac{\partial L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}}$$

La matrice de rigidité est donc tri-diagonale. En effet le terme $R_{E_{l_1 l_2 l_3, K}^x}$ ne dépend que des inconnues $H_{K l_1 l_2 k}^y$ et $H_{K l_1 j l_3}^z$ avec j et k variant de 1 à r .

Ce qui nous donne pour finir l'approximation de l'équation en champs électrique suivante :

$$\begin{aligned} \forall \varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x \in U, \\ |J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{gll} \left(\varepsilon \frac{\partial E_{K l_1 l_2 l_3}^x}{\partial t} + \sigma E_{K l_1 l_2 l_3}^x \right) = \sum_{k=1}^r \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} \frac{|J_K|}{dz_K} H_{K l_1 l_2 k}^y \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} - \\ \sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j l_3}^{gll} \frac{|J_K|}{dy_K} H_{K l_1 j l_3}^z \frac{\partial L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} \end{aligned} \quad \hat{a}2.12\hat{u}$$

Nous avons considéré la fonction $\varphi_{l_1 l_2 l_3, K}^x$, prenons maintenant le cas particulier $l_3 = 1$, l'inconnue associée à cette fonction de base est située sur une face du maillage, donc à l'intersection de 2 éléments. Nous pouvons écrire l'équation $\hat{a}2.12\hat{u}$ pour ces 2 éléments que nous appellerons K_1 et K_2 , en la continuité du champ électrique tangent à cette face. Nous avons pour le premier terme :

$$\begin{aligned} |J_{K_1}| \omega_{l_1 l_2 1}^{gll} \left(\varepsilon \frac{\partial E_{K_1 l_1 l_2 1}^x}{\partial t} + \sigma E_{K_1 l_1 l_2 1}^x \right) \text{ Sur } K_1 \\ |J_{K_2}| \omega_{l_1 l_2 r+1}^{gll} \left(\varepsilon \frac{\partial E_{K_2 l_1 l_2 r+1}^x}{\partial t} + \sigma E_{K_2 l_1 l_2 r+1}^x \right) \text{ Sur } K_2 \end{aligned}$$

et pour le second :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} \frac{|J_{K_1}|}{dz_{K_1}} H_{K_1 l_1 l_2 k}^y \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} - \sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j 1}^{ggl} \frac{|J_{K_1}|}{dy_{K_1}} H_{K_1 l_1 j 1}^z \frac{\partial L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} \text{ Sur } K_1 \\ \sum_{k=1}^r \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} \frac{|J_{K_2}|}{dz_{K_2}} H_{K_2 l_1 l_2 k}^y \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} - \sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j r+1}^{ggl} \frac{|J_{K_2}|}{dy_{K_2}} H_{K_2 l_1 j r+1}^z \frac{\partial L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} \text{ Sur } K_2 \end{aligned}$$

La continuité du champ électrique tangentiel sur la face perpendiculaire à z nous donne $E_{K_1 l_1 l_2 1}^x = E_{K_2 l_1 l_2 r+1}^x$, et la continuité du champ magnétique normal donne $H_{K_1 l_1 j 1}^z = H_{K_2 l_1 j r+1}^z$. En additionnant nos deux équations nous avons alors :

$$\left(|J_{K_1}| \omega_{l_1 l_2 1}^{gll} + |J_{K_2}| \omega_{l_1 l_2 r+1}^{gll} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial E_{K_1 l_1 l_2 1}^x}{\partial t} + \sigma E_{K_1 l_1 l_2 1}^x \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\sum_{k=1}^r \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} \frac{|J_{K_1}|}{dz_{K_1}} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} H_{K_1 l_1 l_2 k}^y + \sum_{k=1}^r \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} \frac{|J_{K_2}|}{dz_{K_2}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} H_{K_2 l_1 l_2 k}^y \\
&\quad - \sum_{j=1}^r (\omega_{l_1 j^1}^{ggl} \frac{|J_{K_1}|}{dy_{K_1}} \frac{\partial L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} + \omega_{l_1 j^{r+1}}^{ggl} \frac{|J_{K_2}|}{dy_{K_2}} \frac{\partial L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}}) H_{K_1 l_1 j^1}^z
\end{aligned}$$

Dans le cas d'une arête, nous avons alors l'interface entre 4 éléments $\hat{a}K_1, K_2, K_3, K_4$ comme montré sur la figure 2.3. Dans ce cas nous avons $l_2 = 1$ et $l_3 = 1$, et en supposant la continuité du champ électrique tangent à l'arête et du champ magnétique normal à celle-ci, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&(|J_{K_1}| \omega_{l_1 11}^{gll} + |J_{K_2}| \omega_{l_1 1r+1}^{gll} + |J_{K_3}| \omega_{l_1 r+11}^{gll} + |J_{K_4}| \omega_{l_1 r+1r+1}^{gll}) (\varepsilon \frac{\partial E_{K_1 l_1 11}^x}{\partial t} + \sigma E_{K_1 l_1 11}^x) \\
&= \\
&\quad (\sum_{k=1}^r \omega_{l_1 1k}^{glg} \frac{|J_{K_1}|}{dz_{K_1}} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} + \sum_{k=1}^r \omega_{l_1 r+1k}^{glg} \frac{|J_{K_3}|}{dz_{K_3}} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}}) H_{K_1 l_1 1k}^y \\
&\quad + (\sum_{k=1}^r \omega_{l_1 1k}^{glg} \frac{|J_{K_2}|}{dz_{K_2}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} + \sum_{k=1}^r \omega_{l_1 r+1k}^{glg} \frac{|J_{K_4}|}{dz_{K_4}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}}) H_{K_2 l_1 1k}^y \\
&\quad - (\sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j^1}^{ggl} \frac{|J_{K_1}|}{dy_{K_1}} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} + \sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j^{r+1}}^{ggl} \frac{|J_{K_2}|}{dy_{K_2}} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}}) H_{K_1 l_1 j^1}^z \\
&\quad - (\sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j^1}^{ggl} \frac{|J_{K_3}|}{dy_{K_3}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} + \sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j^{r+1}}^{ggl} \frac{|J_{K_4}|}{dy_{K_4}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}}) H_{K_3 l_1 j^1}^z \tag{2.13}
\end{aligned}$$

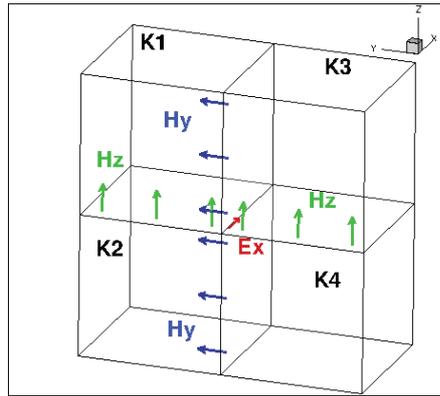


figure 2.2: Composantes E_x , sur une arête avec les composantes H_y et H_z correspondantes.

Dans l'équation 2.14 nous faisons apparaître les éléments voisins de K_1 , notés K_2 , K_3 et K_4 . Considérons maintenant le cas général d'un élément K , et soit les 6 éléments ayant une face commune avec K . Nous notons K_{x-} et K_{x+} les deux cellules ayant comme face commune avec K , une face perpendiculaire à l'axe x , avec dans l'ordre croissant des abscisses K_{x-} , K et K_{x+} . Nous notons K_{y-} , K_{y+} et K_{z-} , K_{z+} les cellules définies suivant les axes x et y . De même, nous pouvons définir les éléments ayant uniquement une arête commune avec K par K_{y-z-} , K_{y-z+} , K_{y+z-} , K_{y+z+} , ...

Si nous reprenons l'équation 2.13, les éléments que nous avons notés K_1 , K_2 , K_3 vont s'écrire, en choisissant K_1 comme référence, $K_1 = K$, $K_2 = K_{z-}$, $K_3 = K_{y-}$ et $K_4 = K_{y-z-}$. En procédant de la sorte, nous avons créé une numérotation de nos inconnues qui tient compte des continuités des champs aux interfaces, et permet de ne pas redéfinir plusieurs fois la même inconnue. En effet, sur un élément K nous ne prenons que les inconnues situées sur les faces $x-$, $y-$ et $z-$ plus les inconnues internes. Les inconnues situées sur les faces $x+$, $y+$ et $z+$ sont considérées comme appartenant aux éléments suivants.

Nous pouvons alors, écrire :

$$\begin{aligned}
& \forall K \in \tau_h \forall l_1, l_2, l_3 \in [1, r] \times [1, r] \times [1, r] \\
& (|J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{gll} + \delta_{l_3 1} |J_{K_{z-}}| \omega_{l_1 l_2 r+1}^{gll} + \delta_{l_2 1} |J_{K_{y-}}| \omega_{l_1 r+1 l_3}^{gll} + \delta_{l_2 1} \delta_{l_3 1} |J_{K_{y-z-}}| \omega_{l_1 r+1 r+1}^{gll}) \\
& \quad \left(\varepsilon \frac{\partial E_{K l_1 l_2 l_3}^x}{\partial t} + \sigma E_{K l_1 l_2 l_3}^x \right) \\
& \quad = \\
& \quad \left(\sum_{k=1}^r \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} \frac{|J_K|}{dz_K} \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} + \delta_{l_2 1} \left(\sum_{k=1}^r \omega_{l_1 r+1 k}^{glg} \frac{|J_{K_{y-}}|}{dz_{K_{y-}}} \frac{\partial L_{l_3}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} \right) \right) H_{K l_1 l_2 k}^y \\
& + \delta_{l_3 1} \left(\sum_{k=1}^r \omega_{l_1 l_2 k}^{glg} \frac{|J_{K_{z-}}|}{dz_{K_{z-}}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} + \delta_{l_2 1} \left(\sum_{k=1}^r \omega_{l_1 r+1 k}^{glg} \frac{|J_{K_{y-z-}}|}{dz_{K_{y-z-}}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} \right) \right) H_{K_{z-} l_1 l_2 k}^y \\
& \quad - \left(\sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j l_3}^{ggl} \frac{|J_K|}{dy_K} \frac{\partial L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} + \delta_{l_3 1} \left(\sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j r+1}^{ggl} \frac{|J_{K_{z-}}|}{dy_{K_{z-}}} \frac{\partial L_{l_2}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} \right) \right) H_{K l_1 j l_3}^z \\
& - \delta_{l_2 1} \left(\sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j l_3}^{ggl} \frac{|J_{K_{y-}}|}{dy_{K_{y-}}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} + \delta_{l_3 1} \left(\sum_{j=1}^r \omega_{l_1 j r+1}^{ggl} \frac{|J_{K_{y-z-}}|}{dy_{K_{y-z-}}} \frac{\partial L_{r+1}^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} \right) \right) H_{K_{y-} l_1 j l_3}^z \quad \hat{a}2.14\hat{u}
\end{aligned}$$

En prenant comme hypothèse un pas spatial et un ordre constant dans les 3 directions de l'espace, cette écriture pourrait être simplifiée. Toutefois sous cette forme, elle permet de considérer un pas spatial différent pour chaque dimension, et même un ordre différent par direction. En effet les sommations étant séparées par direction, le terme $\sum_{j=1}^r \cdot$ pourra devenir $\sum_{j=1}^{r_y} \cdot$, comme nous le verrons par la suite.

Nous pouvons maintenant numéroter nos inconnues. En effet, pour tout $K \in \tau_h$ et pour tout $l_1, l_2, l_3 \in [1, r] \times [1, r] \times [1, r]$, nous pouvons associer un numéro unique $n \in [1, N]$ où N est le nombre total d'inconnues. τ_h étant une partition cartésienne de l'espace Ω , soit N_i, N_j, N_k le nombre d'intervalles sur les axes x, y et z . A chaque élément K , nous pouvons associer le triplé i, j, k pour indiquer sa position dans τ_h . $\forall K \in \tau_h, \forall l_1, l_2, l_3 \in [1, r] \times [1, r] \times [1, r]$ nous pouvons associer une seule inconnue E^x repérée par les 6 indices i, j, k, l_1, l_2, l_3 . A ces 6 indices nous associons un numéro unique de la manière suivant :

$$N_{i_0} = N_i r \text{ ffi} N_{j_0} = N_j r + 1 \text{ ffi} N_{k_0} = N_k r + 1$$

$$i_0 = (i - 1)r + l_1 \text{ fff} j_0 = (j - 1)r + l_2 \text{ fff} k_0 = (k - 1)r + l_3$$

$$n = (k_0 - 1)N_{j_0}N_{i_0} + (j_0 - 1)N_{i_0} + i_0$$

Toutefois, il est plus naturel et plus pertinent de repérer les inconnues en utilisant i_0, j_0, k_0 plutôt que n , en effet, cela permet d'utiliser pleinement l'aspect cartésien de notre méthode.

L'équation 2.14 peut s'écrire alors de manière plus condensée sous la forme :

$$M_{E_{i_0 j_0 k_0}}^x \left(\varepsilon \frac{\partial E_{i_0 j_0 k_0}^x}{\partial t} + \sigma E_{i_0 j_0 k_0}^x \right) = \sum_{k'=(k-1)r+1}^{(k-1)r+r} R_{E_{i_0, j_0, k'}}^y H_{i_0, j_0, k'}^y - \sum_{j'=(j-1)r+1}^{(j-1)r+r} R_{E_{i_0, j', k_0}}^z H_{i_0, j', k_0}^z +$$

$$\sum_{k'=(k-2)r+1}^{(k-2)r+r} R_{E_{i_0, j_0, k'}}^y H_{i_0, j_0, k'}^y - \sum_{j'=(j-2)r+1}^{(j-2)r+r} R_{E_{i_0, j', k_0}}^z H_{i_0, j', k_0}^z$$

Les deux dernières sommes correspondent aux cas d'une inconnue E^x situées sur la frontière de l'élément et font intervenir des inconnues de champ magnétique H^y et H^z situés dans une cellule voisine Nous pouvons alors remarquer que le nombre d'inconnues H^y et H^z nécessaires pour le calcul du terme de rigidité est de $2r, 3r$, ou $4r$.

Sous forme matricielle, l'équation 2.9 s'écrit :

$$M_E \left(\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E \right) = R_E H$$

avec M_E une matrice diagonale et R_E une matrice creuse dont chaque ligne contient $2r, 3r$, ou $4r$ éléments non nuls.

Nous pouvons maintenant traiter de manière analogue l'équation 2.10 en considérant la fonction test $\psi_{l_1 l_2 l_3}^x$, pour $l_1, l_2, l_3 \in [1, r + 1] \times [1, r] \times [1, r]$. Soit le terme $M_{H_{x_{l_1 l_2 l_3, K}}}$ défini par :

$$M_{Hx_{l_1 l_2 l_3, K}} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) \cdot \psi_{l_1 l_2 l_3, K} dx$$

L'intégrale sur Ω se restreint au support de la fonction test, défini par l'élément K .

$$M_{Hx_{l_1 l_2 l_3, K}} = \int_K \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) \cdot \psi_{l_1 l_2 l_3, K} dx$$

De même manière que précédemment, nous allons utiliser une formule de quadrature pour calculer l'intégrale. Nous utilisons dans ce cas $r^2(r+1)$ points donnés par des points Gauss Lobatto suivant l'axe x et des points de Gauss suivant les axes y et z . Il faut la encore utiliser le changement de variable défini par la transformation F .

$$M_{Hx_{l_1 l_2 l_3, K}} = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r |J_K| \omega_{ijk}^{glgg} \left(\frac{\partial H(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k)}{\partial t} \right) \cdot \psi_{l_1 l_2 l_3, K}(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k)$$

Nous avons alors $\psi_{l_1 l_2 l_3, K}(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k) = \delta_{l_1 i} \delta_{l_2 j} \delta_{l_3 k} \vec{e}_x$, ce qui donne :

$$M_{Hx_{l_1 l_2 l_3, K}} = |J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{glgg} \left(\frac{\partial H(\hat{x}_{l_1}, \hat{y}_{l_2}, \hat{z}_{l_3})}{\partial t} \right) \cdot \vec{e}_x$$

Nous pouvons maintenant utiliser l'expression 2.8 pour écrire :

$$\frac{\partial H(x_{l_1}, y_{l_2}, z_{l_3})}{\partial t} \cdot \vec{e}_x = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \psi_{ijk}^x(x_{l_1}, y_{l_2}, z_{l_3}) \frac{\partial H_{K,ijk}^x}{\partial t}$$

que l'on peut réécrire :

$$\frac{\partial H(x_{l_1}, y_{l_2}, z_{l_3})}{\partial t} \cdot \vec{e}_x = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \delta_{il_1} \delta_{jl_2} \delta_{kl_3} \frac{\partial H_{K,ijk}^x}{\partial t} = \frac{\partial H_{K,l_1 l_2 l_3}^x}{\partial t}$$

Ce qui donne finalement :

$$M_{Hx_{l_1 l_2 l_3, K}} = |J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{glgg} \frac{\partial H_{K,l_1 l_2 l_3}^x}{\partial t}$$

Nous en déduisons alors que la matrice M_H est diagonale.

Nous allons maintenant calculer le terme de rigidité :

$$R_{Hx_{l_1 l_2 l_3, K}} = - \int_{\Omega} (\nabla \times E) \cdot \psi_{l_1 l_2 l_3, K}^x dx$$

En faisant la même intégration que pour le terme de masse, nous arrivons à l'expression suivante :

$$R_{Hx_{l_1 l_2 l_3, K}} = - |J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{glgg} (\nabla \times E)(x_{l_1}, y_{l_2}, z_{l_3}) \cdot \vec{e}_x$$

Cette expression fait intervenir les termes $\frac{\partial E^z}{\partial y}(x_{l_1}, y_{l_2}, z_{l_3})$ et $\frac{\partial E^y}{\partial z}(x_{l_1}, y_{l_2}, z_{l_3})$ soit :

$$\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{k=1}^r E_{K,i,jk}^z L_i^{gl}(x_{l_1}) L_k^g(z_{l_3}) \frac{\partial L_j^{gl}(y_{l_2})}{\partial y} = \sum_{j=1}^{r+1} E_{K,l_1 j l_3}^z \frac{1}{dy_K} \frac{\partial L_j^{gl}(\hat{y}_{l_2})}{\partial \hat{y}}$$

et :

$$\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r+1} E_{K,i,jk}^y L_i^{gl}(x_{l_1}) L_j^g(y_{l_2}) \frac{\partial L_k^{gl}(z_{l_3})}{\partial z} = \sum_{k=1}^{r+1} E_{K,l_1 l_2 k}^y \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_k^{gl}(\hat{z}_{l_3})}{\partial \hat{z}}$$

D'où l'expression :

$$R_{Hx_{l_1 l_2 l_3}, K} = -|J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{glgg} \left(\sum_{k=1}^{r+1} E_{K,l_1 l_2 k}^y \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_k^{gl}(\hat{z}_{l_3})}{\partial \hat{z}} - \sum_{j=1}^{r+1} E_{K,l_1 j l_3}^z \frac{1}{dy_K} \frac{\partial L_j^{gl}(\hat{y}_{l_2})}{\partial \hat{y}} \right)$$

Ce qui donne finalement :

$$|J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{glgg} \frac{\partial H_{K,l_1 l_2 l_3}^x}{\partial t} = |J_K| \omega_{l_1 l_2 l_3}^{glgg} \left(\sum_{j=1}^{r+1} E_{K,l_1 j l_3}^z \frac{1}{dy_K} \frac{\partial L_j^{gl}(\hat{y}_{l_2})}{\partial \hat{y}} - \sum_{k=1}^{r+1} E_{K,l_1 l_2 k}^y \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_k^{gl}(\hat{z}_{l_3})}{\partial \hat{z}} \right)$$

Considérons maintenant la continuité des champs sur une face frontière entre deux cellules K_1 et K_2 . Pour une face perpendiculaire à l'axe x , nous avons continuité pour $l_1 = 1$ sur K_1 et $l_1 = r + 1$ sur K_2 soit :

$$\begin{aligned} H_{K_1, l_2 l_3}^x &= H_{K_2, r+1 l_2 l_3}^x \\ E_{K_1, l_2 k}^y &= E_{K_2, r+1 l_2 k}^y \\ E_{K_1, l_1 l_3}^z &= E_{K_2, r+1 l_1 l_3}^z \end{aligned}$$

L'équation précédente nous donne alors :

$$\begin{aligned} (|J_{K_1}| \omega_{l_2 l_3}^{glgg} + |J_{K_2}| \omega_{r+1 l_2 l_3}^{glgg}) \frac{\partial H_{K_1, l_2 l_3}^x}{\partial t} &= (|J_{K_1}| \omega_{l_2 l_3}^{glgg} + |J_{K_2}| \omega_{r+1 l_2 l_3}^{glgg}) \left(\sum_{j=1}^{r+1} E_{K_1, l_1 j l_3}^z \frac{1}{dy_K} \frac{\partial L_j^{gl}(\hat{y}_{l_2})}{\partial \hat{y}} - \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{r+1} E_{K_1, l_2 k}^y \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_k^{gl}(\hat{z}_{l_3})}{\partial \hat{z}} \right) \end{aligned}$$

Ce qui par une simplification évidente nous amène à l'équation :

$$\frac{\partial H_{K,l_1 l_2 l_3}^x}{\partial t} = \left(\sum_{j=1}^{r+1} E_{K,l_1 j l_3}^z \frac{1}{dy_K} \frac{\partial L_j^{gl}(\hat{y}_{l_2})}{\partial \hat{y}} - \sum_{k=1}^{r+1} E_{K,l_1 l_2 k}^y \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_k^{gl}(\hat{z}_{l_3})}{\partial \hat{z}} \right) \quad \text{â2.15û}$$

En utilisant la numérotation des inconnues repérées de manière unique par le triplé i_0, j_0, k_0 , nous avons :

$$\frac{\partial H_{i_0 j_0 k_0}^x}{\partial t} = \left(\sum_{j'=(j-1)r+1}^{(j-1)r+r+1} E_{i_0 j k_0}^z \frac{1}{dy_K} \frac{\partial L_{j'}^{gl}(\hat{y}_{l_2})}{\partial \hat{y}} - \sum_{k'=(k-1)+1}^{(k-1)r+r+1} E_{i_0 j_0 k'}^y \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_{k'}^{gl}(\hat{z}_{l_3})}{\partial \hat{z}} \right) \quad \hat{a}2.16\hat{u}$$

On peut donc mettre l'équation en champ magnétique du système de Maxwell sous la forme matricielle suivante :

$$M_H \frac{\partial H}{\partial t} = R_H E$$

avec M_H égale à la matrice identité, et R_H une matrice creuse dont chaque ligne contient $2(r+1)$, éléments non nuls.

2.3 Problème variationnel discret et stabilité

L'approximation temporelle utilisée pour notre schéma DIFOE est un schéma leap-frog à l'ordre 2, similaire à celui du schéma de Yee. Nous obtenons alors un schéma numérique qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\mu_0 M_H H^{n+\frac{1}{2}} = \mu_0 M_H H^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t R_H E \quad \hat{a}2.17\hat{u}$$

$$\left(\frac{\varepsilon + \frac{\sigma}{2}}{\Delta t} \right) M_E E^{n+1} = \left(\frac{\varepsilon - \frac{\sigma}{2}}{\Delta t} \right) M_E E^n + R_E H^{n+\frac{1}{2}} \quad \hat{a}2.18\hat{u}$$

où M_E et M_H définissent des matrices de masse diagonales et R_E, R_H des matrices de rigidités très creuses ne nécessitant pas de stockage. La mise en oeuvre du schéma est donc très peu coûteuse en mémoire à cause du choix effectué sur les espaces d'approximation.

On peut démontrer que ce schéma est stable sous la condition suivante :

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\max_K (\lambda_{max}(DF_K^{-1} \nu_K^2 (DF_K^*)^{-1} (\hat{M}^{-\frac{1}{2}} \hat{R} \hat{M}^{-\frac{1}{2}}))})}} \quad \hat{a}2.19\hat{u}$$

où K est un élément de la partition τ_h du domaine de calcul Ω , ν_K la vitesse des ondes dans l'élément K et DF_K la Jacobienne de la transformation F_K de \hat{K} vers K où \hat{K} définit l'élément de référence $[0, 1]^3$. On peut voir que quelque soit K , pour tout point $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \hat{K}$, on a :

$$DF_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} dx_K & 0 & 0 \\ 0 & dy_K & 0 \\ 0 & 0 & dz_K \end{pmatrix}$$

où dx_K, dy_K et dz_K représentent les dimensions de l'élément K , respectivement dans les directions x, y et z . Le terme $\lambda_{max}(A)$ désigne le rayon spectral de la matrice A et les matrices \hat{M} et \hat{R} sont calculées sur l'élément de référence en fonction des polynômes $\hat{\varphi}_i^x, \hat{\varphi}_i^y$ et $\hat{\varphi}_i^z$ associés aux fonctions de base du champ électrique sur l'élément de référence.

La matrice \hat{M} est donnée par :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{M}^x & 0 & 0 \\ 0 & \hat{M}^y & 0 \\ 0 & 0 & \hat{M}^z \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \hat{M}_{i,j}^x = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i^x \cdot \hat{\varphi}_j^x d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^G] \times [1, r^{GL}] \times [1, r^{GL}])^2 \\ \hat{M}_{i,j}^y = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i^y \cdot \hat{\varphi}_j^y d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^{GL}] \times [1, r^G] \times [1, r^{GL}])^2 \\ \hat{M}_{i,j}^z = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i^z \cdot \hat{\varphi}_j^z d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^{GL}] \times [1, r^{GL}] \times [1, r^G])^2 \end{cases}$$

La matrice \hat{R} est donnée par :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} & \hat{R}_{13} \\ \hat{R}_{21} & \hat{R}_{22} & \hat{R}_{23} \\ \hat{R}_{31} & \hat{R}_{32} & \hat{R}_{33} \end{pmatrix}$$

avec $\hat{R}_{ij} = \hat{R}_{ji}^T$ pour $(i,j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ sont des matrices 3×3 telle que :

$$\begin{cases} \hat{R}_{11,i,j} = \sum_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\varphi}_i^x \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\varphi}_j^x + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \hat{\varphi}_i^x \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \hat{\varphi}_j^x \right) d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^G] \times [1, r^{GL}] \times [1, r^{GL}])^2 \\ \hat{R}_{12,i,j} = - \sum_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\varphi}_i^x \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\varphi}_j^y \right) d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^G] \times [1, r^{GL}] \times [1, r^{GL}]) \times ([1, r^{GL}] \times [1, r^G] \times [1, r^{GL}]) \\ \hat{R}_{13,i,j} = - \sum_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \hat{\varphi}_i^x \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\varphi}_j^z \right) d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^G] \times [1, r^{GL}] \times [1, r^{GL}]) \times ([1, r^{GL}] \times [1, r^{GL}] \times [1, r^G]) \\ \hat{R}_{22,i,j} = \sum_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\varphi}_i^y \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\varphi}_j^y + \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \hat{\varphi}_i^y \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \hat{\varphi}_j^y \right) d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^{GL}] \times [1, r^G] \times [1, r^{GL}])^2 \\ \hat{R}_{23,i,j} = - \sum_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \hat{\varphi}_i^y \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\varphi}_j^z \right) d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^{GL}] \times [1, r^G] \times [1, r^{GL}]) \times ([1, r^{GL}] \times [1, r^{GL}] \times [1, r^G]) \\ \hat{R}_{33,i,j} = \sum_{\hat{K}} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\varphi}_i^z \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\varphi}_j^z + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\varphi}_i^z \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \hat{\varphi}_j^z \right) d\hat{x} \text{ pour } (i,j) \in ([1, r^{GL}] \times [1, r^{GL}] \times [1, r^G])^2 \end{cases}$$

Ce théorème de stabilité a été établi par N.Deymier dans le cadre de sa thèse en cours pour la recherche d'un schéma temporel plus efficace que le schéma leap-frog, dans la méthode DIFOE. On ne démontre donc pas ici le théorème, mais on précise les grandes étapes de sa démonstration.

Pour démontrer le théorème de stabilité, on a 2 grandes étapes qui sont :

Première étape

On montre que la quantité $\epsilon_h^n = \int_{\Omega} \varepsilon E_h^n \cdot E_h^n dx + \int_{\Omega} \mu H_h^{n+1/2} \cdot H_h^{n-1/2} dx$ où E_h^n et H_h^n définissent les champs E et H discrétisés en espace et au temps t_n , est conservée au

cours du temps. Pour cela, on montre que la dérivée temporelle de cette quantité est nulle, c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{E_h^{n+1} \cdot E_h^{n+1} - E_h^n \cdot E_h^n}{\Delta t} dx + \int_{\Omega} \mu \frac{H_h^{n+3/2} \cdot H_h^{n+1/2} - H_h^{n+1/2} \cdot H_h^{n-1/2}}{\Delta t} dx = 0$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{(E_h^{n+1} - E_h^n)}{\Delta t} \cdot (E_h^{n+1} + E_h^n) dx + \int_{\Omega} \mu \frac{(H_h^{n+3/2} + H_h^{n+1/2})}{\Delta t} \cdot H_h^{n+1/2} dx +$$

$$\int_{\Omega} \frac{(H_h^{n+1/2} - H_h^{n-1/2})}{\Delta t} \cdot H_h^{n+1/2} dx = 0$$

Deuxième étape

On montre que la quantité ϵ_h^n est une norme. Dans ce cas, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et donc cette quantité sera équivalente à l'énergie $\epsilon_{M,h}^n$ du système de Maxwell discret, donnée par $\int_{\Omega} \varepsilon E_h^n \cdot E_h^n dx + \int_{\Omega} \mu H_h^{n+1/2} \cdot H_h^{n+1/2} dx$. Puisque ϵ_h^n est conservée au cours du temps, il en sera de même pour $\epsilon_{M,h}^n$ et la stabilité du schéma numérique sera assurée.

Pour montrer que la quantité ϵ_h^n est une norme, il faut montrer que celle-ci est positive. Pour cela, en utilisant le schéma numérique, on écrit :

$$\epsilon_h^n = \|E_h^n\|_{\varepsilon}^2 + \|H_h^n\|_{\mu}^2 + \Delta t \int_{\Omega} \nabla \times E_h^n \cdot H_h^{n+1/2} dx$$

avec

$$\|E_h^n\|_{\varepsilon}^2 = \int_{\Omega} \varepsilon E_h^n \cdot E_h^n dx$$

et

$$\|H_h^{n+1/2}\|_{\mu}^2 = \int_{\Omega} \mu H_h^{n+1/2} \cdot H_h^{n+1/2} dx$$

par majoration, nous avons :

$$\left| \int_{\Omega} \nabla \times E_h^n \cdot H_h^{n+1/2} dx \right| \leq \|\nabla \times E_h^n\|_{\mu^{-1}} \|H_h^{n+1/2}\|_{\mu}$$

On cherche ensuite une majoration de $\|\nabla \times E_h^n\|_{\mu^{-1}}$ à partir de $\|E_h^n\|_{\varepsilon}$ en écrivant :

$$\|\nabla \times E_h^n\|_{\mu^{-1}}^2 = \int_{\Omega} \varepsilon (\varepsilon \mu)^{-1} \nabla \times E_h^n \cdot \nabla \times E_h^n dx$$

et en utilisant l'écriture discrète de E_h^n . On obtient ainsi :

$$\|\nabla \times E_h^n\|_{\nu^{-1}}^2 \leq \| \|M^{-1/2} R M^{-1/2}\| \| \|E_h^n\|_{\varepsilon}^2$$

où

$$\| \|M^{-1/2} R M^{-1/2} \| = \max_K (\lambda_{\max}(DF_K^{-1} \nu_K (DF_K^{-1})^* \hat{M}^{-1/2} \hat{R} \hat{M}^{-1/2}))$$

avec les notations précédemment définies dans le théorème. On obtient donc :

$$\epsilon_h^n \geq \|E_h^n\|_\varepsilon^2 + \|H_h^{n+1/2}\|_\mu^2 - \Delta t (\max_K (\lambda_{\max}(DF_K^{-1} \nu_K (DF_K^{-1})^* \hat{M}^{-1/2} \hat{R} \hat{M}^{-1/2}))$$

Finalement, en considérant l'égalité suivante $\forall (a, b, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $(a^2 + b^2 - \alpha ab) = (a - \frac{\alpha}{2}b)^2 + (1 - \frac{\alpha^2}{4})b$, pour garantir $\epsilon_H^n \geq 0$, on obtient la condition de stabilité du théorème.

