



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

---

**Présentée et soutenue par :**

**Rémi CHAUVIN**

le jeudi 17 décembre 2015

**Titre :**

Un modèle unifié pour les phénomènes de givrage en aéronautique et les systèmes de protection thermiques

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED MEGeP : Energétique et transferts

**Unité de recherche :**

Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Philippe VILLEDIEU (directeur de thèse)

M. Pierre TRONTIN (co-directeur de thèse)

**Jury :**

M. Jean-Paul VILA Professeur des universités - Président

Mme Héloïse BEAUGENDRE Maître de Conférences des universités

M. Fabien DEZITTER Ingénieur Airbus

M. Philippe HELLUY Professeur des Universités - Rapporteur

M. Pierre-Henri MAIRE Directeur de recherche CEA

M. Christian RUYER-QUIL Professeur des Universités - Rapporteur

M. Pierre TRONTIN Ingénieur de recherche ONERA - Co-directeur de thèse

Philippe VILLEDIEU Ingénieur de recherche ONERA - Directeur de thèse



## Résumé

Le givrage a été identifié comme un danger important dès le début de l'aéronautique. L'accrétion de givre sur les ailes d'avion, due à la présence de gouttelettes surfondues dans les nuages, cause parmi d'autres conséquences néfastes une dégradation des performances aérodynamiques pouvant conduire au décrochage. C'est pourquoi les avionneurs développent depuis longtemps des systèmes de protection. Comme les essais en vols ou en soufflerie sont souvent complexes à mettre en œuvre et onéreux, la simulation numérique est devenue un outil efficace et complémentaire pour dimensionner ces systèmes.

Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la modélisation de l'accrétion de givre, du ruissellement et des systèmes de protection thermique. Elle s'articule en sept chapitres. Après avoir présenté les enjeux et contexte, on introduit une approche tricouche permettant de modéliser l'accrétion de givre et le ruissellement de manière instationnaire. Les trois chapitres suivants traitent des méthodes de discrétisation de ce modèle ainsi que de son couplage avec un modèle du système de protection thermique. Les deux derniers sont consacrés à la présentation des résultats de simulations numériques montrant l'intérêt de l'approche développée et la faisabilité de simulations complètes de phénomènes d'accrétion de givre sur une paroi chauffée ou non.

## Abstract

Icing has been identified as a serious issue since the start of aeronautics. Ice accretion on wings, due to supercooled droplets inside clouds, leads to severe degradation of aerodynamic performances, among other undesirable effects. Therefore, aircraft manufacturers have since a long time developed ice protection systems. As flight tests or wind tunnel experiments are often complicated to implement and expensive, numerical modeling is an effective and complementary tool to design those systems.

This thesis concerns the modeling of ice accretion, runback and thermal ice protection systems. It consists of seven chapters. The first one is dedicated to the presentation of the concerns and the context. Then a three layer approach allowing to model in an unsteady way ice accretion and runback is presented. Following three chapters deal with this model discretization as well as a method to couple it with a thermal ice protection system model. Two last chapters are dedicated to numerical simulations showing the sake of the approach and the feasibility of a whole simulation of ice accretion on a heated or unheated surface.





## Remerciements

Je souhaite remercier amicalement toutes les personnes qui ont participé à ces travaux, et en premier lieu mes encadrants Philippe Villedieu et Pierre Trontin. Grâce aux longues discussions que nous avons pu avoir tout au long de ces trois ans, de nombreuses idées ont pu germer et être mises en applications au cours de cette thèse. Je tiens également à leur adresser ma gratitude pour la liberté et l'autonomie qu'ils m'ont laissées et qui m'ont permis d'explorer plusieurs axes de recherches.

Je tiens à exprimer des remerciements particuliers à Lokman Bennani sans qui la simulation complète d'un dégivreur électrothermique n'aurait pas été possible. Finalement, les longues heures passées dans mon bureau à s'arracher les cheveux pour déboguer les échanges entre modules n'auront pas été vaines ! Un grand merci également à Claire Laurent pour tous ses conseils sur les films, ainsi que les échanges que nous avons eus ces derniers mois sur les problématiques de givrage. Enfin, je remercie Emmanuel Radenac sans qui les projets de simulations en trois dimensions seraient sans doute restés dans les cartons, Garazi qui a étendu dans son excellent stage les travaux à un contexte industriel, ainsi que Ghislain pour son aide fréquente et la relecture du manuscrit.

Je remercie Philippe Helluy et Christian Ruyer-Quil d'avoir accepté de rapporter le manuscrit de thèse, Jean-Paul Vila pour avoir présidé le jury et Héloïse Beaugendre, Fabien Dezitter et Pierre-Henri Maire pour avoir accepté d'en faire partie. Je les remercie tous grandement, d'une part pour leur participation au jury, et d'autre part pour tous leurs retours très positifs, constructifs et pertinents, que ce soit sur les aspects théoriques ou industriels.

Je tiens également à remercier tout l'environnement du DMAE, et en particulier Pierre Millan et Pierre Gajan pour leur confiance et leur soutien tout au long de ces trois ans. De plus, j'apporte mes remerciements à la Direction Générale de l'Armement qui a cofinancé ces travaux et à mon tuteur Franck Hervy.

Je remercie également toutes les personnes ayant partagé mon bureau. Jorge qui m'a accueilli lors de mon arrivée en stage, François, Olivier avec qui j'ai eu grand plaisir à échanger, et enfin Charlotte, à la fois pour toutes les discussions interminables diverses et variées et son aide précieuse dans la rédaction du manuscrit et l'élaboration de la présentation. Le titre d'experte en esthétique devrait sans aucun doute lui être décerné !

De plus, tout au long de ces trois ans, j'ai beaucoup apprécié l'ambiance générale de travail et je remercie à ce titre l'ensemble des doctorants et des stagiaires (et associés) que j'ai pu côtoyer. J'espère n'oublier personne en citant Baptiste, Fabien, Henri, Maxime (j'espère qu'on reparlera de philosophie de temps à autre !), Loïc, Isabelle, Anna, Gianluca, François (Nicolas), Nathalie, Jean-Mathieu, Swann, Julien, Thibaut, Sylvain, Nathalie, Jonathan, Maxime, Vincent, Stéphanie, Hugues, Pierre (super organisateur de voyage culturel !), Alex, Gustavo, et mes compagnons de foot de ces derniers mois Florian, François, Pierre et les trois Maxime.

Enfin, pendant ces huit années d'étude, j'ai pu compter sur le soutien de ma famille et de mes amis que je remercie chaleureusement.



# Table des matières

<b>Nomenclature</b>	<b>13</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 État de l'art et contexte de l'étude</b>	<b>19</b>
1.1 Processus physique de formation du givre en vol . . . . .	20
1.2 Les systèmes de protection contre le givre . . . . .	21
1.2.1 Systèmes chimiques . . . . .	22
1.2.2 Systèmes mécaniques . . . . .	22
1.2.3 Systèmes thermiques . . . . .	23
1.3 Modélisation et outils numériques pour le givrage . . . . .	26
1.3.1 Modélisation de l'aérodynamique externe . . . . .	28
1.3.2 Modélisation de la trajectographie des gouttes d'eau surfondues . . . . .	28
1.3.3 Modélisation de la couche limite . . . . .	30
1.3.4 Modélisation de l'accrétion de givre et du ruissellement . . . . .	34
1.3.5 Modélisation des systèmes de protection thermiques . . . . .	37
1.3.6 Modélisation du détachement d'un bloc de givre . . . . .	39
1.4 Contexte et objectifs de la thèse . . . . .	40
<b>2 Un modèle tricouche pour les problèmes liés au givrage</b>	<b>43</b>
2.1 Motivations et principes généraux du modèle . . . . .	43
2.2 Hypothèses simplificatrices du modèle tricouche . . . . .	45
2.3 Modélisation du film ruisselant . . . . .	46
2.3.1 Équations générales . . . . .	46
2.3.2 Modèle de fermeture : théorie de la lubrification . . . . .	53
2.3.3 Bilan pour la couche du film ruisselant . . . . .	56
2.4 Modélisation de la couche de givre . . . . .	56
2.5 Modélisation du film statique . . . . .	58
2.6 Synthèse du chapitre : équations résolues pour le module d'accrétion de givre	59
2.6.1 Paroi sèche : $h_i = h_s = h_f = 0$ (régime <i>full evaporative</i> ) . . . . .	59
2.6.2 Film ruisselant : $h_i = h_s = 0$ (régime <i>running wet</i> ) . . . . .	60
2.6.3 Bloc de givre : $h_f = h_s = 0$ ( <i>rime ice accretion</i> ) . . . . .	60
2.6.4 Bloc de givre et film ruisselant : $h_s = 0$ ( <i>glaze ice accretion</i> ) . . . . .	61
2.6.5 Bloc de givre et film statique : $h_f = 0$ ( <i>rime ice + static film</i> ) . . . . .	61
2.6.6 Bloc de givre, film ruisselant et film statique ( <i>glaze ice + static film</i> ) . . . . .	62
2.6.7 Gestion des transitions entre les différents régimes . . . . .	63
2.7 Conclusion : intérêts et limites du modèle tricouche . . . . .	64

<b>3</b>	<b>Discrétisation des transferts de chaleur dans le modèle tricouche</b>	<b>67</b>
3.1	Motivation et principes généraux	68
3.2	Méthode intégrale approchée (MIA)	70
3.2.1	Présentation de la méthode	70
3.2.2	Étude du domaine de validité et des limites de la MIA	71
3.2.3	Conclusion sur la méthode intégrale approchée	77
3.3	Méthode de Galerkin (MG)	77
3.3.1	Principe général de la méthode	77
3.3.2	Choix des fonctions de base	81
3.4	Validations académiques	82
3.4.1	Méthode de calcul de la solution de référence	84
3.4.2	Premier cas test : propagation d'un front de fusion unidimensionnel	85
3.4.3	Second cas test : propagation d'un front de fusion bidimensionnel	88
3.5	Conclusion et forme finale du modèle tricouche	92
<b>4</b>	<b>Discrétisation en espace et en temps du modèle tricouche</b>	<b>95</b>
4.1	Méthode de volumes finis pour la discrétisation des équations de transport	95
4.1.1	Notations	96
4.1.2	Schéma de discrétisation de l'équation de conservation de la masse	98
4.1.3	Schéma de discrétisation pour l'équation de conservation de l'énergie	99
4.1.4	Cas particulier de l'approche bidimensionnelle	100
4.1.5	Remarques sur le traitement des conditions aux limites	101
4.2	Discrétisation temporelle du modèle tricouche	102
4.2.1	Développement d'un algorithme de point fixe	102
4.2.2	Optimisation de la vitesse de convergence de l'algorithme	107
4.2.3	Convergence de l'algorithme	110
4.2.4	Validation numérique de l'algorithme de point fixe	111
<b>5</b>	<b>Une méthode de Schwarz pour le couplage du modèles tricouche avec le modèle de thermique associé au système de protection</b>	<b>117</b>
5.1	Généralités et position du problème	118
5.1.1	État de l'art succinct sur les méthodes de Schwarz	118
5.1.2	Introduction du problème de couplage	119
5.2	Développement et analyse d'une méthode de Schwarz pour des problèmes couplés de thermique unidimensionnels	121
5.2.1	Développement d'un algorithme de Schwarz pour le problème instationnaire linéaire	121
5.2.2	Problème stationnaire non linéaire	127
5.2.3	Conclusion : construction d'un algorithme de Schwarz pour un problème de couplage de thermique unidimensionnel général	136
5.3	Application à des cas bidimensionnels de type couche mince	139
5.3.1	Présentation de l'algorithme	140
5.3.2	Validations numériques	141
<b>6</b>	<b>Applications en deux dimensions</b>	<b>149</b>
6.1	Présentation du code SLUSH2D et du module de couplage	149
6.1.1	Module SLUSH2D	150
6.1.2	Module de couplage SCHWARZ	153
6.2	Cas d'accrétion sur paroi froide	154

6.2.1	Validation du modèle tricouche à l'aide du modèle de Messinger et de données expérimentales . . . . .	154
6.2.2	Investigations numériques de l'influence de la conduction dans la paroi sur la forme du dépôt de givre . . . . .	157
6.3	Accrétion sur paroi chauffée . . . . .	164
6.3.1	Modélisation de l'écoulement d'un film d'eau liquide sur une aile chauffée . . . . .	164
6.3.2	Simulation d'un système d'antigivrage <i>bleed-air</i> et comparaisons expérimentales . . . . .	165
6.3.3	Simulation de regel sur une paroi chauffée ( <i>runback ice</i> ) . . . . .	169
6.4	Modélisation d'un dégivreur électrothermique . . . . .	173
6.4.1	Modélisation et validation de la propagation d'un front de fusion . . . . .	173
6.4.2	Modélisation complète d'un dégivreur électrothermique . . . . .	176
<b>7</b>	<b>Applications en trois dimensions</b>	<b>183</b>
7.1	Accrétion sur deux profils non chauffés . . . . .	183
7.2	Accrétion sur une paroi chauffée . . . . .	189
7.3	Conclusion sur les outils 3D . . . . .	190
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>191</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>193</b>
	<b>Annexes</b>	<b>201</b>
<b>A</b>	<b>Formule de Sonntag pour le calcul de la pression de vapeur saturante de l'eau</b>	<b>201</b>
<b>B</b>	<b>Description du code utilisé pour le calcul de la solution de référence en thermique avec changement de phase</b>	<b>203</b>
<b>C</b>	<b>Résolution d'un problème de chauffage académique</b>	<b>211</b>
<b>D</b>	<b>10 premières fonctions de base pour la méthode de Galerkin</b>	<b>215</b>
<b>E</b>	<b>Étude des propriétés de continuité en temps des solutions associées à la MIA et à la MG</b>	<b>221</b>
<b>F</b>	<b>Démonstration du principe du maximum pour le schéma associé à l'équation d'énergie du film</b>	<b>229</b>
<b>G</b>	<b>Interface graphique pour IGLOO2D</b>	<b>231</b>
<b>H</b>	<b>Profil GLC-305</b>	<b>235</b>



# Nomenclature

Sauf mention contraire, les notations utilisées dans le document sont celles définies ci-dessous.

## Lettres latines

$a$	Position de l'interface inférieure	m
$b$	Position de l'interface supérieure	m
$c, c_p$	Capacité calorifique	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$h$	Hauteur	m
$h_{tc}$	Coefficient d'échange thermique	$\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
$h_m$	Coefficient d'échange massique	$\text{kg.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
$L$	Chaleur latente	$\text{J.kg}^{-1}$
$Le$	Nombre de Lewis	
$M$	Nombre de Mach	
$\dot{m}$	Flux de masse par unité de surface	$\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
$p$	Pression	Pa
$Pr$	Nombre de Prandtl	
$r$	Résistance thermique ou facteur de récupération	$\text{m.K.W}^{-1}$
$Re$	Nombre de Reynolds	
$T$	Température	$^{\circ}\text{C}, \text{K}$
$V$	Vitesse	$\text{m.s}^{-1}$

## Lettres grecques

$\beta$	Taux de captation des gouttelettes	
$\mu$	Viscosité dynamique	Pa.s
$\lambda$	Conductivité thermique	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$\dot{\Phi}$	Flux de chaleur par unité de surface	$\text{W.m}^{-2}$
$\rho$	Masse volumique	$\text{kg.m}^{-3}$
$\tau, \tau_g$	Contrainte de cisaillement	Pa
$\omega$	Coefficient de couplage	$\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

**Indices**

conv	Convection
e	Extérieur à la couche limite
ev, v	Évaporation, Vaporisation
f	Film
i, ice	Givre ( <i>Ice</i> )
int	Intérieur
imp	Gouttelettes impactant la paroi
m	Fusion ( <i>Melting</i> )
rec	Récupération
s	Film Statique
w	Eau liquide ( <i>Water</i> )
wall	Paroi
$\infty$	Infini amont

**Exposants**

$n$	Pas de temps
-----	--------------

**Notations mathématiques**

$\Delta$	Laplacien, variation ou pas de discrétisation
$\nabla$	Gradient
$\nabla \cdot$	Divergence
$\hat{\cdot}$	Moyenne spatiale
$\tilde{\cdot}$	Grandeur adimensionnelle

**Abréviations**

ETIPS	Système de Protection ÉlectroThermique ( <i>ElectroThermal Ice Protection System</i> )	
IGLOO2D	<i>IcinG tooL bOx Onera</i> Chaîne de Calcul 2D de Givrage de l'ONERA	
IGLOO3D	Idem IGLOO2D en 3 dimensions	
<i>LWC</i>	Concentration des gouttelettes surfondues ( <i>Liquid Water Content</i> )	kg.m <sup>-3</sup>
MIA	Méthode Intégrale Approchée	
MG	Méthode de Galerkin	
<i>MVD</i>	Diamètre moyen des gouttelettes ( <i>Mean Volumetric droplet Diameter</i> )	m
SLUSH2D	<i>Several Layers Upon Some Heaters</i> Code 2D développé dans le cadre de cette thèse	
SLUSH3D	Idem SLUSH2D en 3 dimensions	



# Introduction

## Contexte général et objectif de l'étude

Dès le début du XX<sup>e</sup> siècle, le givrage a été reconnu comme risque majeur dans le domaine de l'aéronautique. En effet, la présence d'un dépôt de givre peut induire une surcharge de l'appareil, une diminution des performances aérodynamiques (plus particulièrement dans le cas où le dépôt se trouve sur une surface portante), des risques pour le moteur en cas d'injection de cristaux ou d'obturation des entrées d'air, ou encore le dysfonctionnement d'une sonde.

Par conséquent, les industriels de l'aviation développent depuis les années 1920 des systèmes de protection afin de se prémunir contre ces risques. Sur la grande majorité de la flotte mondiale, et y compris sur les avions très récents, les systèmes de protections utilisés sont des systèmes d'*antigivrage* à prélèvement d'air chaud. Lorsque l'avion rencontre des conditions givrantes, de l'air chaud est prélevé dans les moteurs (par exemple à la sortie du compresseur du turboréacteur) et injecté dans la zone à protéger (bord d'attaque de la voilure par exemple). Ces systèmes fonctionnent sans discontinuer, ce qui empêche la moindre formation de givre sur les zones protégées et leur confère donc une grande fiabilité. Ils possèdent en revanche l'inconvénient d'engendrer une importante surconsommation de carburant.

C'est pourquoi des systèmes de protection *électrothermiques* sont aujourd'hui à l'étude. Le principe est de positionner des résistances électriques dans les zones que l'on souhaite protéger. À moyen terme il est très probable qu'ils remplacent les systèmes à prélèvement d'air chaud car ils présentent de nombreux avantages. Le premier est de ne pas nécessiter le transport d'un fluide, ce qui permet de réduire significativement la masse et de s'affranchir des problèmes mécaniques (fuites, usure, *etc.*). Un deuxième avantage qui nous intéresse particulièrement dans le cadre de cette étude est que ces systèmes peuvent fonctionner en mode *dégivrage*. Le principe de ce régime de fonctionnement est de laisser se déposer un bloc de givre, jugé suffisamment petit pour ne pas présenter de problème majeur, avant d'activer les résistances. Cela entraîne la formation d'un film d'eau liquide entre la paroi et le bloc de givre et conduit à son détachement sous l'effet des forces aérodynamiques externes. Ce régime de fonctionnement permet de réduire significativement la consommation énergétique du système.

Actuellement ces systèmes sont très étudiés par les industriels et les centres de recherches liés à l'aéronautique grâce notamment à l'utilisation de souffleries givrantes. L'inconvénient de ce type d'essai est la difficulté de mise en œuvre et les coûts associés ; la simulation numérique est donc également utilisée comme aide à la conception. Outre le prix dérisoire d'un calcul numérique comparé à une expérience, l'intérêt est d'avoir accès à toutes les grandeurs locales, et également de pouvoir mener facilement des études paramétriques.

Historiquement, les scientifiques se sont d'abord intéressés à déterminer la puissance de

chauffage nécessaire à la prévention de la formation de givre, comme l'indique le titre d'un rapport de la NASA de 1947 (« *The Calculation of the Heat Required for Wing Thermal Ice Prevention in Specified Icing Condition* » [15]). Ensuite, ils se sont intéressés à la modélisation de la formation de givre sur une paroi non chauffée. La première approche a été proposée par Messinger [60] en 1953. Ce modèle fait depuis référence car il contient l'essentiel de la physique relative au processus de formation de givre. Il a depuis été largement amélioré et l'accrétion sur une paroi froide est encore un sujet d'étude très important. En particulier, les processus de ruissellement d'eau liquide sur un bloc de givre et les mécanismes de formation des rugosités sont mal compris à ce jour.

Aujourd'hui, en vue du dimensionnement des nouveaux systèmes de protection électrothermiques, les problématiques de l'accrétion sur une paroi chauffée et de l'arrachement de blocs de givre par les forces aérodynamiques sont des sujets très étudiés. L'une des difficultés de cette modélisation est la prise en compte en cours d'accrétion des transferts thermiques et des changements de phase dans le bloc de glace, dont la forme varie au cours du temps et qui peut fondre en partie sous l'effet de l'activation du dégivreur (et éventuellement se détacher). Les modèles existants et *a fortiori* les codes de calcul utilisés ne permettent pas de traiter simultanément l'ensemble de ces phénomènes.

L'objectif de cette thèse est de pallier ce manque en proposant une nouvelle approche capable de prendre en compte, dans un modèle unifié et instationnaire, l'ensemble des processus qui interviennent de manière couplée dans les problèmes liés au givrage en vol. Elle doit permettre en particulier de simuler à la fois l'accrétion sur paroi froide mais également le fonctionnement d'un dégivreur en mode antigivrage (chauffage stationnaire) ou dégivrage (chauffage instationnaire cyclique).

Elle doit également pouvoir s'intégrer facilement dans les chaînes de calcul existantes 2D et 3D développées par l'ONERA et utilisées dans un contexte industriel par les principaux acteurs du secteur aéronautique français.

En raison du caractère fortement multi-échelle des phénomènes de givrage (durée d'accrétion typique de l'ordre de quelques minutes, temps caractéristique de l'écoulement d'air de l'ordre du centième de seconde, et temps caractéristique d'impact d'une goutte de l'ordre de la microseconde), l'utilisation de modèles de type DNS traitant les phénomènes aux échelles microscopiques est exclue car elle conduirait à des temps de calcul trop importants. Avec la puissance de calcul disponible aujourd'hui, seule une approche macroscopique, intégrant un certain savoir-faire empirique, est envisageable. Ce point sera développé plus en détail dans le chapitre 1 consacré à l'état de l'art.

## Plan du manuscrit de thèse

Le document se décompose en sept chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit plus précisément la problématique du givrage en aéronautique, on présente les différents systèmes de protection et on donne un aperçu de l'état de l'art sur les différentes techniques de modélisation existantes.

Dans un second chapitre, nous proposons un modèle unifié pour l'accrétion, le ruissellement, les transferts thermiques et les changements de phase. Ce modèle repose sur une description à trois couches (ce qui lui vaut dans tout le document l'appellation *modèle tricouche*) du dépôt en paroi : une couche pour le bloc de givre, une pour le film ruisselant au-dessus (apparaissant lorsque les conditions extérieures ne sont pas suffisamment froides pour que toutes les gouttes qui se déposent gèlent totalement), et une dernière pour l'eau liquide confinée entre la paroi et le bloc de givre (pouvant apparaître lorsqu'un système de

protection thermique est activé).

Dans le troisième chapitre, on présente deux méthodes de discrétisation spatiale pour la prise en compte des transferts de chaleur à l'intérieur du bloc de givre. La première est une méthode intégrale, la seconde une méthode de Galerkin. Elles sont validées sur des problèmes académiques et comparées entre elles.

Le quatrième chapitre est consacré à la description des méthodes numériques retenues pour la discrétisation spatiale (hormis les transferts thermiques, traités dans le chapitre 3) et temporelle des équations du modèle tricouche. Des validations élémentaires sont également présentées.

Le cinquième chapitre fait l'objet du couplage entre le modèle tricouche et le modèle de thermique associé au dégivreur. Comme il est indispensable en pratique que les deux modèles puissent être implantés dans deux codes de calcul indépendants, la méthode de couplage proposée est une méthode itérative correspondant à une variante particulière de la méthode de Schwarz sans recouvrement. Nous analysons en détail les conditions théoriques de convergence de cet algorithme dans le cas de problèmes plus simples (unidimensionnels) et nous appliquons les résultats obtenus à des problèmes réels trop complexes pour être étudiés d'un point de vue théorique.

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux applications des modèles et méthodes numériques développés dans la thèse à différents problèmes de givrage. Le chapitre 6 traite des applications bidimensionnelles et le chapitre 7 des applications tridimensionnelles. Ne disposant que de peu de données expérimentales, les résultats obtenus ne permettent pas de valider totalement les hypothèses de modélisation utilisées, mais ils prouvent la faisabilité, grâce à l'approche développée au cours de cette thèse, de calculs complexes couplant l'ensemble des phénomènes physiques intervenant dans le processus de givrage sur paroi chauffée ou non.



# Chapitre 1

## État de l’art et contexte de l’étude

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Processus physique de formation du givre en vol</b>	<b>20</b>
<b>1.2</b>	<b>Les systèmes de protection contre le givre</b>	<b>21</b>
1.2.1	Systèmes chimiques	22
1.2.2	Systèmes mécaniques	22
1.2.3	Systèmes thermiques	23
<b>1.3</b>	<b>Modélisation et outils numériques pour le givrage</b>	<b>26</b>
1.3.1	Modélisation de l’aérodynamique externe	28
1.3.2	Modélisation de la trajectographie des gouttes d’eau surfondues	28
1.3.3	Modélisation de la couche limite	30
1.3.4	Modélisation de l’accrétion de givre et du ruissellement	34
1.3.5	Modélisation des systèmes de protection thermiques	37
1.3.6	Modélisation du détachement d’un bloc de givre	39
<b>1.4</b>	<b>Contexte et objectifs de la thèse</b>	<b>40</b>

---

La formation de givre en aéronautique est un phénomène souvent lié à la présence de gouttelettes surfondues dans les nuages. Ces particules, qui sont à l’état liquide malgré une température inférieure à la température de fusion, se trouvent dans un équilibre *métastable* qui est rompu lors de l’impact sur la surface de l’avion, ce qui conduit à l’accrétion de givre. Ce problème a été identifié dès le début de l’aviation, bien que dans un premier temps, les avions n’étant pas équipés de système de protection, les pilotes cherchaient à tout prix à éviter les conditions de vol givrantes. Dans un rapport de 1929, Smith[77] décrit l’ensemble des risques météorologiques sur la voie aérienne New York-Chicago, en insistant particulièrement sur ceux liés au givrage (« *ice seems to be the greatest hazard to aviation* »). En particulier, il met en garde les pilotes contre les éventuels risques de crash lorsque l’avion est en phase d’atterrissage : « *by overloading the plane with ice and at the same time decreasing its forward speed [...] the plane will actually fall out of the air if the pilot has not been wise enough to land before this moment arrives* ».

À partir des années 1960, l’*Aeronautical Information Manual* [31] (manuel officiel aux États-Unis et au Canada pour les informations de vol et les procédures) décrit quelques risques liés au givrage conduisant à la dégradation des performances aérodynamiques, comme la diminution de la poussée et de la portance, l’augmentation de la traînée et de la masse. Si un avion n’est pas équipé de système de protection lui permettant de se prémunir de ces risques, alors le pilote rencontrant des conditions givrantes doit en sortir, soit en se déroutant, soit en modifiant son altitude. Dans le cas contraire, les risques et les mesures à prendre sont classifiés selon quatre catégories :

- **Risque de trace**, lorsque le givre devient perceptible mais que le risque est suffisamment faible pour que le pilote n'ait pas à activer un système de protection.
- **Risque léger** (*light*), lorsque la couche de givre peut créer un problème si l'avion traverse des conditions givrantes de façon prolongée (plus d'une heure). Dans ce cas, un système de protection est utilisé de façon occasionnelle.
- **Risque modéré** (*moderate*), lorsque les conditions givrantes sont telles que même des temps courts d'exposition sont dangereux. Un système de protection est alors activé en permanence.
- **Risque sévère** (*severe*), lorsque le système de protection ne suffit pas à protéger l'avion. Dans ce cas, l'appareil est immédiatement détourné.

Depuis les premiers temps de l'aéronautique, ces systèmes n'ont cessé de se perfectionner pour atteindre aujourd'hui des niveaux de performance et de fiabilité bien supérieurs. Néanmoins, ces systèmes représentent une part importante de la consommation énergétique des appareils et les avionneurs développent toujours de nouvelles technologies afin de les améliorer.

## 1.1 Processus physique de formation du givre en vol

Sauf cas particuliers<sup>1</sup>, le givre qui se forme en condition de vol résulte de la solidification de gouttelettes surfondues contenues dans les nuages. Pour que ce processus puisse avoir lieu, la chaleur latente des gouttes doit être absorbée par l'environnement. Les mécanismes permettant cette extraction de chaleur sont l'évaporation, les échanges convectifs avec l'air de la couche limite et les échanges conductifs avec la paroi (ou avec le bloc de givre déjà présent sur la paroi). Ces mécanismes dépendent des conditions extérieures, et en premier lieu de la température.

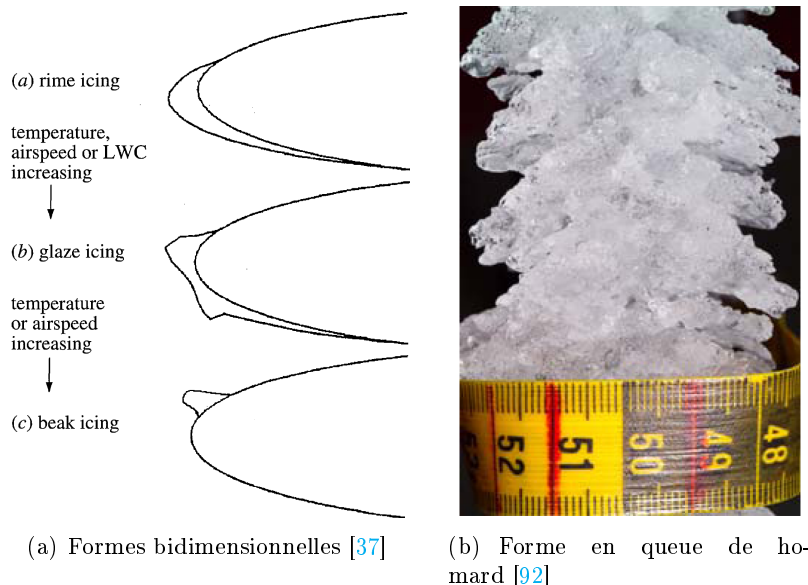


FIGURE 1.1 – Principales formes de givre dans le domaine de l'aviation

1. On peut au moins en citer deux : le premier est le cas des cristaux de glace présents dans les conditions extrêmes d'orage. Le second peut se produire lorsque la température ambiante est supérieure à la température de fusion et que l'air est très sec. Dans ce cas, l'évaporation est très importante, et elle peut suffire à faire geler une partie de l'eau.

Lorsque celle-ci est très inférieure à la température de fusion, alors la gouttelette peut se solidifier entièrement, et de façon quasiment instantanée, ce qui a pour conséquence d'emprisonner des bulles d'air. Le givre ainsi formé est qualifié de *givre blanc* (*rime icing*), car il est opaque et rugueux. Il a également la propriété d'être cassant et peu dense. Généralement, ce type de givre conduit à des formes proches de celle de l'objet sur lequel se produit l'accrétion (voir figure 1.1(a)(a)). En revanche, lorsque la température est proche de la température de fusion, les processus d'extraction de la chaleur ne sont pas suffisants pour que l'intégralité de la chaleur latente des gouttelettes soit libérée. Ainsi, une partie demeure à l'état liquide et forme un film d'eau qui, entraîné par l'écoulement externe, ruisselle le long de la paroi. Ce film peut éventuellement geler, mais contrairement au cas du givre blanc, cette solidification s'effectue à l'équilibre thermodynamique, et il y a donc très peu de bulles d'air piégées. C'est pourquoi ce givre est translucide, plus dense et plus résistant, il est ainsi qualifié de *givre transparent* ou *verglas* (*glaze icing*). Ce type de givre conduit généralement à des profils « en corne », car moins de givre se forme au niveau de la ligne d'arrêt aérodynamique puisque l'extraction de chaleur par l'écoulement externe est moins efficace (voir figure 1.1(a)(b)).

De plus, quand on considère des parois tournantes (pales d'hélices d'hélicoptère par exemple), il peut y avoir accrétion de *forme en bec* (*beak icing*, voir figure 1.1(a)(c)) [37]. Enfin, l'accrétion sur des ailes avec forte flèche peut conduire à des formes complexes tridimensionnelles dites en « en queue de homard » (voir figure 1.1(b)).

Pour pouvoir certifier un appareil, l'avionneur doit démontrer que celui-ci peut voler en toute sécurité dans certaines enveloppes de vol en conditions givrantes. L'annexe C du JAR 25 [46] en définit deux, une pour l'exposition continue aux conditions givrantes, et une autre pour l'exposition intermittente. Ces enveloppes font intervenir la teneur en eau (*LWC* pour *liquid water content*, en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ), le diamètre moyen des gouttes (*MVD* pour *median volumetric diameter*), la pression et la température de l'air ambiant. Bien entendu, cette enveloppe est plus large pour l'exposition intermittente. Il faut remarquer que la limite pour le MVD dans l'annexe C est de  $50\ \mu\text{m}$ , mais que cette valeur peut être dépassée dans certains nuages à cause de la présence de grosses gouttes (*SLD* pour *Supercooled Large Droplets*, qui ont par définition un diamètre supérieur à  $50\ \mu\text{m}$ ) voire de gouttes de pluie, pouvant dépasser le demi millimètre. En particulier, l'enquête du NTSB a montré que les SLD étaient en partie responsables du crash de l'ATR 4184 dans l'Indiana en 1994 (voir le rapport d'accident [66]). En effet, comme ces gouttes sont plus inertielles, elles ont pu se déposer sur des zones non protégées. C'est pourquoi, une extension de l'annexe C est prévue pour les prochaines années.

Afin de voler dans les conditions définies par cette annexe, les avions doivent être équipés de systèmes de protection dont nous faisons une brève revue dans le paragraphe suivant. Pour plus de détails sur ces systèmes, le lecteur est invité à se référer à la thèse de Bennani [13].

## 1.2 Les systèmes de protection contre le givre

Comme expliqué ci-dessus, le givrage a très tôt été reconnu comme risque majeur pour l'aéronautique, mais cependant, en 1929, Carroll *et al.* [21] notent que la sécurité des avions vis-à-vis de ce problème n'est pas assurée (« safety [...] lies in avoidance »). Depuis, de nombreux systèmes de protection contre le givre ont été conçus.

Il existe deux régimes d'utilisation de ces systèmes :

- Mode antigivrage, dont le principe est de se protéger contre toute formation de givre.

Ces modes d'activation sont les plus fiables mais également les plus consommateurs d'énergie, puisqu'ils requièrent une activation permanente.

- Mode dégivrage, dans lequel la formation d'une fine couche de glace est tolérée, puis enlevée de façon cyclique. L'avantage de ces systèmes est qu'ils fonctionnent par intermittence et permettent une réduction de la consommation.

Ces systèmes se déclinent en trois types : chimique, mécanique et thermique.

### 1.2.1 Systèmes chimiques

Ils peuvent être de type passif ou actif.

Le principe des systèmes passifs est de couvrir les zones que l'on souhaite protéger de la formation de givre avec des *revêtements glaciophobes*<sup>2</sup>, comme du silicone. Le principal problème de ces technologies, comme le résume Laforte *et al.* [51], est leur tenue dans le temps (« *this solution cannot be considered permanent because of the gradual degradation of the surface caused by successive de-icing operation* »). Des revêtements super-hydrophobes sont également à l'étude. Le principe est de maximiser l'angle de contact des gouttes d'eau qui impactent la surface afin qu'elles rebondissent ou s'écoulent rapidement et ne puissent pas geler.

Concernant les systèmes actifs, le principe est d'injecter des fluides antigivrants (comme de l'éthylène glycol) via une surface poreuse. Ils sont essentiellement utilisés pour dégivrer les avions au sol avant le décollage.

### 1.2.2 Systèmes mécaniques

Leur principe est d'expulser un bloc de givre déjà accréte grâce à une déformation de la surface. Ainsi, ces systèmes ne fonctionnent qu'en mode dégivrage. Ils se déclinent en deux types, les boudins gonflables et les systèmes électromécaniques.

Les systèmes de boudins gonflables (*inflating boots*) firent leur apparition à partir des années 1930 sur les avions, mais au départ ils étaient très rudimentaires puisque l'ingénieur à bord devaient gonfler les boudins avec une pompe à vélo [56].

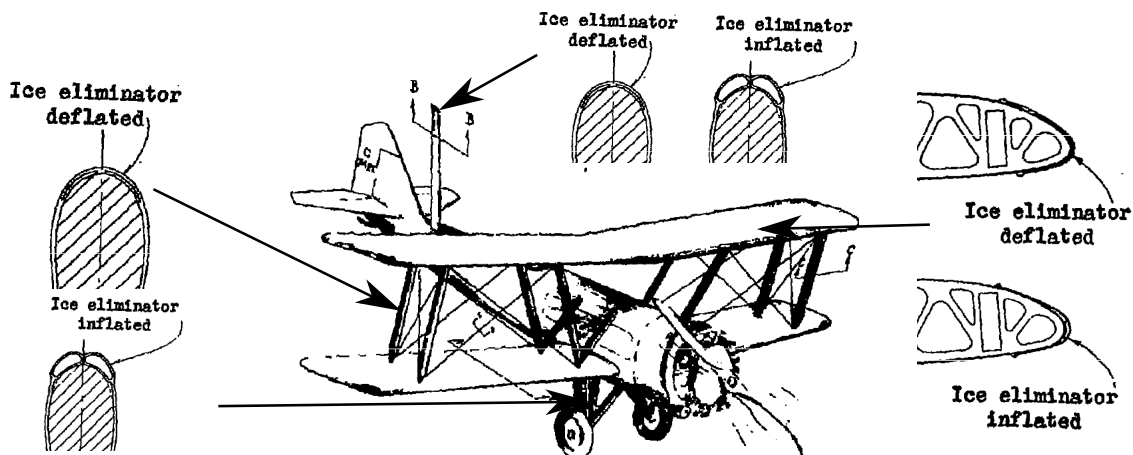


FIGURE 1.2 – Systèmes de protection mécaniques pour les bords d'attaque des voilures, bielles et émetteurs radio [34]

2. Ce terme est la meilleure traduction trouvée dans la littérature française d'*icephobic coating* qui désigne un matériau sur lequel le givre s'accréte très peu faute de cohésion avec le revêtement.



Ensuite, ces systèmes se sont perfectionnés et sont maintenant actionnés de façon mécanique, ce qui permet notamment un gonflage plus rapide et donc une meilleure efficacité du système. Aujourd'hui, leur utilisation se limite essentiellement aux avions de petite taille.

Le principe des systèmes électromécaniques est de provoquer le détachement du givre en créant un déplacement très rapide de la surface. Il en existe de deux types. Le premier comporte deux couches de conducteur, une statique et l'autre mobile. Pour activer le système, on envoie un pulse électrique très énergétique dans chacun des conducteurs de manière à créer une importante force de répulsion. Le second système utilise des ultrasons afin de faire vibrer la surface.

### 1.2.3 Systèmes thermiques

Le principe des systèmes thermiques est de chauffer les zones que l'on souhaite protéger. Ils peuvent être utilisés en antigivrage ou en dégivrage. Dans les deux cas, le risque de ces systèmes est d'induire la formation d'un film d'eau liquide ruisselant sur la paroi pouvant geler sur une zone non protégée (*runback ice*) ; il est alors très difficile de faire détacher ce bloc. On comprend donc l'importance pour les aviateurs de bien dimensionner les systèmes de protection pour éviter ce type de déconvenues.



FIGURE 1.3 – Exemple de formation de *runback ice* [96]. L'écoulement est dirigé de gauche à droite, et la zone protégée se trouve à gauche.

Ces systèmes se décomposent en deux types : les systèmes à gaz chauds et les systèmes électrothermiques.

#### Systèmes à gaz chauds

Le principe est de prélever la chaleur des moteurs afin de chauffer les surfaces à protéger. L'idée de ces systèmes a germé dès les années 1920 [21]. À cette époque, les ingénieurs constatent qu'il est possible de protéger le bord d'attaque de la formation de givre mais émettent des doutes quant à la capacité de protéger l'intégralité de la voilure (« *the formation may be expected farther back along the chord* »). Pour pallier cela, Theodorsen [85] présente en 1931 des études théoriques (notamment sur les coefficients d'échange thermiques) et expérimentales pour les systèmes de protection thermique. Il classe les systèmes à prélèvement d'air en trois catégories :

- Les systèmes à prélèvement direct, dont le principe est d'extraire les gaz chauds du moteur directement vers la zone à protéger. Les problèmes majeurs de ces systèmes sont d'une part que les gaz sont corrosifs, ce qui implique un renouvellement fréquent

des installations, et d'autre part que ce genre de système expose l'avion à des risques importants d'incendie.

- Les systèmes fonctionnant avec de l'air chaud, soit en utilisant l'air permettant le refroidissement du moteur et en l'injectant dans la voilure grâce à un *fan*, soit en utilisant un second système pour chauffer l'air, ou en utilisant une combinaison des deux.
- Les systèmes fonctionnant avec de l'eau vaporisée grâce à la chaleur du moteur et injectée dans la voilure.

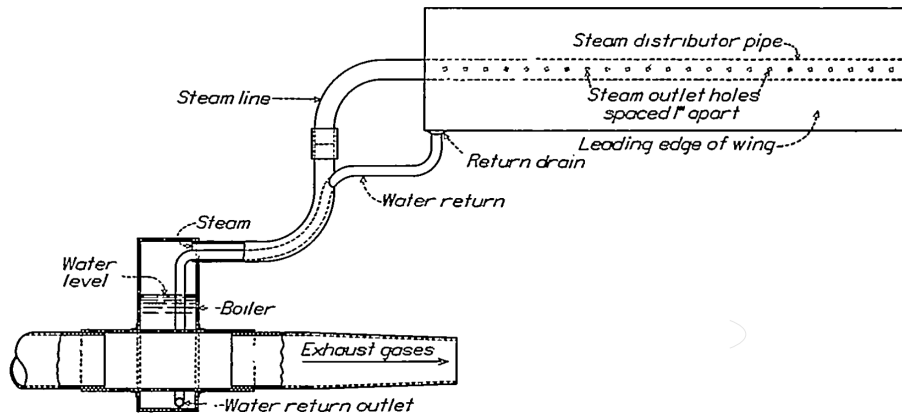


FIGURE 1.4 – Système d'antigivrage à vapeur d'eau [85]

Cependant, ces systèmes sont très peu utilisés durant les 10 années suivantes en raison de leur incapacité à répartir correctement la chaleur sur toute la surface à protéger et donc à se prémunir contre le *runback ice*.

En 1942, l'avion Ju 88 [70] est équipé d'un système avec une architecture novatrice pour l'époque ; de l'air est chauffé près du moteur grâce à des échangeurs de chaleur puis éjecté via des conduites vers les zones à protéger. Ce système a fait ses preuves lors d'essais en vol, y compris en conditions givrantes « sévères » .

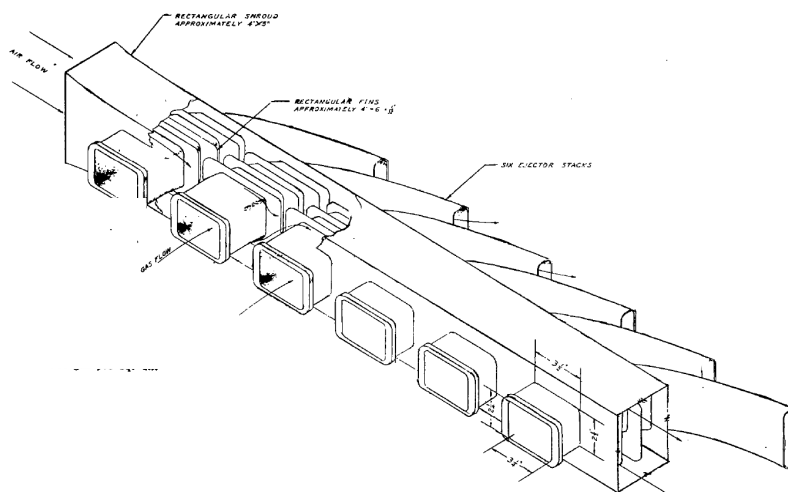


FIGURE 1.5 – Système d'antigivrage par échangeur de chaleur du Ju88 [70]

Dans les années 1940, l'essor des turboréacteurs engendre un nouveau problème pour le givrage ; du givre peut se former dans les entrées d'air, ce qui provoque une réduction

de poussée voire dans les cas les plus extrêmes l'extinction des moteurs. Ces problèmes stimulent alors le développement de systèmes permettant de prélever des gaz chauds dans le compresseur et de les réinjecter en amont. Ces systèmes s'avèrent néanmoins très consommateurs d'énergie, en particulier lorsque le temps d'exposition de l'avion à des conditions givrantes est important. C'est pourquoi, à partir des années 1950 [40], NACA s'intéresse à une utilisation de ces systèmes en mode dégivrage.

Aujourd'hui, ces systèmes ont largement été améliorés et, selon le type de moteur l'air peut être prélevé dans les étages basse ou haute pression [38] avant d'être injecté dans des tubes piccolo. Ils équipent la grande majorité des avions commerciaux, mais seront dans le futur probablement remplacés par des systèmes électrothermiques, qui devraient être plus efficaces car on pourra optimiser leur utilisation en mode dégivrage.

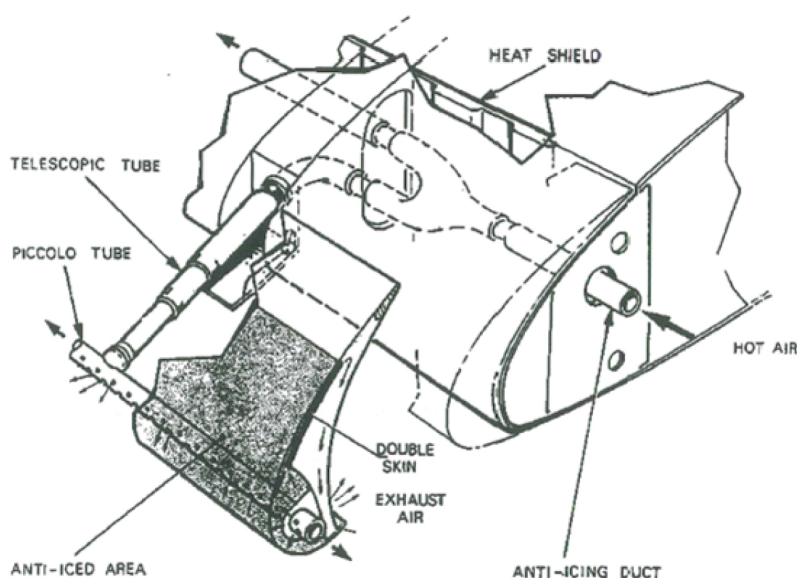


FIGURE 1.6 – Système d'antigivrage avec des tubes piccolo

### Systèmes électrothermiques (ETIPS)

Le principe des systèmes de protection électrothermiques (ETIPS pour *ElectroThermal Ice Protection System*) est de placer des résistances électriques dans les zones que l'on souhaite protéger contre le givre.

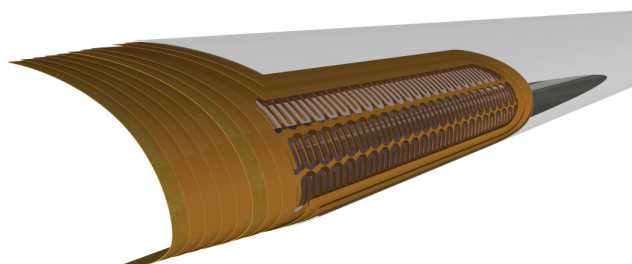


FIGURE 1.7 – Illustration d'un ETIPS (source FMLC <http://www.fmlc.nl/>)

Afin de les isoler électriquement, ces résistances sont, par exemple, composées de nichrome et entourées par une enveloppe de tissus de verre, cette dernière étant entourée de

néoprène.

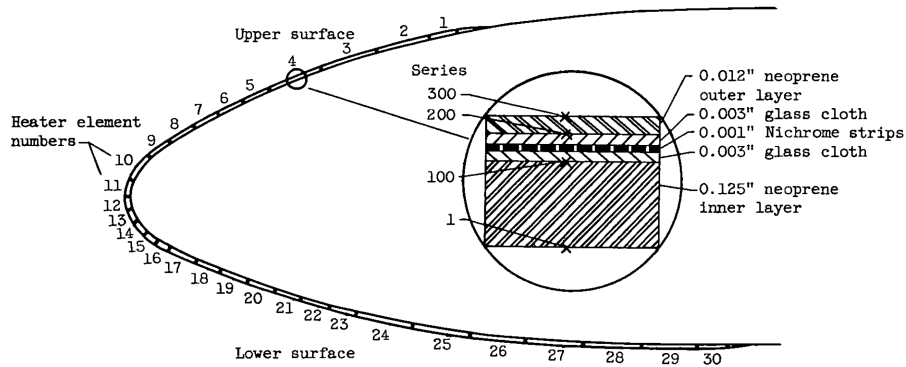


FIGURE 1.8 – Exemple de la répartition des couches dans un ETIPS [57]

Bien que cette technologie trouve ses origines dans les années 1930, elle a dans un premier temps été écartée par les aviateurs car les générateurs électriques étaient considérés trop lourds (« *weight [...] would be excessive* ») [85]. Aujourd'hui, dans le monde aéronautique, la recherche sur ces technologies est très importante car ils permettent une utilisation très souple en mode dégivrage, ce qui permet d'optimiser la consommation. Pour des raisons de sûreté, le bord d'attaque est toujours antigivré ; la(es) résistance(s) concernée(s), baptisée(s) *parting strip(s)*, fonctionne(nt) donc sans discontinuer dès que l'avion est soumis à des conditions givrantes modérées. Au-dessus des autres résistances, on autorise la formation d'une fine couche de givre, et leur activation périodique permet de faire apparaître un film d'eau liquide sous le bloc de givre, qui peut ainsi être arraché sous l'effet des forces aérodynamiques externes (pression et cisaillement). L'exemple d'un cycle, dans lequel la *parting strip* est la résistance C, est présenté figure 1.9.

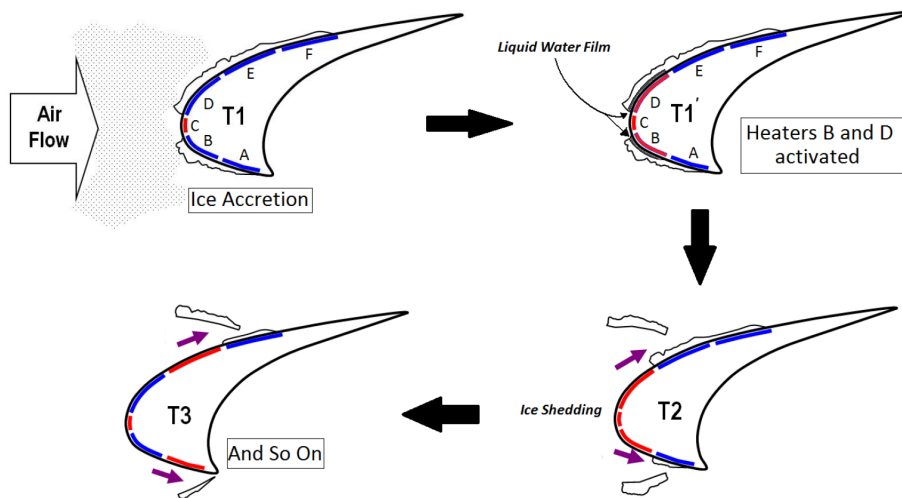


FIGURE 1.9 – Cycle typique d'un ETIPS en mode dégivreur [13]

### 1.3 Modélisation et outils numériques pour le givrage

Afin de certifier les avions et de dimensionner les systèmes de protection contre le givre, les industriels utilisent divers moyens d'essais expérimentaux, tels que des essais en vol ou

en soufflerie. Les principaux inconvénients des moyens expérimentaux sont la complexité de mise en œuvre, les coûts associés et la disponibilité des installations, car il existe dans le monde relativement peu de souffleries capables de reproduire des conditions givrantes. La simulation numérique est un outil efficace qui permet de pré-dimensionner les systèmes de protection, d'effectuer des analyses paramétriques et de connaître l'ensemble des grandeurs physiques locales, telles que les vitesses, pressions et températures, pour des coûts très modérés. Depuis les années 1980, plusieurs codes de givrage ont été développés dans le monde. Les principaux sont LEWICE (NASA) [99], ONICE (ONERA) [41, 42], TRAJICE (DERA) [36], CANICE (École Polytechnique de Montréal) [68], 2DFOIL-ICE (CIRA) [28] et FENSAP-ICE (Université de McGill) [11]. À l'ONERA, une nouvelle suite logiciel de givrage, **IGLOO2D** (IGLOO3D pour la dimension 3), est actuellement en développement.

La structure de tous ces codes est similaire, elle comporte quatre solveurs indépendants qui s'exécutent de façon chaînée.

1. **Solveur d'aérodynamique externe.** Ce solveur permet de calculer les grandeurs aérodynamiques de la phase gazeuse (l'air). On considère que la concentration massique de l'eau est suffisamment faible pour qu'elle n'ait pas d'effet sur la phase gazeuse, par conséquent les équations résolues sont celles de la mécanique des fluides monophasiques.
2. **Solveur de trajectographie.** Une fois que les grandeurs aérodynamiques de la phase gazeuse sont connues, il faut évaluer les grandeurs relatives à la phase liquide. Cela permet de déterminer les zones de la paroi sur lesquelles les gouttes vont se déposer, et donc les endroits où elles sont susceptibles de geler ou de ruisseler. C'est le rôle du solveur de trajectographie, qui permet de calculer les trajectoires des gouttes en fonction de leurs caractéristiques (diamètre notamment) et du champ de vitesse de la phase gazeuse.
3. **Solveur de couche limite.** Ce solveur permet de modéliser les échanges thermiques et massiques entre la paroi et l'écoulement externe, ainsi que les forces de cisaillement exercées par l'air.
4. **Solveur d'accrétion.** Ce solveur permet de calculer la forme du dépôt de givre sur la paroi, en fonction des données calculées par les trois précédents. Il peut être couplé à un solveur modélisant le système de protection.

Il est clair que la forme de givre influe à son tour sur l'aérodynamique externe, ce qui implique un bouclage entre l'ensemble de ces solveurs. On représente schématiquement une chaîne de givrage sur la figure 1.10.

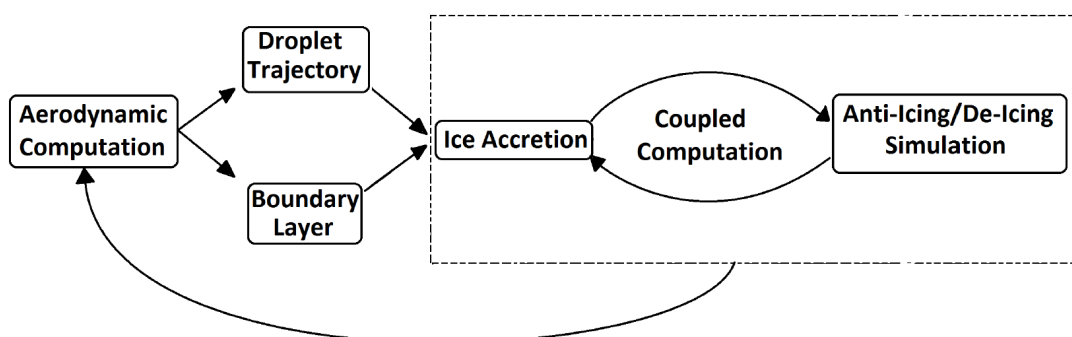


FIGURE 1.10 – Structure générale d'un code de givrage [13]

### 1.3.1 Modélisation de l'aérodynamique externe

Les grandeurs aérodynamiques de la phase gazeuse, tels que les champs de vitesse, de pression et de masse volumique peuvent être évaluées avec les équations de Navier-Stokes, d'Euler ou du potentiel de vitesse, en fonction des contraintes de temps de calcul et de la précision requise. Dans la chaîne de calcul IGLOO2D, on utilise selon le nombre de Mach de l'écoulement les équations d'Euler ou du potentiel de vitesse, ce qui permet d'éviter l'utilisation d'un maillage raffiné proche de la paroi, nécessaire pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

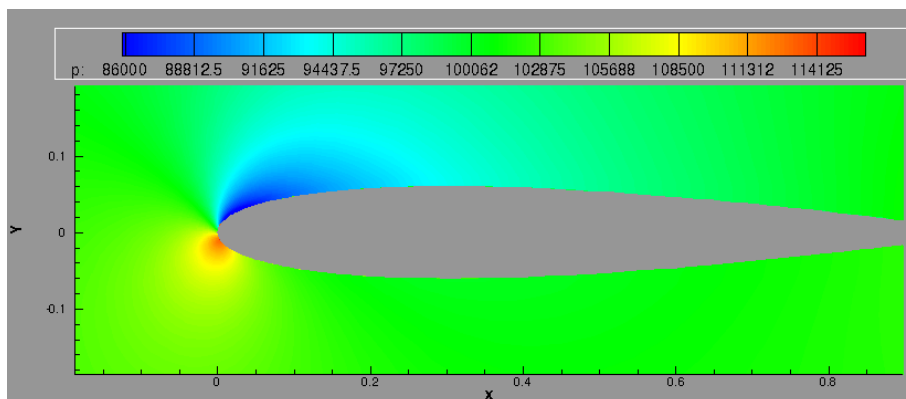


FIGURE 1.11 – Champ de pression Euler sur un profil lisse (IGLOO2D)

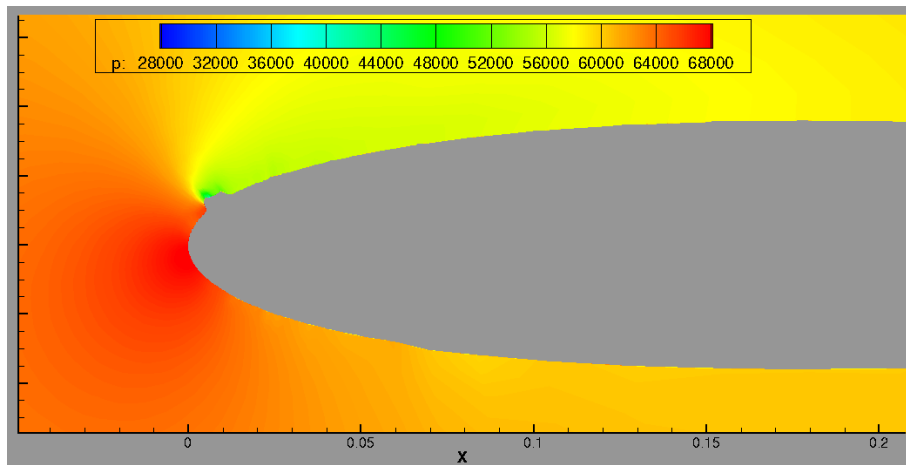


FIGURE 1.12 – Champ de pression Euler dans un cas avec *runback ice* (IGLOO2D)

### 1.3.2 Modélisation de la trajectographie des gouttes d'eau surfondues

Lorsque les grandeurs de la phase gazeuse ont été calculées, on doit effectuer un calcul de trajectographie afin de déterminer les zones d'impact des gouttelettes sur la paroi, et donc les endroits où elles sont susceptibles de se solidifier. Les gouttes sont supposées sphériques car elles sont suffisamment petites pour que les forces de tension de surface soient grandes devant les forces aérodynamiques. De plus, la rétroaction des gouttes sur l'écoulement d'air est supposée négligeable, tout comme l'interaction entre les gouttes. Il existe deux grandes classes de méthode pour le calcul de trajectographie, les méthodes eulériennes et lagrangiennes.

Dans les méthodes lagrangiennes, les particules sont suivies individuellement. Pour calculer leurs trajectoires, on applique la seconde loi de Newton ; les forces extérieures s'appliquant sur les particules sont les forces de traînée et de gravité, bien que cette dernière puisse la plupart du temps être négligée. La force de traînée est calculée grâce à un coefficient de traînée dépendant du nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la goutte et sa vitesse relative avec l'air.

Les méthodes eulériennes consistent à modéliser la phase dispersée (l'eau liquide) comme une phase continue. Pour ce faire, on introduit la grandeur fraction volumique de liquide, souvent notée  $\alpha$ , qui se définit localement comme le rapport entre le volume de l'eau et le volume total. Ainsi, les équations lagrangiennes sont transformées en équations de transport eulériennes sur  $\alpha$  et sur la quantité de mouvement associée aux gouttes.