2.4 Cas particulier lorsque l'ordre d'approximation spatial est égal à 1

Dans le cas où nous choisissons un ordre d'approximation égal à 1, les inconnues de champ électrique sont alors situées exclusivement sur les arêtes du maillage, et les inconnues de champ magnétique sur les faces, exactement comme dans le schéma de Yee. Nous pouvons écrire l'équation 2.13 avec $r = 1$

$$\begin{aligned} & (|J_K| \frac{1}{4} + |J_{K_{z-}}| \frac{1}{4} + |J_{K_{y-}}| \frac{1}{4} + |J_{K_{y-z-}}| \frac{1}{4}) (\varepsilon \frac{\partial E_{K111}^x}{\partial t} + \sigma E_{K111}^x) \\ & = \\ & \left(\frac{1}{2} \frac{|J_K|}{dz_K} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{2} \frac{|J_{K_{y-}}|}{dz_{K_{y-}}} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} \right) H_{K111}^y \\ & + \left(\frac{1}{2} \frac{|J_{K_2}|}{dz_{K_{z-}}} \frac{\partial L_2^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{2} \frac{|J_{K_{y-z-}}|}{dz_{K_{y-z-}}} \frac{\partial L_2^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} \right) H_{K_{z-}111}^y \\ & - \left(\frac{1}{2} \frac{|J_K|}{dy_K} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \frac{|J_{K_{y-}}|}{dy_{K_{y-}}} \frac{\partial L_1^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} \right) H_{K111}^z \\ & - \left(\frac{1}{2} \frac{|J_{K_{y-}}|}{dy_{K_{y-}}} \frac{\partial L_2^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \frac{|J_{K_{y-z-}}|}{dy_{K_{y-z-}}} \frac{\partial L_2^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} \right) H_{K_{y-}111}^z \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous prenons un pas spatial constant dans les trois directions :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial E_{K111}^x}{\partial t} + \sigma E_{K111}^x \\ & = \\ & \frac{1}{dz} \left(\frac{\partial L_1^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} H_{K111}^y + \frac{\partial L_2^{gl}(\hat{z}_k)}{\partial \hat{z}} H_{K_{z-}111}^y \right) - \frac{1}{dy} \left(\frac{\partial L_1^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} H_{K111}^z + \frac{\partial L_2^{gl}(\hat{y}_j)}{\partial \hat{y}} H_{K_{y-}111}^z \right) \end{aligned}$$

Soit en exprimant les dérivées des polynômes de Lagrange d'ordre 1 :

$$\varepsilon \frac{\partial E_{K111}^x}{\partial t} + \sigma E_{K111}^x = \frac{1}{dz} (H_{K111}^y - H_{K_{z-}111}^y) - \frac{1}{dy} (H_{K111}^z - H_{K_{y-}111}^z)$$

Nous reconnaissons le schéma de Yee, que l'on peut écrire plus classiquement ainsi :

$$\varepsilon \frac{\partial E_{ijk}^x}{\partial t} + \sigma E_{ijk}^x = \frac{1}{dz} (H_{ijk}^y - H_{ijk-1}^y) - \frac{1}{dy} (H_{ijk}^z - H_{ij-1k}^z)$$

Reprenons maintenant l'équation 2.15 que nous allons écrire pour $r = 1$:

$$\frac{\partial H_{K,111}^x}{\partial t} = \left(\sum_{j=1}^2 E_{K,1j1}^z \frac{1}{dy_K} \frac{\partial L_j^{gl}(\hat{y}_1)}{\partial \hat{y}} - \sum_{k=1}^2 E_{K,11k}^y \frac{1}{dz_K} \frac{\partial L_k^{gl}(\hat{z}_1)}{\partial \hat{z}} \right)$$

Là encore nous retrouvons le schéma Yee :

$$\frac{\partial H_{ijk}^x}{\partial t} = \frac{1}{dy} (E_{ijk}^z - E_{ij+1k}^z) + \frac{1}{dz} (E_{K,ijk+1}^y - E_{K,ijk}^y)$$

Nous venons de montrer que notre formulation écrite pour un ordre d'approximation spatiale égal à 1, correspond au schéma de Yee, c'est pourquoi nous parlerons de Différences Finies d'Ordre Elevé âDIFOEû bien que la formulation s'écrive comme des éléments finis. Grâce à cela, nous espérons pouvoir tirer profit, pour le développement de cette méthode, des nombreuses études déjà réalisées sur les différences finies, en ce qui concerne les modèles physiques, portage sur machines parallèle, génération des maillages, ...

2.5 Validations

La première validation que nous avons mis en oeuvre consiste à calculer l'évolution d'un mode ($m = 3, n = 3, k = 0$) dans une cavité cubique de 1 mètre de coté et supposée parfaitement métallique. La solution analytique pour la composante E_z , au point (x, y, z) dans la cavité, est donnée par $E_z = \sin(3\pi x) \sin(3\pi y) \cos(\omega t)$. Nous avons comparé cette composante à celle évaluée par notre schéma différences finies pour différentes configurations de calcul, en terme de maillages et d'ordres d'approximation. La simulation consiste à initialiser le mode dans la cavité et à le laisser évoluer sur un temps suffisamment long pour pouvoir détecter des éventuels écarts par rapport à la solution analytique. Les configurations de calcul pour les comparaisons sont les suivantes :

- Un calcul FDTD âschéma de Yeeû avec une grille de $40 \times 40 \times 40$
- Un calcul FDTD âschéma de Yeeû avec une grille de $80 \times 80 \times 80$
- Un calcul DIFOE d'ordre 2 avec une grille de $10 \times 10 \times 10$
- Un calcul DIFOE d'ordre 3 avec une grille de $6 \times 6 \times 6$
- Un calcul DIFOE d'ordre 5 avec une grille de $3 \times 3 \times 3$

Nous pouvons observer sur la figure â2.3û un important décalage de la solution FDTD âschéma de Yeeû pour le maillage le plus grossier. En maillant deux fois plus finement en FDTD, nous avons une solution plus précise, mais avec un coût calcul multiplié par 16. Nous voyons ici clairement l'avantage de la montée en ordre de l'approximation spatiale. En effet, cela permet d'améliorer la précision des résultats avec moins d'inconnues et donc avec un coût calcul moindre. Par contre pour avoir ce résultat, il est nécessaire de

conserver une discrétisation temporelle fine, comme on le voit sur le tableau 5.1. Les pas temporels employés pour la méthode DIFOE sont du même ordre de grandeur que celui utilisé pour le maillage le plus fin en FDTD à cause de la contrainte CFL. Malgré cela le nombre d'inconnues spatiales utilisées est tellement plus petit que les temps calculs sont largement meilleurs.

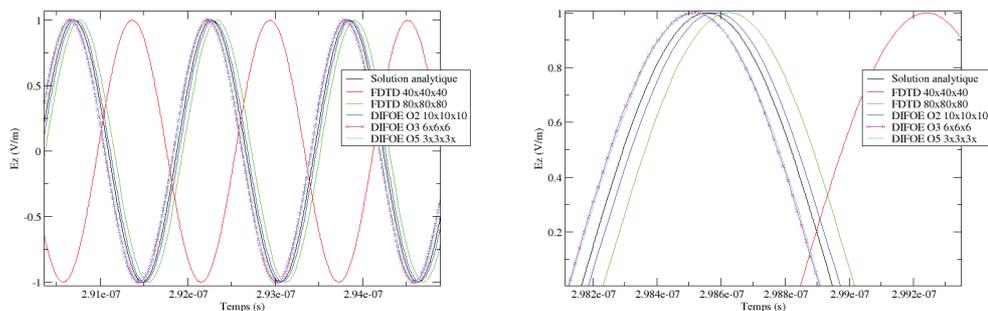


figure 2.3: Comparaisons des solutions FDTD et DIFOE.

Méthode	Ordre	Grille	Temps CPU	Pas temporel
FDTD		$40 \times 40 \times 40$	18 s	4.3301E-11
FDTD		$80 \times 80 \times 80$	242 s	2.1650E-11
DIFOE	O2	$10 \times 10 \times 10$	46 s	1.612E-011
DIFOE	O3	$6 \times 6 \times 6$	40 s	1.4459E-011
DIFOE	O5	$3 \times 3 \times 3$	29 s	1.2036E-11

TAB. 2.1 – Comparaison des performances FDTD et DIFOE pour différentes configurations.

Le second cas test de validation, qui met aussi en évidence les avantages de cette méthode est la propagation d'une onde plane en espace libre, sur un grand nombre de longueur d'ondes. Nous utilisons un domaine de calcul de dimension $x = 85m \times y = 4m \times z = 4m$ dans lequel nous faisons propager une onde plane dans la direction x . Le signal temporel est une Gaussienne de fréquence maximale égale à $300MHz$, donc de longueur d'onde minimale $\lambda = 1m$. Nous relevons le signal à 40 mètres et à 80 mètres, soit à 40λ et à 80λ , en comparant différentes méthodes à la solution analytique. Les méthodes utilisées pour la comparaison sont la FDTD ou schéma de Yee avec deux pas de maillages différents, et notre méthode DIFOE à l'ordre 4. Nous voyons ici largement les effets de dispersion du schéma de Yee pour un maillage à $\lambda/10$. En divisant par 1.5 le pas du maillage, nous améliorons la solution mais le coût calcul engendré est important. En revanche la solution DIFOE à l'ordre 4 est beaucoup plus proche de la référence grâce

à une meilleure précision pour un coût calcul 4 fois plus faible avoir tableau 2.2

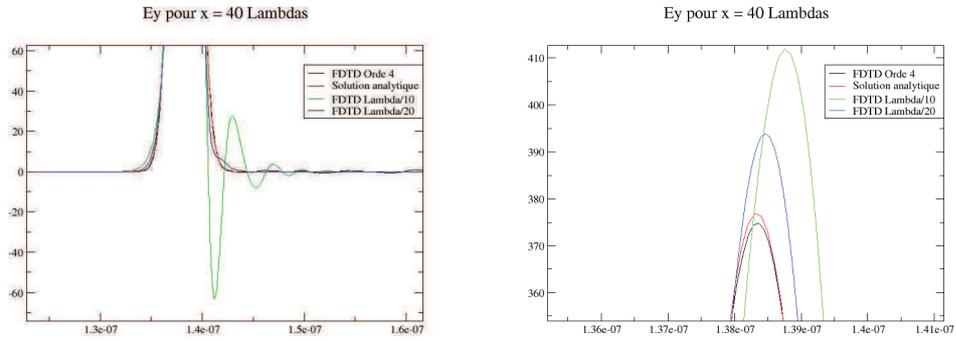


figure 2.4: Comparaisons des solutions à 40 λ

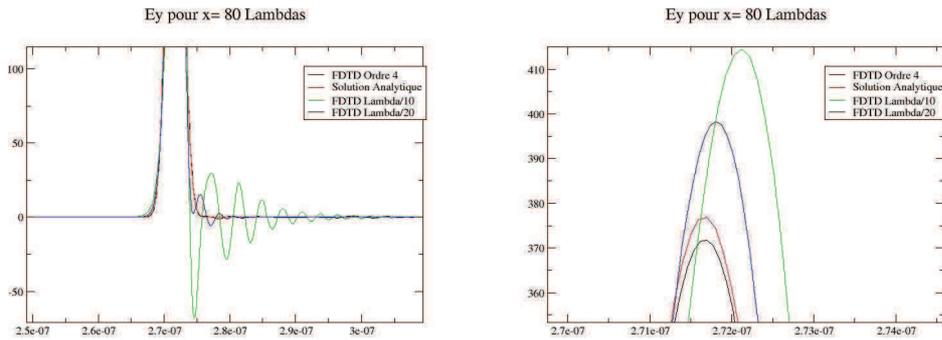


figure 2.5: Comparaisons des solutions à 80 λ

Méthode	Ordre	Grille	Temps CPU
FDTD		$850 \times 40 \times 40$	8 minutes
FDTD		$1700 \times 80 \times 80$	128 minutes
DIFOE	O_4	$170 \times 8 \times 8$	33 minutes

TAB. 2.2 – Comparaison FDTD et DIFOE en termes de coûts calcul.

2.6 Ordre d'approximation spatiale variable.

Depuis le début de ce chapitre nous utilisons dans les notations un ordre d'approximation r constant. Nous nous proposons de faire varier cet ordre par cellule dans chaque direction, c'est-à-dire d'avoir un ordre r_{x_i} pour l'axe x , r_{y_j} pour l'axe y et r_{z_k} pour l'axe z dans la cellule (i, j, k) . Cela permet d'avoir plus de précision dans une direction donnée, ou d'utiliser un pas de maillage différent dans les trois directions et ainsi d'appliquer l'ordre d'approximation qui convient le mieux dans la cellule par rapport au signal temporel utilisé. De la même manière, pour aller plus loin nous pouvons aussi utiliser des grilles à pas variables et différentes dans les 3 directions, cela permet d'ajuster au mieux le maillage par rapport à la géométrie étudiée, et dans un second temps de décider des ordres d'approximation utilisés localement, en fonction de la précision désirée par exemple. Les approximations que nous avons données pour les champs électriques et magnétiques se réécrivent alors ainsi :

$$\tilde{E}_K = \sum_{l_1=1}^{r_K^x} \sum_{l_2=1}^{r_K^y+1} \sum_{l_3=1}^{r_K^z+1} E_{K,l_1l_2l_3}^x \varphi_{l_1l_2l_3}^x + \sum_{l_1=1}^{r_K^x+1} \sum_{l_2=1}^{r_K^y} \sum_{l_3=1}^{r_K^z+1} E_{K,l_1l_2l_3}^y \varphi_{l_1l_2l_3}^y + \sum_{l_1=1}^{r_K^x+1} \sum_{l_2=1}^{r_K^y+1} \sum_{l_3=1}^{r_K^z} E_{K,l_1l_2l_3}^z \varphi_{l_1l_2l_3}^z \quad \hat{a}2.20\hat{u}$$

$$\tilde{H}_K = \sum_{l_1=1}^{r_K^x+1} \sum_{l_2=1}^{r_K^y} \sum_{l_3=1}^{r_K^z} H_{K,l_1l_2l_3}^x \psi_{l_1l_2l_3}^x + \sum_{l_1=1}^{r_K^x} \sum_{l_2=1}^{r_K^y+1} \sum_{l_3=1}^{r_K^z} H_{K,l_1l_2l_3}^y \psi_{l_1l_2l_3}^y + \sum_{l_1=1}^{r_K^x} \sum_{l_2=1}^{r_K^y} \sum_{l_3=1}^{r_K^z+1} H_{K,l_1l_2l_3}^z \psi_{l_1l_2l_3}^z \quad \hat{a}2.21\hat{u}$$

Dans le schéma numérique, on obtient alors les mêmes termes que pour l'ordre d'approximation spatiale constant r_K , décrits précédemment, si ce n'est que dans les formules de sommation, on fait intervenir r_K^x , r_K^y et r_K^z à la place de r suivant la composante. L'écriture du schéma ne pose donc aucune difficulté particulière.

2.7 Étude numérique de la convergence du schéma DIFOE

Nous nous proposons d'étudier la convergence du schéma par rapport à une solution de référence analytique. Nous allons chercher à évaluer l'évolution de l'erreur commise en fonction du maillage, de l'ordre d'approximation spatiale, et du pas de discrétisation temporelle. Nous allons utiliser le cas de validation précédent, c'est-à-dire l'évolution d'un mode de cavité, pour étudier l'erreur de convergence. Pour cela, on définit cette erreur par :

$$Erreur = \int_{\Omega} (E^x - E_{ref}^x)^2 + (E^y - E_{ref}^y)^2 + (E^z - E_{ref}^z)^2 + \\ (H^x - H_{ref}^x)^2 + (H^y - H_{ref}^y)^2 + (H^z - H_{ref}^z)^2 dv$$

avec Ω , le domaine de calcul, $(E^x, E^y, E^z, H^x, H^y, H^z)$, la solution numérique et $(E_{ref}^x, E_{ref}^y, E_{ref}^z, H_{ref}^x, H_{ref}^y, H_{ref}^z)$, la solution analytique donnée par :

$$E_{ref}^x = 0.$$

$$E_{ref}^y = 0.$$

$$E_{ref}^z = \sin(m\pi\frac{x}{a})\sin(n\pi\frac{x}{a})\cos(\omega t)$$

$$H_{ref}^x = \frac{1}{\omega\mu_0} \frac{\pi n}{a} \sin(m\pi\frac{x}{a})\cos(n\pi\frac{x}{a})\sin(\omega t)$$

$$H_{ref}^y = \frac{1}{\omega\mu_0} \frac{\pi m}{a} \cos(m\pi\frac{x}{a})\sin(n\pi\frac{x}{a})\sin(\omega t)$$

$$H_{ref}^z = 0.$$

où $m = n = 3$ et $a = 1$.

Pour effectuer cette étude de convergence, nous avons utilisés plusieurs pas de discrétisation spatiale soit $h = 5cm$, $h = 10cm$, $h = 16.67cm$, $h = 20cm$, $h_3 = 33.3cm$, $h = 100cm$, et plusieurs ordres d'approximation spatiale allant de 2 à 7. Dans un premier temps le pas de discrétisation temporel dt , utilisé est le plus grand possible pour chaque configuration en assurant la stabilité. Dans un second temps nous utilisons un pas dt plus petit et identique pour chaque cas. Nous avons fixé arbitrairement un temps de simulation à $5.e^{-8}s$ pendant lequel nous étudions l'évolution de l'erreur. Les trois premières figures représentent cette évolution pour trois maillages à différents ordres avec un pas dt proche de la CFL.

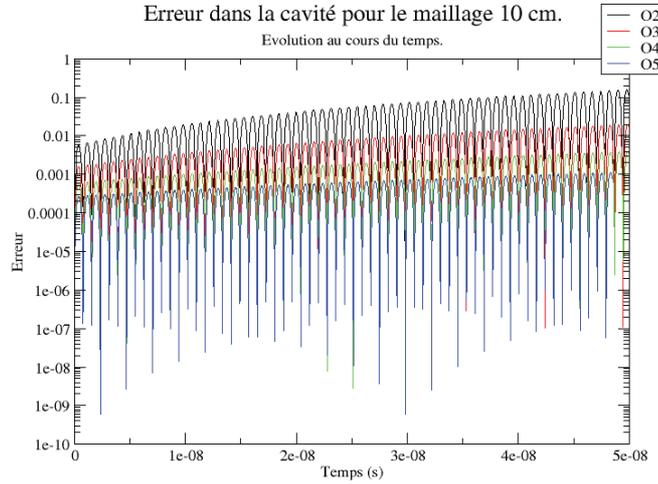


figure 2.6: erreur dans la cavité pour $h = 10cm$

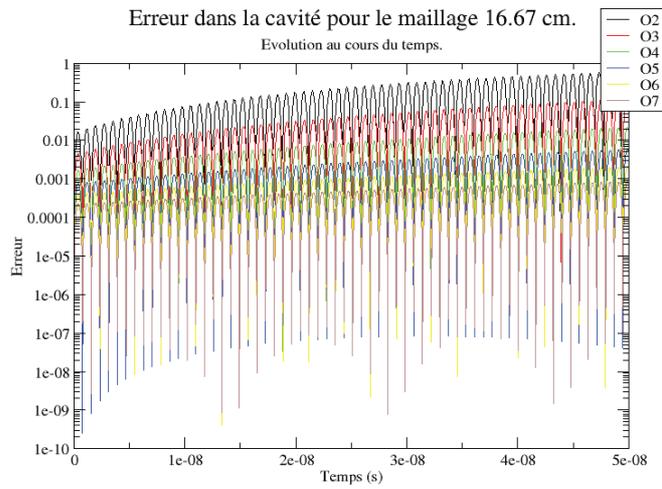


figure 2.7: erreur dans la cavité pour $h = 16.67cm$

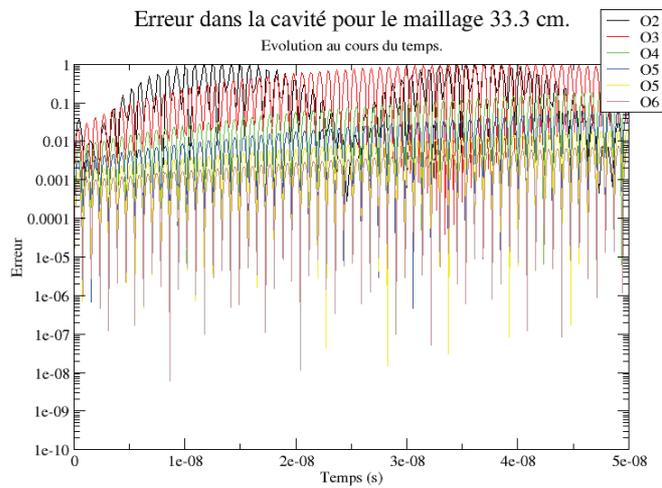


figure 2.8: erreur dans la cavité pour $h = 33.3cm$

Afin d'évaluer l'évolution de l'erreur en fonction du pas de maillage et de l'ordre d'approximation, nous avons calculés une moyenne de cette erreur sur la plage de temps de simulation.

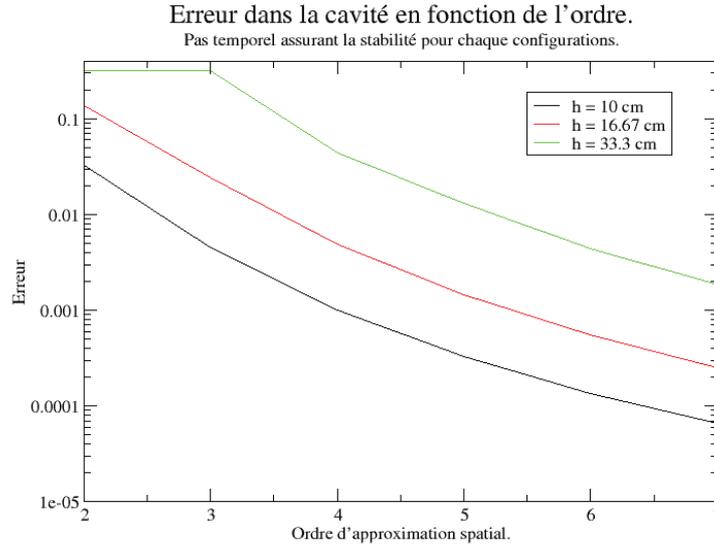


figure 2.9: Erreur moyenne en fonction de l'ordre.

Nous pouvons remarquer sur la figure 2.9 que nous avons une erreur équivalente pour un ordre 3 avec un maillage de 10cm, soit 1000 mailles, et pour un ordre 7 avec un maillage de 33.3cm soit 27 mailles. Afin d'évaluer le coût calcul des ces configurations, nous allons compter le nombre d'inconnues utilisées. Ce nombre d'inconnues s'exprime dans le cas d'un ordre constant et d'un maillage à pas fixe et égal dans les trois directions, de la manière suivante :

$$N_{inc} = 3rN(rN + 1)^2 + 3(rN + 1)(rN)^2$$

Avec r l'ordre d'approximation et N le nombre d'intervalles de la grille.

Ceci donne pour nos deux cas à précision équivalente ($r = 3, N = 10$) et ($r = 7, N = 3$), respectivement, un nombre total d'inconnues de 170190 et 59598, donc un rapport de 2.86 entre les deux. Nous voyons ici, de manière évidente l'intérêt de la montée en ordre qui permet de diminuer le nombre d'inconnues à utiliser pour une précision identique.

Nous allons ensuite essayer d'évaluer le taux de convergence du schéma en fonction de l'ordre d'approximation spatial. Pour cela nous avons baissé le pas de discrétisation temporel pour ne pas qu'il ait d'influence sur l'erreur, le pas choisi est de $1.e^{-13}$ s. Nous nous intéresserons ensuite à l'évolution de l'erreur lorsque l'on diminue le pas de maillage, et ceci pour des ordres d'approximation spatiale allant de 2 à 4. L'utilisation d'un pas temporel petit conduit à des coût calculs plus importants, c'est pourquoi la plage de temps utilisé pour le calcul de l'erreur est réduite, soit de $0.8e^{-8}$ à $1.e^{-8}$ s. Toutefois ce qui nous intéresse ici étant l'évolution de l'erreur, nous ferons des comparaisons sur des valeurs calculées avec la même méthode. Les pas de maillages utilisés sont adaptés à

chaque ordre d'approximation, comme présenté dans le tableau 2.3.

<i>Ordre</i>	<i>Pas min</i>	<i>Pas max</i>	<i>Erreur min</i>	<i>Erreur max</i>
<i>O2</i>	0.05	0.2	9.2e-5	6.3e-3
<i>O3</i>	0.1	0.5	7.8e-5	5.8e-2
<i>O4</i>	0.2	1.0	8.8e-5	3.7e-1

TAB. 2.3 – Comparaison FDTD et DIFOE en termes de coûts calcul.

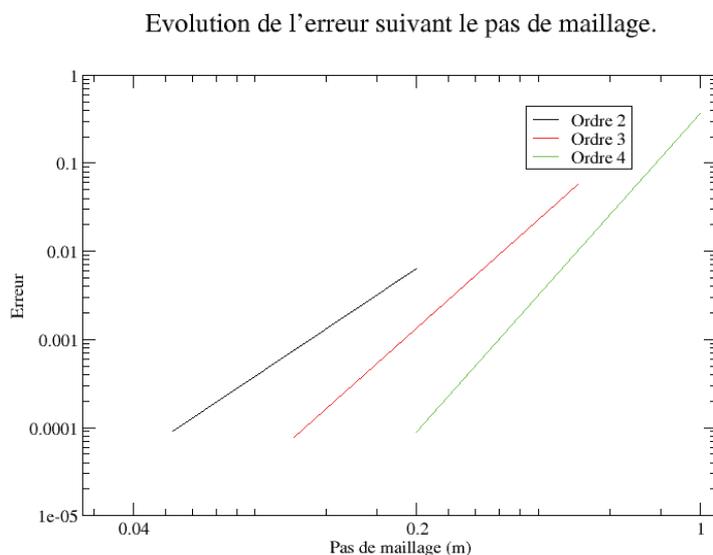


figure 2.10: Erreur moyenne en fonction du pas de maillage.

Si nous considérons que l'erreur évolue sous la forme $Err(h) = h^{f(r)}$ avec h le pas de maillage, r l'ordre d'approximation spatiale, et $f(r)$ une fonction de r .

En faisant les rapports entre les erreurs à différents pas de maillage, nous avons : $Err_{h_1} = h_1^{f(r)}$ et $Err_{h_2} = h_2^{f(r)}$. Avec $h_2 = \frac{h_1}{N}$, donc

$$\frac{Err_{h_1}}{Err_{h_2}} = \frac{h_1^{f(r)}}{\left(\frac{h_1}{N}\right)^{f(r)}} = N^{f(r)}$$

Ce qui donne pour notre méthode les résultats présentés dans le tableau 2.4

Nous pouvons remarquer que notre fonction $f(r)$ s'écrit $f(r) = r + 1$, ce qui est en particulier cohérent à l'ordre 1 avec le taux de convergence du schéma de Yee qui est de 2.

r	$\frac{Err_{h1}}{Err_{h2}}$	$N = \frac{h1}{h2}$	$N^{f(r)}$	$f(r)$
2	69	4	$69 = 4^{3.05}$	$3.05 = r + 1.05$
3	740	5	$740 = 5^{4.1}$	$4.1 = r + 1.1$
4	4204	5	$4204 = 5^{5.15}$	$5.15 = r + 1.15$

TAB. 2.4 – Evaluation du taux de convergence.

2.8 Conclusion.

Nous avons présenté une nouvelle méthode de résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel, cette méthode est fondée sur un schéma éléments finis d'ordre élevé adapté à des maillages cartésiens, et s'apparente à une méthode différences finies d'ordre élevée. Après avoir expliqué sa formulation mathématique et le problème variationnel discret, nous avons montré son intérêt sur des exemples simples mais significatifs. L'étude numérique concernant la convergence du schéma est conforme avec nos attentes. La possibilité de faire varier l'ordre d'approximation spatiale dans chaque direction laisse entrevoir de grande possibilité de paramétrisation des cas de calcul. La proximité avec le schéma de Yee de cette méthode, nous permettra par ailleurs de bénéficier de l'existant au niveau des modèles physiques et des outils de pré et post traitement adaptés aux FDTD. Nous traiterons dans le chapitre suivant l'introduction de modèles physiques dans notre méthodes.

Chapitre 3

Modèles physiques.

Afin de répondre à des problématiques de simulations numériques industrielles, dans le domaine de la compatibilité électromagnétique (CEM), il est nécessaire de disposer de modèles physiques adéquats. En effet, en CEM, on étudie en particulier les perturbations induites par des agressions souvent externes aux systèmes, sur les câblages et les circuits de ceux-ci. Il est donc nécessaire de s'intéresser en premier lieu aux modèles de matériaux, et plus précisément, à la prise en compte de matériaux composites qui constituent ou vont constituer dans le futur la plus part des structures aéronautiques, afin de réduire la consommation de carburant. Ce type de matériaux très intéressant pour le problème de l'énergie, ne présente malheureusement pas le même intérêt d'un point de vue électromagnétique. En effet, de part une conductivité finie, les champs électromagnétiques peuvent pénétrer les matériaux composites et donc se propager à l'intérieur des structures où se trouvent le câblage et les circuits à protéger. Dans le cadre des simulations, il est donc important de modéliser correctement le comportement de ce type de matériaux. En deuxième lieu, comme on l'a précisé, la géométrie des câblages doit être nécessairement prise en compte aussi dans la simulation. Afin d'éviter de mailler ceux-ci dans leur épaisseur, on doit donc définir un modèle de fil mince compatible à notre schéma différences finies d'ordre élevé qui doit permettre de prendre des fils se propageant indépendamment du maillage. Dans ce chapitre, nous nous focalisons donc plus particulièrement sur ces deux types de modèles physiques pour notre approche différences finies d'ordre élevé.

3.1 Matériaux

En termes de modèles de matériaux, nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse, exclusivement aux matériaux volumiques, aux matériaux minces de conductivité finie et enfin aux sols parfaitement conducteurs en présence d'une onde plane dans le but de pouvoir traiter des problèmes de CEM dans des bâtiments.

3.1.1 Matériaux volumiques

Les matériaux volumiques sont définis dans le système de Maxwell par une permittivité $\varepsilon(x, y, z)$, une conductivité $\sigma(x, y, z)$, une perméabilité $\mu(x, y, z)$ et enfin une conductivité magnétique $\sigma_m(x, y, z)$, telles que :

$$\begin{cases} \varepsilon(x, y, z) \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma(x, y, z) E = \nabla \times H \\ \mu(x, y, z) \frac{\partial H}{\partial t} + \sigma_m(x, y, z) H = -\nabla \times E \end{cases}$$

Dans ce système, la permittivité et la perméabilité peuvent respectivement s'écrire $\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x, y, z)$ et $\mu(x, y, z) = \mu_0 \mu_r(x, y, z)$, où $\varepsilon_r(x, y, z)$ et $\mu_r(x, y, z)$ sont les permittivité et perméabilité relatives du matériaux et appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$. En ce qui concerne les conductivités celles-ci sont des valeurs réelles positives ou nulles. On ne considère pas ici des modèles de méta-matériaux ou de plasma équivalents qui pourraient entraîner des valeurs négatives pour ces caractéristiques diélectriques et magnétiques. De même, on ne considère pas les matériaux dispersifs dont les valeurs de permittivité ou de perméabilité dépendent de la fréquence. Les quatre valeurs données pour les matériaux peuvent être aussi données sous forme de quatre matrices plenes de dimension 3×3 . On peut par ce formalisme matriciel avoir des matériaux qui relient les 3 composantes de champs. Dans cette thèse, nous éliminerons ce cas et nous ne traiterons que des matrices diagonales.

3.1.2 Matériaux minces

Modèle

Les matériaux minces de conductivité finie représentent des matériaux composites qui s'avèrent être aujourd'hui, de plus en plus utilisés dans la construction aéronautique. La propagation des champs à travers ce type de matériaux est un point important pour les études CEM. Des travaux antérieurs [22], ont montré que l'impédance de surface était un modèle pertinent pour approcher le comportement électromagnétique de ces matériaux. Pour définir cette impédance, considérons une plaque composite mince de conductivité σ , de permittivité ε et d'épaisseur e . On peut alors définir un courant J_s surfacique et montrer que si le champ est constant dans le matériaux, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effet de peau, alors $E = Z_s J_s$ avec

$$Z_s = \frac{1}{(\sigma + j\omega(\varepsilon - \varepsilon_0))e}$$

Si on s'intéresse à des composites ayant une bonne conductivité tel que le carbone par exemple, alors on peut approcher $Z_s = \frac{1}{\sigma e}$.

Pour ce type de matériaux, le saut du champs magnétique (H^* , H^{**}) de part et d'autre du matériau est donné par :

$$n \times (H^{**} - H^*) = -Z_s n \times (n \times E^*) \quad \text{\textcircled{a}3.1\textcircled{u}}$$

où n est la normale à la face composite, orientée du champ H^* vers le champ H^{**} .

À l'inverse des schémas volumes finis et Galerkin discontinu, pour introduire le modèle de matériaux minces dans notre approche différences finies d'ordre élevé, nous n'utilisons pas l'équation 3.16, mais plutôt un terme σE dans l'équation d'Ampère du système de Maxwell, comme pour les matériaux volumiques. Pour cela, nous considérons que le matériau est positionné sur une face adjacente à deux volumes K_1 et K_2 et a une épaisseur e répartie sur ces deux volumes. Lorsqu'on intègre l'équation d'Ampère projetée sur une fonction de base φ de support $K_1 \cap K_2$, le terme lié à la conductivité devient :

$$\int_{K_1} \sigma_{K_1} E \cdot \varphi dx + \int_{K_2} \sigma_{K_2} E \cdot \varphi dx$$

que l'on peut réduire à :

$$e \int_{K_1 \cap K_2} \sigma E \cdot \varphi dx$$

Pour préciser ce terme, supposons, par exemple que $K_1 \cap K_2$ soit une face perpendiculaire à l'axe x , nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_{K_1 \cap K_2} \sigma E \cdot \varphi dx &= \int_{K_1 \cap K_2} \sigma E^y \cdot \varphi dx + \int_{K_1 \cap K_2} \sigma E^z \cdot \varphi dx \\ &= dydz \left(\sum_{i_2}^r \sum_{i_3}^{r+1} \omega_{i_2} \omega_{i_3} E_{i_1 i_2 i_3}^y \cdot \varphi + \sum_{i_2}^{r+1} \sum_{i_3}^r \omega_{i_2} \omega_{i_3} E_{i_1 i_2 i_3}^z \cdot \varphi \right) \end{aligned}$$

Donc si $\varphi = \varphi_{l_1 l_2 l_3}^y$, nous avons :

$$\int_{K_1 \cap K_2} \sigma E \cdot \varphi dx = dydz \omega_{l_2} \omega_{l_3} E_{l_1 l_2 l_3}^y$$

où, si $\varphi = \varphi_{l_1 l_2 l_3}^z$, nous avons :

$$\int_{K_1 \cap K_2} \sigma E \cdot \varphi dx = dydz \omega_{l_2} \omega_{l_3} E_{l_1 l_2 l_3}^z$$

On obtient de manière similaire une formule équivalente pour une face composite suivant les axes y ou z . Ce terme scalaire est ensuite traité dans le schéma temporel comme le terme de matériau volumique.

Validation du modèle

Afin de tester notre modèle, nous avons réalisé un cas test qui consiste à éclairer par une onde plane une boîte cubique de $1m$ de côté, dont les parois sont constituées d'un matériau mince d'impédance Z_s , et à calculer le champ magnétique au centre de celle-ci, soit au point P de coordonnées $x = 0.5m$ $y = 0.5m$ et $z = 0.5m$. Ce type de dispositif se comporte comme un filtre passe bas, dont la fréquence de coupure dépend de la valeur de Z_s . Afin de valider notre modèle nous avons fait des comparaisons avec un calcul utilisant la méthode des moments et le schéma de Yee.

L'onde plane utilisée est définie par les paramètres suivants :

- Incidence suivant $-z$
- Champ électrique suivant $E_x = 377V/m$
- Champ magnétique suivant $H_y = 1A/m$
- Signal temporel défini par une gaussienne dont la moyenne et l'écart type sont respectivement donnés par $t_0 = 5.e - 9s$, et $\alpha = 1.5e - 9s$.

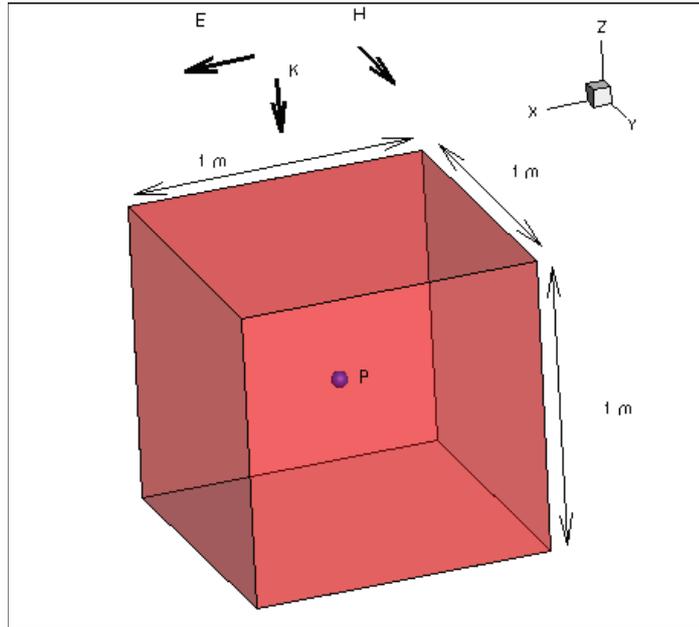
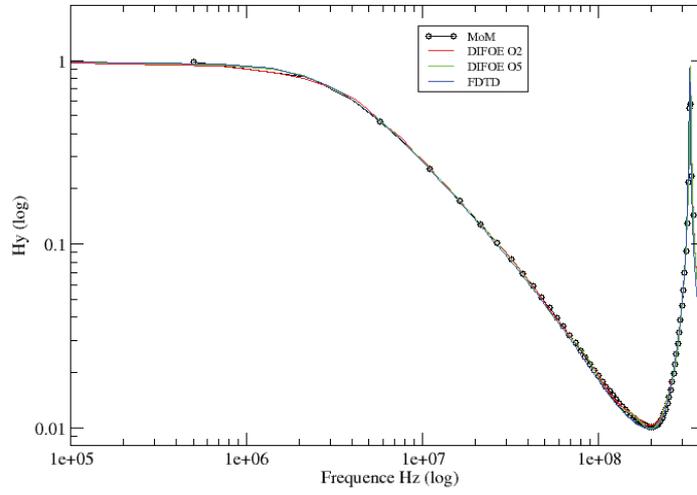


figure 3.1: Boite de 1m de coté.

Deux valeurs de Z_s sont considérées en prenant respectivement pour la conductivité et l'épaisseur du matériau $\sigma = 20S/m$, $d = 1.e - 2m$ pour la première valeur et $\sigma = 2S$, $d = 1.e - 2m$ pour la deuxième valeur. Les simulations avec la méthode DIFOE ont été réalisées à l'ordre 2 et à l'ordre 5. Nous voyons une très bonne concordance des résultats pour toutes les méthodes et pour les deux valeurs de Z_s , particulièrement dans la plage de fréquences qui définissent le filtre passe bas. Ceci permet de valider notre modèle de matériau mince. Nous pouvons remarquer toutefois l'existence d'un pic en fin de plage de fréquence, avec un petit décalage de fréquence pour la solution du schéma de Yee, alors que la méthode des moments et notre solution donnent un pic centré sur la même fréquence.

Boite 1x1x1, Zs=5 Ohm/m



Boite 1x1x1, Zs=5 Ohm/m

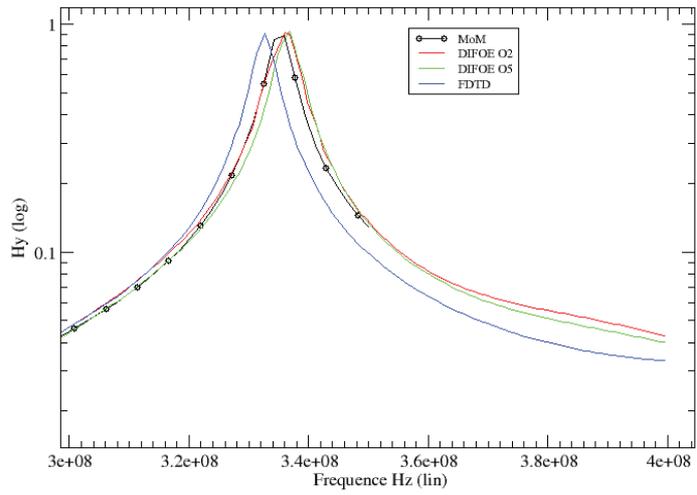
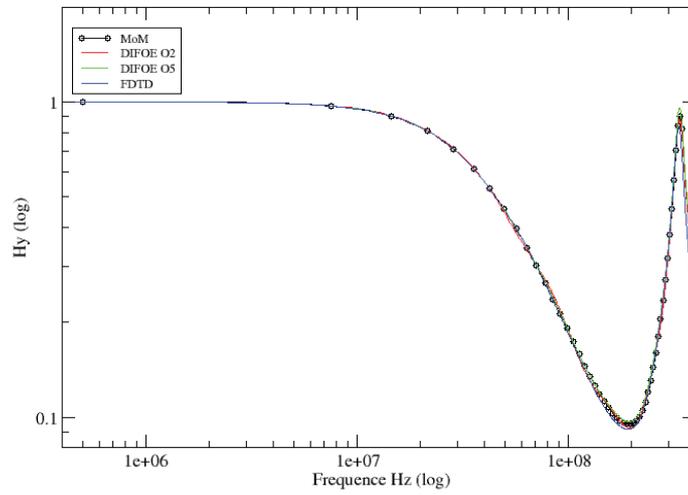


figure 3.2: Comparaisons DIFOE/MoM/FDTD Zs&5

Boite 1x1x1 $Z_s = 50 \text{ Ohm/m}$



Boite 1x1x1 $Z_s = 50 \text{ Ohm/m}$

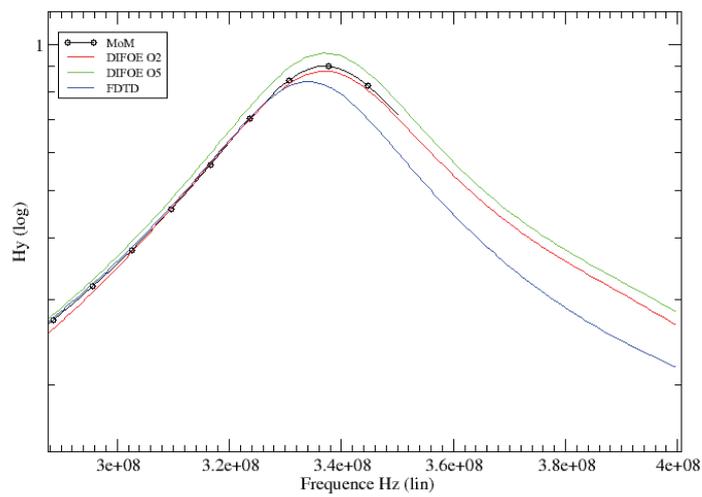


figure 3.3: Comparaisons DIFOE/MoM/FDTD $Z_s \& z 50$

3.1.3 Modèle de sol parfait en présence d'une onde plane

Afin de pouvoir traiter des problèmes de CEM sur des bâtiments, il est nécessaire d'introduire un sol. Dans une première hypothèse, le sol peut être considéré comme parfaitement métallique. Dans le cas d'une injection d'une onde plane sur un bâtiment posé

sur un sol parfaitement métallique, il est difficile de positionner une surface de Huygens. En effet, on ne peut pas simplement tronquer cette surface au dessus du sol, comme cela est fait dans de nombreuses simulations. Pour prendre en compte correctement l'onde, il faut utiliser la théorie des images qui implique que la surface de Huygens se limite au dessus du plan et sur laquelle on impose la somme de deux ondes planes dont les points de phase nulle P et P_s sont comme décrit sur la figure 3.4. Supposons que le sol soit positionné en $z = 0$ et que l'onde plane soit définie par (k, E, H) , tel que $k = (k_x, k_y, k_z)$, $E = (E_x, E_y, E_z)$ et $H = (k \times E)/\mu_0$. L'onde plane image dont le point de phase nulle est situé en P_s est définie par (k', E', H') avec $k' = (k_x, k_y, -k_z)$ et $E' = (-E_x, -E_y, E_z)$ pour assurer que $n \times E = 0$ au niveau du sol métallique. Pour finir $H' = (k' \times E')/\mu_0$.

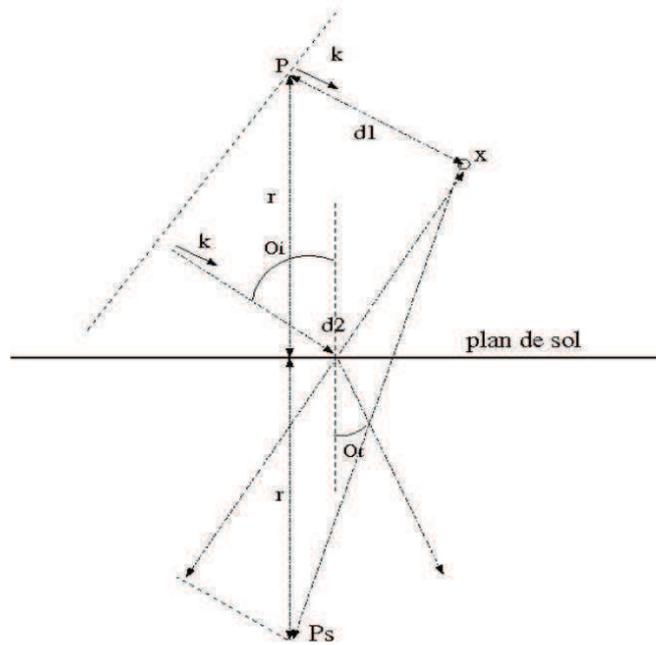


figure 3.4: Prise en compte d'une onde plane dans le cas d'un sol parfait. Définition de l'onde image.

Validation du modèle

Afin de valider notre modèle, nous avons réalisé un cas test qui consiste à éclairer par une onde plane un sol supposé parfaitement conducteur et nous avons fait des comparaisons de nos calculs avec une solution analytique. Le signal temporel $f(t)$ considéré est une gaussienne dont les paramètres sont les suivants $t_0 = 1.e^{-8}s$ et $a = 3.e^{-9}$ tels que $f(t) = \exp\left(\left(\frac{t-t_0}{a}\right)^2\right)$. Comme illustré dans la figure 3.5, l'onde plane présente une incidence de 30 degrés par rapport à l'axe -Z.

Le domaine de calcul est défini par les coordonnées suivantes : $X_{min} = -0.7m$,

$X_{max} = 4.7\text{m}$, $Y_{min} = -2.2\text{m}$, $Y_{max} = 2.2\text{m}$, $Z_{min} = 0\text{m}$ et $Z_{max} = 3.7\text{m}$

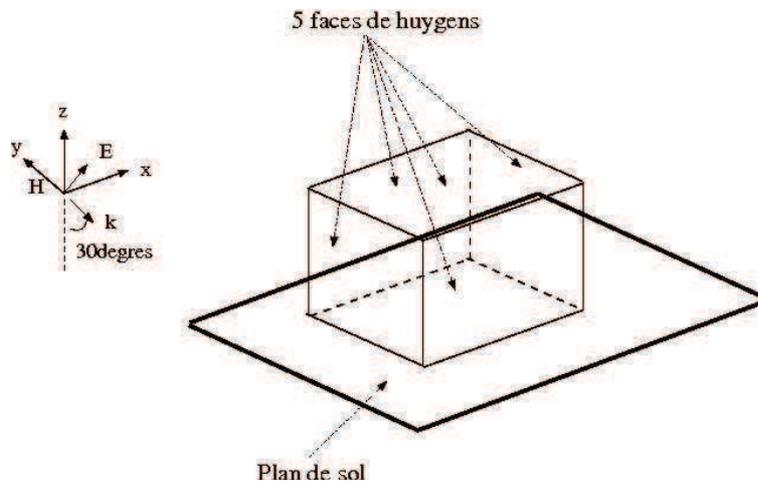


figure 3.5: Définition du cas test. Incidence de l'onde plane et position des surfaces de Huygens.

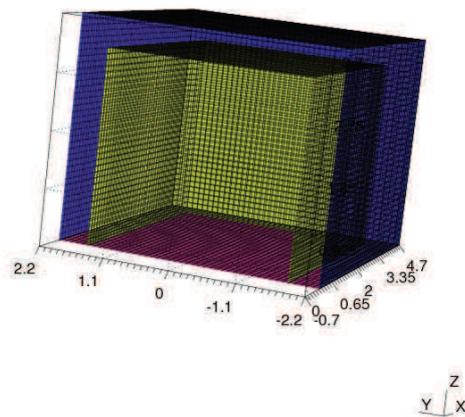


figure 3.6: Maillage du sol et des surfaces de Huygens.

Nous pouvons voir sur la figure 3.6 le maillage du sol métallique et des surfaces de Huygens. Nous avons relevé les valeurs des composantes E_x et E_z en un point situé aux coordonnées $x = 2\text{m}$, $y = 0\text{m}$ et $z = 1.5\text{m}$.

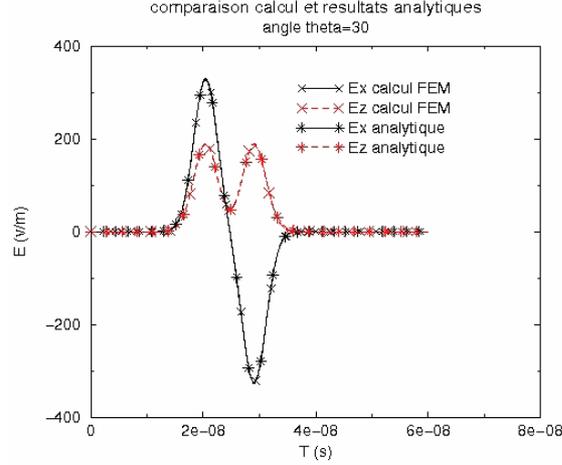


figure 3.7: Comparaisons des composantes Ex et Ez à la solution analytique.

La figure 3.7 montre une très bonne concordance des solutions calculées avec la solution analytique, ce qui valide notre modèle de sol parfaitement conducteur.

3.2 modèles de fils

Il existe dans la littérature plusieurs modèles de fils minces dont le premier dans la chronologie est celui proposé par R. Holland [12] pour le schéma de Yee. Dans ce modèle, les fils sont supposés avoir exclusivement des directions perpendiculaires aux axes x , y ou z . Depuis, plusieurs recherches ont été menées à partir de cette approche, pour introduire un modèle de fil minces dont la direction est indépendante du maillage, noté aussi dans la littérature fil mince oblique. Parmi ces modèles, on peut citer les travaux de F. Edelvik [15] qui furent menés sur le schéma de Yee puis sur des schéma éléments finis d'ordre élevé, ainsi que par d'autres auteurs sur des schéma volumes finis [28] et récemment sur une approche Galerkin Discontinue [35]. Ce modèle est basé sur le formalisme de Holland. On considère autour du fil de rayon a un cylindre fictif de rayon r_0 tel que $r_0 = 1.7 \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ où Δ_x , Δ_y et Δ_z définissent la taille des mailles en x , y et z du maillage cartésien. L'inductance L du modèle de Holland est alors donnée par :

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \text{Log}\left(\frac{r_0 + a}{2a}\right)$$

On écrit que le courant $I(x)$ sur le fil par $I(x) = \sum_{i=1,N} I_i \phi_i(x)$ où $\phi_i(x)$ définissent des

fonctions de base scalaires 1D sur celui-ci. Un exemple de fonctions de base sont les fonctions chapeaux définies par :

$$\begin{aligned} - \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i] \text{ alors } \phi_i(x) &= \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \\ - \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ alors } \phi_i(x) &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned}$$

– sinon $\phi_i(x) = 0$

où $(x_i)_{i=1,N}$ représentent les centres de gravité de chaque segment i du fil considéré. En utilisant ces dernières fonctions de base, on retrouve un schéma équivalent aux différences finies pour résoudre les équations de lignes.

Concernant la densité de courant J , on suppose que celle-ci existe autour du fil dans le cylindre fictif de rayon r_0 et on écrit $J(r, x) = I(x)g(r)u = \sum_{i=1,N} I_i\phi_i(x)g(r)u$, où u est

le vecteur directeur du fil, x la coordonnée curviligne sur le fil et r la coordonnée radiale autour de celui-ci. On suppose que la densité de courant est constante suivant θ . $g(r)$ est une fonction spatiale telle que :

$$\int_{r \geq a} g(r) 2\pi r dr = 1$$

Dans son modèle F. Edelvik choisit :

$$g(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0 \\ 0 & \text{si } r > r_0 \\ \frac{1 + \cos(\frac{\pi r}{r_0})}{A} & \text{si } 0 \leq r \leq r_0 \end{cases}$$

avec $A = \pi(r_0^2 - a^2) + \frac{2r_0^2}{\pi}(-1 - \cos(\frac{\pi a}{r_0}) - \frac{\pi}{a} \sin(\frac{\pi a}{r_0}))$.

Si on écrit $E(x) = \sum_K E_K N_K(x)$ où $N_K(x)$ définissent des fonctions de base vectorielles à fonctions chapeaux similaire au segment pour le schéma de Yee. On a le terme de couplage en E sur l'équation des courants qui s'écrit en une inconnue i de courant :

$$E_i = \frac{\sum_K (E_K \int_V u \cdot N_K(x, r) g(r) \phi_i(x) dv)}{\Delta x_i} \quad \text{â3.2û}$$

où V est la zone cylindrique autour du fil privée de celui-ci. De la même manière, on détermine que le terme J de couplage des courants sur le champ s'écrit en une inconnue k de champ :

$$J_k = \frac{\sum_j (I_j \int_V u \cdot N_K(r, x) g(r) \phi_j(x) dv)}{\Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k} \quad \text{â3.3û}$$

on note que l'on peut écrire $E_i = \frac{(PE)_i}{\Delta x_i}$ et $J_k = \frac{(P^T I)_k}{\Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k}$. Ce couplage entre E et I permet d'assurer une conservation d'énergie du problème couplé et donc d'avoir un problème bien posé.

La difficulté de ce modèle réside dans la prise en compte des jonctions entre fils, où la mise à jour du champ dans les cellules autour de celles-ci est incomplète ou mal calculé à cause de l'intersection des cylindres.

Pour palier à ce problème, dans le contexte du schéma de Yee, C. Guiffaut proposa un autre modèle de fil mince oblique. Pour cela, il repris la formulation de Holland dans

laquelle l'inductance prise en compte dans les équations de ligne est une moyenne sur la cellule de Yee de la self $L_\rho = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Log}(\frac{\rho}{a})$ définie en un point P positionné à la distance ρ du fil. Dans son approche C. Guiffaut proposa de dissocier l'équation de ligne en 12 équations étant chacune liée à une des 12 composantes de champs électrique localisées sur la cellule considérée. On obtient alors pour chaque composante de champ une équation lié au calcul des courants sur le fil donnée par :

$$L_{u,j,m} \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \nu^2 \frac{\partial q}{\partial l} \right) r \cdot u = \langle E_{u,j,m} \rangle \quad \hat{a}3.4\hat{u}$$

où les indices u, j, m définissent la composante de champ (E_x, E_y, E_z) considérée, l'une des quatre composantes localisées dans la cellule et le numéro de la cellule. Les vecteurs u et r définissent la direction de la composante et celle du fil. La self est donnée par :

$$L_{u,j,m} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\int_{V_{u,j,m}} \text{Log}(\frac{\rho(x)}{a}) dx}{\int_{V_{u,j,m}} dx} \quad \hat{a}3.5\hat{u}$$

avec $\rho(x) > a$. Dans la méthode, on découpe le fil en N segments et pour chaque segment k on calcule la longueur $\delta l_{k,m}$ de la partie du segment étant localisée dans la cellule m . On détermine alors, pour chaque composante u , un champ de couplage avec les équations de lignes sur le segment k donné par :

$$E_{u,k} = \sum_{m \in \text{Supp}_k} \frac{\delta l_{k,m}}{\Delta l} \left(\sum_{j=1}^4 E_{u,j,m} P_{u,j,k,m} \right) \quad \hat{a}3.6\hat{u}$$

avec $P_{u,j,k,m}$ un poids donné par l'interpolation bilinéaire des 4 composantes de champs présentes dans la cellule et Supp_k l'ensemble des cellules m ayant une intersection non nulle avec le segment k .

En considérant ce qui précède, on peut exprimer de manière générale, l'équation de courant par :

$$\sum_u L_{u,k} \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \nu^2 \frac{\partial q}{\partial l} \right) u \cdot r = \sum_u E_{u,k} u \cdot r \quad \hat{a}3.7\hat{u}$$

avec

$$L_{u,k} = \sum_{m \in \text{Supp}_k} \frac{\delta l_{k,m}}{\Delta l} \left(\sum_{j=1}^4 L_{u,j,m} P_{u,j,k,m} \right)$$

Concernant le terme de densité de courant par la mise à jour des champs, en utilisant un calcul similaire aux composantes de champs, on montre que l'on obtient pour la j^{ieme} composante u de la cellule m :

$$J_{u,j,m} = u \cdot r \sum_{k \in \text{Supp}_m} P_{u,j,k,m} \frac{\delta l_{k,m}}{\Delta l} J_k \quad \hat{a}3.8\hat{u}$$

avec $J_k = \frac{I_k \Delta l}{\Delta x \Delta y \Delta z}$ et Supp_m l'ensemble des segment k dont l'intersection avec la cellule m est non nulle.

Dans ce modèle, on note qu'il n'y a pas de zone considérée autour du fil et donc pas de problème lié aux jonctions. Toutefois ce modèle repose sur la projection de l'équation de ligne sur les 12 composantes du schéma de Yee présentes dans la cellule, ce qui rend plus difficile son extension à des approximations spatiales d'ordre élevé que le modèle de F. Edelvik.

Dans la suite, nous proposons une autre approche assez similaire à celle de F. Edelvik, mais dont la répartition spatiale du courant autour du fil se limite à celui-ci. Cela permet d'éviter les problèmes liés aux jonctions de fils, tout en conservant les avantages du schéma de F. Edelvik pour tenir compte des schémas d'ordre élevé.

3.2.1 Principe de l'approche fil minces

Chaque fil oblique est discrétisé suivant un ensemble de segments droits dont la longueur est proportionnelle à la distance moyenne entre deux degrés de liberté d'une cellule. Nous introduisons alors, comme dans le cas du schéma de Yee, une inconnue de courant au centre de chaque segment et deux inconnues de charges en ses extrémités, donnés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{RI}{L} + \frac{M}{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{C}{L} Q_c = -\nu^2 \frac{\partial q}{\partial l} + \frac{\langle E \cdot u \rangle}{L} \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial I}{\partial l} = 0 \\ \frac{\partial Q_c}{\partial t} = I \end{cases} \quad \text{â3.9û}$$

où R , M , C sont des éléments de circuit localisés sur le fil et Q_c la charge d'un élément capacitif. u définit le vecteur directeur du fil et L une inductance calculée en considérant un rayon moyen R égal à la distance du segment divisée par 2. On obtient alors :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{R}{a}\right) + \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2R^2} \right) \quad \text{â3.10û}$$

où a définit le rayon du fil. Pour compléter le modèle de fil, on rajoute aux équations précédentes les conditions limites suivantes :

- $q = 0$ pour un fil rattaché à une plaque métallique
- $I = 0$ pour un fil en l'air
- $I = \pm \nu q$ pour un fil adapté à l'infini
- dans le cas d'une jonctions à n fils, on a $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ et $\forall (i, j) \in [1, n]^2, V_i = V_j$. Ces deux lois sont la loi de Kirchoff et la loi des mailles prises au niveau de la jonction. Elle impose que la tension V de chaque fil par rapport à une référence est continue âespace libreû et que la somme algébrique des courants circulant sur les différents fils est nulle au point de jonction.

La discrétisation des équations 3.9 avec les conditions limites s'effectue en utilisant un schéma leap-frog en temps et en espace à l'ordre 1 comme dans le cas de la méthode différences finies. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{M}{dl}\right) \frac{I^{n+\frac{1}{2}} - I^{n-\frac{1}{2}}}{dt} + \frac{R}{Ldl} \frac{I^{n+\frac{1}{2}} + I^{n-\frac{1}{2}}}{dt} = \\ & -\nu^2 \frac{q_2^n - q_1^n}{dl} + \frac{\langle E^n \rangle}{L} - \frac{V^n}{Ldl} - \frac{C Q_c^n}{Ldl} \\ & \frac{Q_c^{n+1} - Q_c^n}{dt} = I^{n+\frac{1}{2}} \\ & \begin{cases} \frac{dl}{2} \left(\frac{q_2^{n+1} - q_2^n}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{q_2^{n+1} + q_2^n}{2} \right) = -(IA - I^{n+\frac{1}{2}}) \\ \frac{dl}{2} \left(\frac{q_1^{n+1} - q_1^n}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{q_1^{n+1} + q_1^n}{2} \right) = -(I^{n+\frac{1}{2}} - IB) \end{cases} \end{aligned}$$

Pour finaliser la discrétisation du système 3.9, il reste à déterminer le terme de couplage avec le champ donné par :

$$\frac{\langle E \cdot u \rangle}{L} \tag{3.11}$$

Pour cela, il est nécessaire de considérer les éléments K du maillage qui sont traversés par un segment. En effet, soit le segment s , on approche le terme 3.11 par :

$$\frac{1}{L} \frac{\int_s E \cdot u_s dl}{L_s} \tag{3.12}$$

où u_s est le vecteur directeur du segment s et L_s sa longueur. En ne considérant que les éléments K qui intersectent S , 3.12 se réduit à :

$$\frac{1}{L} \frac{1}{L_s} \sum_{K \in \text{Supp}(s)} \int_{l_K} E_K \cdot u_s dl \tag{3.13}$$

avec

$$\text{Supp}(s) = \{K \in \tau_h; K \cap s \neq \emptyset\} \tag{3.14}$$

où τ_h est une partition de Ω et $l_K = [x_{1,K}, x_{2,K}]$ définit la partie du segment interne à l'élément K . En introduisant une formule de quadrature de Gauss pour évaluer l'intégrale sur l_K , on peut alors écrire :

$$\int_{l_K} E_K \cdot u_s dl = \sum_{i=1}^{r_0+1} \omega_i E_K(x_i) \cdot u_s \|x_{2,K} - x_{1,K}\| \tag{3.15}$$

Afin d'avoir un calcul précis, on choisit un nombre suffisant de points de quadrature r_0+1 . Ce nombre est indépendant et plus grand que le degrés d'approximation spatiale choisi pour évaluer les champs. En effet, par rapport à la coordonnée curviligne, le paramètre d'intégration lié au champ électrique n'est plus décrit par une fonction polynômiale. Dans

nos applications, après plusieurs expérimentations numériques, nous utilisons 20 points de quadrature pour des ordres spatiaux allant jusqu'à 5, afin d'obtenir une intégrale précise.

Si nous développons l'expression 3.15, en exprimant $E_K(x_i)$ nous avons :

$$E_K(x_i) = \sum_{l_1=1}^r \sum_{l_2=1}^{r+1} \sum_{l_3=1}^{r+1} E_{K,l_1l_2l_3}^x \varphi_{K,l_1l_2l_3}^x \vec{e}_x + \sum_{l_1=1}^{r+1} \sum_{l_2=1}^r \sum_{l_3=1}^{r+1} E_{K,l_1l_2l_3}^y \varphi_{K,l_1l_2l_3}^y \vec{e}_y + \sum_{l_1=1}^{r+1} \sum_{l_2=1}^{r+1} \sum_{l_3=1}^r E_{K,l_1l_2l_3}^z \varphi_{K,l_1l_2l_3}^z \vec{e}_z$$

où r est l'ordre d'approximation spatial sur K et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base canonique cartésienne. Pour l'inconnue $E_{K,l_1l_2l_3}^x$, la contribution au champ tangent sur le segment s est définies par :

$$\sum_{i=1}^{r_0+1} \omega_i E_{K,l_1l_2l_3}^x \varphi_{K,l_1l_2l_3}^x(x_i) \vec{e}_x \cdot u_s$$

que l'on peut aussi écrire :

$$E_{K,l_1l_2l_3}^x C_{K,l_1l_2l_3}^x$$

avec :

$$C_{K,l_1l_2l_3}^x = \sum_{i=1}^{r_0+1} \omega_i \varphi_{K,l_1l_2l_3}^x(x_i) \vec{e}_x \cdot u_s$$

De même, pour les autres composantes, on a une contribution donnée par $C_{K,l_1l_2l_3}^y$ et $C_{K,l_1l_2l_3}^z$ données par :

$$\begin{cases} C_{K,l_1l_2l_3}^y = \sum_{i=1}^{r_0+1} \omega_i \varphi_{K,l_1l_2l_3}^y(x_i) \vec{e}_y \cdot u_s \\ C_{K,l_1l_2l_3}^z = \sum_{i=1}^{r_0+1} \omega_i \varphi_{K,l_1l_2l_3}^z(x_i) \vec{e}_z \cdot u_s \end{cases}$$

Le terme de couplage $E_K \cdot u_s$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{l_1=1}^r \sum_{l_2=1}^{r+1} \sum_{l_3=1}^{r+1} E_{K,l_1l_2l_3}^x C_{K,l_1l_2l_3}^x + \sum_{l_1=1}^{r+1} \sum_{l_2=1}^r \sum_{l_3=1}^{r+1} E_{K,l_1l_2l_3}^y C_{K,l_1l_2l_3}^y + \\ & \sum_{l_1=1}^{r+1} \sum_{l_2=1}^{r+1} \sum_{l_3=1}^r E_{K,l_1l_2l_3}^z C_{K,l_1l_2l_3}^z \end{aligned} \quad \text{3.16}$$

Pour finaliser l'introduction du modèle de fil mince oblique dans les équations de Maxwell, il faut maintenant considérer l'ajout d'un terme J , provenant des courants sur les fils, dans l'équation d'Ampère comme suit :

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J = \nabla \times H \quad \text{3.17}$$

En écrivant la forme variationnelle de notre équation, nous obtenons, $\forall \varphi_0 \in H^0(\text{rot}, \Omega)$:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \varphi_0 dx + \int_{\Omega} \sigma E \cdot \varphi_0 dx + \int_{\Omega} J \cdot \varphi_0 dx = \int_{\Omega} H \cdot \nabla \times \varphi_0 dx \quad \text{â3.18û}$$

Nous nous intéressons alors à l'évaluation du terme :

$$\int_{\Omega} J \cdot \varphi_0 dx \quad \text{â3.19û}$$

Le terme J n'apparaît que sur les élément $K \in \tau_h$ tels qu'il existe un segment s traversant celui-ci. Considérons R un rayon donné, comme précédemment, par la demie-longueur du segment s , on suppose que la densité volumique de courant $J = J_s$ autour d'un segment s , est considérée comme uniforme dans cette zone. On peut alors écrire que :

$$J_s = \frac{I_s u_s}{\pi R^2}$$

où I_s est le courant sur le segment s et u_s le vecteur directeur du segment s . Le terme â3.19û peut aussi s'exprimer par :

$$\int_{\Omega} J_s \cdot \varphi_0 dx = \sum_{K \in \text{Supp}(\varphi_0) \cap \text{Supp}(s)} \int_K J_s \cdot \varphi_0 dx$$

où nous rappelons que $\text{Supp}(s)$ est l'ensemble des cellules $K \in \tau_h$ telles que l'intersection de celles-ci avec le segment s soit non nulle et $\text{Supp}(\varphi_0)$ est le support de la fonction φ_0 . En limitant l'intégration à l'intersection du cylindre de rayon R autour du fil où le terme J_s n'est pas nul et en effectuant un changement de coordonnées, on obtient en faisant l'hypothèse que φ_0 est quasiment constante en r et θ , que :

$$\int_{\Omega} J_s \cdot \varphi_0 dx = \sum_{K \in \text{Supp}(\varphi_0) \cap \text{Supp}(s)} \int_{x_{1,K}}^{x_{2,K}} \int_0^{2\pi} \int_0^R J_s \cdot \varphi_0 dx$$

avec $x_{1,K}$ et $x_{2,K}$ définis comme précédemment. En utilisant une formule de quadrature de Gauss à $r_0 + 1$ points pour approximer les intégrales, ce terme peut aussi s'exprimer :

$$\sum_{K \in \text{Supp}(\varphi_0) \cap \text{Supp}(s)} J_s \pi R^2 \int_{x_{1,K}}^{x_{2,K}} \varphi_0 dx = \sum_{K \in \text{Supp}(\varphi_0) \cap \text{Supp}(s)} J_s \pi R^2 \sum_{i=1}^{r_0+1} \omega_i \varphi_0(x_i) \|x_{2,K} - x_{1,K}\|$$

Nous obtenons finalement :

$$\int_{\Omega} J_s \cdot \varphi_0 dx = \sum_{K \in \text{Supp}(\varphi_0) \cap \text{Supp}(s)} I_s u_s \sum_{i=1}^{r_0+1} \omega_i \varphi_0(x_i) \|x_{2,K} - x_{1,K}\|$$

Si nous considérons une cellule K appartenant à $\text{Supp}(s)$ et $\varphi_0 = \varphi_{K,l_1 l_2 l_3}^x \vec{e}_x$, nous obtenons alors :

$$\int_K J_s \cdot \varphi_{K,l_1 l_2 l_3}^x \vec{e}_x dx = I_s \|x_{2,K} - x_{1,K}\| \sum_{i=1}^{r_0+1} \omega_i \varphi_{K,l_1 l_2 l_3}^x(x_i) (u_s \cdot \vec{e}_x)$$

On note que pour le champs $E_{K,l_1l_2l_3}^x$, la contribution du courant est $I_s C_{K,l_1l_2l_3}^x$, où le terme $C_{K,l_1l_2l_3}^x$ est défini comme précédemment pour le terme de couplage du champs E sur les équations de lignes.