Une fois que les trajectoires sont calculées, on peut déterminer le taux d'impact de gouttelettes, c'est-à-dire la masse d'eau liquide impactant le solide, par unité de temps et de surface  $\dot{m}_{\text{imp}}$  ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Dans la communauté givrage, il est courant de travailler avec le *taux de captation*  $\beta$  (*collection efficiency*), défini par

$$\beta = \frac{\dot{m}_{\text{imp}}}{V_{\infty} LWC} \quad (1.1)$$

$\beta$  s'interprète donc comme le rapport entre le taux d'impact de gouttelettes et le taux d'impact qu'il y aurait si la paroi était perpendiculaire à l'écoulement d'air et si les gouttelettes n'étaient pas déviées. Une autre interprétation est de considérer une surface  $\Delta S_{\infty}$  à l'infini amont, traversée par des gouttes, ainsi que la surface  $\Delta S$  correspondant à la zone d'impact des gouttes traversant  $\Delta S_{\infty}$  (voir figure 1.13). Ainsi,  $\beta$  peut s'écrire

$$\beta = \frac{\Delta S_{\infty}}{\Delta S} \quad (1.2)$$

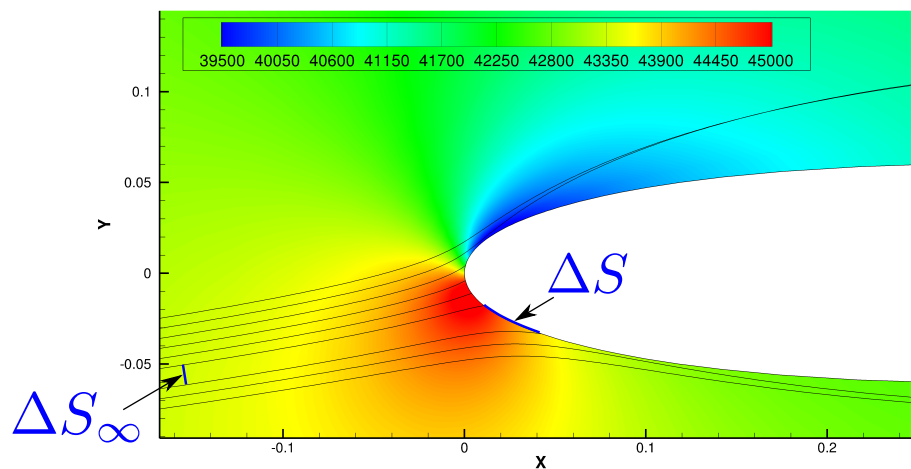


FIGURE 1.13 – Champ de pression Euler et trajectoire des gouttes (IGLOO2D)

L'intérêt de la grandeur  $\beta$  est qu'elle ne dépend pas de la teneur en eau  $LWC$ , car on fait l'hypothèse que les gouttelettes n'interagissent pas entre elles.

Remarquons que dans le cas d'une aile soumise à un écoulement externe, le taux de captation est toujours inférieur à 1, et sa valeur maximale est atteinte au niveau du point d'arrêt. En revanche, pour un écoulement interne, par exemple sur un obstacle placé dans un convergent de soufflerie, ce taux peut atteindre des valeurs supérieures à 1.

### 1.3.3 Modélisation de la couche limite

Ce modèle permet de déterminer les échanges entre l'écoulement d'air et la paroi (ou l'écoulement et le bloc de givre). Il peut ne pas être requis lorsque l'on utilise un solveur Navier-Stokes pour l'aérodynamique externe, car si le maillage est suffisamment raffiné près de la paroi, les flux de chaleur et d'évaporation, ainsi que le cisaillement du gaz peuvent être calculés directement. Dans les applications en givrage, comme on ne connaît pas *a priori* la température de surface, les échanges de chaleur et de masse avec la couche limite se modélisent par l'intermédiaire de coefficients d'échange. De même, la contrainte de cisaillement du gaz est modélisée avec un coefficient de friction. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\text{conv}} &= h_{tc}(T_{\text{rec}} - T_s) \\ \dot{m}_{\text{ev}} &= \rho_e h_m (Y_{vs}(T_s) - Y_{ve}(T_e)) \\ \tau_g &= \frac{1}{2} C_f \rho_e u_e^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

où  $\dot{\Phi}_{\text{conv}}$  est le flux de chaleur ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ),  $\dot{m}_{\text{ev}}$  le flux d'évaporation ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ ), et  $\tau_g$  le cisaillement du gaz (Pa).  $h_{tc}$  et  $h_m$  sont les coefficients d'échange thermique et massique,  $T_{\text{rec}}$  la température de récupération et  $T_s$  la température à la surface (la paroi ou le bloc de givre).  $Y_{vs}$  et  $Y_{ve}$  sont les fractions massiques de vapeur à la surface et à l'extérieur de la couche limite, qui ne dépendent que des températures (voir annexe A). Enfin  $\rho_e$  et  $u_e$  sont la masse volumique et la vitesse de l'air à l'extérieur de la couche limite.

Pour les applications en givrage, il est courant d'avoir des expressions de  $\dot{\Phi}_{\text{conv}}$  et  $\dot{m}_{\text{ev}}$  qui dépendent de  $T_s$  uniquement. Étant donné que toutes les grandeurs à l'extérieur de la couche limite sont connues grâce au calcul d'aérodynamique, il suffit donc grâce à (1.3) de déterminer une expression pour  $h_{tc}$ ,  $T_{\text{rec}}$  et  $h_m$ , et éventuellement pour  $C_f$  qui est nécessaire dans certains modèles<sup>3</sup>.

Ce problème peut se traiter soit en résolvant directement les équations de couche limite, soit en considérant des méthodes intégrales.

#### 1.3.3.1 Méthodes de résolution directe pour le calcul de $C_f$ , $h_{tc}$ et $T_{\text{rec}}$

Dans cette approche, on résout directement les équations de couche limite. Généralement, pour des raisons de temps de calcul, cette résolution ne se fait pas en DNS, mais en utilisant un modèle pour la turbulence. Il existe dans la littérature de nombreux modèles, qui se déclinent en deux grandes catégories, les modèles algébriques et les modèles avec des grandeurs transportées.

Pour les modèles algébriques [7], on fait l'hypothèse que l'échelle de longueur caractéristique ne dépend que de la géométrie de l'écoulement (distance à la paroi, épaisseur caractéristique de la couche limite, etc.).

Le modèle de van Driest [91] est l'un des plus simples existants. Il est basé sur un concept de longueur de mélange dépendant de la distance à la paroi et l'épaisseur de couche limite. Grâce à cette longueur de mélange, on peut estimer une viscosité turbulente que l'on ajoute à la viscosité réelle dans les équations de couche limite.

Pour les modèles avec grandeurs transportées, le modèle le plus simple est celui de Spalart et Allmaras [80, 81, 82] du transport de la viscosité turbulente. Viennent ensuite les célèbres modèles à deux équations tels que le modèle  $k - \varepsilon$  qui relie la viscosité turbulente à l'énergie cinétique de turbulence et le taux de dissipation [48, 53, 23], le modèle  $k - \omega$

3. Par exemple, dans le modèle de Messinger (le modèle le plus simple d'accrétion de givre, voir ci-dessous), la connaissance de ce coefficient n'est pas requise.



remplaçant la dissipation par la dissipation spécifique [97], le modèle  $k - L$  où l'énergie cinétique et une longueur caractéristique de turbulence sont transportées [78], ou encore le modèle  $k - \varphi$ , où la longueur de turbulence est estimée grâce à la grandeur  $\varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$  [27, 6].

De très nombreux auteurs ont proposé des extensions de ces modèles, qu'ils soient algébriques ou non. Ils sont encore aujourd'hui un très vaste sujet d'étude. Quel que soit le modèle utilisé, un modèle de transition laminaire-turbulent est nécessaire pour savoir à partir de quelle abscisse le modèle de turbulence doit être appliqué. Physiquement, cette transition est due « à l'amplification au sein de la couche limite de perturbations provenant de l'écoulement extérieur, de l'état de surface de la paroi, de vibrations de la paroi » [7]. Il faut distinguer deux cas, selon l'amplitude des perturbations initiales. Lorsque celle-ci sont faibles, elles excitent les modes propres de la couche limite, ce qui provoque la propagation d'ondes vers l'aval qui finissent par former de la turbulence. Ce mécanisme présente l'avantage de pouvoir être analysé grâce à la théorie linéarisée de l'instabilité laminaire [7]. En revanche, lorsque les perturbations initiales sont de grande amplitude, la turbulence se forme plus rapidement à cause de phénomènes non linéaires, et dans ce cas, seuls des critères empiriques permettent de prévoir la transition.

Dans les applications en givrage, si on se place dans des cas où la paroi est non givrée donc lisse (mode antigivrage), on travaille souvent à des nombres de Mach suffisamment faibles pour que l'on puisse considérer que les instabilités initiales sont faibles. Ainsi, on peut par exemple utiliser le critère d'Arnal *et al.* [5] valable jusqu'à Mach 0.6. Ce critère utilise les solutions de Falkner-Skan pour les couches limites incompressibles, qui fait intervenir le paramètre de Pohlhausen lui-même dépendant du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement. Ce critère s'étend ensuite à des écoulements non similaires, et est capable de prendre en compte les effets de compressibilité et de paroi chauffée.

À l'inverse, lorsque du givre se dépose sur la paroi, on doit considérer celle-ci comme rugueuse et le développement des instabilités est non linéaire. Dans ce cas, la majorité des critères empiriques sont basés sur la caractéristique des rugosités (souvent ramenée à une hauteur équivalente dite *grain de sable* [64]) et le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement.

Finalement, quels que soient les modèles de transition et de turbulence utilisés, le calcul direct permet d'avoir, en tout point de la couche limite, les vitesses tangentielles et normales. Ainsi, le coefficient de friction peut être évalué directement :

$$C_f = \frac{\tau_g}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2} \quad (1.4)$$

où  $u$  est la vitesse tangentielle (moyennée temporellement),  $z$  la direction normale à la paroi et  $\mu$  la viscosité dynamique. De plus, l'ordonnée  $z = 0$  est celle de la paroi.

Ensuite, pour calculer le coefficient de transfert thermique, on revient à sa définition (première équation de (1.3)). On effectue une première simulation en imposant comme condition aux limites à la paroi une température  $T_1$ , ce qui nous permet d'avoir le flux de chaleur  $\Phi_1$ . De même, en imposant  $T_2$  comme température de paroi pour un second calcul, on obtient le flux de chaleur  $\Phi_2$ . Par conséquent, on peut immédiatement écrire le système

d'équations en  $h_{tc}$  et  $T_{rec}$  et le résoudre

$$\begin{cases} \Phi_1 = h_{tc}(T_{rec} - T_1) \\ \Phi_2 = h_{tc}(T_{rec} - T_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_{tc} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{T_2 - T_1} \\ T_{rec} = \frac{\Phi_1 + h_{tc}T_1}{h_{tc}} \end{cases} \quad (1.5)$$

En pratique, lorsque l'on connaît approximativement la température de paroi  $T_p$  (par exemple, dans un calcul instationnaire, la température de paroi au pas de temps précédent), l'expérience numérique montre qu'il est judicieux de prendre  $T_1 = T_p - 5^\circ\text{C}$  et  $T_2 = T_p + 5^\circ\text{C}$ .

### 1.3.3.2 Méthodes intégrales de résolution pour le calcul de $C_f$ , $h_{tc}$ et $T_{rec}$

Cette vaste classe de méthode permet de s'affranchir de la résolution des équations de couche limite dans la direction normale à la paroi.

#### Cas laminaire

L'idée est d'intégrer les équations dans la direction normale. Ainsi, en intégrant l'équation de conservation de la masse et l'équation de conservation de quantité de mouvement, on obtient la fameuse équation de von Kármán :

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} + \theta \frac{2 + H}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{C_f}{2} \quad (1.6)$$

où  $\theta$  est l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \int_0^{+\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (1.7)$$

et  $H$  est facteur de forme :

$$H = \frac{\int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy}{\theta} \quad (1.8)$$

Le numérateur de  $H$  est appelé dans la littérature *épaisseur de déplacement*.

L'équation (1.6) n'est pas fermée, il faut donc définir un modèle de fermeture qui généralement consiste à présupposer la forme (dans la direction normale) du profil de vitesse tangentielle. L'une des méthodes adoptées est de procéder par identification avec des solutions exactes. En effet, pour des géométries relativement simples (plaques planes, dièdres), Falkner et Skan [32] donnent une méthodologie pour trouver les profils de vitesse exacts. Comme l'expression de ces profils de vitesse n'est pas analytique (ces profils résultent d'une équation différentielle non linéaire), certains auteurs ont proposé de les remplacer par des profils approchés dont on peut trouver une expression analytique. Par exemple, Pohlhausen utilise un profil de vitesse polynomial, dont le nombre de degrés de liberté égale le nombre de conditions aux limites du problème [26]. En passant par des variables auxiliaires, il trouve une équation sur l'épaisseur de quantité de mouvement permettant de déduire le coefficient de frottement  $C_f$ .

Néanmoins, l'introduction d'un profil de vitesse polynomial induit des expressions pouvant être compliquées à traiter dans l'optique de simulation numérique. C'est pourquoi Thwaites [86] propose de linéariser certains termes afin de simplifier les expressions.

Il faut noter que dans ces deux méthodes, toutes les grandeurs caractéristiques de la couche limite peuvent s'écrire comme fonction d'un seul paramètre dépendant de la valeur

locale du gradient de pression externe [10]. Cette hypothèse revient en fait à considérer que la couche limite répond instantanément au gradient de pression externe. Cette hypothèse pouvant être mise en défaut dans certaines applications, Cousteix [26] propose d'ajouter une seconde équation de transport, dite *auxiliaire*, à l'équation de von Kármán. Plusieurs choix sont possibles pour l'équation auxiliaire, on peut par exemple écrire une équation sur l'énergie cinétique ou une équation sur le transport de la masse<sup>4</sup>.

Toutes ces méthodes permettent finalement de calculer le coefficient de friction  $C_f$ .

De manière similaire, on peut modéliser la couche limite thermique en intégrant l'équation de conservation de l'énergie dans la direction normale à la paroi. Cela permet d'estimer le flux de chaleur à la paroi et donc de calculer le coefficient de transfert thermique  $h_{tc}$ .

### Cas turbulent

Dans le cas d'une couche limite turbulente, l'intégration des équations de couche limite est toujours possible mais les modèles de fermeture sont beaucoup plus délicats à trouver car il n'existe pas de solution exacte à laquelle se comparer. Par conséquent, les relations de fermetures s'obtiennent grâce à des observations expérimentales dont sont déduites des corrélations qui, par exemple, relient le coefficient de frottement  $C_f$  à un nombre de Reynold local basé sur une épaisseur intégrale de couche limite. Ces expériences permettent également d'observer des profils de vitesse privilégiés que l'on peut utiliser comme fermeture de la méthode intégrale.

Dans le cas turbulent, il faut également prendre en compte l'effet des rugosités sur la couche limite (dans la littérature, les auteurs considèrent que ces rugosités n'affectent pas la couche limite laminaire). Dans la plupart des modèles utilisés en givrage, la description de ces rugosités se ramène à une hauteur équivalente dite *grain de sable* [64]. Les coefficients de friction et d'échange thermique évoluent de façon croissante avec cette hauteur, puisque physiquement, la présence de rugosité sur la paroi augmente les interactions avec la couche limite.

### Transition laminaire-turbulent

Des modèles, basés notamment sur des nombres de Reynolds locaux, permettent de déterminer l'abscisse de transition  $x_T$ , c'est-à-dire l'abscisse à partir de laquelle on bascule d'un modèle de couche limite laminaire à un modèle turbulent. Il faut noter que la rugosité (toujours ramenée à une hauteur équivalente grain de sable) influe de façon significative sur l'abscisse de transition ; généralement, sur des parois rugueuses, la transition apparaît très proche du point d'arrêt.

En pratique, dans les codes de couche limite, il est également possible de désactiver les modèles de transition et d'imposer explicitement  $x_T$ , ce qui permet de simuler des essais en soufflerie dans lesquels le déclenchement de la transition est forcée par la présence de petites pointes sur le profil.

### Température de récupération

On peut définir la température de récupération comme la température de la paroi dans le cas où celle-ci est adiabatique. Elle est très liée à la température d'arrêt, qui est la température d'une paroi adiabatique si on considère que la couche limite est isentropique. On peut alors écrire

$$T_{\text{arrêt}} = T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} = T_e \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) \quad (1.9)$$

---

4. Elle est souvent appelée *équation de transport de l'entraînement*.

où  $T_e$ ,  $u_e$  et  $M_e$  sont la température, la vitesse tangentielle et le Mach à l'extérieur de la couche limite,  $c_p$  est la capacité calorifique isobare et  $\gamma$  est le coefficient de compressibilité, c'est-à-dire le rapport entre capacités calorifiques isobare et isochore (pour l'air, on a  $\gamma = 1.4$ ).

Pour définir la température de récupération pour un écoulement réel, la température d'arrêt est corrigée [72, 83] par un coefficient, appelé facteur de récupération  $r$  (nombre sans dimension)

$$T_{\text{rec}} = T_e \left( 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) \quad (1.10)$$

Pour une couche limite laminaire, des investigations analytiques [83] montrent que ce facteur ne dépend que du nombre de Prandtl<sup>5</sup> de l'air et vaut

$$r_{\text{laminaire}} = Pr^{1/2} \quad (1.11)$$

Pour une couche limite turbulente, certains auteurs [83] font dépendre ce facteur du nombre de Reynolds mais pour les nombres de Prandtl compris entre 0.5 et 2, Ackermann [1] propose une relation très simple

$$r_{\text{turbulent}} = Pr^{1/3} \quad (1.12)$$

qui est très souvent utilisée en givrage.

### 1.3.3.3 Modélisation du coefficient de transfert massique $h_m$

Dans les applications en givrage, on considère que le coefficient d'échange massique  $h_m$  est fonction du coefficient d'échange thermique. Cette relation, appelée *analogie de Chilton-Colburn* dans la littérature en référence à un article de 1934 [24], s'écrit

$$h_m = \frac{h_{tc}}{\rho_e c_e Le^{2/3}} \quad (1.13)$$

où le nombre de Lewis est défini comme le rapport entre diffusivités thermique (de l'air) et massique (relatif à la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air), et  $c_e$  est la capacité calorifique de l'air à l'extérieur de la couche limite. Ce nombre sans dimension vaut approximativement 0.9.

### 1.3.4 Modélisation de l'accrétion de givre et du ruissellement

Une fois que toutes les grandeurs externes sont connues (champs à l'extérieur de la couche limite, grandeurs relatives à la captation et aux échanges avec la couche limite), on peut effectuer un calcul d'accrétion de givre. Le modèle fondateur est le modèle de Messinger [60], qui dans sa formulation originale, permet de calculer une forme de dépôt de givre sur une paroi non chauffée, bien que l'extension à une paroi chauffée de manière stationnaire soit quasiment immédiate. Le principe est de discrétiser le profil en volumes de contrôle, et de considérer que dans chaque volume, une couche de glace et une couche d'eau sont susceptibles d'être présentes. De plus, on suppose que le problème est « stationnaire », au sens où toutes les grandeurs externes ainsi que les températures, les hauteurs d'eau liquide et le taux de croissance de givre dans chaque volume de contrôle sont indépendants du temps. Par construction, l'épaisseur de givre dans chaque volume de contrôle est donc

---

5. Le nombre de Prandtl est le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique, et vaut environ 0.7 pour l'air.

proportionnelle au temps d'accrétion. De plus, on suppose que dans un volume de contrôle, la température est uniforme. Par conséquent, dans le cas où il y a coexistence de glace et d'eau, elle est égale température de fusion de la glace  $T_m$ .

Pour chaque volume de contrôle, on considère la couche d'eau liquide comme un système thermodynamique ouvert auquel on applique le premier principe. Comme la hauteur d'eau et la température sont supposées stationnaires, le premier principe conduit à écrire que la somme des termes source est égale à la somme des termes puits.

Les termes sources sont l'enthalpie apportée par les gouttelettes  $\dot{\Phi}_{\text{imp}}$ , celle apportée par l'eau ruisselant dans le volume de contrôle amont  $\dot{\Phi}_{\text{in}}^r$ , la chaleur apportée par convection  $\dot{\Phi}_{\text{conv}}$ <sup>6</sup> et l'éventuelle chaleur provenant de la paroi  $\dot{\Phi}_{\text{wall}}$ . Les termes puits sont l'enthalpie perdue par évaporation  $\dot{\Phi}_{\text{ev}}$ , celle de la glace formée  $\dot{\Phi}_{\text{ice}}$ , et celle de l'eau liquide ruisselant dans le volume de contrôle aval  $\dot{\Phi}_{\text{out}}^r$ .

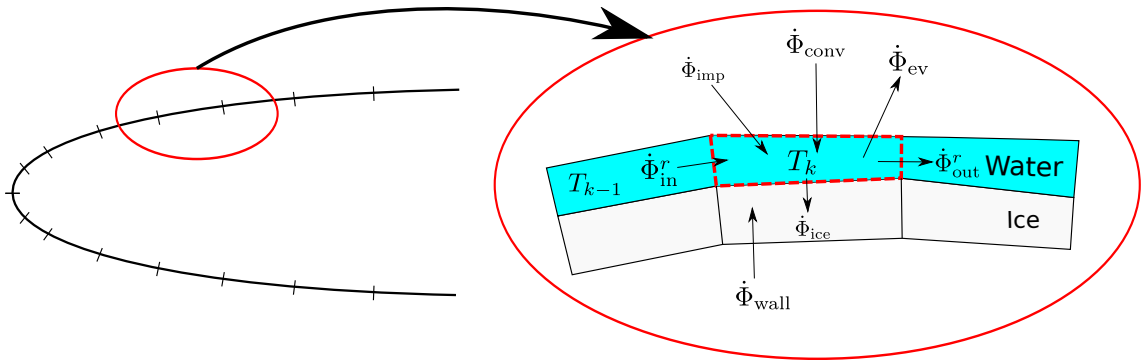


FIGURE 1.14 – Illustration du modèle de Messinger

Le premier principe de thermodynamique s'écrit donc

$$\dot{\Phi}_{\text{imp}} + \dot{\Phi}_{\text{in}}^r + \dot{\Phi}_{\text{conv}} + \dot{\Phi}_{\text{wall}} = \dot{\Phi}_{\text{ev}} + \dot{\Phi}_{\text{ice}} + \dot{\Phi}_{\text{out}}^r \quad (1.14)$$

Dans cette équation,  $\dot{\Phi}_{\text{in}}^r$  est donné puisqu'il est égal au flux sortant  $\dot{\Phi}_{\text{out}}^r$  de la cellule amont. Il faut maintenant distinguer 3 régimes possibles.

- Présence de glace uniquement, qui mène à  $\dot{\Phi}_{\text{out}}^r = 0$ . Dans ce cas, l'inconnue du problème est la température de la glace  $T_k < T_m$ . Physiquement, ce cas correspond à de l'accrétion en *givre blanc* (cf. section 1.1)
- Présence d'eau liquide uniquement qui mène à  $\dot{\Phi}_{\text{ice}} = 0$ . L'inconnue est alors la température du film  $T_k > T_m$ .
- Coexistence de la glace et de l'eau liquide, qui physiquement correspond à de l'accrétion de *givre transparent* (cf. section 1.1). Dans ce cas, la température est connue  $T_k = T_m$ , et l'inconnue est le taux de croissance de givre  $\dot{m}_{\text{ice}}$ . Il est alors commode d'introduire la fraction givrante  $f = \frac{\dot{m}_{\text{ice}}}{\dot{m}_{\text{imp}} + \dot{m}_{\text{in}}^r - \dot{m}_{\text{ev}}}$  qui se calcule grâce au bilan thermodynamique (1.14). La masse ruisselante dans la cellule aval se déduit alors grâce à la relation  $\dot{m}_{\text{out}}^r = (1 - f)(\dot{m}_{\text{imp}} + \dot{m}_{\text{in}}^r - \dot{m}_{\text{ev}})$ . Lorsque  $f \approx 1$ , on se situe proche du premier cas avec une température légèrement inférieure à  $T_m$ , et quand  $f \approx 0$ , on est proche du second cas avec une température légèrement supérieure.

6. On considère ici que la convection est un terme source bien qu'elle puisse être un terme puits. Dans ce cas,  $\dot{\Phi}_{\text{conv}}$  sera négatif.

Pour déterminer dans quel régime se trouve le volume de contrôle, on teste des hypothèses que l'on vérifie *a posteriori*. Par exemple, on peut commencer par supposer que le volume est dans la première situation. Si la température trouvée est supérieure à  $T_m$ , l'hypothèse est mise en défaut et on teste le second régime, qui est mis en défaut si la température trouvée est inférieure à  $T_m$ , et ainsi, le volume de contrôle se trouve dans le troisième régime.

Le modèle de Messinger a très largement fait ses preuves dans la simulation de l'accrétion de givre sur des parois non chauffées, ou chauffées de manière stationnaire (systèmes d'antigivrage) mais n'est en revanche pas adapté à la modélisation des dégivreurs électrothermiques ; d'une part, l'hypothèse de stationnarité n'est pas compatible avec l'activation cyclique des résistances, et d'autre part, le fait de considérer une température uniforme dans la glace ne permet pas de calculer avec précision les transferts thermiques. Pour y remédier, Henry [43] propose de « mettre à plat » le profil et de mailler l'espace de manière cartésienne.

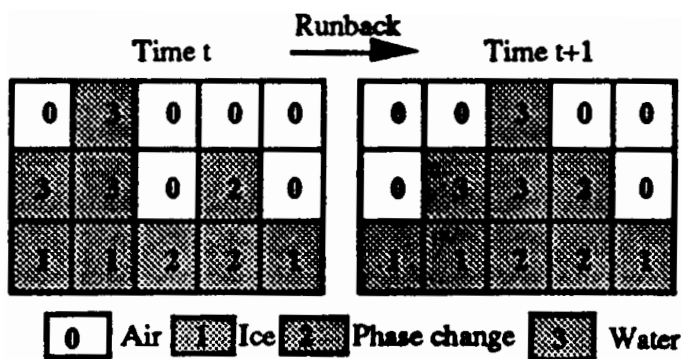


FIGURE 1.15 – Illustration du modèle implémenté dans MAD [43]

Dans ce modèle instationnaire, chaque cellule du maillage possède un drapeau qui indique si elle est composée d'air, d'eau liquide, de glace ou d'un mélange d'eau et de glace. Cette approche, permet de modéliser les transferts de chaleur de façon beaucoup plus précise que dans le modèle de Messinger et de manière instationnaire. Elle permet également (voir figure 1.15) de modéliser le ruissellement de façon très sommaire. L'inconvénient majeur est que la vitesse du film qui ruisselle n'est pas modélisée, et par conséquent, la vitesse de propagation dépend très fortement du pas de temps. Ce modèle est implémenté dans le code MAD (Modélisation Antigivrage Dégivrage) de l'ONERA.

L'amélioration des modèles de ruissellement a intéressé de nombreux auteurs. Pour la modélisation tridimensionnelle, Bourgault *et al.* [18] développent un modèle instationnaire d'accrétion de givre dans lequel le ruissellement est modélisé grâce à la théorie de la lubrification, ce qui permet notamment d'explicitier la vitesse et la hauteur du film ruisselant. Indépendamment de ces travaux, Al-Khalil [3] introduit un modèle macroscopique de ruisselets (*rivulets*) pour la modélisation des systèmes d'antigivrage. Pour cela, il utilise le concept de *mouillabilité* (*wetness*) qui, localement, est défini par le ratio entre la surface mouillée est la surface totale. De plus, les ruisselets sont caractérisés par une largeur, une hauteur maximale et un angle de contact.

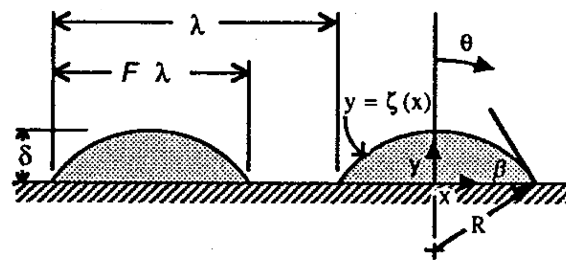
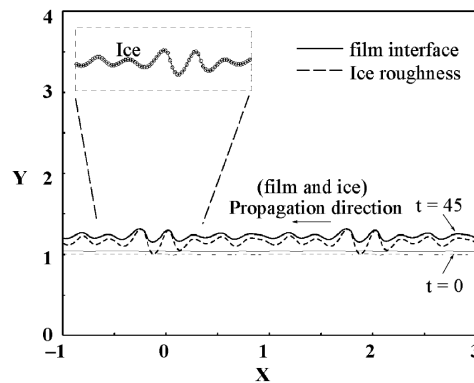


FIGURE 1.16 – Illustration des ruisselets du modèle d'Al-Khalil [3]

De plus, des études théoriques sur les instabilités des films, basées sur la théorie des développements asymptotiques, ont été effectuées par Tsao et Rothmayer [88, 89]. Grâce à leurs analyses, ils donnent des explications possibles du mécanisme de formation des rugosités du givre transparent, ce qui leur permet de déduire des modèles pouvant prévoir ces rugosités.

FIGURE 1.17 – Illustration de rugosités obtenues par le modèle de Tsao *et al.* [89]

Concernant la modélisation des transferts thermiques, Myers propose une approche plus précise que dans le modèle de Messinger et plus facile à mettre en œuvre que le modèle d'Henry (qui nécessite un maillage dans la direction normale à la paroi). Pour ce faire, il développe des modèles multicouches, avec une couche pour la glace et deux couches d'eau liquide de part et d'autre de la glace. Dans chacune des couches, il impose un profil de température, qui peut être linéaire [62] ou cubique sans monôme du second ordre [63].

Dans sa thèse sur la modélisation des systèmes électrothermiques, Bennani [13] propose de mailler un bloc de givre, calculé avec un code d'accrétion, et de résoudre directement les équations de changement de phase. Cette approche est la plus précise puisqu'elle présente le moins d'hypothèses simplificatrices. En revanche, elle est difficile à utiliser si l'on souhaite modéliser l'accrétion de givre simultanément, puisqu'il faudrait remailler souvent, dans la mesure où la topologie du bloc de givre évolue en général rapidement.

### 1.3.5 Modélisation des systèmes de protection thermiques

Comme expliqué ci-dessus les systèmes de protection thermiques peuvent être soit des systèmes électrothermiques, soit des systèmes à prélèvement de gaz chauds.

### 1.3.5.1 Systèmes à prélèvement de gaz chauds

Ils sont sans doute les plus difficiles à modéliser, car en toute rigueur, il faudrait prendre en compte l'écoulement de l'air dans les conduites allant des moteurs vers les zones à protéger. En pratique, le calcul complet est rarement effectué et les systèmes de protection sont modélisés grâce à des corrélations expérimentales.

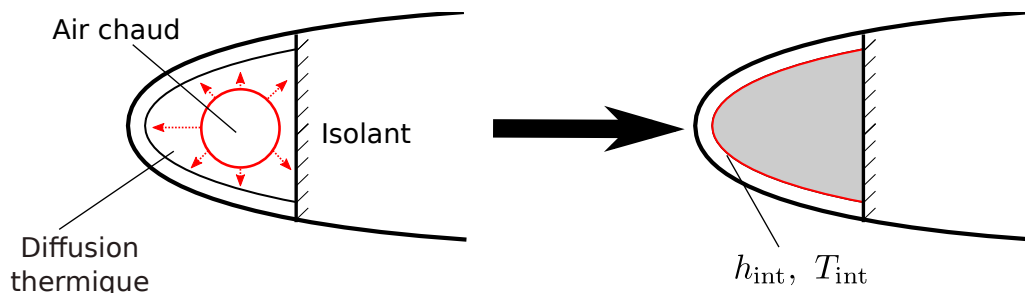


FIGURE 1.18 – Modélisation d'un système *bleed-air*

Le principe d'un système *bleed-air* est illustré à gauche de la figure ci-dessus 1.18. La chaleur provenant du tube piccolo se transmet par convection forcée et par conduction dans la paroi jusqu'à la surface de la zone protégée. Les méthodes employées consistent à s'affranchir de la modélisation exacte de la convection forcée. Seuls les transferts thermiques dans la paroi sont pris en compte directement et le flux de chaleur à la surface interne est modélisé par un coefficient d'échange :

$$\Phi_{\text{entrant}} = h_{\text{int}}(\mathbf{x})(T_{\text{int}}(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})) \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{x}$  est un point de l'interface. Toute la difficulté de cette approche réside dans la modélisation du coefficient d'échange interne  $h_{\text{int}}$  et la température de référence  $T_{\text{int}}$ . Ces corrélations relient la plupart du temps le nombre de Nusselt au nombre de Reynolds, grâce à la fois à des études théoriques et des observations expérimentales. Jambunathan *et al.* [45] font une revue des corrélations existantes jusqu'en 1992. Wright [99], de façon moins exhaustive, liste quelques travaux plus récents (avant 2008).

Ensuite, pour la modélisation des transferts thermiques dans la paroi, plusieurs approches sont possibles. La plus précise mais aussi la plus coûteuse en termes de temps de calcul consiste à résoudre l'équation de la chaleur, comme Bennani [13], sachant que cette zone est parfois anisotrope car composée de différentes couches. Donatti *et al.* [29] ont proposé deux alternatives pour une approche stationnaire. Le principe est soit de négliger les flux de chaleur tangentiels (approche baptisée *1D normal formulation*), ou alors de considérer que la température est uniforme dans la direction normale et de ne calculer que les flux tangentiels (*1D surface formulation*).

### 1.3.5.2 Systèmes électrothermiques

Ils sont en général décomposés en zones dans la direction tangentielle et en couches dans la direction normale, et les résistances chauffantes sont placées entre deux couches. Comme pour les systèmes *bleed-air*, on peut résoudre l'équation de la chaleur anisotrope, les résistances chauffantes étant des termes source de l'équation.



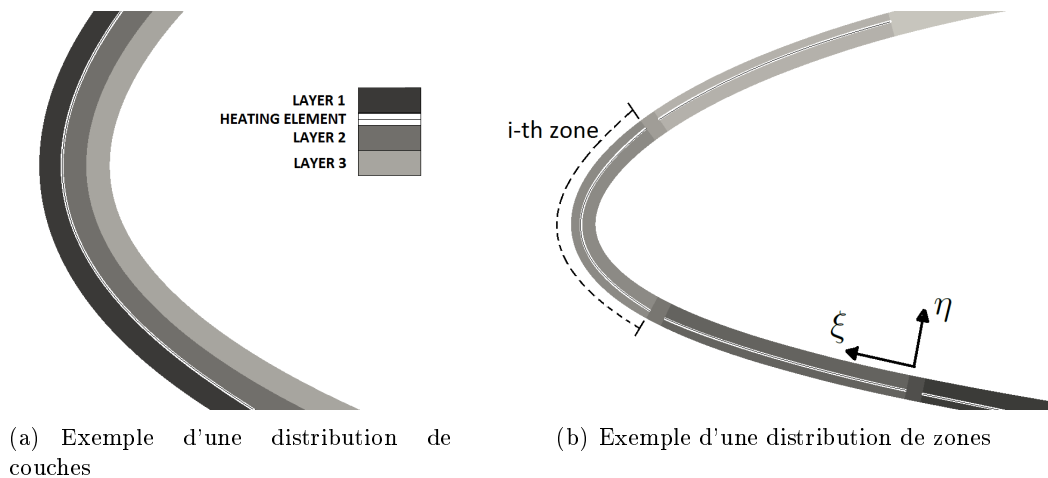


FIGURE 1.19 – Exemple de distribution de zones et de couches [13]

### 1.3.6 Modélisation du détachement d'un bloc de givre soumis à un dégivreur thermique

Lorsque l'on utilise un système de protection thermique en mode dégivrage, un film d'eau liquide vient se former sous le bloc de givre déjà accrété qui va pouvoir se détacher sous l'action des forces aérodynamiques externes. L'étude du mécanisme et la modélisation de ce phénomène n'en sont qu'à leurs prémices. Jusqu'à très récemment, le détachement d'un bloc était modélisé de façon très empirique, puisque l'approche retenue dans la plupart des codes de dégivrage consistait à considérer qu'un bloc se détache lorsque le rapport entre la surface fondue et la surface totale dépasse une certaine valeur (typiquement 80%), comme illustré sur la figure 1.20.

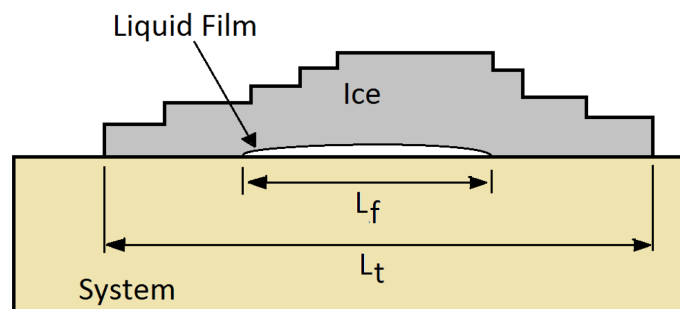


FIGURE 1.20 – Critère empirique de détachement d'un bloc de givre

L'inconvénient de cette approche est d'une part de ne pas faire apparaître les mécaniques physiques du détachement, et d'autre part que le critère empirique ne dépend pas de l'écoulement externe.

Pour pallier ces lacunes, Zhang *et al.* [100] proposent d'utiliser une méthode d'éléments finis avec remaillage pour suivre la propagation d'une fissure. La position initiale de celle-ci est déterminée par un calcul préliminaire d'élasticité linéaire.

Bennani [13, 14] a développé un modèle permettant de prévoir l'apparition et la propagation d'une fissure dans le bloc de givre. Pour ce faire, il introduit une variable auxiliaire d'endommagement liée à une énergie de fissuration. Lors de l'apparition d'une fissure, on a affaire à un phénomène irréversible qui convertit de l'énergie élastique en énergie de

fissuration. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de remaillage pour le suivi d'une fissure et qu'elle inclut dans sa formulation l'apparition des fissures.

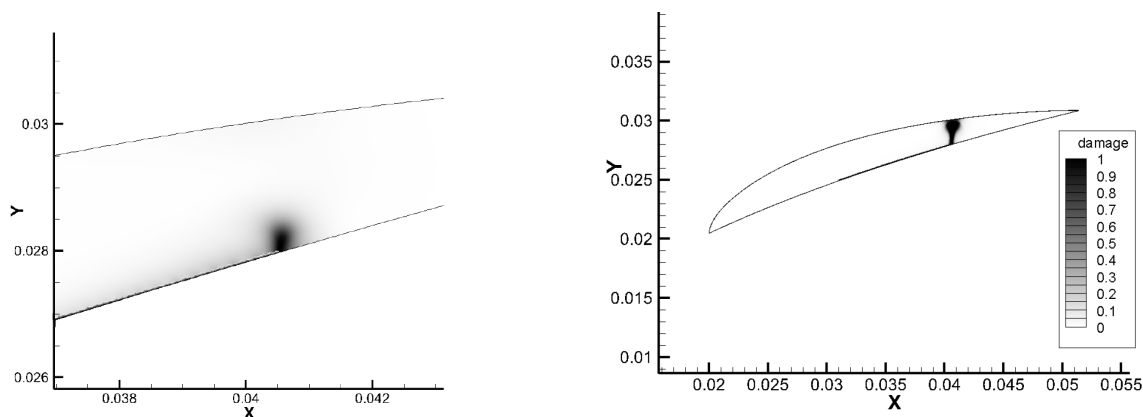


FIGURE 1.21 – Création et propagation d'une fissure avec le modèle de Bennani [13]

## 1.4 Contexte et objectifs de la thèse

La thèse se situe dans le contexte de la simulation des phénomènes de givrage en aéronautique. À l'ONERA, l'outil utilisé aujourd'hui est le code IGLOO2D (IcinG tooL bOx Onera) pour la modélisation bidimensionnelle et IGLOO3D (qui s'appuie sur certains modules du logiciel multi-physique CEDRE<sup>7</sup>) pour la modélisation tridimensionnelle. L'outil 2D se décompose en deux parties :

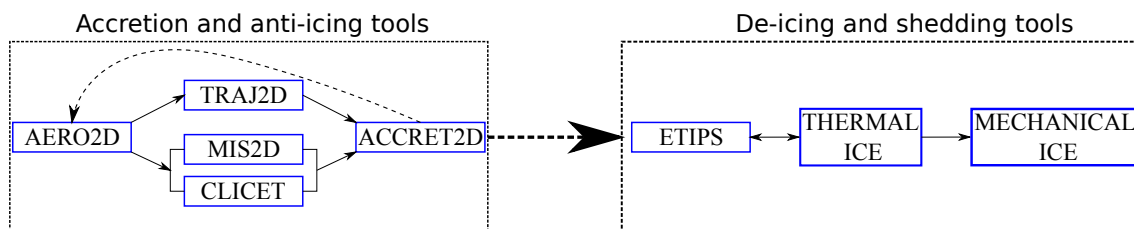


FIGURE 1.22 – Outils pour la simulation numérique des phénomènes de givrage à l'ONERA

- La première partie sont tous les solveurs permettant de faire un calcul de forme de dépôt de givre sur paroi non chauffée ou chauffée de manière stationnaire (antigivrage). Cette chaîne est développée par P. Trontin.
  - AERO 2D : solveur d'aérodynamique permettant de calculer le champ Euler de la phase gazeuse. Dans certaines applications spécifiques, on peut le remplacer par un solveur Navier-Stokes (CEDRE<sup>7</sup> ou FLUENT<sup>8</sup>).
  - TRAJ2D : solveur lagrangien de trajectographie. Outre la trajectoire des gouttes surfondues, il peut calculer également la trajectoire des cristaux de glace, qui possèdent des modèles de traînée différents du fait de leur non sphéricité, ainsi que des

7. <http://cedre.onera.fr>

8. <http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Fluid+Dynamics/Fluid+Dynamics+Products/ANSYS+Fluent>

- modèles de fusion pendant leur transport (avant l'impact) [93]. Il contient également des modèles d'éclatement, de rebond et de ré-émission pour les SLD.
- MIS2D et CLICET : solveurs de couche limite. CLICET est un code qui résout les équations de couche limite, avec de nombreux modèles pour la turbulence et la transition [7]. MIS2D (Méthode Intégrale Simplifiée) résout une formulation intégrale des équations de couche limite.
  - ACCRET2D : solveur d'accrétion dans lequel est implémenté le modèle de Messinger étendu pour prendre en compte le dépôt de cristaux de glace. Il est également possible d'activer un couplage avec un système d'antigivrage.
- Une fois qu'une forme de givre est calculée, on peut l'extraire afin de simuler des cycles de dégivrage, jusqu'à détachement total ou partiel du bloc. Ces outils ont été développés par L. Bennani.
    - ETIPS : solveur du système de protection thermique résolvant l'équation de la chaleur anisotrope (car le système de protection est composé de différents matériaux). Il permet de modéliser à la fois les systèmes par prélèvement d'air chaud et les systèmes électrothermiques.
    - *Thermal Ice* : résolution des équations de changement de phase dans un bloc de givre maillé, couplé de façon explicite avec ETIPS.
    - *Mechanical Ice* : solveur calculant les contraintes dans le bloc de givre, les formations et propagations de fissures ainsi que le détachement d'un bloc de givre, qui est couplé (en *one-way coupling*) au module *Thermal Ice*.

Les outils de simulation disponibles avant le début de cette thèse ne permettent donc pas de simuler des cycles de dégivrage tout en continuant l'accrétion.

Les objectifs de cette thèse sont multiples. Il s'agit d'une part de remplacer le module ACCRET2D par un module d'accrétion de givre instationnaire baptisé SLUSH2D (*Several Layers Upon Some Heaters*). Ce module doit également modéliser les transferts thermiques lors des simulations de dégivrage, afin de remplacer le module *Thermal Ice*. L'intérêt est par conséquent de n'avoir qu'un seul modèle pour le bloc de givre, au lieu de deux (un pour l'accrétion et un pour le dégivrage). SLUSH2D restera couplé à ETIPS, et pour des raisons de robustesse et de coûts numériques, ce couplage sera implicite. Un algorithme itératif, rapide et robuste sera donc développé. Enfin, le module SLUSH2D devra demeurer couplé à *Mechanical Ice* afin de prévoir le détachement de glace. Ce couplage doit être *two-ways*, au sens où il faudra bien entendu prendre en compte l'évolution de la topologie d'un bloc de givre dont une partie s'est détachée.

Pour résumer, la nouvelle chaîne de calcul pour le givrage à l'ONERA devra être comme sur la figure 1.23. Ce qui est en rouge constitue le travail de cette thèse.

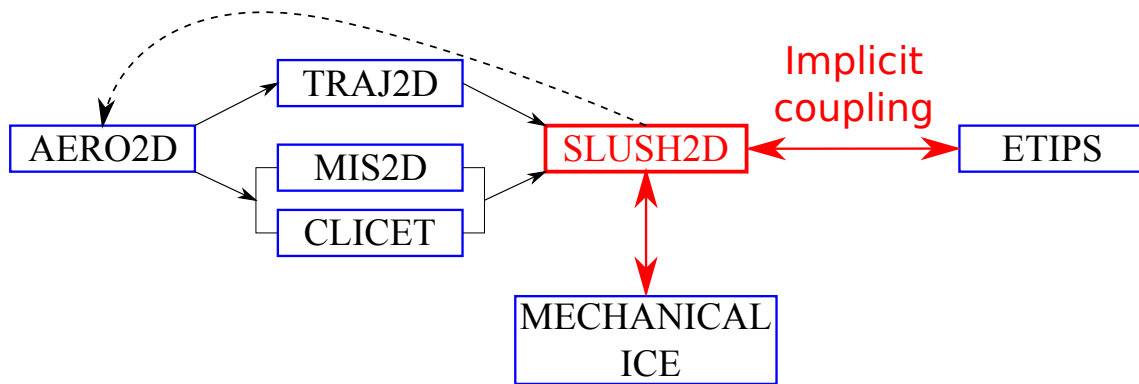


FIGURE 1.23 – Outils numériques pour le givrage à l'ONERA après cette thèse

De plus, un prototype en trois dimensions pour le modèle d'accrétion instationnaire sera développé.

La suite de ce manuscrit est organisée selon le plan suivant :

- *Chapitre 2 : modèle d'accrétion et de ruissellement instationnaire.* Dans ce chapitre, on présente un modèle tricouche permettant de prendre en compte l'accrétion, le ruissellement et les flux de chaleur transmis par un système de protection.
- *Chapitre 3 : discrétisation des transferts de chaleur du modèle tricouche.* Dans ce chapitre, le modèle tricouche sera discrétisé dans la direction normale à la paroi grâce à des méthodes de résolution de l'équation de la chaleur sans maillage.
- *Chapitre 4 : discrétisation du modèle tricouche.* Dans ce chapitre, nous discrétiserons l'équation de ruissellement, avant d'intégrer en temps l'ensemble du modèle tricouche, qui sera donc totalement discret.
- *Chapitre 5 : couplage du modèle tricouche et du système de protection thermique.* Nous développerons un algorithme itératif de type Schwarz pour coupler de manière implicite le modèle d'accrétion et le système de protection thermique.
- *Chapitre 6 : applications 2D.* Quelques applications numériques en 2D seront présentées, avec notamment la simulation complète d'un dégivreur électrothermique.
- *Chapitre 7 : applications 3D.* Des premiers cas de faisabilité en 3D seront exposés.

## Chapitre 2

# Un modèle tricouche pour les problèmes liés au givrage

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Motivations et principes généraux du modèle</b>	<b>43</b>
<b>2.2</b>	<b>Hypothèses simplificatrices du modèle tricouche</b>	<b>45</b>
<b>2.3</b>	<b>Modélisation du film ruisselant</b>	<b>46</b>
2.3.1	Équations générales	46
2.3.2	Modèle de fermeture : théorie de la lubrification	53
2.3.3	Bilan pour la couche du film ruisselant	56
<b>2.4</b>	<b>Modélisation de la couche de givre</b>	<b>56</b>
<b>2.5</b>	<b>Modélisation du film statique</b>	<b>58</b>
<b>2.6</b>	<b>Synthèse du chapitre : équations résolues pour le module d'accrétion de givre</b>	<b>59</b>
2.6.1	Paroi sèche : $h_i = h_s = h_f = 0$ (régime <i>full evaporative</i> )	59
2.6.2	Film ruisselant : $h_i = h_s = 0$ (régime <i>running wet</i> )	60
2.6.3	Bloc de givre : $h_f = h_s = 0$ ( <i>rime ice accretion</i> )	60
2.6.4	Bloc de givre et film ruisselant : $h_s = 0$ ( <i>glaze ice accretion</i> )	61
2.6.5	Bloc de givre et film statique : $h_f = 0$ ( <i>rime ice + static film</i> )	61
2.6.6	Bloc de givre, film ruisselant et film statique ( <i>glaze ice + static film</i> )	62
2.6.7	Gestion des transitions entre les différents régimes	63
<b>2.7</b>	<b>Conclusion : intérêts et limites du modèle tricouche</b>	<b>64</b>

---

L'objectif de ce chapitre est d'introduire un modèle permettant de simuler l'ensemble des situations que l'on peut rencontrer dans le domaine du givrage en aéronautique. Ce modèle se veut « unifié », au sens où il permet, dans une formulation unique, de traiter les cas d'accrétion sur paroi froide, d'antigivrage, de dégivrage et de regel.

### 2.1 Motivations et principes généraux du modèle

La plupart des codes d'accrétion reposent sur le modèle de Messinger [60] ou des extensions. Dans ces modèles, l'une des hypothèses très forte consiste à considérer que la température du givre est uniforme selon la direction normale à la paroi. Ceci conduit à une approximation du calcul des flux de chaleur dans cette même direction, puisque ces flux ne peuvent pas être évalués avec la formule de Fourier

$$\Phi_c = -\lambda \nabla T \quad (2.1)$$

Cette simplification explique que ces modèles (ou leurs diverses extensions) soient très peu utilisés dans les applications de dégivrage. En effet, un simple calcul d'ordre de grandeur permet de voir que l'approximation par un profil de température constant est très restrictive ; lorsqu'une voilure est antigivrée, ou dégivrée, les flux de chaleur délivrés par le système de protection peuvent être de l'ordre de  $3 \text{ W.cm}^{-2}$  et la hauteur de givre de l'ordre d'un millimètre. Si on considère, en première approximation, que le problème est quasi-stationnaire et unidimensionnel, alors le profil de température dans la glace est linéaire. Dans ces conditions, on peut estimer la différence de température entre les interfaces inférieure et supérieure du bloc de glace à l'aide de la relation de Fourier (2.1)

$$\Delta T \approx \frac{\Phi_c h_i}{\lambda_i} \approx \frac{3 \times 10^4 \times 10^{-3}}{2.1} \approx 15^\circ \text{C} \quad (2.2)$$

Ce petit calcul permet d'illustrer les limitations d'une hypothèse de type profil de température constant lorsque l'on modélise les systèmes de protection thermique.

Pour cette raison, les codes modélisant ces systèmes de protection sont en général des solveurs dédiés, auxquels sont éventuellement couplés des solveurs d'accrétion.

L'objectif de ce chapitre est de présenter un modèle permettant de s'affranchir de ces modélisations multiples. Nous proposons un modèle unifié, permettant de prendre en compte tous les phénomènes que l'on rencontre en givrage, à savoir l'accrétion sur paroi froide, le dégivrage, l'antigivrage et les phénomènes de ruissellement et de regel.

La solution retenue est un modèle tricouche, dont chacune des couches a un rôle spécifique :

- Couche de givre : c'est une couche solide, qui est donc totalement statique. Ainsi, sa modélisation fait intervenir une équation de conservation de la masse, et une équation de conservation de l'énergie.
- Film ruisselant : cette phase liquide se trouve au-dessus de la couche de givre, si cette dernière existe, et directement sur la paroi dans le cas contraire. Elle peut apparaître notamment dans des cas d'accrétion sur paroi froide ou des cas de dégivrage. Physiquement, cela correspond à une situation où les gouttes surfondues qui impactent la surface solide ne peuvent pas échanger suffisamment de chaleur avec l'écoulement extérieur pour se solidifier entièrement. Ainsi, tout ou partie de ces gouttes demeurent à l'état liquide et ruissellent sous l'action des forces aérodynamiques externes. Dans cette couche, il faut donc modéliser la conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. Cependant, nous verrons dans la suite qu'en raison du fort cisaillement exercé par le gaz (comparé aux forces d'inertie du film), on peut considérer que la théorie de la lubrification s'applique. Ainsi, seules des équations sur la conservation de la masse et de l'énergie sont requises.
- Film statique : cette phase liquide est supposée se trouver entre le bloc de givre et la paroi. Elle peut apparaître lorsqu'un système de protection thermique s'active alors que du givre est déjà présent. Dans cette couche, on néglige la variation des propriétés physiques de l'eau, et donc les effets de convection naturelle. Comme cette couche est supposée confinée entre la glace et la paroi, il n'y a pas de dynamique à modéliser. Ainsi, exactement comme pour la couche de glace, seules les équations de conservation de la masse et de l'énergie sont à prendre en compte.

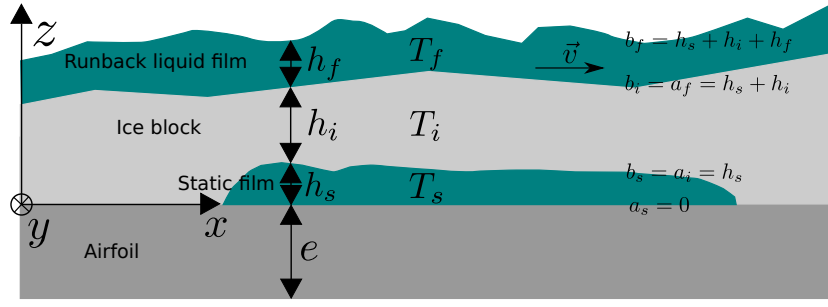


FIGURE 2.1 – Illustration du modèle d'accrétion tricouche

## 2.2 Hypothèses simplificatrices du modèle tricouche

Pour pouvoir parler d'un modèle à plusieurs couches, comme schématisé sur la figure 2.1, il faut au préalable que ces couches puissent être définies sans ambiguïté. En particulier, les hauteurs  $h_s$ ,  $h_i$  et  $h_f$  doivent être des applications (au sens mathématique du terme). Pour  $l \in \{s, i, f\}$ , on a donc

$$h_l : \quad \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \quad \rightarrow \quad h_l(x, y) \quad (2.3)$$

Cette condition interdit évidemment le “déferlement” de chacune des couches.

De plus, on fait l'hypothèse des “ondes longues”, qui permet de considérer que les interfaces sont quasiment parallèles à la paroi. Mathématiquement, cela s'écrit, pour  $l \in \{s, i, f\}$ ,

$$\|\nabla_{(x,y)} h_l\| \ll 1 \quad (2.4)$$

Enfin, on fait l'hypothèse de “couches minces”, qui indique que la longueur caractéristique dans les directions tangentielles est grande devant la hauteur de la couche. Cela permet d'introduire un “petit” paramètre  $\varepsilon$  mesurant l'épaisseur adimensionnée de la couche. Ce paramètre  $\varepsilon$  permet également de mesurer les dérivées tangentielles  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$  et les dérivées temporelles  $(\frac{\partial}{\partial t})$  devant les dérivées normales  $(\frac{\partial}{\partial z})$ . Lorsque l'on considère un régime linéarisé autour d'un point d'équilibre dont la hauteur est  $h$ , le petit paramètre est défini comme  $\varepsilon = h/L$ , avec  $L$  la longueur caractéristique dans les directions tangentielles. Pour les équations de la dynamique du film,  $L$  représente la longueur d'onde des vagues. Pour les équations de la thermique dans les trois couches, il s'agit d'une longueur caractéristique mesurant les variations des conditions aux limites dans les directions tangentielles, comme le coefficient de transfert thermique et les flux de chaleur provenant de la paroi. Comme on suppose que  $L$  est grand devant  $h$ , les flux de chaleur dans les directions tangentielles sont négligeables (d'ordre 2). En effet, dans chacune de ces couches, l'équation de la thermique s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.5)$$

avec pour les couches statiques (la glace et le film confiné entre la glace et la surface solide)  $v_x = v_y = v_z = 0$ . Si l'on adimensionne le second membre de cette équation avec  $h$ ,  $L$  et une différence de température caractéristique  $\Delta T$ , on trouve

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta T \left( \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\Delta T}{h^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (2.6)$$

Ainsi, les termes de diffusion tangentielle sont d'ordre 2 par rapport à  $\varepsilon$ , alors que le terme de diffusion normale est d'ordre 0. Par conséquent, comme  $\varepsilon$  est supposé petit devant 1, on néglige les termes de diffusion tangentielle. L'hypothèse de couche mince s'écrit donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

Ainsi, (2.5) donne

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

## 2.3 Modélisation du film ruisselant

### 2.3.1 Équations générales

L'eau est supposée être un fluide incompressible newtonien. De plus, les variations de température du film sont supposées suffisamment faibles pour que toutes les propriétés physiques de l'eau puissent être considérées constantes. Ainsi, les équations utilisées pour le film sont les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.9a) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu_w \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.9b) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu_w \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (2.9c) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu_w \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.9d) \\ \frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial v_x T_f}{\partial x} + \frac{\partial v_y T_f}{\partial y} + \frac{\partial v_z T_f}{\partial z} = \frac{\lambda_w}{\rho_w c_w} \left( \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right) \quad (2.9e) \end{array} \right.$$

(2.9a) est l'équation de conservation de la masse, (2.9b-2.9d) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement et (2.9e) est l'équation de conservation de l'énergie.

Pour alléger les notations, on note  $a_f$  (resp.  $b_f$ ) l'interface inférieure (resp. supérieure) du film. Ainsi (cf. figure (2.1))

$$a_f = h_s + h_i \quad (2.10a)$$

$$b_f = a_f + h_f \quad (2.10b)$$

#### 2.3.1.1 Équation de conservation de la masse

On suppose que l'hypothèse onde longue exposée ci-dessus est valide. En particulier, cela implique que la hauteur du film est une fonction de  $(x, y)$ , ce qui signifie que le film ne peut pas déferler. On peut donc intégrer (2.9a) sur la hauteur du film, ce qui donne

$$\int_{a_f}^{b_f} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dz = 0$$



En appliquant la règle Leibniz de dérivation sous le signe d'intégration, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{a_f}^{b_f} v_x dz - v_x(b_f) \frac{\partial b_f}{\partial x} + v_x(a_f) \frac{\partial a_f}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{a_f}^{b_f} v_y dz - v_y(b_f) \frac{\partial b_f}{\partial y} + v_y(a_f) \frac{\partial a_f}{\partial y} + v_z(b_f) - v_z(a_f) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

On applique la condition de non glissement à l'interface liquide-solide (le solide pouvant être soit la paroi, soit le bloc de givre)

$$v_x(a_f) = v_y(a_f) = 0 \quad (2.12)$$

De plus, on note  $\widehat{v}_x$  (resp.  $\widehat{v}_y$ ) la vitesse dans la direction  $x$  (resp.  $y$ ), moyennée sur la hauteur du film soit

$$\widehat{v}_x = \frac{1}{b_f - a_f} \int_{a_f}^{b_f} v_x dz = \frac{1}{h_f} \int_{a_f}^{b_f} v_x dz \quad (2.13a)$$

$$\widehat{v}_y = \frac{1}{b_f - a_f} \int_{a_f}^{b_f} v_y dz = \frac{1}{h_f} \int_{a_f}^{b_f} v_y dz \quad (2.13b)$$

L'équation de conservation de la masse dans le film s'écrit donc provisoirement

$$\frac{\partial h_f \widehat{v}_x}{\partial x} - v_x(b_f) \frac{\partial b_f}{\partial x} + \frac{\partial h_f \widehat{v}_y}{\partial y} - v_y(b_f) \frac{\partial b_f}{\partial y} + v_z(b_f) - v_z(a_f) = 0 \quad (2.14)$$

De plus, nous avons besoin d'une équation de conservation de la masse à chacune des interfaces ( $z = a_f$  et  $z = b_f$ ). Pour l'interface supérieure, nous allons établir cette relation en dimension 2 (en omettant la direction  $y$ ) et l'étendre à la troisième dimension. On se place au temps  $t_0$ , et en un point de l'interface air-film  $(x_0, b_f(t_0, x_0))$  (cf. figure 2.2).

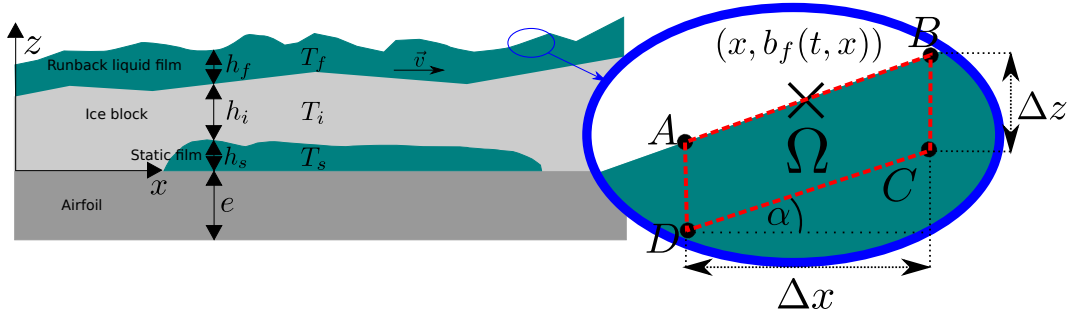


FIGURE 2.2 – Zoom sur l'interface film ruisselant - air

Le principe est de considérer une section d'interface semi-lagrangienne, ce qui signifie que cette section suit l'interface dans la direction  $z$  et est statique dans la direction  $x$ . On note  $\Delta z(t_0)$  et  $\Delta x$  deux petits paramètres destinés à tendre vers 0. On appelle  $\Omega(t)$  la section d'interface définie par les quatre points  $(A(t), B(t), C, D)$ , où

$$\begin{aligned} A &= \left( x_0 - \frac{\Delta x}{2}, b_f \left( t, x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) \right) \\ B &= \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2}, b_f \left( t, x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) \\ C &= \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2}, b_f \left( t_0, x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) - \Delta z(t_0) \right) \\ D &= \left( x_0 - \frac{\Delta x}{2}, b_f \left( t_0, x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) - \Delta z(t_0) \right) \end{aligned}$$

Par définition, les points  $C$  et  $D$  sont fixés, alors que les points  $A$  et  $B$  varient dans la direction  $z$  car ils suivent l'interface. Le volume de  $\Omega$  vaut

$$|\Omega(t)| = \Delta x \Delta z(t)$$

Par conséquent, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Omega(t)| = \Delta x \frac{\partial \Delta z}{\partial t}(t) = \Delta x \frac{\partial b_f}{\partial t}(t, x_0)$$

Enfin, on note  $\alpha$  l'angle formé par la surface du film et la paroi, soit

$$\tan \alpha = \frac{\partial b_f(x_0)}{\partial x}$$

On rappelle que d'après l'hypothèse des ondes longues, on a

$$|\alpha| \ll 1$$

On applique le principe de conservation de la masse sur  $\Omega$ , qui revient à écrire que la variation du volume est égale à la somme des flux de masse sur les arêtes.