Si l'on considère le problème de Maxwell sans conductivité σ , on peut alors écrire matriciellement le système semi-discret sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_E \frac{E_h^{n-1} - E_h^n}{\Delta t} + P J_h^{n-1/2} - R_H H_h^{n-1/2} = 0 \\ M_H \frac{H_h^{n+1/2} - H_h^{n-1/2}}{\Delta t} - R_E E_h^n = 0 \\ M_I \frac{I_h^{n+1/2} - I_h^{n-1/2}}{\Delta t} - R_q q_h^n - P^t E_h^n = 0 \\ M_q \frac{q_h^{n+1} - q_h^n}{\Delta t} - R_I I_h^{n-1/2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{à 3.20}$$

où les matrices M_E , M_H , M_I et M_q sont des matrices de masse symétriques et inversibles qui peuvent s'écrire sous la forme $M_a = m_a^t m_a$, avec a , une notation pouvant être E , H , I et q . Les termes E_h^n , $H_h^{n-1/2}$, $I_h^{n-1/2}$ et q_h^n sont respectivement les champs électrique et magnétique, les courants et enfin les charges discrétisées en espace et en temps, qui correspondent aux inconnues du schéma numérique. Soit la quantité :

$$\int_{\Omega} M_E E_h^n \cdot E_h^n dx + \int_{\Omega} M_H H_h^{n-1/2} \cdot H_h^{n-1/2} dx + \int_{\Omega_0} M_I I_h^{n-1/2} \cdot I_h^{n-1/2} dl + \int_{\Omega_0} M_q q_h^n \cdot q_h^n dl$$

où Ω est le domaine de calcul et Ω_0 l'ensemble de tous les fils. En utilisant le système à 3.20, on peut alors montrer que cette quantité est conservée au cours du temps. Pour assurer la stabilité du schéma complet Maxwell/fils, il faut de plus que la quantité précédente soit positive. On obtient alors deux contraintes sur les champs et les fils. Comme dans le cas des champs, pour les fils on trouve une condition sur le pas de temps qui va dépendre de la self des fils et donc du rayon de ceux-ci par rapport au rayon moyen fixé par la taille de la cellule [37]. Pour assurer la stabilité, il faudra prendre en compte la contrainte la plus importante sur le pas Δt .

Toute la difficulté de l'approche fils minces obliques présentée ici réside dans l'obtention pour chaque segment de l'ensemble des cellules intersectant celui-ci et du découpage du segment sur ces différentes cellules d'intersection. Pour effectuer cela nous utilisons la méthode suivante :

Soit un segment donné, considérons ses deux points d'extrémité P_1 et P_2 . On cherche tout d'abord la cellule K qui contient le point P_1 . Dans un contexte cartésien, on peut utiliser pour cela une méthode par dichotomie dans chaque direction du maillage. On considère ensuite le vecteur u_j entre le point P_1 et le centre de gravité d'une face j frontière à la cellule K . la distance du point P_1 par rapport à la face j est donnée par $\|u_j \cdot n_j\|$, où n_j définit la normale à la face j extérieure à la cellule K . On considère

ensuite le vecteur directeur u du segment et on évalue le terme $s_j = u \cdot n_j$. Pour chaque face j , dont s_j est positif, on détermine la longueur d_j du segment jusqu'à la face en utilisant le théorème de Thalès :

$$\frac{d_s}{d_j} = \frac{\|n_j \cdot u\|}{\|n_j \cdot u_j\|}$$

avec d_s la longueur du segment. La face j_0 dont la distance d_j est minimale correspond à la face traversée par le segment et le point d'intersection du segment avec cette face j_0 est donnée par :

$$P = (1 - \lambda)P_1 + \lambda P_2$$

où $\lambda = \frac{d_{j_0}}{d_s}$. On reprend ensuite comme point initial P_1 , le point P et on recommence la recherche d'une nouvelle face traversée par le segment. Le processus de recherche s'arete lorsque le terme s_j est négatif pour toutes les faces frontières de la cellule considérée. Le point P_2 est alors interne à la cellule. La figure 3.8 présente géométriquement le processus de détermination de la partie du segment dans une cellule.

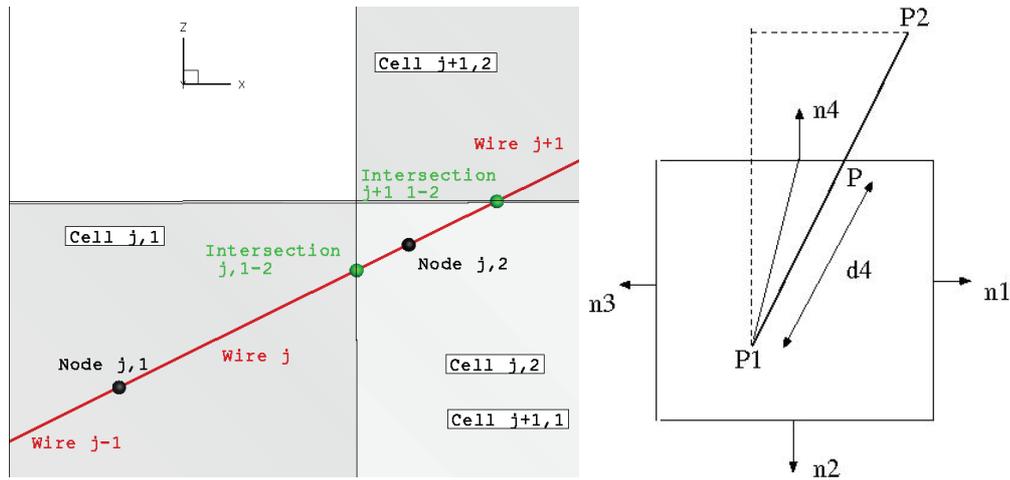


figure 3.8: Découpage du segment sur plusieurs cellules.

3.2.2 Validations

Afin de valider le modèle de fil mince oblique, proposé pour notre schéma différences finies d'ordre élevé, nous avons choisi trois exemples de structures filaires, illuminées par une onde plane, dont nous comparons les courants obtenus par notre approche avec des résultats provenant de simulations ou de la littérature. Les trois cas tests choisis sont :

- un fil en espace libre ffi
- une double boucle ffi
- une spire.

Fil en espace libre

Ce premier cas test consiste à calculer le courant au centre d'un fil de longueur $0.525m$ et de rayon $1mm$, agressé par une onde plane. La forme de l'onde plane est une gaussienne dont la moyenne et l'écart type sont donnés respectivement par $t_0 = 1.875e - 10s$ et $\sigma = 6.e - 10s$. Le vecteur d'onde est défini par $k = (0, 0, -1)$ et les amplitudes des champs électriques et magnétiques par $E_0 = (377, 0, 0)$ et $H_0 = (0, -1, 0)$. Le câble est supposé non connecté à ses extrémités sur lesquelles on impose une condition $I = 0$. Pour ce cas test, nous étudions deux configurations de calcul :

- le câble est suivant la direction x de la grille, sans pour autant se trouver sur une arête du maillage ffi
- le câble est incliné de 26° suivant l'axe x et on modifie l'onde plane de manière à conserver une configuration d'agression similaire à la première configuration de calcul. Ceci entraîne un vecteur d'onde défini par $k = (0.4472, 0., -0.894)$ et des amplitudes de champ électrique $E = (337.2, 0., 168.6)$. Les composantes de champ H restent identiques.

Quelque soit la configuration de calcul, l'onde plane présente une incidence normale à la direction du câble et le champs électrique incident est tangent à celui-ci. L'ensemble des calculs effectués par notre méthode sont faits en considérant un ordre d'approximation spatiale égal à 3 sur un domaine de calcul défini par $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ et approximé par une grille de $10 \times 10 \times 10$ mailles de pas constant $dx = dy = dz = 0.1m$. On borne le domaine de calcul en utilisant 4 couches PML à l'ordre 3. La figure 3.9 montre les deux configurations des fils par rapport au maillage et la figure 3.10, les résultats de comparaisons de calcul entre nos deux configurations de fil et le schéma de Yee sur la première configuration. On note sur cette figure que notre modèle est en très bon accord avec le schéma de Yee et le modèle de Holland, ce qui valide notre approche. D'autre part, la prise en compte d'un fil oblique est correcte puisqu'on retrouve les mêmes résultats que dans une configuration fil droit pour des conditions d'injection similaires. Enfin, on note que notre approche permet bien de tenir compte d'un schéma spatial d'ordre élevé pour le calcul des champs.

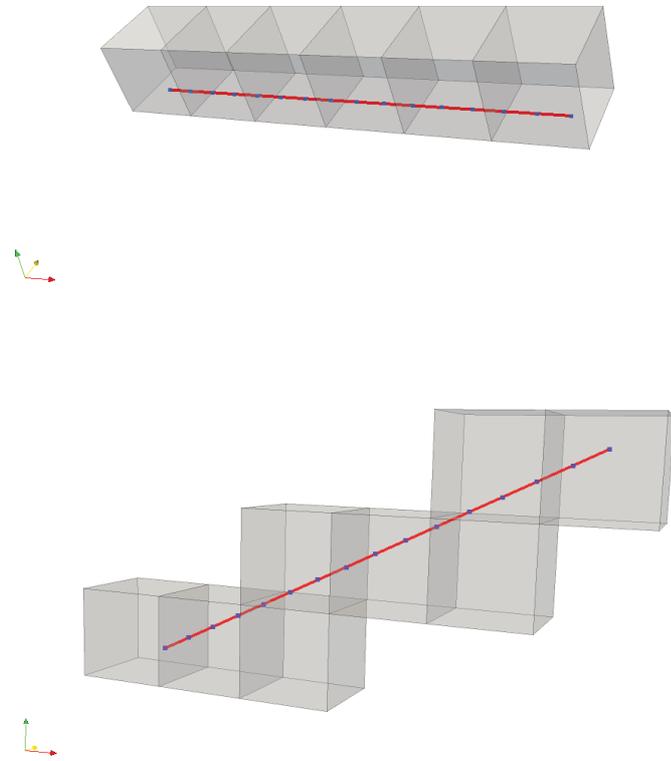


figure 3.9: Position du fil dans le maillage pour les deux configurations de calcul.

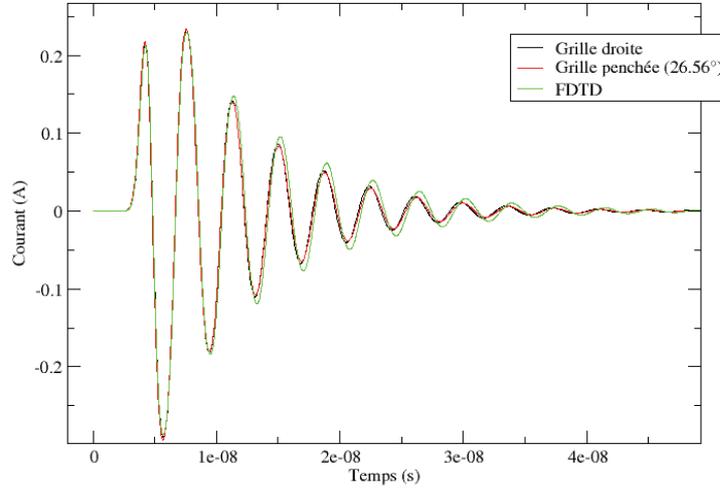


figure 3.10: Comparaison calcul entre les deux positions de fils dans le maillage et un calcul avec le modèle de Holland sur le schéma de Yee pour le fil droit.

Double boucle rectangulaire

Ce cas, plus complexe que le premier, consiste au calcul de courant en des points I_1 , I_2 et I_3 d'une double boucle rectangulaire dont la géométrie est décrite par la figure 3.11. Cette structure est illuminée par une onde plane à incidence rasante de type gaussienne et dont l'écart type et la moyenne sont identiques au premier exemple. Par rapport au cas précédent, la double boucle nécessite l'utilisation de jonctions de fils pour être modélisée. Ce cas test nous permettra donc de valider la prise en compte de jonctions multi-filaires dans notre modèle de fil oblique. Pour utiliser la possibilité d'orienter les fils indépendamment du maillage, nous étudions, comme dans le premier exemple, deux configurations pour ce cas test :

- la normale de la double boucle est orientée suivant l'axe x . Dans ce cas $k = (0, 0, -1)$, $E_0 = (377, 0, 0)$ et $H_0 = (0, -1, 0)$ fff
- la normale de la double boucle est tournée de 45° suivant l'axe z par rapport à l'axe x . Afin de conserver une même condition d'injection, on prend $k = (0, 0, -1)$, $E = (266.58, 266.58, 0)$ et $H = (0.707, -0.707, 0)$.

Plusieurs calculs à l'ordre 1 et 3 ont été effectués en considérant une grille de calcul de $88 \times 88 \times 88$ mailles pour un pas spatial constant $dx = dy = dz = 0.005m$ à l'ordre 1 et $dx = dy = dz = 0.02m$ à l'ordre 3.

La figure 3.12 présente une comparaison entre un calcul effectué par le schéma de Yee et notre approche. On note sur cette figure la bonne concordance des résultats et on en tire les mêmes conclusions que pour le premier cas test. La figure 3.13 montre une comparaison entre un calcul effectué par un formalisme intégral fréquentiel et notre approche. On note encore une fois la bonne adéquation des résultats entre les deux méthodes, permettant de valider notre modèle de fil mince ainsi que la prise en compte des jonctions de fils dans celui-ci.

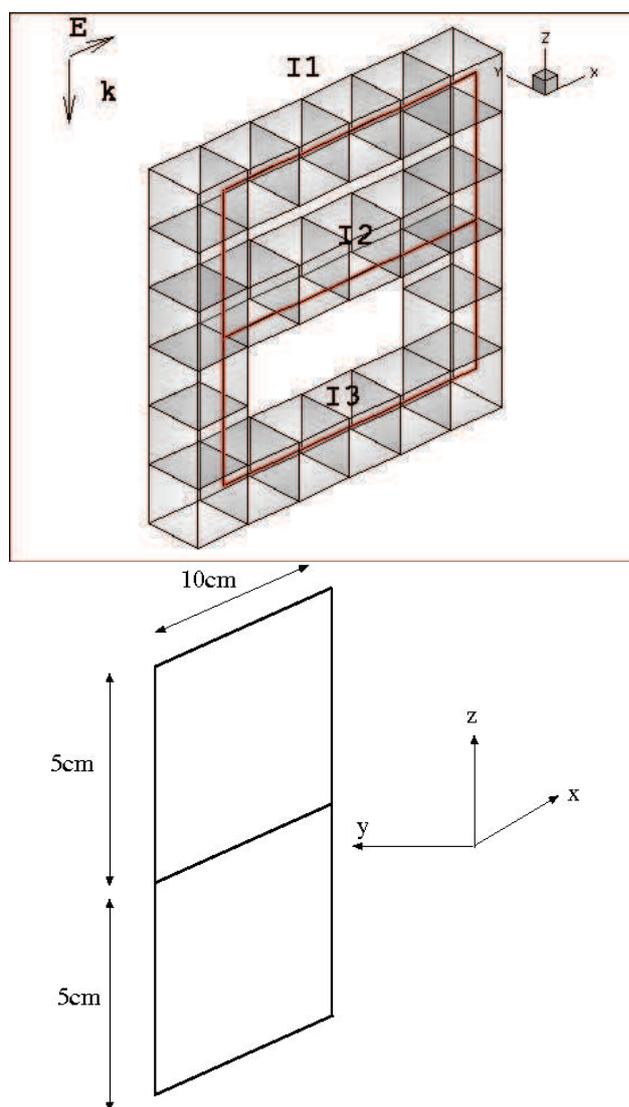
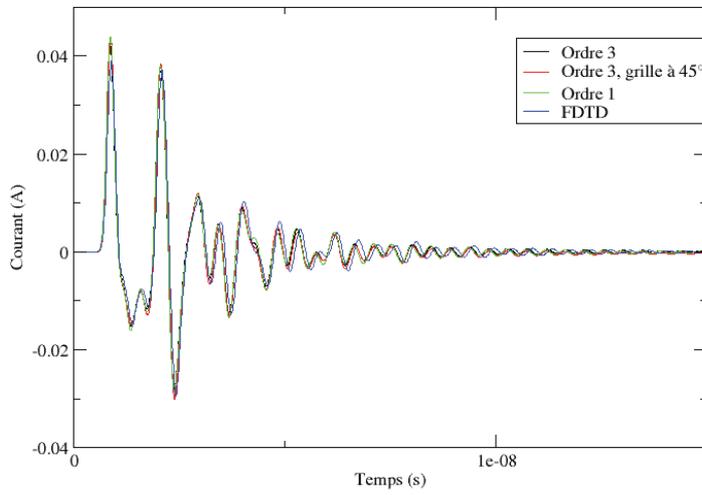


figure 3.11: Définition de la géométrie de la double boucle.

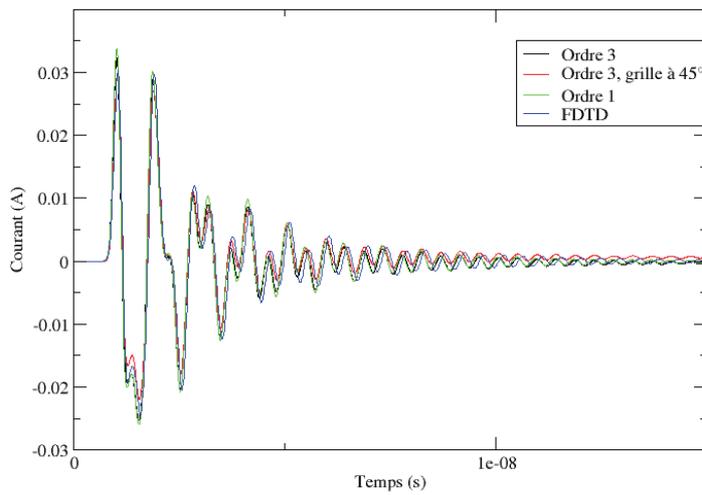
Double boucle en réception.

Incidence rasante, point 1.



Double boucle en réception.

Incidence rasante, point 2.



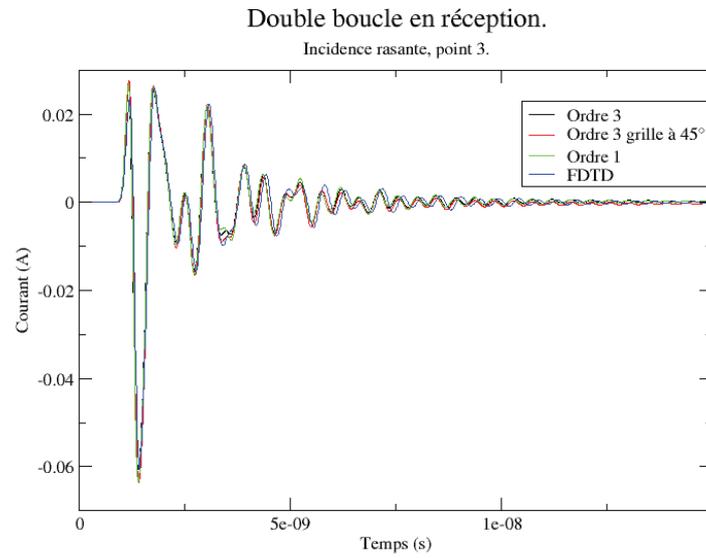
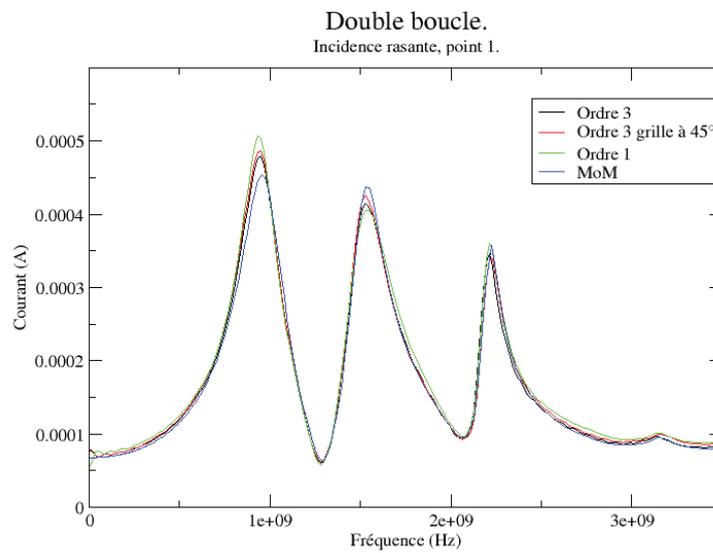


figure 3.12: Comparaison de notre méthode avec le schéma de Yee et le modèle de Holland.



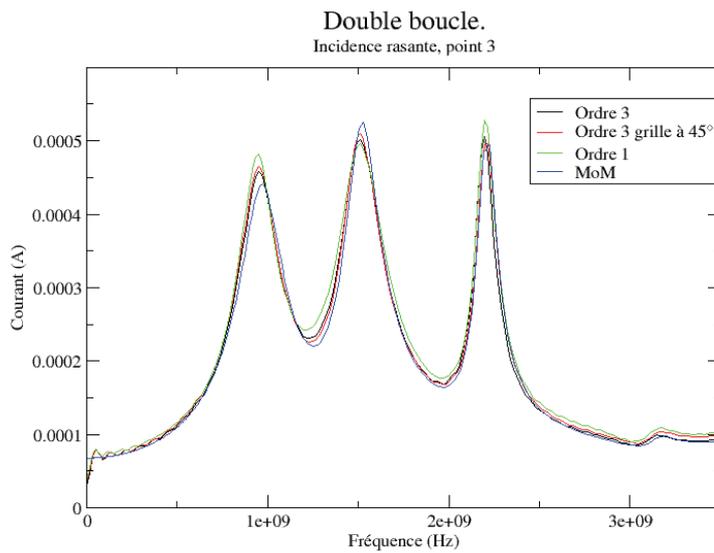
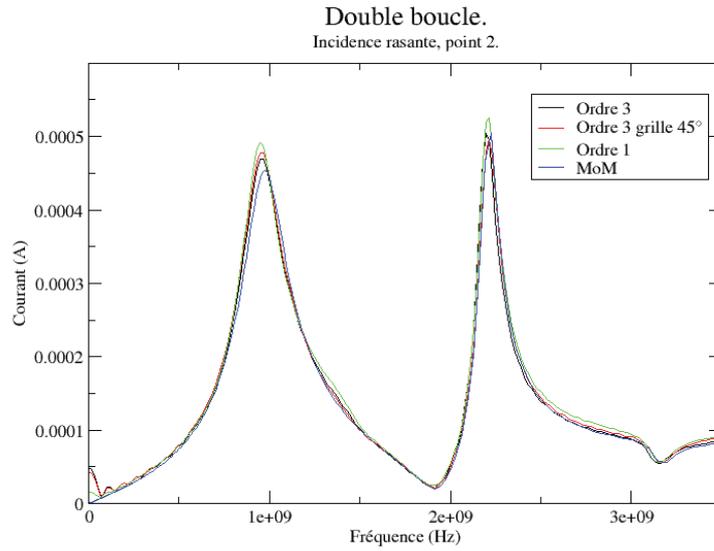


figure 3.13: Comparaison de notre méthode avec un formalisme intégral fréquentiel.

Spire

Le dernier cas test concerne une spire pour laquelle nous effectuons des calculs sur un domaine Ω de $2.8m \times 2.8m \times 2.8m$ avec un pas de discrétisation $dx = dy = dz = 0.1m$ pour un ordre spatial fixé à 2. Le domaine de calcul est borné par 5 couches PML dans

chaque direction. La spire est définie par un cercle de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon $r = 1m$. Le rayon des 40 segments conducteurs constituant la spire est de $1mm$. Celle-ci est illuminée par une onde plane de type gaussienne, avec des caractéristiques identiques aux exemples précédents. Comme précédemment, nous effectuons un calcul sur deux configurations :

- une première configuration où la normale de la spire est suivant l'axe x . Dans ce cas, les caractéristiques de l'onde plane sont données par $k = (0, 0, -1)$, $E = (377, 0, 0)$ et $H = (0, -1, 0)$
- une deuxième configuration où la normale de la spire est inclinée de 30° suivant l'axe x , par rapport à une rotation suivant l'axe z . Dans ce cas, l'onde plane est caractérisée par $k = (0, 0, -1)$, $E = (326.5, 188.5, 0)$ et $H = (0.5, -0.866, 0)$.

Pour chaque configuration, nous avons deux points de relevés de champs situés sur la spire comme indiqué sur la figure 3.14 qui présente la position de la spire par rapport au maillage pour les deux configurations de calcul.

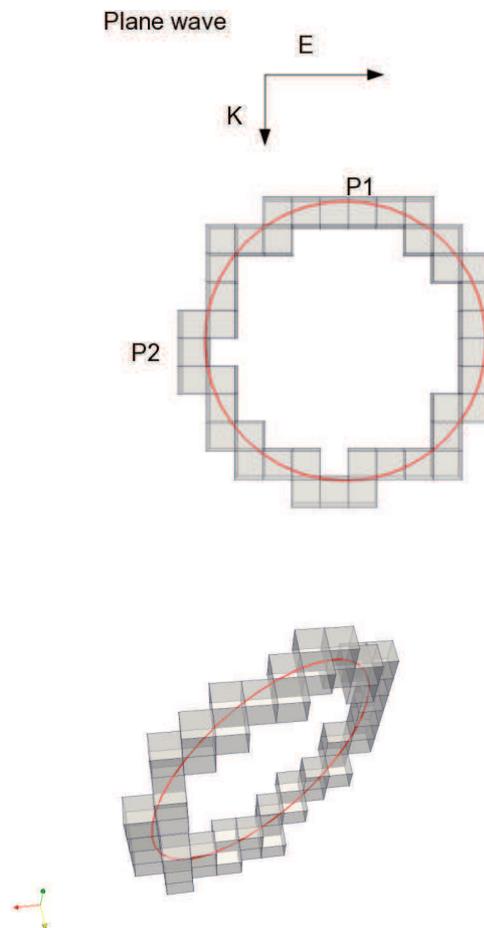


figure 3.14: Position de la spire dans le maillage.

Les figures 3.15 et 3.16 représentent respectivement une comparaison de nos calculs avec ceux de la littérature pour le modèle de fil mince de Guiffaut pour le schéma de Yee et avec un formalisme intégral fréquentiel. On note de nouveau la bonne adéquation des résultats entre notre modèle et les autres. L'ensemble de ces résultats confirme la validité de notre modèle DIFOE pour prendre en compte les fils minces obliques.

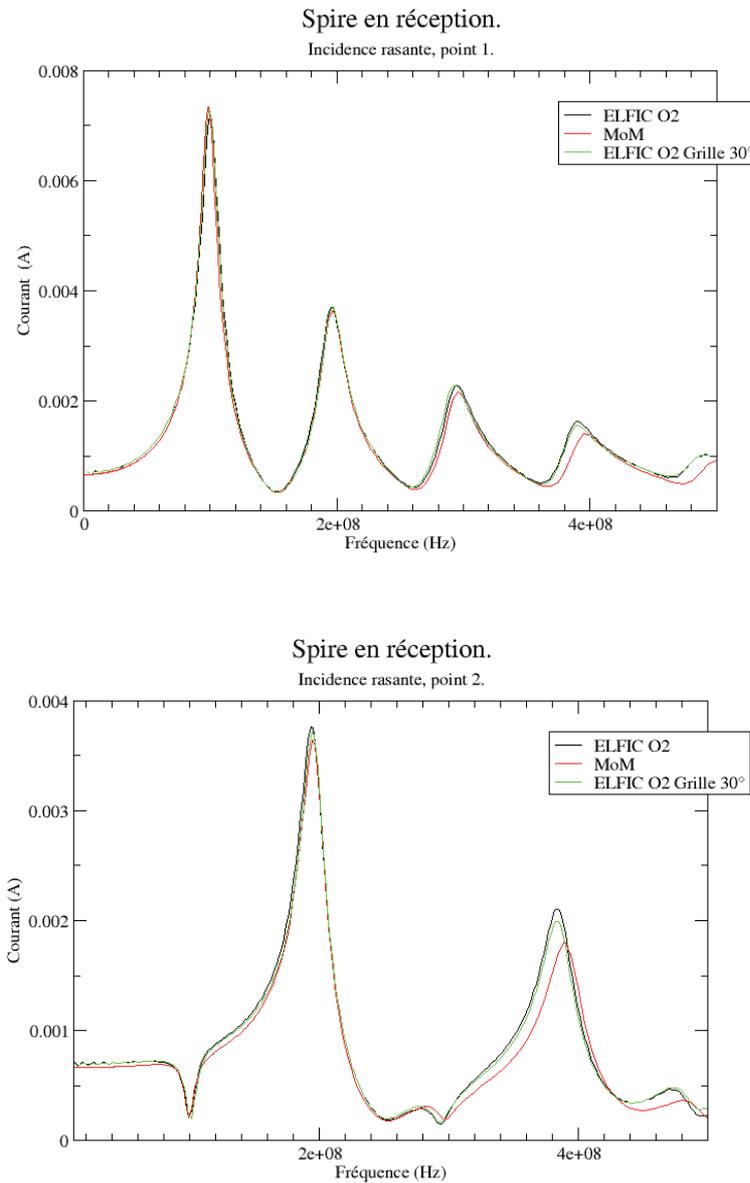


figure 3.15: Comparaison avec un formalisme intégral fréquentiel.

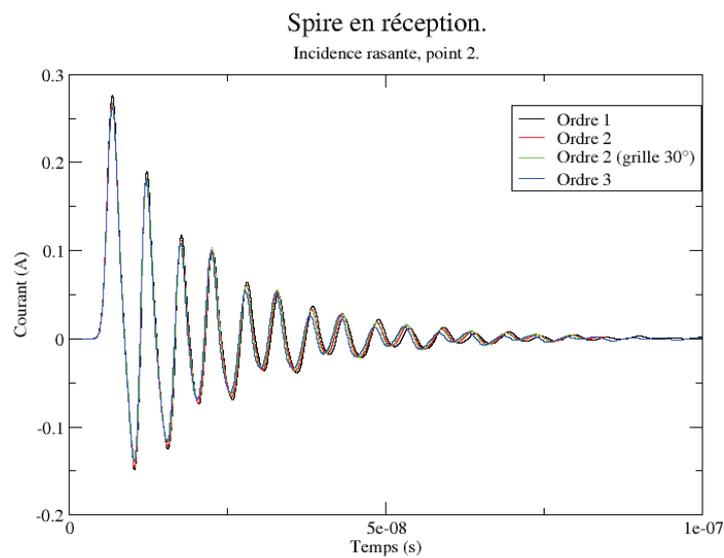
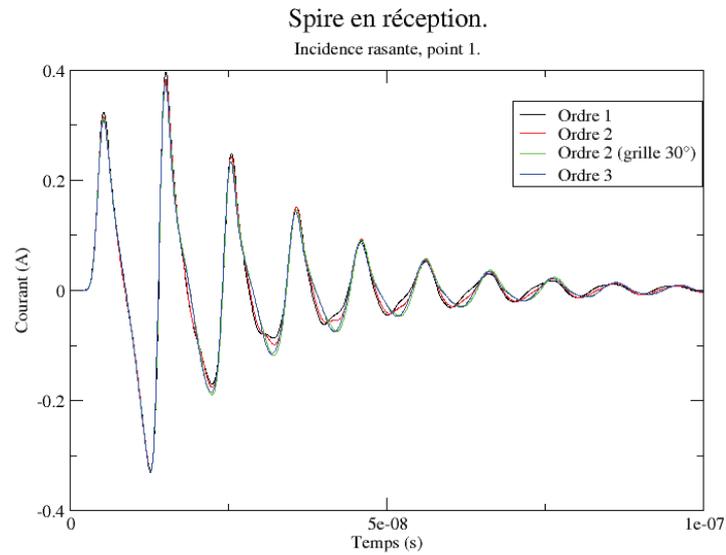


figure 3.16: Comparaison entre plusieurs configurations en temporel.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé et mis en oeuvre plusieurs modèles physiques de base permettant le traitement de problèmes de CEM. Nous nous sommes tout d'abord focalisé sur les modèles de matériaux constituant les objets et en particulier sur les

matériaux minces de conductivité finie qui constituent la majeure partie de la peau de nos structures à étudier. Ils constituent à ce titre, la première voie de pénétration des ondes à l'intérieur des structures. Un premier modèle simplifié d'impédance de surface apporte une réponse satisfaisante pour la plupart de nos applications. Ce modèle a été validé par comparaison avec d'autres méthodes numériques. Le deuxième modèle mis en oeuvre concerne la prise en compte de fils minces obliques. Pour cela, nous avons décrit une approche tenant compte de l'approximation spatiale d'ordre élevé du schéma proposé dans cette thèse en évitant les problèmes liés aux jonctions rencontrés dans le cas du modèle étudié par F. Edelvik. Ce modèle a été validé sur un ensemble de cas tests traités par les modèles de C. Guiffaut et de F. Edelvik. Dans les comparaisons effectuées, les résultats sont parfaitement similaires. De plus une comparaison des solutions obtenues par notre approche avec une méthode intégrale fréquentielle a montré encore une fois une bonne concordance des deux solutions. L'ensemble de ces comparaisons valide notre modèle de fil minces. Enfin, pour finir, nous avons introduit un modèle de sol parfait dans le cas d'une injection d'une onde plane. Ce modèle particulier, a été introduit dans notre schéma afin de pouvoir traiter des problèmes de CEM sur des bâtiments.

Chapitre 4

L'approche différences finis d'ordre spatial élevé dans un contexte multi-domaines.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au couplage de notre approche différences finies d'ordre élevé (DIFOE) avec d'autres méthodes, et plus particulièrement avec une approche Galerkin Discontinue, pour traiter de grandes scènes, en tenant compte de la courbure des objets. Diverses études ont déjà fait l'objet dans la littérature de cette problématique. Toutefois, beaucoup de ces méthodes sont basées sur des interpolations de champs qui ne garantissent pas forcément la stabilité du schéma hybride. Pour palier à ce problème, nous proposons une approche qui conserve l'énergie globale du problème, par l'ajout de termes de sauts dans notre approche différences finies d'ordre élevé.

Le chapitre se décompose en quatre paragraphes dont le premier est dédié à un historique succinct des méthodes d'hybridations sur lesquelles nous avons travaillé par le passé, ainsi que quelques références bibliographiques. Nous précisons dans ce paragraphe, les limitations connues de ces approches. Le deuxième paragraphe est consacré à la présentation rapide d'une solution informatique multi-méthodes/multi-domaines. Enfin, dans les deux derniers paragraphes, on présente notre principe d'hybridation et nous l'appliquons pour un couplage Galerkin discontinu/DIFOE, ainsi que pour un couplage DIFOE/DIFOE dans un but de traiter tout d'abord des maillages non conforme en p (ordre d'approximation spatial différent).

4.2 Approches existantes

Pour tenir compte de la courbure des objets dans les simulations, plusieurs études ont été menées et présentées dans la littérature. Dans ce document nous nous intéresserons en particulier à deux approches :

- Une hybridation volumes finis/différences finies ffi
- Un schéma Galerkin discontinu couplant un maillage cartésien avec des zones non structurées.

Pour chacune de ces méthodes nous présentons le principe d'hybridation, et nous montrons quels sont les points qui restent à améliorer. Ce qui nous conduira naturellement à considérer notre approche différences finies d'ordre élevé pour ce type d'hybridation.

4.2.1 Couplage volumes finis/différences finies.

Après avoir introduit un schéma volumes finis pour améliorer la précision des calculs des champs à proximité de parois courbes, une idée naturelle pour augmenter les performances de celui-ci, fut d'hybrider ce schéma avec celui de Yee.

Pour cela le principe consiste à définir trois zones de maillage. Une zone non structurée constituée de tétraèdres autour de l'objet diffractant, une deuxième zone cartésienne en espace libre, et enfin une troisième zone de recouvrement des deux maillages. Dans la première et la troisième zone nous faisons des calculs de champs en volumes finis, et dans la première et la troisième les calculs de champs sont faits par la méthode différences finies. Le couplage entre les deux schémas se fait dans la zone de recouvrement par interpolation des champs sur les frontières de celle-ci, comme indiqué sur la figure 4.1.

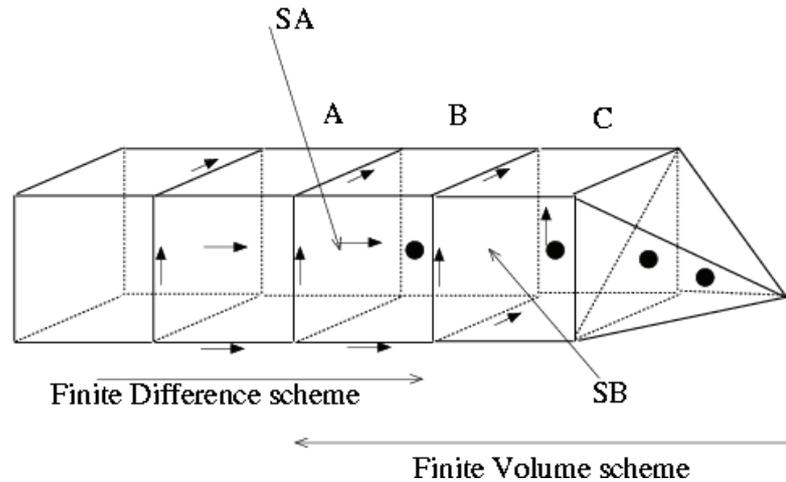


figure 4.1: Représentation des différentes zones de maillages et des schémas liés à celles-ci.

Dans cette hybridation les champs magnétiques H dans la partie structurée sont évalués au temps $n + 1/2$ en fonction des champs électriques E au temps n et localisés le long des arêtes des cellules, comme décrit dans le schéma de Yee. Pour limiter le domaine de calcul des différences finies, nous sommes obligés d'évaluer dans notre figure les composantes des champs électriques sur la surface SB . Pour cela nous faisons une moyenne entre ces mêmes composantes calculées par le schéma volumes finis dans les cellules B et C , comme indiqué sur la figure. Les temps d'évaluation des champs électriques dans les

schémas volumes finis et différences finies étant les mêmes, il n'y aura pas d'interpolations en temps. En ce qui concerne le schéma volumes finis, pour le calcul des champs E et H dans la cellule B au temps n , nous avons besoin de connaître les flux sur la surface SA . Pour cela, il faut évaluer les champs E et H aux frontières dans la cellule A . Ceci se fait en interpolant les champs calculés par la méthode différences finies sur les cellules A et B . Il faut noter dans ce cas, que pour évaluer les champs H à l'instant n , nous faisons une moyenne sur les champs H calculés par le schéma de Yee aux instant $n - 1/2$ et $n + 1/2$. Dans cette hybridation de maillage, il existe une cellule particulière dans la zone volumes finis qui correspond à un hexaèdre dont une ou plusieurs faces sont constituées de deux triangles afin d'assurer une jonction avec le maillage tétraédrique.

Cette stratégie a été utilisée avec succès dans le cadre du projet européen GEMCAR pour évaluer les champs induits sur des câbles passant à proximité de la structure [27]. La figure 4.2 montre la géométrie à étudier, ainsi que le maillage réalisé pour effectuer cette étude. On voit notamment sur celui-ci que les cellules non structurées sont limitées dans une zone proche des parois de la voiture, tout le reste étant défini par un maillage cartésien, y compris l'antenne excitatrice. Dans cette étude, la difficulté était de modéliser correctement le parcours des câbles le long de la structure, comme le montre la figure 4.3, sans avoir un nombre de cellules prohibitif.

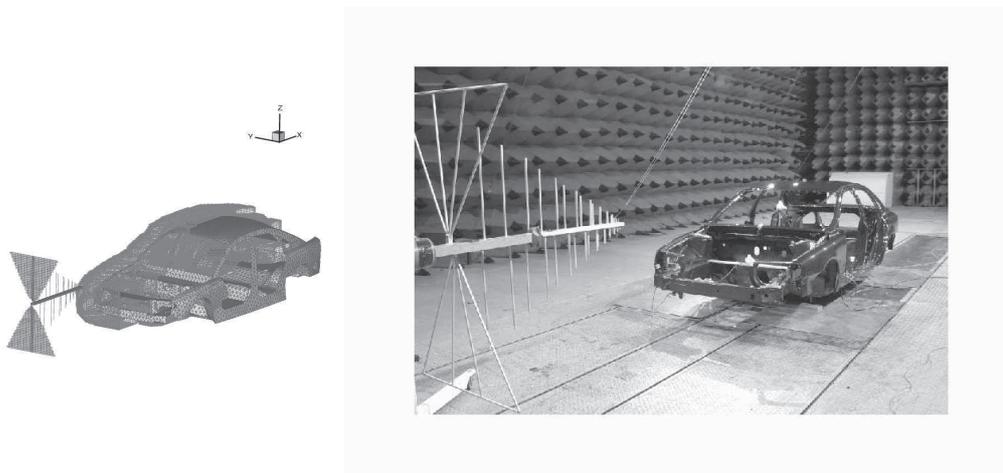


figure 4.2: Géométrie étudiée et maillage hybride.

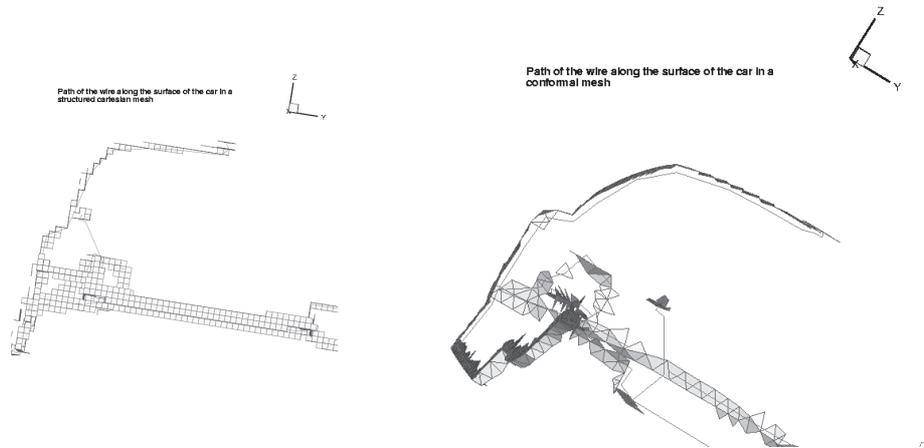


figure 4.3: Positionnement du fil suivant le maillage.

Grâce à cette stratégie nous avons pu simuler correctement le cas étudié, et retrouver les mesures expérimentales à voir figure 4.4.

Toutefois la méthode employée ici n'a pas fait l'objet d'étude théorique sur sa stabilité, et présente des difficultés sur la génération du maillage, notamment dans la zone de recouvrement. Il est en effet indispensable que le maillage différences finies et le maillage volume finis coïncident dans cette zone. Même si cette méthode a donné de bons résultats dans le cadre du projet GEMCAR, ces deux points limitent considérablement son exploitation dans un contexte industriel. Comme dans de nombreuses stratégies proposées dans la littérature, le point délicat réside dans le calcul des valeurs d'échange par interpolation qui n'assurent a priori aucune conservation d'énergie, et donc de stabilité. Ce dernier point reste une question encore relativement ouverte.

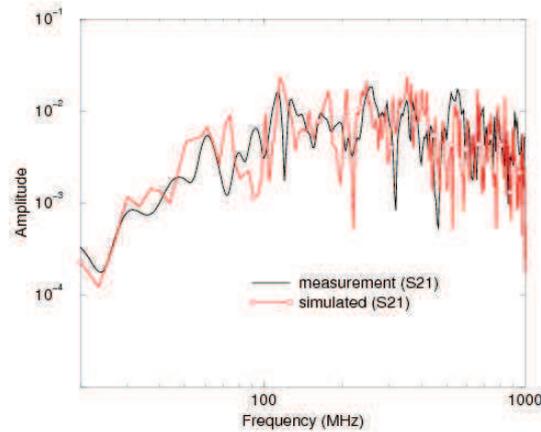


figure 4.4: Comparaison mesures calcul sur un paramètre S_{21} entre la source et une terminaison de câble.

4.2.2 Couplage Galerkin Discontinu sur maillage non structuré/structuré cartésien.

Une autre possibilité d'hybrider des maillages structurés et non structurés a été étudiée dans le cadre d'approches Galerkin discontinu. On peut citer par exemple les travaux de Clément Durochat menés à l'INRIA [41], pour la modélisation de l'impact des ondes émises par un téléphone portable sur le cerveau humain. Comme dans le contexte volumes finis, l'utilisation d'un maillage non structuré permet de prendre en compte des cellules très déstructurées ainsi que des cellules cartésiennes. On n'a plus alors qu'un seul maillage qui ramène la difficulté de l'hybridation à la gestion d'un maillage non conforme. Quelque soit la cellule du maillage, le schéma Galerkin discontinu reste le même, si ce n'est le calcul des termes de sauts qui doit être adapté à un maillage non conforme. Dans ce paragraphe nous présentons le principe de l'hybridation de maillages cartésien/non-structuré dans le cadre de la méthode Galerkin Discontinue présentée dans le chapitre 1. La particularité de cette méthode est le fait d'utiliser des hexaèdres qui amène une difficulté supplémentaire concernant le couplage des zones non-structurées et cartésiennes. En effet, dans ce cas nous devons connecter 6 cellules hexaédriques déformées à une cellule cartésienne comme indiqué sur la figure 4.5. Dans cette stratégie, le maillage non structuré est obtenu par un découpage de chaque cellule d'un maillage tétraédrique en quatre hexaèdres.

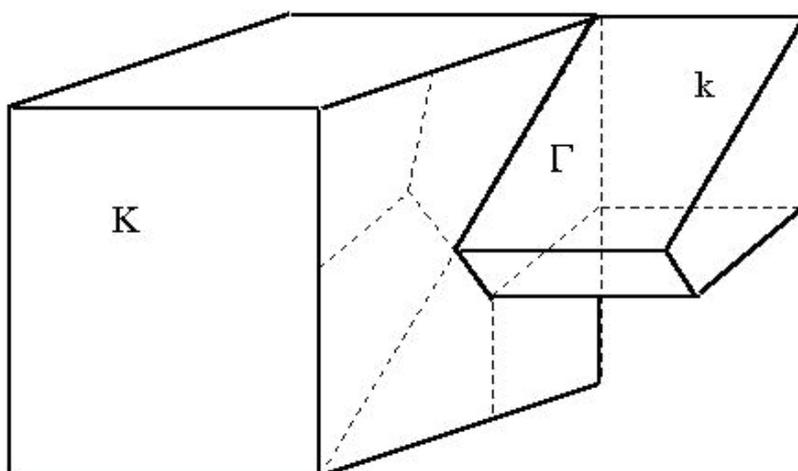


figure 4.5: Interface non conforme.

En termes de modifications à apporter à notre schéma GD, nous notons que seuls les termes de flux entre les cellules se trouvant de part et d'autre des faces d'hybridation sont à modifier. Pour cela, dans une hybridation, nous considérons que la face du cube cartésien structuré est découpée en un ensemble de 6 faces sur lesquelles les termes de flux sont évalués. On n'évalue pas le flux directement sur la face globale du maillage structuré cartésien. La cellule cartésienne adjacente à cette face est considérée comme possédant 11 faces et non 6. L'impact de l'hybridation ne touche donc que le calcul des sauts. Soit une face $\Gamma = K \cap k$ qui se trouve à l'interface des maillages cartésien à cellule K et non-structuré à cellule k , on définit :

- une formule de quadrature qui permette une intégration précise des termes liés aux volumes K et k , projetés sur celle-ci. Pour cela on choisit une formule de quadrature de Gauss à r points de quadratures tels que $r = \max(r_K, r_k)$, où r_K et r_k représentent respectivement l'ordre d'approximation spatiale sur les cellules K et k
- une transformation bilinéaire F_Γ locale entre la face Γ et l'élément $[0, 1]^2$.

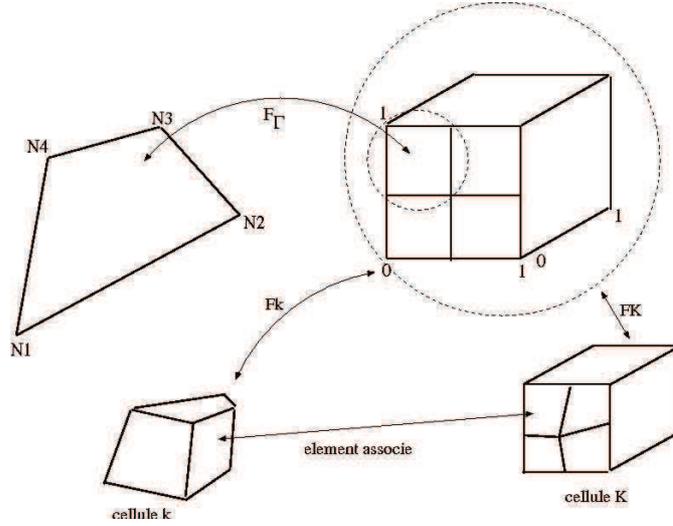


figure 4.6: Visualisation des différentes transformations utilisées.

En considérant les différentes transformations de la figure 4.6 et en utilisant un formalisme de flux centrés sur la face Γ , on doit évaluer deux termes de saut donnés par :

$$\int_{\Gamma} (E_k \times n_K) \cdot \varphi_{i_0, K}^{l_0} dx - \int_{\Gamma} (E_K \times n_K) \cdot \varphi_{i_0, K}^{l_0} dx$$

et

$$\int_{\Gamma} (E_K \times n_k) \cdot \varphi_{i_0, k}^{l_0} dx - \int_{\Gamma} (E_k \times n_k) \cdot \varphi_{i_0, k}^{l_0} dx$$

Dans l'expression des sauts, on note qu'il faut évaluer quatre termes définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (E_k \times n_K) \cdot \varphi_{i_0, K}^{l_0} dx \\ \int_{\Gamma} (E_K \times n_K) \cdot \varphi_{i_0, K}^{l_0} dx \\ \int_{\Gamma} (E_K \times n_k) \cdot \varphi_{i_0, k}^{l_0} dx \\ \int_{\Gamma} (E_k \times n_k) \cdot \varphi_{i_0, k}^{l_0} dx \end{array} \right. \quad \hat{4}.1 \hat{u}$$

Pour calculer ceux-ci :

- on détermine pour les points de quadrature $x_{m,n}$ donnés sur la face Γ , les points correspondants $x_{m,n,K}$ et $x_{m,n,k}$ respectivement, dans les volumes K et k
- on cherche ensuite pour chaque volume les coordonnées \hat{x} de ces points x dans l'élément unité $\hat{K} = [0, 1]^3$.

Si on reprend le premier terme à évaluer dans le système 4.1 on obtient après calcul :

$$\int_{\Gamma} (E_K \times \mathbf{n}_K) \cdot \varphi_{i_0, K}^{l_0} dx = \sum_{m=1, n=1}^{(r+1)^2} \omega_{m,n} (E_K \times \mathbf{n}_K) \circ F_{\Gamma}(\hat{x}_{m,n}) \cdot \varphi_{i_0, K}^{l_0} \circ F_{\Gamma}(\hat{x}_{m,n}) \| \text{Jac}(F_{\Gamma}(\hat{x}_{m,n})) \|$$

avec

$$E_K \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{(r+1)^3} E_{i,K}^l DF_K^{*-1}(\hat{x}_{m,n,K}) \hat{\varphi}_i^l(\hat{x}_{m,n,K})$$

$$\varphi_{i_0,K}^{l_0} \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) = DF_K^{*-1}(\hat{x}_{m,n,K}) \hat{\varphi}_{i_0}^{l_0}(\hat{x}_{m,n,K})$$

et

$$n_K \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) = \frac{DF_K^{*-1}(\hat{x}_{m,n,K}) n_K}{\|DF_K^{*-1}(\hat{x}_{m,n,K}) n_K\|}$$

où DF_K et n_K sont respectivement la matrice jacobienne de F_K et la normale à la face Γ , extérieure à la cellule K .

Les autres termes s'expriment de manière analogue par :

$$\int_\Gamma (E_k \times \mathbf{n}_K) \cdot \varphi_{i_0,K}^{l_0} dx = \sum_{m=1,n=1}^{(r+1)^2} \omega_{m,n} (E_k \times n_K) \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) \cdot \varphi_{i_0,K}^{l_0} \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) \|Jac(F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}))\|$$

$$\int_\Gamma (E_k \times \mathbf{n}_k) \cdot \varphi_{i_0,k}^{l_0} dx = \sum_{m=1,n=1}^{(r+1)^2} \omega_{m,n} (E_k \times n_k) \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) \cdot \varphi_{i_0,k}^{l_0} \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) \|Jac(F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}))\|$$

$$\int_\Gamma (E_K \times \mathbf{n}_k) \cdot \varphi_{i_0,k}^{l_0} dx = \sum_{m=1,n=1}^{(r+1)^2} \omega_{m,n} (E_K \times n_k) \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) \cdot \varphi_{i_0,k}^{l_0} \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) \|Jac(F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}))\|$$

â4.2û

avec :

$$E_k \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{(r+1)^3} E_{i,k}^l DF_k^{*-1}(\hat{x}_{m,n,k}) \hat{\varphi}_i^l(\hat{x}_{m,n,k})$$

$$\varphi_{i_0,k}^{l_0} \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) = DF_k^{*-1}(\hat{x}_{m,n,k}) \hat{\varphi}_{i_0}^{l_0}(\hat{x}_{m,n,k})$$

et

$$n_k \circ F_\Gamma(\hat{x}_{m,n}) = \frac{DF_k^{*-1}(\hat{x}_{m,n,k}) n_k}{\|DF_k^{*-1}(\hat{x}_{m,n,k}) n_k\|}$$

où DF_k et n_k sont respectivement la matrice jacobienne de F_k et la normale à la face Γ , extérieure à la cellule k .

Au niveau de l'implémentation, ce calcul nécessite un pré-calcul sur les faces. A savoir :

- chercher si la face est composée ou pas ffi
- dans le cas d'une face composée :
 - connaître le nombre de faces simples qui composent celle-ci ainsi que la liste des faces qui la constitue
- dans le cas d'une face simple liée à une face composée :
 - connaître l'ordre de quadrature de la face, les points de quadrature correspondant dans K et k et les normales externes aux éléments ffi
 - précalculer les valeurs des fonctions de bases et des matrices jacobiennes associées à la face pour les cellules voisines k et K .

Cette approche a été utilisée et validée pour le calcul de champ diffracté par un avion. Pour cela il a fallu générer le maillage hybride de la structure à étudier. Pour obtenir celui-ci, on procède en trois étapes. Dans une première étape, on plonge l'objet donné sous forme d'un maillage surfacique triangulaire, dans une grille différences finies et on relève un maillage surfacique défini en marches d'escalier qui soit le plus près de la peau de l'objet externe comme interne éventuellement. La zone comprise entre cette surface et la surface de l'objet sera maillée, dans une deuxième étape, en tétraèdres et le reste du volume sera constitué des cellules cubiques provenant de la grille cartésienne. Dans une troisième étape, après maillage sous forme de tétraèdres de la zone autour de l'objet, nous découpons automatiquement chaque cellule tétraédrique en 4 hexaèdres. Le raccord entre les deux types de maillages se fera par le biais de plusieurs faces de cubes raccordée à 6 faces d'hexaèdres. Pour connaître la correspondance entre chacune de ces faces, on attribue le même type de matériaux aux 7 faces. La figure 4.7 montre les différentes étapes de l'obtention du maillage hybride ST/NST.

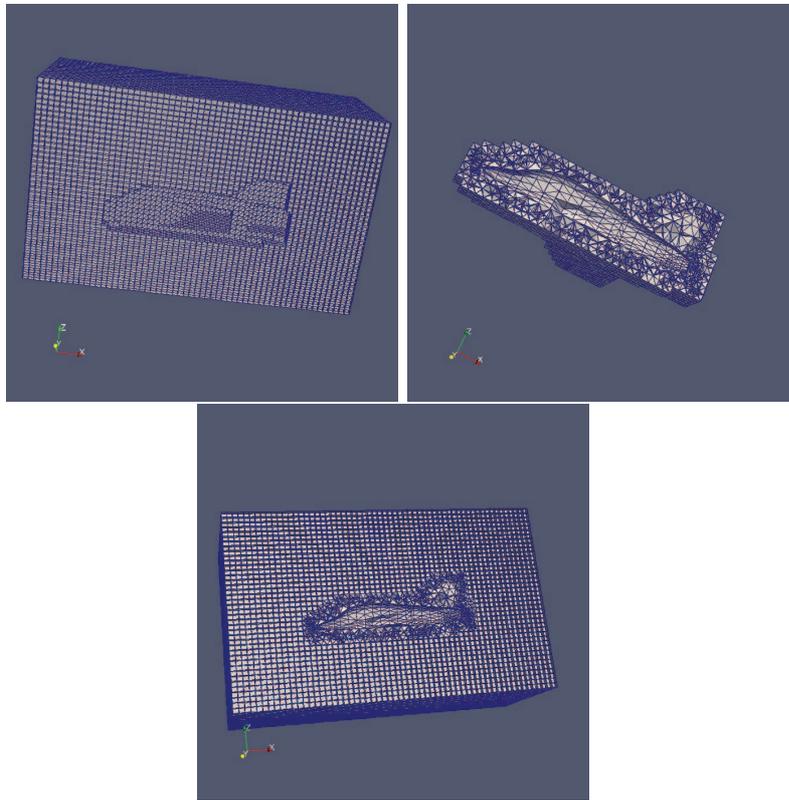


figure 4.7: Etapes successives pour obtenir le maillage hybride ST/NST.

La figure 4.8 montre une comparaison entre un calcul sur maillage non structuré et sur le maillage hybride pour deux différents ordres d'approximation spatiale. On note sur cette figure que l'on obtient des résultats analogues pour un coût calcul et mémoire

moindre. Les résultats ont été obtenus pour une source de type onde plane définie par :

$$\begin{cases} E_x(t, x, y, z) = 0 \\ E_y(t, x, y, z) = 377e^{-\gamma^2} \\ E_z(t, x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \hat{4}.3\hat{u}$$

avec $\gamma = (t - \frac{x - 0.6}{3e8})$ et $f(t) = \frac{t - 7e - 9}{3e - 9}$. Le point P observé dans nos calculs est situé aux coordonnées en mètres ($x = -1.6, y = 0, z = 1.5$).

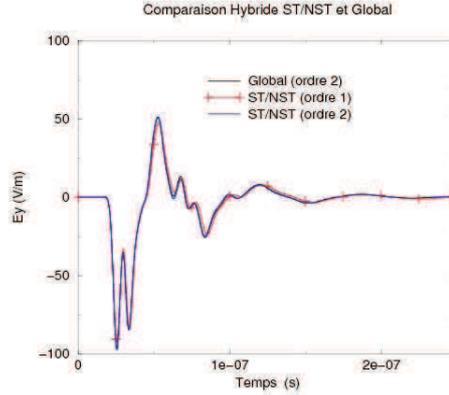


figure 4.8: Résultats de calcul de champs au point P .

Par ailleurs, le fait d'utiliser le maillage cartésien comme un maillage non-structuré particulier, limite les avantages liés à l'utilisation de la zone cartésienne. En effet, on peut montrer qu'un schéma GD écrit pour un maillage cartésien est beaucoup plus efficace qu'une approche GD sur maillage cartésien défini sous la forme non-structuré. A titre d'exemple prenons le cas de la propagation, dans une cavité cubique de 1 mètre de côté, du mode $m = n = 3$ défini par :

$$\begin{cases} E_x = 0; E_y = 0; H_z = 0 \\ E_z = \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) \cos(\omega t) \\ H_x = \frac{1}{\omega\mu_0} \pi n \sin(m\pi x) \cos(n\pi y) \sin(\omega t) \\ H_y = \frac{1}{\omega\mu_0} \pi m \cos(m\pi x) \sin(n\pi y) \sin(\omega t) \end{cases} \quad \hat{4}.4\hat{u}$$

Sur cet exemple, nous avons comparé des simulations effectuées sur différents types de maillage :

- un maillage purement cartésien sous la forme i, j, k , avec un GD adapté à ce type de maillage
- un maillage cartésien traité comme un maillage non structuré avec un GD non structuré
- un maillage purement non structuré obtenu par découpage de tétraèdres avec un GD non structuré.

La figure 4.9 représente une comparaison des résultats obtenus pour les divers maillages par rapport à la solution analytique en un point test $P = (0.5m, 0.5m, 0.5m)$ qui est le centre de gravité de la cavité. On note sur cette figure une bonne adéquation des résultats. Le tableau 4.1 présente les temps calcul et la capacité mémoire nécessaires à chaque cas. On note sur ce tableau des gains mémoire et temps calcul importants en utilisant une approche cartésienne avec un schéma GD adapté à ce type de maillage.

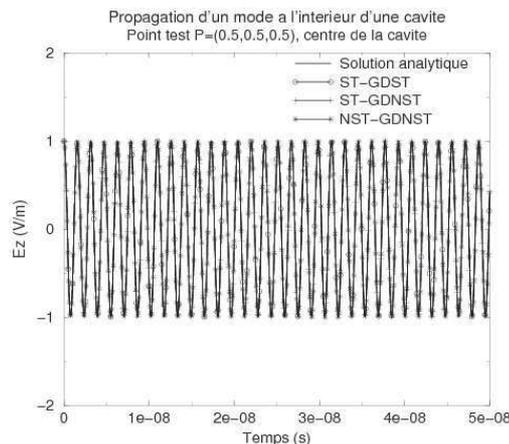


figure 4.9: Comparaison entre solution analytique et solutions obtenues sur les différents maillages. Dans la légende, ST-GDST : maillage structuré pour GD structuré, ST-GDNST : maillage structuré pour GD non structuré, NST-GDNST : maillage non structuré pour GD non structuré.

configuration	Nb éléments du maillage	mémoire	temps CPU
MCGDST	8000	38Mo	6mn
MCGDNST	8000	111Mo	12mn
MNSTGDNST	27328	377Mo	189mn

table 4.1: Comparaison coût calculs et mémoire. En termes de configurations, MCGDST : maillage cartésien avec approche GD cartésienne, MCGDNST : maillage cartésien avec approche GD non structuré et MNSTGDNST : maillage non structuré avec approche GD non structuré

Cet exemple démontre bien la nécessité d'utiliser un schéma spécifique sur les zones cartésiennes, ce qui entraîne non plus uniquement une hybridation de maillage, mais aussi une hybridation de méthode. A ce titre pour la partie cartésienne, notre méthode différence finies nous semble particulièrement bien adaptée. En effet, celle-ci se montre beaucoup plus performante que l'approche GD dans cette configuration. Pour vérifier cela, considérons l'exemple précédent, et comparons nos deux approches. La figure 4.10 montre que l'on obtient des résultats analogues entre le GD structuré et notre méthode

en utilisant une approximation Q_3 , avec des coûts calculs 3 fois moins importants pour notre approche différences finies d'ordre élevé.