Sur l'arête  $[AB]$ , ces flux sont les termes sources du problème. Il s'agit du flux des gouttes impactant le système et de d'évaporation. Le flux des gouttes est supposé être connu grâce à un calcul antérieur de trajectographie. On note  $\dot{m}_{\text{imp}}$  ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ) le flux impactant le solide. Par conservativité, le flux impactant le segment  $[AB]$  vaut donc  $\dot{m}_{\text{imp}} \cos \alpha$ . Le flux d'évaporation, noté  $\dot{m}_{\text{ev}}$ , est calculé grâce à l'analogie de Chilton-Colburn. À la fin, une fois que toutes les grandeurs de la couche limite sont connues, l'évaporation ne dépend que de la température du film. Pour ce paragraphe traitant de la conservation de la masse, nous pouvons donc considérer le flux d'évaporation comme une donnée.

Sur les autres arêtes, ces flux convectifs valent  $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{v} = (v_x, v_z)^T$  et  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à l'arête. L'équation de conservation de la masse s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Omega(t)| &= \Delta x \frac{\partial b_f(x_0)}{\partial t} \\ &= \int_{[DA]} v_x dz - \int_{[CB]} v_x dz - \int_{[DC]} (-\cos \alpha v_z + \sin \alpha v_x) d\Gamma \\ &\quad + \frac{1}{\rho_w} \int_{[AB]} (\dot{m}_{\text{imp}} \cos \alpha - \dot{m}_{\text{ev}}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.15)$$

où  $d\Gamma$  est la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}$ .

De plus, si l'on suppose les vitesses  $v_x$  et  $v_z$ , ainsi que les grandeurs  $\dot{m}_{\text{imp}}$  et  $\dot{m}_{\text{ev}}$  sont régulières (au moins continues), on peut écrire, dans tout le domaine  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} v_x(x, z) &= v_x(x_0, b_f(x_0)) + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0)) \\ v_z(x, z) &= v_z(x_0, b_f(x_0)) + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0)) \\ \dot{m}_{\text{imp}}(x, b_f(x)) &= \dot{m}_{\text{imp}}(x_0, b_f(x_0)) + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0)) \\ \dot{m}_{\text{ev}}(x, b_f(x)) &= \dot{m}_{\text{ev}}(x_0, b_f(x_0)) + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\int_{[DA]} v_x dz - \int_{[CB]} v_x dz = \Delta z \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0))$$

et l'équation de conservation de la masse du domaine  $\Omega$  (2.15) s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta x \frac{\partial b_f(x_0)}{\partial t} = & \Delta z(t_0) \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0)) - \frac{\Delta x}{\cos \alpha} (-\cos \alpha v_z + \sin \alpha v_x + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0))) + \\ & \frac{1}{\rho_w} \frac{\Delta x}{\cos \alpha} (\dot{m}_{\text{imp}} \cos \alpha - \dot{m}_{\text{ev}} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0))) \end{aligned} \quad (2.16)$$

L'hypothèse des ondes longues permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sin \alpha & \approx \tan \alpha \approx \frac{\partial b_f(x)}{\partial x} \\ \cos \alpha & \approx 1 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\frac{\partial b_f(x_0)}{\partial t} = -v_x \frac{\partial b_f(x_0)}{\partial x} + v_z + \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}}{\rho_w} + \mathcal{O}(\Delta z(t_0)^2) + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta z(t_0)) \quad (2.17)$$

En faisant tendre  $\Delta x$  et  $\Delta z(t_0)$  vers 0, on obtient la relation (parfois appelée équation de *continuité des vitesses* dans la littérature)

$$\frac{\partial b_f}{\partial t} + v_x \frac{\partial b_f}{\partial x} - v_z = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}}{\rho_w} \quad (2.18)$$

(2.18) se généralise à la dimension 3, on a donc finalement

$$\boxed{\frac{\partial b_f}{\partial t} + v_x(b_f) \frac{\partial b_f}{\partial x} + v_y(b_f) \frac{\partial b_f}{\partial y} - v_z(b_f) = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}}{\rho_w}} \quad (2.19)$$

Le raisonnement pour obtenir (2.19) peut être décliné pour calculer l'équation de conservation de la masse à l'interface inférieure ( $z = a_f$ ). Ce cas est plus simple puisqu'à cause de la contrainte « pariétale » (où la « paroi » peut être une la couche de givre), on a  $v_x = v_y = 0$ . De plus, le terme source  $\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}$  doit être remplacé par le taux de production de glace  $\dot{m}_{\text{ice,top}}$ . On a donc

$$\boxed{\frac{\partial a_f}{\partial t} - v_z(a_f) = \frac{\dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w}} \quad (2.20)$$

Ainsi, en injectant (2.19) et (2.20) dans (2.14), on obtient l'équation de conservation de la masse pour le film

$$\frac{\partial b_f}{\partial t} - \frac{\partial a_f}{\partial t} + \frac{\partial h_f \hat{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h_f \hat{v}_y}{\partial y} = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}} - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w} \quad (2.21)$$

Finalement, on obtient une équation de conservation de la masse pour le film ruisselant

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial h_f}{\partial t}}_{\text{Variation de la hauteur du film}} + \underbrace{\frac{\partial h_f \hat{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h_f \hat{v}_y}{\partial y}}_{\text{Flux convectif de masse}} = \underbrace{\frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}} - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w}}_{\text{Termes source}}} \quad (2.22)$$

La formule (2.22) est une équation conservative qui s'interprète aisément de façon physique. En effet, on a simplement écrit qu'en un point  $(x, y)$  du profil, la variation de la hauteur du film dépend des termes sources (impact de gouttes, évaporation et formation de givre) et des flux convectifs de masse du film.

Cette équation n'est pas fermée, car elle possède pour l'instant trois inconnues ( $h_f$ ,  $\hat{v}_x$  et  $\hat{v}_y$ ).

### 2.3.1.2 Équation de conservation de l'énergie

Le raisonnement effectué pour obtenir (2.22) peut se décliner pour obtenir une équation de conservation de l'énergie. En effet, de la même manière que pour la loi de conservation de la masse, on intègre l'équation de conservation de l'énergie (2.9e). Au préalable, on applique l'hypothèse couche mince exposée dans le paragraphe 2.2, qui nous permet de supprimer les termes de diffusion tangentielle. On a donc

$$\int_{a_f}^{b_f} \left[ \frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial v_x T_f}{\partial x} + \frac{\partial v_y T_f}{\partial y} + \frac{\partial v_z T_f}{\partial z} \right] dz = \frac{\lambda_w}{\rho_w c_w} \left[ \frac{\partial T_f}{\partial z} \right]_{a_f}^{b_f} \quad (2.23)$$

Détaillons chaque terme du premier membre :

$$\int_{a_f}^{b_f} \frac{\partial T_f}{\partial t} dz = \frac{\partial h_f \widehat{T}_f}{\partial t} - \frac{\partial b_f}{\partial t} T_f(b_f) + \frac{\partial a_f}{\partial t} T_f(a_f)$$

où  $\widehat{T}_f$  désigne la température moyenne dans la direction  $z$ , soit

$$\widehat{T}_f = \frac{1}{b_f - a_f} \int_{a_f}^{b_f} T_f dz = \frac{1}{h_f} \int_{a_f}^{b_f} T_f dz \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \int_{a_f}^{b_f} \frac{\partial v_x T_f}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{a_f}^{b_f} v_x T_f dz - \frac{\partial b_f}{\partial x} v_x(b_f) T_f(b_f) + \frac{\partial a_f}{\partial x} v_x(a_f) T_f(a_f) \\ \int_{a_f}^{b_f} \frac{\partial v_y T_f}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{a_f}^{b_f} v_y T_f dz - \frac{\partial b_f}{\partial y} v_y(b_f) T_f(b_f) + \frac{\partial a_f}{\partial y} v_y(a_f) T_f(a_f) \\ \int_{a_f}^{b_f} \frac{\partial v_z T_f}{\partial z} dz &= v_z(b_f) T_f(b_f) - v_z(a_f) T_f(a_f) \end{aligned}$$

Les termes barrés s'annulent car comme l'interface inférieure est partagée avec un solide (la paroi ou la glace), on a  $v_x(a_f) = v_y(a_f) = 0$ . De plus, on pose  $\mathbf{Q}_f$  le flux convectif d'enthalpie, et  $\nabla$  l'opérateur gradient tangentiel

$$\mathbf{Q}_f \stackrel{\text{def}}{=} \left( \int_{a_f}^{b_f} v_x T_f dz, \int_{a_f}^{b_f} v_y T_f dz \right)^T \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{Q}_f = \frac{\partial}{\partial x} \int_{a_f}^{b_f} v_x T_f dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{a_f}^{b_f} v_y T_f dz \quad (2.26)$$

(2.23) s'écrit donc

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h_f \widehat{T}_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q}_f \\ - \left( \frac{\partial b_f}{\partial t} + \frac{\partial b_f}{\partial x} v_x(b_f) + \frac{\partial b_f}{\partial y} v_y(b_f) - v_z(b_f) \right) T_f(b_f) &= \frac{\lambda_w}{\rho_w c_w} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=b_f} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=a_f} \right) \\ + \left( \frac{\partial a_f}{\partial t} - v_z(a_f) \right) T_f(a_f) & \end{aligned} \quad (2.27)$$

De plus le raisonnement pour obtenir les équations de conservation de la masse à chacune des interfaces ((2.19) et (2.20)) peut être décliné pour obtenir des équations de conservation du flux d'enthalpie.

Pour l'interface supérieure ( $z = b_f$ ), les apports d'énergie dans le volume de contrôle de la figure 2.2 sont les apports de masse que l'on multiplie par leurs enthalpies respectives. Par convention, pour la couche liquide, on prend comme référence de l'enthalpie l'eau liquide à 0 Kelvin. Ainsi, pour une température donnée  $T$  :

- l'enthalpie de la glace vaut  $(c_w T - L_m)$ , avec  $L_m$  la chaleur latente de fusion (*melting latent heat*)
- l'enthalpie de l'eau liquide vaut  $(c_w T)$
- l'enthalpie de la vapeur vaut  $(c_w T + L_v)$ , avec  $L_v$  la chaleur latente de vaporisation

De plus, il faut ajouter le flux de chaleur convectif provenant de l'air, ainsi que le flux de chaleur provenant du film liquide. Il vient donc

$$\boxed{\left[ \frac{\partial b_f}{\partial t} + v_x(b_f) \frac{\partial b_f}{\partial x} + v_y(b_f) \frac{\partial b_f}{\partial y} - v_z(b_f) \right] \rho_w c_w T_f(b_f) = \dot{\Phi}_{\text{imp}} - \dot{\Phi}_{\text{ev}} + \dot{\Phi}_{\text{conv}} - \lambda_w \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=b_f}} \quad (2.28)$$

Le membre de gauche représente la variation d'enthalpie dans le volume de contrôle infinitésimal porté par l'interface (cf. figure 2.2). Cette variation est égale aux différents apports d'énergie, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\Phi}_{\text{imp}} = \dot{m}_{\text{imp}} c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} & \text{flux d'énergie apporté par les gouttes} \\ \dot{\Phi}_{\text{ev}} = \dot{m}_{\text{ev}} [c_w T_f(b_f) + L_v] & \text{énergie perdue par évaporation} \\ \dot{\Phi}_{\text{conv}} = h_{\text{tc}} (T_{\text{rec}} - T_f(b_f)) & \text{flux de chaleur convectif apporté par la couche limite} \\ & - \lambda_w \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=b_f} \quad \text{flux de chaleur apporté par le film} \end{array} \right.$$

$T_{\text{imp}}^{\text{tot}} = T_{\text{imp}} + \frac{U_{\text{imp}}^2}{2c_w}$  est la température totale des gouttes, qui prend en compte l'énergie cinétique.

Pour l'interface inférieure ( $z = a_f$ ), il convient de distinguer deux cas :

- Le film ruisselle sur un bloc de givre : l'équation de conservation de l'enthalpie à cette interface s'écrit alors

$$\left[ \frac{\partial a_f}{\partial t} - v_z(a_f) \right] \rho_w c_w T_f(a_f) = \dot{\Phi}_{\text{ice,top}} + \lambda_w \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=a_f} - \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=a_f} \quad (2.29)$$

Le membre de gauche représente la variation d'enthalpie dans le volume de contrôle infinitésimal porté par l'interface. Cette variation est égale aux différents apports d'énergie, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\Phi}_{\text{ice,top}} = \dot{m}_{\text{ice,top}} (c_w T_f(a_f) - L_m) & \text{enthalpie de la glace formée} \\ + \lambda_w \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=a_f} & \text{flux de chaleur apporté par le film} \\ - \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=a_f} & \text{flux de chaleur apporté par le givre} \end{array} \right.$$

Comme le film ruisselle sur du givre, l'interface est à la température de fusion  $T_m$ . Ainsi, en injectant (2.20) dans (2.29), on trouve

$$\boxed{\dot{m}_{\text{ice,top}} L_m = -\lambda_w \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=a_f} + \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=a_f}} \quad (2.30)$$

On vient en fait de démontrer la fameuse *condition de Stefan* [84], qui stipule qu'à une interface où intervient un changement de phase liquide-solide, le taux de production de la phase solide est proportionnel à la discontinuité du flux de chaleur.

- Le film ruisselle directement sur la paroi : dans ce cas, on a immédiatement

$$a_f = v_z(a_f) = \dot{m}_{\text{ice,top}} = 0$$

Ainsi, l'équation de conservation de l'énergie à l'interface inférieure s'écrit

$$\boxed{-\lambda_w \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=0} = \dot{\Phi}_{\text{wall}} = h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - T_f(z=0)) + \dot{\Phi}_0} \quad (2.31)$$

où  $\dot{\Phi}_{\text{wall}}$  est le flux de chaleur provenant de la paroi.  $h_{\text{wall}} > 0$ ,  $T_{\text{wall}}$  et  $\dot{\Phi}_0$  sont trois nombres réels donnés.

**Remarque :** cette condition aux limites écrite pour le flux de chaleur à la paroi est une condition permettant un couplage fort entre le solveur d'accrétion et le solveur de protection thermique. Cette condition sera discutée plus en détail dans le chapitre 5 relatif au couplage entre le modèle d'accrétion et le système de protection thermique. L'avantage de cette condition aux limites est en outre qu'elle inclut les conditions classiques. En effet, si l'on veut désactiver le couplage avec la paroi, on peut considérer une condition de Neumann (flux imposé) en prenant  $h_{\text{wall}} = 0$ , une condition de Dirichlet (température imposée) en prenant  $h_{\text{wall}} = \infty$  (et  $\dot{\Phi}_0 = 0$ ), ou une condition de type coefficient d'échange en prenant  $\dot{\Phi}_0 = 0$ .

### 2.3.1.3 Forme finale des équations de conservation

Finalement, pour le film ruisselant, on a une équation de conservation de la masse et une équation de conservation de l'énergie. Ces équations diffèrent selon que le film ruisselle sur un bloc de givre ou directement sur la paroi.

- Le film ruisselle sur un bloc de givre : les équations de conservation s'écrivent

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial h_f}{\partial t} + \frac{\partial h_f \widehat{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h_f \widehat{v}_y}{\partial y} &= \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}(T_f(b_f)) - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w} & (2.32a) \\ \frac{\partial h_f \widehat{T}_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q}_f &= \left( \dot{\Phi}_{\text{imp}} - \dot{\Phi}_{\text{ev}}(T_f(b_f)) + \dot{\Phi}_{\text{conv}}(T_f(b_f)) + \right. & (2.32b) \\ & \left. \dot{\Phi}_{\text{wall}}(T_f(a_f)) - \dot{\Phi}_{\text{ice,top}} + \lambda_w \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=a_f} \right) / (\rho_w c_w) \end{aligned}}$$

- Le film ruisselle directement sur la paroi, on a donc  $a_f = v_z(a_f) = \dot{m}_{\text{ice,top}} = 0$  et  $b_f = h_f$ . Les équations de conservation s'écrivent

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial h_f}{\partial t} + \frac{\partial h_f \widehat{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h_f \widehat{v}_y}{\partial y} &= \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}(T_f(b_f))}{\rho_w} & (2.33a) \\ \frac{\partial h_f \widehat{T}_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q}_f &= \frac{\dot{\Phi}_{\text{imp}} - \dot{\Phi}_{\text{ev}}(T_f(b_f)) + \dot{\Phi}_{\text{conv}}(T_f(b_f)) + \dot{\Phi}_{\text{wall}}(T_f(a_f))}{\rho_w c_w} & (2.33b) \end{aligned}}$$

Pour rappel, on a

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\Phi}_{\text{imp}} &= \dot{m}_{\text{imp}} c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} \\ \dot{\Phi}_{\text{ev}}(T_f(b_f)) &= \dot{m}_{\text{ev}}(T_f(b_f)) [c_w T_f(b_f) + L_v] \\ \dot{\Phi}_{\text{conv}}(T_f(b_f)) &= h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - T_f(b_f)) \\ \dot{\Phi}_{\text{ice,top}} &= \dot{m}_{\text{ice,top}} (c_w T_m - L_m) \\ \dot{\Phi}_{\text{wall}}(T_f(a_f)) &= h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - T_f(z=0)) + \dot{\Phi}_0 \end{aligned} \right.$$

### 2.3.2 Modèle de fermeture : théorie de la lubrification

L'objet de cette section est de fermer les équations (2.32) et (2.33). Pour les équations sur la conservation de la masse ((2.32a) et (2.33a)), la théorie de la lubrification va être appliquée pour fermer le modèle. Cette théorie, qui ne s'applique que pour les très faibles nombres de Reynolds, permet de relier de façon algébrique la vitesse moyenne du film ( $\widehat{v}_x$  et  $\widehat{v}_y$ ) à sa hauteur ( $h_f$ ). Pour les équations de conservation d'énergie, on considérera que le film est suffisamment mince pour que la température puisse être considérée uniforme dans la direction normale.

#### 2.3.2.1 Fermeture pour l'équation de quantité de mouvement

Dans ce paragraphe, on expose comment l'équation de conservation de la masse est fermée. Le principe est d'utiliser l'équation de quantité de mouvement et de la simplifier en utilisant l'analyse dimensionnelle. Cette équation permet alors d'exprimer la vitesse moyenne du film uniquement en fonction de la hauteur et de l'écoulement externe.

On suppose que l'hypothèse onde longue exposée ci-dessus est valide. On peut donc introduire le petit paramètre  $\varepsilon$  dans les équations de quantité de mouvement (2.9b-2.9d). Pour cela, on considère l'adimensionnement suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{L} \quad , \quad \tilde{y} = \frac{y}{L} \quad , \quad \tilde{z} = \frac{z}{h_0} \quad , \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0} \\ \tilde{v}_x &= \frac{v_x}{U_0} \quad , \quad \tilde{v}_y = \frac{v_y}{U_0} \quad , \quad \tilde{v}_z = \frac{v_z}{U_0} \quad , \end{aligned} \quad (2.34)$$

où  $h_0$  et  $U_0$  sont respectivement la hauteur et la vitesse caractéristique du film. On pose  $t_0 = L/U_0$ .

(2.9a) peut être réécrite sous forme non dimensionnée

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (2.35)$$

Cette relation impose à  $\tilde{v}_z$  d'être de l'ordre de  $\varepsilon \tilde{v}_x$  et  $\varepsilon \tilde{v}_y$ . Par conséquent, outre la transformation (2.34), on ajoute la transformation  $v_z \rightarrow \varepsilon \tilde{v}_z$ . Les équations de quantité de mouvement peuvent alors s'écrire sous forme non dimensionnelle

$$\varepsilon \left[ \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}} \right] = \frac{h_0}{U_0^2} \left[ -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x \right] + \frac{1}{Re} \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{z}^2} \right] \quad (2.36a)$$

$$\varepsilon \left[ \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{z}} \right] = \frac{h_0}{U_0^2} \left[ -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y \right] + \frac{1}{Re} \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_y}{\partial \tilde{z}^2} \right] \quad (2.36b)$$

$$\varepsilon^2 \left[ \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} \right] = \frac{h_0}{U_0^2} \left[ -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z \right] + \frac{\varepsilon}{Re} \left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}^2} \right] \quad (2.36c)$$

où le nombre de Reynolds est défini par

$$Re = \frac{U_0 h_0}{\nu_w} = \rho_w \frac{U_0 h_0}{\mu_w} \quad (2.37)$$

Le modèle de lubrification utilisé dans le cadre de cette thèse consiste à ne garder que l'ordre 0 (par rapport à  $\varepsilon$ ) des équations de quantité de mouvement (2.36).

Ainsi, on peut immédiatement écrire

$$\mu_w \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_w g_x \quad (2.38a)$$

$$\mu_w \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y} - \rho_w g_y \quad (2.38b)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} - \rho_w g_z \quad (2.38c)$$

À l'interface air-film, on peut écrire la relation de Laplace généralisée

$$p(t, x, y, b_f(t, x, y)) = \underbrace{p_a(t, x, y, b_f(t, x, y))}_{\text{Pression hydrostatique}} + \underbrace{-\sigma \kappa(t, x, y)}_{\text{Forces de tension de surface}} + \underbrace{\dot{m}_{\text{imp}} v_{n, \text{imp}}}_{\text{Pression des gouttes impactantes}} \quad (2.39)$$

où  $\sigma$  est la tension de surface,  $\kappa$  la courbure de l'interface et  $v_{n, \text{imp}}$  la composante normale du vecteur vitesse des gouttes impactantes. Avec l'hypothèse onde longue, la courbure peut être approchée par la relation

$$\kappa \approx \|\Delta b_f\| \quad (2.40)$$

Dans nos applications, le terme de tension de surface n'est pour l'instant pas considéré à cause notamment de la difficulté numérique à le traiter de manière robuste (car il induit le calcul d'une dérivée troisième de la hauteur).

Ainsi, (2.38c) peut être intégré, et il vient

$$p(t, x, y, z) = p_a(t, x, y, h(t, x, y)) - \sigma \|\Delta b_f(t, x, y)\| + \dot{m}_{\text{imp}} v_{n, \text{imp}} - \rho_w g_z (b_f(t, x, y) - z) \quad (2.41)$$

De plus, la "contrainte pariétale" (qui s'applique soit à la paroi, soit à l'interface eau-givre) impose que

$$v_x(a_f) = v_y(a_f) = 0 \quad (2.42)$$

Enfin, la continuité de la contrainte tangentielle à l'interface liquide-gaz impose

$$\mu_w \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{b_f} = \tau_x, \quad \mu_w \left. \frac{\partial v_y}{\partial z} \right|_{b_f} = \tau_y \quad (2.43)$$

où  $\tau_x$  et  $\tau_y$  sont les contraintes de cisaillement dans les deux directions tangentielles.

Pour finir, on définit les trois vecteurs

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \widehat{v}_x \\ \widehat{v}_y \end{pmatrix} \quad \text{le vecteur vitesse moyenne tangentielle} \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix} \quad \text{le vecteur de contrainte de cisaillement du gaz} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{G}_t = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} \quad \text{la gravité tangentielle} \quad (2.46)$$

$$\nabla p \quad \text{le gradient de pression tangentiel} \quad (2.47)$$

En combinant (2.38, 2.42, 2.43), on obtient le profil de  $v_x$  et  $v_y$ , dont on peut calculer la moyenne. On obtient une relation vectorielle

$$\mathbf{V}(h_f) = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2\mu_w} h_f + \frac{1}{3\mu_w} (-\nabla p + \rho_w \mathbf{G}_t) h_f^2 \quad (2.48)$$



Finalement, la relation (2.22) se réécrit uniquement en fonction de la hauteur du film, soit

$$\boxed{\frac{\partial h_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f)) = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}} - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w}} \quad (2.49)$$

### 2.3.2.2 Fermeture pour la thermique : profil de température constant

Le film étant supposé très mince, on suppose que la température est uniforme dans la direction normale à la paroi. Seule la température moyenne du film  $\widehat{T}_f$  est donc une inconnue. Deux cas de figure sont alors envisageables :

- Le film ruisselle sur un bloc de givre. Dans ce cas, la température du film à l'interface solide liquide étant à la température de fusion  $T_m$ , l'équation de conservation de l'énergie dégénère vers

$$\widehat{T}_f = T_m \quad (2.50)$$

Une conséquence très importante au fait de considérer une température uniforme dans la direction  $z$ , et que l'on ne peut pas calculer de gradient dans cette même direction. Or ce gradient (évalué à l'interface  $z = a_f$ ), est indispensable pour évaluer le taux de production de givre  $\dot{m}_{\text{ice,top}}$  avec la condition de Stefan (2.30). Pour pallier le problème, on va considérer, étant donné que le film est très mince, que le gradient est uniforme également. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \lambda_w \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=a_f} &= \lambda_w \left. \frac{\partial T_f}{\partial z} \right|_{z=b_f} \\ &= \dot{m}_{\text{imp}} c_w (T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - \widehat{T}_f) - \dot{m}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) L_v + \dot{\Phi}_{\text{conv}}(\widehat{T}_f) && \text{d'après (2.19,2.28)} \\ &= \dot{m}_{\text{imp}} c_w (T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - T_m) - \dot{m}_{\text{ev}}(T_m) L_v + h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - T_m) && \text{d'après (2.50)} \end{aligned}$$

Ainsi, la condition de Stefan (2.30) permettant de calculer  $\dot{m}_{\text{ice,top}}$  se réécrit

$$\boxed{\dot{m}_{\text{ice,top}} L_m = +\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=a_f} - \dot{m}_{\text{imp}} c_w (T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - T_m) + \dot{m}_{\text{ev}}(T_m) L_v - h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - T_m)} \quad (2.51)$$

- Le film ruisselle sur la paroi. Comme la température est uniforme dans la direction normale, l'équation (2.25) donne donc

$$\mathbf{Q}_f = \left( \int_{a_f}^{b_f} v_x dz, \int_{a_f}^{b_f} v_y dz \right)^T \quad \widehat{T}_f = h_f (\widehat{v}_x, \widehat{v}_y)^T \quad \widehat{T}_f = h_f \mathbf{V}(h_f) \widehat{T}_f \quad (2.52)$$

De plus, on a  $T_f(a_f) = T_f(b_f) = T_m$ . Ainsi, l'équation de conservation de l'énergie (2.33b) devient

$$\boxed{\frac{\partial h_f \widehat{T}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f) \widehat{T}_f) = \frac{\dot{\Phi}_{\text{imp}} - \dot{\Phi}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) + \dot{\Phi}_{\text{conv}}(\widehat{T}_f) + \dot{\Phi}_{\text{wall}}(\widehat{T}_f)}{\rho_w c_w}} \quad (2.53)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{Q}_f = h_f \mathbf{V}(h_f) (\widehat{T}_f - T_m) & \text{désigne le flux convectif d'énergie} \\ \dot{m}_{\text{imp}} & \text{est le flux massique de gouttes impactantes} \\ T_{\text{imp}}^{\text{tot}} = T_{\text{imp}} + \frac{U_{\text{imp}}^2}{c_w} & \text{est la température totale} \\ & \text{des gouttes impactantes} \\ \dot{m}_{\text{ev}} = \dot{m}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) & \text{est le flux massique d'évaporation} \\ \dot{\Phi}_{\text{conv}} = h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - \widehat{T}_f) & \text{est le flux convectif de chaleur} \\ \dot{\Phi}_{\text{wall}} = h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - \widehat{T}_f) + \dot{\Phi}_0 & \text{est le flux de chaleur à la paroi} \end{array} \right.$$

### 2.3.3 Bilan pour la couche du film ruisselant

Finalement, pour la couche du film ruisselant, les inconnues sont la hauteur  $h_f$  et la température moyenne  $\widehat{T}_f$  qui sont résolues grâce une équation de conservation de la masse et une équation de conservation de l'énergie. Pour ce faire, il convient de distinguer deux cas :

- Le film ruisselle sur un bloc de givre. Dans ce cas, la température vaut la température de fusion, et on a donc

$$\frac{\partial h_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f)) = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}} - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w} \quad (2.54a)$$

$$\widehat{T}_f = T_m \quad (2.54b)$$

- Le film ruisselle directement sur la paroi, on a alors

$$\frac{\partial h_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f)) = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f)}{\rho_w} \quad (2.55a)$$

$$\frac{\partial h_f \widehat{T}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f) \widehat{T}_f) = \frac{\dot{\Phi}_{\text{imp}} - \dot{\Phi}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) + \dot{\Phi}_{\text{conv}}(\widehat{T}_f) + \dot{\Phi}_{\text{wall}}(\widehat{T}_f)}{\rho_w c_w} \quad (2.55b)$$

## 2.4 Modélisation de la couche de givre

La couche de givre est une couche solide et immobile, dans le référentiel de la paroi. Nous verrons dans la partie sur le couplage (chapitre 6) du modèle tricouche d'accrétion (faisant l'objet de cette thèse) et du modèle de mécanique (thèse de L. Bennani [13]), que des petits déplacements, des fissures et des ruptures peuvent survenir dans le bloc de givre. Néanmoins, nous considérons que seule la rupture d'un bloc a un effet sur le modèle d'accrétion, et les éventuelles fissures ou déplacements n'affectent pas les propriétés thermiques du matériau. De plus, toutes les propriétés du givre sont considérées indépendantes de la température ; on travaille donc à densité, conductivité et capacité calorifique constantes. Comme la couche de glace est supposée totalement immobile, seules des équations de conservation de la masse et de l'énergie sont à écrire, il vient

$$\rho_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = \dot{m}_{\text{ice,top}} + \dot{m}_{\text{ice,bottom}} \quad (2.56a)$$

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \left( \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \right) \quad (2.56b)$$

où  $\dot{m}_{\text{ice,top}}$  (resp.  $\dot{m}_{\text{ice,bottom}}$ ) désigne le taux de croissance de glace à l'interface supérieure (resp. inférieure), c'est-à-dire en  $z = h_s + h_i$  (resp.  $z = h_s$ ). Le lecteur pourra se référer à la figure 2.1.

De plus, nous supposons, comme expliqué dans le paragraphe 2.2, que la longueur caractéristique dans la direction tangentielle est grande devant la hauteur de la couche de givre, ce qui implique que les flux de chaleur tangentiels sont de deux ordres inférieurs aux flux de chaleur normaux ; ils sont donc négligés.

(2.56) se réduit donc à

$$\rho_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = \dot{m}_{\text{ice,top}} + \dot{m}_{\text{ice,bottom}} \quad (2.57a)$$

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \quad (2.57b)$$

L'hypothèse couche mince est difficile à justifier dans le cas général, car sa validité dépend en particulier du gradient (par rapport à  $x$  et  $y$ ) du flux de chaleur à la paroi et du coefficient d'échange thermique. Cependant, il est clair que l'hypothèse de couche mince sera d'autant plus valable que la hauteur du givre sera petite, toutes choses égales par ailleurs. L'hypothèse couche mince sera discutée dans la partie traitant de la validation bidimensionnelle (section 3.4 p. 82) du modèle et des méthodes numériques, dans laquelle des validations sur des domaines rectangulaires, mais cependant représentatifs des applications givrage, ont été menées. Par ailleurs, des comparaisons ont été effectuées entre ce modèle négligeant les flux tangentiels et un modèle résolvant pleinement le problème de thermique sur un cas réaliste de dégivrage (voir section 6.4.1 p. 173).

De plus, il faut des conditions aux limites au niveau des deux interfaces du bloc de givre. Pour chacune de ces interfaces, on devra considérer deux cas.

a. Pour l'interface inférieure, ces deux cas sont

- Le bloc de givre se trouve directement sur la paroi. Cela signifie que  $h_s = 0$  et qu'il n'y a pas de production de givre à cette interface, donc  $\dot{m}_{\text{ice,bottom}} = 0$ . Par ailleurs, comme cette interface est partagée avec la paroi, on écrit la continuité du flux de chaleur en  $z = 0$ , il vient donc

$$\boxed{-\left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=0} = \dot{\Phi}_{\text{wall}}(T_i(z=0)) = h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - T_i(z=0)) + \dot{\Phi}_0} \quad (2.58)$$

où  $\dot{\Phi}_{\text{wall}}$  est le flux de chaleur provenant de la paroi.  $h_{\text{wall}} > 0$ ,  $T_{\text{wall}}$  et  $\dot{\Phi}_0$  sont trois nombres réels donnés. Comme expliqué dans la remarque suivant l'équation (2.31), cette condition permet le couplage avec le système de protection est sera détaillée dans le chapitre 5.

- Le bloc de givre se trouve au-dessus d'une couche d'eau statique. Dans ce cas  $\dot{m}_{\text{ice,bottom}} \neq 0$ . Pour le calculer, on utilise une équation de Stefan similaire à (2.30),

$$\boxed{\dot{m}_{\text{ice,bottom}} L_m = -\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=h_s} + \lambda_w \left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=h_s}} \quad (2.59)$$

De plus, l'interface est à la température de fusion

$$\boxed{T_i(z = h_s) = T_m} \quad (2.60)$$

b. Pour l'interface supérieure, il convient également de distinguer deux cas.

- Il n'y a pas de film d'eau ruisselant au-dessus du givre. Dans ce cas, on peut facilement calculer  $\dot{m}_{\text{ice,top}}$ , il vient

$$\boxed{\dot{m}_{\text{ice,top}} = \dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_s(T_i(h_s + h_i))} \quad (2.61)$$

où  $\dot{m}_s$  ( $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ) est le taux de sublimation, qui est calculé, comme le taux d'évaporation  $\dot{m}_{ev}$ , avec l'analogie de Chilton-Colburn.

Pour la conservation de l'énergie à l'interface, on a, par analogie avec (2.28) (où le raisonnement a été mené pour le film liquide)

$$\left[ \frac{\partial(h_s + h_i)}{\partial t} - v_z(h_s + h_i) \right] \rho_i c_i T_i(h_s + h_i) = \dot{m}_{imp}(c_w T_{imp} + L_m) + \dot{\Phi}_{conv} - \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=h_s+h_i} - \dot{m}_s(T_i(h_s + h_i))(c_i T_i(h_s + h_i) + L_m + L_v)$$

L'expression est plus simple que (2.28) car comme la couche de glace est statique, on a  $v_x = v_y = 0$ .

De plus, sachant que  $a_f = h_s + h_i$ , (2.20) donne, par analogie (vu que l'on a de la glace à la place de l'eau liquide, il suffit de remplacer  $\rho_w$  par  $\rho_i$ )

$$\frac{\partial(h_s + h_i)}{\partial t} - v_z(h_s + h_i) = \frac{\dot{m}_{ice,top}}{\rho_i}$$

Ainsi, la conservation de l'enthalpie à l'interface, qui sert de condition aux limites du problème de thermique, s'écrit

$$\boxed{\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=h_s+h_i} = \dot{\Phi}_{conv} + \dot{m}_{imp}(c_w T_{imp} - c_i T_i(h_s + h_i) + L_m) - \dot{m}_s(L_m + L_v)}$$
(2.62)

- Il y a un film d'eau ruisselant au-dessus du givre, l'interface est à donc la température de fusion

$$\boxed{T_i(z = h_s) = T_m}$$
(2.63)

De plus, pour calculer  $\dot{m}_{ice,top}$ , on utilise la condition de Stefan (2.51).

## 2.5 Modélisation du film statique

Comme expliqué dans l'introduction de ce chapitre, on suppose que la couche du film se trouvant en dessous du bloc de givre est totalement statique. Elle sera donc traitée exactement de la même façon que la couche de glace. Les équations pour le film statique s'écrivent donc, par analogie avec (2.57)

$$\boxed{\rho_w \frac{\partial h_s}{\partial t} = -\dot{m}_{ice,bottom}}$$
(2.64a)

$$\boxed{\rho_w c_w \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_w \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2}}$$
(2.64b)

Pour les conditions aux limites, il faut noter que si le film statique existe, cela signifie que l'on a nécessairement du givre au-dessus (sinon, cela signifierait que cette couche d'eau n'est pas confinée, et deviendrait donc un film ruisselant). Ainsi, l'interface supérieure est à la température de fusion, on a donc

$$\boxed{T_s(h_s) = T_m}$$
(2.65)

De plus, pour calculer le taux de production de givre  $\dot{m}_{ice,bottom}$ , on utilise la condition de Stefan (2.59).

Enfin, à l'interface inférieure, partagée avec la paroi, on utilise la même condition que lorsque le givre est en contact avec la paroi (2.58)

$$\boxed{-\left.\frac{\partial T_s}{\partial z}\right|_{z=0} = \dot{\Phi}_{\text{wall}}(T_s(z=0)) = h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - T_s(z=0)) + \dot{\Phi}_0} \quad (2.66)$$

où  $\dot{\Phi}_{\text{wall}}$  est le flux de chaleur provenant de la paroi.  $h_{\text{wall}} > 0$ ,  $T_{\text{wall}}$  et  $\dot{\Phi}_0$  sont trois nombres réels donnés.

## 2.6 Synthèse du chapitre : équations résolues pour le module d'accrétion de givre

Au cours de ce chapitre, un modèle d'accrétion à trois couches a été développé. Pour ce faire, nous avons traité chacune des couches individuellement. Cependant, nous avons dû, dans certains cas, faire des traitements spécifiques aux interfaces de chacune des couches, selon la nature de l'interface. Ceci est dû au fait qu'à un point  $(x, y)$  donné, il se peut qu'il n'y ait pas les couches présentes simultanément, or la présence ou non de ces couches modifie la nature des conditions aux limites appliquées à chaque interface. Par exemple, on a vu que si un film ruisselle sur un bloc de givre, alors il est à la température de fusion, alors que s'il ruisselle directement sur la paroi, sa température est une inconnue et le flux de chaleur provenant de la paroi doit être considéré.

En fait, avec le modèle tricouche, on a, à un point  $(x, y)$  donné, 6 régimes envisageables, comme le montre la figure 2.3.

Ce paragraphe a pour objet d'expliquer ces six régimes et les équations qui sont résolues pour chacun d'eux, afin de fixer les idées du lecteur ; aucun nouveau concept n'y est développé.

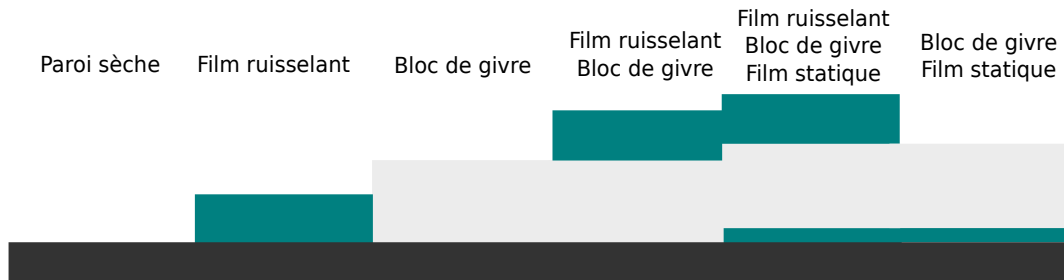


FIGURE 2.3 – 6 régimes possibles en un point  $(x, y)$

### 2.6.1 Paroi sèche : $h_i = h_s = h_f = 0$ (régime *full evaporative*)

Dans ce régime, il n'y a aucun dépôt d'eau sur la paroi, que ce soit à l'état solide ou liquide. La seule inconnue du problème est donc la température de la paroi. Rappelons qu'à la paroi, on impose une condition de type coefficient d'échange généralisé

$$\dot{\Phi}_{\text{wall}} = h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - T_{fe}) + \dot{\Phi}_0 \quad (2.67)$$

permettant un couplage thermique avec le modèle du système de protection thermique.

Le cas de la paroi sèche peut être vu comme le cas du film ruisselant seul, avec une hauteur d'eau nulle. En effet, si la hauteur d'eau est nulle, l'hypothèse consistant à considérer que la température dans la direction normale est uniforme est évidemment valable ! Ainsi,

il suffit de poser  $h_f = \nabla h_f = 0$  dans l'équation (2.55) pour avoir la température de la paroi. Par ailleurs, l'hypothèse *paroi sèche* implique que toutes les gouttes d'eau impactantes s'évaporent, on pose donc

$$\dot{m}_{\text{ev}} = \dot{m}_{\text{imp}} \quad (2.68)$$

On a donc

$$\dot{m}_{\text{imp}}(c_w(T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - T_{\text{fe}}) - L_v) + \dot{\Phi}_{\text{conv}} + \dot{\Phi}_{\text{wall}} = 0 \quad (2.69)$$

où  $T_{\text{fe}}$  est la température à la paroi. Cette expression se réécrit sous une forme explicite en  $T_{\text{fe}}$

$$T_{\text{fe}} = \frac{\dot{m}_{\text{imp}}c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} + h_{\text{tc}}T_{\text{rec}} + h_{\text{wall}}T_{\text{wall}}}{\dot{m}_{\text{imp}}c_w + h_{\text{tc}} + h_{\text{wall}}} + \frac{-\dot{m}_{\text{imp}}L_v + \dot{\Phi}_0}{\dot{m}_{\text{imp}}c_w + h_{\text{tc}} + h_{\text{wall}}} \quad (2.70)$$

La relation (2.70) respecte le *principe du maximum*. En effet, si l'on considère que  $L_v = 0$  (donc si l'on considère que l'évaporation n'est pas un processus endothermique) et que  $\dot{\Phi}_0 = 0$  (la condition aux limites en paroi est un simple coefficient d'échange),  $T_{\text{fe}}$  s'écrit comme une combinaison convexe de l'ensemble des températures mises en jeu, ce qui est conforme au principe du maximum de l'équation de la chaleur.

Dans le cas où il n'y a pas d'impact de goutte, (2.70) implique la relation  $\dot{\Phi}_{\text{conv}} = -\dot{\Phi}_{\text{wall}}$ , ce qui montre que le flux de chaleur est continu à la paroi.

### 2.6.2 Film ruisselant : $h_i = h_s = 0$ (régime *running wet*)

Lorsque seul le film ruisselant est présent sur la paroi, seules la hauteur du film  $h_f$  et la température moyenne  $\hat{T}_f$  sont inconnues. Le système d'équations à résoudre est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f)) = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}(\hat{T}_f)}{\rho_w} \\ \rho_w c_w \frac{\partial h_f \hat{T}_f}{\partial t} + \rho_w c_w \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f) \hat{T}_f) = \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{imp}} c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - \dot{m}_{\text{ev}}(\hat{T}_f) \cdot c_w \hat{T}_f \\ + h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - \hat{T}_f) - \dot{m}_{\text{ev}}(\hat{T}_f) L_v \\ + h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - \hat{T}_f) + \dot{\Phi}_0 \end{array} \end{array} \right. \quad (2.71a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f)) = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}(\hat{T}_f)}{\rho_w} \\ \rho_w c_w \frac{\partial h_f \hat{T}_f}{\partial t} + \rho_w c_w \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f) \hat{T}_f) = \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{imp}} c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - \dot{m}_{\text{ev}}(\hat{T}_f) \cdot c_w \hat{T}_f \\ + h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - \hat{T}_f) - \dot{m}_{\text{ev}}(\hat{T}_f) L_v \\ + h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - \hat{T}_f) + \dot{\Phi}_0 \end{array} \end{array} \right. \quad (2.71b)$$

(2.71a) est l'équation de conservation de la masse et (2.71b) l'équation de conservation d'énergie.

**Remarque :** La remarque portant sur le principe du maximum faite dans le sous-paragraphe précédent reste valable ici. Pour cela, il suffit d'écrire que la vitesse du film est nulle, ce qui annule le terme de flux convectif de masse, puis que  $L_v = \dot{\Phi}_0 = 0$ . De cette façon, on peut montrer de façon quasiment immédiate que  $\hat{T}_f(t)$  est une combinaison convexe de  $T_{\text{imp}}^{\text{tot}}$ ,  $T_{\text{wall}}$ ,  $T_{\text{rec}}$  et de la température initiale du film.

### 2.6.3 Bloc de givre : $h_f = h_s = 0$ (rime *ice accretion*)

Ce cas correspond à de l'accrétion en *rime ice*, c'est-à-dire en l'absence d'eau liquide. Les inconnues sont la hauteur de givre  $h_i$  ainsi que le champ de température  $T_i$ . Au vu des

hypothèses de modélisation effectuées, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = \dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_s(T_i(h_i)) \quad (2.72a) \\ \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \quad \forall z \in [0, h_i] \quad (2.72b) \\ \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{z=h_i} = \begin{array}{l} + \dot{m}_{\text{imp}} [c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - c_i T_i(h_i) + L_m] \\ - \dot{m}_s(T_i(h_i))(L_v + L_m) \\ + h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - T_i(h_i)) \end{array} \quad (2.72c) \\ -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - T_i|_{z=0}) + \dot{\Phi}_0 \quad (2.72d) \end{array} \right.$$

(2.72a) est l'équation de conservation de la masse, (2.72b) est l'équation de conservation de l'énergie à l'intérieur du domaine, et (2.72c, 2.72d) sont des équations de conservation de l'énergie aux interfaces givre-air et givre-paroi, respectivement.

#### 2.6.4 Bloc de givre et film ruisselant : $h_s = 0$ (*glaze ice accretion*)

Ce cas correspond à de l'accrétion en *glaze ice*, c'est-à-dire avec un film d'eau ruisselant au-dessus du bloc. Les inconnues sont la hauteur de givre  $h_i$ , le champ de température  $T_i$ , la hauteur du film liquide ruisselant  $h_f$  ainsi que la température moyenne du film  $\widehat{T}_f$  - cependant, la température moyenne du film étant égale à la température de fusion, elle pourrait ne pas être considérée comme une réelle inconnue. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{ice,top}} L_m = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{z=h_i} - [\dot{m}_{\text{imp}} c_w (T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - T_m) + \dot{\Phi}_{\text{conv}} - \dot{m}_{\text{ev}} L_v] \quad (2.73a) \\ \rho_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = \dot{m}_{\text{ice,top}} \quad (2.73b) \\ \frac{\partial h_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f)) = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}} - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w} \quad (2.73c) \\ \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \quad \forall z \in [0, h_i] \quad (2.73d) \\ \widehat{T}_f = T_m \quad (2.73e) \\ T_i(h_i) = T_m \quad (2.73f) \\ -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - T_i(0)) + \dot{\Phi}_0 \quad (2.73g) \end{array} \right.$$

(2.73a) est l'équation de conservation de l'énergie à l'interface givre-film, (2.73b) est l'équation de conservation de la masse du bloc de givre, (2.73c) est l'équation de conservation de la masse du film, (2.73d) est l'équation de conservation de l'énergie à l'intérieur du bloc de givre, (2.73e) et (2.73f) sont des conditions de température imposée à l'interface solide-liquide, et (2.73g) est une équation de conservation de l'énergie à l'interface givre-paroi.

#### 2.6.5 Bloc de givre et film statique : $h_f = 0$ (*rime ice + static film*)

Ce cas correspond à une accrétion sans film ruisselant au-dessus mais avec un film d'eau liquide statique présent entre le givre et la paroi. Cela peut se produire en particulier lorsqu'un système de protection thermique s'active alors qu'un bloc est déjà présent sur la

paroi. Les équations s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{ice,bottom}} L_m = \lambda_w \left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=h_s} - \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=h_s} \quad (2.74a) \\ \rho_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = \dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_s + \dot{m}_{\text{ice,bottom}} \quad (2.74b) \\ \rho_w \frac{\partial h_s}{\partial t} = -\dot{m}_{\text{ice,bottom}} \quad (2.74c) \\ \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \quad \forall z \in [h_s, h_s + h_i] \quad (2.74d) \\ \rho_w c_w \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_w \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \quad \forall z \in [0, h_i] \quad (2.74e) \\ \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=h_i+h_s} = \begin{array}{l} +\dot{m}_{\text{imp}} [c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - c_i T_i(h_i + h_s) + L_m] \\ -\dot{m}_s (T_i(h_i + h_s))(L_v + L_m) \\ +h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - T_i(h_i + h_s)) \end{array} \quad (2.74f) \\ T_i(h_s) = T_m \quad (2.74g) \\ T_s(h_s) = T_m \quad (2.74h) \\ -\lambda_w \left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=0} = h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - T_s(0)) + \dot{\Phi}_0 \quad (2.74i) \end{array} \right.$$

(2.74a) est l'équation de conservation de l'enthalpie à l'interface solide-liquide. (2.74b) est l'équation de conservation de la masse dans le bloc de givre. (2.74c) est l'équation de conservation de la masse dans le film statique. (2.74d) est l'équation de conservation de l'énergie à l'intérieur de la couche de givre. (2.74e) est l'équation de conservation de l'énergie à l'intérieur du film statique. (2.74f) est l'équation de conservation à l'interface givre-air. (2.74g) et (2.74h) imposent la température de fusion à l'interface solide-liquide, coté givre et coté film statique, respectivement. Enfin, (2.74i) est la condition aux limites à l'interface paroi-film statique.

### 2.6.6 Bloc de givre, film ruisselant et film statique (*glaze ice + static film*)

Ce dernier correspond à la présence des trois couches. Les trois hauteurs, ainsi que les températures associées sont donc inconnues. Néanmoins, la température moyenne du film



ruisselant est connue, puisqu'égal à la température de fusion. Il vient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{ice,top}} L_m = \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=h_i} - \left[ \dot{m}_{\text{imp}} c_w (T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - T_m) + \dot{\Phi}_{\text{conv}} - \dot{m}_{\text{ev}} L_v \right] \quad (2.75a) \\ \dot{m}_{\text{ice,bottom}} L_m = \lambda_w \left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=h_s} - \lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_{z=h_s} \quad (2.75b) \\ \rho_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = \dot{m}_{\text{ice,top}} + \dot{m}_{\text{ice,bottom}} \quad (2.75c) \\ \frac{\partial h_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f)) = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}} - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w} \quad (2.75d) \\ \rho_w \frac{\partial h_s}{\partial t} = -\dot{m}_{\text{ice,bottom}} \quad (2.75e) \\ \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \quad \forall z \in [h_s, h_s + h_i] \quad (2.75f) \\ \rho_w c_w \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_w \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \quad \forall z \in [0, h_i] \quad (2.75g) \\ \hat{T}_f = T_m \quad (2.75h) \\ T_i(h_s + h_i) = T_m \quad (2.75i) \\ T_i(h_i) = T_m \quad (2.75j) \\ T_s(h_i) = T_m \quad (2.75k) \\ -\lambda_w \left. \frac{\partial T_s}{\partial z} \right|_{z=0} = h_{\text{wall}} (T_{\text{wall}} - T_s(0)) + \dot{\Phi}_0 \quad (2.75l) \end{array} \right.$$

(2.75a) et (2.75b) sont les équations de conservation de l'enthalpie aux interfaces givre-film ruisselant et givre-film statique, respectivement. (2.75c), (2.75d) et (2.75e) sont les équations de conservation de la masse dans les couches de givre, du film ruisselant et du film statique, respectivement. (2.75f) et (2.75g) sont les équations de conservation de l'énergie dans les couches de givre et du film statique, respectivement. (2.75h), (2.75i), (2.75j) et (2.75k) imposent la température de fusion dans le film ruisselant et aux deux interfaces solide-liquide. Enfin, (2.75l) est la condition aux limites à la paroi.

### 2.6.7 Gestion des transitions entre les différents régimes

Le modèle tricouche consiste à résoudre une des six équations précédentes, selon la présence ou non de chacune des couches. L'équation que l'on a à résoudre dépend à la fois du temps  $t$  et du point  $(x, y)$  du profil. Par exemple, pour un point  $(x, y)$ , on peut imaginer qu'à l'instant initial, aucune goutte n'impacte, on est donc en cas de paroi sèche et on résout donc l'équation (2.70). Puis, à partir d'un certain temps, des gouttes viennent impacter et gèlent entièrement (*rime ice*), donc l'équation résolue sera (2.72). Enfin, on peut supposer qu'à partir d'un certain temps, on activera un système de protection thermique qui provoquera l'apparition d'un front de fusion à la paroi et nous conduira à résoudre (2.74).

Ce petit exemple illustre la nécessité de gérer les transitions entre chacun des régimes. En effet, tant qu'il n'y a pas de goutte qui impacte, on déduit que le taux d'évaporation est égal au taux d'impact (dans le cas présent, les deux sont nuls, mais on pourrait imaginer que les deux sont positifs et égaux, ce qui reviendrait à dire que toutes les gouttes impac-tantes s'évaporent), ce qui signifie que l'on est en régime *full evaporative*. Ensuite, lorsque les gouttes commencent à impacter, alors le taux d'évaporation devient inférieur au taux

d'impact, et les bilans thermodynamiques nous permettent de dire que l'on a uniquement du givre, on est donc en accrétion *rime ice*. Pour finir, lorsque l'on active le système de protection, on va constater que le givre se réchauffe jusqu'à ce que l'interface paroi-givre atteigne le front de fusion, ce qui provoque l'apparition du front et la transition vers le régime *rime ice + static film*.

Sur la figure 2.4 sont résumées les différentes transitions entre les six régimes.

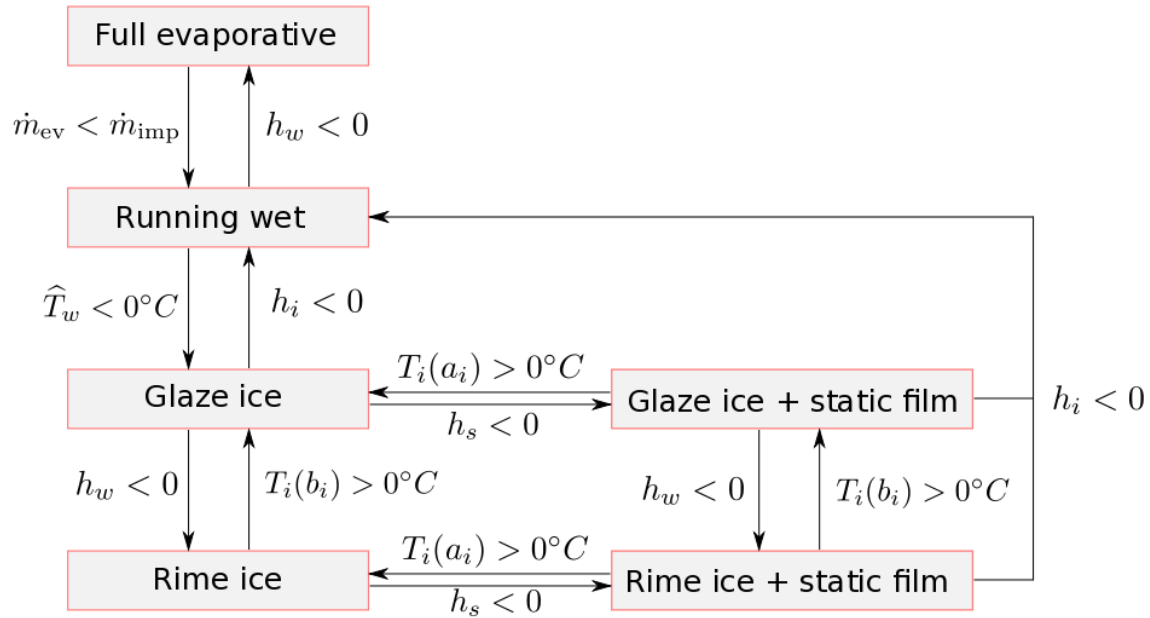


FIGURE 2.4 – Transitions entre les six régimes d'accrétion

**Remarque :** *A priori* rien n'empêche de passer du régime *full evaporative* au régime *rime ice*. Pourtant, cette transition semble ne pas être considérée dans la figure 2.4. En fait, cela signifie simplement que l'on peut passer plusieurs transitions simultanément.

## 2.7 Conclusion : intérêts et limites du modèle tricouche

Dans ce chapitre, une formulation mathématique tricouche, permettant de modéliser de façon générale l'accrétion et le ruissellement, a été développée. Elle présente l'intérêt de modéliser de manière unifiée l'ensemble des phénomènes physiques associés au processus de givrage en deux dimensions et trois dimensions.

Quelques limitations peuvent néanmoins être observées.

- Le ruissellement du film est modélisé grâce à la théorie de la lubrification. Dans cette approche, seule une équation de conservation de la masse est écrite, ce qui mathématiquement revient à considérer que la vitesse du film est fonction de sa hauteur. Physiquement, on fait l'hypothèse que la force dominante est celle exercée par l'écoulement d'air, et que le film est localement à l'équilibre avec la couche limite présente au-dessus. Par conséquent aucune instabilité ne peut se former. Cette hypothèse semble cohérente avec les applications en givrage car les films mis en jeu sont très minces. En effet, dans le paragraphe 6.3.1 (p. 164), on compare le modèle de film utilisé ici avec un modèle de

Saint-Venant (capable certaines instabilités longitudinales) pour une application réaliste, et on montre que les hauteurs de films prévues par les deux modèles sont très proches. Cependant, Tsao *et al.* [89] ont montré avec une analyse théorique que les « vagues » présentes sur un film qui gèle peuvent expliquer en partie la nature des rugosités du givre. Prévoir ces vagues pourrait donc représenter un enjeu crucial à l'avenir. De plus, on sait grâce à des observations expérimentales qu'il se forme d'importantes instabilités tridimensionnelles lorsque les films sont très minces, ce qui est le cas dans nos applications. Ainsi, le film ne demeure pas continu mais se divise en ruisselets, contraint par les forces de capillarité non prises en compte dans le modèle tricouche. Ces arguments laissent donc penser qu'à l'avenir il serait judicieux de rajouter l'équation sur la quantité de mouvement, en utilisant notamment un modèle de fermeture consistant (c'est-à-dire capable de prévoir les bons seuils d'instabilité), tel que le modèle de Ruyer-Quil *et al.* [73, 74], ainsi qu'un modèle pour les forces de capillarités. La stabilité numérique de ces termes pourraient par exemple être assurée en s'inspirant des travaux de Noble *et al.* [65].



FIGURE 2.5 – Exemples de ruisselets congelés derrière la zone de captation de gouttes. L'écoulement est dirigé de gauche à droite.

- Le modèle a été développé en considérant une direction normale et deux directions tangentielles, la notion de courbure n'a pas été évoquée. Par conséquent, il est supposé dans le modèle que la courbure de la paroi et/ou des différentes couches a un effet négligeable. Cette hypothèse, qui est correcte lorsque les couches sont très minces, peut être mise en défaut dans les cas où les hauteurs de givre deviennent grandes devant les rayons de courbure, comme, par exemple pour des formes en corne.



FIGURE 2.6 – Exemple de forme en corne

On pourrait donc envisager de prendre en compte des termes de courbure dans les équations, afin de mieux modéliser les formes de givre telles que celles de l'image ci-dessus.

- Dans le cadre de cette étude, on considère que les flux de chaleur sont négligeables dans les directions tangentielles. Des études numériques tendent à valider cette hypothèse dans certains cas d'application, mais on peut raisonnablement penser qu'elle est discutable dans le cas de l'image 2.6 où les dimensions du bloc de givre sont comparables dans toutes les directions. La prise en compte de ces flux pourrait donc être une perspective intéressante.

Le modèle tricouche dépend des variables d'espace  $(x, y, z)$  et du temps  $(t)$ . Les deux prochains chapitres ont pour objet la discrétisation en temps et en espace de ce modèle.

## Chapitre 3

# Discrétisation des transferts de chaleur dans le modèle tricouche

Dans le chapitre précédent, un modèle à trois couches d'accrétion de givre a été proposé. Dans deux de ces couches, la couche de givre et le film confiné entre le givre et la paroi, les transferts de chaleur sont modélisés grâce à l'équation de la chaleur. L'objectif de ce chapitre est de discrétiser cette équation dans la direction normale à la paroi. Ainsi, à l'issue de cette étape, nous obtiendrons un modèle semi-discret, au sens où il sera discrétisé par rapport à la direction normale à la paroi ( $z$ ), et continu par rapport aux variables tangentielles ( $x$  et  $y$ ) et au temps ( $t$ ).

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Motivation et principes généraux</b>	<b>68</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthode intégrale approchée (MIA)</b>	<b>70</b>
3.2.1	Présentation de la méthode	70
3.2.2	Étude du domaine de validité et des limites de la MIA	71
3.2.3	Conclusion sur la méthode intégrale approchée	77
<b>3.3</b>	<b>Méthode de Galerkin (MG)</b>	<b>77</b>
3.3.1	Principe général de la méthode	77
3.3.2	Choix des fonctions de base	81
<b>3.4</b>	<b>Validations académiques</b>	<b>82</b>
3.4.1	Méthode de calcul de la solution de référence	84
3.4.2	Premier cas test : propagation d'un front de fusion unidimensionnel	85
3.4.3	Second cas test : propagation d'un front de fusion bidimensionnel	88
<b>3.5</b>	<b>Conclusion et forme finale du modèle tricouche</b>	<b>92</b>

---

### 3.1 Motivation et principes généraux

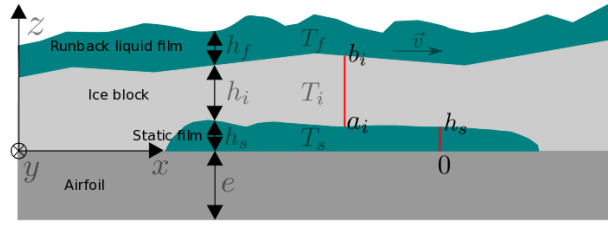


FIGURE 3.1 – Illustration : résolution d'un problème de thermique dans chacune des couches du modèle d'accrétion et de ruissellement

Dans les applications en givrage, le film ruisselant du modèle tricouche est très cisailé par l'écoulement externe et donc très mince, ce qui nous permet de supposer que la température dans cette couche est indépendante de  $z$ . En revanche, pour les deux autres couches, une telle hypothèse est trop restrictive pour les applications visées. Ainsi, l'équation de la chaleur doit être résolue dans ces deux couches.