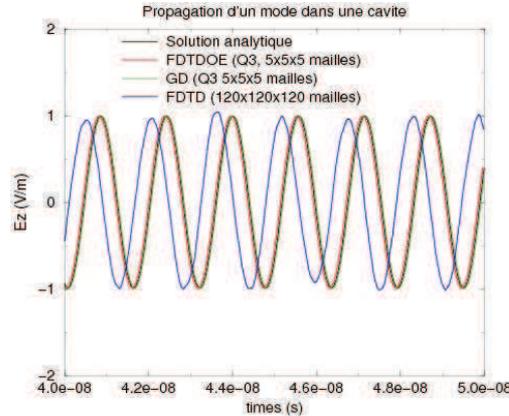


figure 4.10: Comparaison GD structuré et FDTD d'ordre élevé.

En conclusion de ce dernier exemple nous voyons tout l'intérêt de pouvoir réaliser une hybridation entre la méthode GD et notre approche différences finies d'ordre élevé.

4.2.3 Intérêt de l'utilisation d'une méthode différences finies d'ordre élevé dans une hybridation de maillages cartésien/non-structuré

Les points délicats des deux méthodes présentées sont l'obtention d'un schéma hybride stable, précis et suffisamment rapide dans les zones structurées pour optimiser les performances. Pour satisfaire ces différents points, il nous semble évident de prendre un formalisme de type différences finies, plus rapide qu'un formalisme GD dans les zones cartésiennes qui garde les mêmes propriétés de montée en ordre pour la précision. C'est pourquoi il apparaît très intéressant d'utiliser notre formalisme DIFOE dans ce type d'hybridation. De plus, nous montrons que grâce au choix d'espace d'approximation dans DIFOE, nous pouvons avoir une conservation d'une énergie sur l'approche hybride GD/DIFOE par l'ajout de termes de sauts $\epsilon\epsilon_{\text{eff}}$ afin d'avoir un schéma hybride qui ne soit pas instable.

4.3 Stratégie multi-domaines/multi-méthodes.

Afin de pouvoir travailler sur l'hybridation de solveurs, nous nous sommes dotés d'une architecture logicielle, permettant de combiner plusieurs méthodes entre elles sur différents domaines. Dans cette stratégie, nous nous sommes intéressés à différents types d'hybridations :

- L'hybridation sur domaines disjoints, où les domaines de calcul localisés autour de chaque objet, ont une intersection nulle. L'interaction entre chacun d'eux s'effectue

par le biais de champs rayonnés à partir d'une surface de Huygens locale à chaque domaine et à l'aide d'une formule intégrale approchée. La figure 4.11 présente le principe général de la méthode qui fut développée dans le cadre de la Thèse de V. Mouysset [39]

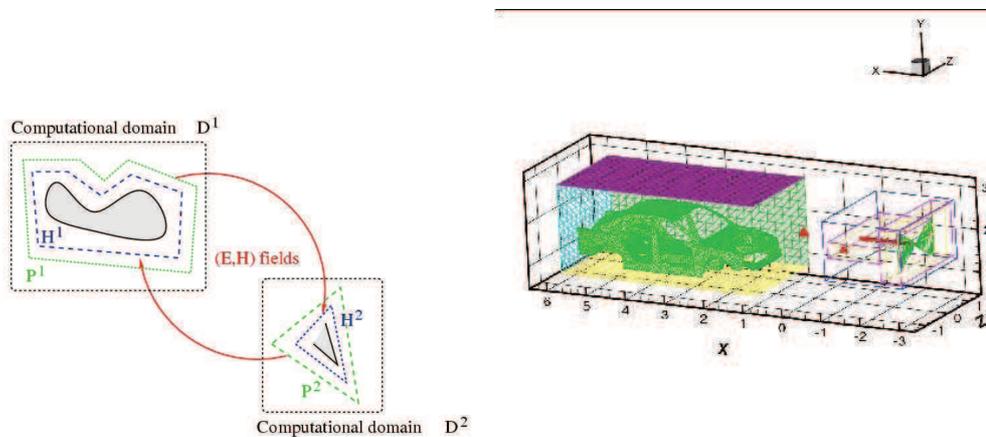


figure 4.11: Principe de l'hybridation sur domaines disjoints.

- L'hybridation 1D/3D qui permet de coupler une équation de ligne de transmission avec 1 ou plusieurs domaines 3D. Ce type de stratégie fut développée dans le contexte des travaux de Thèse de N. Muot [40] pour prendre en compte des faisceaux de câbles complexes dans nos problèmes, ou bien, des grandes scènes de calcul par rapport à la longueur d'onde étudiée où plusieurs bâtiments sont connectés par le biais de câbles. On définit ainsi des zones de calcul 1D/3D pour traiter le problème, dont le principe d'hybridation général est représenté sur la figure 4.12

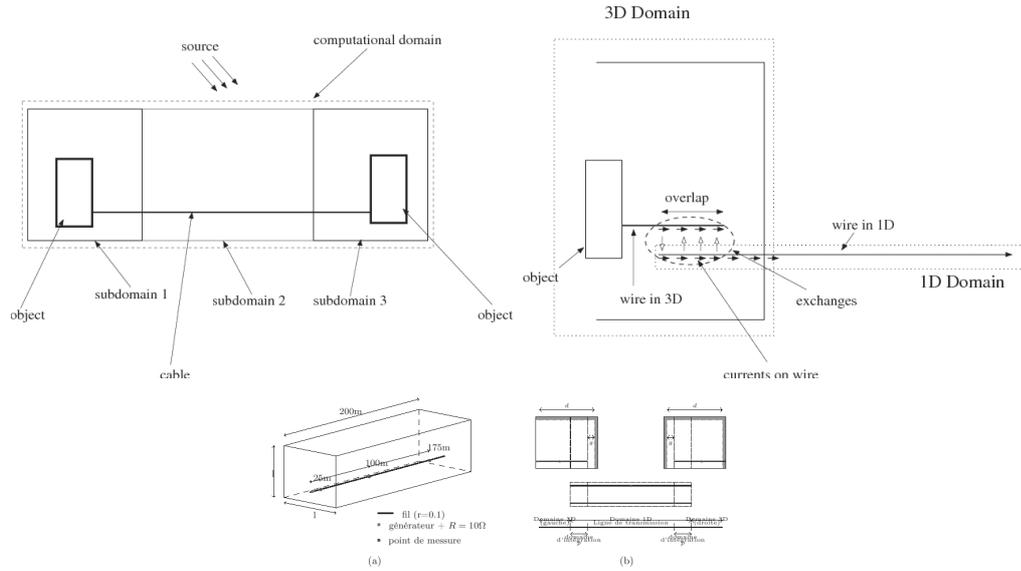


figure 4.12: Principe de l'hybridation 1D/3D.

- Enfin le dernier type d'hybridation concerne les domaines jointifs comme dans le cas d'hybridation FDTD/FVTD présentée précédemment. C'est ce type d'hybridation qui nous intéresse dans ce travail de thèse en intégrant une hybridation GD/FDTD d'ordre élevée.

Le principe de notre stratégie logicielle consiste à définir plusieurs domaines de calculs qui sont caractérisés chacun, par des données géométriques et physiques, une méthode et un nombre de processeurs pour traiter le domaine. On donne ensuite les différentes hybridations de méthodes en précisant différents couples de domaines. On définit ainsi deux niveaux de parallélisation, dont le premier permet de traiter les échanges entre les méthodes définies sur chaque domaine, et le second est dédié à la résolution parallèle de chaque méthode. Ce type de stratégie nous permet de limiter l'impact des modifications à apporter dans chaque méthode lors d'une hybridation et faciliter sa mise en oeuvre.

4.4 Principe d'une hybridation DIFOE/GD conservant l'énergie.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au couplage de notre méthode différences finies d'ordre élevé avec l'approche Galerkin Discontinue définie précédemment dans le chapitre 1. Pour cela, nous envisageons de combiner une zone de maillage cartésien avec une zone de maillage non structuré dont l'interface entre chacune est à coïncidence faciale. Plus particulièrement, il s'agit de pouvoir traiter une configuration dans laquelle une partie de la géométrie est courbe. Un exemple qui nous intéresse est par exemple, un guide d'onde dont la géométrie est représentée sur la figure 4.13.

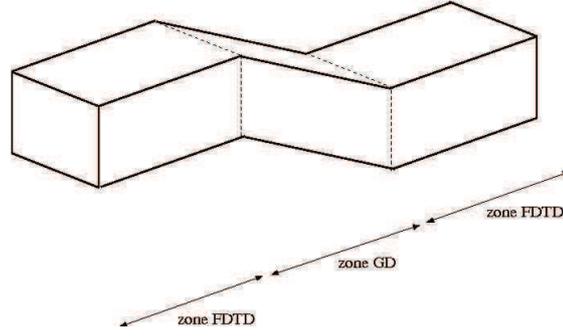


figure 4.13: Géométrie du guide.

Dans ce type de géométrie, on cherche à découper celle-ci en plusieurs zones que l'on approche soit par un maillage cartésien, soit par un maillage non structuré et dans lesquelles on applique, respectivement l'approche FDTD d'ordre élevé $\hat{\text{DIFOE}}$ et la méthode GD, comme indiqué par exemple sur la figure $\hat{4.13}$

Tout d'abord, nous allons présenter le principe de la méthode de couplage, puis, nous validerons celui-ci sur différentes configurations en comparant les résultats obtenus par la méthode hybride GD/DIFOE avec ceux obtenus par chacune de ces méthodes seules, mais aussi avec des solutions analytiques.

4.4.1 Principe

Soit un domaine Ω partitionné en deux zones Ω_1 et Ω_2 . Définissons sur la zone Ω_1 un maillage cartésien et sur la zone Ω_2 un maillage non structuré constitué d'héxaèdres déformés. Au niveau de l'interface ∂S_i entre les deux zones, nous supposons que les maillages sont conformes en espace, c'est-à-dire à coïncidence nodale. Nous cherchons alors à résoudre le système de Maxwell de telle manière que dans la zone Ω_1 , nous utilisons notre schéma différences finies d'ordre élevé et dans la zone Ω_2 , nous utilisons le schéma GD. Supposons pour cela qu'au niveau de l'interface ∂S_I , les composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques entre les deux zones soient continues.

Dans la zone Ω_1 , nous cherchons donc $(E, H) \in (H(\text{rot}, \Omega_1) \times DH)$ tels que, $\forall (\varphi_1, \psi_1) \in (H(\text{rot}, \Omega_1) \times DH)$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_1} \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \varphi_1 dx = \int_{\Omega_1} H \cdot \nabla \times \varphi_1 dx + \int_{\partial S_I} H \cdot \varphi_1 \times ndx \\ \int_{\Omega_1} \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \psi_1 dx = - \int_{\Omega_1} \nabla \times E \cdot \psi_1 dx \end{array} \right. \quad \hat{4.5}$$

Notons dans ce cas que nous ne cherchons plus le champs H dans $H^0(\text{div}, \Omega_1)$, mais dans $DH = H(\text{div}, \Omega)$, tel que la trace normale des fonctions définies sur Ω_1 , sur la frontière ∂S_I existe.

De même dans la zone Ω_2 , nous cherchons $(E, H) \in (H^1(\tau_h) \times H^1(\tau_h))$ tels que $\forall K \in \tau_h$ et $\forall(\varphi_2, \psi_2) \in (H^1(\tau_h) \times H^1(\tau_h))$, on a :

$$\begin{cases} \int_K \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \varphi_2 dx = \int_K \nabla \times H \cdot \varphi_2 dx + \beta \int_{\partial K} \llbracket H \times n \rrbracket \cdot \varphi_2 dx \\ \int_K \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \psi_2 dx = - \int_K \nabla \times E \cdot \psi_2 dx + \gamma \int_{\partial K} \llbracket E \times n \rrbracket \cdot \psi_2 dx \end{cases} \quad \hat{a}4.6\hat{u}$$

où τ_h est une partition de Ω_2 constituée de cellules hexaédriques déformées, et

$$H^1(\tau_h) = \{v \in L^2(\Omega_2), \forall K \in \tau_h, v|_K \in H^1(K)\}$$

Le carré de l'énergie électromagnétique sur le domaine Ω , à l'instant t est définie par :

$$\int_{\Omega_1} (\varepsilon E(x, t) \cdot E(x, t) dx + \mu H(x, t) \cdot H(x, t)) dx + \int_{\Omega_2} (\varepsilon E(x, t) \cdot E(x, t) dx + \mu H(x, t) \cdot H(x, t)) dx \quad \hat{a}4.7\hat{u}$$

L'accroissement de cette énergie est donné par :

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial E(t, x)}{\partial t} \cdot E(t, x) dx + \int_{\Omega} \mu \frac{\partial H(t, x)}{\partial t} \cdot H(t, x) dx \quad \hat{a}4.8\hat{u}$$

Si on décompose cette énergie sur les domaines Ω_1 et Ω_2 , nous obtenons que :

$$\int_{\Omega_1} \varepsilon \frac{\partial E(t, x)}{\partial t} \cdot E(t, x) dx = \int_{\Omega_1} H(t, x) \cdot \nabla \times E(t, x) dx + \int_{\partial S_I} H(t, x) \cdot E(t, x) \times n dx$$

et

$$\int_{\Omega_1} \mu \frac{\partial H(t, x)}{\partial t} \cdot H(t, x) dx = - \int_{\Omega_1} H(t, x) \cdot \nabla \times E(t, x) dx$$

En ajoutant ces deux équations on obtient pour l'accroissement d'énergie sur Ω_1 :

$$\int_{\partial S_I} H(t, x) \cdot E(t, x) \times n dx \quad \hat{a}4.9\hat{u}$$

Sur le domaine Ω_2 , nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \frac{\partial E(t, x)}{\partial t} \cdot E(t, x) dx &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \frac{\partial E(t, x)}{\partial t} \cdot E(t, x) dx = \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \left(\int_K \nabla \times H(t, x) \cdot E(t, x) dx + \beta \int_{\partial K} \llbracket H(t, x) \times n \rrbracket \cdot E(t, x) dx \right) \end{aligned} \quad \hat{a}4.10\hat{u}$$

de même :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \frac{\partial H(t, x)}{\partial t} \cdot H(t, x) dx &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \frac{\partial H(t, x)}{\partial t} \cdot H(t, x) dx = \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \left(- \int_K \nabla \times E(t, x) \cdot H(t, x) dx + \gamma \int_{\partial K} \llbracket E(t, x) \times n \rrbracket \cdot H(t, x) dx \right) \end{aligned} \quad \hat{a}4.11\hat{u}$$

En effectuant une intégration par partie sur cette dernière équation, nous obtenons :

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial H(t, x)}{\partial t} \cdot H(t, x) dx = \sum_{K \in \tau_h} \left(- \int_K \nabla \times H(t, x) \cdot E(x, t) dx + \int_{\partial K} E(t, x) \times n \cdot H(t, x) dx + \gamma \int_{\partial K} \llbracket E(t, x) \times n \rrbracket \cdot H(t, x) dx \right) \quad \hat{a}4.12\hat{u}$$

En ajoutant les équations $\hat{a}4.10\hat{u}$ et $\hat{a}4.12\hat{u}$, on obtient l'accroissement d'énergie sur Ω_2 :

$$\sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} E(t, x) \times n \cdot H(t, x) dx + \gamma \int_{\partial K} \llbracket E(t, x) \times n \rrbracket \cdot H(t, x) dx + \beta \int_{\partial K} \llbracket H(t, x) \times n \rrbracket \cdot E(t, x) dx \quad \hat{a}4.13\hat{u}$$

Si on explicite la somme des termes, on montre alors qu'il reste :

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} (1 - \gamma + \beta) E(t, x) \times n \cdot H(t, x) dx + \\ & (\gamma + \beta) \int_{\partial K - \partial S_I} ((E^+(t, x) \times n) \cdot H(t, x) - (E(t, x) \times n) \cdot H^+(t, x)) dx + \quad \hat{a}4.14\hat{u} \\ & \gamma \int_{\partial S_I} (E_{DF}(t, x) \times n) \cdot H_{GD}(t, x) dx - \beta \int_{\partial S_I} (E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{DF}(t, x) dx \end{aligned}$$

Dans cette expression (E^+, H^+) sont les champs pris dans les cellules voisines de K . (E_{GD}, H_{GD}) et (E_{DF}, H_{DF}) définissent respectivement les champs dans la zone différences finies et dans la zone GD pour une face adjacente aux deux domaines.

En effectuant la somme des accroissements de l'énergie sur les deux domaines, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial S_I} (H_{DF}(t, x) \cdot E_{DF}(t, x)) dx + \\ & \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} (1 - \gamma + \beta) E_{GD}(t, x) \times n \cdot H_{GD}(t, x) dx + \\ & (\gamma + \beta) \int_{\partial K - \partial S_I} ((E_{GD}^+(t, x) \times n) \cdot H_{GD}(t, x) - (E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{GD}^+(t, x)) dx + \\ & \gamma \int_{\partial S_I} (E_{DF}(t, x) \times n) \cdot H_{GD}(t, x) dx - \\ & \beta \int_{\partial S_I} (E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{DF}(t, x) dx \quad \hat{a}4.15\hat{u} \end{aligned}$$

On note que cette expression n'est pas nulle ni signée. On ne peut donc pas conclure sur une possible conservation de l'énergie. Pour palier à cela, nous suggérons de rajouter deux termes de sauts $\tilde{\gamma} \llbracket E \times n \rrbracket$ et $\tilde{\beta} \llbracket H \times n \rrbracket$ sur la frontière ∂S_I dans le schéma DIFOE qui vérifient la continuité des composantes tangentielles à l'interface \hat{a} on rajoute un terme

l'accroissement de l'énergie sur le domaine Ω_1 devient alors :

$$- \int_{\partial S_I} (H(t, x) \times n) \cdot E(t, x) dx + \tilde{\gamma} \int_{\partial S_I} \llbracket E(t, x) \times n \rrbracket \cdot H(t, x) dx + \tilde{\beta} \int_{\partial S_I} \llbracket H(t, x) \times n \rrbracket \cdot E(t, x) dx \quad \hat{a}4.16\hat{u}$$

ce qui conduit à la nouvelle expression de l'accroissement d'énergie sur Ω :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S_I} H_{DF}(t, x) \cdot (E_{DF}(t, x) \times n) dx + \\ & \tilde{\gamma} \int_{\partial S_I} ((E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{DF}(t, x) - (E_{DF}(t, x) \times n) \cdot H_{DF}(t, x)) dx + \\ & \tilde{\beta} \int_{\partial S_I} ((H_{GD}(t, x) \times n) \cdot E_{DF}(t, x) + \\ & H_{DF}(t, x) \cdot (E_{DF}(t, x) \times n)) dx + \quad \hat{a}4.17\hat{u} \\ & \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K - \partial S_I} ((-1 + \gamma - \beta)(E_{GD} \times n) \cdot H_{GD}(t, x) - \\ & (\gamma + \beta)((E_{GD}^+(t, x) \times n) \cdot H_{GD}(t, x) - (E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{GD}^+(t, x))) dx - \\ & \gamma \int_{\partial S_I} (E_{DF}(t, x) \times n) \cdot H_{GD}(t, x) dx + \beta \int_{\partial S_I} (E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{DF}(t, x) dx \end{aligned}$$

En recombinaison des termes de cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K - \partial S_I} (-1 + \gamma - \beta)(E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{GD}(t, x) dx - \\ & \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K - \partial S_I} (\gamma + \beta)((E_{GD}^+(t, x) \times n) \cdot H_{GD}(t, x) - (E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{GD}^+(t, x)) dx - \\ & \int_{\partial S_I} (-1 + \tilde{\gamma} - \tilde{\beta}) H_{DF}(t, x) \cdot (E_{DF}(t, x) \times n) dx + \\ & \int_{\partial S_I} (\tilde{\gamma} + \beta)(E_{GD}(t, x) \times n) \cdot H_{DF}(t, x) dx - \\ & \int_{\partial S_I} (\tilde{\beta} + \gamma)(E_{DF}(t, x) \times n) \cdot H_{GD}(t, x) dx \quad \hat{a}4.18\hat{u} \end{aligned}$$

On note alors que si l'on choisit :

$$\begin{aligned} 1 - \gamma + \beta &= 0 \\ 1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\beta} &= 0 \\ \gamma + \beta &= 0 \\ \tilde{\gamma} + \tilde{\beta} &= 0 \\ \tilde{\gamma} + \beta &= 0 \\ \tilde{\beta} + \gamma &= 0 \end{aligned} \quad \hat{a}4.19\hat{u}$$

on a conservation de l'énergie. Plusieurs solutions sont possibles :

- $\gamma = \tilde{\gamma} = 1/2$ et $\beta = \tilde{\beta} = -1/2$
- $\gamma = \tilde{\beta} = 0$ et $\tilde{\gamma} = 1$ et $\beta = -1$ sur ∂S_I et ailleurs $\gamma = -\beta = 1/2$

– $\beta = \tilde{\gamma} = 0$ et $\tilde{\beta} = -1$ et $\gamma = 1$ sur ∂S_I et ailleurs $\gamma = -\beta = 1/2$

Dans le premier cas, cela revient à modifier le schéma différences finies sans modifier le schéma Galerkin discontinu. On obtient pour le schéma différences finies :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_1} \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega_1} H \cdot \nabla \times \varphi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial S_I} (H_{GD} + H) \cdot (\varphi \times n) \, dx \\ \int_{\Omega_1} \mu \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \psi \, dx = - \int_{\Omega_1} \nabla \times H \cdot \psi \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial S_I} ((E_{GD} - E) \times n) \cdot \psi \, dx \end{cases} \quad \hat{a}4.20\hat{u}$$

4.4.2 Validation numérique

Pour valider cette stratégie d'hybridation, nous nous sommes intéressés au cas de la propagation d'un mode de cavité où nous avons déjà des résultats et une solution analytique. Pour cela, nous avons considéré un cube parfaitement métallique de $1m$ de côté et défini par $\Omega = [0, 1m] \times [0, 1m] \times [0, 1m]$, dans lequel nous étudions la propagation du mode $m = 3$, $n = 3$, $p = 0$. Le domaine Ω est divisé en 2 zones $\Omega_1 = [0, 0.5m] \times [0, 1m] \times [0, 1m]$ et $\Omega_2 = [0.5m, 1m] \times [0, 1m] \times [0, 1m]$, où, respectivement, le calcul des champs s'effectue avec l'approche GD et l'approche DIFOE. Deux points de calcul $P1(0.1, 0.25, 0.25)$ et $P2(0.7, 0.51, 0.51)$ sont relevés dans la zone Ω_1 et Ω_2 et comparés à la solution analytique. Les figures $\hat{a}4.14\hat{u}$ et $\hat{a}4.15\hat{u}$ montrent les résultats obtenus avec notre approche hybride et les approches DIFOE et GD seules.

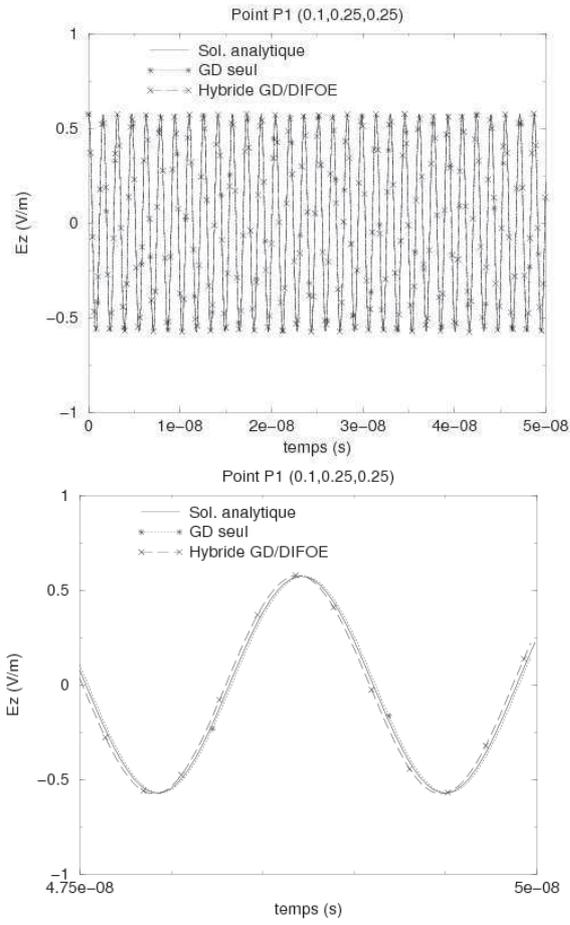


figure 4.14: Résultats obtenus au point $P1$.

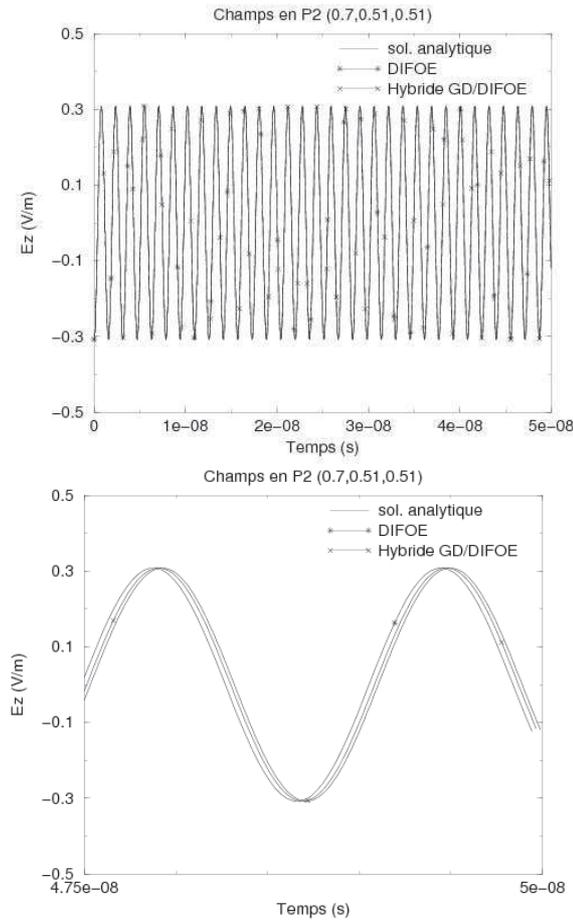


figure 4.15: Résultats obtenus au point $P2$.

On peut noter sur ces figures la bonne correspondance des solutions obtenues avec notre approche hybride et la solution analytique, qui valide notre approche. On note toutefois une légère dispersion numérique sur notre solution hybride due probablement aux termes de couplage effectué par un saut centré. L'ajout d'un terme décentré devrait améliorer cette erreur.

4.5 Adaptation de la méthode d'hybridation à un couplage DIFOE/DIFOE.

La méthode d'hybridation mise en oeuvre dans le cadre DIFOE/GD, peut être aussi reprise pour une hybridation DIFOE/DIFOE. En effet, ceci peut être intéressant si l'on veut utiliser un maillage par zones cartésiennes tel que décrit sur la figure 4.16.

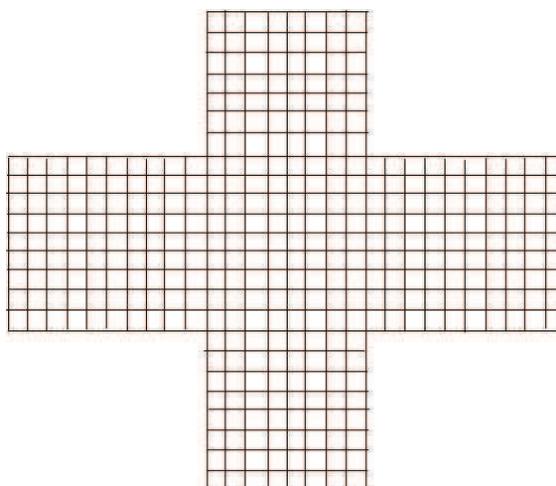


figure 4.16: Maillage cartésien comportant 5 zones.

Dans ce cas, on ne peut pas appliquer directement notre méthode différence finies sur un seul domaine de calcul. Un deuxième problème pouvant être traité par ce type d'hybridation concerne aussi le cas d'un domaine ayant plusieurs zones de caractéristiques diélectriques différentes. En effet dans ce cas on a une modification en ordre du schéma qui est non conforme, et que l'on ne peut pas traiter efficacement avec un ordre variable par direction. Concernant l'hybridation, en réécrivant les calculs DIFOE/GD, avec deux approches DIDFOE, on trouve une condition de conservation d'énergie qui s'écrit comme dans le cas DIFOE/GD. Il faut donc rajouter des termes de saut sur les faces situées à l'interface des deux domaines, dans les deux schémas DIFOE. Ces termes sont identiques à ceux énoncés dans le cadre DIFOE/GD. Pour illustrer l'intérêt de cette hybridation, nous nous sommes intéressés à un problème de cavité avec changement de permittivité.

4.5.1 Cavité avec changement brusque de permittivité

Considérons une cavité métallique de dimension $x = 30cm$, $y = 20cm$ et $z = 20cm$, dans laquelle se trouve un matériau dont la valeur de la permittivité relative est comparable à celle de l'eau $\hat{\epsilon}_r = 80$. Le matériau se situe dans la zone définie par : $20cm < x < 30cm$, $0 < y < 20cm$ et $0 < z < 20cm$. Nous imposons sur une surface de Huygens, une impulsion électromagnétique de type onde plane, et évaluons le champ en deux points situés dans la zone d'air et dans la zone d'eau. Comme indiqué sur la figure 4.17 nous fermons le domaine de calcul en $x = 0$ par un ensemble de couches PML.

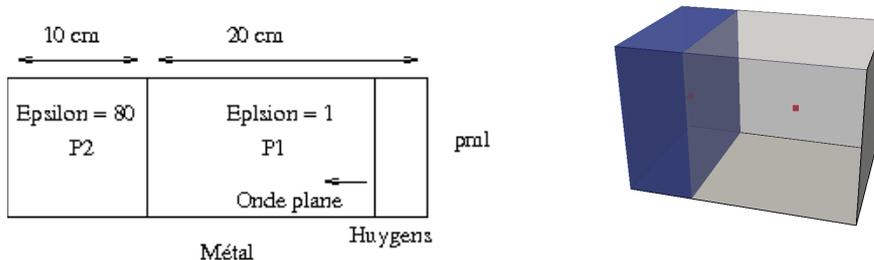


figure 4.17: Géométrie de la cavité.

Dans un premier temps nous montrons qu'à cause de la présence du matériau, il est nécessaire d'avoir une discrétisation spatiale relativement petite, soit en diminuant le pas d'espace, soit en augmentant l'ordre d'approximation spatiale, pour obtenir une solution correcte.

Pour cela, nous avons réalisé les calculs sur le domaine global en utilisant plusieurs ordres, et nous montrons qu'il s'avère nécessaire d'utiliser un ordre d'approximation spatiale supérieur ou égal à 5.

Toutefois en incidence suivant l'axe x , nous avons remarqué que pour une précision identique à l'ordre 5, nous pouvons utiliser un ordre 5 dans le sens de propagation et un ordre 3 dans les deux autres directions c'est ce que nous appelons dans la suite l'ordre $O3 - 5$.

La figure 4.18 présente une comparaison des solutions obtenues aux deux points, en utilisant plusieurs ordres spatiaux par direction, pour un calcul mono-méthode et mono-domaine. On note en particulier sur cette figure que le point situé dans l'air est correctement évalué, même pour une précision de type $O2$, alors que pour le point situé dans le matériau ce n'est pas le cas. Ceci est dû au fait que le maillage utilisé en $O2$ dans l'air est suffisamment précis par rapport aux longueurs d'onde étudiées, alors que dans le milieu ce n'est pas le cas. Dans ce cas pour améliorer les performances de calculs il aurait été possible d'utiliser un ordre variable en x avec toutefois la contrainte d'avoir un ordre constant 3 ou 5 en y et en z . Ceci n'aurait pas modifié considérablement la précision des calculs.

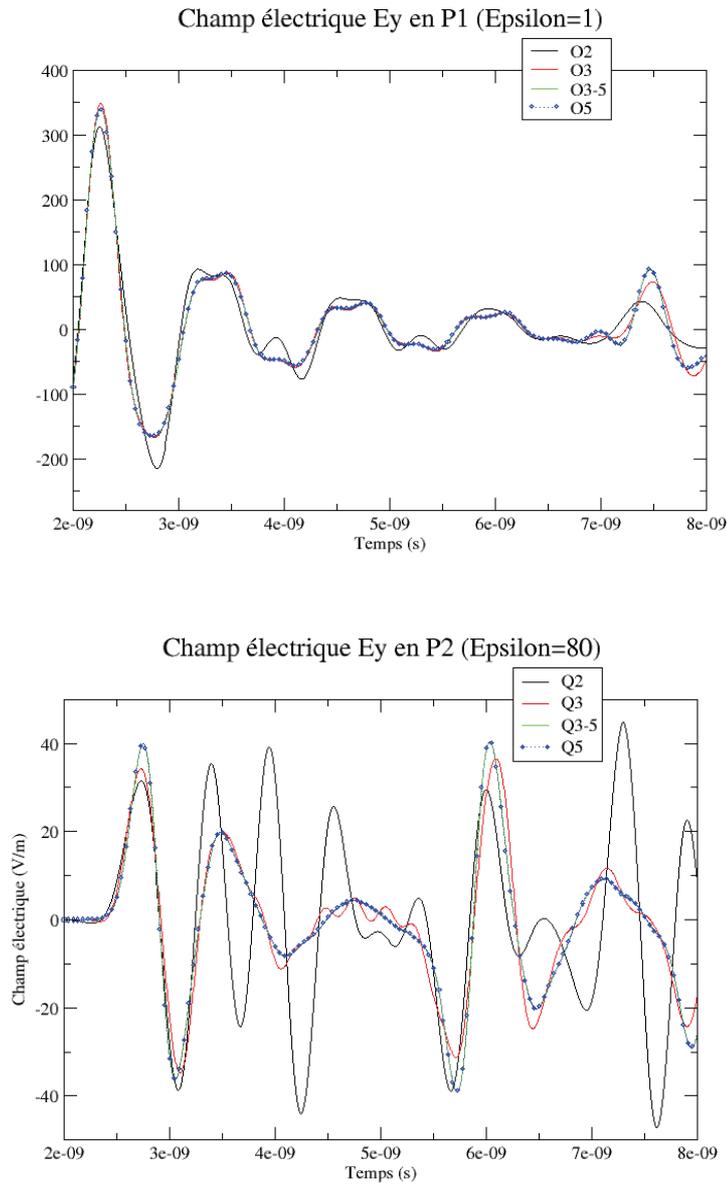


figure 4.18: Comparaison des solutions à différents ordres.