Sachant que dans ces couches les flux de chaleur sont négligés dans les directions tangentielles, on est en fait ramené à résoudre, pour tout point  $(x, y)$  du solide, un problème de thermique unidimensionnel dans la couche de givre et un dans la couche de film statique. Chacun de ces problèmes unidimensionnels peut s'écrire sous la forme suivante :

soient  $a$  et  $b$  deux fonctions définies de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, b(t) \geq a(t) \quad (3.1)$$

Typiquement, pour les applications visées,  $a$  et  $b$  représentent  $a_i$  et  $b_i$  pour le problème de thermique dans la couche de glace, et  $0$  et  $h_s$  pour la couche d'eau liquide confinée entre la paroi et la glace (*cf.* figure 3.1).

Par commodité, on introduit les notations suivantes

$$T_a(t) \stackrel{\text{déf}}{=} T(a(t))$$

$$T_b(t) \stackrel{\text{déf}}{=} T(b(t))$$

De plus, comme le champ de température  $T$  ne dépend que de  $t$  et de  $z$ , on introduit la notation *point* pour les dérivées temporelles et la notation *prime* pour les dérivées spatiales. On a donc

$$\dot{T}(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial T}{\partial t}(t, x)$$

$$T''(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(t, x)$$

$$\dot{a}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial a}{\partial t}(t)$$

$$\dot{b}(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial b}{\partial t}(t)$$

$$T'_a(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial T}{\partial z}(t, a(t))$$

$$T'_b(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial T}{\partial z}(t, b(t))$$

On définit alors l'équation de la chaleur sur  $]a(t), b(t)[$  avec des conditions aux limites aux bords supérieur et inférieur :

$$\begin{cases} \rho c_p \dot{T} - \lambda T'' = 0 & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]a(t), b(t)[ & (3.2a) \\ f_a(T_a, T'_a) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^{+*} & (3.2b) \\ f_b(T_b, T'_b) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^{+*} & (3.2c) \end{cases}$$

où  $f_a$  et  $f_b$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

Les conditions aux limites (3.2b, 3.2c) expriment, aux interfaces, une relation entre température et flux de chaleur. Elles permettent de considérer de façon abstraite les deux types de conditions aux limites du modèle tricouche.

— Condition de Dirichlet (température de fusion, due à une interface eau liquide - givre)

$$f_x(T, T') = T - T_m \quad (3.3)$$

où  $x$  peut désigner  $a$  ou  $b$ .

— Condition de Fourier-Robin (interface partagée avec la paroi ou l'atmosphère)

$$f_x(T, T') = \lambda \partial_z T' + g_x(T) \quad (3.4)$$

où  $g$  est une fonction réelle. Elle peut se mettre sous la forme d'un coefficient d'échange si seule la convection est considérée, et peut avoir une forme non linéaire lorsque l'évaporation (ou la sublimation) est considérée. Cette fonction  $g$  peut également ne pas dépendre de la température  $T$ , lorsque l'on considère une condition de Neumann (flux imposé) à la paroi.

Cette partie traite uniquement de la conduction de la chaleur entre les bornes  $a$  et  $b$ . On considère que l'évolution au cours du temps de ces bornes est connue. Dans les applications en givrage, l'évolution des bornes dépend du problème de conduction de chaleur. Par exemple, une de ces bornes peut représenter un front de fusion, qui est évidemment fonction de la conduction de la chaleur dans le domaine  $\Omega$ . Cependant, le fait de ne pas expliciter la façon dont l'évolution des bornes est traitée ne présente aucune limitation quant à la méthode d'approximation de l'équation de la chaleur. En pratique, il suffira d'ajouter des équations d'évolution sur les bornes  $a$  et  $b$ .

Pour des raisons de temps de calcul et de simplicité de mise en œuvre, nous avons choisi de nous limiter à des méthodes de discrétisation sans maillage. Nous en avons étudié et comparé deux.

— **Méthode intégrale approchée (MIA)** : cette approche consiste à intégrer les équations de la chaleur sur la hauteur du domaine considéré. Cela conduit à une équation différentielle en temps sur la température moyenne. Ensuite, un modèle de fermeture doit être utilisé. Dans ces travaux, nous avons considéré un profil de température parabolique, qui fait donc intervenir deux inconnues supplémentaires. Pour fermer le système, on utilise les conditions aux limites aux deux bornes du domaine ( $a_i$  et  $b_i$ , ou 0 et  $h_s$  sur la figure 3.1). Ainsi, nous avons trois équations et trois inconnues pour le problème thermique.

Cette méthode, qui s'inspire de ce qui se fait dans la communauté des films minces s'écoulant sur une paroi, a été la première implémentée dans cette thèse. Elle s'est avérée peu robuste et peu précise lorsque l'on considèrerait des épaisseurs trop importantes. Pour pallier ces limitations, une deuxième méthode a été mise en place :

— **Méthode de Galerkin (MG)** : dans cette approche de type variationnel, on intègre l'équation de la chaleur sur des fonctions test. On discrétise ensuite la température sur une famille de fonctions que l'on se donne *a priori*. Ainsi, la dimension

du problème de thermique est la même que la dimension de la famille que l'on s'est donnée. Cette méthode, comme nous le verrons dans la partie sur la validation, s'est avérée bien plus précise, plus robuste et plus stable numériquement que la MIA. En outre, elle se révèle aussi performante en termes de temps de calcul, même lorsque l'on considère un grand nombre de degrés de liberté. L'explication probable est le fait qu'elle soit numériquement mieux posée. Par conséquent, la méthode de Galerkin est prioritairement utilisée pour les simulations numériques.

## 3.2 Méthode intégrale approchée (MIA)

### 3.2.1 Présentation de la méthode

Le principe de la MIA est d'intégrer dans la direction  $z$  l'équation de la chaleur (3.2a), afin de réduire la dimension du problème. Il vient

$$\int_{z=a(t)}^{b(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dz = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left[ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=b(t)} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=a(t)} \right] \quad (3.5)$$

En appliquant la règle Leibniz de dérivation sous le signe d'intégration, on trouve la relation

$$\frac{\partial h \hat{T}}{\partial t} + \dot{a} T_a - \dot{b} T_b = \frac{\lambda}{\rho c_p} (T'_b - T'_a) \quad (3.6)$$

où les notations suivantes ont été introduites

$$\left\{ \begin{array}{l} h(t) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} b(t) - a(t) \quad \text{Hauteur du domaine mobile} \\ \hat{T} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{1}{h(t)} \int_{z=a(t)}^{b(t)} T dz \quad \text{Température moyenne du domaine} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Le fait d'intégrer (3.2a) sur la hauteur nous permet d'obtenir une équation d'évolution sur la température moyenne  $\hat{T}$ , mais fait apparaître les quatre inconnues  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $T'_a$  et  $T'_b$ . Les conditions aux limites (3.2b, 3.2c) donnent une relation entre  $T_a$  et  $T'_a$  et entre  $T_b$  et  $T'_b$ , ce qui permet d'éliminer deux des inconnues.

Il est donc nécessaire de considérer un modèle de fermeture afin d'éliminer les deux dernières inconnues.

La solution adoptée est de présumer la forme du profil de température. Afin de ne pas avoir à considérer d'équation supplémentaire, on a choisi de considérer un profil parabolique, avec donc trois degrés de liberté. Le profil de température s'écrit donc

$$T(t, z) = T_a(t) + 2(3\hat{T}(t) - 2T_a(t) - T_b(t)) \frac{z - a(t)}{h(t)} + 3(T_b(t) + T_a(t) - 2\hat{T}(t)) \left( \frac{z - a(t)}{h(t)} \right)^2 \quad (3.8)$$

On peut aisément vérifier que (3.8) est en accord avec (3.7), en montrant que  $T(a) = T_a$ ,  $T(b) = T_b$  et  $\frac{1}{h} \int_a^b T(z) dz = \hat{T}$ . Le fait d'utiliser ce profil permet d'écrire deux équations supplémentaires reliant les trois températures mises en jeu ( $\hat{T}$ ,  $T_a$  et  $T_b$ ) et les dérivées des



températures. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} T'_a &= \frac{-4T_a + 6\widehat{T} - 2T_b}{h} \\ T'_b &= \frac{2T_a - 6\widehat{T} + 4T_b}{h} \end{aligned}$$

Finalement, on peut réécrire (3.6) en ayant les grandeurs  $T'_a$  et  $T'_b$

$$\frac{\partial h\widehat{T}}{\partial t} + T_a\dot{a} - T_b\dot{b} = 6\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{T_a - 2\widehat{T} + T_b}{h} \quad (3.9a)$$

$$f_a\left(T_a, \frac{-4T_a + 6\widehat{T} - 2T_b}{h}\right) = 0 \quad (3.9b)$$

$$f_b\left(T_b, \frac{2T_a - 6\widehat{T} + 4T_b}{h}\right) = 0 \quad (3.9c)$$

### 3.2.2 Étude du domaine de validité et des limites de la MIA

L'objectif de ce paragraphe est d'estimer *a priori* la précision de la méthode intégrale à l'aide d'un problème de chauffage.

Soit un domaine unidimensionnel, qui pourrait être un bloc de givre, d'épaisseur  $e > 0$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , de masse volumique  $\rho$  et de capacité calorifique  $c_p$ . A l'instant initial, ce domaine se trouve à la température  $T_0$ . Sur le bord inférieur de ce domaine, on applique une condition aux limites de type coefficient d'échange, avec un coefficient d'échange  $h_{tc}$  et une température de référence  $T_\infty$ . Le bord supérieur est supposé adiabatique.

Mathématiquement, le problème revient donc à chercher  $T : \mathbb{R}^+ \times [0, e] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t}(t, z) = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(t, z) \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]0, e[ \quad (3.10a) \\ T(0, z) = T_0 \quad \forall z \in [0, e] \quad (3.10b) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, 0) = h_{tc}(T_\infty - T(t, 0)) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.10c) \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, e) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.10d) \end{array} \right.$$

#### 3.2.2.1 Analyse dimensionnelle

Dans un premier temps, nous effectuons une analyse dimensionnelle afin de déterminer une condition suffisante pour qu'en tout instant, le profil de température soit proche d'une droite. Dans ce cas, nous en déduisons que comme la MIA approche le profil avec une parabole, on peut considérer qu'elle permet de calculer la solution du problème de chauffage avec une très bonne précision.

L'analyse dimensionnelle consiste à comparer deux ordres de grandeur du problème. Le premier est le *temps de diffusion*, qui est le temps caractéristique que met la chaleur à diffuser du bas du domaine vers le haut. Le second est le *temps de chauffage*, qui est le temps nécessaire pour amener globalement le domaine de la température  $T_0$  vers la température  $T_\infty$ .

- Temps de diffusion : le temps de diffusion est défini comme le temps caractéristique nécessaire à la chaleur pour se propager dans le domaine. Il s'estime en considérant l'équation (3.10a) sous sa forme adimensionnelle. Pour adimensionner cette équation, on considère que la longueur caractéristique du problème est l'épaisseur  $e$  du domaine, et que la différence de température caractéristique est  $\Delta T = T_0 - T_\infty$ . Le temps de diffusion est noté  $\tau_d$ . On peut donc utiliser l'adimensionnement suivant pour (3.10a)

$$z = \tilde{z}e, \quad T = T_\infty + \Delta T \tilde{T}, \quad t = \tilde{t}\tau_d$$

où la notation tilde désigne toujours des variables adimensionnelles.

Il vient donc

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \tau_d \frac{\lambda}{\rho c_p e^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2}$$

En considérant que ces dérivées doivent être de l'ordre de l'unité (ce qui revient à considérer que la longueur caractéristique et la différence de température caractéristique ont bien été choisies), on a

$$\tau_d = \frac{\rho c_p e^2}{\lambda} \quad (3.11)$$

- Temps de chauffage : le temps de chauffage est défini comme le temps caractéristique nécessaire pour faire passer le domaine de la température  $T_0$  à la température  $T_\infty$ . Ce temps est noté  $\tau_h$ . On l'obtient en travaillant sur l'évolution de la moyenne (spatiale) de la température du domaine.

En intégrant (3.10a) sur le domaine, et en y injectant les conditions aux limites (3.10c, 3.10d) on trouve

$$\rho c_p e \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = h_{tc}(T_\infty - T(z=0))$$

où  $\hat{T}$  désigne la température moyenne du domaine, soit  $\hat{T} = \frac{1}{e} \int_0^e T dz$

Cette équation est ensuite intégrée de 0 à  $\tau_h$

$$\rho c_p e (\hat{T}(t = \tau_h) - \hat{T}(t = 0)) = \int_0^{\tau_h} \underbrace{h_{tc}(T_\infty - T(t, z=0))}_{\Phi(t)} dt$$

où  $\Phi$  désigne le flux de chaleur apporté au système via la condition aux limites en  $z = 0$ . A l'instant initial, on a  $T(t = 0, z = 0) = T_0$ , donc le flux de chaleur au bord  $z = 0$  vaut  $\Phi(t = 0) = -h_{tc}\Delta T$ . A l'état final, ce flux est nul, puisque  $T(z = 0) = T_\infty$ . Entre l'instant  $t = 0$  et  $\tau_h$ , faisons l'hypothèse que l'on peut interpoler linéairement  $\Phi$ , il vient donc

$$\Phi(t) \approx -h_{tc}\Delta T \frac{\tau - t}{\tau} \Rightarrow \int_0^{\tau_h} h_{tc}(T_\infty - T(t, z=0)) dt \approx -\frac{\tau_h}{2} h_{tc}\Delta T$$

De plus, par définition,  $\hat{T}(t = 0) = T_0$  et  $\hat{T}(t = \tau_h) = T_\infty$ , ce qui donne  $\hat{T}(t = \tau_h) - \hat{T}(t = 0) = -\Delta T$ . Finalement, on a donc une relation pour  $\tau_h$  qui s'écrit

$$\tau_h = 2 \frac{\rho c_p e}{h_{tc}} \quad (3.12)$$

Pour conclure cette analyse dimensionnelle, adimensionnons cette fois l'équation (3.10a) avec le temps de chauffage, qui est, en pratique, le temps sur lequel on s'intéresse au problème. On introduit donc un adimensionnement, que l'on note avec une étoile pour éviter la confusion avec le précédent

$$z = \tilde{z} e, \quad T = T_\infty + \Delta T \tilde{T}, \quad t = \tilde{t} \tau_h$$

Ce qui donne

$$\frac{\tau_d}{\tau_h} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \quad (3.13)$$

Par conséquent, on déduit que si le rapport  $\frac{\tau_d}{\tau_h}$  est petit (c'est-à-dire si le temps de diffusion est petit devant le temps de chauffage), alors (3.13) dégénère vers

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \quad (3.14)$$

et par suite, le profil de température est linéaire.

Or, on a

$$\frac{\tau_d}{\tau_h} = \frac{1}{2} \frac{h_{ic} e}{\lambda} = \frac{1}{2} Bi \quad (3.15)$$

où  $Bi = \frac{h_{ic} e}{\lambda}$  désigne le nombre de Biot [17].

Finalement, on peut donc conclure que si le nombre de Biot est petit devant 1, alors le profil de température est très proche d'une droite. Comme la MIA considère que le profil de température est parabolique, on s'attend à ce que cette méthode soit précise.

Par ailleurs, étant donné qu'une parabole possède un degré de liberté de plus qu'une droite, on peut espérer que la méthode restera précise même pour des nombres de Biot supérieurs. En fait, l'expérience numérique montre que cette méthode fonctionne très bien pour des nombres de Biot de l'ordre de l'unité mais se révèle peu précise, voire très peu *robuste*, pour des nombres de Biot supérieurs. Le sens à donner au terme *robustesse* est précisé dans la partie 3.4 (p. 82), où on montre par des expériences numériques que la méthode intégrale est mal adaptée à la simulation de fronts de fusion de blocs de givre "épais".

### 3.2.2.2 Comparaison entre la solution donnée par la MIA et la solution exacte

Dans cette partie, on calcule d'une part la solution exacte du problème (3.10) et d'autre part la solution donnée par la MIA, afin de vérifier et d'affiner les résultats obtenus grâce à l'analyse dimensionnelle.

Pour cela, on montre que la solution du problème (3.10) ne dépend que du nombre de Biot. En effet, on adimensionne le problème à l'aide de la différence de température caractéristiques  $\Delta T$  et du temps de diffusion  $\tau_d$ , tels qu'ils ont été définis précédemment.

On pose ensuite les grandeurs non dimensionnelles (caractérisées par le symbole tilde) suivantes

$$\begin{cases} \tilde{t} = \frac{t}{\tau_d} \\ \tilde{z} = \frac{z}{e} - 1 \\ \tilde{T} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \end{cases}$$

Le problème (3.10) se réécrit alors sous forme non dimensionnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{z}) = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2}(\tilde{t}, \tilde{z}) \quad \forall (\tilde{t}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]-1, 0[ \\ \tilde{T}(0, \tilde{z}) = 1 \quad \forall \tilde{z} \in [-1, 0] \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{t}, -1) = Bi T(\tilde{t}, -1) \quad \forall \tilde{t} > 0 \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{t}, 0) = 0 \quad \forall \tilde{t} > 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

où le nombre de Biot  $Bi$  est défini comme suit

$$Bi = \frac{h_{tc} e}{\lambda} \quad (3.17)$$

**Remarque :** Habituellement, l'adimensionnement pour la grandeur spatiale se fait de telle sorte que  $\tilde{z}$  soit défini entre 0 et 1. Le choix de la définir entre  $-1$  et 0 permet, dans le cas présent, de simplifier considérablement les calculs dans la suite.

À partir de maintenant, on omet la notation *tilde*. Le problème adimensionnel à résoudre s'écrit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{T}(t, z) = T''(t, z) \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]-1, 0[ \\ T(0, z) = 1 \quad \forall z \in [-1, 0] \\ T'(t, -1) = Bi T(t, -1) \quad \forall t > 0 \\ T'(t, 0) = 0 \quad \forall t > 0 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

On peut montrer que la solution du problème (3.18) s'écrit sous la forme d'une série de fonctions :

$$T(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-w_n^2 t} \cos(\omega_n z) \quad (3.19)$$

où

$$A_n = \frac{4 \sin \omega_n}{\sin(2\omega_n) + 2\omega_n} \quad (3.20)$$

où les  $\omega_n > 0$  sont définis de façon implicite comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n \tan \omega_n = Bi \text{ et } \omega_n \in \Lambda_n \\ \Lambda_n = ]n\pi, \pi/2 + n\pi[ \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Une démonstration formelle de ce résultat est présentée en annexe C. On montre en particulier que les  $\omega_n$  sont définis sans ambiguïté car, sur chaque  $\Lambda_n$ , la fonction  $\omega \rightarrow \omega \tan \omega$  est bijective et prend toutes les valeurs positives.

Par ailleurs, la résolution par MIA permet de supprimer la variable  $z$ , en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T}(t) = 6(T_a(t) - 2\hat{T}(t) + T_b(t)) \quad \forall t > \mathbb{R}^+ \\ T_a(0) = \hat{T}(0) = T_b(0) = 1 \\ -4T_a(t) + 6\hat{T}(t) - 2T_b(t) = Bi T_a(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ -2T_a(t) + 6\hat{T}(t) - 4T_b(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (3.22)$$

qui se réécrit sous une forme très simple

$$\begin{cases} \hat{T}(t) = -\alpha\hat{T}(t) & \forall t > 0 \\ T_a(0) = \hat{T}(0) = T_b(0) = 1 \\ T_a(t) = \alpha\hat{T}(t) & \forall t > 0 \\ T_b(t) = \frac{3+\alpha}{2}\hat{T}(t) & \forall t > 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

où

$$\alpha = \frac{3}{3 + Bi} \quad (3.24)$$

La résolution de (3.23) donne, pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{cases} \hat{T}(t) = e^{-Bi\alpha t} \\ T_a(t) = \alpha\hat{T}(t) \\ T_b(t) = \frac{1}{2}(3 - \alpha)\hat{T}(t) \end{cases} \quad (3.25)$$

Sur cet exemple, on remarque que seule la température moyenne  $\hat{T}$  est continue en  $t = 0$ . Les températures d'interfaces  $T_a$  et  $T_b$  ne le sont pas, puisqu'on a  $T_a(0) = T_b(0) = 1$ , et

$$\begin{aligned} T_a(t) &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \alpha && \stackrel{\text{déf}}{=} T_a^{0+} \\ T_b(t) &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{2}(3 - \alpha) && \stackrel{\text{déf}}{=} T_b^{0+} \end{aligned}$$

Notons également que le *principe du maximum* n'est pas respecté en utilisant la méthode MIA. En effet, la température d'interface supérieure  $T_b$ , au voisinage de 0, est supérieure à 1. Or, le problème (3.19) est un barreau de température initiale égale à 1 et qui est refroidi au cours du temps. Le principe du maximum stipule donc que le barreau devrait, en tout point et en tout instant, être inférieur ou égal à 1, ce qui n'est pas le cas avec la MIA.

Ces problèmes de discontinuité et de création d'extrema, qui sont d'autant plus importants à mesure que le nombre de Biot  $Bi$  augmente, peuvent s'avérer très pénalisants pour les problématiques de givrage. En effet, dans cette thématique, il est primordial de prévoir les températures d'interface avec une bonne précision, car ces températures déterminent les apparitions des fronts de changement de phase. A titre d'exemple, si l'on revient au problème dimensionnel, supposons que l'on ait  $e = 20$  mm,  $T_0 = -5^\circ\text{C}$ ,  $T_\infty = -25^\circ\text{C}$ ,  $h_{tc} = 500$  W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-1</sup>. Pour les caractéristiques physiques de la glace, on prend les grandeurs classiques de la littérature  $\lambda_i = 2.1$  W.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>,  $\rho_i = 917$  kg.m<sup>-3</sup> et  $c_i = 2060$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>. Dans ce cas, l'interface supérieure, lorsque  $t \rightarrow 0$  vaut

$$T_\infty + T_b^{0+}(T_0 - T_\infty) \approx 1^\circ\text{C}$$

Au temps initial, la MIA prévoit une température d'interface supérieure ( $T_b$ ) supérieure à 0°C, alors que toutes les températures du problème exact sont, par construction, négatives. Dans le modèle tricouche, la MIA prévoira donc l'apparition d'un front de fusion à l'interface supérieure, ce qui n'est évidemment pas physique. Toutes choses égales par ailleurs, le problème sera d'autant plus important que la température  $T_\infty$  sera petite. Autrement dit, plus on refroidit le système par l'interface inférieure, plus la MIA prévoit une température d'interface supérieure importante, à cause de la création d'un extremum non physique.

Ce problème de la MIA s'atténue avec le nombre de Biot. Traçons  $T_a^{0+} - 1$  et  $T_b^{0+} - 1$  en fonction du nombre de Biot. Comme  $T_a^{0+}$  et  $T_b^{0+}$  sont, dans la solution exacte, égales à 1, on a donc immédiatement une estimation de l'erreur relative de la MIA.

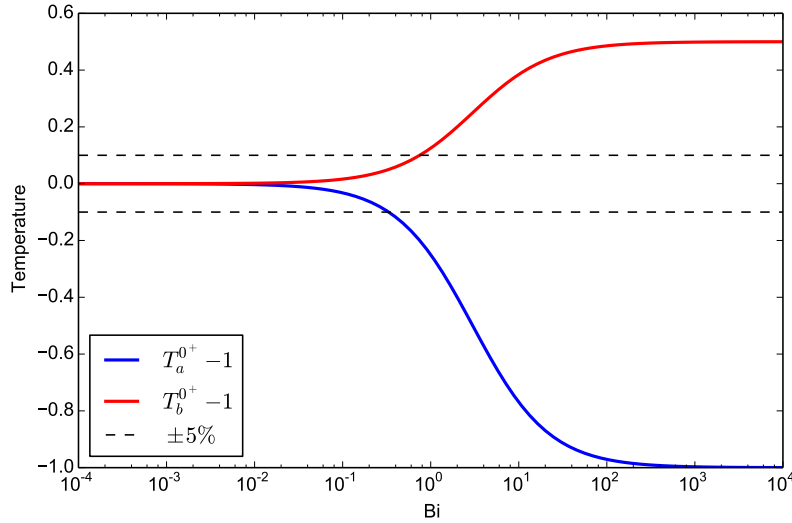
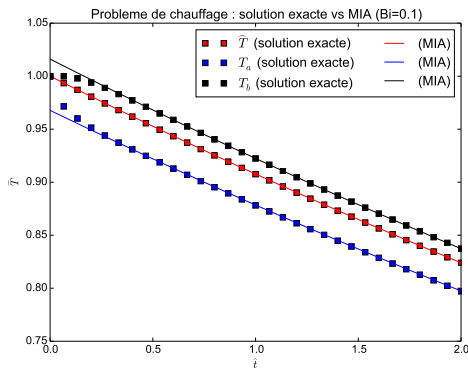


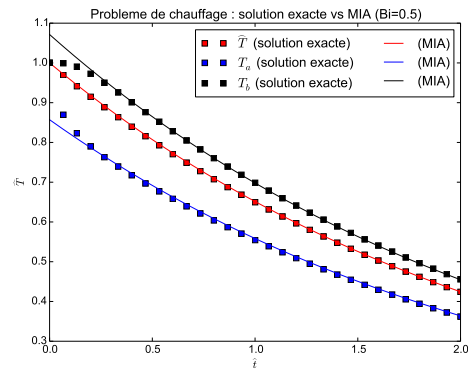
FIGURE 3.2 – Températures d'interface en fonction du nombre de Biot lorsque  $t \rightarrow 0$  pour le problème (3.18) résolu par MIA

Sur cette figure, on observe que pour des nombres de Biot inférieurs à l'unité, la discontinuité est au maximum de l'ordre de 10%, ce qui est acceptable pour les applications visées.

Traçons enfin, pour quelques nombres de Biot, la solution exacte et la solution MIA du problème (3.18). Sur ces figures, on observe le problème de discontinuité temporelle et de non respect du principe du maximum évoqué plus haut ne représente que quelques pourcents pour les nombres de Biot inférieurs à 1. On peut également noter que pour des grands nombres de Biot (par exemple  $Bi=1000$ , voir figure 3.3(d)), la MIA donne des résultats qualitativement précis lorsque l'on s'éloigne de l'instant initial (tout en considérant une zone de transition). On peut donc conclure que la principale limite de la MIA est qu'elle réagit mal aux variations brusques des conditions aux limites, mais s'avère précise, même pour des nombres de Biot importants, lorsque ces conditions aux limites sont stationnaires.



(a)  $Bi=0.1$



(b)  $Bi=0.5$

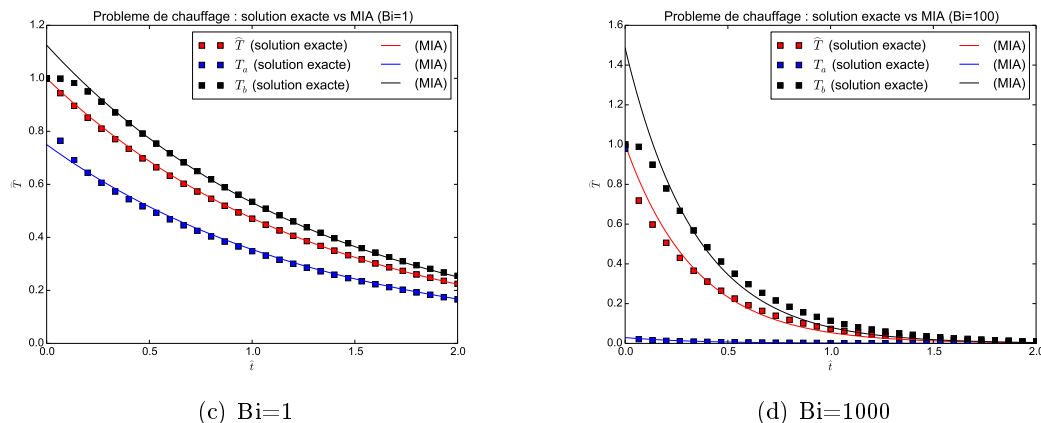


FIGURE 3.3 – Solutions exactes et MIA du problème (3.18)

### 3.2.3 Conclusion sur la méthode intégrale approchée

Une méthode intégrale baptisée MIA a été développée dans cette section. À l'aide d'étude d'ordre de grandeur, nous avons montré que cette méthode est précise pour des nombres de Biot au plus de l'ordre de 1. Nous avons également vu que pour des nombres de Biot supérieurs, la MIA présente la limitation majeure de pouvoir présenter des discontinuités en temps, au niveau des interfaces, qui ne sont pas physiques.

Cela est dû à la structure des équations résolues par la MIA. En effet, le fait d'intégrer l'équation de la chaleur sur la hauteur nous donne une équation d'évolution seulement sur la température moyenne alors que les températures d'interface servent à faire respecter les conditions aux limites. Ainsi, si les conditions aux limites varient brusquement, les températures d'interface vont également varier brusquement, alors que l'équation de la chaleur doit normalement lisser en temps ces variations. Pour résumer, on peut dire que l'équation de la chaleur possède des propriétés régularisantes (malgré des conditions aux limites irrégulières, la solution est régulière), mais la MIA ne conserve pas ces propriétés. Une étude plus approfondie de ce résultat est proposée en annexe E.

Par ailleurs, nous étayerons nos analyses sur la précision de la MIA dans le paragraphe 3.4 qui est consacré à la validation des méthodes numériques pour l'équation de la chaleur développées dans cette thèse, grâce à des applications concrètes de givrage.

## 3.3 Méthode de Galerkin (MG)

### 3.3.1 Principe général de la méthode

Dans cette section, une méthode numérique est développée pour résoudre l'équation de la chaleur abstraite sur un domaine mobile (3.2). La méthode développée est une formulation de Galerkin dont le principe général est de décomposer la température sur une base de fonctions d'un certains sous espace de  $H^1$  et de projeter l'équation sur cette même base à l'aide d'une formulation variationnelle.

On rappelle que l'espace de Sobolev  $H^1([a, b])$  peut être défini comme suit

$$f \in H^1([a, b]) \Leftrightarrow \int_a^b |f(z)|^2 dz + \int_{-1}^1 |f'(z)|^2 dz < +\infty \quad (3.26)$$

où la dérivée  $f'$  est à prendre au sens des distributions.

On rappelle également que c'est le "bon" espace fonctionnel pour chercher une solution de l'équation de la chaleur (voir par exemple l'ouvrage de Brézis [19]).

On pose le changement de variable suivant

$$\bar{z}(t, z) = \frac{2(z - a(t))}{b(t) - a(t)} - 1 \quad (3.27)$$

d'où

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} (\bar{z}(b - a) + (a + b)) \\ dz &= \frac{b - a}{2} d\bar{z} \end{aligned} \quad (3.28)$$

On a immédiatement

$$\begin{aligned} \bar{z}(z = a) &= -1 \\ \bar{z}(z = b) &= 1 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Maintenant, soit  $\bar{v}(\bar{z})$  une fonction de  $H^1([-1, 1])$ . Pour tout  $a > b$ , la fonction  $v : z \rightarrow \bar{v} \left( \frac{2(z - a(t))}{b(t) - a(t)} - 1 \right)$  est donc une fonction de  $H^1([a, b])$ . On peut donc réécrire l'équation (3.2a) au sens variationnel :

$$\forall \bar{v} \in H^1([-1, 1]), \quad \int_a^b \rho c_p \dot{T} v \, dz - \int_a^b \lambda T'' v \, dz = 0 \quad (3.30)$$

Discrétisons maintenant cette formulation sur un sous-espace fini de  $H^1$ .

Soit  $n$  un entier naturel fixé tel que  $n \geq 2$ . On se donne une famille libre de fonctions (définies sur  $[-1, 1]$ )  $E_n = (\Psi_j)_{j=1}^n$  telle que

$$\forall j = 1, \dots, n \quad \Psi_j \in H^1([-1, 1]) \quad (3.31)$$

À partir de maintenant, on projette le champ de température  $T$  sur le sous-espace engendré par  $E_n$ , et on confond  $T$  et sa projection. On note donc

$$\forall t \geq 0, \forall z \in [a(t), b(t)], \quad T(t, z) = \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \Psi_j \left( \frac{2(z - a)}{b - a} - 1 \right) = \sum_{j=1}^n \theta_j(t) \Psi_j(\bar{z}) \quad (3.32)$$

où chaque  $\theta_j$  est une fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Remarque :** Comme les fonctions  $\Psi_j$  sont par construction sans dimension, les fonctions  $\theta_j$  sont homogènes à des températures. Néanmoins, contrairement à l'approche classique des éléments finis, elles ne correspondent pas à la température en un point particulier.

Ainsi, on peut projeter l'équation (3.30) sur le sous-espace engendré par  $E_n$ .

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \rho c_p \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} [\theta_j \Psi_j(\bar{z})] \Psi_i(\bar{z}) dz - \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\theta_j \Psi_j(\bar{z})] \Psi_i(\bar{z}) dz = 0 \quad (3.33)$$

où les inconnues du problème sont les fonctions  $\theta_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ )



Après développement des termes (pour la première intégrale) et intégration par partie (pour la seconde), (3.33) s'écrit

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\rho c_p \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial \theta_j}{\partial t} \int_a^b \Psi_j(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \right\}}_{T_1} + \underbrace{\rho c_p \sum_{j=1}^n \left\{ \theta_j \int_a^b \left( \Psi_j'(\bar{z}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \right) \Psi_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \right\}}_{T_2} \\
 & - \underbrace{\left[ \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j \frac{\partial \Psi_j(\bar{z})}{\partial z} \Psi_i(\bar{z}) \right]_{z=a}^b}_{T_3} + \underbrace{\lambda \sum_{j=1}^n \left\{ \theta_j \int_a^b \left( \Psi_j'(\bar{z}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) \frac{\partial \Psi_i(\bar{z})}{\partial z} \, d\bar{z} \right\}}_{T_4} = 0
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

L'objectif maintenant est de ramener, par linéarité, toutes ces intégrales à des intégrales entre -1 et 1 et de les exprimer uniquement en fonction de la variable non dimensionnée  $\bar{z}$ . Pour le troisième terme, on gardera les dérivées en fonction  $z$ , car c'est ainsi que les conditions aux limites du problème sont écrites. Pour cela on utilise le changement de variable (3.27) et la propriété qui en découle (3.28).

Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \rho c_p \sum_{j=1}^n \theta_j \int_{-1}^1 \Psi_j(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) \frac{b-a}{2} \, d\bar{z} \\
 &= \rho c_p \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^n \left[ \int_{-1}^1 \Psi_j(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \right] \theta_j
 \end{aligned}$$

Pour le second, on a

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \rho c_p \sum_{j=1}^n \theta_j \int_{-1}^1 \Psi_j'(\bar{z}) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{2(z-a)}{b-a} - 1 \right\} \Psi_i(\bar{z}) \frac{b-a}{2} \, d\bar{z} \\
 &= \rho c_p \sum_{j=1}^n \theta_j \int_{-1}^1 \Psi_j'(\bar{z}) \left\{ \frac{-2\dot{a}(b-a) - 2(\dot{b}-\dot{a})(z-a)}{(b-a)^2} \right\} \Psi_i(\bar{z}) \frac{b-a}{2} \, d\bar{z} \\
 &= \rho c_p \sum_{j=1}^n \theta_j \int_{-1}^1 \Psi_j'(\bar{z}) \left\{ \frac{-2\dot{a}(b-a) - (\dot{b}-\dot{a})(\bar{z}+1)(b-a)}{(b-a)^2} \right\} \Psi_i(\bar{z}) \frac{b-a}{2} \, d\bar{z} \\
 &= -\rho c_p \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( (\dot{a} + \dot{b}) \left[ \int_{-1}^1 \Psi_j'(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \right] + (\dot{b} - \dot{a}) \left[ \int_{-1}^1 \bar{z} \Psi_j'(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) \, d\bar{z} \right] \right) \theta_j
 \end{aligned}$$

Pour le troisième terme, on a

$$\begin{aligned}
 T_3 &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\bar{z}=1} \Psi_i(1) + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\bar{z}=-1} \Psi_i(-1) \\
 &= -\lambda T_b' \Psi_i(1) + \lambda T_a' \Psi_i(-1)
 \end{aligned}$$

Le lecteur doit conserver à l'esprit que les conditions aux limites (3.2b, 3.2c) donne une relation, éventuellement non linéaire, entre  $T_a$  et  $T_a'$  et une autre entre  $T_b$  et  $T_b'$ . Dans le

cas présent, ces conditions aux limites s'écrivent

$$f_a \left( \sum_{j=1}^n \theta_j \Psi_j(-1), \sum_{j=1}^n \theta_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial z}(-1) \right) = 0 \quad (3.35)$$

$$f_b \left( \sum_{j=1}^n \theta_j \Psi_j(1), \sum_{j=1}^n \theta_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial z}(1) \right) = 0 \quad (3.36)$$

Enfin, le quatrième terme peut s'écrire

$$\begin{aligned} T_4 &= \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j \int_{-1}^1 \left( \Psi_j'(\bar{z}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) \left( \Psi_i'(\bar{z}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \right) \frac{b-a}{2} d\bar{z} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j \int_{-1}^1 \left( \Psi_j'(\bar{z}) \frac{2}{b-a} \right) \left( \Psi_i'(\bar{z}) \frac{2}{b-a} \right) \frac{b-a}{2} d\bar{z} \\ &= \frac{2\lambda}{b-a} \sum_{j=1}^n \left[ \int_{-1}^1 \Psi_j'(\bar{z}) \Psi_i'(\bar{z}) d\bar{z} \right] \theta_j \end{aligned}$$

On pose le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  de  $\mathbb{R}^n$ , les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{\Gamma}$  de dimension  $n \times n$ , ainsi que la fonction  $\mathbf{f}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , définis comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T \\ A_{ij} = \int_{-1}^1 \Psi_j(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) d\bar{z} = \langle \Psi_j, \Psi_i \rangle_{L^2([-1,1])} \\ \Lambda_{ij} = \int_{-1}^1 \Psi_j'(\bar{z}) \Psi_i'(\bar{z}) d\bar{z} \\ \Pi_{ij} = \int_{-1}^1 \Psi_j'(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) d\bar{z} \\ \Gamma_{ij} = \int_{-1}^1 \bar{z} \Psi_j'(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) d\bar{z} \\ f_i(\boldsymbol{\theta}) = \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j \frac{\partial \Psi_j(1)}{\partial z} \Psi_i(1) - \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j \frac{\partial \Psi_j(-1)}{\partial z} \Psi_i(-1) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Avec ces notations, et en rassemblant les quatre termes  $T_1, \dots, T_4$ , on montre que l'on a la relation matricielle suivante

$\rho c_p \left( \underbrace{\frac{b-a}{2} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}}_a - \frac{1}{2} \underbrace{[(a+b)\mathbf{\Pi} + (b-a)\mathbf{\Gamma}] \boldsymbol{\theta}}_b \right) + \underbrace{\frac{2\lambda}{b-a} \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\theta}}_c = \underbrace{\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})}_d$			
<p>Variation de l'énergie</p>	<p>Variation du domaine</p>	<p>Conduction thermique</p>	<p>Conditions aux limites</p>
(3.38)			

**Remarques :**

- Chaque terme de cette formulation peut être interprété physiquement.

- a. Le premier terme, faisant intervenir les dérivées temporelles de  $\boldsymbol{\theta}$ , est un terme de chauffage, qui traduit la variation de température du système.
  - b. Le second terme, faisant intervenir les matrices  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{\Gamma}$ , le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ , et les dérivées des positions des interfaces ( $\dot{a}$ ,  $\dot{b}$ ), traduit la variation d'énergie du système qui est due à l'apport ou la perte de matière.
  - c. Le troisième terme est le terme de diffusion de chaleur dans le système.
  - d. Enfin, le second membre est le terme modélisant les conditions aux limites, il traduit l'énergie provenant du flux de chaleur traversant les interfaces.
- Les différentes matrices ne dépendent que des fonctions de base choisies. En particulier, elles ne dépendent pas de  $a$  et  $b$ . Ainsi, dans une optique de simulation numérique, elles seront évaluées une seule fois au début du calcul.
  - $a$  et  $b$  (et par suite  $\dot{a}$  et  $\dot{b}$ ) sont eux-mêmes indirectement fonction de la solution de l'équation (3.38), puisqu'ils dépendent des flux de chaleur en  $z = a$  ( $\bar{z} = -1$ ) et  $z = b$  ( $\bar{z} = 1$ ). Il faudra donc ajouter une équation sur  $a$  et une sur  $b$ . En pratique, lorsque l'on se place dans le référentiel de la paroi (ce qui est toujours le cas dans nos applications), on a une équation qui relie le flux de chaleur  $T'_a$  (resp.  $T'_b$ ) et la dérivée de la position de l'interface  $\dot{a}$  (resp.  $\dot{b}$ ).

### 3.3.2 Choix des fonctions de base

#### 3.3.2.1 Construction de la famille

Le choix qui a été fait est de considérer une base de polynômes. Ces polynômes sont construits de la manière suivante :

1.  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $\Psi_1(x) = \frac{1-x}{2}$ ,  $\Psi_2(x) = \frac{1+x}{2}$
2. Pour  $i \geq 3$ ,  $\Psi_i$  est le polynôme de degré  $i-1$  tel que
  - (a)  $\Psi_i(-1) = \Psi_i(+1) = 0$
  - (b)  $\int_{-1}^1 (\Psi_i(\bar{z}))^2 d\bar{z} = 1$
  - (c)  $\int_{-1}^1 \Psi_i(\bar{z})\Psi_j(\bar{z})d\bar{z} = 0$ ,  $\forall j = 3, \dots, i-1$

Par construction, on a évidemment

$$E_2 \subset E_3 \subset E_4 \subset \dots \quad (3.39)$$

On donne en annexe D la famille  $E_{10}$ , qui en pratique est suffisante pour toutes les applications traitées dans le cadre de cette thèse.

Montrons que la famille de fonctions  $E_n = \{\Psi_j\}_{j=1}^n$  est libre.

Soit  $v = \sum_{j=1}^n v_j \Psi_j$ . Supposons que  $v \equiv 0$ . Montrons que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $v_i = 0$

D'après 1., et 2.(a), on a

$$\begin{aligned} v(-1) = 0 &\Rightarrow v_1 = 0 \\ v(+1) = 0 &\Rightarrow v_2 = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

De plus, on a, pour tout  $i \geq 3$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 v(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) d\bar{z} = 0 && \text{car } v \equiv 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{j=1}^n v_j \int_{-1}^1 \Psi_j(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) d\bar{z} = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{j=3}^n v_j \int_{-1}^1 \Psi_j(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) d\bar{z} = 0 && \text{d'après (*)} \\
\Leftrightarrow & v_i \int_{-1}^1 \Psi_i(\bar{z}) \Psi_i(\bar{z}) d\bar{z} = 0 && \text{d'après 2.(c)} \\
\Leftrightarrow & v_i = 0 && \text{d'après 2.(b)}
\end{aligned}$$

Un corollaire immédiat à cette propriété est qu' $\mathbf{A}$  est une matrice inversible, en tant que matrice dont les composantes sont formées par le produit scalaire d'éléments d'une famille libre.

### 3.3.2.2 Discussion sur la famille de fonctions choisie

- Les conditions 1. et 2.(a) permettent de gérer très simplement une condition de Dirichlet sur le bord inférieur ( $z = a$ ) ou supérieur ( $z = b$ ). En effet, ces deux conditions permettent d'écrire

$$T(a) = \theta_1 \quad (3.40a)$$

$$T(b) = \theta_2 \quad (3.40b)$$

Par conséquent, dans le cas du modèle tricouche, pour imposer d'avoir la température de fusion à une interface, il suffira d'assurer

$$\theta_1 = T_m \quad \text{et/ou} \quad (3.41a)$$

$$\theta_2 = T_m \quad (3.41b)$$

selon les cas.

- Les conditions 2.(b) et 2.(c), en plus de définir de façon unique les fonctions de base, permettent de simplifier la matrice  $\mathbf{A}$ . En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}
A_{ii} &= 1, \quad \forall i \geq 3 \\
A_{ij} &= 0, \quad \forall i, j \geq 3, \quad i \neq j
\end{aligned} \quad (3.42)$$

## 3.4 Validations académiques des méthodes de résolution sur une géométrie rectangulaire

L'objectif de cette section est de procéder à des validations académiques des deux méthodes de résolution sans maillage de l'équation de la chaleur développées au cours de cette thèse. Pour cela, nous considérons des cas unidimensionnels et bidimensionnels, de chauffage d'un bloc de glace puis de propagation d'un front de fusion. Ces deux cas test sont simulés grâce aux deux méthodes de résolution, la méthode intégrale approchée (MIA) et la méthode de Galerkin (MG), et comparés avec un code résolvant de façon directe les équations de la thermique. La MIA et la MG sont couplés avec un solveur résolvant

l'équation de la chaleur dans la paroi. Ce couplage est expliqué en détail au chapitre 5. Ces modules couplés forment le code baptisé *SLUSH2D* (*Several Layers and Unified System of Heaters*).

Le second objectif de cette section est de valider l'hypothèse faite dans la partie sur la modélisation de la couche de givre 2.4. Dans cette partie, on fait l'hypothèse que les l'on pouvait négliger les flux dans la direction tangentielle devant les flux dans la direction normale. Cette hypothèse sera validée et discutée dans cette partie, pour les applications en givrage.

Le code résolvant directement les équations de la thermique, considéré comme la référence, a été validé sur des solutions exactes de l'équation de la chaleur et de propagation de front de fusion. Il résout les équations de changement de phase, écrites dans leur formulation enthalpique [13].

### Principes communs des différents cas de validation

Tous les cas test présentés se résument (cf. figure 3.4) à un bloc de glace, de hauteur  $h_i$ , présent sur une paroi, de hauteur  $h_a$ , dans laquelle se trouve une résistance de largeur  $L_h$ . L'épaisseur de la résistance est supposée négligeable, c'est donc un terme source linéique dans l'équation de la chaleur. La largeur totale du système est  $L$  ( $\geq L_h$ ). La résistance se trouve à une distance  $h_l$  du bord inférieur de la paroi.

Le bord inférieur du système, et les bords latéraux sont supposés adiabatiques, et une condition de type coefficient d'échange est appliqué comme condition aux limites au niveau de l'interface supérieure de la glace.

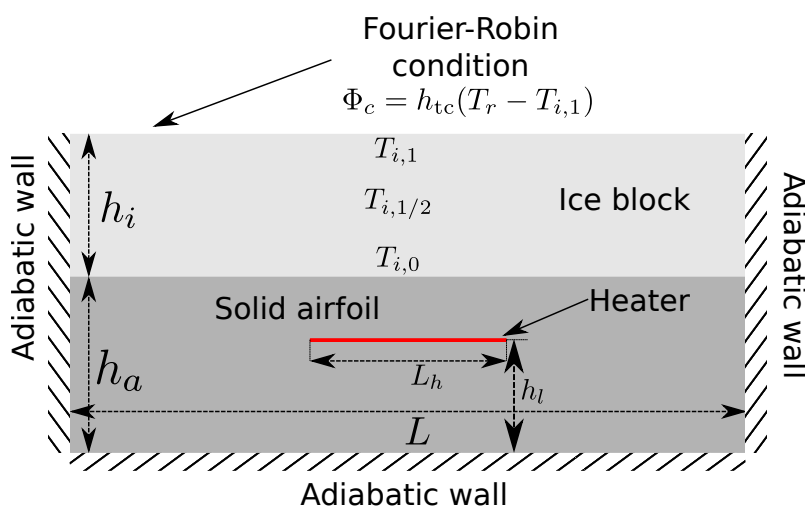


FIGURE 3.4 – Illustration des cas test de validation du code SLUSH2D

À l'instant initial, toutes les températures de ce système sont égales à  $T_{init}$ , et la résistance chauffante s'active, en livrant, de façon continue, une puissance  $\Phi_h$ .

Pour tous les cas de validation, on fait l'approximation que la densité de la glace est égale à celle de l'eau liquide. Cela permet notamment de simplifier le code de référence. De toute façon, le fait que la densité des deux phases diffèrent induit des phénomènes physiques (mécaniques et thermiques) complexes, qui sont peu étudiés dans la littérature et qui dépassent largement le cadre de cette thèse. On trouve une introduction intéressante de ces phénomènes physiques dans l'ouvrage de Solomon et Alexiades [2, p. 59].

### 3.4.1 Méthode de calcul de la solution de référence

Le principe de cette formulation est de considérer l'enthalpie comme inconnue principale du problème, plutôt que la température. La raison de ce choix est que, à cause du changement de phase, l'application qui relie l'enthalpie à la température n'est pas injective (à une température donnée, nommément la température de fusion, peut correspondre une infinité d'enthalpies), et la température seule ne constitue donc pas une inconnue suffisante pour la résolution.

Plus précisément, soit  $T_e$  la température de l'eau, qui peut se trouver à l'état liquide ou l'état solide. Si  $T_e > T_m$  localement, alors l'eau est à l'état liquide et si  $T_e < T_m$  alors elle est à l'état solide. Dans le cas où  $T_e = T_m$ , la température n'est pas suffisante pour déterminer dans quel état se trouve l'eau localement, ce qui justifie l'introduction de la variable enthalpie. En effet, soient  $c_w$  (resp.  $c_i$ ) la capacité calorifique de l'eau liquide (resp. l'eau solide) et  $\lambda_w$  (resp.  $\lambda_i$ ) sa conductivité. On suppose de plus, ce qui n'est physiquement pas exact, que les masses volumiques de la glace et de l'eau liquide sont égales et on note  $\rho_e$  cette valeur. Par convention, on impose que la glace à la température  $T_m$  soit la référence pour l'enthalpie de la glace, ce qui permet d'écrire que l'enthalpie massique de la glace à une température donnée  $T_e$  vaut

$$H_e(T_e) = c_i(T_e - T_m)$$

et la température de l'eau liquide à une température donnée  $T_e$  vaut

$$H_e(T_e) = c_w(T_e - T_m) + L_m$$

Par conséquent, la connaissance de l'enthalpie permet de déterminer la phase grâce à l'introduction de la grandeur fraction liquide  $\Phi$  définie par

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } H_e \leq 0 \\ \frac{H_e}{L_m} & \text{si } 0 \leq H_e \leq L_m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.43)$$

Si la fraction liquide est égale à 1 en un point, cela signifie que ce point est à l'état liquide et s'il vaut 0, il est à l'état solide. Dans cas où il est compris entre ces deux valeurs, il s'agit d'un état mixte entre phase liquide et phase solide.

Avec cette nouvelle notation, on peut montrer que l'équation de changement de phase s'écrit

$$\rho_e \frac{\partial H_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_x \nabla T_e) \quad (3.44)$$

où  $x$  vaut  $w$  pour la phase liquide et  $i$  pour la phase solide. Dans le cas où la fraction liquide est comprise entre 0 et 1, la capacité calorifique est interpolée linéairement. Concernant la conductivité, c'est la résistance thermique (inverse de la conductivité) qui est interpolée linéairement. Les raisons de ce choix peuvent être trouvées dans l'ouvrage de Solomon et Alexiades [2].

Comme le code de validation s'effectue sur un maillage cartésien, l'équation (3.44) est discrétisée en espace avec un schéma aux différences finies centré d'ordre 2. De plus, pour limiter le temps de calcul, l'intégration en temps se fait grâce à la méthode d'Euler implicite.

Plus de détail concernant la modélisation et les schémas numériques de ce code, ainsi qu'une validation sur un problème dont on peut comparer à une solution analytique sont donnés en annexe B.

### 3.4.2 Premier cas test : propagation d'un front de fusion unidimensionnel

Dans un premier temps, on pose  $L_h = L$ , donc la résistance occupe toute la largeur de la paroi (cf. figure 3.4) et le problème est donc unidimensionnel. Ce premier cas test permettra donc de valider les méthodes de résolution pour la conduction thermique dans la direction normale.

Le tableau suivant récapitule toutes les données du cas test

Propriétés physiques des matériaux			
Couche	Densité ( $kg.m^{-3}$ )	Capacité calorifique ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )	Conductivité thermique ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )
Paroi (aluminium)	2710	896	167
Glace	917	2060	2.1
Eau liquide	1000	4185	0.6
Caractéristiques géométriques		Conditions extérieures + terme source	
$L$ (mm)	150	$T_{init}$ (K)	250
$L_h$ (mm)	150	$T_r$ (K)	250
$h_a$ (mm)	1.5	$h_{tc}$ ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	300
$h_l$ (mm)	1	$\Phi_h$ ( $W.cm^{-2}$ )	1
$h_i$ (mm)	$\in \{1,5,10,30\}$		

TABLE 3.1 – Propriétés de la paroi et de la glace pour le cas de fusion unidimensionnel

Dans la figure 3.5 sont tracés les fronts de fusion en fonction du temps pour les quatre hauteurs définies dans la table 3.1. Pour chaque hauteur, on trace les fronts calculés avec la solution de référence, la MIA et la méthode de Galerkin. Pour cette dernière méthode, on affiche les résultats de trois simulations dont les degrés de liberté ( $DoF$  dans la légende, pour *Degrees of Freedom*) diffèrent. Pour rappel, le profil de température est un polynôme d'ordre  $n$ , avec  $n = DoF - 1$ . En particulier, lorsque l'on a trois degrés de liberté, cela signifie que le profil de température est parabolique.

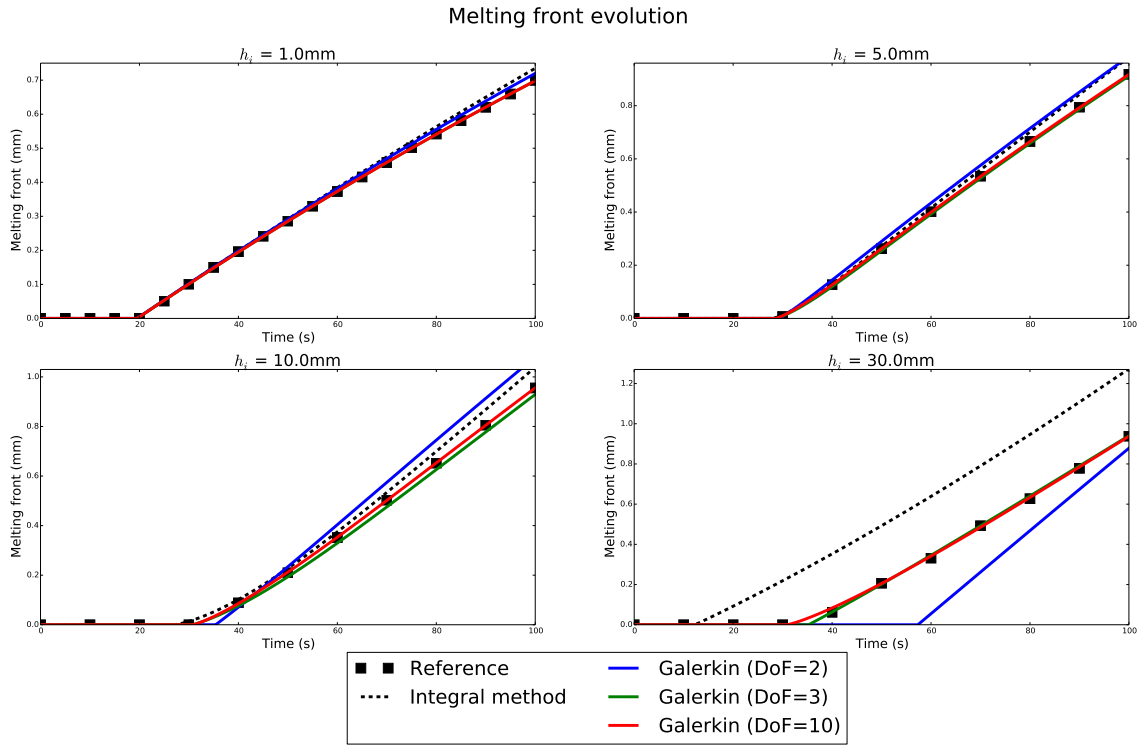


FIGURE 3.5 – Évolution du front de fusion unidimensionnel

Dans ces cas test, on observe que pour les faibles épaisseurs de glace, notamment de 1 à 10 mm, le front de fusion est assez bien calculé quelle que soit la méthode utilisée. En revanche, pour une épaisseur de 30mm, on observe la limite de la résolution pour la méthode intégrale, qui sous-estime significativement le temps d'apparition du front de fusion. On rappelle que pour la MIA, un profil de température parabolique est imposé afin de fermer le système, ce qui pourrait nous conduire à penser que le manque de précision de la méthode est dû au fait que le profil de température réel est très éloigné d'une parabole. Cette explication n'est cependant pas satisfaisante au regard des résultats obtenus avec la MG à trois degrés de liberté (courbes vertes sur la figure 3.5). En effet, cette dernière méthode revient également à considérer que le profil de température est parabolique. Pourtant, les résultats sont très proches de la solution de référence. Cela signifie que la MIA n'approche pas la solution exacte de façon optimale, au sens où elle ne prévoit pas la parabole qui approche au mieux le profil de température de la solution exacte. Ce phénomène est illustré dans la figure (3.6) dans laquelle on compare les profils de températures à différents instants, pour la solution de référence, la MIA et la MG. Pour ces deux dernières méthodes, le profil de température est, par construction, parabolique. Sur cette figure on affiche également la parabole approchant "au mieux" le profil de température exact, définie comme la parabole obtenue par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire la parabole minimisant la norme  $L^2([0, h_i])$  de l'écart avec la solution exacte, soit

$$T_{ls} = az^2 + bz + c \quad (3.45)$$

où  $(a, b, c)$  est solution du problème de minimisation

$$(a, b, c) = \underset{(a', b', c') \in \mathbb{R}^3}{\operatorname{argmin}} \int_0^{h_i} (T_{exact}(z) - (a'z^2 + b'z + c'))^2 dz \quad (3.46)$$



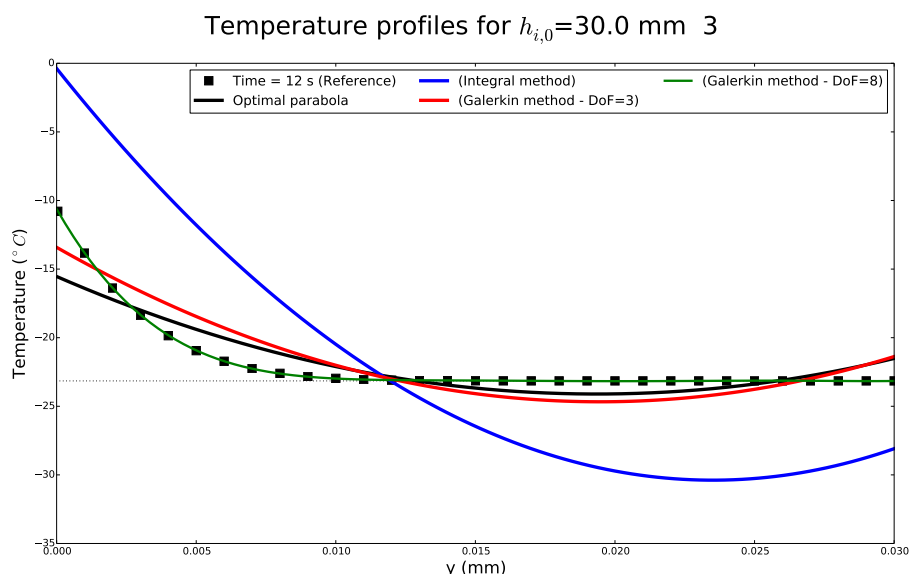


FIGURE 3.6 – Profil de température dans la glace pour le cas  $h_i = 30$  mm.

Sur cette figure, on observe que la méthode intégrale prévoit un profil très éloigné de la parabole des moindres carrés. Cela s’explique par le fait que l’on crée artificiellement des extremums de température au niveau des interfaces supérieure et inférieure.

Pour comprendre comment se forment ces extremums, il est important de rappeler que les degrés de liberté de la MIA sont la température moyenne de la couche, et les deux températures d’interface. Cependant, une équation d’évolution est résolue uniquement sur la température moyenne (cette équation s’obtient en intégrant l’équation de la chaleur sur la hauteur de la couche). Les deux autres températures permettent de respecter les conditions aux limites mais ne font pas l’objet d’une équation d’évolution. Ainsi, comme expliqué dans le paragraphe 3.2.2, la méthode ne respecte pas le principe de continuité en temps de la solution de l’équation de la chaleur et peut donc prévoir une variation de température d’interface infiniment rapide.

À l’inverse, la MG est continue en temps pour toutes les températures du domaine, ce qui permet de solutionner le problème précédemment décrit, et de prévoir en particulier une parabole proche de celle des moindres carrés. *A contrario*, on peut montrer que la MG prévoit des solutions qui sont “trop régulières” en temps, car, contrairement à la solution exacte, elle ne prévoit pas de flux de chaleur discontinus en temps.

Le lecteur intéressé par ces aspects de continuité trouvera une analyse mathématique détaillée dans l’annexe E.

On peut également noter que la montée en ordre de la méthode de Galerkin (typiquement 8 degrés de libertés sur la figure 3.6 permet de reproduire de façon très précise le profil de température de la solution de référence.

Il faut néanmoins remarquer que l’utilisation de deux degrés de liberté pour la méthode de Galerkin ne permet pas une bonne prévision de la température et donc des fronts de fusion. Cela est dû au fait que les profils de température exacts sont très éloignés d’une droite.

### Interprétation des résultats à l’aide de l’analyse dimensionnelle

Dans le paragraphe 3.2.2, la précision de la méthode intégrale est discutée à l'aide d'une solution exacte d'un problème de chauffage. Dans cette analyse, on parvient à la conclusion que la méthode intégrale est précise si le nombre de Biot ( $Bi = \frac{h_{tc} h_i}{\lambda_i}$ ) est au plus de l'ordre de l'unité. Dans le cas présent, le nombre de Biot n'est pas aussi évident à définir, puisque l'on chauffe le bloc avec un flux imposé en bas du domaine, et que le haut du domaine est soumis à un coefficient d'échange convectif. Pour pouvoir tout de même faire une analyse, on va se donner un nombre de Biot équivalent  $\mathcal{B}i$ . L'idée est de calculer un nombre de Biot pour le bord inférieur, un pour le bord supérieur et d'en faire la moyenne. Pour le bord supérieur, il n'y a pas d'ambiguïté, on peut immédiatement écrire

$$\mathcal{B}i_{\text{sup}} = \frac{h_{tc} h_i}{\lambda_i} \quad (3.47)$$

Pour le bord inférieur, comme la condition aux limites est un flux imposé, la notion de coefficient d'échange n'a pas réellement de sens. Cependant, on lui donne un sens, en considérant qu'il est égal au rapport d'un flux de chaleur caractéristique et d'une différence de température caractéristique. Il est logique de choisir le flux  $\Phi_h$  (qui est le flux imposé) comme flux caractéristique. Concernant la différence de température, étant donné que l'on part d'une température  $T_{\text{init}}$  et que la glace atteint la température de fusion  $T_m$  avant de se liquéfier, on pose  $\Delta T = T_m - T_{\text{init}}$ . Il vient donc le nombre de Biot suivant

$$\mathcal{B}i_{\text{inf}} = \frac{\Phi_h h_i}{\Delta T \lambda_i} \quad (3.48)$$

Finalement, le nombre de Biot du système s'écrit

$$\mathcal{B}i = \frac{1}{2}(\mathcal{B}i_{\text{sup}} + \mathcal{B}i_{\text{inf}}) = \frac{1}{2} \left( \frac{h_{tc}}{\lambda_i} + \frac{\Phi_h}{\Delta T \lambda_i} \right) h_i \approx 175 h_i \quad (3.49)$$

Pour le cas  $h_i = 10$  mm, le nombre de Biot vaut donc environ 1.5, ce qui semble être la limite pour que la méthode intégrale donne un résultat acceptable.

### 3.4.3 Second cas test : propagation d'un front de fusion bidimensionnel

On a vu que la méthode de Galerkin était plus précise que méthode intégrale approchée. Elle sera donc utilisée dans la suite de cette étude.

Dans ce paragraphe, nous étudions un cas de propagation de front de fusion bidimensionnel. Pour ce faire, le cas de validation précédent est légèrement modifié. On considère que la largeur de la résistance chauffante est inférieure à la largeur totale du domaine (cf figure 3.4). Par conséquent, des flux de chaleur dans la direction tangentielle vont nécessairement apparaître. Le lecteur doit conserver à l'esprit que dans le modèle proposé, la conduction dans les directions tangentielles est modélisée dans la paroi, mais négligée dans le bloc de givre. En revanche, pour le modèle de référence, la conduction dans toutes les directions est modélisée dans les deux domaines.

Pour ce cas test, on considère une largeur de paroi  $L$  de 150 mm et une largeur de résistance  $L_h$  de 10mm, le problème devient donc bidimensionnel.

Propriétés physiques des matériaux			
Couche	Densité ( $kg.m^{-3}$ )	Capacité calorifique ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )	Conductivité thermique l ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )
Paroi (aluminium)	2710	896	167
Glace	1000	2060	2.1
Eau liquide	1000	4185	0.6
Caractéristiques géométriques		Conditions extérieures + terme source	
$L$ (mm)	150	$T_{init}$ (K)	<b>265</b>
$L_h$ (mm)	<b>10</b>	$T_r$ (K)	<b>265</b>
$h_a$ (mm)	1.5	$h_{tc}$ ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )	300
$h_l$ (mm)	1	$\Phi_h$ ( $W.cm^{-2}$ )	<b>3</b>
$h_i$ (mm)	$\in\{1,5,10,30\}$		

TABLE 3.2 – Propriétés de la paroi et de la glace pour le cas de fusion bidimensionnel. Les variables en bleu sont les seules modifiées par rapport au cas unidimensionnel (table 3.1)

### 3.4.3.1 Résultats et analyse pour un bloc de givre de 1 mm

Sur la figure (3.7) sont tracés les champs de température pour la méthode de référence et pour la méthode de Galerkin, au bout de 20 secondes de simulation, pour un bloc de givre de 1mm.

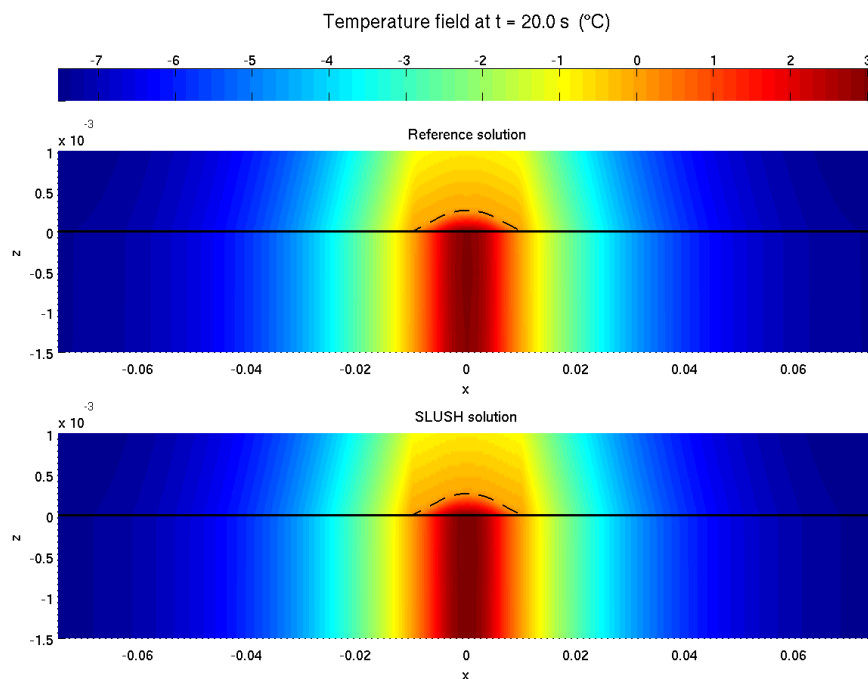


FIGURE 3.7 – Champ de température dans la glace pour le cas  $h_i = 1mm$ . Notes : la température est affichée en  $^{\circ}C$ , la ligne pleine représente l'interface paroi - glace (ou paroi - eau liquide), et la ligne discontinue est le front de fusion.

Qualitativement, on observe que le champ de température et le front sont précisément reproduits. Pour analyser plus précisément ces résultats, on se donne deux critères im-

portants pour les applications en givrage. Le premier est le front de fusion sur le milieu du profil. Le second est la longueur mouillée  $L_w$  (*wet length*). Cette grandeur est définie comme la longueur sur laquelle le front de fusion est non nul. Dans le cas test présenté, cette longueur est définie sans ambiguïté, puisqu'il est clair que le domaine sur lequel le front de fusion est apparu est connexe. Il est de plus symétrique par rapport à l'axe  $x = L/2$ . Mathématiquement, la longueur mouillée est définie par

$$L_w = x_{\max} - x_{\min} \quad (3.50)$$

où

$$x_{\min} = \arg \min_x \{x \in [0, L], h_s(x) > 0\}$$

$$x_{\max} = \arg \max_x \{x \in [0, L], h_s(x) > 0\}$$

où nous rappelons que  $L$  est la longueur totale du domaine (ici 150mm, se référer à la figure 3.4) et  $h_s$  est la hauteur du front de fusion, donc la hauteur de la couche d'eau liquide confinée entre le givre et la paroi (voir figure 2.1)

Les évolutions des fronts de fusion et des longueurs mouillées, pour la méthode de référence et la méthode de Galerkin sont tracées dans la figure

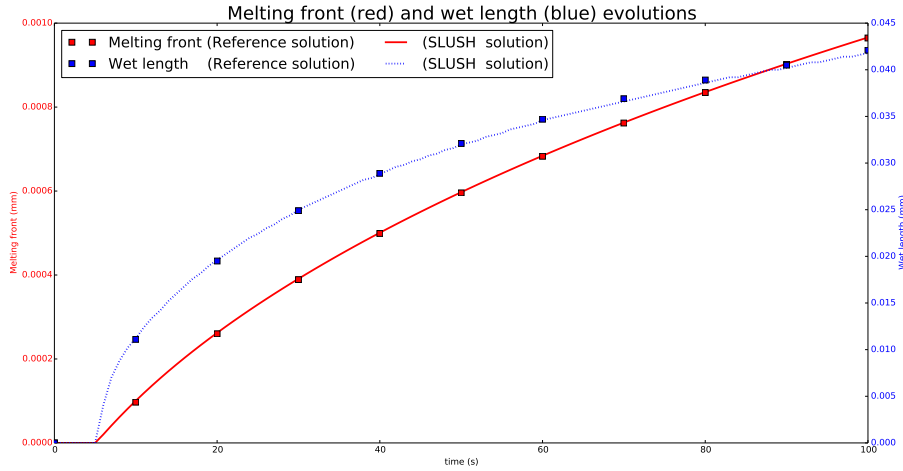


FIGURE 3.8 – Évolutions du front de fusion du point milieu et de la longueur mouillée pour le cas  $h_i = 1mm$ . Note : l'échelle de gauche est pour le front de fusion et celle de droite pour la longueur mouillée.

Outre la validation de la méthode de Galerkin, cette simulation valide également l'hypothèse de modélisation (2.7). En effet, la méthode de référence considère les flux de chaleur dans toutes les directions alors que la méthode de Galerkin ne considère que les flux normaux.

### 3.4.3.2 Résultats et analyse pour un bloc de givre de 30 mm

Sur la figure (3.9) sont tracés les champs de température pour la méthode de référence et pour la méthode de Galerkin, au bout de 100 secondes de simulation, pour un bloc de givre de 30 mm.

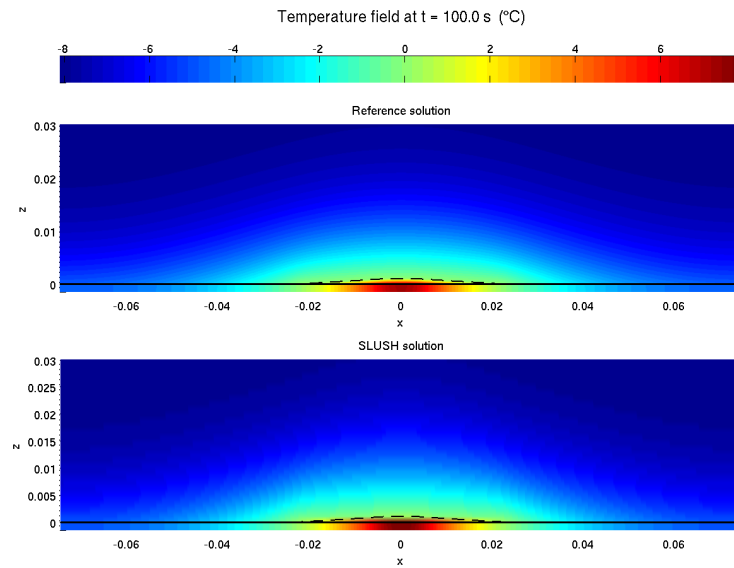


FIGURE 3.9 – Champ de température dans la glace pour le cas  $h_i = 30 \text{ mm}$ . Notes : la température est affichée en  $^{\circ}\text{C}$ , la ligne pleine représente l'interface paroi - glace (ou paroi - eau liquide), et la ligne discontinue est le front de fusion.

Comme pour le cas test précédent, on trace l'évolution du front de fusion en  $x = L/2$ , ainsi que l'évolution de la longueur mouillée en fonction du temps (voir (3.50)).

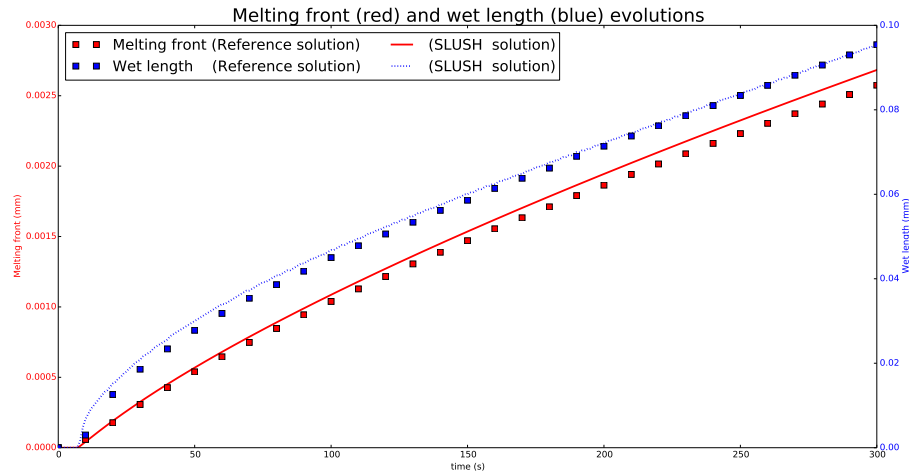


FIGURE 3.10 – Évolutions du front de fusion du point milieu et de la longueur mouillée pour le cas  $h_i = 30 \text{ mm}$ . Notes : l'échelle de gauche est pour le front de fusion et celle de droite pour la longueur mouillée.

On observe que le front de fusion en  $x = L/2$  et la longueur mouillée sont légèrement surestimés pour une hauteur de 30 mm. Au niveau du milieu du domaine, on a une température plus importante et donc une propagation plus rapide du front de fusion et de la longueur mouillée. Cela s'explique par le fait que dans le bloc de givre les flux de chaleur dans la direction tangentielle sont négligés. *A contrario*, on observe que loin du milieu du domaine (par exemple en  $x = 60 \text{ mm}$ ,  $z = 4 \text{ mm}$ ), la température prévue par SLUSH2D est inférieure à celle prévue par le modèle de référence, puisque moins de chaleur a diffusé depuis la résistance. Ce phénomène est illustré sur la figure (3.11)

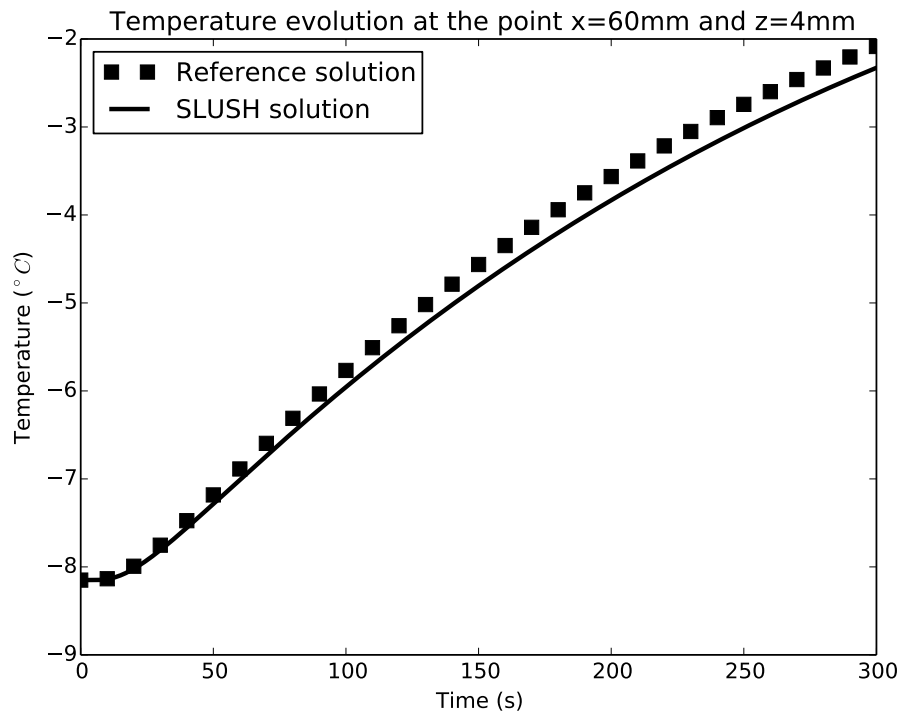


FIGURE 3.11 – Évolution de la température de la glace au point  $x = 60\text{mm}$  et  $z = 4\text{mm}$  pour la solution de référence et le code SLUSH2D

### 3.5 Conclusion et forme finale du modèle tricouche

Dans ce chapitre, nous avons développé deux méthodes numériques permettant de résoudre l'équation de la chaleur sans maillage. Ces deux méthodes permettent de calculer les transferts thermiques à l'intérieur de chacune des couches du modèle tricouche. La première méthode, baptisée *méthode intégrale approchée*, a été la première développée et implémentée. Elle est relativement facile à appréhender, notamment parce que toutes les inconnues ont une signification physique (température moyenne et températures aux interfaces), et précise lorsque l'on considère des nombres de Biot relativement faibles. Néanmoins, les expériences numériques ont montré qu'elle était peu précise pour des grands nombres de Biot. En d'autres termes, cette méthode est imprécise lorsque l'on considère des épaisseurs importantes et/ou des flux de chaleur importants. Numériquement, il s'avère que cette méthode viole le principe du maximum, car elle crée des extremums très importants au niveau des interfaces, ce qui est très critique pour les applications en givrage vu que les températures d'interfaces permettent de détecter les apparitions, ou disparition, des fronts de fusion. Or, la présence ou non de ces fronts de fusion est fondamentale pour les problématiques d'adhésion de la glace à la paroi et de détachement.

Pour pallier ces limitations très pénalisantes, une seconde méthode a été développée au cours de cette thèse. C'est une méthode de Galerkin d'ordre arbitraire ; on peut en théorie choisir un ordre aussi élevé que l'on souhaite. Cette méthode ne respecte pas le principe du maximum, mais en faisant tendre le nombre de degrés de liberté vers l'infini, la méthode tend vers la solution exacte et fait donc disparaître les extrema locaux non physiques. En pratique, pour les applications visées, prendre entre 5 et dix degrés de liberté assure une très bonne précision dans le calcul de l'évolution du front de fusion, ce qui permet d'affirmer que cette méthode est un bon compromis entre la méthode intégrale, facile à mettre en

œuvre mais peu précise, et une méthode avec maillage, précise mais complexe à mettre en œuvre en cas d'évolution rapide du domaine de calcul à cause de l'accrétion de givre.

La méthode de Galerkin est donc à privilégier par rapport à la méthode intégrale.

L'intérêt de l'étude numérique présentée dans ce chapitre a également été d'éprouver l'hypothèse de couche mince, consistant à écrire que les flux de chaleur tangentiels dans la glace sont petits devant les flux normaux. En effet, des simulations en deux dimensions ont été menées sur des problèmes de propagation d'un front de fusion, dans des situations proches de celles rencontrées dans les applications en givrage. Grâce à ces simulations, on a pu démontrer la pertinence de l'hypothèse de couche mince, puisqu'il a été possible de reproduire précisément la propagation des fronts de fusion ainsi que les longueurs mouillées.

À ce stade, nous disposons donc d'un modèle tricouche semi-discret, au sens où les équations de la thermique dans chacune des couches du modèle sont discrétisées spatialement.

À titre d'exemple, si l'on se limite au cas du modèle associé à la méthode de Galerkin pour les équations de la thermique, et au régime *rime ice* (glace uniquement), la forme finale du système d'équations à résoudre est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_i \dot{h}_i = \dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_s(T_i(t, h_i)) \end{array} \right. \quad (3.51a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = \rho c_p \left( \frac{h_i}{2} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\dot{h}_i}{2} [\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Gamma}] \boldsymbol{\theta} \right) + \frac{2\lambda}{h_i} \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} \end{array} \right. \quad (3.51b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{z=h_i} = -\dot{m}_s c_i (T_i|_{z=h_i} - T_m) \\ \quad + h_{\text{tc}} (T_{\text{rec}} - T_i(h_i)) - \dot{m}_s (L_v + L_m) \\ \quad - \dot{h}_i \rho_i c_i (T_i|_{z=h_i} - T_m) \end{array} \right. \quad (3.51c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_{\text{wall}} (T_{\text{wall}} - T_i|_{z=0}) + \dot{\Phi}_0 \end{array} \right. \quad (3.51d)$$

avec

$$T_i(t, z) = \sum_{j=1}^n \theta_j \Psi_j \left( \frac{2z}{h_i(t)} - 1 \right) \Rightarrow \frac{\partial T_i}{\partial z}(z) = -\frac{2}{h_i^2} \sum_{j=1}^n \theta_j \Psi_j' \left( \frac{2z}{h_i(t)} - 1 \right)$$

où  $n$  est un nombre entier supérieur ou égal à 2. Ce système comporte  $n + 3$  équations et autant d'inconnues, le vecteur des inconnues étant

$$\left( h_i, \theta_1, \dots, \theta_n, \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{z=h_i}, \frac{\partial T_i}{\partial z} \Big|_{z=0} \right)^T$$

La discrétisation complète du modèle tricouche est l'objet du chapitre suivant.





# Chapitre 4

## Discrétisation en espace et en temps du modèle tricouche

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir une discrétisation complète du modèle tricouche en partie discrétisé précédemment. Dans un premier temps, on discrétise spatialement l'équation du film ruisselant grâce à la méthode des volumes finis, ce qui permet d'éliminer les variables  $x$  et  $y$ . On discrétise ensuite le modèle tricouche en temps grâce au schéma d'Euler implicite.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Méthode de volumes finis pour la discrétisation des équations de transport</b>	<b>95</b>
4.1.1	Notations	96
4.1.2	Schéma de discrétisation de l'équation de conservation de la masse	98
4.1.3	Schéma de discrétisation pour l'équation de conservation de l'énergie	99
4.1.4	Cas particulier de l'approche bidimensionnelle	100
4.1.5	Remarques sur le traitement des conditions aux limites	101
<b>4.2</b>	<b>Discrétisation temporelle du modèle tricouche</b>	<b>102</b>
4.2.1	Développement d'un algorithme de point fixe	102
4.2.2	Optimisation de la vitesse de convergence de l'algorithme	107
4.2.3	Convergence de l'algorithme	110
4.2.4	Validation numérique de l'algorithme de point fixe	111

---

### 4.1 Méthode de volumes finis pour la discrétisation des équations de transport

Le modèle tricouche discrétisé dans la direction normale consiste en six systèmes d'équations aux dérivées partielles car six régimes d'accrétion sont possibles. Ainsi, pour un point  $(x, y)$  situé sur la paroi, le système d'équations à résoudre peut évoluer au cours du temps en cas de transition entre les régimes. Dans les équations relatives à la modélisation du film ruisselant, il y a des termes faisant apparaître des dérivées tangentielles qui modélisent les flux convectifs de masse et d'énergie. Ces équations, présentes pour les régimes *running wet*, *glaze ice accretion* et *glaze ice + static film* (voir synthèse du chapitre sur la modélisation

2.6 p. 59), se déclinent en

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f)) \\ \frac{\partial h_f \widehat{T}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (h_f \mathbf{V}(h_f) \widehat{T}_f) \end{array} \right. \begin{array}{l} = \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}} - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w} \\ = \left( \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{imp}} c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - \dot{m}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) \cdot c_w \widehat{T}_f \\ + h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - \widehat{T}_f) - \dot{m}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) L_v \\ + h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - \widehat{T}_f) + \dot{\Phi}_0 \end{array} \right) / (\rho_w c_w) \end{array} \quad \begin{array}{l} (4.1a) \\ (4.1b) \end{array}$$

où les termes en rouge représentent les flux convectifs du film ruisselant. Pour le régime *running wet* où il n'y a pas de couche de givre, le terme  $\dot{m}_{\text{ice,top}}$  est nul. Pour les deux autres, la température du film est fixée à  $T_m$ , donc la deuxième équation dégénère en :  $\widehat{T}_f = T_m$ .

L'objet de cette section est la discrétisation des flux convectifs de masse et d'énergie. Les équations (4.1) étant écrites sous une forme conservative, nous utilisons la méthode des volumes finis. Remarquons que les équations de (4.1) font intervenir des termes sources dans lesquels figurent la température du film ainsi que la température du bloc de glace, qui sont d'autres variables du problème. Comme cette section traite de la discrétisation des flux convectifs du film liquide, nous considérons ces termes comme étant connus.

Afin de simplifier l'exposé, et comme il n'y a pas d'ambiguïté dans cette section, on omet l'indice  $f$  et la notation *chapeau* pour le film. On note donc :

$$h \stackrel{\text{déf}}{=} h_f \quad (4.2)$$

$$T \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{T}_f \quad (4.3)$$

De plus, les termes sources des équations sont notés  $S^h$  et  $S^T$  :

$$S^h \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) - \dot{m}_{\text{ice,top}}}{\rho_w} \quad (4.4)$$

$$S^T \stackrel{\text{déf}}{=} \left( \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{imp}} c_w T_{\text{imp}}^{\text{tot}} - \dot{m}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) \cdot c_w \widehat{T}_f \\ + h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - \widehat{T}_f) - \dot{m}_{\text{ev}}(\widehat{T}_f) L_v \\ + h_{\text{wall}}(T_{\text{wall}} - \widehat{T}_f) + \dot{\Phi}_0 \end{array} \right) / (\rho_w c_w) \quad (4.5)$$

Finalement, dans cette section, nous nous intéressons donc à la discrétisation par méthode des volumes finis de l'équation

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{V}(h)) = S^h \\ \frac{\partial h T}{\partial t} + \nabla \cdot (h \mathbf{V}(h) T) = S^T \end{cases}} \quad \begin{array}{l} (4.6a) \\ (4.6b) \end{array}$$

#### 4.1.1 Notations

L'équation (4.6) décrit l'évolution de la hauteur  $h$  et de la température  $T$  du film sur un domaine  $\Omega$ . On souhaite approcher numériquement cette équation avec une approche volumes finis. La première étape consiste donc à diviser le domaine en  $K$  volumes de contrôle. On définit l'intervalle  $\mathcal{K}$  comme suit

$$\mathcal{K} = \llbracket 1, K \rrbracket \quad (4.7)$$

En deux dimensions,  $\Omega$  est une courbe (la direction normale n'étant pas maillée), donc les volumes de contrôle sont des segments. Dans le cas tridimensionnel,  $\Omega$  est une surface dont les volumes de contrôle sont des polygones (pour nos applications, on considèrera des triangles et des quadrangles). Chaque volume de contrôle est noté  $\Omega_k$ . Tous les volumes de contrôle sont fermés, c'est-à-dire qu'ils contiennent leurs frontières.

On introduit les notations suivantes

$\mathbf{x}$	$= (x, y)$	point de $\Omega$
$\Gamma$	$= \partial\Omega$	frontière de $\Omega$
$\Gamma_k$	$= \partial\Omega_k$	frontière de $\Omega_k$
$d$		dimension de $\Omega$ (d=1 si le problème est 2D, d=2 s'il est 3D)
$d\mathbf{x}$ ou $\lambda_d$		mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$
$d\Gamma$ ou $\lambda_{d-1}$		mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{d-1}$
$ \Omega_k $	$= \lambda(\Omega_k) = \int_{\Omega_k} d\mathbf{x}$	mesure du domaine $\Omega_k$
$G_k$	$= \frac{1}{ \Omega_k } \int_{\Omega_k} \mathbf{x} d\mathbf{x}$	centre de gravité du volume $\Omega_k$

TABLE 4.1 – Notations pour la discrétisation du domaine par la méthode des volumes finis

Avec ces notations, la famille  $\{\Omega_k\}_{k \in \mathcal{K}}$  vérifie les deux propriétés suivantes

$$\bigcup_{k \in \mathcal{K}} \Omega_k = \Omega \quad (4.8)$$

$$\lambda_d(\Omega_k \cap \Omega_j) = 0 \quad \forall k \neq j \quad (4.9)$$

Par définition, on dira que deux volumes de contrôle  $\Omega_k$  et  $\Omega_j$  sont voisins si  $\Omega_k \cap \Omega_j \neq \emptyset$ . Pour deux volumes de contrôles voisins, on note leur interface commune  $\Gamma_{kj}$  (ou indifféremment,  $\Gamma_{jk}$ ), soit

$$\Gamma_{kj} = \Gamma_{jk} = \Omega_k \cap \Omega_j \quad (4.10)$$

On note  $\mathbf{B}_{kj}$  le centre de gravité de  $\Gamma_{kj}$ , et  $\mathbf{n}_{kj}$  la normale à l'interface à  $\Gamma_{kj}$ , de telle sorte que  $\mathbf{n}_{kj}$  soit dirigée du volume  $\Omega_k$  vers  $\Omega_j$ . Par construction, on a donc

$$\mathbf{n}_{kj} = -\mathbf{n}_{jk}$$

Enfin on note  $\mathcal{V}_k = \{v_1, \dots, v_{V_k}\}$  l'ensemble des indices des volumes de contrôle voisins de  $\Omega_k$ .

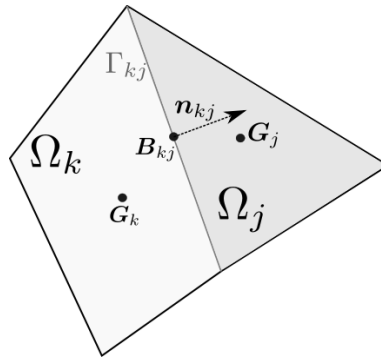


FIGURE 4.1 – Notations associées au volume  $\Omega_k$  et à un de ses voisins  $\Omega_j$

### 4.1.2 Schéma de discrétisation de l'équation de conservation de la masse

Une fois que le maillage a été défini, on discrétise l'équation (4.6a) en l'intégrant sur chaque volume de contrôle. On peut donc écrire

$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \int_{\Omega_k} \frac{\partial h}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_k} \nabla \cdot (h\mathbf{V}(h)) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_k} S^h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.11)$$

Comme le domaine  $\Omega_k$  est indépendant du temps (et en supposant suffisamment de régularité sur les fonctions), la dérivée temporelle sort de la première intégrale. Pour la seconde intégrale on applique le théorème de Green, et il vient donc

$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_k} h d\mathbf{x} + \sum_{j \in \mathcal{V}_k} \int_{\Gamma_{kj}} h\mathbf{V}(h) \cdot \mathbf{n}_{kj} d\Gamma = \int_{\Omega_k} S^h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.12)$$

On note  $h_k$  la hauteur moyenne dans la cellule  $\Omega_k$ ,  $S_k$  la moyenne de  $S$ , et  $f_{kj}$  le flux (signé, allant de  $\Omega_k$  vers  $\Omega_j$ ) à l'interface  $\Gamma_{kj}$ , soient

$$\begin{aligned} h_k &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} h d\mathbf{x} \\ S_k^h &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} S^h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ f_{kj} &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Gamma_{kj}} h\mathbf{V}(h) \cdot \mathbf{n}_{kj} \end{aligned}$$

Finalement, (4.11) se réécrit donc (en divisant par  $|\Omega_k|$ )

$$\boxed{\forall k \in \mathcal{K}, \quad \frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} \int_{\Gamma_{kj}} f_{kj} d\Gamma = S_k^h} \quad (4.13)$$

Exactement de même, on intègre (4.6b) sur chaque volume de contrôle et on pose :

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} T d\mathbf{x} \\ S_k^T &= \frac{1}{|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} S^T(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

On obtient alors la relation

$$\boxed{\forall k \in \mathcal{K}, \quad \frac{\partial h_k T_k}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} \int_{\Gamma_{kj}} f_{kj} T d\Gamma = S_k^T} \quad (4.14)$$

Dans l'expression (4.13), le terme  $\int_{\Gamma_{kj}} f_{kj} d\Gamma$  est en fait le flux de hauteur de film traversant l'interface  $\Gamma_{kj}$ . Sur chacune de ces interfaces, le flux ne dépend que de la hauteur du film  $h$  à l'interface, or cette hauteur n'est pas connue puisque la formulation volumes finis ne permet de calculer numériquement que la valeur moyenne de  $h$  dans chacun des volumes de contrôle  $\Omega_k$  (notée ici  $h_k$ ).

Afin d'estimer le flux, il faut définir un profil de hauteur du film sur chaque volume de contrôle  $\Omega_k$ . On choisit de représenter  $h$  comme une fonction uniforme sur chaque volume de contrôle, on a donc

$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_k, \quad h(\mathbf{x}) = h_k \quad (4.15)$$

Avec cette représentation, la hauteur du film  $h$  n'est pas continue à l'interface  $\Gamma_{kj}$ , elle n'est donc pas proprement définie. Le calcul du flux nécessite alors la résolution d'un *problème de Riemann* à chaque interface. Comme les problèmes de Riemann aux interfaces sont non linéaires, Roe [71] a proposé de les linéariser autour de l'interface avant de les résoudre. À l'ordre 1, on obtient sur l'interface  $\Gamma_{kj}$  le flux de Roe suivant :

$$g_{kj}^h(h_k, h_j) = \frac{1}{2}f_{kj}(h_k) + \frac{1}{2}f_{kj}(h_j) - \frac{1}{2} \left| \frac{f_{kj}(h_k) - f_{kj}(h_j)}{h_k - h_j} \right| (h_j - h_k) \quad (4.16)$$

Ce flux numérique est dit *upwind* (« contre le vent ») car il ne dépend que de la valeur dans la « cellule amont ». Autrement dit, si à l'interface  $\Gamma_{kj}$ , on a  $f_{kj}(h_k) > f_{kj}(h_j)$ <sup>1</sup>, alors le flux numérique ne dépend que de la hauteur du film dans la cellule  $\Omega_k$ . Cette propriété, conforme à la discrétisation d'une équation hyperbolique, permet d'assurer la stabilité du schéma numérique.

Finalement, l'équation de conservation de la masse du film ruisselant discrétisé en espace s'écrit

$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} \lambda_{d-1}(\Gamma_{kj}) g_{kj}^h(h_k, h_j) = S_k^h \quad (4.17)$$

### 4.1.3 Schéma de discrétisation pour l'équation de conservation de l'énergie

Concernant l'expression du flux numérique pour l'équation de la thermique, il est nécessaire qu'elle conduise au respect du principe du maximum pour la température. Cette propriété n'est pas garantie si on applique un schéma de Roe pour le système complet couplant l'équation de conservation de la masse et de l'énergie. La violation de ce principe pourrait par exemple apparaître dans le cas suivant : toutes les températures sont initialisées à une température  $T_0$ , la température des gouttelettes vaut également  $T_0$  et on considère que le flux de chaleur convectif, l'évaporation et la production de givre sont nuls. Ainsi, en tout temps et en tout point de l'espace, la température du film doit être égale à  $T_0$ , ce qui n'est pas assuré si on applique un schéma décentré quelconque non compatible avec celui utilisé pour l'équation de la masse. Pour pallier le problème, Larrouturou [52] a proposé une méthode très simple applicable dans tous les cas sous réserve que le schéma pour la masse soit positif. Il l'a proposé pour préserver le principe du maximum sur la concentration des espèces dans le cas de la mécanique des fluides multi-composants. Appliqué au problème de transport de la température  $T$  par le film, cela revient simplement à écrire que le flux numérique  $hT$  traversant une interface est égal au flux numérique de hauteur  $h$  multiplié par la température dans la cellule « amont ». Ce flux numérique s'écrit :

$$g_{kj}^T(h_k, h_j, T_k, T_j) = g_{kj}^h(h_k, h_j) \left( \mathbb{1}_{g_{kj}^h(h_k, h_j) > 0} T_k + \mathbb{1}_{g_{kj}^h(h_k, h_j) < 0} T_j \right) \quad (4.18)$$

où  $\mathbb{1}$  désigne la fonction indicatrice.

Le schéma numérique pour l'équation de conservation de l'enthalpie (4.6b) s'écrit donc :

$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \frac{\partial h_k T_k}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} \lambda_{d-1}(\Gamma_{kj}) g_{kj}^T(h_k, h_j, T_k, T_j) = S_k^T \quad (4.19)$$

1. Cette hypothèse revient à écrire que  $h_k \mathbf{V}(h_k) \cdot \mathbf{n}_{kj} > h_j \mathbf{V}(h_j) \cdot \mathbf{n}_{kj}$ . Or, au vu des hypothèses effectuées ici, la vitesse est dominée par les forces de cisaillement du gaz. Par conséquent, l'hypothèse  $f_{kj}(h_k) > f_{kj}(h_j)$  revient en général à affirmer que le cisaillement du gaz, et donc la vitesse du film, sont dirigés de  $\Omega_k$  vers  $\Omega_j$ .

### Respect du principe du maximum

On peut montrer que ce schéma respecte le principe du maximum en l'absence de terme source ( $S^h = St = 0$ ). Pour cela, on choisit un  $k \in \mathcal{K}$  et on développe la dérivée temporelle du schéma. On trouve :

$$h_k \frac{\partial T_k}{\partial t} + T_k \frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} \lambda_{d-1}(\Gamma_{kj}) g_{kj}^T(h_k, h_j, T_k, T_j) = 0$$

De plus, en injectant le schéma pour la conservation de la masse (4.17), il vient

$$h_k \frac{\partial T_k}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k} \lambda_{d-1}(\Gamma_{kj}) g_{kj}^h(h_k, h_j) \left( \mathbb{1}_{g_{kj}^h(h_k, h_j) > 0} T_k + \mathbb{1}_{g_{kj}^h(h_k, h_j) < 0} T_j - T_k \right) = 0$$

On observe immédiatement que si  $g_{kj}^h(h_k, h_j) > 0$ , alors la contribution de la cellule  $\Omega_j$  est nulle. Ainsi, en notant  $\mathcal{V}_k^-$  le sous ensemble de  $\mathcal{V}_k$  tel que si  $j \in \mathcal{V}_k^-$  alors  $g_{kj}^h(h_k, h_j) < 0$ , le schéma numérique s'écrit

$$h_k \frac{\partial T_k}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{j \in \mathcal{V}_k^-} \lambda_{d-1}(\Gamma_{kj}) g_{kj}^h(h_k, h_j) (T_j - T_k) = 0$$

Ainsi, en posant pour tout  $j \in \mathcal{V}_k^-$  les nombres positifs (par construction) suivant :

$$\alpha_{kj} = -\frac{h_k}{|\Omega_k|} \lambda_{d-1}(\Gamma_{kj}) g_{kj}^h(h_k, h_j)$$

le schéma numérique s'écrit

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \sum_{j \in \mathcal{V}_k^-} \alpha_{kj}(t) (T_j - T_k)$$

On peut montrer (voir annexe F) que cette équation implique que  $T_k$  demeure borné entre sa valeur initiale  $T_k(0)$  et les températures de ses voisins. En particulier, cela implique que toutes les températures sont dans les bornes des températures initiales, ce qui montre bien que le principe du maximum est respecté.

#### 4.1.4 Cas particulier de l'approche bidimensionnelle

L'équation (4.17) est écrite quelle que soit la dimension (2 ou 3) du problème. Cependant, dans le cas bidimensionnel, elle prend une forme plus simple. En effet, le domaine  $\Omega$  étant une courbe du plan, les  $\Omega_k$  sont tous des segments, ils ont donc deux voisins (ou un seul, si  $\Omega_k$  est situé à une extrémité).

De plus, si  $\Omega$  est un domaine connexe, on peut définir un sens de parcours. Pour chaque  $\Omega_k$ , on peut donc définir un *voisin gauche* (d'indice  $k_g$ ) et un *voisin droite* (d'indice  $k_d$ ). De même, on note  $\Gamma_{k_g}$  (resp.  $\Gamma_{k_d}$ ) l'interface entre  $\Omega_k$  et  $\Omega_{k_g}$  (resp. entre  $\Omega_k$  et  $\Omega_{k_d}$ ),  $h_{k_g}$  (resp.  $h_{k_d}$ ) la hauteur moyenne sur  $\Omega_{k_g}$  (resp. sur  $\Omega_{k_d}$ ) et  $\mathbf{n}_{k_g}$  (resp.  $\mathbf{n}_{k_d}$ ) la normale allant de  $\Omega_k$  vers  $\Omega_{k_g}$  (resp. de  $\Omega_k$  vers  $\Omega_{k_d}$ ).

Les interfaces  $\Gamma_{k_g}$  et  $\Gamma_{k_d}$  sont des points, ils sont donc de mesure 1 au sens de la mesure de Dirac. De plus, comme  $\Omega$  est une paroi, et que  $\mathbf{V}$  est la vitesse tangentielle du film, c'est-à-dire la vitesse projetée sur la paroi, on aura toujours  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{V}\|$ , où  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  désigne le vecteur tangent de  $\Omega$  au point  $\mathbf{x}$  (qui respecte le sens de parcours que l'on s'est donné).

On peut donc remplacer  $\mathbf{V}$  par le scalaire signé

$$V = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

En respectant ces conventions, on a donc

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{k_g} = -V$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{k_d} = V$$

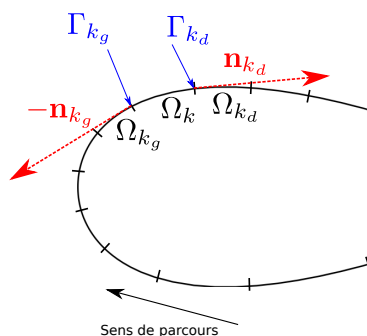


FIGURE 4.2 – Illustration du maillage bidimensionnel

(4.17) s'écrit donc

$$\forall k \in \mathcal{K}, \quad \frac{\partial h_k}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_k|} \left( g_{k k_d}^h(h_k, h_{k_d}) + g_{k k_g}^h(h_k, h_{k_g}) \right) = S_k^h \quad (4.20)$$

**Remarque :** dans le cas 1D (c'est-à-dire bidimensionnel ici), il est d'usage de numéroter les volumes de contrôle de gauche à droite, ce qui ici s'écrirait  $k_g + 1 = k_d - 1 = k$ . Néanmoins, cette convention n'est pas utilisée dans cette étude car la numérotation des volumes de contrôle conditionne la vitesse de convergence de l'algorithme d'intégration en temps, comme expliqué dans la section suivante 4.2.

#### 4.1.5 Remarques sur le traitement des conditions aux limites

L'équation de la dynamique du film est hyperbolique. Si un film est présent sur le bord  $\partial\Omega$  et que sa vitesse est dirigée vers l'extérieur (ce qui est le cas dans la plupart des applications visées), il n'y a donc pas de condition aux limites à spécifier. Cela est cohérent avec le schéma numérique *upwind* utilisé, puisque le flux numérique à l'interface  $\partial\Omega$  ne dépend pas d'une donnée externe à  $\Omega$ .

Dans le cas où la vitesse est rentrante, il faut connaître les conditions d'entrée du film. Dans nos applications, on considère systématiquement que le flux entrant est nul.

## 4.2 Discrétisation temporelle du modèle tricouche

À ce stade de l'exposé, nous avons un modèle semi-discret, au sens où toutes les dérivées spatiales ont été discrétisées, et où les dérivées temporelles ne l'ont pas été. L'objet de cette partie est de discrétiser temporellement le modèle.

Pour des raisons de robustesse et de temps de calcul, nous avons décidé de considérer un schéma d'Euler implicite. Nous verrons que ce choix entraîne des difficultés qui sont dues au fait qu'entre deux pas de temps, en un point  $(x, y)$  sur le profil, il peut y avoir apparition ou disparition d'une des trois couches. Ainsi, la forme de l'équation est implicite, ce qui rend difficilement envisageable un algorithme de résolution global tel qu'une méthode de Newton. Pour pallier cette difficulté, nous avons développé un algorithme de point fixe dont l'intérêt est de pouvoir gérer localement les apparitions ou disparitions de couches dans le modèle tricouche.

### 4.2.1 Développement d'un algorithme de point fixe

Dans cette partie, on conserve les notations introduites dans la partie précédente portant sur la discrétisation spatiale du film ruisselant. En résumé, le domaine d'étude  $\Omega$  est divisé en  $K$  volumes de contrôle  $\Omega_k$ . L'ensemble des voisins de  $\Omega_k$  est noté  $\mathcal{V}_k = \{v_1, \dots, v_{V_k}\}$ . On note  $\Gamma_{kj} = \Gamma_{jk}$  l'interface entre deux voisins  $\Omega_k$  et  $\Omega_j$ . De plus, comme de nombreux indices vont être utilisés, on remplace les indices  $i$ ,  $f$  et  $s$  qui désignent respectivement la glace, le film ruisselant et le film statique par des exposants.

Pour tout  $k$  dans  $\mathcal{K} = \llbracket 1, K \rrbracket$ , on note  $\mathbf{U}_k$  le vecteur inconnu du problème semi-discret (discrétisé en espace). Nous rappelons que le volume  $\Omega_k$  peut être dans un des six régimes différents comme décrit dans la partie 2.6. La structure du vecteur  $\mathbf{U}_k$  dépend donc du régime que l'on considère. Elle dépend également de la manière dont on discrétise l'équation de la chaleur dans le bloc de givre et dans le film statique (cf. chapitre 3). Pour la clarté de l'exposé on ne considèrera ici que la méthode de Galerkin, car comme on l'a vu dans le chapitre 3, c'est elle qui est utilisée en priorité, mais tout ce qui est décrit dans la suite s'applique à la MIA sans aucune difficulté. En utilisant la méthode de Galerkin, la température dans le bloc de givre s'écrit

$$T_k^i(t, z) = \sum_{j=1}^{n^i} \theta_{k,j}^i(t) \Psi_j \left( \frac{2(z - a_k^i(t))}{b_k^i(t) - a_k^i(t)} - 1 \right) \quad (4.21)$$

où  $n^i$  est le nombre de fonctions de base avec lesquelles on a choisi de discrétiser la température,  $T_j^i$  sont les nombres réels, inconnus du problème de thermique, et  $a^i$  (resp.  $b^i$ ) est l'interface inférieure (resp. supérieure) du bloc de givre. Les fonctions  $\Psi_j$  sont celle définies dans le paragraphe 3.3.2.

De même, on décompose la température dans le film statique ainsi

$$T_k^s(t, z) = \sum_{j=1}^{n^s} \theta_{k,j}^s(t) \Psi_j \left( \frac{2(z - a_k^s(t))}{b_k^s(t) - a_k^s(t)} - 1 \right) \quad (4.22)$$

Avec ces notations, le vecteur inconnu peut prendre l'une des six formes suivantes

- ① Mode *full evaporative* : l'inconnue est la température de la paroi

$$\mathbf{U}_k(t) = (T_{fe}(t)) \quad (4.23)$$



② Mode *running wet* : les inconnues sont la hauteur et la température du film

$$\mathbf{U}_k(t) = \begin{pmatrix} h_k^f(t) \\ \widehat{T}_k^f(t) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

③ Mode *rime ice* : les inconnues sont la hauteur et la température du givre

$$\mathbf{U}_k(t) = \begin{pmatrix} h_k^i(t) \\ \theta_{k,1}^i(t) \\ \vdots \\ \theta_{k,n^i}^i(t) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

④ Mode *glaze ice* : les inconnues sont les hauteurs et températures du givre et du film ruisselant, ainsi que le taux de croissance de glace à l'interface givre-film.

$$\mathbf{U}_k(t) = \begin{pmatrix} \dot{m}_{\text{ice,top}}(t) \\ h_k^i(t) \\ h_k^f(t) \\ \theta_{k,1}^i(t) \\ \vdots \\ \theta_{k,n^i}^i(t) \\ \widehat{T}_k^f(t) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

⑤ Mode *rime ice + static film* : les inconnues sont les hauteurs et températures du givre et du film statique, ainsi que le taux de croissance de glace à l'interface givre-film.

$$\mathbf{U}_k(t) = \begin{pmatrix} \dot{m}_{\text{ice,bottom}}(t) \\ h_k^i(t) \\ h_k^s(t) \\ \theta_{k,1}^i(t) \\ \vdots \\ \theta_{k,n^i}^i(t) \\ \theta_{k,1}^s(t) \\ \vdots \\ \theta_{k,n^s}^s(t) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

⑥ Mode *glaze ice + static film* : les inconnues sont les hauteurs et températures des

trois couches et les taux de croissance de glace aux deux interfaces

$$\mathbf{U}_k(t) = \begin{pmatrix} \dot{m}_{\text{ice,top}}(t) \\ \dot{m}_{\text{ice,bottom}}(t) \\ h_k^i(t) \\ h_k^f(t) \\ h_k^s(t) \\ \theta_{k,1}^i(t) \\ \vdots \\ \theta_{k,n^i}^i(t) \\ \theta_{k,1}^s(t) \\ \vdots \\ \theta_{k,n^s}^s(t) \\ \widehat{T}_k^f(t) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

On note  $\dim(\mathbf{U}_k)$  le nombre de composantes du vecteur  $\mathbf{U}_k$ . *A priori*,  $\dim(\mathbf{U}_k)$  peut évoluer au cours du temps, puisqu'il peut varier de 1, en cas de mode « *full evaporative* », à  $6 + n^i + n^s$  en cas de mode « *glaze ice + static film* ».

Sachant que le flux de chaleur est négligé dans les directions tangentielles à la paroi, le seul couplage qui existe entre les différents volumes de contrôle est dû à l'équation du film ruisselant. Quel que soit le mode considéré, on peut finalement toujours écrire le modèle tricouche sous la forme

$$\forall k \in \mathcal{K}, \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial t} + \mathbf{G}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{v_1}, \dots, \mathbf{U}_{V_k}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}_k) \quad (4.29)$$

→  $\mathbf{A}$  est une matrice  $\dim(\mathbf{U}_k) \times \dim(\mathbf{U}_k)$  qui permet notamment de gérer les cas où la dérivée temporelle d'une des composantes de  $\mathbf{U}_k$  n'intervient pas dans l'équation. C'est le cas par exemple dans le cas  $\textcircled{1}$ , ou également dans tous les cas où le givre et/ou le film statique sont présents (à cause des conditions aux limites à chacune des interfaces de ces couches). En particulier, cela signifie que si  $A_{ii} = 0$ , alors la  $i^{\text{ème}}$  équation ne fait pas intervenir de dérivée temporelle. Cette  $i^{\text{ème}}$  équation est donc totalement discrétisée, puisqu'elle a déjà été discrétisée spatialement. Notons qu'à cause de la discrétisation des flux de chaleur pour la méthode de Galerkin,  $\mathbf{A}$  n'est pas une matrice nécessairement diagonale, puisque certaines équations peuvent faire intervenir une somme de plusieurs dérivées temporelles (voir l'équation (3.38)).

→  $\mathbf{S}$  est une fonction de  $\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{U}_k)}$  dans  $\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{U}_k)}$ , qui est *a priori* non linéaire. Elle contient toute l'information sur les termes sources, les équations de changement de phase et la diffusion de la chaleur dans les couches.

→  $\mathbf{G}$  est une fonction de  $\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{U}_k)} \times \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{U}_{v_1})} \times \dots \times \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{U}_{V_k})}$  dans  $\mathbb{R}^{\dim(\mathbf{U}_k)}$ . Elle modélise les flux convectifs de masse et d'enthalpie du film ruisselant. Pour chaque  $\mathbf{U}_k$ , elle ne dépend donc que des variables  $h_f$  et  $\widehat{T}_f$  de la cellule et  $\Omega_k$  et de ses voisines. En particulier, si le volume de contrôle  $\Omega_k$  et tous ses voisins ne contiennent pas de film ruisselant, alors le terme  $\mathbf{G}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{v_1}, \dots, \mathbf{U}_{V_k})$  est nul.

Dans cette étude, le choix adopté pour la discrétisation temporelle est un schéma d'Euler implicite. On note :

$$t^n \stackrel{\text{déf}}{=} n\Delta t \quad (4.30)$$

De plus, on utilise la notation “exposant” pour l’approximation de  $\mathbf{U}_k$  au temps  $t^n$ , soit  $\forall k \in \mathcal{K}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{U}_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{U}_k(t^n) \quad (4.31)$$

Avec ces notations, la discrétisation de l’équation (4.29) avec un schéma d’Euler implicite s’écrit, pour tout  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall k \in \mathcal{K}, \mathbf{A}^{n+1} \frac{\mathbf{U}_k^{n+1} - \mathbf{U}_k^n}{\Delta t} + \mathbf{G}^{n+1}(\mathbf{U}_k^{n+1}, \mathbf{U}_{v_1}^{n+1}, \dots, \mathbf{U}_{V_k}^{n+1}) = \mathbf{S}^{n+1}(\mathbf{U}_k^{n+1}) \quad (4.32)$$

En pratique, cette équation non linéaire est difficile à résoudre avec une méthode itérative globale telle qu’une méthode de Newton car sa forme est implicite. À titre d’exemple, supposons qu’au temps  $t^n$ , le volume de contrôle  $\Omega_k$  est en mode ③, c’est-à-dire qu’il n’y a que du givre dans la cellule. Supposons de plus, qu’à l’instant  $t^{n+1}$ , un film liquide ruisselant se forme au-dessus du givre, dans cette même cellule  $\Omega_k$ , ce qui veut dire que la cellule passe en mode ④ (accrétion en *glaze ice*).

Il faut donc changer l’équation à résoudre pour  $\Omega_k$ . En effet, au temps  $t^n$ , on résolvait l’équation (2.72), et il faut résoudre au temps  $t^{n+1}$  l’équation (2.73). La méthode de Newton pourrait s’accommoder de ce problème, si dans l’équation (4.32), il n’y avait pas le terme  $\mathbf{G}$ , qui couple les cellules entre elles; entre deux itérations de Newton, on constaterait que l’équation (2.72) n’est plus valable puisqu’elle prévoit une température d’interface supérieure à la température de fusion (impossible pour du givre), donc on passerait à la résolution de l’équation (2.73).

Numériquement, ce qui est problématique est que le fait d’avoir un film ruisselant qui apparaît au niveau du volume  $\Omega_k$  a un impact sur toutes les cellules voisines, à cause du terme  $\mathbf{G}$  dans (4.32). En effet, au temps  $t^n$ , aucun flux convectif de masse ne pouvait aller de la cellule  $\Omega_k$  vers une cellule voisine puisqu’il n’y avait pas de film dans  $\Omega_k$ . En revanche, le film apparaissant au temps  $t^{n+1}$ , il peut ruisseler dans les cellules voisines, et comme l’algorithme est implicite, on peut même imaginer qu’il ruisselle dans les volumes de contrôle voisins des voisins, et ainsi de suite.

Cette propagation de l’information rend difficilement envisageable la mise en œuvre d’un algorithme de résolution global tel que la méthode de Newton de l’équation (4.32). En effet, non seulement ce schéma numérique est implicite par rapport à toutes ces variables (ce qui est classique pour un schéma d’Euler implicite), mais la forme de l’équation est elle-même implicite, puisque l’on ne peut pas connaître *a priori* les transitions.

Pour pallier ces difficultés, nous avons développé un algorithme itératif de point fixe qui permet de gérer les transitions localement. L’idée est de définir, pour tout  $k \in \mathcal{K}$ , une suite de vecteur  $\mathbf{U}_k^{(l)}$  qui converge vers  $\mathbf{U}_k^{n+1}$  lorsque  $l \rightarrow \infty$ . Le principe de l’algorithme est d’impliciter la résolution de (4.32) uniquement sur les variables locales, en considérant les variables voisines connues. Cet algorithme s’inspire de l’algorithme de Gauss-Seidel, utilisé pour résoudre les systèmes linéaires.

Pour présenter cet algorithme, on enrichit la définition de l’ensemble des voisins d’un volume de contrôle  $\Omega_k$ , en discriminant les voisins selon que leur indice est inférieur ou supérieur à  $k$ .

$$\mathcal{V}_k^- = \{j \in \mathcal{K} \mid j < k, \Omega_k \cap \Omega_j \neq \emptyset\} = \{v_1, \dots, v_{V_k^-}\} \quad (4.33)$$

$$\mathcal{V}_k^+ = \{j \in \mathcal{K} \mid j > k, \Omega_k \cap \Omega_j \neq \emptyset\} = \{w_1, \dots, w_{V_k^+}\} \quad (4.34)$$

Par définition, on a évidemment

$$\mathcal{V}_k = \mathcal{V}_k^- \cup \mathcal{V}_k^+, \quad \mathcal{V}_k^- \cap \mathcal{V}_k^+ = \emptyset$$

Avec cette notation, l'algorithme de point fixe pour la résolution de (4.32) s'écrit

```

[Boucle en temps]
n ← 0 [Initialisation du temps]
Pour n de 0 à ∞ faire
  [Algorithme de point fixe]
  [Initialisation de l'algorithme avec les valeurs du pas de temps précédent]
  Pour k de 1 à N faire
     $\mathbf{U}_k^{(0)} \leftarrow \mathbf{U}_k^n$ 
  Fin Pour
  l ← -1
  Répéter
    l ← l + 1
    [Boucle sur les volumes de contrôle]
    Pour k de 1 à N faire
      Résoudre l'équation
      
$$\mathbf{A} \frac{\mathbf{U}_k^{(l+1)} - \mathbf{U}_k^n}{\Delta t} + \mathbf{F} \left( \mathbf{U}_k^{(l+1)}, \mathbf{U}_{v_1}^{(l+1)}, \dots, \mathbf{U}_{v_{V_k^-}}^{(l+1)}, \mathbf{U}_{w_1}^{(l)}, \dots, \mathbf{U}_{w_{V_k^+}}^{(l)} \right) = \mathbf{S} \left( \mathbf{U}_k^{(l+1)} \right) \quad (4.35)$$

       $\mathbf{U}_k^{n+1} \leftarrow \mathbf{U}_k^{(l+1)}$ 
    Fin Pour
  jusqu'à ce que  $\forall k \in \mathcal{K}, \left\| \frac{\mathbf{U}_k^{(l+1)} - \mathbf{U}_k^{(l)}}{\mathbf{U}_k^{(l+1)}} \right\| < \varepsilon$  (ou autre critère de convergence)
Fin Pour

```

Algorithme 1: point fixe pour l'implicitation temporelle du modèle multicouche

Dans l'équation (4.35), l'inconnue est la variable  $\mathbf{U}_k^{(l+1)}$ , c'est-à-dire le vecteur contenant les grandeurs locales.

Le critère de convergence porte sur la norme infinie, puisque l'on impose la convergence sur chaque volume. On pourrait relaxer cette condition, en prenant par exemple un critère du type

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left\| \frac{\mathbf{U}_k^{(l+1)} - \mathbf{U}_k^{(l)}}{\mathbf{U}_k^{(l+1)}} \right\| < \varepsilon$$

Entre deux itérations du point fixe, il se peut que le volume  $k$  ait changé de mode. Dans ce cas, on considère toujours que le terme  $\left\| \frac{\mathbf{U}_k^{(l+1)} - \mathbf{U}_k^{(l)}}{\mathbf{U}_k^{(l+1)}} \right\|$  est suffisamment grand pour que le critère de convergence ne soit pas respecté. Ainsi, le minimum requis pour que l'algorithme ait convergé est de n'avoir aucun volume qui transitionne entre deux itérations.

## 4.2.2 Optimisation de la vitesse de convergence de l'algorithme

### 4.2.2.1 Cas général

Dans cet algorithme, il faut remarquer que la numérotation des volumes de contrôle joue un rôle. En effet, lorsque l'on résout (4.35) pour un volume donné  $k$  à l'itération  $(l + 1)$ , les grandeurs  $\mathbf{U}_{v_1}^{(l+1)}, \dots, \mathbf{U}_{v_{V_k^-}}^{(l+1)}$  sont prises à l'itération  $(l + 1)$ . Ces grandeurs correspondent aux volumes de contrôle dont l'indice est inférieur à  $k$ . Dans la boucle où l'on itère sur les volumes de contrôle, ces vecteurs ont été calculés avant, on peut donc bien les prendre à l'itération  $(l + 1)$ . En revanche, les grandeurs  $\mathbf{U}_{w_1}^{(l)}, \dots, \mathbf{U}_{w_{V_k^+}}^{(l)}$  n'ont pas été évaluées à l'itération  $(l + 1)$ , puisqu'elles ont un indice plus grand que  $k$ , elles sont donc prise à l'itération précédente. Une conséquence très importante de cette constatation est que **la vitesse de convergence de l'algorithme de point fixe dépend de la numérotation**.

En fait, nous pouvons d'ores et déjà prévoir que la numérotation optimale est celle qui respecte la condition

$$\forall (k, j) \in \mathcal{K}^2, (\Omega_k \cap \Omega_j \neq \emptyset \text{ et } k < j) \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{B}_{kj}) \cdot \mathbf{n}_{kj} \geq 0 \quad (4.36)$$

Cette condition signifie que si deux volumes de contrôles sont voisins, alors le vecteur vitesse du film  $\mathbf{V}$  doit être dirigé du volume ayant l'indice le plus petit vers celui ayant l'indice le plus grand. En d'autres termes, si deux cellules sont voisines, alors la cellule amont doit être calculée en premier. Ainsi, sachant que le schéma de discrétisation du film ruisselant est un schéma *upwind* (par construction seule la hauteur amont est convectée), la cellule aval est impactée par la cellule amont, mais la réciproque n'est vraie. De fait, si pour tout couple cellule amont-cellule aval, la cellule amont est tout le temps traitée en premier, alors, l'algorithme de point fixe, qui est supposé être itératif, convergera en fait en une seule itération!