Dans un second temps, pour pouvoir utiliser notre approche hybride DIFOE/DIFOE, nous avons découpé le problème en deux domaines de calculs : un pour la partie vide et un pour la partie contenant le matériau diélectrique.

Nous avons utilisé les mêmes configurations d'approximation spatiales que précédemment pour le domaine avec le matériau, soit des ordres $O3 - 5$ ou $O5$, mais le domaine

vide a été calculé à l'ordre 1. Les comparaisons en termes de précision et de coûts calculs sont donnés par la figure 4.14 et le tableau 4.2. Notons que dans les configurations mono-domaines, les calculs se font sur un seul processeur, alors que dans les cas hybrides, nous utilisons deux processeurs. Afin de pouvoir comparer correctement les deux méthodes, nous avons divisé par deux les temps calculs mono-domaines.

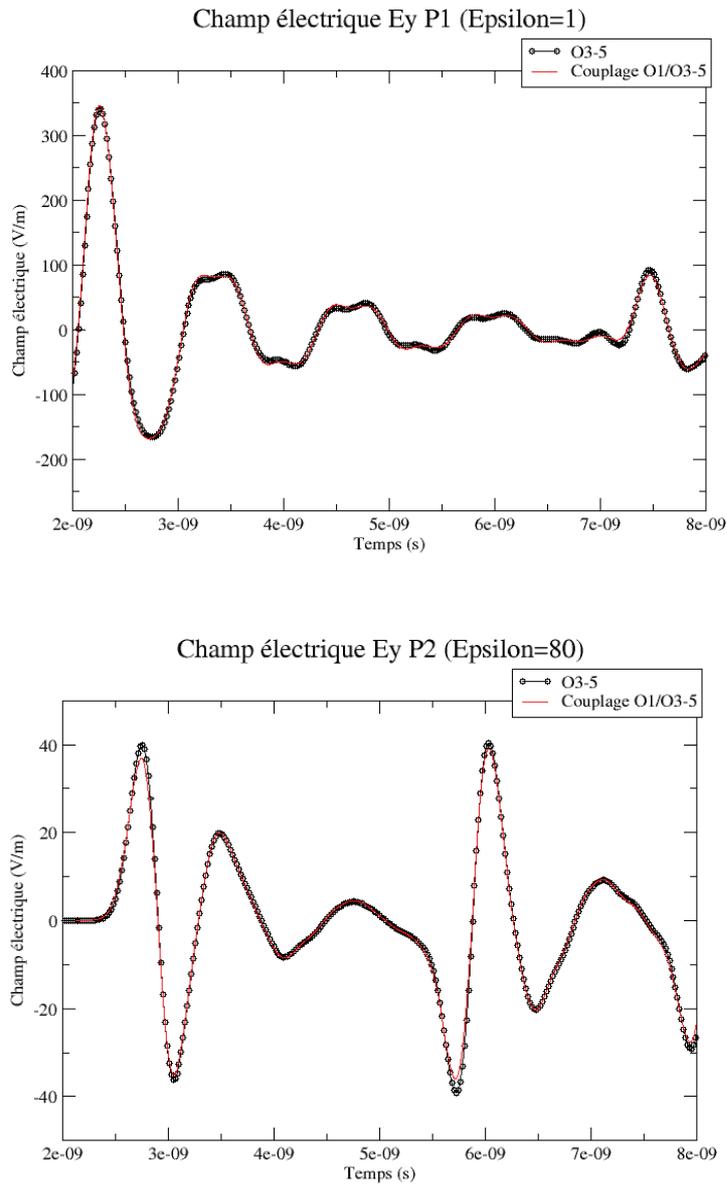


figure 4.19: Comparaison des solutions avec et sans couplage.

On note sur les résultats obtenus que l'utilisation de l'hybridation DIFOE/DIFOE a permis d'améliorer le temps calcul sans dégrader la solution. Cet exemple montre bien l'intérêt de l'utilisation d'une décomposition de domaines pour traiter des problèmes non conformes en p .

Méthode.	Temps à 2 procs
O5	36m
O3/5	8m25s
Couplage O1/O3-5	4m25s

table 4.2: Comparaison des temps calculs

4.6 Conclusions

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'introduction de l'approche différences finies d'ordre élevé dans une stratégie d'hybridation de méthodes avec pour objectif l'augmentation des performances de celle-ci pour traiter des objets à géométrie courbe dans un domaine de calcul. Pour cela nous avons tout d'abord présenté deux méthodes existantes, étudiées par le passé dans notre laboratoire, et montré leur inconvénients. De nombreuses méthodes plus ou moins similaires trouvées dans la littérature, basées sur des principes analogues, présentent les mêmes inconvénients. On a alors expliqué en quoi l'utilisation de notre approche FDTD d'ordre élevé dans le contexte d'hybridation de maillage présentant une zone cartésienne et une ou plusieurs zones non structurées pouvaient améliorer les méthodes précédentes. Après avoir donné rapidement un contexte logiciel pour la mise en oeuvre de méthodes couplées entre elles, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'hybridation de notre méthode avec une approche GD. Nous avons alors donné le principe d'une hybridation qui conserve l'énergie du système de Maxwell au cours du temps par l'ajout de termes de saut dans notre schéma au niveau des faces frontières entre le domaine cartésien et non structuré. Un exemple a ensuite été montré pour valider l'approche. Puis, nous nous sommes intéressés à une hybridation DIFOE/DIFOE permettant de prendre en compte des zones de maillages ayant des ordres spatiaux différents. Un exemple académique a été donné et nous a permis de monter l'intérêt en termes de coût calcul, de cette approche. Par la suite nous pourrions envisager d'étendre cette approche pour tenir compte de zones avec raffinement de maillages en espace, comme cela a déjà été réalisé dans l'approche GD. Une autre piste consisterait à intégrer cette technique d'hybridation dans le couplage d'autres méthodes telles que FDTD/FVTD pour essayer d'obtenir une approche plus stable que celle proposée par le passé.

Chapitre 5

Applications numériques

Ce chapitre est dédié à la simulation de cas industriels en utilisant notre approche différences finies d'ordre élevé. Dans ces simulations nous montrons la pertinence de notre méthode essentiellement par rapport au schéma de Yee et à des mesures, notamment en terme de précision et de coût calculs. Sans être complètement exhaustif, nous avons choisis de traiter différents exemples mettant en oeuvre les modèles physiques étudiés dans cette Thèse, ainsi que les propriétés liées au schéma DIFOE. Dans l'ensemble des cas tests considérés nous avons choisi :

- Une étude CEM d'un bâtiment, mettant en oeuvre le modèle de fils obliques, les matériaux minces, le modèle d'onde plane en présence d'un sol parfaitement métallique, ainsi que l'ordre d'approximation spatial variable par direction. Les résultats obtenus avec notre méthode sont comparés avec le schéma de Yee en terme de coût calcul pour une précision donnée. Nous montrons notamment ici le gain en temps calcul et coût mémoire par l'utilisation d'un schéma d'ordre élevé pour la résolution de ce problème de CEM.
- Une étude des effets indirects de la foudre sur un aéronef, afin de mettre en évidence les capacités de notre méthode pour ce type de problématique.

Sur l'ensemble de ces applications nous donnerons des éléments de comparaison sur les performances obtenue par notre méthode par rapport à l'existant.

5.1 Étude CEM d'un bâtiment.

Dans cet exemple nous cherchons à étudier les courants induits sur des câblages positionnés à l'intérieur d'un bâtiment, illuminé par une onde plane. Ce type de configuration pourrait être représentatif d'une étude de localisation d'une antenne d'émission, que l'on cherche à positionner de façon à minimiser les perturbations engendrées par celle-ci. On peut aussi penser à une agression de type IEMN sur des bâtiments sensibles. Dans notre configuration, nous supposons l'antenne ou la source suffisamment loin pour considérer celle-ci comme une onde plane. Le modèle de bâtiment étudié est constitué de matériaux épais, représentatifs de murs en béton comportant une part de ferrailles. Pour cela nous considérons les murs en matériaux homogène dont la permittivité est celle du béton

$\varepsilon_r = 6.1$, et la conductivité $\sigma = 630S/m$ est calculée en injectant dans la conductivité du béton, une part liée au fer présent dans celui-ci. Pour cela, on évalue un volume de ferraille pour un bloc de béton donné, qui nous permet de donner une proportion de métal $p = 6.3e - 5$ par mètre cube de béton. La valeur de conductivité équivalente à notre béton "ferraillé" sera déterminée par $\sigma = p\sigma_{fer} + (1 - p)\sigma_{bton}$, où $\sigma_{fer} = 1.e7S/m$ est la conductivité du fer et $\sigma_{bton} = 0.06S/m$ représente la conductivité du béton sans ferrailles. Le bâtiment possède aussi des cloisons internes qui sont représentés par des matériaux minces de conductivité représentative de la brique. Au niveau de chaque fenêtre et porte nous trouvons les montants métalliques de celle-ci, représentés par un matériau volumique de conductivité proche du métal. Pour tenir compte de ces montants, il est nécessaire d'avoir un pas spatial de maillage relativement petit par rapport au bâtiment complet, ce qui pose un réel problème de maillage de la totalité de la scène. Un nombre très important de mailles dans le cas du schéma de Yee. Grâce à l'utilisation d'un ordre variable dans chaque cellule, par direction, ce problème ne se posera plus. Le bâtiment choisi est représentatif d'un bâtiment à un étage avec un toit plat constitué d'une dalle de béton. A l'intérieur du bâtiment, se positionnent un réseau caractéristique de câbles électriques circulant le long des cloisons et des murs. Le réseau est constitué de mono-filaires connectées entre elles via des jonctions, et possédant des terminaisons de type fil en l'air caractéristique d'une prise de courant. Par rapport à la réalité et au modèle de fil oblique actuel, les câbles électriques multi-filaires ont été simplifiés par des mono-filaires. Le choix de directions parallèles aux axes x, y, z des fils a été volontairement fait pour pouvoir traiter le même cas par le schéma de Yee et le modèle de Holland. La géométrie globale du bâtiment est illustrée sur la figure 5.4, ainsi que les axes du domaine de calcul.

Sur cette configuration géométrique, nous étudions les perturbations induites sur les câbles pour une agression définie par une onde plane : $(k, E = E_0 f(t, x), H = H_0 f(t, x))$ où $f(t, x)$ définit une fonction gaussienne décrite par $f(t, x) = e^{-\gamma^2}$ avec $\gamma = \frac{t - t_0 - \frac{k \cdot (x - x_0)}{c_0}}{\alpha}$, où c_0 représente la vitesse de la lumière dans le milieu considéré et x_0 , le point de phase nulle. Cette source est imposée sur une surface de Huygens entourant l'objet comme cela est décrit dans le modèle de sol parfaitement métallique donné au chapitre 4. L'onde plane utilisée est définie ainsi : $E_0 = (-326.49, 0, 188.5)$, $H_0 = k \times E_0$, $k = (0.3535, 0.6123, -0.707)$, $t_0 = 1.6e - 9$, $\alpha = 5e - 10$, $x_0 = (0., 0., 3.5)$.

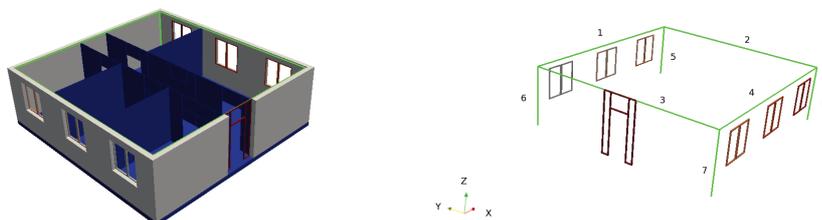


figure 5.1: Maillage du bâtiment et numéro des câbles.

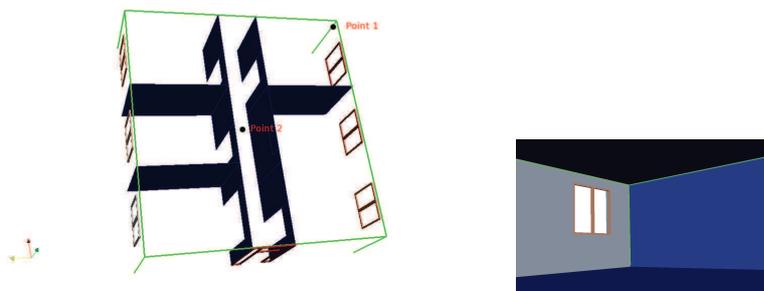


figure 5.2: Maillage des cloisons et positions des points de calcul des champs.



figure 5.3: Maillage des fenêtres et de la porte.

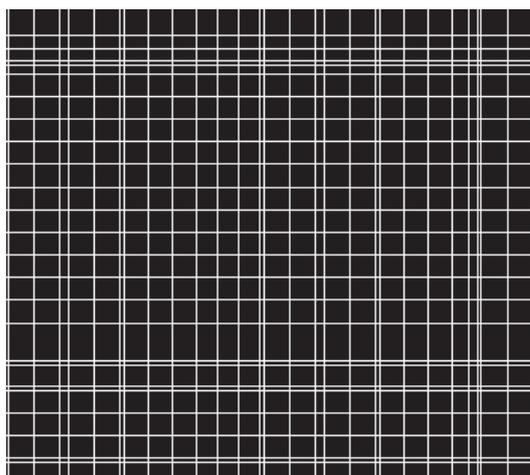


figure 5.4: Grille à pas variables.

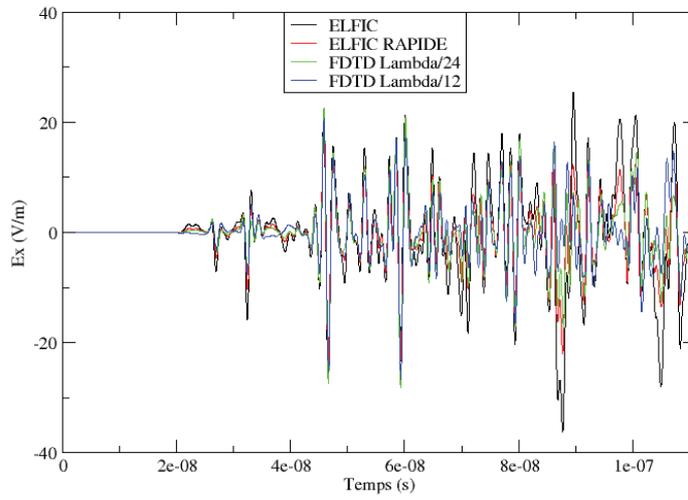
La figure 5.3 nous montre une coupe dans le plan xy de la grille utilisée par ce cas test. Le domaine de calcul fait $11.55m \times 11.05m \times 4.2m$ pour $52 \times 48 \times 19$ cellules.

Cette grille a pour particularité de s'adapter à la géométrie du bâtiment. En effet les mailles sont plus lâches dans les zones vides et resserrées là où c'est nécessaire pour tenir compte de la géométrie. De ce fait le pas spatial varie de $30cm$ à $5cm$ en fonction des contraintes locales de positionnement des objets à mailler.

Nous utilisons l'ordre variable en espace qui s'adapte à chaque cellule en fonction de la plus grande fréquence du signal. Dans le cas présent les ordres utilisés sont 2,4,5 et 7 en fonction du pas spatial.

Nous verrons qu'il est possible de limiter la montée en ordre dans les grandes cellules tout en conservant une bonne précision. En utilisant cette technique il est possible de gagner en performance calcul par rapport au schéma de Yee, au niveau du temps calcul et du coût mémoire. En effet dans ce cas nous bloquons l'ordre à une valeur de 5 au maximum, le nombre de cellules impactées étant important cela améliore le coût calcul. De plus le pas temporel alors utilisé passe de $1.88e-11$ pour un ordre 7 à $2.69e-11$ pour une ordre 5.

Champ électrique Ex au point 1



Champ électrique Ey au point 1

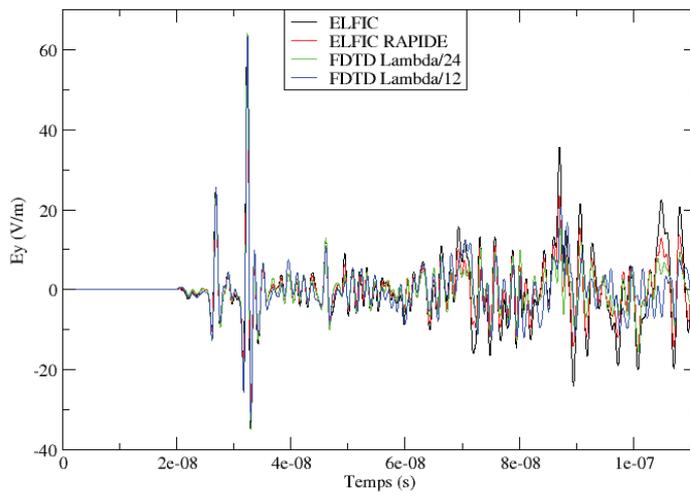


figure 5.5: Composantes E_x et E_y au point 1

Champ électrique Ez au point 1

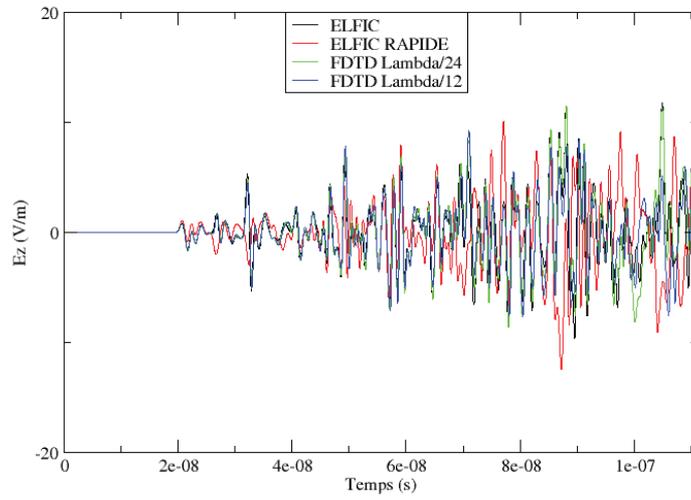


figure 5.6: Composantes Ez au point 1

Champ électrique Ex au point 2

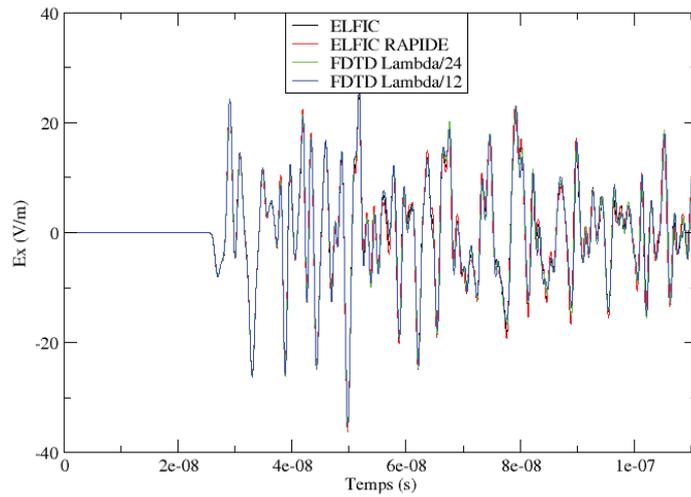
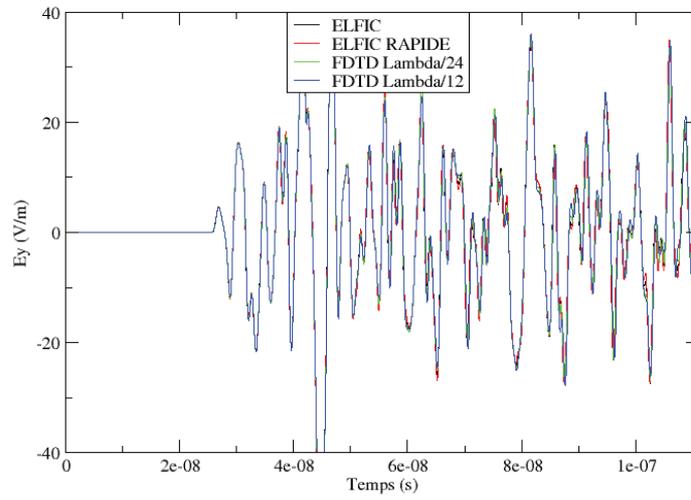


figure 5.7: Composantes Ex au point 2

Champ électrique E_y au point 2



Champ électrique E_z au point 1

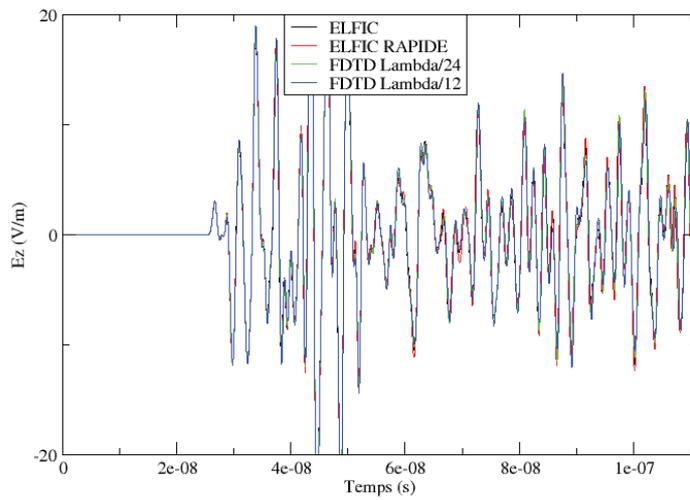
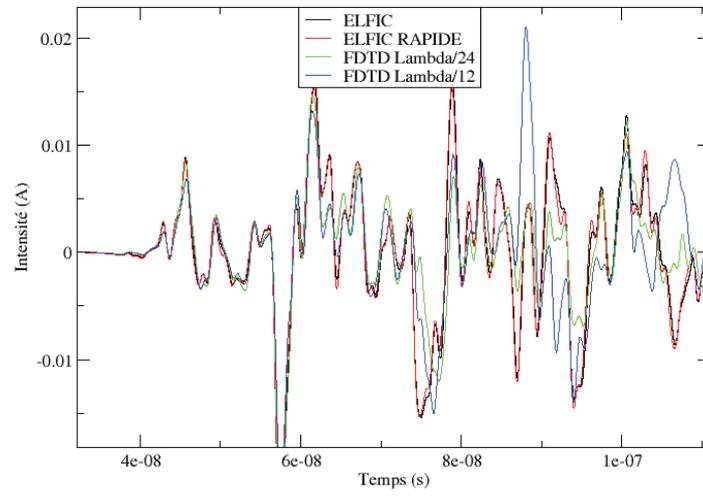


figure 5.8: Composantes E_y et E_z au point 2

Courant sur le cable 1



Courant sur le cable 2

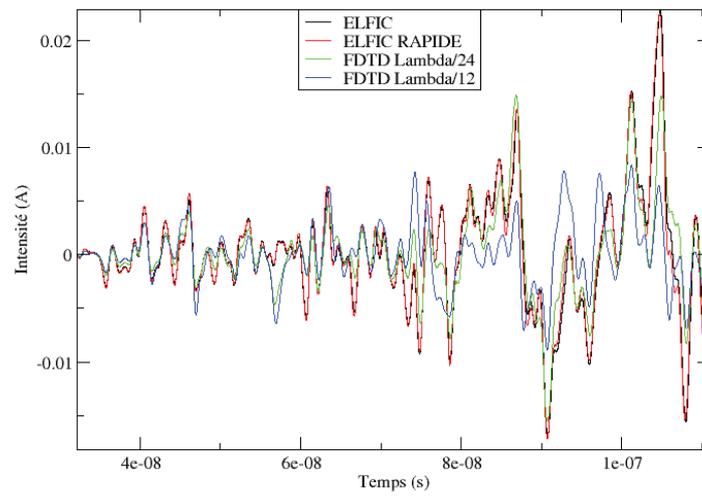
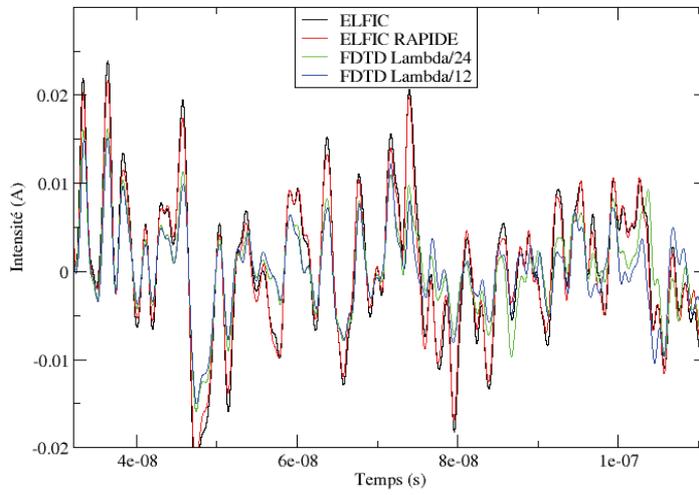


figure 5.9: Courants 1 et 2

Courant sur le cable 3



Courant sur le cable 4

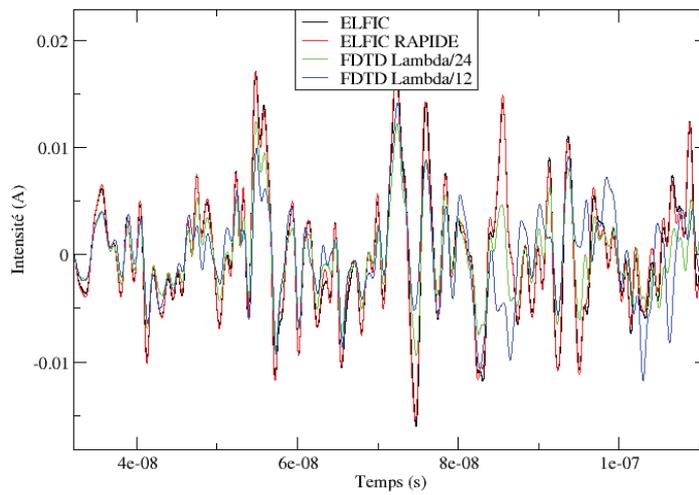
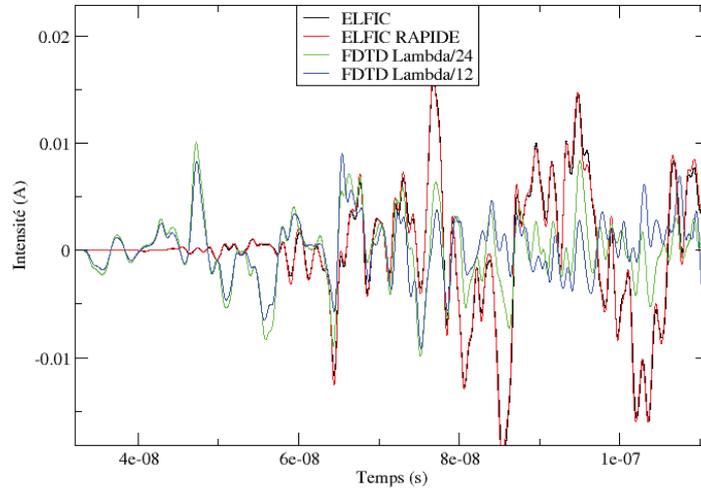


figure 5.10: Courants 3 et 4

Courant sur le cable 5



Courant sur le cable 6

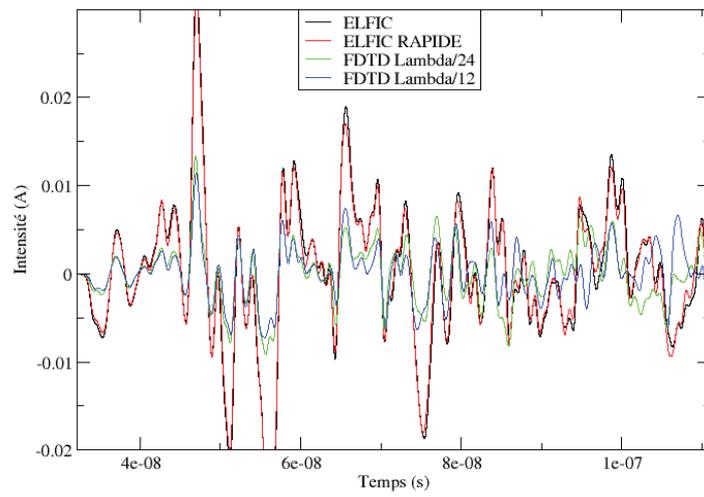
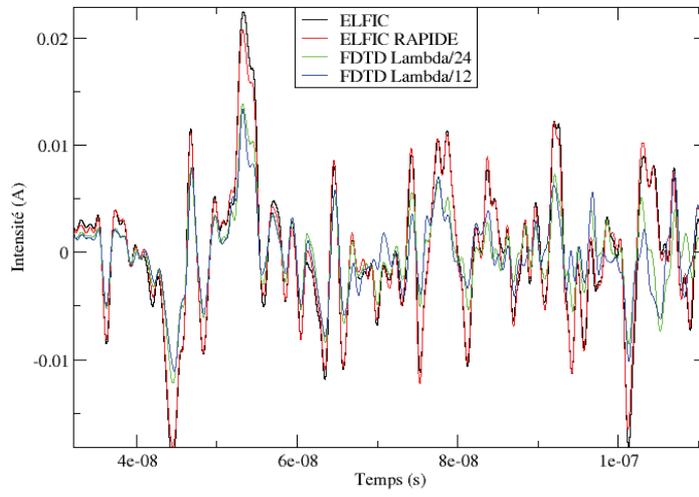


figure 5.11: Courants 5 et 6

Courant sur le cable 7



Courant sur le cable 8

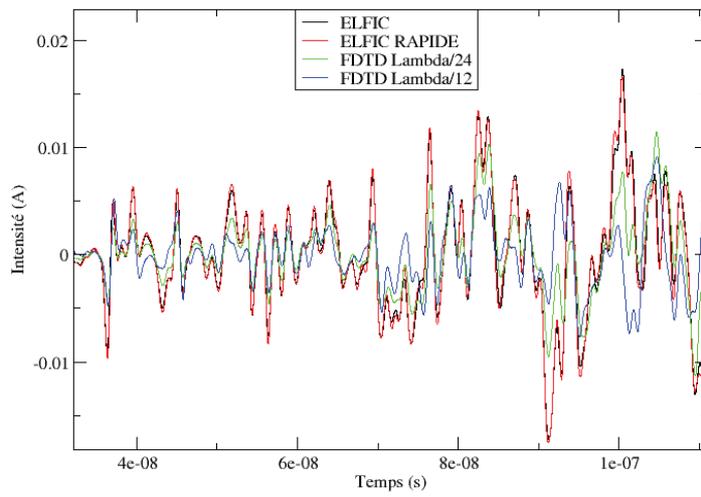
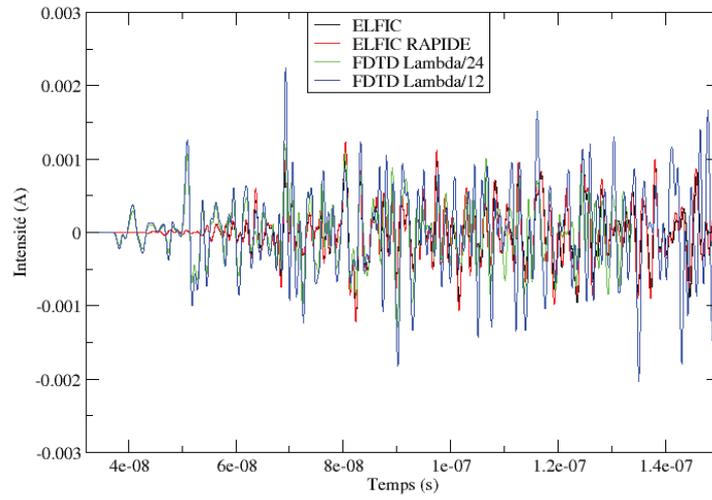


figure 5.12: Courants 7 et 8

Courant de terminaison sur le cable 5



Courant de terminaison sur le cable 6

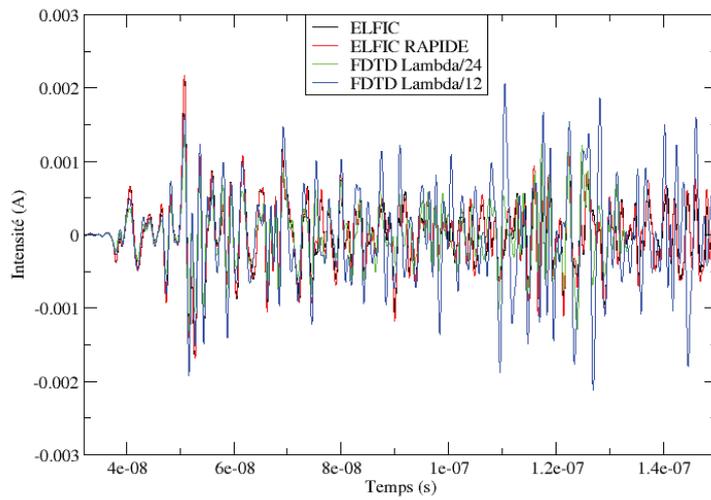
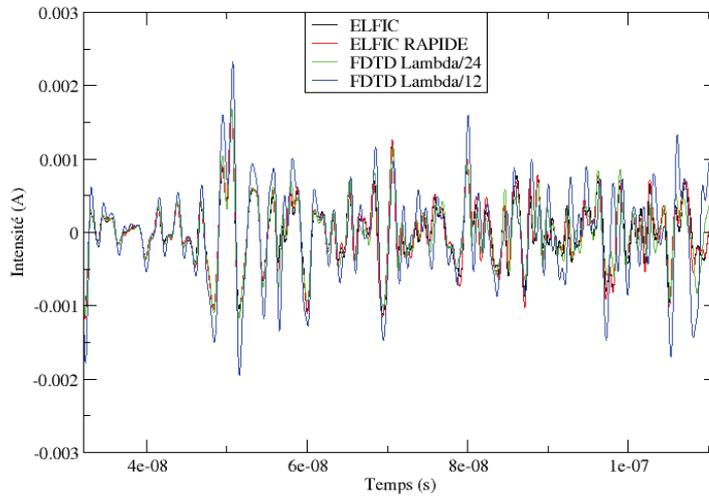


figure 5.13: Courants 9 et 10

Courant de terminaison sur le cable 7



Courant de terminaison sur le cable 6

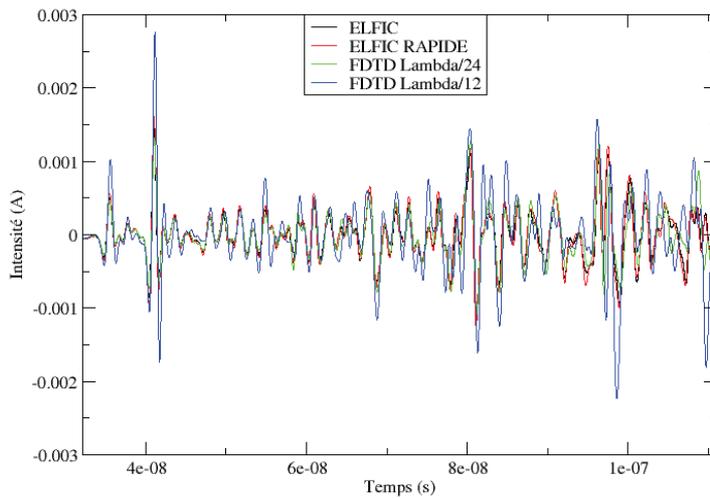


figure 5.14: Courants 11 et 12

Les résultats montrent globalement un bon accord entre les différentes méthodes, mais nous pouvons noter toutefois que la méthode d'ordre élevée est plus précise quand on utilise moins d'inconnues que le schéma de Yee. En effet les résultats obtenus en limitant la montée en ordre sont plus précis que ceux obtenus par le schéma de Yee avec le maillage le plus grossier.