En pratique il n'est pas évident d'assurer (4.36). En effet, la vitesse  $\mathbf{V}$  s'écrit (cf paragraphe 2.3.2)

$$\mathbf{V}(h_f) = \frac{\tau}{2\mu_w} h_f + \frac{1}{3\mu_w} (-\nabla p + \rho_w \mathbf{G}_t) h_f^2 \quad (4.37)$$

avec  $\tau$  la contrainte de cisaillement du gaz,  $p$  la pression et  $\mathbf{G}_t$  la force de gravité tangentielle à la paroi. Ainsi, (4.36) se réécrit

$$\forall (k, j) \in \mathcal{K}^2, (\Omega_k \cap \Omega_j \neq \emptyset \text{ et } k < j) \Rightarrow \frac{\tau(\mathbf{B}_{kj}) \cdot \mathbf{n}_{kj}}{2\mu_w} h_f + \frac{h_f^2}{3\mu_w} (-\nabla p(\mathbf{B}_{kj}) + \rho_w \mathbf{G}_t(\mathbf{B}_{kj})) \cdot \mathbf{n}_{kj} \geq 0 \quad (4.38)$$

Si  $\tau(\mathbf{B}_{kj}) \cdot \mathbf{n}_{kj}$  et  $(-\nabla p(\mathbf{B}_{kj}) + \rho_w \mathbf{G}_t(\mathbf{B}_{kj})) \cdot \mathbf{n}_{kj}$  sont du même signe, alors le signe de l'expression ne dépend pas de  $h_f$ . Dans le cas contraire, la relation ne peut pas être assurée pour tout  $h_f$ , puisque la fonction change de signe pour un  $h_f$  donné. Néanmoins, comme  $h_f$  est souvent très petit, le terme d'ordre 2 est souvent négligeable devant le terme d'ordre 1, et on suppose donc en première approximation que l'expression est du signe de  $\tau(\mathbf{B}_{kj}) \cdot \mathbf{n}_{kj}$ . Finalement, (4.36) se réécrit donc

$$\boxed{\forall (k, j) \in \mathcal{K}^2, (\Omega_k \cap \Omega_j \neq \emptyset \text{ et } k < j) \Rightarrow \tau(\mathbf{B}_{kj}) \cdot \mathbf{n}_{kj} \geq 0} \quad (4.39)$$

La relation (4.39) est moins contraignante que (4.36), mais il est mathématiquement possible qu'elle ne puisse pas être respectée. En effet, on peut par exemple imaginer que trois volumes de contrôle, nommément  $\Omega_k, \Omega_l$  et  $\Omega_m$  soient tous trois voisins, et que

$$\tau(\mathbf{B}_{kl}) \cdot \mathbf{n}_{kl} > 0, \tau(\mathbf{B}_{lm}) \cdot \mathbf{n}_{lm} > 0, \tau(\mathbf{B}_{mk}) \cdot \mathbf{n}_{mk} > 0$$

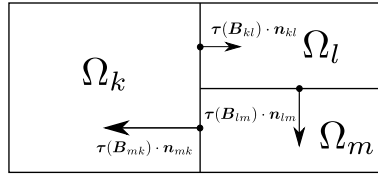


FIGURE 4.3 – Illustration d’une relation circulaire entre des volumes de contrôle

Pour respecter (4.39), il faudrait donc vérifier la relation  $k < l < m < k$ , ce qui n’est évidemment pas possible. Remarquons que dans le cas bidimensionnel, comme chaque volume de contrôle ne peut avoir que deux voisins, qui eux-mêmes ne sont pas voisins, le cas décrit sur la figure ci-dessus ne peut pas apparaître. Dans le cas tridimensionnel, si ce cas apparaît, la condition (4.39) doit être relaxée. Cette relaxation sera évoquée juste après la présentation de l’algorithme 2.

Pour tout volume de contrôle  $\Omega_k$ , on définit l’ensemble  $\mathcal{V}_k^a$  des *voisins amont* définis par

$$\mathcal{V}_k^a = \{j \in \mathcal{V}_k, \boldsymbol{\tau}(\mathbf{B}_{kj}) \cdot \mathbf{n}_{kj} < 0\} \quad (4.40)$$

$\mathcal{V}_k^a$  est donc la collection des volumes de contrôle voisins de  $\Omega_k$  qui sont tels que le cisaillement du gaz est dirigé vers  $\Omega_k$ .

Ensuite, pour chaque volume  $\Omega_k$ , on introduit la notion de *distance discrète à la ligne d’arrêt de l’écoulement d’air*<sup>2</sup>, notée  $d$ , qui est un nombre entier défini par récurrence :

$$\forall k \in \mathcal{K}, d(\Omega_k) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{V}_k^a = \emptyset \\ \max_{j \in \mathcal{V}_k^a} (d(\Omega_j)) + 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.41)$$

Si  $d(\Omega_k) = 0$ , alors le volume de contrôle  $\Omega_k$  n’a aucune cellule amont. Cela signifie qu’aucun flux convectif de masse ne pourra entrer dans  $\Omega_k$  par l’intermédiaire du film ruisselant,  $\Omega_k$  est donc situé sur la ligne d’arrêt. Si  $d(\Omega_k) = 1$ , cela signifie que les seuls volumes de contrôle amont de  $\Omega_k$  sont des volumes qui ont une distance discrète à la ligne d’arrêt nulle. Si  $d(\Omega_k) = 2$  alors les cellules amont de  $\Omega_k$  ont une distance à la ligne d’arrêt de 0 ou 1, et ainsi de suite. La notion de distance à la ligne d’arrêt permet donc d’assurer que si deux volumes de contrôle sont voisins, alors le voisin amont possède toujours une distance à la ligne d’arrêt inférieure.

Ainsi, afin d’assurer que les cellules amont soient toujours traitées avant les cellules aval, la numérotation des volumes de contrôle se fera de telle sorte que

$$\forall (k, j) \in \mathcal{K}^2, k < j \Rightarrow d(\Omega_k) \leq d(\Omega_j) \quad (4.42)$$

Sur la figure 4.4, on illustre un exemple d’un maillage ordonné avec la convention (4.39). Dans cette figure, on considère un profil sur lequel un écoulement se sépare au niveau d’une ligne d’arrêt (en rouge). Les nombres gris représentent les numéros des cellules. Les flèches représentent le sens de l’écoulement selon les normales aux faces (la flèche est toujours dirigée vers une cellule aval). Les nombres noirs entourés représentent la distance discrète à la ligne d’arrêt. Sur cette figure, on observe bien que pour tout couple de cellules voisines, la cellule amont possède toujours une distance discrète au point d’arrêt inférieure.

2. Compte tenu des hypothèses effectuées, cette ligne d’arrêt est en pratique très proche de la zone où le film se sépare (c’est-à-dire où la vitesse du film est nulle).

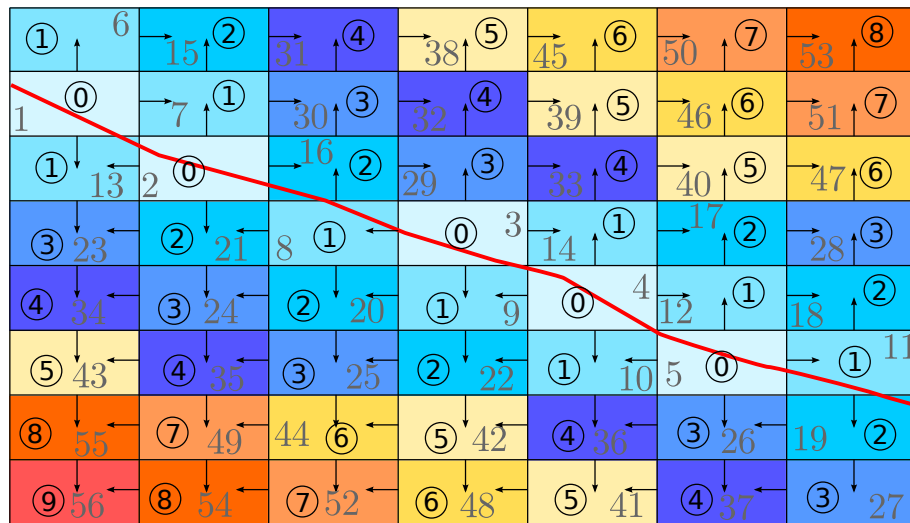


FIGURE 4.4 – Illustration de l'ordonnancement d'un maillage. Ligne rouge : ligne d'arrêt. Numéros entourés : distance à la ligne d'arrêt. Flèches : sens de l'écoulement

Pour construire cet ordonnancement, on utilise l'algorithme suivant

```

Ne numéroter aucun volume de contrôle
 $k \leftarrow 0$  [Numéro des volumes de contrôle]
 $D \leftarrow 0$  [Distance au point d'arrêt]
Tant que ( il existe un(des) volume(s) de contrôle non numéroté(s) ) faire
  Cpt_Cell_traitees  $\leftarrow 0$ 
  Pour les volumes de contrôle  $\omega$  non numérotés faire
    Évaluer les voisins amont déjà numérotés  $\{\Omega_l\}_1^L$  de  $\omega$ 
    Si ( $\forall l \in \llbracket 1, L \rrbracket, d(\Omega_l) < D$ ) Alors
      [Tous les voisins amont de  $\omega$  ont été numérotés aux itérations
      précédentes (grâce au test  $d(\Omega_l) < D$ ), cela signifie que la
      distance de  $\omega$  vaut  $D$ .  $\omega$  doit donc être numéroté.]
       $k \leftarrow k+1$  [Incréméntation du compteur des volumes numérotés]
       $\omega \stackrel{\text{déf}}{\leftarrow} \Omega_k$  [Le domaine  $\omega$  reçoit le numéro  $k$ ]
       $d(\Omega_k) \leftarrow D$  [Distance à la ligne d'arrêt]
      Cpt_Cell_traitees  $\leftarrow$  Cpt_Cell_traitees + 1
    Fin Si
  Fin Pour
  Si (Cpt_Cell_traitees=0) Alors
    | Relaxation du critère (4.39)
  Fin Si
   $D \leftarrow D+1$  [Incréméntation de la distance]
Fait

```

Algorithme 2: numérotation des volumes de contrôle

Dans cet algorithme, la variable `Cpt_Cell_traitees` permet de compter le nombre de cellules numérotées pour une certaine distance à la ligne d'arrêt  $D$ . Si, pour cette distance,

aucune cellule n'a été numérotée, cela signifie que le critère (4.39) ne peut pas être respecté puisqu'on est dans le cas de la figure 4.3. Afin de remédier au problème, on considère que toutes les cellules qui partagent une interface avec une cellule déjà numérotée (c'est-à-dire dont la distance à la ligne d'arrêt est au moins égale à  $D - 1$ ) ont une distance à la ligne d'arrêt égale à  $D$ .

#### 4.2.2.2 Cas bidimensionnel

Dans le cas bidimensionnel, on pourrait utiliser l'algorithme 2 afin de vérifier la condition (4.39) et donc d'assurer une convergence optimale. Néanmoins, pour les applications de givrage sur des profils, on peut utiliser un algorithme qui est bien plus simple à mettre en œuvre. En effet, dans le cas d'un profil bidimensionnel, après avoir effectué un calcul d'aérodynamique, on obtient un point d'arrêt, proche du bord d'attaque. L'idée est dans un premier temps de numéroté l'intrados, en allant du point d'arrêt vers le bord de fuite, puis de faire la même chose pour l'extrados. Cet "algorithme" est illustré dans la figure 4.5

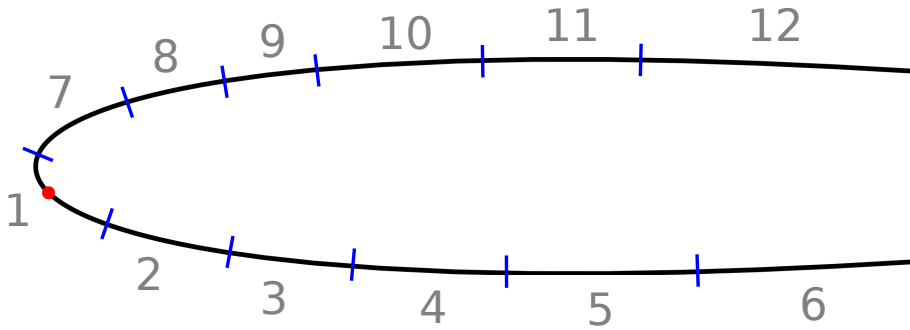


FIGURE 4.5 – Illustration de la numérotation d'un profil unidimensionnel. Le point rouge représente le point d'arrêt et les nombres la numérotation des volumes de contrôle.

#### 4.2.3 Convergence de l'algorithme

Le raisonnement utilisé pour optimiser l'algorithme permet, formellement, de montrer la convergence de l'algorithme de point fixe 1 en un **nombre fini d'itérations**.

##### 4.2.1. Proposition. *Sous les conditions suivantes*

1. La distance à la ligne d'arrêt est définie pour tous les volumes de contrôle (autrement dit, on ne peut pas se trouver dans la situation de la figure 4.3)
2. Les équations de la dynamique du film liquide sont discrétisées avec le schéma de Roe d'ordre 1 (4.17)
3.  $h_f$  reste suffisamment petit pour qu'à toutes les interfaces  $\Gamma_{kj}$ ,  $\mathbf{V}(h_f) \cdot \mathbf{n}_{kj}$  soit du même signe que  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{kj}$  (autrement dit, la vitesse est dominée par les forces de cisaillement)

*l'algorithme 1 converge au plus en  $K$  itérations, où  $K$  est le nombre de volumes de contrôle.*

*Démonstration formelle.*

En supposant que la distance au point d'arrêt  $d$  est bien définie, on peut affirmer, par construction que

$$\forall k \in \mathcal{K}, d(\Omega_k) \leq K - 1 \quad (4.43)$$

De plus, soient  $\Omega_k$  et  $\Omega_j$  deux cellules voisines, telles que  $\Omega_k$  soit amont de  $\Omega_j$  (c'est-à-dire  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{B}_{kj}) \cdot \mathbf{n}_{kj} > 0$ ). La condition 3. assure que  $\mathbf{V}(h_f) \cdot \mathbf{n}_{kj} > 0$ . Par conséquent, étant



donné que d'après 2., le flux convectif de masse  $f_{kj}$  (allant de  $\Omega_k$  vers  $\Omega_j$ ) est discrétisé avec un schéma de Roe d'ordre 1, qui est un schéma purement *upwind*, on peut affirmer que  $f_{kj}$  ne dépend que  $h_k$ , la hauteur du film dans la cellule  $\Omega_k$ .

On peut donc affirmer que toutes les cellules situées à une distance nulle du point d'arrêt convergent dès la première itération, puisque les flux traversant les interfaces de ces cellules ne dépendent d'aucune cellule voisine. De proche en proche, on affirme que les cellules dont la distance au point d'arrêt vaut 1 convergent en deux itérations, et ainsi de suite. Finalement, les cellules dont la distance au point d'arrêt vaut  $K - 1$  convergent en  $K$  itérations, ce qui termine la démonstration.

□

#### 4.2.4 Validation numérique de l'algorithme de point fixe

L'objectif de ce paragraphe est de valider, à l'aide de simulations numériques l'algorithme de point fixe. Rappelons que cet algorithme est nécessaire à cause du couplage entre les cellules, qui intervient uniquement en présence d'un film ruisselant (soit sur la paroi, soit au-dessus du bloc de givre). Par conséquent, pour évaluer la robustesse et la vitesse de convergence de l'algorithme itératif, on considère un cas de givrage faisant intervenir du ruissellement, dans plusieurs configurations.

##### 4.2.4.1 Cas bidimensionnel

On considère un profil NACA0012 dont la corde vaut 1.00893 m. Ce profil est soumis à un écoulement d'air saturé en vapeur d'eau, à température  $T_\infty = -10$  °C, une pression  $p_\infty = 1$  bar. Le mach infini amont de l'écoulement vaut  $M_\infty = 0.4$ , et l'angle d'incidence de  $4^\circ$ . On suppose de plus que l'air est chargé en gouttelettes d'eau surfondues (de température égale à  $-10$  °C). La concentration de ces gouttes vaut  $1 \text{ g.m}^{-3}$ , et le diamètre de chacune d'elle vaut  $20 \mu\text{m}$ .

##### 4.2.4.1.1 Données externes

Dans un premier temps, nous effectuons un calcul Euler, à l'aide de la chaîne de calcul IGLOO2D, afin de déterminer les champs de vitesse, de pression, de masse volumique et de température. On obtient le champ de pression suivant

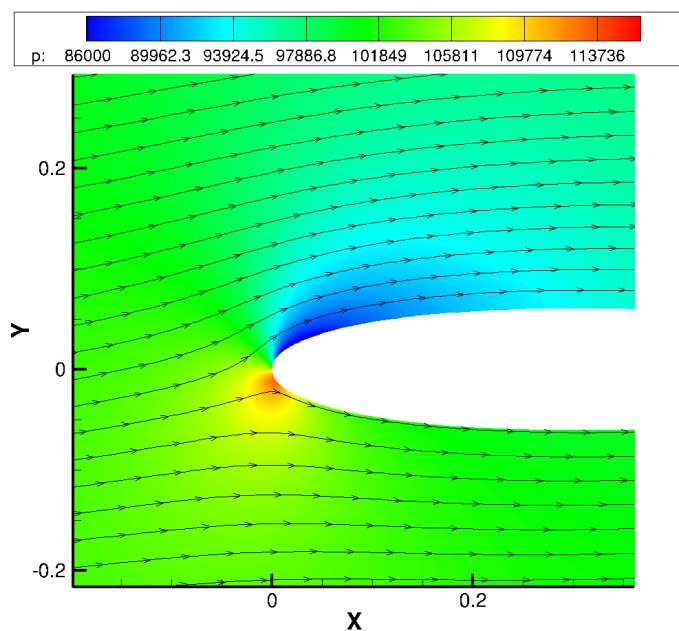


FIGURE 4.6 – Champs de pression Euler autour du profil d’aile. Les lignes noires sont les lignes de courant

On utilise ensuite la même chaîne pour effectuer un calcul de trajectographie permettant de prévoir les zones d’impact sur le profil des gouttelettes. On obtient la captation suivante

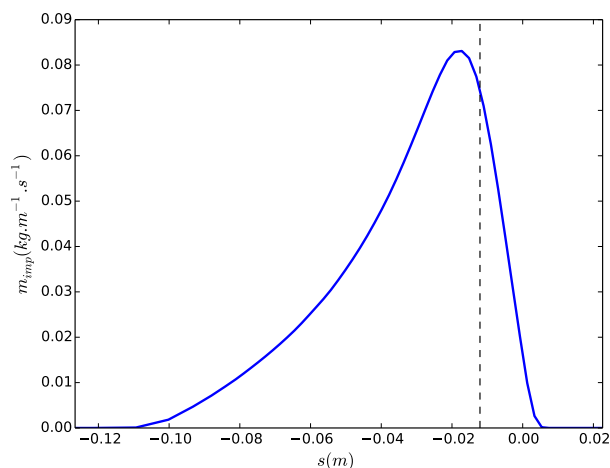


FIGURE 4.7 – Courbe de captation du profil

$s$  représente l’abscisse curviligne le long du profil. La référence est prise au point le plus à gauche du profil (le bord d’attaque). On observe que le profil capte davantage de gouttelettes à l’intrados, ce qui est normal puisque le profil est symétrique et qu’il y a un angle d’attaque positif.

Enfin, on effectue un calcul de couche limite qui nous permet d’avoir le coefficient d’échange thermique ainsi que la température de récupération. Pour cela, on suppose que la couche limite est entièrement turbulente.

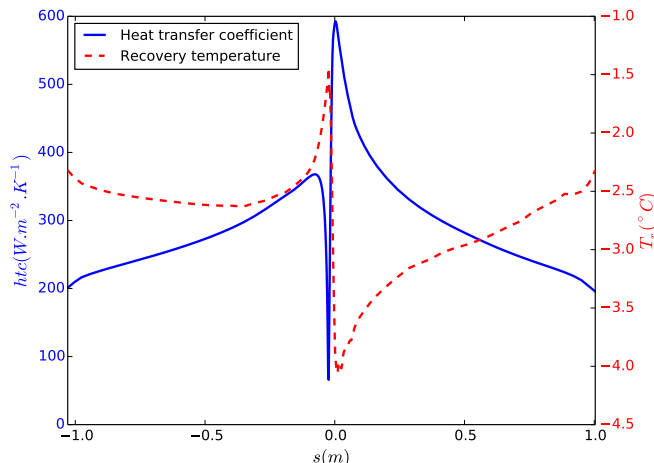


FIGURE 4.8 – Coefficient de transfert thermique et température de récupération sur le profil

On suppose que toutes les grandeurs externes ( $\dot{m}_{\text{imp}}$ ,  $h_{\text{tc}}$ ,  $T_r$ , ...), qui sont calculées de façon stationnaire, sont indépendantes du temps.

#### 4.2.4.1.2 Conditions à la paroi

Le but de ce paragraphe est de valider l'algorithme de point fixe pour le solveur d'accrétion. Ainsi, on ne considèrera pas de conduction dans la paroi. Afin d'évaluer l'algorithme dans plusieurs cas, on définit une condition aux limites dépendant du temps :

- Si  $t \leq 100$ , on pose

$$\dot{\Phi}_{\text{wall}} = h_{\text{wall}}(T_{\text{imp}} - T_0), \quad h_{\text{wall}} = 10^9 \text{ SI et } T_{\text{imp}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

Cela permet d'imposer une température très proche de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  (en pratique, cette condition est respectée avec une précision inférieure au millième de degré Celsius), et donc d'éviter la formation de givre

- Si  $100 < t \leq 200$ , on pose

$$\dot{\Phi}_{\text{wall}} = h_{\text{wall}}(T_{\text{imp}} - T_0), \quad h_{\text{wall}} = 10^9 \text{ SI et } T_{\text{imp}} = 1 \text{ }^\circ\text{C}$$

ce qui permet d'imposer une température égale à  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

- Enfin, si  $t > 200$ , on pose

$$\dot{\Phi}_{\text{wall}} = 0$$

ce qui permet d'imposer une paroi adiabatique, et d'observer la formation de givre sur le profil.

Le problème est résolu pour l'abscisse curviligne  $s$  allant de -1 à 1, avec un pas de temps fixé à  $\Delta t = 1$ . Trois pas d'espace sont testés et résumés dans la table suivante

Pas d'espace $\Delta s$ (m)	Nombre de volumes de contrôle $K$
$10^{-2}$	200
$10^{-3}$	2000
$10^{-4}$	20000

Pour chaque pas d'espace, on réalise deux calculs. Le premier consiste à effectuer l'algorithme 1 en respectant la numérotation de la figure 4.5. Il s'agit donc de vérifier que l'algorithme converge en une itération (en pratique, on doit réaliser deux itérations, constater que la seconde donne la même chose que la première, et en conclure donc que l'algorithme avait convergé dès la première). Le second calcul consiste à effectuer le même algorithme mais en prenant la numérotation strictement inverse, il s'agit donc de vérifier que l'on converge en, au plus,  $K$  itérations. Cette dernière configuration est la plus défavorable, puisqu'il s'agit, systématiquement, d'évaluer les volumes de contrôle aval avant les volumes amont.

Les cas les plus défavorables seront bien entendu lorsque les conditions aux limites à la paroi changent brusquement, c'est-à-dire, au vu du pas de temps choisi, en  $t = 1$  s,  $t = 101$  s et  $t = 201$  s. Nous nous concentrons donc sur ces trois temps. Sur la figure 4.9 sont affichées les courbes de convergence pour les trois pas d'espace et les 3 temps.

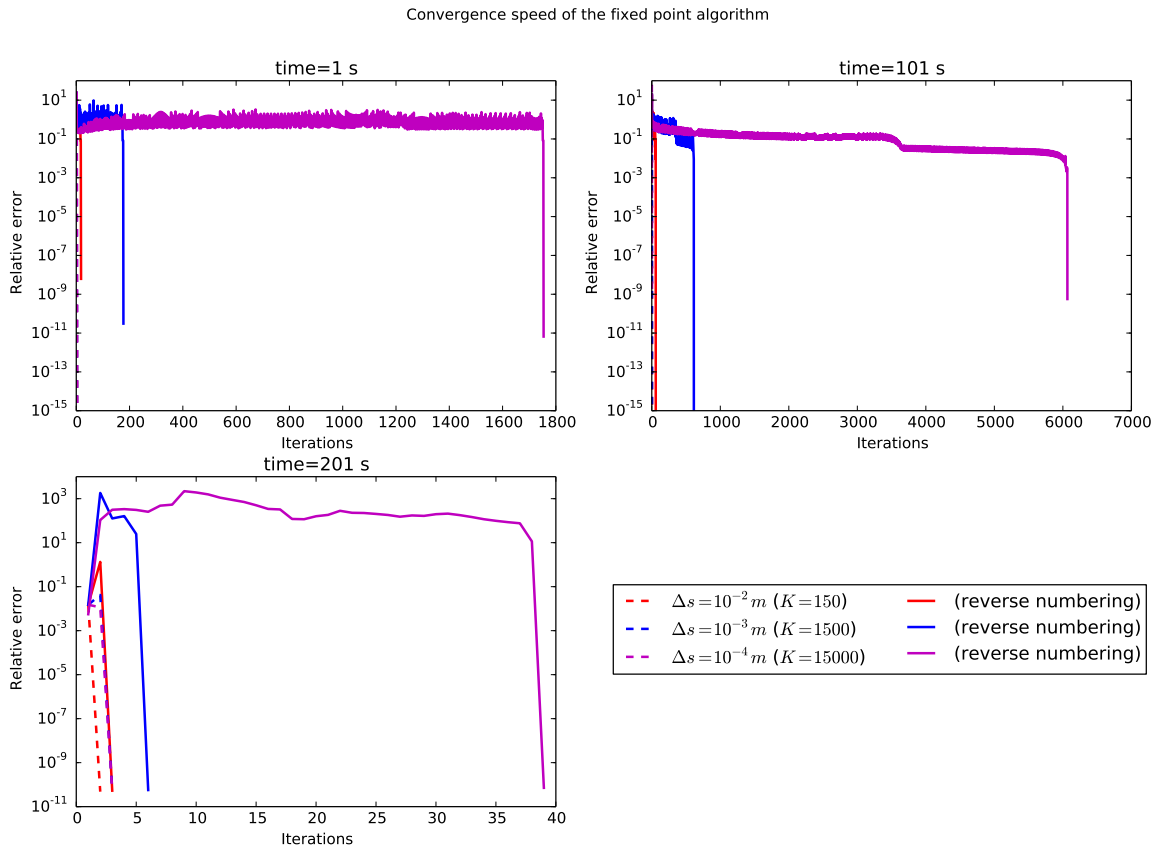


FIGURE 4.9 – Convergence de l'algorithme de point fixe. Les traits en pointillé sont les résultats des calculs effectués avec la numérotation optimale, et les traits pleins ceux réalisés en inversant la numérotation

#### 4.2.4.2 Cas tridimensionnel

On considère ici un cas tridimensionnel présenté dans la suite du manuscrit dans paragraphe 7.1 (p. 183). Le double profil est maillé avec environ 50 000 mailles. Pour ce cas test, on pose  $\Delta t = 15$  s. Après le premier pas de temps, un film d'eau ruisselant est présent

dans 8000 mailles.

On réalise deux simulations : la première se fait en utilisant l'algorithme de numérotation optimale, et le deuxième se fait en parcourant les cellules dans le sens contraire à cette numérotation. Les courbes de convergence obtenues sont présentées sur la figure suivante :

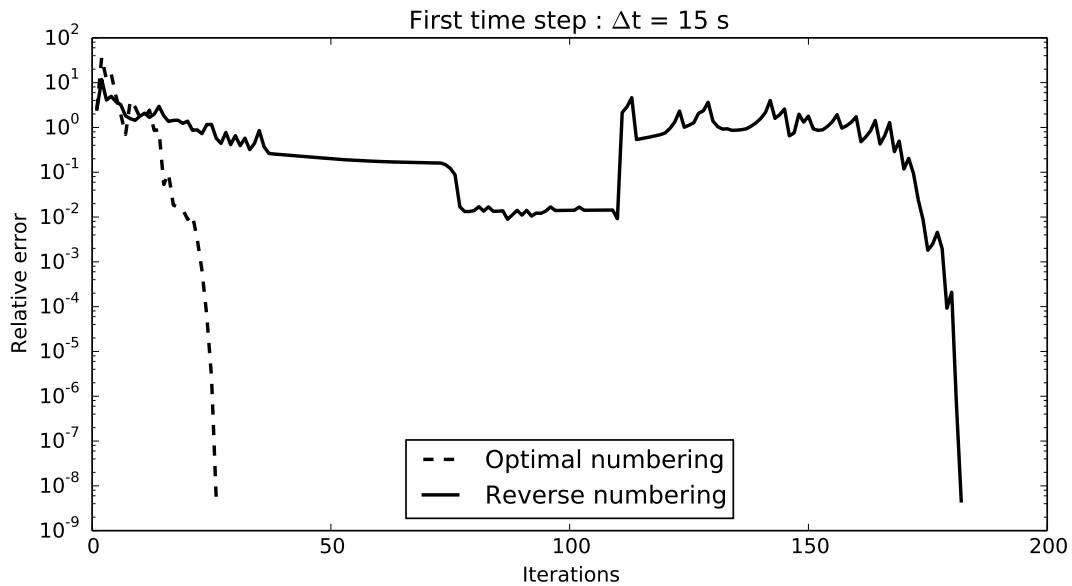


FIGURE 4.10 – Convergence de l'algorithme de point fixe en trois dimensions

On observe que contrairement au cas bidimensionnel, l'algorithme ne converge pas en une seule itération lorsque l'on considère la numérotation optimale. Cela s'explique par le fait que la condition (4.39) a été relaxée environ 40 000 fois dans la construction de la numérotation à cause de cas similaires à celui de la figure 4.3. Malgré le fait que cette numérotation soit loin de respecter le critère (4.39), le fait d'avoir effectué ce tri améliore significativement la vitesse de convergence. On peut supposer que dans un cas plus favorable, où le critère pourrait être davantage respecté, l'utilisation de cet algorithme de tri améliorerait d'autant plus ces vitesses de convergence.



## Chapitre 5

# Une méthode de Schwarz pour le couplage du modèles tricouche avec le modèle de thermique associé au système de protection

### Sommaire

---

<b>5.1 Généralités et position du problème</b> . . . . .	<b>118</b>
5.1.1 État de l’art succinct sur les méthodes de Schwarz . . . . .	118
5.1.2 Introduction du problème de couplage . . . . .	119
<b>5.2 Développement et analyse d’une méthode de Schwarz pour des problèmes couplés de thermique unidimensionnels</b> . . . . .	<b>121</b>
5.2.1 Développement d’un algorithme de Schwarz pour le problème instationnaire linéaire . . . . .	121
5.2.2 Problème stationnaire non linéaire . . . . .	127
5.2.3 Conclusion : construction d’un algorithme de Schwarz pour un problème de couplage de thermique unidimensionnel général . . .	136
<b>5.3 Application à des cas bidimensionnels de type couche mince</b> .	<b>139</b>
5.3.1 Présentation de l’algorithme . . . . .	140
5.3.2 Validations numériques . . . . .	141

---

Dans le chapitre 2, nous avons développé un modèle d’accrétion de givre, qui a été discrétisé spatialement, dans la direction normale, au cours le chapitre 3. Ensuite, dans le chapitre 4, nous avons discrétisé ce modèle dans les directions tangentielles, avant de l’intégrer temporellement, grâce à une méthode d’Euler implicite. À ce stade, le modèle d’accrétion est totalement discrétisé et peut donc être implémenté dans un code de calcul.

Par ailleurs, le modèle régissant le système de protection thermique, développé dans la thèse de Lokman Bennani [13], est également discrétisé avec une méthode d’Euler implicite.

Les deux modules doivent maintenant être couplés thermiquement à leur interface commune, la paroi. À cette interface, il faut respecter deux principes élémentaires de physique. Le premier est la continuité du champ de température, le second la continuité du flux de chaleur.

L’objectif de ce chapitre est de développer une méthode numérique permettant le couplage thermique du module d’accrétion et du système de protection thermique. Pour ce

faire, on utilisera une *méthode de Schwarz*.

Ce chapitre s'articule en trois parties. Dans un premier temps, nous réalisons un état de l'art très succinct des méthodes de Schwarz. Ensuite, nous présentons quelques résultats analytiques pour des problèmes unidimensionnels, avant d'étendre la méthode au cas général dans la troisième section.

## 5.1 Généralités et position du problème

Dans cette section nous présentons brièvement les méthodes de Schwarz pour les problèmes de thermique. L'objectif n'est pas d'être exhaustif sur ces méthodes, qui constituent un très large sujet d'étude aujourd'hui dans de nombreux domaines, mais d'en exposer les origines et les grands principes.

### 5.1.1 État de l'art succinct sur les méthodes de Schwarz

Les méthodes de Schwarz sont des méthodes de décomposition de domaine, qui à l'origine, ont été développées dans le but de résoudre des problèmes de très grandes dimensions. Ce sont des méthodes itératives, dont le principe est de décomposer le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines. À l'intérieur de ceux-ci, on définit un sous-problème indépendant des autres sous-domaines, et aux interfaces entre les sous-domaines, on définit des conditions de raccord qui permettent d'assurer l'équivalence avec le problème global. Par exemple, pour les problèmes de thermiques, ces conditions sont en général la continuité de la température et du flux de chaleur.

Ces méthodes sont en fait inspirées d'un article de H.A. Schwarz [76] de 1870, dans lequel il montre l'existence d'une solution pour l'équation de la chaleur sur un domaine complexe. À cette époque, on savait que l'équation de la chaleur avec condition de Dirichlet admettait une solution sur un rectangle (travaux de Fourier) et sur un cercle (travaux de Poisson). Grâce à ces résultats, Schwarz montre l'existence d'une solution pour l'équation de la chaleur sur le domaine représenté sur la figure 5.1. Pour ce faire, il considère une température donnée dans le cercle  $\Omega_1$ , puis il résout l'équation de la chaleur dans  $\Omega_2$  avec comme condition aux limites sur  $\Gamma_2$  la température dans  $\Omega_1$ , avant de résoudre le problème de thermique dans  $\Omega_1$  avec une condition aux limites sur  $\Gamma_1$  la température dans  $\Gamma_2$  et ainsi de suite. Il montre alors que cette suite est convergente, ce qui prouve l'existence d'une solution du problème de thermique dans  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . Cet algorithme, appliqué à la simulation numérique, a inspiré les méthodes de Schwarz avec recouvrement (*overlapping Schwarz method* dans la littérature), qui ont connu un essor dans les années 1980 avec le développement du calcul parallèle. Ces méthodes ont été étudiées par différents auteurs et pour différents problèmes<sup>1</sup>.

---

1. Voir par exemple les références [33, 16] pour des synthèses de ces méthodes.



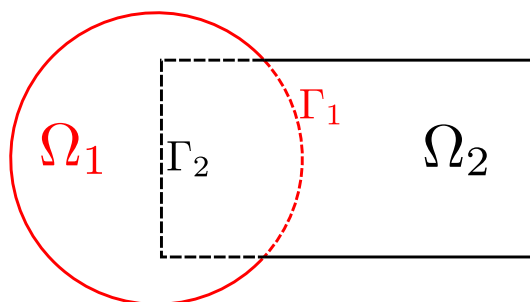


FIGURE 5.1 – Domaine d'étude de la démonstration originale de Schwarz

Néanmoins, ces méthodes présentent au moins deux limitations pour le calcul parallèle. D'une part, elles nécessitent, par construction, le recouvrement des sous-domaines pour converger, et d'autre part, la convergence est d'autant plus lente que la zone de recouvrement est petite [16, 22]. Afin de remédier à cette limitation, Lions [58] a proposé une méthode de décomposition sans recouvrement, avec des conditions de transmission de type Robin, dont il montre la convergence. Il note également que les conditions de transmission pourraient faire intervenir des fonctions plus complexes, y compris des opérateurs non locaux. En fait, pour des problèmes linéaires, l'utilisation d'opérateurs non locaux (l'opérateur *Neumann-vers-Dirichlet* par exemple) permet d'assurer la convergence de la méthode en un nombre fini d'itérations. Cependant, ces opérateurs sont compliqués à discrétiser et souvent prohibitifs en matière de temps de calcul. C'est pourquoi Charton *et al.* [22] proposent d'approcher ces opérateurs non locaux par des opérateurs locaux.

L'intérêt des méthodes de Schwarz sans recouvrement ne se limite pas au calcul parallèle, mais permet également de coupler des problèmes sur des domaines régis par des équations différentes. Par exemple, dans notre étude, on développe une méthode de Schwarz pour coupler le modèle régissant le système de protection thermique et le modèle tricouche. Le principe du couplage est de considérer les méthodes de résolution des deux modèles comme indépendantes, et de considérer des conditions de transmission à leur interface commune afin d'assurer, à convergence, la continuité de la température et du flux de chaleur. Pour ce faire, nous considérerons des conditions de transmission de type Robin semblables à celles proposées par Lions.

### 5.1.2 Introduction du problème de couplage

Dans ce paragraphe, nous exposons un problème abstrait, qui s'approche du problème de couplage du système de protection thermique et du modèle tricouche.

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ .  $d$  est la dimension de l'espace, pratiquement  $d$  vaudra 1, 2 ou 3. Pour  $j \in \{1, 2\}$ , on note

Grandeur	notation	unité
Température du domaine $\Omega_j$	$u_j$	K
Masse volumique (ou surfacique ou linéique) du domaine $\Omega_j$	$\rho_j$	$\text{kg.m}^{-1}$
Capacité calorifique du domaine $\Omega_j$	$c_j$	$\text{J.K}^{-1}$
Conductivité thermique du domaine $\Omega_j$	$\lambda_j$	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

On suppose que les grandeurs  $\rho_j$ ,  $c_j$  et  $\lambda_j$  ne dépendent que de la variable d'espace  $\mathbf{x}$ . De plus, on suppose que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  partagent une interface  $\Gamma_c$ , soit

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Gamma_c \neq \emptyset \quad (5.1)$$

Enfin, on pose

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_c \quad (5.2)$$

$$\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_c \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

Les deux domaines sont régis par l'équation de la chaleur. À leur jonction, on impose la continuité de la température et du flux de chaleur (modélisé par la formule de Fourier).

Les notations sont résumées sur la figure 5.2

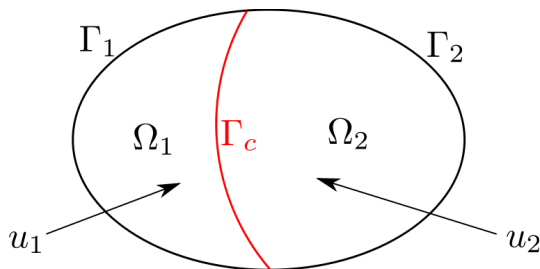


FIGURE 5.2 – Notation : problème de couplage abstrait

Mathématiquement, ce problème revient à chercher  $u_1 : \mathbb{R}^+ \times \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u_2 : \mathbb{R}^+ \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_1}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_1(\mathbf{x})c_1(\mathbf{x})} \nabla \cdot (\lambda_1(\mathbf{x}) \nabla u_1(t, \mathbf{x})) & \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{+*} \times \Omega_1 \quad (5.5a) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_2(\mathbf{x})c_2(\mathbf{x})} \nabla \cdot (\lambda_2(\mathbf{x}) \nabla u_2(t, \mathbf{x})) & \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{+*} \times \Omega_2 \quad (5.5b) \\ -\lambda_1 \nabla u_1(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = -f_1(u_1(t, \mathbf{x})) & \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{+*} \times \Gamma_1 \quad (5.5c) \\ -\lambda_2 \nabla u_2(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = -f_2(u_2(t, \mathbf{x})) & \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{+*} \times \Gamma_2 \quad (5.5d) \\ u_1(t, \mathbf{x}) = u_2(t, \mathbf{x}) & \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{+*} \times \Gamma_c \quad (5.5e) \\ \lambda_1 \nabla u_1(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{12} = -\lambda_2 \nabla u_2(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{21} & \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{+*} \times \Gamma_c \quad (5.5f) \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale sortante aux interfaces.  $\mathbf{n}_{12}$  est la normale à  $\Gamma_c$ , dirigée de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ , et  $\mathbf{n}_{21} = -\mathbf{n}_{12}$ .

(5.5a) et (5.5b) sont les équations de conduction de la chaleur dans le domaine  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , respectivement. (5.5c) est la condition aux limites sur  $\Gamma_1$  et (5.5d) est la condition aux limites sur  $\Gamma_2$ .  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions réelles. Pour que le problème soit bien posé, il faut que  $f_1$  et  $f_2$  soient des fonctions croissantes. En effet, dans le cas contraire, cela signifierait que plus le bord est chaud, plus le flux de chaleur entrant dans le domaine est important, ce qui ferait exploser la solution. Physiquement, cela revient à interdire l'anti-diffusion de chaleur.

On discrétise (5.5) temporellement. On utilise les mêmes notations que dans le chapitre 4, à savoir que le temps est discrétisé en un nombre dénombrable de points et on note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$t^n = n\Delta t \quad (5.6)$$

où  $\Delta t$  est un nombre réel positif. De plus, la notation exposant est utilisée pour l'approxi-

mation en temps, on a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_1^n \stackrel{\text{déf}}{=} u_1(t^n, \cdot) \quad (5.7)$$

$$u_2^n \stackrel{\text{déf}}{=} u_2(t^n, \cdot) \quad (5.8)$$

La discrétisation de (5.5a,5.5b) par une méthode d'Euler implicite s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\lambda_1(\mathbf{x})} \nabla \cdot (\lambda_1(\mathbf{x}) \nabla u_1^{n+1}(t, \mathbf{x})) + \mu_1(\mathbf{x})^2 u_1^{n+1}(\mathbf{x}) = \mu_1(\mathbf{x})^2 u_1^n(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (5.9a) \\ -\frac{1}{\lambda_2(\mathbf{x})} \nabla \cdot (\lambda_2(\mathbf{x}) \nabla u_2^{n+1}(t, \mathbf{x})) + \mu_2(\mathbf{x})^2 u_2^{n+1}(\mathbf{x}) = \mu_2(\mathbf{x})^2 u_2^n(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad (5.9b) \end{array} \right.$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont définis comme suit

$$\mu_1(\mathbf{x})^2 = \frac{\rho_1(\mathbf{x})c_1(\mathbf{x})}{\Delta t \lambda_1(\mathbf{x})} \quad (5.10)$$

$$\mu_2(\mathbf{x})^2 = \frac{\rho_2(\mathbf{x})c_2(\mathbf{x})}{\Delta t \lambda_2(\mathbf{x})} \quad (5.11)$$

Finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on est ramené à résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\lambda_1} \nabla \cdot (\lambda_1 \nabla u_1^{n+1}) + \mu_1^2 u_1^{n+1} = \mu_1^2 u_1^n \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (5.12a) \\ -\frac{1}{\lambda_2} \nabla \cdot (\lambda_2 \nabla u_2^{n+1}) + \mu_2^2 u_2^{n+1} = \mu_2^2 u_2^n \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad (5.12b) \\ -\lambda_1 \nabla u_1^{n+1} \cdot \mathbf{n} = -f_1(u_1^{n+1}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (5.12c) \\ -\lambda_2 \nabla u_2^{n+1} \cdot \mathbf{n} = -f_2(u_2^{n+1}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (5.12d) \\ u_1^{n+1} = u_2^{n+1} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (5.12e) \\ \lambda_1 \nabla u_1^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{12} = -\lambda_2 \nabla u_2^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{21} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_c \quad (5.12f) \end{array} \right.$$

## 5.2 Développement et analyse d'une méthode de Schwarz pour des problèmes couplés de thermique unidimensionnels

Le but de cette section est de développer des méthodes numériques permettant de coupler deux problèmes de thermiques unidimensionnels, définis chacun sur un segment. Ces segments ont une interface commune et des conditions de continuité à cette interface. Les cas traités sont relativement simples car ils permettent de travailler avec des solutions analytiques (éventuellement implicitement définies). Le premier cas est un problème instationnaire avec des paramètres physiques (densité, conductivité et capacité calorifique) uniformes sur chacun des deux domaines, et des conditions aux limites linéaires. Le second est un problème stationnaire avec des conditions aux limites non linéaires et des paramètres physiques non uniformes.

### 5.2.1 Développement d'un algorithme de Schwarz pour le problème instationnaire linéaire

On applique le problème générique (5.12) à un problème unidimensionnel. Pour cela, on fixe  $l_1$  et  $l_2$  deux nombres réels strictement positifs et on pose

$$\Omega_1 = ]-l_1, 0[, \quad \Omega_2 = ]0, l_2[ \quad (5.13)$$

De plus, on simplifie le problème à deux égards

- On suppose que dans chacun des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , les caractéristiques physiques ne dépendent pas de la variable d'espace ( $z$ ). Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned} \forall z \in ]-l_1, 0[, \quad \rho_1(z) = \rho_1, \quad c_1(z) = c_1, \quad \lambda_1(z) = \lambda_1 \\ \forall z \in ]0, l_2[, \quad \rho_2(z) = \rho_2, \quad c_2(z) = c_2, \quad \lambda_2(z) = \lambda_2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

où  $\rho_1, c_1, \lambda_1, \rho_2, c_2, \lambda_2$  sont des nombres réels strictement positifs.

- On remplace les conditions aux limites par des conditions de type coefficient d'échange, on a donc

$$-f_1(u) = h_1(T_1 - u) \quad (5.15)$$

$$-f_2(u) = h_2(T_2 - u) \quad (5.16)$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients d'échange, qui sont donc positifs, et  $T_1$  et  $T_2$  des températures de référence. Ces conditions peuvent s'interpréter comme une linéarisation des conditions aux limites générales.

Enfin, par commodité, on introduit la notation *prime* pour les dérivées spatiales.

Le problème (5.12) dégénère donc en

$$\left\{ \begin{array}{ll} - (u_1^{n+1})''(z) + \mu_1^2 u_1^{n+1}(z) = \mu_1^2 u_1^n(z) & \forall z \in ]-l_1, 0[ \quad (5.17a) \\ - (u_2^{n+1})''(z) + \mu_2^2 u_2^{n+1}(z) = \mu_2^2 u_2^n(z) & \forall z \in ]0, l_2[ \quad (5.17b) \\ -\lambda_1 (u_1^{n+1})'(-l_1) = h_1 (T_1 - u_1^{n+1}(-l_1)) & (5.17c) \\ \lambda_2 (u_2^{n+1})'(l_2) = h_2 (T_2 - u_2^{n+1}(l_2)) & (5.17d) \\ u_1^{n+1}(0) = u_2^{n+1}(0) & (5.17e) \\ \lambda_1 (u_1^{n+1})'(0) = \lambda_2 (u_2^{n+1})'(0) & (5.17f) \end{array} \right.$$

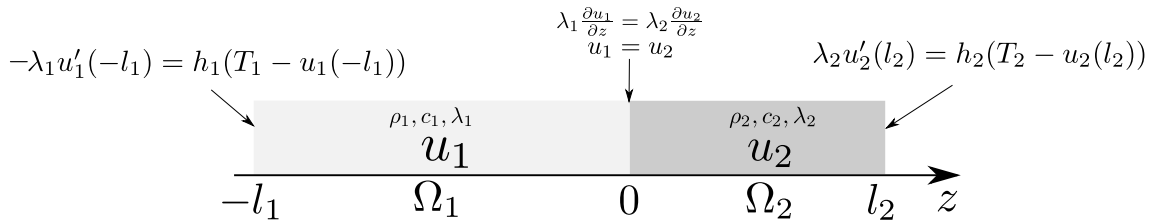


FIGURE 5.3 – Notation : problème de couplage unidimensionnel linéaire

Par linéarité, l'étude du problème (5.17) se ramène à l'étude du problème homogène, c'est-à-dire avec  $u_1^n = u_2^n = T_1 = T_2 = 0$ . Pour alléger l'écriture, on omet à partir de maintenant l'exposant  $n+1$ , étant donné qu'il n'y a pas d'ambiguïté. Le problème que l'on étudie s'écrit finalement

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u_1''(z) + \mu_1^2 u_1(z) = 0 & \forall z \in ]-l_1, 0[ \quad (5.18a) \\ -u_2''(z) + \mu_2^2 u_2(z) = 0 & \forall z \in ]0, l_2[ \quad (5.18b) \\ -\lambda_1 u_1'(-l_1) = -h_1 u_1(-l_1) & (5.18c) \\ \lambda_2 u_2'(l_2) = -h_2 u_2(l_2) & (5.18d) \\ u_1(0) = u_2(0) & (5.18e) \\ \lambda_1 u_1'(0) = \lambda_2 u_2'(0) & (5.18f) \end{array} \right.$$

Afin d'alléger les notations dans la suite, nous introduisons les espaces fonctionnels

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ u \in H^1(]-l_1, 0]) \quad , \quad -u'' + \mu_1^2 u = 0 \quad , \quad -\lambda_1 u'_1(-l_1) = -h_1 u_1(-l_1) \right\} \quad (5.19)$$

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ u \in H^1(]0, l_2]) \quad , \quad -u'' + \mu_2^2 u = 0 \quad , \quad \lambda_2 u'_2(l_2) = -h_2 u_2(l_2) \right\} \quad (5.20)$$

où la notation  $H^1$  est celle des espaces de Sobolev. Avec ces notations, (5.18) s'écrit

$$\begin{cases} u_1 \in \mathcal{E}_1 & (5.21a) \\ u_2 \in \mathcal{E}_2 & (5.21b) \\ u_1(0) = u_2(0) & (5.21c) \\ \lambda_1 u'_1(0) = \lambda_2 u'_2(0) & (5.21d) \end{cases}$$

L'unique solution de (5.21) s'écrit

$$u_1 = u_2 = 0 \quad (5.22)$$

En effet,  $u_1 = u_2 = 0$  est bien solution de (5.21). De plus, on montre facilement que dans l'espace  $H^1(]-l_1, l_2])$ , la forme variationnelle de ce problème est linéaire, coercive et continue. D'après le théorème de Lax-Milgram, (5.21) admet donc une unique solution (voir par exemple [19]) dans  $H^1(]-l_1, l_2])$ .

### Écriture de l'algorithme de Schwarz et preuve de convergence

L'objet de ce paragraphe est de construire un algorithme itératif convergeant vers 0, quelle que soit l'initialisation. Rappelons que nous souhaitons développer un algorithme permettant une résolution du problème de thermique dans  $\Omega_1$  indépendante de la résolution dans le domaine  $\Omega_2$ . Seules des informations sont échangées à l'interface, c'est-à-dire en  $z = 0$ . Pour ce faire, nous utilisons des conditions de transmission de Robin. La méthode consiste à créer la suite  $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$  suivante

$$\begin{cases} u_1^{(k+1)} \in \mathcal{E}_1 & (5.23a) \\ \lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)'(0) = \lambda_2 \left( u_2^{(k)} \right)'(0) + \omega_1 \left( u_2^{(k)}(0) - u_1^{(k+1)}(0) \right) & (5.23b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2^{(k+1)} \in \mathcal{E}_2 & (5.23c) \\ -\lambda_2 \left( u_2^{(k+1)} \right)'(0) = -\lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)'(0) + \omega_2 \left( u_1^{(k+1)}(0) - u_2^{(k+1)}(0) \right) & (5.23d) \end{cases}$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des nombres réels strictement positifs, qu'il faudra déterminer ultérieurement. Dans ces deux problèmes, les inconnues sont en notées en blue.

Le principe des conditions de couplage (5.23b) et (5.23d) est la suivante : on souhaite faire converger  $u_1^{(k)}(0)$  vers  $u_2^{(k)}(0)$  et  $\lambda_1 \left( u_1^{(k)} \right)'(0)$  vers  $\lambda_2 \left( u_2^{(k)} \right)'(0)$ . Par conséquent, à l'itération  $(k+1)$ , on écrit le flux de chaleur entrant dans  $\Omega_1$  à l'interface  $z = 0$  comme une combinaison linéaire du flux sortant de  $\Omega_2$  à cette même interface, et d'un terme de rappel sur la température, et de même pour le second problème. Les coefficients  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont homogènes à des coefficients d'échange thermique. Dans la suite, ils seront appelés *coefficients d'échange numériques* ou *coefficients de couplage*.

**Remarque :** Dans (5.23d) on utilise  $u_1$  à l'itération  $(k+1)$ , puisque  $u_1^{(k+1)}$  vient d'être calculé. En revanche, dans (5.23b), comme  $u_2^{(k+1)}$  n'a pas encore été calculé, on utilise  $u_2^{(k)}$ . Par conséquent, l'algorithme n'est pas symétrique, vu que le problème de thermique dans le domaine 1 est traité en premier. On pourrait symétriser l'algorithme en remplaçant  $u_1^{(k+1)}$  par  $u_1^{(k)}$  dans (5.23d). Ce changement n'a pas d'intérêt dans une optique de calcul séquentiel car il impacte de façon défavorable la vitesse de convergence de l'algorithme. Néanmoins, si l'on faisait du calcul parallèle, ce qui n'est pas l'objet de cette thèse, effectuer ce changement aurait l'intérêt de pouvoir lancer chacun des deux problèmes de thermique simultanément, sur deux *threads* différents.

Lions [58] a étudié la convergence de cet algorithme dans un cas plus général que celui-ci. En revanche, les coefficients de couplage qu'il utilise sont égaux ( $\omega_1 = \omega_2$ ), et les conditions aux limites qu'il considère sont de Dirichlet. Il montre alors que la suite des itérés converge faiblement dans les "bons" espaces fonctionnels (les solutions sur chaque  $\Omega_i$  convergent faiblement dans les espaces de Sobolev  $H^1(\Omega_i)$  et les traces de ces solutions sur les frontières  $\partial\Omega_i$  convergent faiblement dans les Sobolev  $H^{1/2}$  des interfaces respectives). Sa démonstration fait intervenir des techniques sophistiquées d'analyse fonctionnelle comme les estimations d'énergie. Dans le cadre de cette étude, nous nous limitons à une démonstration plus simple car nous considérons uniquement le cas en dimension 1 avec seulement 2 sous-domaines. Notre démonstration est donc moins générale mais présente l'avantage d'avoir des solutions exactes de tous les itérés, ce qui permet de voir très simplement le rôle des coefficients de couplage  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Pour alléger les notations de la suite des calculs, on pose, pour  $i \in \{1, 2\}$

$$\chi_i = \exp(-2\mu_i l_i) \frac{\frac{\lambda_i \mu_i}{h_i} - 1}{\frac{\lambda_i \mu_i}{h_i} + 1} \quad (5.24)$$

$$\xi_i = \frac{\lambda_i \mu_i (1 - \chi_i)}{1 + \chi_i} \quad (5.25)$$

On remarque que comme  $\lambda_i, \mu_i, h_i, l_i > 0$ , on a

$$-1 < \chi_i < 1 \quad (5.26)$$

$$\xi_i > 0 \quad (5.27)$$

De plus, on pose

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad (5.28)$$

**5.2.1. Proposition.** *Sous la condition*

$$\left| \frac{(\omega_1 - \xi_2)(\omega_2 - \xi_1)}{(\omega_1 + \xi_1)(\omega_2 + \xi_2)} \right| < 1 \quad (5.29)$$

*L'algorithme (5.23) converge. Plus précisément, on a la propriété*

$$\forall u_1^{(0)} \in \mathcal{E}_1, \forall u_2^{(0)} \in \mathcal{E}_2, \begin{cases} u_1^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \\ u_2^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

*Démonstration.*

La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants montre que l'équation (5.18a,5.18b) donne une expression pour  $u_1^{(k)}$  et  $u_2^{(k)}$  de la forme

$$u_1^{(k)} = A_1^{(k)} e^{\mu_1 z} + B_1^{(k)} e^{-\mu_1 z} \quad (5.31)$$

$$u_2^{(k)} = A_2^{(k)} e^{\mu_2 z} + B_2^{(k)} e^{-\mu_2 z} \quad (5.32)$$

avec  $A_1^{(k)}, B_1^{(k)}, A_2^{(k)}, B_2^{(k)} \in \mathbb{R}$

En injectant (5.31) dans (5.18c), on montre que

$$B_1^{(k)} = \chi_1 A_1^{(k)} \quad (5.33)$$

De même, on montre en injectant (5.32) dans (5.18d), que

$$A_2^{(k)} = \chi_2 B_2^{(k)} \quad (5.34)$$

Ensuite, en injectant (5.31) et (5.32) dans l'équation (5.23b), puis en utilisant les relations (5.33) et (5.34), on montre que

$$A_1^{(k+1)} = \frac{\omega_1 - \xi_2}{\omega_1 \frac{1+\chi_1}{1+\chi_2} + \frac{\lambda_1 \mu_1 (1-\chi_1)}{1+\chi_2}} B_2^{(k)} \quad (5.35)$$

De même, en injectant (5.31) et (5.32) dans l'équation (5.23d), puis en utilisant les relations (5.33) et (5.34), on montre que

$$B_2^{(k)} = \frac{\omega_2 - \xi_1}{\omega_2 \frac{1+\chi_2}{1+\chi_1} + \frac{\lambda_2 \mu_2 (1-\chi_2)}{1+\chi_1}} A_1^{(k)} \quad (5.36)$$

En utilisant (5.35) et (5.36), on montre que

$$\begin{aligned} A_1^{(k+1)} &= \frac{\omega_1 - \xi_2}{\omega_1 \frac{1+\chi_1}{1+\chi_2} + \frac{\lambda_1 \mu_1 (1-\chi_1)}{1+\chi_2}} \frac{\omega_2 - \xi_1}{\omega_2 \frac{1+\chi_2}{1+\chi_1} + \frac{\lambda_2 \mu_2 (1-\chi_2)}{1+\chi_1}} A_1^{(k)} \\ &= \frac{(\omega_1 - \xi_2)(\omega_2 - \xi_1)}{(\omega_1 + \xi_1)(\omega_2 + \xi_2)} A_1^{(k)} \end{aligned}$$

Finalement, on a donc la relation

$$\frac{A_1^{(k+1)}}{A_1^{(k)}} = \frac{B_1^{(k+1)}}{B_1^{(k)}} = \frac{(\omega_1 - \xi_2)(\omega_2 - \xi_1)}{(\omega_1 + \xi_1)(\omega_2 + \xi_2)} \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma(\omega_1, \omega_2) \quad (5.37)$$

L'hypothèse (5.29) sur les coefficients de couplages permet d'écrire

$$|\gamma(\omega_1, \omega_2)| < 1 \quad (5.38)$$

Ainsi, les suites  $A_1^{(k)}$  et  $B_1^{(k)}$  tendent vers 0, et on écrit donc finalement que

$$u_1^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (5.39)$$

On peut remarquer que cette convergence est uniforme par rapport à  $z$  et monotone (au sens où la norme ne fait que décroître).

Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer grâce à (5.34) et (5.35) que, pour tout  $k$ , les coefficients  $A_2^{(k)}$  et  $B_2^{(k)}$  sont proportionnels à  $A_1^{(k)}$ , avec un coefficient de proportionnalité indépendant de  $k$ . Les suites  $A_2^{(k)}$  et  $B_2^{(k)}$  tendent donc également vers 0, et il vient donc

$$u_2^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (5.40)$$

□

**Remarque :** La condition (5.29) est une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme converge. Elle inclut en particulier le cas  $\omega_1 = \omega_2$ . En effet, dans ce cas, on a

$$|\gamma(\omega_1, \omega_1)| = \left| \frac{\omega_1 - \xi_2}{\omega_1 + \xi_2} \frac{\omega_1 - \xi_1}{\omega_1 + \xi_1} \right|$$

Or, comme tous nombres sont positifs, on a

$$\left| \frac{\omega_1 - \xi_1}{\omega_1 + \xi_1} \right| < 1, \quad \left| \frac{\omega_1 - \xi_2}{\omega_1 + \xi_2} \right| < 1$$

Ce qui montre que  $|\gamma(\omega_1, \omega_1)| < 1$ , et donc que l'algorithme converge. On retrouve ainsi le résultat de Lions [58].

**Remarque (méthode de Schwarz « Dirichlet-Neumann ») :**

Il existe une méthode de Schwarz dans laquelle on remplace les conditions de Robin par une condition de Dirichlet sur un domaine (supposons qu'il s'agisse du domaine  $\Omega_1$ ) et une condition de Neumann sur l'autre domaine (supposons qu'il s'agisse du domaine  $\Omega_2$ ).

Cet algorithme est en fait la limite de l'algorithme (5.23) avec  $\omega_1 = \infty$  et  $\omega_2 = 0$ . Ainsi, la relation (5.37) nous permet d'affirmer que

$$\frac{A_1^{(k+1)}}{A_1^{(k)}} = \frac{B_1^{(k+1)}}{B_1^{(k)}} = \frac{-\xi_1}{\xi_2} \quad (5.41)$$

Cela montre que l'algorithme converge si, et si seulement si,  $|\xi_1| < |\xi_2|$ . À moins que  $|\xi_1| \ll |\xi_2|$ , la vitesse de convergence sera lente, puisqu'elle sera linéaire avec un coefficient de l'ordre de l'unité. Remarquons que dans le cas  $|\xi_1| > |\xi_2|$ , on pourrait toujours assurer la convergence en appliquant la condition de Neumann à  $\Omega_1$  et la condition de Dirichlet à  $\Omega_2$ .

En revanche, si on a  $|\xi_1| = |\xi_2|$ , alors quelle que soit la configuration considérée, l'algorithme ne converge pas, puisque la suite  $u_1^{(k)}$  oscille entre les valeurs  $u_1^{(0)}$  et  $-u_1^{(0)}$ .

Cela montre que les conditions de Robin dans l'algorithme de Schwarz sans recouvrement sont fondamentales pour assurer sa convergence.

### Notion de coefficients de couplage optimaux

Dans la démonstration précédente, l'équation (5.37) donne une relation entre deux itérés consécutifs. On remarque immédiatement que si  $\omega_1 = \xi_2$  et/ou que  $\omega_2 = \xi_1$ , alors l'algorithme converge exactement en deux itérations. On définit donc les *coefficients de couplage optimaux*  $\omega_1^\dagger$  et  $\omega_2^\dagger$

$$\omega_1^\dagger = \xi_2 \quad (5.42a)$$

$$\omega_2^\dagger = \xi_1 \quad (5.42b)$$



On définit ensuite l'algorithme de Schwarz optimal, qui converge en deux itérations

$\begin{cases} u_1^{(k+1)} \in \mathcal{E}_1 \\ \lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)'(0) = \lambda_2 \left( u_2^{(k)} \right)'(0) + \omega_1^\dagger \left( u_2^{(k)}(0) - u_1^{(k+1)}(0) \right) \end{cases}$	(5.43a)
$\begin{cases} u_2^{(k+1)} \in \mathcal{E}_2 \\ -\lambda_2 \left( u_2^{(k+1)} \right)'(0) = -\lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)'(0) + \omega_2^\dagger \left( u_1^{(k+1)}(0) - u_2^{(k+1)}(0) \right) \end{cases}$	(5.43b)
$\begin{cases} u_1^{(k+1)} \in \mathcal{E}_1 \\ \lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)'(0) = \lambda_2 \left( u_2^{(k)} \right)'(0) + \omega_1^\dagger \left( u_2^{(k)}(0) - u_1^{(k+1)}(0) \right) \end{cases}$	(5.43c)
$\begin{cases} u_2^{(k+1)} \in \mathcal{E}_2 \\ -\lambda_2 \left( u_2^{(k+1)} \right)'(0) = -\lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)'(0) + \omega_2^\dagger \left( u_1^{(k+1)}(0) - u_2^{(k+1)}(0) \right) \end{cases}$	(5.43d)

### 5.2.2 Problème stationnaire non linéaire

Dans ce paragraphe, nous continuons l'investigation théorique des méthodes de Schwarz pour résoudre le problème (5.12) en dimension 1. On considère maintenant le problème stationnaire. Les termes en  $\frac{\partial}{\partial t}$  sont donc annulés, et on remarque alors que le problème ne dépend plus de la densité  $\rho$  ni de la capacité calorifique  $c$ . Contrairement à l'étude précédente du paragraphe (5.2.1), on ne fait pas d'hypothèses simplificatrices sur les conditions aux limites et sur la répartition de la conductivité thermique  $\lambda$ . Le problème que l'on résout s'écrit donc

$$\begin{cases} (\lambda_1(z)u_1'(z))'(z) = 0 & \forall z \in ]-l_1, 0[ & (5.44a) \\ (\lambda_2(z)u_2'(z))'(z) = 0 & \forall z \in ]0, l_2[ & (5.44b) \\ -\lambda_1(-l_1)u_1'(-l_1) = -f_1(u_1(-l_1)) & & (5.44c) \\ \lambda_2(l_2)u_2'(l_2) = -f_2(u_2(l_2)) & & (5.44d) \\ u_1(-l_1) = u_2(l_2) & & (5.44e) \\ \lambda_1 u_1'(-l_1) = \lambda_2 u_2'(l_2) & & (5.44f) \end{cases}$$

#### 5.2.2.1 Calcul de la solution exacte

On note  $x_1$  et  $x_2$  les températures extrêmes du domaine, soient

$$x_1 \stackrel{\text{déf}}{=} u_1(-l_1) \quad (5.45)$$

$$x_2 \stackrel{\text{déf}}{=} u_2(l_2) \quad (5.46)$$

De plus, on définit également les *résistances moyennes* de chacun des domaines par la moyenne des inverses des conductivités, soient

$$\widehat{r}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{l_1} \int_{-l_1}^0 \frac{dz}{\lambda_1(z)} \quad (5.47)$$

$$\widehat{r}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} \frac{dz}{\lambda_2(z)} \quad (5.48)$$

**5.2.2. Proposition.** *Avec les notations introduites ci-dessus, la solution s'écrit*

$$\begin{cases} u_1^*(z) = x_1^* + f_1(x_1^*) \int_{-l_1}^z \frac{dz'}{\lambda_1(z')} & \forall z \in [-l_1, 0] & (5.49a) \\ u_2^*(z) = x_2^* + f_2(x_2^*) \int_z^{l_2} \frac{dz'}{\lambda_2(z')} & \forall z \in [0, l_2] & (5.49b) \end{cases}$$

où  $x_1^*$  et  $x_2^*$  sont solution de l'équation (non linéaire)

$$\begin{cases} x_1^* + (l_1 \widehat{r}_1 + l_2 \widehat{r}_2) f_1(x_1^*) = x_2^* \\ x_2^* + (l_1 \widehat{r}_1 + l_2 \widehat{r}_2) f_2(x_2^*) = x_1^* \end{cases} \quad (5.50)$$

*Démonstration.* En intégrant une fois (5.44a), on trouve l'équation

$$\lambda_1(z) u_1'(z) = C \quad (5.51)$$

où  $C$  est constante réelle d'intégration. En injectant cette expression dans la condition aux limites en  $z = -l_1$  (5.44c), il vient

$$-\lambda_1(-l_1) u_1'(-l_1) = -C = -f_1(u_1(-l_1)) \quad (5.52)$$

d'où

$$C = f_1(x_1)$$

L'intégration de (5.51) donne donc

$$u_1(z) = x_1 + f_1(x_1) \int_{-l_1}^z \frac{dz'}{\lambda_1(z')}$$

Ce qui montre la relation (5.49a). La démonstration de (5.49b) est tout à fait analogue.

Il reste donc à démontrer (5.50). Pour ce faire, on applique (5.49a) et (5.49b) en  $z = 0$ , il vient

$$\begin{cases} u_1(0) = x_1 + f_1(x_1) \int_{-l_1}^0 \frac{dz'}{\lambda_1(z')} & = x_1 + l_1 \widehat{r}_1 f_1(x_1) & (5.53a) \\ u_2(0) = x_2 + f_2(x_2) \int_0^{l_2} \frac{dz'}{\lambda_1(z')} & = x_2 + l_2 \widehat{r}_2 f_2(x_2) & (5.53b) \end{cases}$$

On applique ensuite les relations de continuité de la température et du flux à l'interface  $z = 0$  (5.44e) et (5.44f)

$$\begin{cases} u_1(0) = u_2(0) \\ \lambda_1 u_1'(0) = \lambda_2 u_2'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + l_1 \widehat{r}_1 f_1(x_1) = x_2 + l_2 \widehat{r}_2 f_2(x_2) \\ f_1(x_1) = -f_2(x_2) \end{cases} \quad (5.54)$$

(5.50) n'est qu'une réécriture de cette équation.  $\square$

### 5.2.2.2 Écriture de l'algorithme de Schwarz et preuve de convergence

La procédure utilisée est la même que celle utilisée dans le paragraphe 5.2.1 qui traite du problème instationnaire linéaire. Nous renvoyons donc le lecteur aux explications de ce paragraphe pour la démarche adoptée. Dans le présent paragraphe, nous réintroduisons simplement les notations.

On pose les espaces fonctionnels

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ u \in H^1(] - l_1, 0[), \quad (\lambda_1(z) u_1'(z))' = 0, \quad -\lambda_1 u_1'(-l_1) = -f_1(u_1(-l_1)) \right\} \quad (5.55)$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ u \in H^1(]0, l_2]), \quad (\lambda_2(z) u_2'(z))' = 0, \quad \lambda_2 u_2'(l_2) = -f_2(u_2(l_2)) \right\} \quad (5.56)$$

où la notation  $H^1$  est celle des espaces de Sobolev. Avec ces notations, (5.44) s'écrit

$$\begin{cases} u_1 \in \mathcal{F}_1 & (5.57a) \\ u_2 \in \mathcal{F}_2 & (5.57b) \\ u_1(0) = u_2(0) & \forall t \in \mathbb{R}^+ & (5.57c) \\ \lambda_1 u_1'(0) = \lambda_2 u_2'(0) & \forall t \in \mathbb{R}^+ & (5.57d) \end{cases}$$

Comme dans le paragraphe 5.2.1 on écrit un algorithme de Schwarz, itératif, dont le principe est d'écrire des conditions de Fourier-Robin à l'interface de couplage  $z = 0$

$$\begin{cases} u_1^{(k+1)} \in \mathcal{F}_1 & (5.58a) \\ \lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)'(0) = \lambda_2 \left( u_2^{(k)} \right)'(0) + \omega_1 \left( u_2^{(k)}(0) - u_1^{(k+1)}(0) \right) & (5.58b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2^{(k+1)} \in \mathcal{F}_2 & (5.58c) \\ -\lambda_2 \left( u_2^{(k+1)} \right)'(0) = -\lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)'(0) + \omega_2 \left( u_1^{(k+1)}(0) - u_2^{(k+1)}(0) \right) & (5.58d) \end{cases}$$

où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des nombres réels positifs.

De plus, l'équation (5.49) implique immédiatement

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1'(0) = \lambda_1 u_1'(-l_1) = f_1(u_1(-l_1)) \\ \lambda_2 u_2'(0) = \lambda_2 u_2'(l_2) = -f_2(u_2(l_2)) \end{cases} \quad (5.59)$$

Physiquement, ces équations traduisent la conservation du flux de chaleur.

L'algorithme (5.58) s'écrit donc

$$\begin{cases} u_1^{(k+1)} \in \mathcal{F}_1 & (5.60a) \\ f_1 \left( u_1^{(k+1)}(-l_1) \right) = -f_2 \left( u_2^{(k)}(l_2) \right) + \omega_1 \left( u_2^{(k)}(0) - u_1^{(k+1)}(0) \right) & (5.60b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2^{(k+1)} \in \mathcal{F}_2 & (5.60c) \\ f_2 \left( u_2^{(k+1)}(l_2) \right) = -f_1 \left( u_1^{(k+1)}(-l_1) \right) + \omega_2 \left( u_1^{(k+1)}(0) - u_2^{(k+1)}(0) \right) & (5.60d) \end{cases}$$

**5.2.3. Proposition.** *Sous les hypothèses suivantes*

$$\begin{cases} (i) & \omega_1 = (\widehat{r}_2 l_2)^{-1} \\ (ii) & \omega_2 = (\widehat{r}_1 l_1)^{-1} \\ (iii) & \exists \kappa_1 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) \geq \kappa_1 \\ (iv) & \exists \kappa_2 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, f_2'(x) \geq \kappa_2 \end{cases}$$

L'algorithme (5.60) converge pour toute initialisation. Plus précisément, on a la relation

$$\forall u_1^{(0)} \in \mathcal{F}_1, \forall u_2^{(0)} \in \mathcal{F}_2, \begin{cases} u_1^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_1^* \\ u_2^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u_2^* \end{cases} \quad (5.61)$$

**Remarque :** On avait déjà considéré que  $f_1$  et  $f_2$  étaient des fonctions croissantes (ce qui physiquement, revient à considérer que le flux de chaleur est opposé au gradient de température), donc de dérivées positives. Les conditions (iii) et (iv) contiennent cette propriété, en ajoutant le fait que l'infimum de chacune des dérivées ne peut pas être nul. Cette condition permet, physiquement, que le problème soit bien posé. En effet, supposons que les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  soient des fonctions constantes. Cela signifie qu'aux deux interfaces de  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , on impose un flux de chaleur. Le problème est alors mal posé, puisque soit  $f_1 = f_2$ , et le problème admet une infinité de solutions, soit  $f_1 \neq f_2$  et il n'en admet aucune.

*Démonstration.* Pour démontrer la proposition, il suffit en fait de démontrer que

$$\begin{cases} x_1^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_1^* \\ x_2^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_2^* \end{cases} \quad (5.62)$$

Pour s'en convaincre, il faut remarquer que dans la démonstration de la proposition 5.2.2, on a toujours procédé par équivalence, on peut donc "remonter la démonstration". En d'autres termes, si on considère  $v_1 \in \mathcal{F}_1$  et  $v_2 \in \mathcal{F}_2$ , tels que  $v_1(-l_1)$  et  $v_2(l_2)$  sont solutions de (5.50), alors cela signifie que  $v_1(0) = v_2(0)$  et que  $\lambda_1 v_1'(0) = \lambda_2 v_2'(0)$ , et on a donc

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1^* \\ v_2 &= u_2^* \end{aligned}$$

Malgré le fait que le résultat de la proposition soit écrit pour un couple  $(\omega_1, \omega_2)$ , on ne fait aucune hypothèse sur ces deux grandeurs au début de la démonstration. L'objectif de cette démarche est en particulier de bien comprendre en quoi ce choix est primordial pour la preuve de convergence.

Démontrons maintenant la propriété (5.62). L'idée de cette démonstration est d'écrire que l'algorithme (5.60) s'écrit sous la forme  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ , où  $\mathbf{F}$  est une fonction contractante, et d'appliquer le *théorème du point fixe de Banach* [9].

En utilisant les deux relations (5.53) permettant d'exprimer toutes les données du problème en fonction des températures extrêmes (en  $z = -l_1$  et  $z = l_2$ ), l'algorithme (5.60) s'écrit

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(k+1)}) = -f_2(x_2^{(k)}) + \omega_1 \left[ x_2^{(k)} + l_2 \widehat{r}_2 f_2(x_2^{(k)}) - x_1^{(k+1)} - l_1 \widehat{r}_1 f_1(x_1^{(k+1)}) \right] \\ f_2(x_2^{(k+1)}) = -f_1(x_1^{(k+1)}) + \omega_2 \left[ x_1^{(k+1)} + l_1 \widehat{r}_1 f_1(x_1^{(k+1)}) - x_2^{(k+1)} + l_2 \widehat{r}_2 f_2(x_2^{(k+1)}) \right] \end{cases}$$

qui se réécrit

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} + \left( l_1 \widehat{r}_1 + \frac{1}{\omega_1} \right) f_1(x_1^{(k+1)}) = x_2^{(k)} + \left( l_2 \widehat{r}_2 - \frac{1}{\omega_1} \right) f_2(x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} + \left( l_2 \widehat{r}_2 + \frac{1}{\omega_2} \right) f_2(x_2^{(k+1)}) = x_1^{(k+1)} + \left( l_1 \widehat{r}_1 - \frac{1}{\omega_2} \right) f_1(x_1^{(k+1)}) \end{cases} \quad (5.63)$$

On pose les fonctions réelles définies par

$$\begin{cases} G_1(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x + \left( l_1 \widehat{r}_1 + \frac{1}{\omega_1} \right) f_1(x) \\ G_2(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x + \left( l_2 \widehat{r}_2 + \frac{1}{\omega_2} \right) f_2(x) \end{cases} \quad (5.64)$$

Grâce aux hypothèses (iii) et (iv), on peut immédiatement écrire

$$\begin{aligned} G'_1(x) &> 1 + \left( l_1 \widehat{r}_1 + \frac{1}{\omega_1} \right) \kappa_1 \\ G'_2(x) &> 1 + \left( l_2 \widehat{r}_2 + \frac{1}{\omega_2} \right) \kappa_2 \end{aligned}$$

En particulier, cela implique que  $G_1$  et  $G_2$  sont inversibles, ce qui permet de définir les fonctions réciproques

$$\begin{cases} g_1(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} G_1^{-1}(x) \\ g_2(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} G_2^{-1}(x) \end{cases} \quad (5.65)$$

et d'encadrer leurs dérivées respectives

$$\begin{aligned} g'_1(x) &\in ]0, q_1] \\ g'_2(x) &\in ]0, q_2] \end{aligned} \quad (5.66)$$

où

$$\begin{cases} q_1 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{1}{1 + \left( l_1 \widehat{r}_1 + \frac{1}{\omega_1} \right) \kappa_1} < 1 \\ q_2 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{1}{1 + \left( l_2 \widehat{r}_2 + \frac{1}{\omega_2} \right) \kappa_2} < 1 \end{cases} \quad (5.67)$$

Avec ces notations, l'équation (5.63) s'écrit

$$\begin{cases} G_1 \left( x_1^{(k+1)} \right) = x_2^{(k)} + \left( l_2 \widehat{r}_2 - \frac{1}{\omega_1} \right) f_2 \left( x_2^{(k)} \right) \\ G_2 \left( x_2^{(k+1)} \right) = x_1^{(k+1)} + \left( l_1 \widehat{r}_1 - \frac{1}{\omega_2} \right) f_1 \left( x_1^{(k+1)} \right) \end{cases} \quad (5.68)$$

ou encore, après avoir appliqué la fonction  $g_1$  sur la première ligne et  $g_2$  sur la seconde

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = g_1 \left( x_2^{(k)} + \left( l_2 \widehat{r}_2 - \frac{1}{\omega_1} \right) f_2 \left( x_2^{(k)} \right) \right) \\ x_2^{(k+1)} = g_2 \left( x_1^{(k+1)} + \left( l_1 \widehat{r}_1 - \frac{1}{\omega_2} \right) f_1 \left( x_1^{(k+1)} \right) \right) \end{cases} \quad (5.69)$$

Finalement, en posant les deux fonctions réelles

$$\begin{cases} p_1(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} x + \left( l_2 \widehat{r}_2 - \frac{1}{\omega_1} \right) f_2(x) \\ p_2(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} x + \left( l_1 \widehat{r}_1 - \frac{1}{\omega_2} \right) f_1(x) \end{cases} \quad (5.70)$$

ainsi que la fonction réelle

$$F(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} g_2 \circ p_2 \circ g_1 \circ p_1(x) \quad (5.71)$$

Alors, l'équation (5.69) s'écrit

$$x_2^{(k+1)} = F \left( x_2^{(k)} \right) \quad (5.72)$$

On remarque ici que la suite  $x_1^{(k+1)}$  est omise. Cela s'explique par le fait qu'elle peut être considérée comme un intermédiaire de calcul de la suite  $x_2^{(k+1)}$ . En effet, on peut écrire

$$x_2^{(k+1)} = F(x_2^{(k)}) = g_2 \circ p_2 \circ g_1 \circ p_1(x_2^{(k)}) = g_2 \circ p_2(x_1^{(k+1)})$$

On utilise maintenant les hypothèses (i) et (ii). Elles permettent de réduire les fonctions  $p_1$  et  $p_2$  aux fonctions identités, et d'écrire finalement que

$$F = g_2(g_1(x_2)) \quad (5.73)$$

Pour terminer la démonstration, montrons que  $F$  est une application contractante. Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= |g_2(g_1(x)) - g_2(g_1(y))| \\ &\leq |x - y| \sup_{t \in \mathbb{R}} \{ |g_1'(t)| \times |g_2'(g_1(t))| \} \quad (\text{Théorème des accroissements finis}) \\ &\leq |x - y| q_1 q_2 \end{aligned}$$

Avec  $q_1 q_2 < 1$

L'application  $F$  est donc contractante, et la suite  $x_2^{(k)}$  converge donc vers son unique point fixe  $x_2^*$ .

Dans notre preuve, on a choisi de travailler sur la suite  $x_2^{(k)}$  en considérant  $x_1^{(k)}$  comme intermédiaire de calcul, mais on aurait évidemment pu faire le contraire, et obtenir le même résultat sur  $x_1^{(k)}$ . Cela permet d'affirmer que la suite  $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})^T$  converge vers son seul point fixe  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$  et que l'on a la relation

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{(q_1 q_2)^k}{1 - q_1 q_2} \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| \quad (5.74)$$

□

### 5.2.2.3 Accélération de la convergence : algorithme optimisé

Dans la démonstration, on est parti de l'algorithme de Schwarz pour des coefficients de couplage  $\omega_1$  et  $\omega_2$  quelconques, et avons montré que l'algorithme se ramène à une suite récurrente  $x_2^{(k+1)} = F(x_2^{(k)})$ , avant de "régler les coefficients" pour assurer que  $F$  soit toujours contractante (plus précisément, on a montré que  $F$  est  $q_1 q_2$ -lipschitzienne).

Rappelons que l'on obtient l'expression

$$x_2^{(k+1)} = F(x_2^{(k)}) = g_2 \circ p_2 \circ g_1 \circ p_1(x_2^{(k)})$$

où

$$\begin{cases} p_1(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x + \left( l_2 \widehat{r}_2 - \frac{1}{\omega_1} \right) f_2(x) \\ p_2(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x + \left( l_1 \widehat{r}_1 - \frac{1}{\omega_2} \right) f_1(x) \end{cases}$$

Comme on a choisi *a priori* de ne pas faire dépendre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de l'itération  $(k)$ , on a choisi  $\omega_1 = (l_2 \widehat{r}_2)^{-1}$  et  $\omega_2 = (l_1 \widehat{r}_1)^{-1}$  afin d'assurer que  $p_1$  et  $p_2$  soient les fonctions identité, de dérivée 1, quel que soit  $x$ .

En revanche, si on décide de faire varier  $\omega_1$  et  $\omega_2$  au cours des itérations, on peut espérer, si  $f_1$  et  $f_2$  ont de “bonnes propriétés”, rendre  $F$  plus contractante, c’est-à-dire avec une constante de Lipschitz inférieure. Pour ce faire, comme  $x_2^{(k+1)}$  sera dans un voisinage de  $x_2^{(k)}$ , une façon simple de rendre  $F$  “très contractante” autour de  $x_2^{(k)}$  est d’annuler la dérivée de  $p_1$ . Ainsi, on trouve

$$p_1'(x_2^{(k)}) = 0 \Leftrightarrow \left( \omega_1^{(k+1)} \right)^{\dagger\dagger} = \left( l_2 \widehat{r}_2 + \frac{1}{f_2'(x_2^{(k)})} \right)^{-1} \quad (5.75)$$

Ainsi, avec cette expression, on a

$$p_1'(x) = 1 - \frac{f_2'(x)}{f_2'(x_2^{(k)})}$$

Or, d’après le théorème des accroissements finis

$$\left| f_2'(x) - f_2'(x_2^{(k)}) \right| \leq \left| x - x_2^{(k)} \right| \sup_{y \in I(x_2^{(k)}, x)} |f_2''(y)|$$

avec  $I(x_2^{(k)}, x) = [\min(x, x_2^{(k)}), \max(x, x_2^{(k)})]$   
et donc finalement

$$\begin{aligned} |p_1'(x)| &= \left| \frac{f_2'(x_2^{(k)}) - f_2'(x)}{f_2'(x_2^{(k)})} \right| \\ &\leq \left| x - x_2^{(k)} \right| \frac{\sup_{y \in I} |f_2''(y)|}{f_2'(x_2^{(k)})} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la vitesse de convergence de ce nouvel algorithme de Schwarz, est conditionné par  $f_2'$  et  $f_2''$ . Un cas limite est le cas où on  $f_2''$  est identiquement nul, donc  $f_2$  est linéaire. Dans ce cas,  $p_1' = 0$ , et il s’ensuit  $F = 0$ , et donc l’algorithme converge en une seule itération.

Bien évidemment, le travail effectué sur  $p_1$  peut être transposé à  $p_2$ , afin d’annuler le terme  $p_2' \circ g_1 \circ p_1(x_2^{(k)})$ . On a donc

$$\left( \omega_2^{(k+1)} \right)^{\dagger\dagger} = \left( l_1 \widehat{r}_1 + \frac{1}{f_1'(g_1 \circ p_1(x_2^{(k)}))} \right)^{-1} = \left( l_1 \widehat{r}_1 + \frac{1}{f_1'(x_1^{(k+1)})} \right)^{-1} \quad (5.76)$$

### Conclusion sur l’algorithme optimisé :

On a montré dans la proposition 5.2.3 que prendre  $\omega_1 = (l_2 \widehat{r}_2)^{-1}$  et  $\omega_2 = (l_1 \widehat{r}_1)^{-1}$  pour le problème stationnaire avec conditions aux limites générales permet d’assurer la convergence de l’algorithme de Schwarz. On a en suite fait remarquer qu’en prenant d’autres coefficients ( $\omega_1^{\dagger\dagger}$  et  $\omega_2^{\dagger\dagger}$ ), on pouvait visiblement améliorer la vitesse de convergence de l’algorithme, sans toutefois montrer que l’algorithme convergeait dans le cas général. Intuitivement, on peut éventuellement s’attendre à ce qu’il diverge si les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont très non linéaires, et si on initialise l’algorithme loin de la solution.

**Remarque (Conditions (iii) et (iv))**

En fait, sur les deux conditions (iii) et (iv), seule l'une d'elle est nécessaire. En effet, cela suffit à assurer que la fonction  $F$  est contractante et que le problème stationnaire est bien posé. Supposons par exemple que seule (iii) soit vraie, et que l'on ait en revanche  $f'_2 = 0$ . Dans ce cas, dans la démonstration, on aura  $q_1 = 0$ , donc  $F$  est  $q_1$ -lipschitzienne, avec ( $q_1 < 1$ ). Par conséquent, l'équation (5.74) reste valable, et l'algorithme est donc convergent. De plus, au regard de l'algorithme optimisé, il n'y a pas de problème pour définir le second coefficient optimal, qui dégénère vers

$$\left(\omega_2^{(k+1)}\right)^{\dagger\dagger} = 0$$

**5.2.2.4 Test numérique**

Afin d'illustrer les résultats théoriques obtenus sur le problème non stationnaire, nous présentons un test numérique dont les ordres de grandeurs sont ceux d'un cas d'antigivrage classique. Considérons le problème (5.44), avec les données numériques suivantes

$l_1$	$l_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$f_1(u)$	$f_2(u)$
$l_1 = 5 \text{ mm}$	$l_2 = 1 \text{ mm}$	$\lambda_1 = 167 \text{ SI}$	$0.6 \text{ SI}$	$-h_{\text{int}}(T_{\text{int}} - u)$	$\dot{m}_{\text{ev}}(u, h_{\text{tc}})L_v - h_{\text{tc}}(T_{\text{rec}} - u)$

TABLE 5.1 – Valeurs numériques pour le problème stationnaire non linéaire 1

où on pose

$$h_{\text{int}} = 130 \text{ SI}, T_{\text{int}} = 600 \text{ K}, h_{\text{tc}} = 300 \text{ SI}, T_{\text{rec}} = 270 \text{ K}, L_v = 2.257 \times 10^6 \text{ J.kg}^{-1} \quad (5.77)$$

et  $\dot{m}_{\text{ev}}$  est calculé avec l'analogie de Chilton-Colburn. On suppose que l'humidité de l'air à l'extérieur de la couche limite est nulle, on a alors

$$\dot{m}_{\text{ev}}(u, h_{\text{tc}}) = \frac{h_{\text{tc}}}{c_{\text{air}}Le^{2/3}} \times \frac{p_{\text{sat}}(u)/p_e}{p_{\text{sat}}(u)/p_e + M_a/M_v(1 - p_{\text{sat}}(u)/p_e)}$$

On pose

$$c_{\text{air}} = 1005 \text{ SI}, Le = 0.8714, M_a = 2.897 \times 10^{-2}, M_v = 1.8015 \times 10^{-2}, p_e = 7 \times 10^4 \text{ Pa}$$

De plus, pour la pression de vapeur saturante  $p_{\text{sat}}$ , on utilise la loi de Sonntag

$$p_{\text{sat}}(u) = \frac{-6024.5282}{u} + 29.32707 + 0.010613868 u - 1.3198825 \times 10^{-5} u^2 - 0.49382577 \log(u)$$

Une résolution numérique directe montre la solution de ce problème est

$$u_1(-l_1) \approx 317.3562, u_1(0) = u_2(0) = 316.2561, u_2(l_2) = 298.7591 \quad (5.78)$$



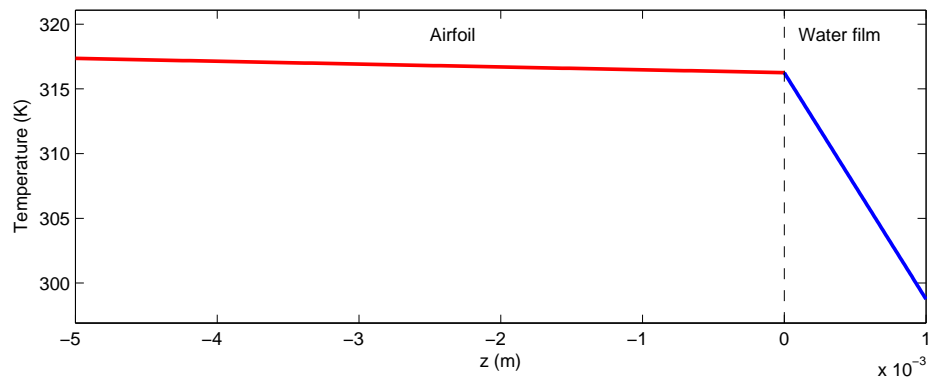


FIGURE 5.4 – Solution exacte du problème stationnaire non linéaire 1

On résout ce problème avec la méthode de Schwarz présentée dans ce chapitre. Pour cela, on utilise dans un premier temps les coefficients de couplage de la proposition 5.2.3 (coefficients *non optimaux*), puis les coefficients de couplage *optimaux* (5.75,5.76). On impose des conditions initiales très éloignées

$$u_2^{(0)}(0) = 1000 \text{ K}, \quad u_2^{(0)}(l_2) = 1 \text{ K} \quad (5.79)$$

On obtient les courbes de convergence suivantes

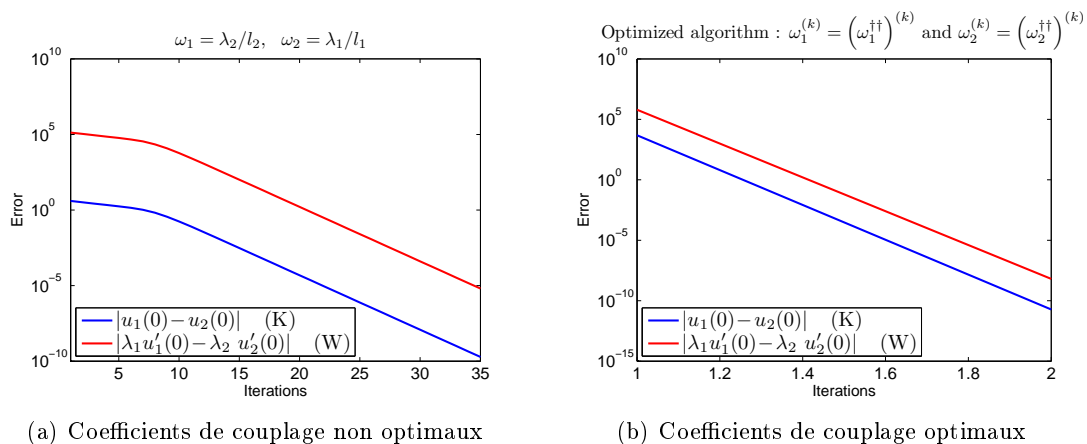


FIGURE 5.5 – Courbes de convergence pour les deux coefficients de couplage

On observe que malgré la non linéarité du problème et une initialisation de l'algorithme très éloignée de la solution, l'algorithme optimisé converge en seulement deux itérations. L'algorithme non optimisé converge en une cinquantaine d'itérations, pour un écart sur les températures de  $10^{-10}$  K et de  $10^{-5}$  W.m<sup>-2</sup> sur les flux de chaleur. En pratique, une convergence aussi sévère n'est pas requise (on est bien en deçà des erreurs de modélisation). Si l'on souhaite une convergence au centième de Kelvin et à 0.01 W.cm<sup>-2</sup> (ce qui est suffisant dans les applications en givrage car les flux sont de l'ordre de 1 W.cm<sup>-2</sup>), alors l'algorithme a convergé dès la seizième itération. De plus, en initialisant avec la température de récupération, qui est une initialisation pertinente au regard du problème, l'algorithme converge en dix itérations.

Bien que nous n'ayons pas pu démontrer que l'algorithme optimisé converge quelle que soit l'initialisation, nous n'avons pas réussi, par les tests numériques, à mettre en défaut sa convergence. Dans l'exemple précédent, malgré une initialisation « saugrenue » (physiquement, on sait très bien que la température du système ne peut être ni à 1000 ni à 1 K !), l'algorithme optimisé converge très rapidement. De plus, même sur des cas test beaucoup plus non linéaires (avec une dérivée seconde très grande devant la dérivée première), nous ne sommes pas parvenu à faire diverger l'algorithme. Sans pouvoir affirmer qu'il converge pour toute condition aux limites, nous pouvons en tous les cas supposer qu'il est très bien adapté aux problèmes d'évaporation d'un film.

### 5.2.3 Conclusion : construction d'un algorithme de Schwarz pour un problème de couplage de thermique unidimensionnel général

Dans cette section, nous avons étudié un algorithme de Schwarz pour des problèmes de thermique unidimensionnels simplifiés. Pour le cas instationnaire, avec des conditions aux limites linéaires et en considérant les propriétés physiques des matériaux uniformes sur chacun des domaines, nous avons présenté un algorithme qui converge en deux itérations.

Pour le cas stationnaire, avec conditions aux limites quelconques et conductivités non uniformes, nous avons présenté un algorithme de Schwarz qui converge très rapidement pour certains paramètres de couplage  $\omega_1^{(k)}$  et  $\omega_2^{(k)}$ . Nous avons également démontré que, si la conductivité thermique n'est pas uniforme, alors les coefficients de couplage optimaux ne dépendent que de la résistance moyenne du domaine  $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{dz}{\lambda}$ . Par conséquent, dans le cas instationnaire, lorsque les conductivités sont non uniformes, nous nous basons également sur cette résistance moyenne pour définir les coefficients de couplage.

Ainsi, considérons le problème (5.12), pour  $\Omega_1 = ]-l_1, 0[$  et  $\Omega_2 = ]0, l_2[$ . Connaissant la solution au temps  $t^n$ , l'équation pour le temps  $t^{n+1}$  s'écrit donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_1 u_1^{n+1} = \mu_1^2 u_1^n & \forall z \in ]-l_1, 0[ \quad (5.80a) \\ \mathcal{L}_2 u_2^{n+1} = \mu_2^2 u_2^n & \forall z \in ]0, l_2[ \quad (5.80b) \\ -\lambda_1 (u_1^{n+1})'(-l_1) = -f_1(u_1^{n+1}(-l_1)) & (5.80c) \\ \lambda_2 (u_2^{n+1})'(l_2) = -f_2(u_2^{n+1}(l_2)) & (5.80d) \\ u_1^{n+1}(0) = u_2^{n+1}(0) & (5.80e) \\ \lambda_1 (u_1^{n+1})'(0) = \lambda_2 (u_2^{n+1})'(0) & (5.80f) \end{array} \right.$$

où, pour  $j \in \{1, 2\}$ , on définit la grandeur scalaire  $\mu_j$

$$\mu_j(z)^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\rho_j(z)c_j(z)}{\Delta t \lambda_j(z)} \quad (5.81)$$

et l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}_j$

$$\mathcal{L}_j u \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{\lambda_j} (\lambda_j u')' + \mu_j^2 u \quad (5.82)$$

On pose, pour  $j \in \{1, 2\}$ ,

$$\widehat{\rho_j c_j} = \frac{1}{l_j} \int_{\Omega_j} \rho_j c_j dz, \quad \widehat{r_j} = \frac{1}{l_j} \int_{\Omega_j} \frac{dz}{\lambda_j}, \quad \widehat{\mu_j} = \sqrt{\frac{\widehat{\rho_j c_j} \widehat{r_j}}{\Delta t}} \quad (5.83)$$

L'algorithme de Schwarz pour le problème instationnaire non linéaire consiste à créer la suite  $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ , que l'on espère convergente vers  $(u_1^{n+1}, u_2^{n+1})$ .

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u_1^{(k+1)} = \mu_1^2 u_1^n & (5.84a) \\ -\lambda_1 (u_1^{(k+1)})'(-l_1) = -f_1(u_1^{(k+1)}(-l_1)) & (5.84b) \\ \lambda_1 (u_1^{(k+1)})'(0) = \lambda_2 (u_2^{(k)})'(0) + \omega_1^{(k+1)}(u_2^{(k)}(0) - u_1^{(k+1)}(0)) & (5.84c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 u_2^{(k+1)} = \mu_2^2 u_2^n & (5.84d) \\ \lambda_2 (u_2^{(k+1)})'(l_2) = -f_2(u_2^{(k+1)}(l_2)) & (5.84e) \\ -\lambda_2 (u_2^{(k+1)})'(0) = -\lambda_1 (u_1^{(k+1)})'(0) + \omega_2^{(k+1)}(u_1^{(k+1)}(0) - u_2^{(k+1)}(0)) & (5.84f) \end{cases}$$

Dans chacun des deux sous problèmes, les variables en bleue sont les inconnues. Les coefficients de couplages utilisés sont ceux du problème linéarisé autour de l'itération précédente, soient

$$\begin{cases} \omega_1^{(k+1)} = \frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{r}_2} \times \frac{1 - \chi_2^{(k+1)}}{1 + \chi_2^{(k+1)}} & (5.85a) \\ \omega_2^{(k+1)} = \frac{\widehat{\mu}_1}{\widehat{r}_1} \times \frac{1 - \chi_1^{(k+1)}}{1 + \chi_1^{(k+1)}} & (5.85b) \end{cases}$$

avec pour  $j \in \{1, 2\}$ ,

$$\chi_j^{(k+1)} = \exp(-2 l_j \widehat{\mu}_j) \frac{\eta_j^{(k+1)} - 1}{\eta_j^{(k+1)} + 1} \quad (5.86)$$

où

$$\begin{cases} \eta_1^{(k+1)} = \frac{\widehat{\mu}_1}{\widehat{r}_1 f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \\ \eta_2^{(k+1)} = \frac{\widehat{\mu}_2}{\widehat{r}_2 f_2'(u_2^{(k)}(l_2))} \end{cases} \quad (5.87)$$

Notons que cet algorithme, qui est très général, s'adapte à trois problèmes particuliers. Le problème stationnaire, qui permet de retrouver les résultats précédents ainsi que le problème de Dirichlet et le problème de Neumann.

#### — Cas stationnaire

Il s'obtient en faisant tendre le pas de temps  $\Delta t$  vers  $+\infty$ , et donc  $\mu_1$  et  $\mu_2$  vers 0. Pour retrouver les coefficients de couplage (qui sont des formes indéterminées si on pose  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ), on effectue un développement limité des coefficients de couplage à l'ordre 1. On a

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1^{(k+1)} - 1}{\eta_1^{(k+1)} + 1} &= -1 + \frac{2}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \sqrt{\frac{\widehat{\rho}_1 \widehat{c}_1}{\Delta t \widehat{r}_1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta t}\right) \\ \exp(-2 l_1 \widehat{\mu}_1) &= 1 - 2 l_1 \sqrt{\frac{\widehat{\rho}_1 \widehat{c}_1 \widehat{r}_1}{\Delta t}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta t}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\chi_1^{(k+1)} = -1 + \left( l_1 \sqrt{\widehat{\rho_1 c_1 r_1}} + \frac{1}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \sqrt{\frac{\widehat{\rho_1 c_1}}{\widehat{r_1}}} \right) \frac{2}{\sqrt{\Delta t}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)$$

Ainsi, on a

$$\omega_2^{(k+1)} = \frac{2 - \left( l_1 \widehat{\rho_1 c_1 r_1} + \frac{\widehat{\rho_1 c_1}}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \right) \frac{2}{\Delta t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta t^2}\right)}{2 \left( l_1 \widehat{r_1} + \frac{1}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta t^2}\right)}$$

$$\omega_2^{(k+1)} = \sqrt{\frac{\widehat{\rho_1 c_1}}{\Delta t \widehat{r_1}}} \frac{2 - \left( l_1 \sqrt{\widehat{\rho_1 c_1 r_1}} + \frac{1}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \sqrt{\frac{\widehat{\rho_1 c_1}}{\widehat{r_1}}} \right) \frac{2}{\sqrt{\Delta t}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)}{\left( l_1 \sqrt{\widehat{\rho_1 c_1 r_1}} + \frac{1}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \sqrt{\frac{\widehat{\rho_1 c_1}}{\widehat{r_1}}} \right) \frac{2}{\sqrt{\Delta t}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)}$$

Le numérateur se simplifie et on obtient l'équation

$$\omega_2^{(k+1)} = \sqrt{\frac{\widehat{\rho_1 c_1}}{\Delta t \widehat{r_1}}} \frac{2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\right)}{\left( l_1 \sqrt{\widehat{\rho_1 c_1 r_1}} + \frac{1}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \sqrt{\frac{\widehat{\rho_1 c_1}}{\widehat{r_1}}} \right) \frac{2}{\sqrt{\Delta t}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Delta t}\right)}$$

qui se réécrit

$$\omega_2^{(k+1)} = \frac{2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\right)}{\left( l_1 \widehat{r_1} + \frac{1}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \right) \times 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\right)}$$

Enfin, en faisant tendre  $\Delta t \rightarrow \infty$  puis en effectuant le même raisonnement sur  $\omega_2^{(k+1)}$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^{(k+1)} = \left( l_2 \widehat{r_2} + \frac{1}{f_2'(u_2^{(k)}(-l_2))} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (5.88a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2^{(k+1)} = \left( l_1 \widehat{r_1} + \frac{1}{f_1'(u_1^{(k)}(-l_1))} \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (5.88b)$$

On remarque alors que (5.88) est équivalent à (5.75,5.76). Ce résultat est cohérent, puisque ces deux formules sont les coefficients de couplage optimaux (au sens où ils permettent de faire converger l'algorithme de Schwarz en deux itérations), de deux problèmes équivalents. En effet, (5.88) a été obtenu en considérant le problème instationnaire et en faisant tendre le pas de temps vers l'infini afin de chercher la solution stationnaire. (5.75,5.76) a été obtenu en considérant directement le problème stationnaire.

En fait, cela signifie que pour le problème stationnaire, les coefficients de couplage optimaux (qui ont été obtenus de façon à rendre une certaine fonction  $F$  la plus contractante possible), auraient également pu être trouvés en considérant les coefficients de couplage optimaux du problème linéarisé autour de l'itération précédente.

— **Problème de Dirichlet**

Le problème (5.80) contient, à la limite, le cas des conditions aux limites de Dirichlet. En effet, si par exemple on souhaite imposer une température  $T_1$  au bord inférieur ( $z = -l_1$ ), il suffit de poser

$$-f_1(u) = h_1(T_1 - u)$$

et de faire tendre  $h_1$  vers l'infini. Ainsi, on a  $f_1' \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, pour le second coefficient de couplage, la formule (5.85b) reste valable, avec

$$\eta_1^{(k+1)} = 0 \Rightarrow \chi_1^{(k+1)} = -\exp(-2l_1\widehat{\mu}_1)$$

Pour le problème stationnaire, (5.85b) dégénère vers

$$\omega_2^{(k+1)} = (l_1\widehat{r}_1)^{-1}$$

— **Problème de Neumann**

Le problème (5.80) contient également le cas des conditions de Neumann. Pour imposer un flux  $\phi_1$  au bord inférieur, il suffit de poser

$$-f_1(u) = \phi_1$$

Dans ce cas, la dérivée est nulle. La formule (5.85b) demeure valable, avec

$$\eta_1^{(k+1)} = +\infty \Rightarrow \chi_1^{(k+1)} = \exp(-2l_1\widehat{\mu}_1)$$

Pour le problème stationnaire, on a

$$\omega_2^{(k+1)} = 0$$

Autrement dit, la condition de transmission pour le second domaine est une condition de Neumann. Cela s'explique par le fait qu'au bord inférieur, on peut écrire

$$-\lambda_1 u'(-l_1) = \phi_1$$

Par conservation du flux de chaleur, on peut donc immédiatement écrire

$$-\lambda_1 u'(0) = \phi_1$$

Ainsi, dans l'algorithme de Schwarz, le flux de chaleur à l'interface entre les deux domaines n'est plus inconnu. Par conséquent, l'algorithme de Schwarz converge en une itération, y compris si la deuxième condition aux limites est non linéaire.

### 5.3 Application à des cas bidimensionnels de type couche mince

Dans ce paragraphe, nous proposons d'étendre les méthodes présentées dans la section 5.2 afin de les appliquer à des cas bidimensionnels de type couche mince. Autrement dit, on considère que l'une des dimensions du problème (que l'on appelle la dimension normale dans toute cette étude) est très petite devant l'autre (qualifiée de tangentielle).

Dans ce cas, on suppose que les flux tangentiels vont être au moins d'un ordre inférieur aux flux normaux. Même si l'on ne néglige pas les flux tangentiels dans le modèle de thermique, on peut néanmoins s'attendre à ce qu'ils n'aient que peu d'influence sur la convergence de l'algorithme de Schwarz.

### 5.3.1 Présentation de l'algorithme

Considérons deux domaines minces  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  partageant une interface  $\Gamma$ . Sur chacun des domaines, on définit un problème de thermique, qui peut être un problème de conduction, de changement de phase, ou le modèle tricouche d'accrétion de givre et de ruissellement. De plus, on suppose qu'une dimension est petite devant l'autre, ce qui permet de parcourir l'interface  $\Gamma$  avec une abscisse curviligne notée  $x$  (voir figure 5.6). En tout point de  $\Gamma$ , on définit la direction  $z$  qui est normale à  $\Gamma$ . On peut ainsi définir  $l_1(x)$  (resp.  $l_2(x)$ ) la hauteur du domaine  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ). De plus, on note  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) la température dans le domaine  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ).

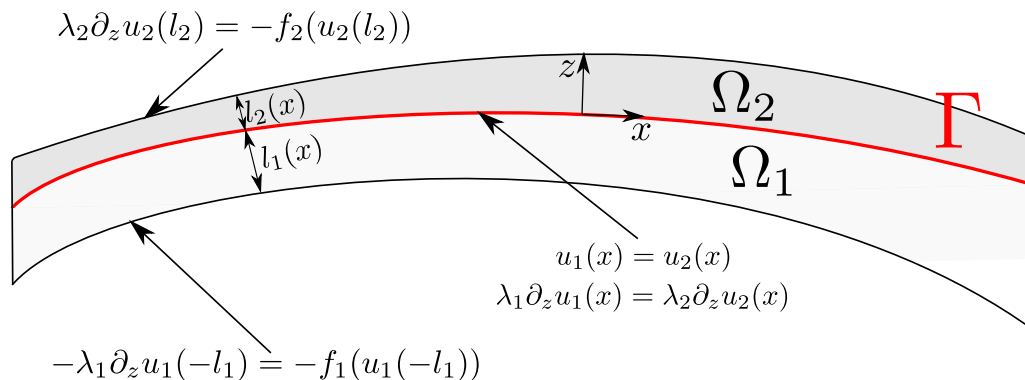


FIGURE 5.6 – Schéma du problème bidimensionnelle de couche mince

Sur l'interface inférieure du domaine  $\Omega_1$ , la condition aux limites s'écrit

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}(x) = -f_1(u_1(-l_1), x) \quad (5.89)$$

De même, la condition aux limites sur l'interface supérieure de  $\Omega_2$  s'écrit

$$\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}(x) = -f_2(u_2(-l_2), x) \quad (5.90)$$

Avec ces notations, les conditions de continuité de la température et du flux de chaleur à l'interface  $\Gamma$  s'écrivent

$$u_1(x) = u_2(x) \quad (5.91)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}(x) = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}(x) \quad (5.92)$$

On suppose que l'on est capable de résoudre en « boîte noire » les problèmes de thermique sur chacun des deux domaines (de façon analytique ou numérique). L'objectif est donc de définir un algorithme itératif permettant de converger vers la solution du problème couplé. Pour cela, on considère un algorithme de Schwarz avec des conditions de transmission locales de type Robin. Comme sur ce type de problème de couche mince, les flux de chaleur sont dominant dans la direction normale, on utilise l'algorithme développé dans la section précédente que l'on adapte pour la dimension 2. Cet algorithme s'écrit donc

Initialisation de  $u_2^{(0)}$

$k \leftarrow 0$

**Répéter**

- Résoudre le problème de thermique sur  $\Omega_1$  avec comme aux limites sur  $\Gamma$

$$\lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)' (x) = \lambda_2 \left( u_2^{(k)} \right)' (x) + \omega_1^{(k+1)}(x) \left( u_2^{(k)}(x) - u_1^{(k+1)}(x) \right) \quad (5.93)$$

- Résoudre le problème de thermique sur  $\Omega_2$  avec comme aux limites sur  $\Gamma$

$$-\lambda_2 \left( u_2^{(k+1)} \right)' (x) = -\lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)' (x) + \omega_2^{(k+1)}(x) \left( u_1^{(k+1)}(x) - u_2^{(k+1)}(x) \right) \quad (5.94)$$

- $k \leftarrow k + 1$

**jusqu'à ce que** h

$$\left\| u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)} \right\| < \varepsilon_T \quad \text{et} \quad \left\| \lambda_1 \left( u_1^{(k+1)} \right)' (x) - \lambda_2 \left( u_2^{(k+1)} \right)' (x) \right\| < \varepsilon_\Phi \quad (5.95)$$

Algorithme 3: Algorithme de Schwarz pour un problème bidimensionnel de couche mince

Dans cet algorithme, on utilise les coefficients de couplage définis par les équations (5.85-5.87). Pour le critère de convergence (5.95),  $\varepsilon_T$  (qui a la dimension d'une température) et  $\varepsilon_\Phi$  (qui a la dimension d'un flux de chaleur) sont les seuils à partir desquels on considère que l'algorithme a convergé. Plusieurs choix sont possibles pour la norme, on peut par exemple choisir la norme  $L^2$  ou la norme infinie<sup>2</sup> définies par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| \quad (5.96)$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma |f(x)|^2 dx} \quad (5.97)$$

### 5.3.2 Validations numériques

Dans ce paragraphe, nous étudions la convergence de l'algorithme de Schwarz 3 sur une application bidimensionnelle avec des conditions aux limites non linéaires. L'objectif est de s'approcher des applications en givrage. Pour ce faire, un petit code a été développé en Matlab. Ce code implémente l'algorithme 3, dans le cas particulier où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont rectangulaires. De plus, le problème de thermique considéré sur chacun des domaines est l'équation de la chaleur où toutes les propriétés physiques sont uniformes et constantes (mais pas égales pour  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ). Les équations sont discrétisées avec un schéma d'Euler implicite pour l'intégration en temps et un schéma aux différences finies centré d'ordre 2 en espace. Enfin, les conditions aux limites sur le bord inférieur de  $\Omega_1$  et le bord supérieur de  $\Omega_2$  peuvent être non linéaires, ce qui implique que le problème discret est lui-même non

2. En toute rigueur, pour le problème continu de la chaleur, les normes les plus adaptées sont  $H^{1/2}$  pour la température et  $H^{-1/2}$  pour le flux de chaleur car, comme l'a montré Lions [58], ce sont dans les espaces associés à ces normes que l'algorithme converge faiblement.

linéaire. Il est résolu en utilisant une méthode de Newton.

### 5.3.2.1 Validation sur un problème linéaire unidimensionnel

Dans un premier temps, nous validons le problème linéaire 1D, ce qui permet de vérifier le résultat théorique stipulant que l'algorithme converge en deux itérations. Comme l'objectif est de se rapprocher des applications en givrage, on considère que le domaine  $\Omega_1$  a les propriétés de l'aluminium et le domaine  $\Omega_2$  les propriétés thermiques de l'eau liquide. La largeur du système est fixée à  $L = 120$  cm, la hauteur de  $\Omega_1$  à 2 mm et la hauteur de  $\Omega_2$  à 5 mm. Au départ, la température est initialisée à  $0^\circ\text{C}$ . Pour les conditions aux limites

$$\begin{aligned} -f_1(u_1, x) &= h_1(T_1 - u_1), & h_1 &= 500 \text{ SI}, & T_1 &= 26.85^\circ\text{C} \\ -f_2(u_2, x) &= h_2(T_2 - u_1), & h_2 &= 200 \text{ SI}, & T_2 &= 40^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Par conséquent, le système est chauffé par ses interfaces inférieure et supérieure. Sur les côtés, une condition de flux nul est appliquée. Dans cette étude, on ne s'intéresse qu'à la convergence de l'algorithme au premier pas de temps. On pose  $\Delta t = 1$  s et  $\Delta z = 10^{-2}$  mm. A l'issue de la première itération, on observe le champ de température suivant :

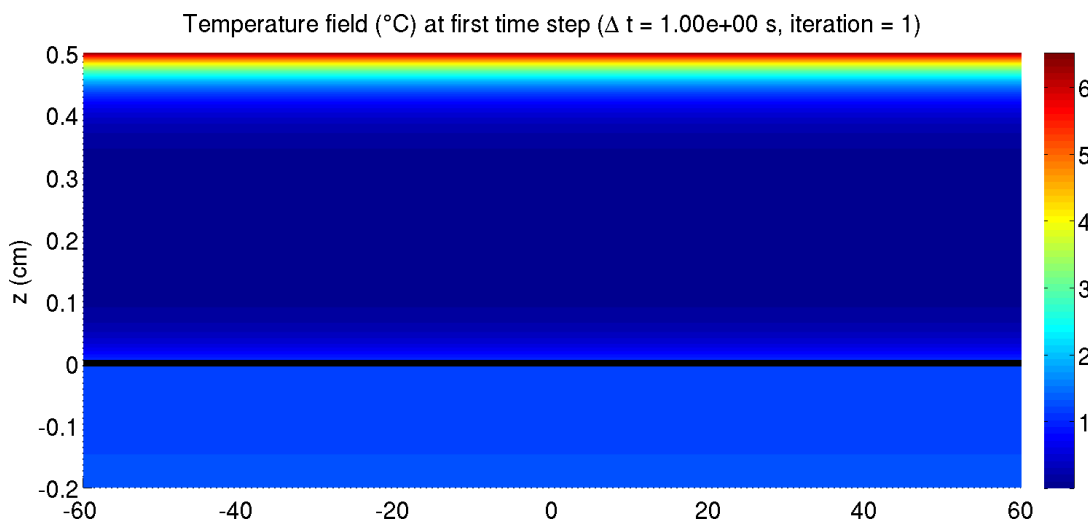


FIGURE 5.7 – Champ de température de la première itération de l'algorithme de Schwarz pour un cas linéaire

L'erreur constatée à cette itération est, en norme infinie,  $4 \times 10^{-3}^\circ\text{C}$  pour la température et  $20 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  pour le flux de chaleur. À la seconde itération, on obtient un champ de température visuellement très proche, et l'algorithme a convergé à  $4 \times 10^{-8}^\circ\text{C}$  pour la température et  $2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Ces valeurs demeurent supérieures à l'erreur machine, alors que normalement, on devrait avoir des erreurs nulles dès la deuxième itération. Ces différences s'expliquent par le fait que les coefficients optimaux ont été obtenus en considérant que la résolution du problème est exacte par rapport aux variables d'espaces (seul le temps est discrétisé), alors que dans la pratique, on utilise un schéma numérique. Cette discrétisation explique qu'il faille un peu plus d'itérations pour converger vers l'erreur machine. Pour illustrer ce phénomène, traçons les courbes de convergence obtenues pour différents pas de maillage (le pas de temps restant fixé à 1 s).



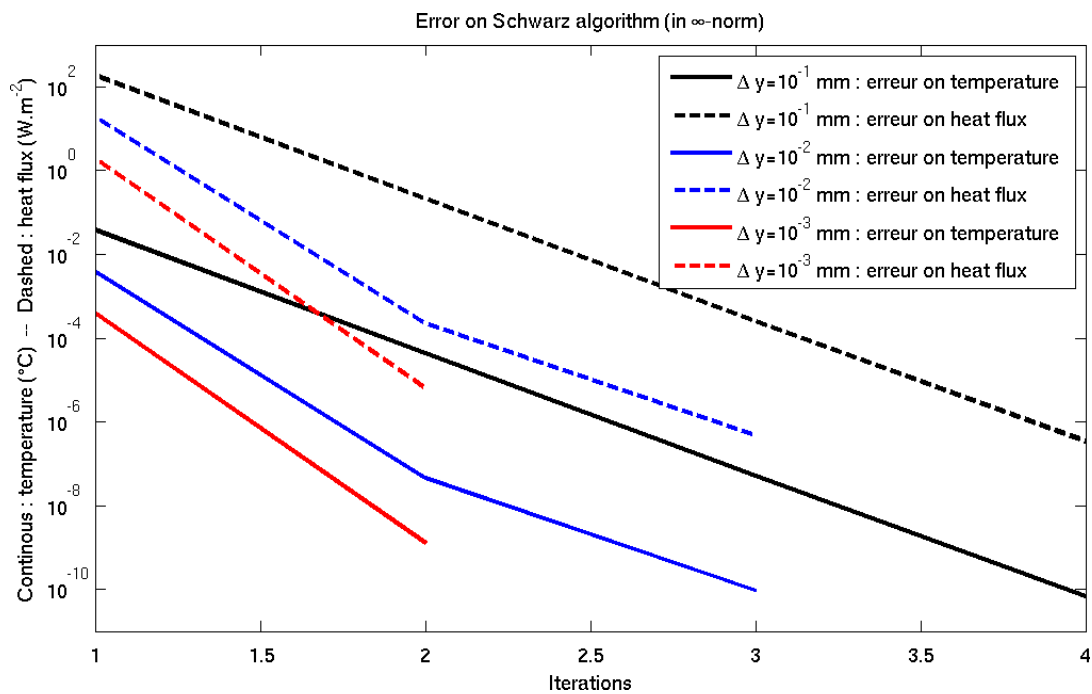


FIGURE 5.8 – Convergence pour différents pas d’espace de l’algorithme de Schwarz pour un problème de thermique linéaire unidimensionnel

On observe que pour un maillage très raffiné (des mailles de  $1 \mu\text{m}$ ), l’algorithme converge en deux itérations très proches de l’erreur machine, ce qui est conforme à la théorie.

### 5.3.2.2 Validation sur un problème linéaire bidimensionnel

L’objectif de ce paragraphe est d’étudier la convergence de l’algorithme de Schwarz 3 pour un problème de thermique linéaire et bidimensionnel. Pour cela, on reprend le cas test ci-dessus et l’on modifie les conditions aux limites. Pour l’interface supérieure du domaine  $\Omega_2$ , on utilise la condition aux limites :

$$-f_2(u_2, x) = h_2(x)(T_2 - u_1)$$

où  $T_2$  est encore égale à  $40^\circ\text{C}$ . Concernant le coefficient d’échange, afin de se rapprocher d’une application en givrage, on utilise celui issu d’un calcul sur un profil d’aile NACA0012 affiché ci-dessous :

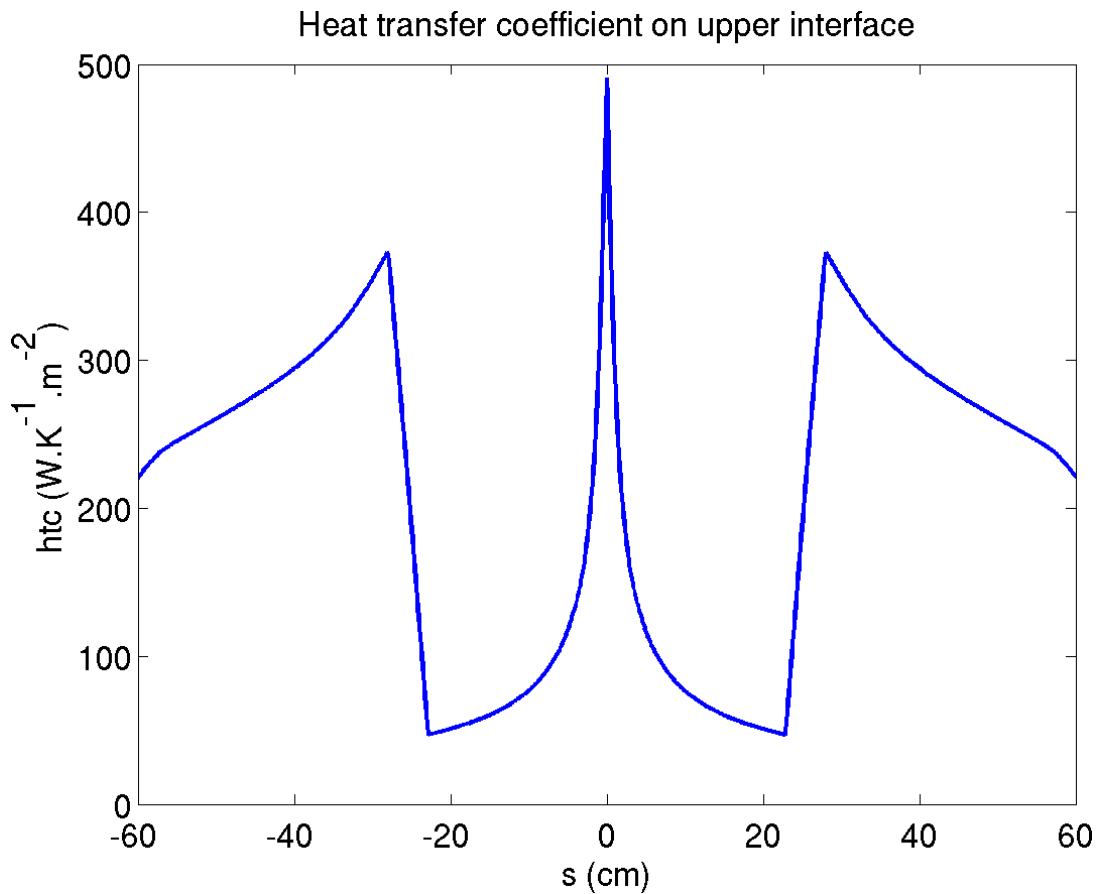


FIGURE 5.9 – Coefficient de transfert thermique issu d'un calcul sur un profil NACA0012

Le profil d'aile étant symétrique et que le calcul ayant été fait pour un angle d'incidence nul, le coefficient d'échange est également symétrique. Les discontinuités que l'on observe autour des abscisses -20 et +20 cm correspondent à des transitions entre un régime de couche limite laminaire et un régime turbulent.