<i>Méthode</i>	<i>Grille ou Ordres</i>	<i>Coût mémoire</i>	Temps CPU
<i>FDTD</i>	$\lambda/12$	2.6Go	05H13
<i>FDTD</i>	$\lambda/24$	19Go	88H40
<i>DIFOE</i>	Ordre 2-5	0.8Go	02H46
<i>DIFOE</i>	Ordre 2-7	1.9Go	32H30

table 5.1: Comparaison des performances schéma de Yee et DIFOE pour différentes configurations.

Nous pouvons voir sur ces performances calculs l'impact important de la limitation de la montée en ordre. En effet cela limite le nombre d'inconnues spatiales, et relâche la contrainte sur le pas temporel tout en gardant une bonne précision. Comparé au schéma de Yee notre méthode nécessite moins d'inconnues, et présente donc des gains importants en besoin mémoire. Les gains en temps cpu sont réels, mais moins importants car le schéma spatial est plus complexe et nécessite plus d'opérations par inconnues.

5.2 Simulation foudre d'un avion de type Transall.

L'objet de ce cas test est de montrer la capacité de notre modèle de fil oblique à simuler le foudroiement d'un avion par injection de courant. Le canal de foudre est classiquement simulé par un fil d'injection et un fil de sortie reliant l'avion et les bords du domaine de calcul avec une condition de court-circuit pour le contact avec l'avion, et une condition d'adaptation au bord du domaine. Les couches absorbantes utilisées sont des ML. La forme d'onde injectée est une onde H. L'injection se fait sur le nez de l'avion et la sortie sur l'aile. Le domaine de calcul est de dimension $63.2m \times 30m \times 32.2m$ pour une discrétisation spatiale de $100 \times 100 \times 50$ cellules. L'avion est constitué d'une partie métallique dont la conductivité électrique est $1e7S/m$ et d'une partie composite dont la conductivité électrique est $100S/m$.

Il contient un câble cheminant parallèlement à une paroi composite et connecté à une zone métallique.

Ceci pour être représentatif des problèmes aéronautiques actuels qui utilise de plus en plus de matériaux composites avec des équipements électroniques posés sur ceux-ci et reliés par des harnais de câble et des tresses aux parties métalliques. Ce que l'on cherche à évaluer est le courant qui passe dans ces équipements représentés ici par le câble interne au Transall. Bien qu'utilisant notre modèle de fils obliques le câble est droit afin de permettre de faire une comparaison avec un modèle de Holland classique. Le câble a un rayon de 2cm et est supposé parfaitement conducteur.

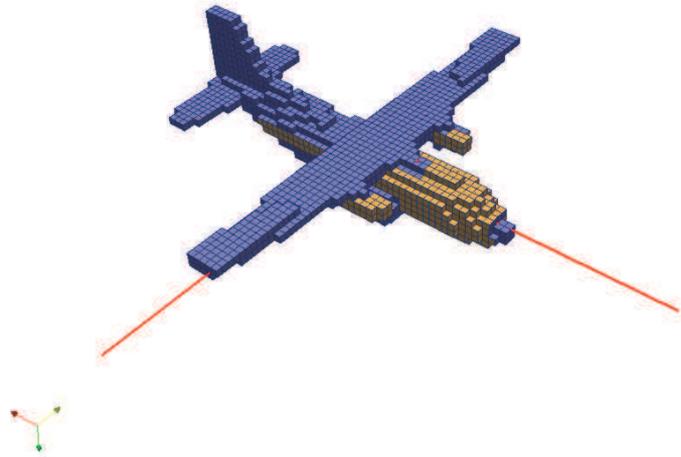


figure 5.15: Partie métallique en bleu et partie composite en marron. Configuration foudre.

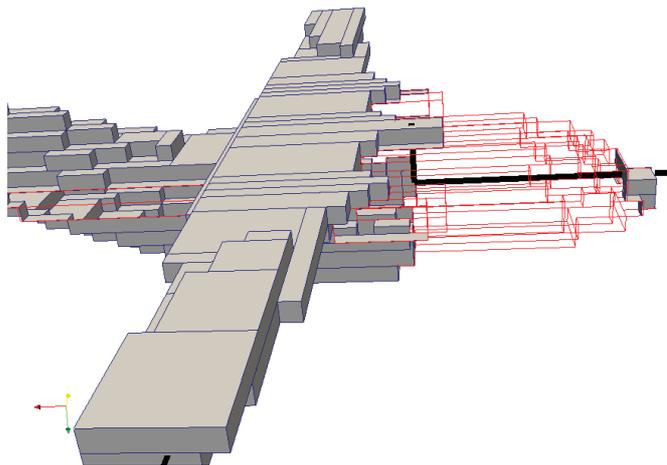


figure 5.16: Géométrie et positionnement du câble.

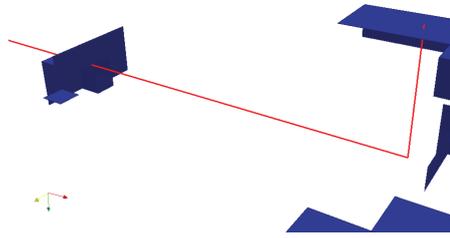


figure 5.17: Positions des jonctions du fil sur la structure

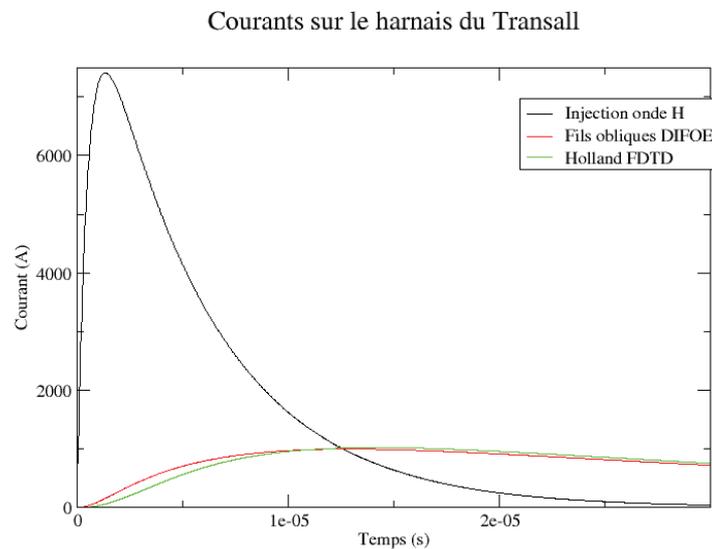


figure 5.18: Réponse du câblage au foudroiement.

Nous pouvons voir sur la figure 5.18 la comparaison du courant sur le câblage calculé avec le schéma de Yee et avec notre méthode. Les deux méthodes donnent un résultats similaires. Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.19 il est aussi possible de modéliser, avec les fils obliques, des câblages plus complexes, dont le parcours ne suit pas les arêtes du maillage. La figure 5.19 montre notre câblage légèrement modifié dans son parcours qui devient alors oblique. Nous avons par ailleurs rajouté un câble à câble numéro 2 qui relie la partie composite et le premier câble à câble numéro 1. Ce câble pourrait par exemple être connecté à un équipement électrique ou électronique.

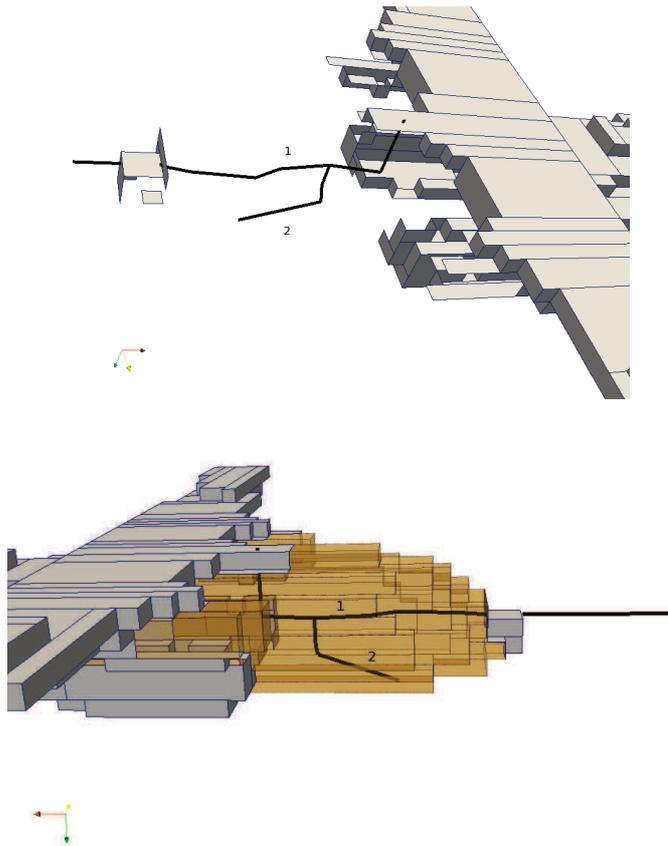


figure 5.19: Câblage plus réaliste.

Nous avons placé des résistances aux extrémités des câbles et testé deux configurations. Pour la première configuration les résistances sont égales sur chaque câble et ont pour valeur 0.05 Ohm. Pour la seconde configuration, le câble numéro 1 à une résistance de 0.5 Ohm et le câble numéro 2 une résistance de 0.05 Ohm. La figure 5.20 montre l'influence des valeurs de résistance sur les courants calculés sur les deux câbles. Il apparaît que plus le câble numéro 1 est résistant, et plus le courant sur le câble 2 est fort. Nous pouvons aussi noter que le maximum du courant est atteint plus tard pour le câble 2 qui est connecté à la partie composite.

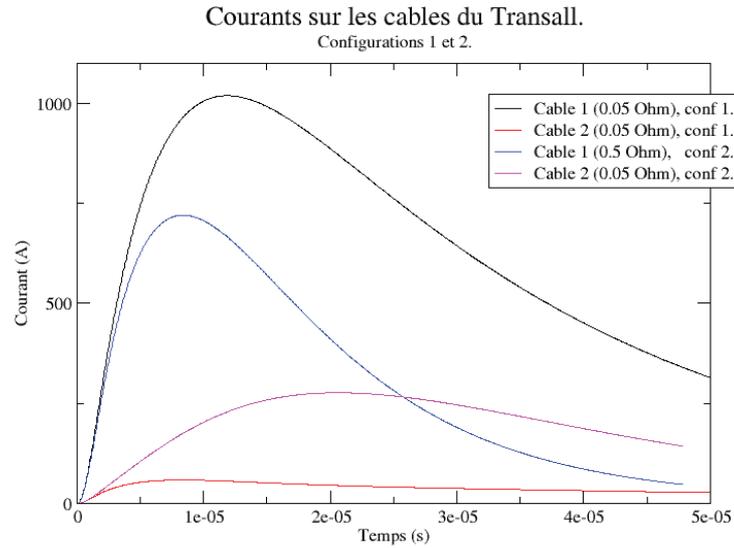


figure 5.20: Comparaison des courants pour les deux cables.

5.3 Conclusion

Nous avons présenté deux cas test qui utilisent notre schéma DIFOE ainsi que les modèles physiques associés. Nous avons pu montrer lors de l'étude du bâtiment les apports de l'utilisation du pas de maillage variable pour prendre en compte la géométrie de manière optimale, et de l'ordre d'approximation spatiale variable qui permet au schéma de s'adapter au maillage. De plus nous avons montré que grâce aux ordres élevés, il était possible d'utiliser moins d'inconnues que ne nécessite le schéma de Yee pour une meilleure précision, et ainsi gagner en performances calculs.

Quant au cas test de type calcul des effets indirects de la foudre, malgré sa simplicité géométrique, il a permis de tester les fonctionnalités nécessaires pour ce type de calcul, c'est à dire la prise en compte de matériaux minces de conductivité finie, de fils obliques avec jonctions portant des éléments localisés résistifs, ainsi que la connexion fil-structure. De ces premiers résultats, il nous apparait tout a fait envisageable par la suite de pouvoir réaliser des calculs pour des problématiques industrielles largement plus complexes.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à un schéma éléments finis particulier qui est une extension du schéma de Yee, à des approximations spatiales élevées. De plus, ce formalisme à l'ordre 1 est identique au schéma de Yee. C'est pourquoi, nous avons présenté cette méthode comme une méthode différences finies d'ordre élevé.

La motivation de cette étude correspond à un besoin dans les applications, de disposer d'un schéma "similaire" au schéma de Yee et qui offre plus de précision et moins de dispersion numérique. Plus précisément, cela trouve un intérêt dans la propagation de signal dans les cavités ou sur de nombreuses longueurs d'ondes. En effet, dans ces configurations, l'erreur de dispersion induite par le schéma de Yee est très importante.

Dans nos travaux, nous avons tout d'abord posé le problème physique à résoudre et présenté un historique non exhaustif des méthodes numériques existantes pour résoudre celui-ci. Nous avons ensuite décrit le schéma différences finies d'ordre élevé en précisant les espaces d'approximations et fonctions de bases considérées et en détaillant le calcul des intégrales de la forme variationnelle équivalente au problème continu. Pour le schéma ainsi obtenu, un critère de stabilité a été donné et une étude numérique de la convergence du schéma a été réalisée. On peut montrer dans cette étude une erreur de convergence en h^{p+1} , où h est le pas spatial et p l'ordre d'approximation spatial. Pour $p = 1$, on retrouve les caractéristiques du schéma de Yee. Des comparaisons entre notre schéma, celui de Yee et une approche Galerkin discontinu ont été effectuées sur un exemple traitant la propagation d'un mode à l'intérieur d'une cavité et pour lequel on connaît la solution analytique. Sur cette configuration, on a montré les avantages de notre méthode par rapport aux autres en termes de coûts calculs, pour obtenir une solution correcte au problème. De plus, notre méthode offre la possibilité de choisir un ordre p d'approximation spatiale différent par cellule dans chaque direction de l'espace, tout en restant conforme en p . Cette particularité permet de résoudre correctement le problème de Maxwell sur des maillages ayant de fortes variations sur la taille des cellules, sans imposer une contrainte comme cela est le cas dans le schéma de Yee. On peut donc par cette possibilité diminuer considérablement le nombre de cellules dans le maillage et augmenter les performances en coûts calculs de la méthode. Une application directe est l'étude de matériaux ayant un fort contraste diélectrique avec le domaine de calcul. Cet aspect de la méthode différences finies d'ordre élevé a trouvé aussi un intérêt immédiat pour l'étude des perturbations induites par une agression électromagnétique externe, sur le câblage électrique d'un bâtiment. On ajuste alors dans chaque direction d'espace le

maillage avec les différents murs du bâtiment, pour utiliser très peu de mailles dans les parties vides de celui-ci. En adaptant l'ordre d'approximation dans chaque direction suivant la taille des mailles, on obtient alors une bonne précision sur les résultats avec des coûts calculs réduits.

Afin de pouvoir traiter des problèmes de CEM, certains modèles physiques sont absolument nécessaires et ont donc fait l'objet d'une étude particulière dans cette thèse. Sur ce point, on s'est principalement intéressés aux modèles de matériaux et de fil minces obliques. Nous avons proposé un nouveau formalisme de fil mince permettant de tenir compte de fil obliques dans un schéma utilisant une approximation spatiale d'ordre élevée. Pour définir ce modèle, nous nous sommes inspirés des approches proposées par C. Guiffaut et F. Edelvik, sans pour autant utiliser ceux-ci directement. Le nouveau modèle proposé a ensuite été validé sur différents exemples.

La méthode différences finies d'ordre élevé est définie à la base pour être utilisée sur des maillages cartésiens. Lorsque les géométries à étudier présentent des parties courbes, il est nécessaire de faire un maillage plus fin, ce qui limite l'intérêt de la méthode. On s'est donc intéressés à une méthode de couplage de notre schéma avec une approche Galerkin Discontinue utilisant des maillages non structurés. Une stratégie d'hybridation basée sur l'introduction de termes de saut dans le schéma différences finies d'ordre élevé, pour assurer une conservation d'énergie sur le problème continu a été proposée. Cette approche a fait l'objet d'une implémentation dans une approche multi-domaines/multi-méthodes et a été validée dans une configuration particulière de guide d'onde. Cette technique d'hybridation peut aussi s'appliquer dans un contexte de prise en compte de maillage non conforme dans le schéma différences finies d'ordre élevé. Une étude numérique réalisée sur maillage non conforme en ordre p a montré la pertinence de cette solution.

Enfin, un ensemble de simulations sur des configurations pratiquement industrielles, a montré l'utilité de cette approche pour traiter les problèmes actuels.

Dans la suite des travaux à mener, nous pensons en ce qui concerne le schéma, à l'étude de schéma temporels d'ordre élevé pour augmenter la CFL et à des stratégies de pas de temps local dans l'utilisation de maillages non conformes. A ce titre, il reste à introduire les maillages non conformes en h à raffinement d'espace dans la méthode. En ce qui concerne ce point particulier et le couplage de notre schéma avec l'approche GD étudiée, il reste à déterminer par une étude mathématique une condition de stabilité. Enfin, on pourra aussi envisager d'utiliser cette stratégie d'hybridation pour d'autres types de schéma, comme par exemple le couplage FDTD/FVTD.

Bibliographie

- [1] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, 1873
- [2] o. Heaviside, *On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field*, Philosophical Transactions of the Royal Society, 183A, 1892
- [3] E.B. Wilson, *Vector Analysis of Josiah Willard Gibbs - The History of a Great Mind*, Charles Scribner's Sons New York, 1901
- [4] M. Remaki, *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*, Thèse de l'Ecole Nationale des ponts et chaussées, 1999.
- [5] J.P. Berenger, *Three-dimensional Perfectly Matched Layer for the absorption of Electromagnetic waves*, J. Comp. Physics, 127 : 363-379, 1996.
- [6] J.P. Berenger, *Perfectly Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics*, Morgan & Claypool Publishers, Synthesis lectures on computational electromagnetics, Constantine A. Balanis, Series Editor.
- [7] P.A. Mazet, L. Segui and B. Dha, *Sur l'existence et l'unicité des solutions pour le système de Maxwell harmonique en présence de couches de Berenger*, CRAS, 333 : 599-604, 2001.
- [8] A. Modave, A. Kameni, J. Lambrechts, E. Delhez, L. Pichon and C. Geuzaine, *An optimum PML for scattering problems in time domain*, Eur. Phys. J. Appl. Phys. 64 :24502.
- [9] S. D. Gedney, *An anisotropic PML absorbing media for the FDTD simulation of fields in Lossy and dispersive media*, Electromagnetics, 16 : 399-415, 1996.
- [10] S. Laurens, *Approximation de Haute Précision des problèmes de diffraction*, Thèse de l'Université de Toulouse Paul Sabatier, 2010
- [11] V. Gobin, *Diffraction par des ouvertures et par des objets tridimensionnels, application à la mesure des impédances de surface des matériaux bon conducteurs*, Thèse de l'Université de Lille, 1989
- [12] R. Holland and L. Simpson, *Finite-difference analysis of EMP coupling to thin struts and wire*, IEEE Trans. Electromagnetic Compat., vol. EMC-23, pp. 88-97, May 1981.
- [13] K.S. Yee *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE trans. Antennas Propag., AP-14 : 302-307, 1966.

- [14] A. Taflove, *Advances in computational electrodynamics : the finite-difference time-domain*, Artech house, Boston, 1998.
- [15] F. Edelvik, *A new technique for accurate and stable modeling of arbitrary oriented thin wires in the FDTD method*, IEEE Trans. on EMC, 45 : 416-423, 2003.
- [16] C. Guiffaut, A. Reineix and B. Pecqueux, *New Oblique thin wire formalism in the FDTD method with multiwire junctions*, IEEE Trans. on Antennas and Propag., vol.60, No. 3, march 2012.
- [17] A.C. Cangellaris and D.B. Wright, *Analysis of the numerical error caused by the stair-stepped approximation of a conducting boundary in FDTD simulations of electromagnetic phenomena*, IEEE Trans. Antennas and Propag., 39 :1518-1525, 1991.
- [18] V.Shankar and W.F.Hall, *A time domain differential solver for electromagnetic scattering*, URSI Meet. Univ. Colorado, Boulder, CO, January 1988.
- [19] J.S. Shang, *Charateristic-based algorithms for solving the Maxwell equations in the time domain*, IEEE Antennas and Propagation magazine, vol.37, No.3, pp.15-25 june 1995.
- [20] J.P. Cioni, *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis*, thèse de l'université de nice-sophia antipolis, décembre 1995.
- [21] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows*, John Wiley & Sons, 1988.
- [22] P. Bonnet, *Résolution des équations de Maxwell instationnaires et harmoniques par une technique volumes finis. Application à des problèmes de compatibilité électromagnétique.*, Thèse de l'Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand, 1998
- [23] P. Bonnet, X. Ferrieres, F. Paladian, F. Issac, J.C. Alliot and J. Fontaine, *Numerical modeling of scattering problems using a time domain finite volume method*, JEWA, 11 : 1165-1189, 1997
- [24] A. Hamiaz, *Etude d'une méthode volumes finis pour la résolution d'un modèle non linéaire d'un couplage Maxwell/Plasma dans le domaine temporel*, Thèse de l'université de Toulouse, juillet 2012
- [25] S.M. Rao, *Time domain electromagnetics*, Series Editors David Irwin, Auburn University Academic Press, 1999.
- [26] C.Fumeaux, D.Baumann, P. Leuchtman, R. Vahldieck, *A generalized local time-step scheme for efficient FVTD simulations in strongly inhomogeneous meshes*, IEEE Trans. Microwave Theor. Techniques 52 :1067.
- [27] X.Ferrieres, J.P.Parmantier, S.Bertuol, A.R.Ruddle, *Application of a hybrid FDTD/FVTD method to solve an automatic EMC problem*, IEEE Trans. on EMC 46 :1184, Nov. 2004, 1165-1184.
- [28] I. Jeffrey, *Finite-volume simulations of Maxwell's equations on unstructured grids*, Ph.D thesis, University of Manitoba, 2011.

- [29] J.S. Hesthaven and T. Waburton, *High-Order nodal methods on unstructured grids for time-domain solution of Maxwell's equations*, J. Comp. Physics, 181 : 1-34, 2002.
- [30] S. Pernet, *Etude de méthodes d'ordre élevé pour résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel. Application à la détection et à la compatibilité électromagnétique*, Thèse de l'Université Paris IX, 2004
- [31] A. Taube, M. Dumbser, C.D. Munz, R. Schneider, *A high order discontinuous galerkin method with local time stepping for the Maxwell equations*, International Journal of numerical modelling : Electronic networks devices and fields, 22:77-103, 2009.
- [32] E. Montseny, S. Pernet, X. Ferrieres, G. Cohen, *Dissipative terms and local time-stepping improvements in a spatial high order Discontinuous Galerkin scheme for the time domain Maxwell's equations*, J. Comp. Phys., vol. 227, 6795-6820, 2008
- [33] B. Mallet, X. Ferrieres, S. Pernet, J.B. Laurent, B. Pecqueux and P. Seimandi, *A P-strategy with a local time-stepping method in a discontinuous galerkin approach to solve electromagnetic problems.*, Journal of computational methods in Physics, Vol. 2013, article ID 563480.
- [34] L.Pebernet, X.Ferrieres, S.Pernet, B.L.Michielsen, F.Rogier, P.Degond, *Discontinuous Galerkin method applied to electromagnetic compatibility problems : introduction on thin wire and thin resistive material models*, IET Sciences, Measurements and Technology, vol.2, issue 6, nov. 2008, pp.395-401.
- [35] Bo Zhao, *The application of Discontinuous Galerkin finite element time domain in the design, simulation and analysis of modern radio frequency system*, PhD Thesis of University of Kentucky, 2011
- [36] T.Volpert, X.Ferrieres, B.Pecqueux and G.Cohen, *High Precision Method to Solve the Maxwell's Equations in the Time Domain adapted to Structured Meshes*, ACES 2013, 24-28 march, Monterey, 2013
- [37] J.Grando, F.Issac, M.Lemistre and J.C.Alliot, *Satbility analysis including wires of arbitrary radius in FD-TD code*, in Proc. IEEE Trans. Antennas Propag. Soc. Int. Symposium, Jun. 28-Jul.2, vol.1, pp.18-21, 1993
- [38] G. Cohen, *Higher-Order numerical methods for transient wave equations*, Springer Verlag, Berlin, 2001
- [39] V.Mouysset, *Une méthode de sous-domaines pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires en présence d'un ensemble non-connexe d'objets diffractant*, Thèse de l'Université de Toulouse Paul Sabatier, 2006
- [40] N.Muot, *Stratégies d'hybridation de méthodes de simulation électromagnétique FDTD/MTL - Application à l'étude de grands systèmes complexes*, Thèse de l'Université de Toulouse ISAE, 2013
- [41] C. Durochat *Méthode de type galerkin Discontinu en maillage multi-éléments pour la résolution numériques des équations de Maxwell instationnaires*, Thèse de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, 2013

- [42] X.Ferrieres, J.P.Parmantier, S.Bertuol, *Evaluation of currents and fields inside a vehicle for different test cases in the context of the Gemcar European project : Application of an hybrid FDTD/FVTD method*, ONERA RF.2/03484.DEMR DEMR/RT 03 T28049, 2003.

Titre Etude d'un schéma différences finies haute précision et d'un modèle de fil mince oblique pour simuler les perturbations électromagnétiques sur véhicule spatial

Résumé Les travaux de cette thèse concerne l'étude d'une méthode élément finis d'ordre spatial élevé que l'on peut assimilé à une extension du schéma de Yee. On parle alors de méthode différences finies d'ordre élevé. Après avoir donné, dans un premier chapitre, un historique non exhaustif des principales méthodes utilisées pour résoudre les équations de Maxwell dans le cadre de problèmes de CEM et montré l'intérêt de disposer d'un solveur de type "différences finies d'ordre élevé", nous présentons dans un deuxième chapitre le principe de la méthode. Nous donnons pour cela les caractéristiques du schéma spatial et temporel en précisant les conditions de stabilité de la méthode. En outre, dans une étude purement numérique, nous étudions la convergence du schéma. On se focalise ensuite sur la possibilité d'utiliser des ordres spatiaux variable par cellules dans chaque direction de l'espace. Des comparaisons avec le schéma de Yee et un schéma de Galerkin Discontinu particulier sont ensuite effectuées pour montrer les gains en coûts calcul et mémoire et donc l'intérêt de notre approche par rapport aux deux autres. Dans un troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude de modèles physiques indispensable au traitement d'un problème de CEM. Pour cela, nous nous focalisons particulièrement sur un modèle de fil mince oblique, des modèles de matériaux volumiques et minces et enfin sur la prise en compte de sol parfaitement métallique dans une agression de type onde plane. Chaque modèle est détaillé et validé par comparaison avec des solutions analytiques ou résultant de la littérature, sur des exemples canoniques. Le quatrième chapitre est dédié à une technique d'hybridation entre notre méthode et une approche Galerkin Discontinu en vue de traiter des géométries possédant des courbures. Nous donnons pour cela une stratégie d'hybridation basée sur l'échange de flux qui garantie au niveau continue la conservation d'une énergie. Nous présentons ensuite quelques exemples montrant la validité de notre approche dans une stratégie multi-domaines/multi-méthodes que nous précisons. Enfin le dernier chapitre de cette thèse concerne l'exploitation de notre méthode sur des cas industriels en comparaisons avec d'autres méthodes ou des résultats expérimentaux.

Mots-clés Equation de Maxwell dans le domaine temporel, schéma différences finies, schéma Galerkin discontinu, approximation spatiale d'ordre élevé, modèle de fil mince oblique, modèle de matériaux, Hybridation de méthode GD/FDTD, problème de CEM, stratégie multi-domaines/multi-méthodes.

Title Study of a high order finite difference scheme and of a thin wire model for simulating electromagnetic aggression on a aerospace vehicle.

Abstract This thesis is about the study of a high spatial finite element method which can be assimilated at an extension of the Yee schema. In the next, this method is also called high order finite difference method. In the first chapter, we give a non exhaustive recall of the major methods used to treat EMC problems and we show the necessity to have this kind of schema to simulate efficiently some EMC configurations. In the second chapter, the principle of the numerical method is presented and a stability condition is given. A numerical study analysis of the schema convergence is also done. Next, we show the interest to have the possibility to use local spatial order by cell in each direction of the computational domain. Some canonic examples are given to show the advantages in terms of CPU time and memory storage of the method by comparison with Yee's scheme and DG approach. In the third chapter, we define and validate on several examples, some physical models as thin wire, materials and perfectly metallic ground in presence of a plane wave, to have the possibility to treat EMC problems. The fourth chapter is about a hybridization strategy between our high order FDTD method and a DG schema. We focalize our study on a hybrid method which provides an energy conservation of the continuous problem. A numerical example is given to validate the method. Finally, in the last chapter, we present some simulations on industrial problems to show the possibility of the method to treat realistic EMC problems.

Keywords Maxwell's equations in time domain, finite difference method, discontinuous Galerkin method, high order spatial approximation, thin wire model, material models, DG/FDTD hybrid method, EMC problem, multi-domains/multi-methods strategy.