Concernant l'interface inférieure de  $\Omega_1$ , on modifie également la condition aux limites afin de rendre le problème plus bidimensionnel. On pose

$$-f_1(u_1, x) = h_1(T_1 - u_1) + \Phi_1(x)$$

où les valeurs de  $h_1$  et  $T_1$  sont les mêmes que pour le cas précédent. De plus, on pose :

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 10 \text{ W.cm}^{-2} & \text{si } -40 \text{ cm} \leq x \leq -20 \text{ cm} \\ 0 \text{ W.cm}^{-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système est par conséquent d'avantage chauffé par le côté gauche. Comme précédemment, on ne s'intéresse à la convergence de l'algorithme que pour le premier pas de temps. Dans un premier temps, fixons ce pas de temps à  $\Delta t = 1$  s. Pour la discrétisation spatiale, on pose  $\Delta x = 1$  mm et  $\Delta y = 0.1$  mm. À la première itération, on obtient le champ de température suivant :

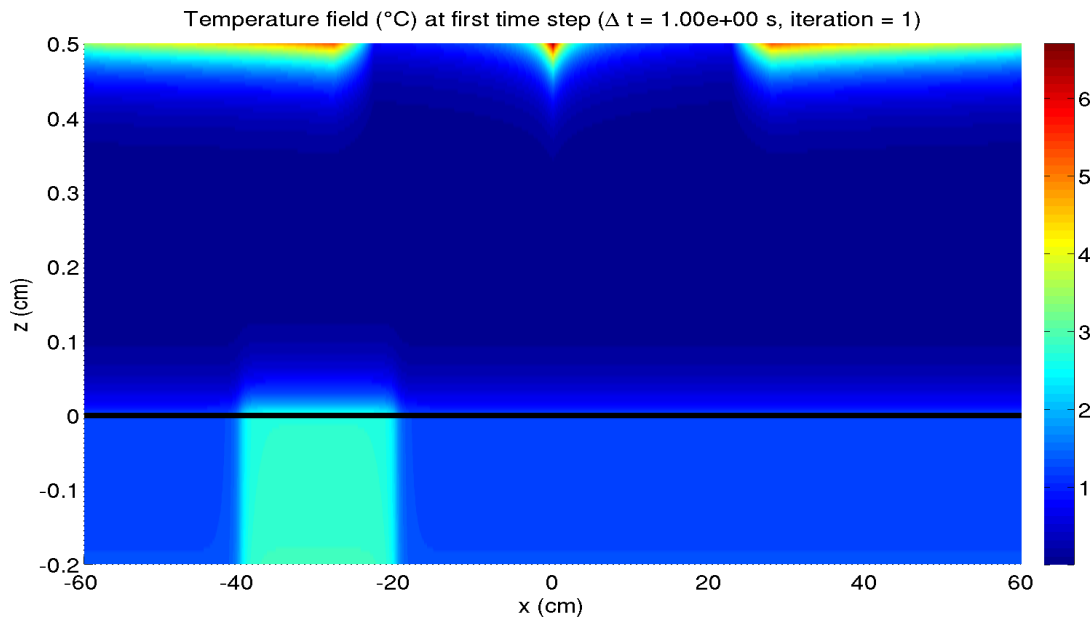


FIGURE 5.10 – Champ de température de la première itération de l’algorithme de Schwarz pour un cas linéaire 2D

L’erreur en norme infinie constatée à cette première itération est d’environ  $4 \times 10^{-2} \text{°C}$  pour la température et de  $200 \text{ W.m}^{-2}$  pour le flux de chaleur. À l’issue de la seconde itération, le champ obtenu est le suivant :

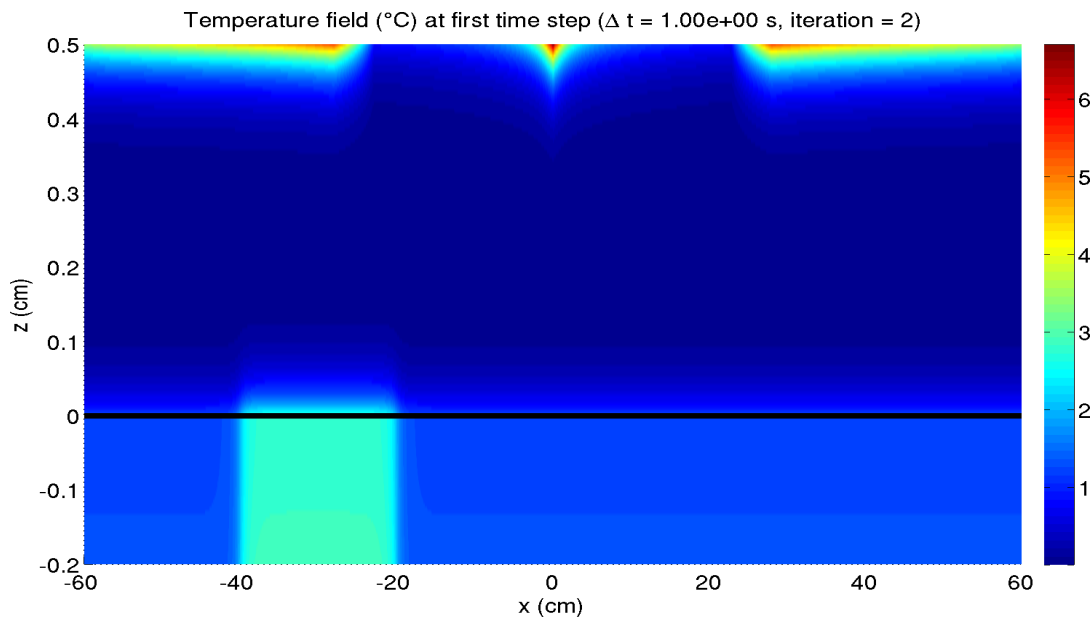


FIGURE 5.11 – Champ de température de la deuxième itération de l’algorithme de Schwarz pour un cas linéaire 2D

Pour cette seconde itération, l’algorithme a déjà presque convergé puisque l’erreur constatée est de  $4 \times 10^{-2} \text{°C}$  pour la température et de  $0.2 \text{ W.m}^{-2}$  pour le flux de chaleur. Après quatre itérations, l’erreur est de  $2 \times 10^{-9} \text{°C}$  pour la température et de  $110^{-5} \text{ W.m}^{-2}$  pour le flux, ce qui est bien en deçà de la précision requise en pratique, on peut donc

considérer que l'algorithme a convergé.

En fait, on observe que la convergence est conditionnée par le pas de temps choisi. Cela s'explique par le fait que l'algorithme est initialisé avec le champ de température au pas de temps précédent (ici avec la condition initiale puisqu'on s'intéresse au premier pas de temps). Par conséquent, plus le pas de temps est petit, plus l'algorithme est initialisé proche de la solution et plus l'algorithme converge rapidement. Par exemple, si l'on considère un pas de temps de  $10^{10}$  s (ce qui formellement revient à résoudre le problème stationnaire) on observe qu'une soixantaine d'itérations sont nécessaires pour atteindre ces convergences.

Sur la figure ci-dessous, nous traçons les vitesses de convergence pour différents pas de temps. Afin de ne pas surcharger la figure, seules les normes infinies des températures sont tracées, mais le comportement des normes infinies des flux de chaleur est sensiblement le même.

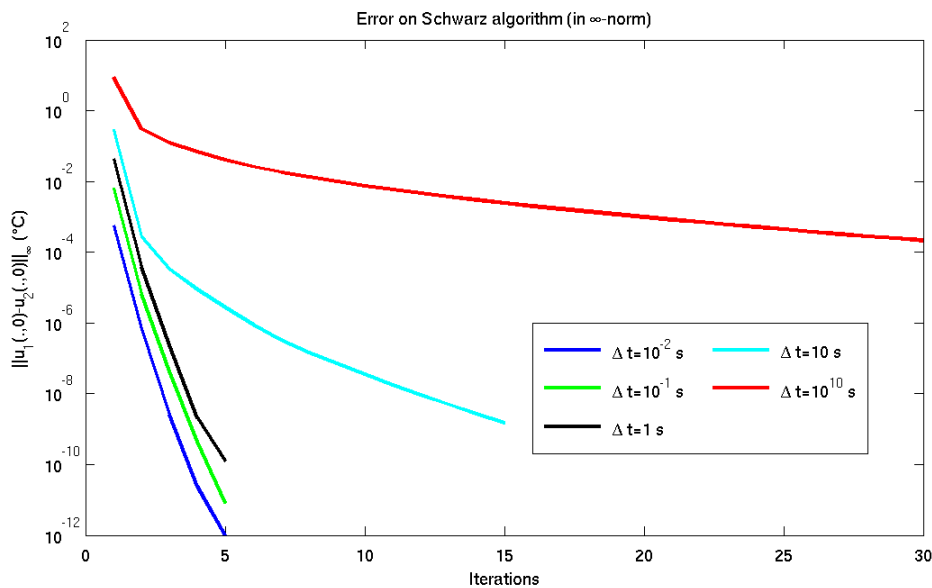


FIGURE 5.12 – Courbes de convergence de l'algorithme de Schwarz pour un cas linéaire 2D

On observe que pour les petits pas de temps, jusqu'à  $\Delta t = 1$  s, la convergence est très rapide. Pour les pas de temps supérieurs, cette convergence est plus lente et au vu des pentes observées, il semble qu'elle se fasse en deux temps. Dans un premier temps, jusqu'à environ 3 itérations, la vitesse de convergence est très rapide, ce qui suggère que le fait d'avoir pris des coefficients de couplage réglés sur des problèmes unidimensionnels permet d'atteindre une bonne précision en seulement quelques itérations. Cela s'explique par le fait que dans ce problème, les flux de chaleurs dans la direction normale sont dominants. Ensuite, la vitesse de convergence devient moins importantes. Cela suggère qu'à partir du moment où une première convergence « grossière » a eu lieu, les effets bidimensionnels du problème viennent freiner la vitesse de convergence. Une étude plus approfondie pourrait être menée pour déterminer dans quelles mesures il est possible d'améliorer cette vitesse de convergence, en modifiant les coefficients de couplage qui n'ont plus de raison d'être réglés sur les problèmes unidimensionnels.

### 5.3.2.3 Validation sur un problème non linéaire bidimensionnel

Le précédent cas de validation est modifié afin d'observer le comportement de l'algorithme pour des conditions aux limites non linéaires. Pour ce faire, la condition aux limites sur le bord supérieur de  $\Omega_2$  est modifiée afin de modéliser un phénomène d'évaporation. Cette condition aux limites s'écrit

$$-f_2(u_2, x) = h_2(x)(T_2 - u_1) - \dot{m}_{\text{ev}}(u_2, h_2(x))L_v$$

où  $\dot{m}_{\text{ev}}$  est le flux d'évaporation et  $L_v$  est la chaleur latente de la vapeur d'eau. Bien que celle-ci dépende de la température, on la fixe ici à  $2.257 \times 10^6 \text{ W.kg}^{-1}$  pour ce test numérique. Quant au flux d'évaporation, il est calculé grâce à l'analogie de Chilton-Corburn (voir par exemple le paragraphe 5.2.2.4) en considérant que l'air à l'infini à l'extérieur de la couche limite est sec, ce qui permet de maximiser ce flux et donc de rendre le problème « davantage non linéaire ».

Les deux problèmes sont sensiblement différents, puisque le fait qu'il y ait une condition d'évaporation sur le bord supérieur a tendance à refroidir davantage le système. Néanmoins, les vitesses de convergence constatées sont quasiment identiques. Cela s'explique par le fait que, comme montré dans le paragraphe 5.2.2.4), le fait d'imposer des conditions aux limites non linéaires n'empêche pas une convergence très rapide de l'algorithme. Ce qui conditionne davantage cette convergence est le caractère bidimensionnel du problème, comme on peut l'observer dans le paragraphe précédent. Cela s'explique par le fait que les coefficients de couplage sont construits pour des problèmes unidimensionnels.



# Chapitre 6

## Applications en deux dimensions

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Présentation du code SLUSH2D et du module de couplage</b>	<b>149</b>
6.1.1	Module SLUSH2D	150
6.1.2	Module de couplage SCHWARZ	153
<b>6.2</b>	<b>Cas d'accrétion sur paroi froide</b>	<b>154</b>
6.2.1	Validation du modèle tricouche à l'aide du modèle de Messinger et de données expérimentales	154
6.2.2	Investigations numériques de l'influence de la conduction dans la paroi sur la forme du dépôt de givre	157
<b>6.3</b>	<b>Accrétion sur paroi chauffée</b>	<b>164</b>
6.3.1	Modélisation de l'écoulement d'un film d'eau liquide sur une aile chauffée	164
6.3.2	Simulation d'un système d'antigivrage <i>bleed-air</i> et comparaisons expérimentales	165
6.3.3	Simulation de regel sur une paroi chauffée ( <i>runback ice</i> )	169
<b>6.4</b>	<b>Modélisation d'un dégivreur électrothermique</b>	<b>173</b>
6.4.1	Modélisation et validation de la propagation d'un front de fusion	173
6.4.2	Modélisation complète d'un dégivreur électrothermique	176

---

### 6.1 Présentation du code SLUSH2D et du module de couplage

Dans le cadre de cette thèse, un code baptisé *SLUSH2D* (*Several Layers Upon Some Heaters*) a été développé afin d'implanter le modèle tricouche. Il est écrit en Fortran 90<sup>1</sup>, se décompose en 22 fichiers et contient 7 500 lignes effectives de code. Dans la chaîne de calcul de givrage de l'ONERA IGLOO2D, il est lancé après les modules AERO2D (permettant de calculer les champs externes), TRAJ2D (permettant de calculer la trajectoire des gouttelettes) et MIS2D (permettant de calculer le coefficient de frottement et les flux de masse et de chaleur). Il est par ailleurs interfacé avec CLICET [7], code de couche limite, qui permet un calcul précis du coefficient d'échange et de la température de récupération lorsque la paroi est chauffée, ainsi que *Mechanical Ice* [14], code permettant de prévoir le détachement d'un bloc de givre soumis à des forces aérodynamiques. De plus, SLUSH2D est fortement couplé au module modélisant le système de protection thermique *ETIPS* [14] grâce au

---

1. <http://www.fortran90.org/>

module de couplage *SCHWARZ* dans lequel est implémentée la méthode de Schwarz. Ce module de couplage, également développé au cours de cette thèse, est écrit en Fortran 90 et contient environ mille lignes de code.

Enfin, comme la formation d'un bloc de givre et son éventuel détachement a un effet sur l'écoulement externe, un module permet de relancer AERO2D, TRAJ2D et MIS2D (ou CLICET). La chaîne IGLOO2D peut donc se schématiser ainsi :

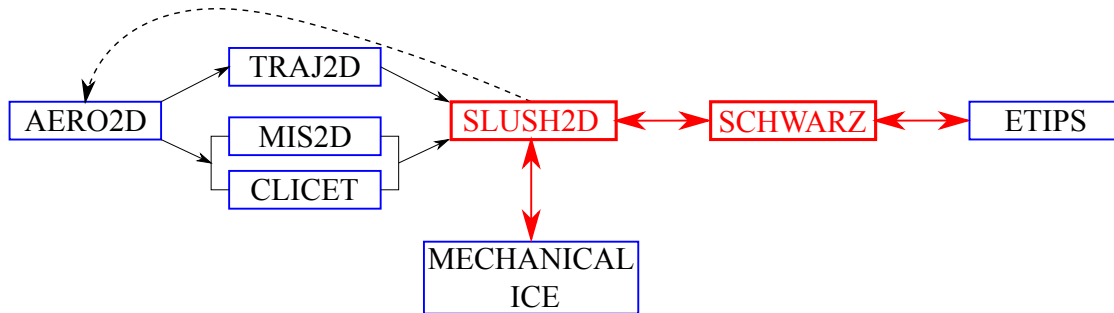


FIGURE 6.1 – Représentation schématique du code IGLOO2D. Ce qui en rouge constitue le travail de cette thèse.

### 6.1.1 Module SLUSH2D

#### 6.1.1.1 Fichiers d'entrée/sortie

Dans le cas bidimensionnel, le maillage associé à la discrétisation du modèle tricouche est linéique. De plus, nous considérerons qu'il coïncide avec la « peau » du maillage du système de protection thermique. Cela permet de s'affranchir des problèmes d'interpolation entre deux maillages non coïncidents. En effet, dans ce cas, on faudrait effectuer des interpolations à chaque itération de l'algorithme de Schwarz, ce qui pourrait engendrer des difficultés de convergence de celui-ci. Nous n'avons pas abordé cette problématique dans le cadre de cette thèse.

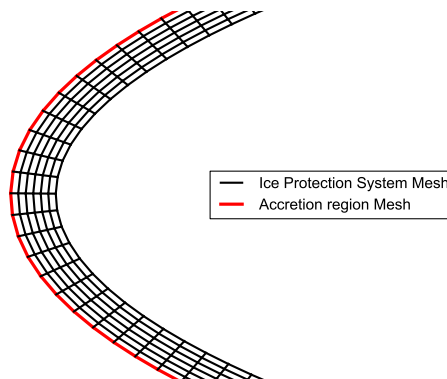


FIGURE 6.2 – Exemple de maillage du solveur d'accrétion généré depuis le maillage du système de protection thermique

Le maillage linéique est généré automatiquement à l'exécution du code. Par ailleurs, le fichier d'entrée de la chaîne IGLOO2D est utilisé afin de lire les paramètres physiques et numériques. Enfin, les grandeurs externes (température, pression, taux d'impact de gouttes,



etc.) à la paroi, qui ont été calculées avec la chaîne IGLOO2D, sont lues et interpolées linéairement sur le maillage linéique.

Un fichier de sortie au format *Tecplot*, dans lequel figure l'évolution des différentes épaisseurs et températures au cours du temps, est généré à l'exécution du code.

### 6.1.1.2 Structure de données

La structure de données du module comprend essentiellement une liste d'arêtes. À chaque arête sont associées les informations nécessaires pour discrétiser le modèle tricouche. Les principales variables, pour chacune des arêtes sont :

- Les coordonnées des deux points formant l'arête ainsi que l'abscisse curviligne du centre de l'arête.
- Les données externes au centre de l'arête : grandeurs Euler (vitesse, pression, température et humidité à l'extérieur de la couche limite), grandeurs de la couche limite (force de cisaillement, coefficient d'échange thermique, température de récupération) et caractéristiques d'impact des gouttes (taux d'impact, températures, vitesses).
- Les données de couplage au centre de l'arête : un coefficient d'échange numérique, une température de référence et un flux de chaleur de référence
- Le régime dans lequel se trouve l'arête à l'instant courant (voir section 2.6) : *full evaporative*, *running wet*, *rime*, *glaze*, *rime + static film* ou *glaze + static film*
- Les variables nécessaires à la représentation de chacune des couches. Par exemple, si on utilise la méthode de Galerkin pour intégrer l'équation de la chaleur, ces variables sont
  - Couche de givre : la hauteur de givre  $h_i$  et les nombres  $\theta_j$  permettant de représenter la température dans la direction normale (voir l'équation (3.32)).
  - Film statique : la hauteur du film  $h_s$  et les nombres  $\theta_j$  permettant de représenter la température dans la direction normale (voir l'équation (3.32)).
  - Film ruisselant : la hauteur du film  $h_f$  et la température moyenne  $\widehat{T}_f$ .

### 6.1.1.3 Architecture du code

Le module d'accrétion résout un pas de temps du modèle tricouche discrétisé avec le schéma d'Euler implicite. Pour ce faire, on utilise un algorithme itératif de point fixe (voir section 4.2), et à chaque itération de cet algorithme, on résout un problème local sur chacune des cellules du maillage. Pour chacun de ces problèmes locaux, l'équation à résoudre n'est pas connue d'avance puisqu'il peut y avoir des transitions entre différents régimes d'accrétion (se référer par exemple à la section 2.6). Pour chacun de ces régimes, l'équation continue à résoudre peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial t} + \mathbf{F}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{v_1}, \dots, \mathbf{U}_{V_k}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}_k) \quad (6.1)$$

où l'inconnue est  $\mathbf{U}_k$ .  $\mathbf{A}$  est une matrice, et  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{S}$  sont des fonctions non linéaires. Le lecteur peut se référer à la section 4.2 pour plus de détails.

Par conséquent, l'équation discrétisée en temps avec un schéma d'Euler implicite s'écrit

$$\mathbf{A} \frac{\mathbf{U}_k^{n+1} - \mathbf{U}_k^n}{\Delta t} + \mathbf{F}(\mathbf{U}_k^{n+1}, \mathbf{U}_{v_1}, \dots, \mathbf{U}_{V_k}) - \mathbf{S}(\mathbf{U}_k^{n+1}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{G}(\mathbf{U}_k^{n+1}) = 0 \quad (6.2)$$

où l'inconnue est  $\mathbf{U}_k^{n+1}$ . Cette équation est résolue grâce à une méthode de Newton. Par conséquent, une procédure implémentant cette méthode est présente dans le code. Cette

procédure est abstraite, au sens où elle prend en argument d'entrée une procédure Fortran dans laquelle doit être codé le calcul d'une fonction mathématique  $\mathbf{G}$  ainsi que sa jacobienne (requis pour la méthode de Newton).

En pratique, il existe une fonction  $\mathbf{G}$  pour chacun des six régimes d'accrétion. Par conséquent, il y a une procédure Fortran pour chacun de ces régimes, dans laquelle est implémenté le calcul de  $\mathbf{G}$  et de sa jacobienne. Selon le régime d'accrétion considéré pour une cellule, l'une de ces six procédures est donnée comme paramètre d'entrée à la procédure implémentant la méthode de Newton.

Pour résumer, l'organigramme du code SLUSH2D peut se schématiser ainsi :

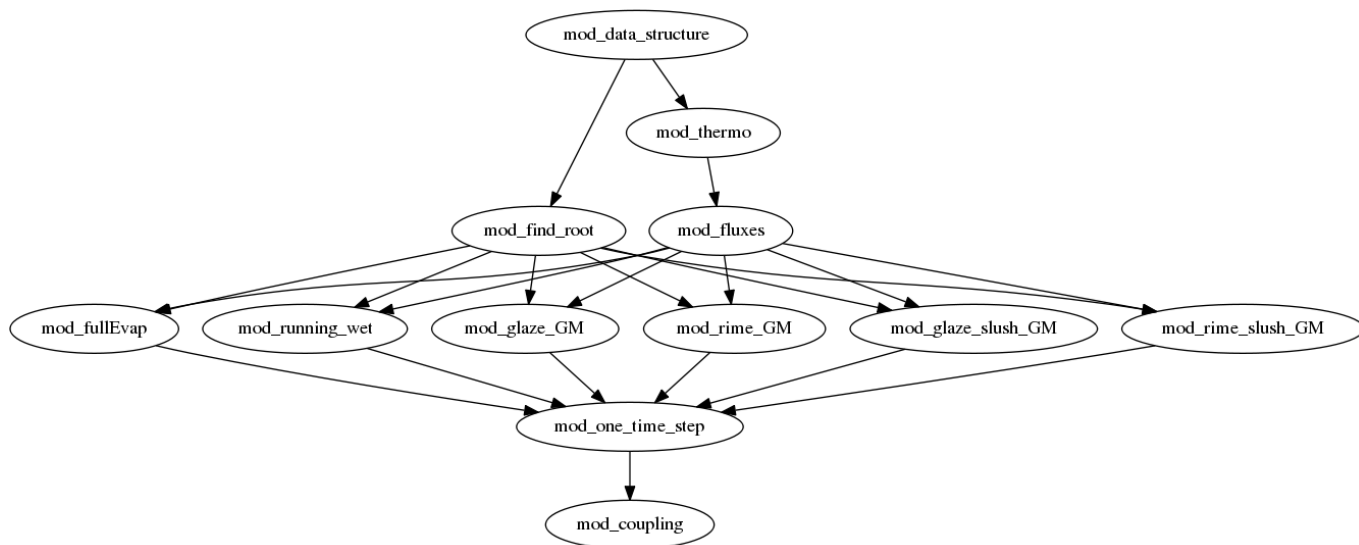


FIGURE 6.3 – Organigramme schématique du code SLUSH2D.

Dans cet organigramme, nous n'avons mis que les principaux modules qui peuvent être succinctement décrits comme suit :

- Le module *data\_structure* contient la structure de données décrite au paragraphe précédent.
- Dans la module *thermo*, on trouve les grandeurs thermodynamiques nécessaires au code d'accrétion, ainsi que l'implémentation de l'analogie de Chilton-Colburn qui permet de calculer le flux de masse évaporée (en fonction des grandeurs externes et de la température de surface).
- Dans le module *fluxes*, on trouve la procédure permettant de calculer les flux convectifs de masse et d'énergie du film ruisselant.
- Le module *find\_root* permet de trouver la racine d'une fonction non linéaire (donnée en paramètre avec sa jacobienne) de dimension quelconque en utilisant la méthode de Newton.
- Les six modules suivants permettent de calculer une itération en temps pour un volume particulier, connaissant son régime d'accrétion. Dans chacun de ces modules, on écrit la fonction (généralement non linéaire, excepté pour le régime *full evaporative*) qu'il faut annuler pour calculer cette avance en temps, ainsi que la jacobienne de cette fonction. Le module *fluxes* est utilisé afin de calculer les flux convectifs du film ruisselant qui interviennent dans ces fonctions.

- Le module *one\_time\_step* permet de calculer une itération en temps de l'ensemble du modèle tricouche discret. Pour ce faire, l'algorithme de point fixe exposé dans la section 4.2 y est implémenté.
- Le module *coupling* permet le couplage avec ETIPS. En particulier, il permet de remplir la structure de donnée contenant la température et le flux de chaleur à l'interface avec la paroi, nécessaires pour l'algorithme de Schwarz.

### 6.1.2 Module de couplage SCHWARZ

Dans ce module, la boucle en temps du programme principal est implémentée.

Pour chacune de ces boucles en temps, le programme fait appel à une procédure dans laquelle est implémentée la méthode de Schwarz permettant de coupler le système de protection thermique et le modèle tricouche d'accrétion. Pour ce faire, il contient une structure de données dédiée au couplage :

- Les températures à l'interface entre le système de protection et la zone d'accrétion. On définit une température d'interface du côté du système de protection, et une autre du côté de la zone d'accrétion. Lorsque l'algorithme a convergé, ces températures sont très proches.
- De même, les flux de chaleur à l'interface pour chacun des deux domaines sont définis.
- Les coefficients de couplage entre les deux solveurs.

À chaque itération de l'algorithme de Schwarz, le solveur du système de protection est lancé avec les conditions de couplage déterminées dans le chapitre 5, ce qui permet de déduire un flux de chaleur et une température d'interface côté système de protection. Ces deux grandeurs sont utilisées comme conditions aux limites pour lancer le solveur du modèle tricouche, ce qui permet d'avoir une température et un flux d'interface côté zone d'accrétion utilisé pour les conditions aux limites du solveur du système de protection. À chaque itération, comme la topologie de la zone d'accrétion évolue (hauteurs de chacune des couches), les coefficients de couplage utilisés pour le solveur de thermique sont recalculés.

## 6.2 Cas d'accrétion sur paroi froide

### 6.2.1 Validation du modèle tricouche à l'aide du modèle de Messinger et de données expérimentales

Le but de ce paragraphe est de montrer l'état de l'art pour la simulation numérique de l'accrétion sur paroi non chauffée en 2D et de comparer avec le modèle tricouche. Comme expliqué dans le chapitre 1 de ce document, la plupart des modèles d'accrétion sur paroi non chauffée sont basés sur le modèle de Messinger. Ce modèle, consistant en un bilan de masse et d'énergie, présente les caractéristiques d'être stationnaire et de ne pas modéliser les transferts de chaleur dans la glace. Dans sa forme la plus simple, la paroi est supposée adiabatique. Par conséquent, les processus d'extraction de chaleur nécessaires à la formation de la glace sont pilotés par les échanges convectifs avec l'écoulement externe et par l'évaporation. Dans la chaîne IGLOO2D, ce modèle est implémenté dans le module ACCRET2D, ce qui permet de le comparer aisément avec le modèle tricouche.

#### 6.2.1.1 Accrétion en givre blanc

L'objectif de ce paragraphe est de simuler une expérience faite en 1995 au *NASA Lewis Research Center* (USA). C'est une expérience en givre blanc seulement, c'est-à-dire avec des conditions qui sont telles que l'intégralité des gouttes qui se déposent gèlent immédiatement. Pour cet essai, le profil considéré est un GLC-305 (donné en annexe H au format SVG à toutes fins utiles). Toutes les caractéristiques du calcul sont résumées dans la table suivante :

Profil	GLC-305
Corde (m)	0.9144
Angle d'attaque (°)	6
$M_\infty$	0.279
$T_\infty$ (°C)	-14.950
$P_\infty$ (Pa)	101325
$LWC$ (g.m <sup>-3</sup> )	0.405
$MVD$ (μm)	20
Temps d'accrétion (s)	1002

TABLE 6.1 – Données du problème d'accrétion (cas *rime* GCL305/212)

L'aérodynamique externe, la trajectographie ainsi que le coefficient d'échange thermique sont calculés avec les modules dédiés de IGLOO2D. Comme on effectue un calcul d'accrétion, il y a du givre sur la paroi qui peut être vu comme une paroi rugueuse. La formation des rugosités est un phénomène encore mal compris à ce jour et leur modélisation est donc complexe. Dans les applications en givrage, l'usage est de ramener ces rugosités à une hauteur *équivalent grain de sable* égale à un millième de la corde, dans la limite de certains seuils (voir le chapitre 1 et les références associées). Cette valeur, qui à notre connaissance n'a pas d'explication physique, est utilisée dans la plupart des codes de calcul car l'expérience numérique montre qu'elle permet d'obtenir des résultats satisfaisants. Notons cependant que dans le cas présent, où il n'y pas de ruissellement, ces rugosités n'ont que peu d'importance car les transferts thermiques ont un effet sur la température du bloc mais quasiment pas sur sa forme, qui est ce qui nous intéresse *in fine*.

Dans un premier temps, le calcul est effectué grâce à ACCRET2D, le module de l'ONERA dans lequel est implémenté le modèle de Messinger. Ce calcul s'effectue en mode *predictor-corrector*. Le principe de cette approche est de calculer dans un premier temps une forme de givre en supposant que toutes les grandeurs externes n'évoluent pas au cours du temps, malgré la formation du bloc de givre (*predictor step*). Dans un second temps, ces grandeurs externes sont recalculées sur le profil obtenu à la fin de la phase *predictor step*, et on réalise finalement le calcul d'accrétion en interpolant linéairement par rapport au temps ces grandeurs (*corrector step*). Cette approche est classique dans les codes de calcul d'accrétion sur paroi non chauffée car elle permet en général d'obtenir de bons résultats.

Pour le calcul avec le module SLUSH2D (modèle tricouche), l'approche *predictor-corrector* est également utilisée, et une condition aux limites de flux de chaleur nul en paroi est imposée de manière à se rapprocher le plus possible des hypothèses du modèle de Messinger.

Les résultats obtenus sont affichés sur la figure 6.4.

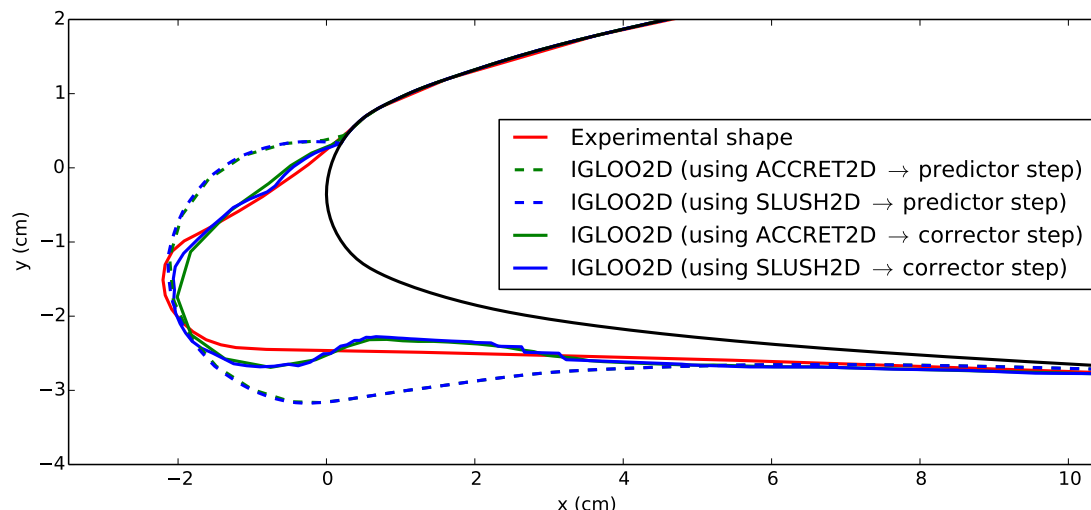


FIGURE 6.4 – Cas d'accrétion GLC-305/212. Formes expérimentales et calculées avec le modèle de Messinger et le modèle tricouche

On observe que les deux codes donnent des résultats très semblables, ce qui s'explique par le fait que les modèles sont équivalents dans ces conditions particulières (sans ruissellement ni échange avec la paroi). De plus, on note que la forme de givre est largement surestimée lors de la phase *predictor step*. Cela s'explique par le fait que la présence d'un bloc de givre sur la paroi a tendance à dévier davantage l'écoulement, et donc d'entraîner une moindre captation. Or, ce phénomène n'est pas pris en compte dans cette phase.

De façon plus générale, on peut dire que, pour des conditions de type givre blanc, le modèle de Messinger, et donc le modèle tricouche, permettent dans l'immense majorité des cas de reproduire les formes de givre expérimentales. Cela s'explique par le fait que dans ce cas, les gouttes gèlent sur place, et par conséquent le problème se résume en fait à calculer la trajectoire des gouttelettes qui peuvent être considérées sphériques, ce qui est un problème bien maîtrisé depuis de nombreuses années.

### 6.2.1.2 Accrétion en givre transparent

L'objectif de ce paragraphe est de présenter un cas d'accrétion sur une paroi non chauffée dans lequel il y a du ruissellement au-dessus du bloc de givre. Pour ce faire, on considère un essai issu de la même campagne que le précédent. Il s'agit du même profil, mais les conditions extérieures, synthétisées dans la table 6.2, sont différentes (propices à la formation d'un film ruisselant).

Profil	GLC-305
Corde (m)	0.9144
Angle d'attaque ( $^{\circ}$ )	1.5
$M_{\infty}$	0.395
$T_{\infty}$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	-10
$P_{\infty}$ (Pa)	101325
$LWC$ ( $\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ )	0.54
$MVD$ ( $\mu\text{m}$ )	20
Temps d'accrétion (s)	360

TABLE 6.2 – Données du problème d'accrétion (cas *rime* GCL305/224)

A l'issue de la phase de prévision (*predictor step*), les formes de givre obtenues avec ACCRET2D et SLUSH2D sont affichées sur la figure 6.5 :

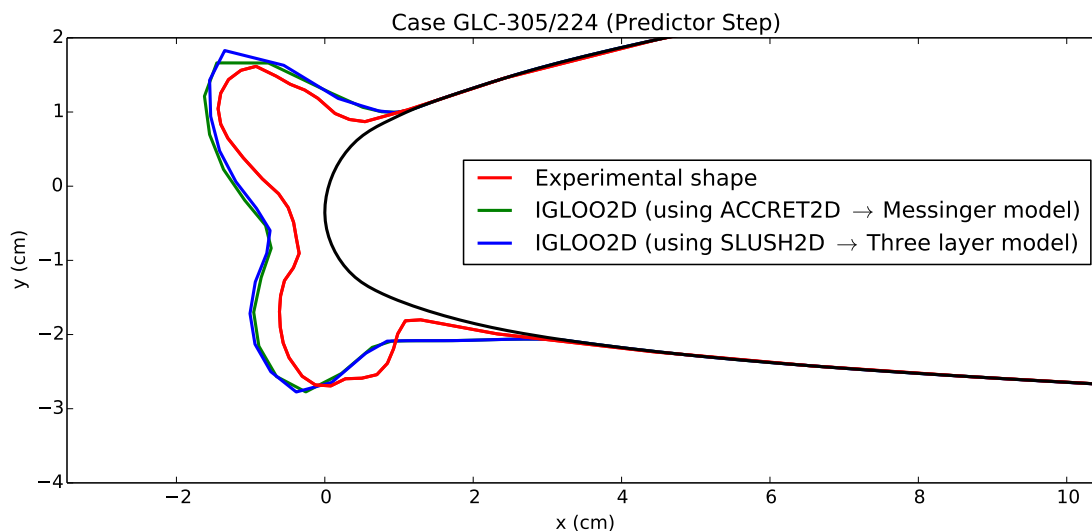


FIGURE 6.5 – Cas d'accrétion GLC-305/224. Formes expérimentales et calculées avec le modèle de Messinger et le modèle tricouche à l'issue de la phase *predictor step*

On observe que les formes de givre obtenues avec les deux codes sont très proches, ce qui confirme que le modèle tricouche donne des résultats similaires au modèle de Messinger dans le cas de l'accrétion sur une paroi adiabatique. Comme pour le cas précédent, les formes de givre calculées dans cette première phase sont surestimées.

Pour la phase de correction (*corrector step*), les formes de givre obtenues sont affichées sur la figure 6.6 :

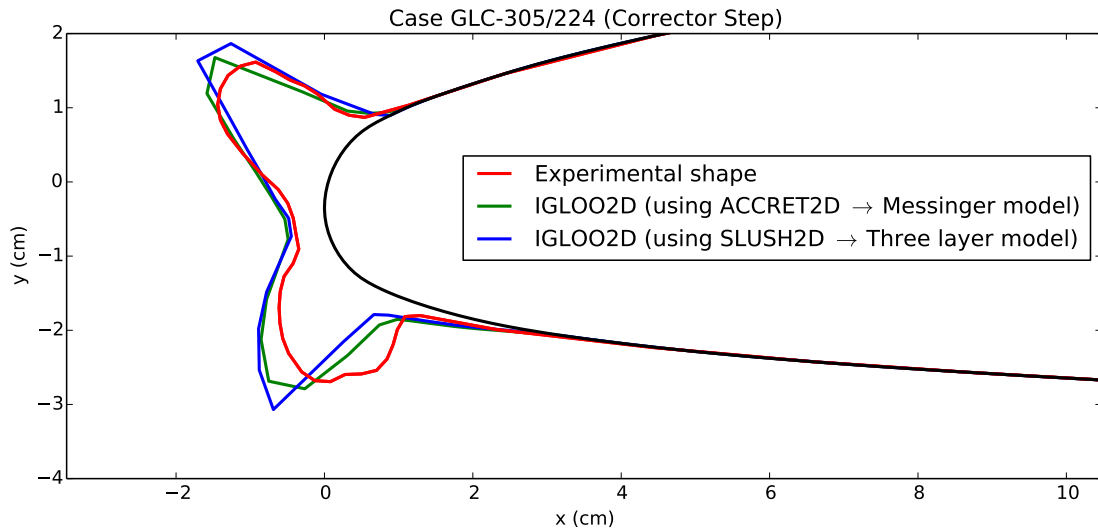


FIGURE 6.6 – Cas d'accrétion GLC-305/224. Formes expérimentales et calculées avec le modèle de Messinger et le modèle tricouche à l'issue de la phase *corrector step* (forme finale)

On observe que la procédure *predictor-corrector* permet de significativement améliorer les résultats par rapport à l'expérience.

Il faut noter néanmoins que le cas présenté ici peut-être considéré comme plutôt « favorable ». En effet, dans certains cas d'accrétion sur paroi froide, et en particulier lorsque le ruissellement est très important, et que les cornes sont plus accentuées, les modèles actuels ne permettent pas de retrouver les formes expérimentales avec une bonne précision. Cela s'explique essentiellement par le fait qu'il est très difficile de calculer précisément le coefficient d'échange thermique sur ces formes, alors que ce coefficient est fondamental puisqu'il pilote les transferts de chaleur (via les échanges convectifs et l'évaporation) et donc les taux de solidification dans la zone de ruissellement. Contrairement aux cas d'accrétion de givre blanc, le problème n'est donc pas résumé au calcul de la trajectoire des gouttes, ce qui augmente considérablement sa complexité.

Il faut aussi noter qu'il y a des incertitudes sur les données expérimentales, car les conditions peuvent être difficiles à maîtriser. En particulier, il est compliqué de connaître la teneur en eau exacte (LWC) dans la soufflerie et l'ensemencement de l'écoulement n'est jamais parfaitement uniforme. De plus la forme du dépôt de givre est obtenue à partir d'un relevé manuel. Par conséquent, tous les commentaires effectués quant à la précision du modèle de Messinger et du modèle tricouche doivent être regardés à la lumière de ces incertitudes expérimentales.

### 6.2.2 Investigations numériques de l'influence de la conduction dans la paroi sur la forme du dépôt de givre

Dans le modèle de Messinger, il est supposé que le bloc de givre est suffisamment isolant pour pouvoir négliger les échanges de chaleur provenant de la paroi. Cette hypothèse est probablement justifiée lorsque le bloc de givre est épais, mais est très certainement fautive au tout début de l'accrétion, lorsque la couche de givre est très fine, car initialement la paroi est à la température de récupération. Par conséquent, lorsqu'il y a du ruissellement, il est surestimé près du point d'arrêt et le taux de croissance de glace est sous-estimé.

L'objectif de ce paragraphe est de présenter des cas test permettant de comparer le modèle de Messinger et le modèle tricouche couplé à la résolution des équations de thermique dans la paroi. Ainsi, nous pourrions mettre en évidence l'influence de la conduction normale et de la conduction tangentielle sur la forme du dépôt de givre.

Pour ce faire, on considère un profil NACA0012 en aluminium, de corde  $c$  ( $=0.5334$  m). On considère que le profil est recouvert d'une tôle métallique d'épaisseur  $e$ , qui sera modélisée grâce au module ETIPS développé par L. Bennani [13]. Cette épaisseur sera variable car on souhaite montrer son influence sur la forme du dépôt. Les données du cas test sont présentées dans la table suivante :

Profil	NACA0012
Corde (m)	0.5334
Angle d'attaque ( $^{\circ}$ )	4
$M_{\infty}$	0.317
$T_{\infty}$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	-10.85
$P_{\infty}$ (Pa)	101325
$LWC$ ( $\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ )	0.55
$MVD$ ( $\mu\text{m}$ )	20
$e$ (mm)	$\in\{0,1,2,6\}$

TABLE 6.3 – Données du problème d'accrétion sur paroi non chauffée

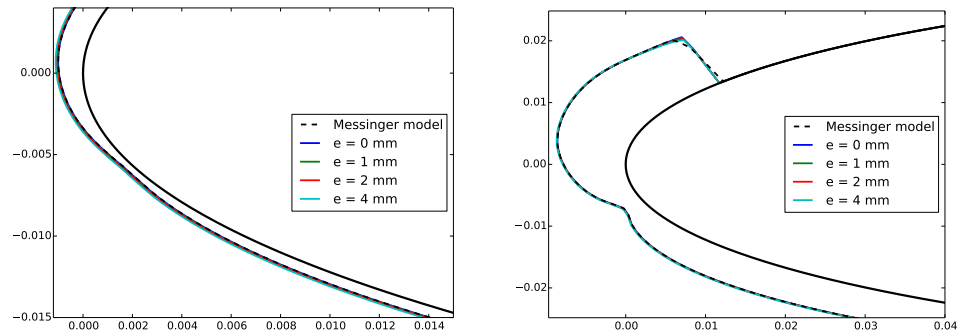
Le cas avec  $e = 0$  signifie par convention que l'on considère que la paroi est adiabatique (en pratique dans le code, il n'y a pas de couplage avec le code ETIPS et on applique une condition de flux de chaleur nul). Le modèle tricouche est alors quasiment identique au modèle de Messinger ; la seule différence est que contrairement à ce modèle, il n'y a pas d'hypothèse de stationnarité. Par conséquent, le film liquide qui ruisselle avant de geler en aval sur le profil met un certain temps à s'établir, alors que dans le modèle de Messinger, on suppose que cet établissement est instantané.

Pour la couche métallique, on impose à l'interface inférieure une condition de flux de chaleur nul.

### 6.2.2.1 Prise en compte de la conduction normale uniquement

Lorsque l'on considère uniquement la composante normale de la conduction de la chaleur dans le bloc de givre, on obtient les formes de givre suivantes :





(a) 50 secondes d'accrétion (zoom sur le point d'arrêt)

(b) 400 secondes d'accrétion

FIGURE 6.7 – Formes de givre obtenues en considérant les flux de chaleur normaux uniquement

Sur ces figures, on observe que l'influence de la conduction normale dans la paroi est presque nulle. Pour affiner l'analyse, on a tracé la hauteur de givre pour différents temps d'accrétion sur la figure 6.8.

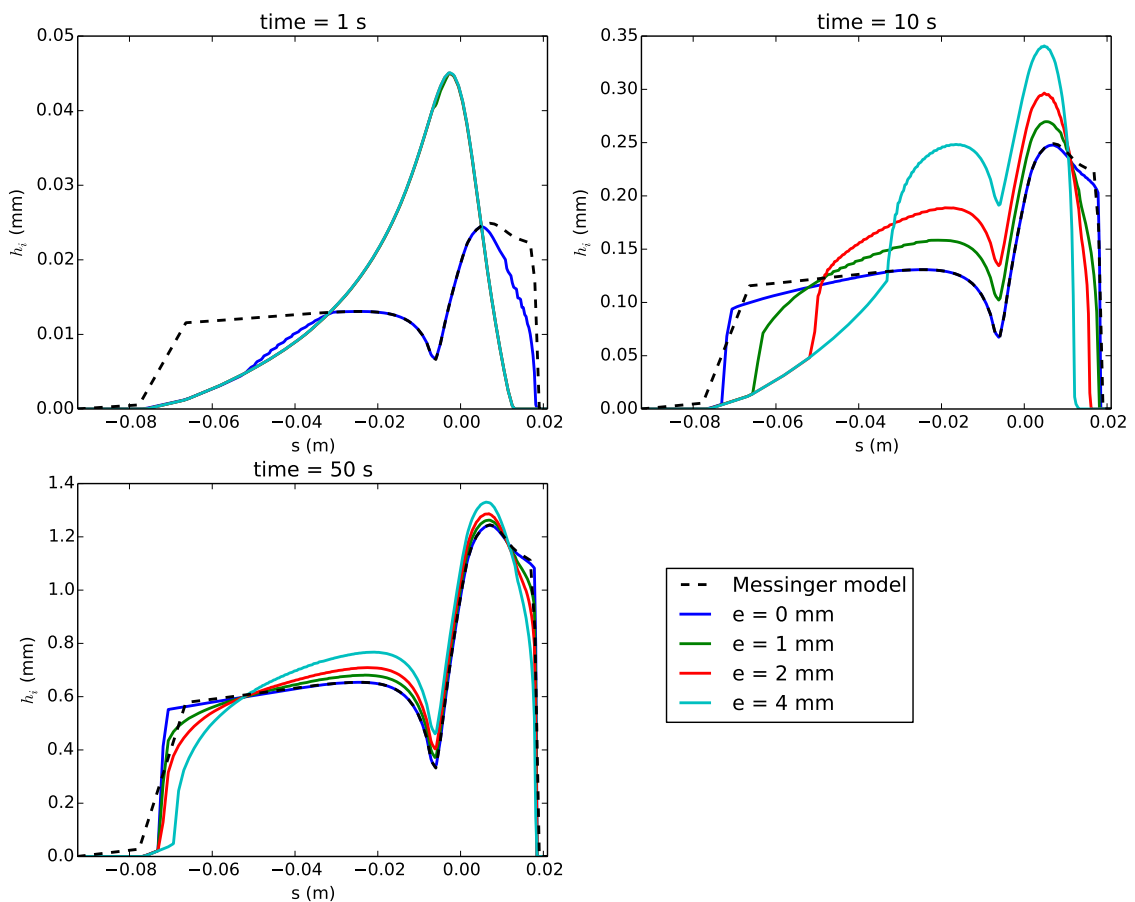


FIGURE 6.8 – Hauteurs de givre pour trois temps d'accrétion

On observe qu'après une seconde d'accrétion, le modèle de Messenger et le modèle

tricouche sans conduction dans la paroi ( $e=0$  mm) sont presque équivalents. Dans les deux cas, on observe la formation d'un film liquide (ce qui explique la forme « creusée » au niveau du point d'arrêt). Le modèle de Messinger prévoit un bloc de givre sur une zone plus étendue, ce qui s'explique par le fait que ce modèle néglige le temps d'établissement du film ruisselant gelant en aval. En revanche, lorsqu'il y a de la conduction dans la paroi, le bloc est beaucoup plus important au niveau du point d'arrêt car la chaleur latente en excès des gouttes est extraite par la paroi ; il n'y a donc pas de film d'eau liquide qui se forme.

Après 10 secondes d'accrétion, on observe que pour chacune des épaisseurs, un film d'eau s'est formé au niveau du point d'arrêt, ce qui signifie que la paroi n'est plus en mesure d'absorber l'intégralité de la chaleur latente. Après 50 secondes, ce phénomène est encore plus marqué et au niveau du point d'arrêt, les hauteurs de givre sont quasiment toutes identiques, et l'état stationnaire est donc presque atteint pour tous les cas. On peut donc conclure que pour ce cas test, la conduction normale dans la paroi a un effet non négligeable uniquement sur les temps d'accrétion très courts.

Ce phénomène s'explique en s'intéressant à la température du bloc de givre et de la paroi. Sur la figure 6.9 sont tracées les températures des interfaces inférieure (c'est-à-dire en contact avec la paroi) et supérieure (en contact avec l'air ou le film liquide ruisselant au-dessus) pour les mêmes temps d'accrétion.

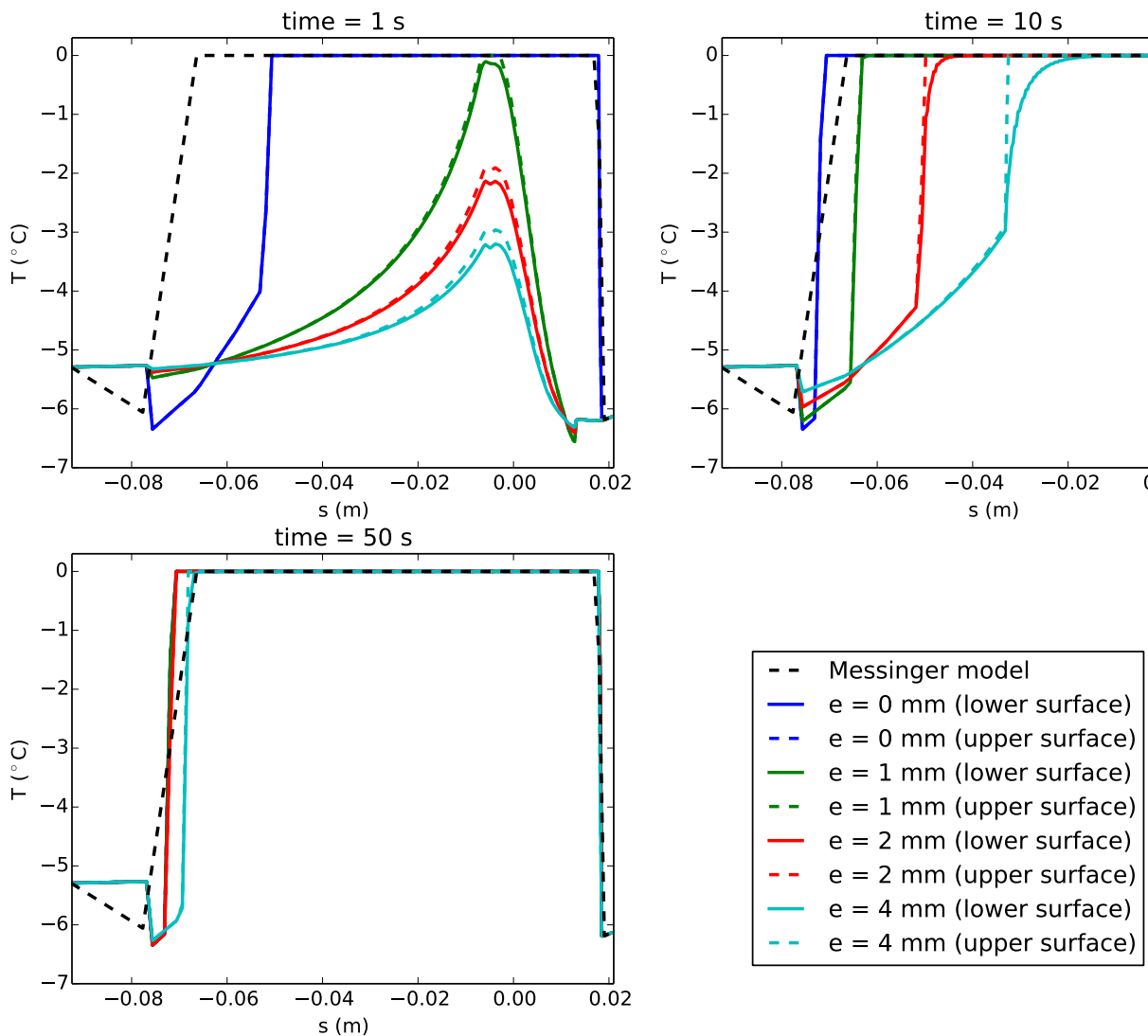


FIGURE 6.9 – Température du givre pour trois temps d'accrétion

Dès le début de l'accrétion (1 seconde), le modèle de Messenger et le modèle sans conduction à la paroi prévoient que le givre est à la température de fusion.

En revanche, lorsqu'il y a de la conduction, la température est négative car le bloc est refroidi par la paroi. On remarque qu'après 10 secondes d'accrétion, toutes les températures proches du point d'arrêt sont nulles. Cela signifie que la paroi s'est réchauffée à cause de la chaleur latente libérée et qu'elle a atteint la température de fusion de la glace. Par conséquent, la chaleur latente ne peut plus être extraite par la paroi qui devient donc adiabatique. Mis à part les effets instationnaires de l'établissement du film, on se retrouve donc dans les hypothèses de modèle de Messenger. Au bout de 50 secondes, cet effet est très marqué puisque le bloc de givre est presque partout à la température de fusion. Rappelons qu'à l'interface inférieure de la couche métallique, on considère que le flux de chaleur est nul. Si on avait effectué une autre hypothèse (par exemple que la chaleur pouvait être évacuée par cette interface), les conclusions auraient été différentes.

### 6.2.2.2 Prise en compte de la conduction dans les directions normale et tangentielle

On peut refaire cette étude en considérant cette fois que la paroi conduit dans les deux directions. Dans ce cas, on obtient les formes de givre suivantes :

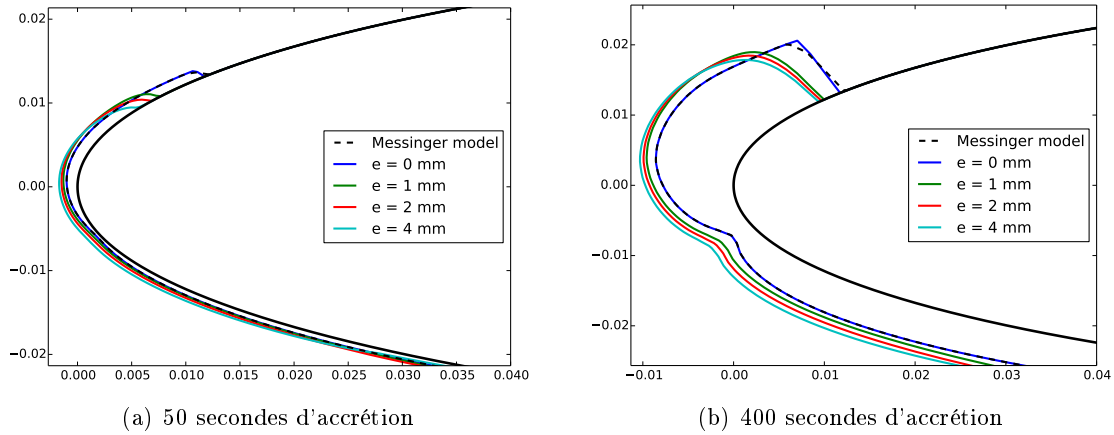


FIGURE 6.10 – Formes de givre obtenues en considérant les flux de chaleur dans toutes les directions

Contrairement à la diffusion normale seule, la diffusion tangentielle a un effet sur la forme finale du dépôt. En effet, pour la forme de givre obtenue après 400 secondes d'accrétion, il est clair que plus la paroi est épaisse et moins on a de ruissellement au niveau du point d'arrêt. Cela s'explique par le fait que contrairement au cas précédent, la température de paroi au point d'arrêt n'atteint jamais la température de fusion (comme on peut le voir sur la figure 6.11) car la chaleur latente des gouttelettes diffuse continuellement vers l'aval du profil, ce qui augmente le taux de solidification.

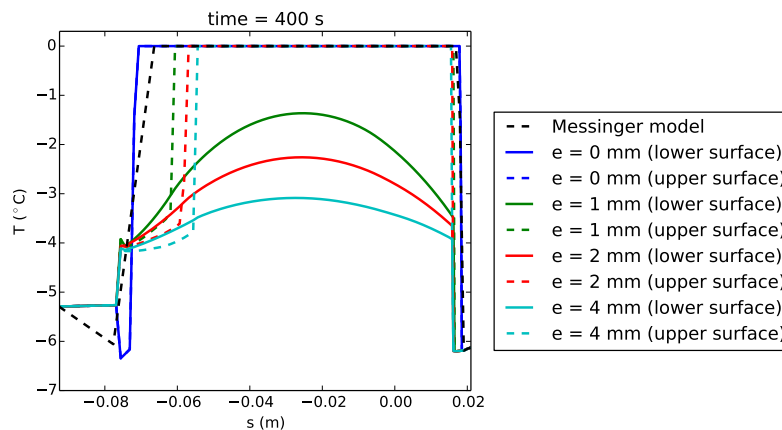


FIGURE 6.11 – Température du givre après 400 secondes d'accrétion

Il en résulte que l'eau ruisselante est présente en moindre quantité, et donc le bloc de givre s'étend moins loin que dans le cas du modèle de Messinger.

### Conclusion du cas test

Grâce à ce cas test, on a mis en évidence l'influence de la conduction de chaleur dans la paroi sur la forme de givre obtenue, en comparant le modèle tricouche avec le modèle de Messinger. L'effet de la conduction dans la direction normale se limite à des temps très courts d'accrétion. En revanche, la conduction tangentielle peut avoir un effet important sur la forme finale du dépôt de givre car elle permet d'augmenter fortement le taux de solidification au point d'arrêt en extrayant la chaleur latente des gouttelettes qui se déposent.

Dans ces cas test, il est important de relever que les calculs ont été faits en mode *predictor*, ce qui consiste à ne pas prendre en compte l'effet de la forme de givre sur l'évolution des grandeurs externes. Ces grandeurs étant stationnaires, on peut donc affirmer que les différences entre les formes de givre sont uniquement inhérentes à la conduction de chaleur dans la paroi.

Notons que la conduction dans la paroi a un effet uniquement parce que le modèle de Messinger prévoit du ruissellement. Dans un cas très froid où seul du givre blanc se dépose, les modèles de Messinger et tricouche sont presque équivalents. La seule légère différence est que la température prévue par le modèle tricouche est inférieure, ce qui a pour effet de diminuer très légèrement la sublimation et donc la hauteur de glace. Néanmoins, cette différence est négligeable par rapport aux erreurs de modélisation qui sont faites par ailleurs.

## 6.3 Accrétion sur paroi chauffée

### 6.3.1 Modélisation de l'écoulement d'un film d'eau liquide sur une aile chauffée

Ce paragraphe a pour objet de présenter un cas test dans lequel des gouttes impactent sur un profil NACA0012. L'atmosphère est suffisamment chaude pour qu'il ne puisse pas y avoir d'accrétion de glace sur la voilure. Ce cas test a en particulier pour objet de valider le module de film ruisselant, puisque des comparaisons seront effectuées avec un code résolvant le modèle de Saint-Venant à deux équations (module FILM de CEDRE, développé par C. Laurent [54]), qui permet dans une certaine mesure de modéliser les instabilités à la surface du film.

On considère un profil NACA0012 soumis à un écoulement externe chargé en gouttelettes d'eau. Les données du problème sont détaillées dans la table 6.4. La température de la paroi est imposée à  $T_p = 313$  K ( $= 39.85$  °C). Numériquement, comme la condition aux limites à la paroi dans SLUSH2D s'écrit sous la forme d'une condition de Fourier, on écrit la condition :

$$\dot{\Phi}_{\text{wall}} = h_{\text{wall}}(T_p - T) \quad (6.3)$$

avec  $h_{\text{wall}} = 10^9$  SI, ce qui en pratique, permet d'assurer la condition de Dirichlet au millième de Kelvin.

Profil	NACA0012
Corde (m)	1.00893
Angle d'attaque (°)	4
$M_\infty$	0.288
$T_\infty$ (K)	278
$P_\infty$ (Pa)	101325
$T_p$ (K)	313
$LWC$ ( $\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ )	1
$MVD$ ( $\mu\text{m}$ )	20

TABLE 6.4 – Données du problème film sur paroi chauffée

Dans la mesure où il n'y a pas de givre qui se forme sur le profil, que le film est modélisé grâce à un modèle de lubrification (ce qui, en particulier, implique qu'il n'y a pas d'instabilité qui peuvent s'y développer) et que les conditions aux limites sont stationnaires, la solution de l'équation doit tendre vers un état stationnaire caractérisé en tout point du profil, par une certaine valeur de l'épaisseur et de la température (qui dans le cas présent est imposée).

Afin de valider le code SLUSH2D et l'ensemble de la chaîne IGLOO2D, les résultats sont comparés avec le logiciel CEDRE. Pour la phase gazeuse, on utilise le solveur CHARME permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes pour un gaz compressible. Pour la trajectographie, on utilise SPIREE, solveur eulérien permettant de calculer les trajectoires de la phase dispersée. Enfin, pour l'établissement du film, le solveur FILM est utilisé. Contrairement à ce qui se fait classiquement en givrage, on n'utilise pas ici de code de couche limite. Les flux de chaleurs, les forces de cisaillement et les masses évaporées sont directement calculées grâce à un couplage entre CHARME et FILM. Par conséquent, cette simulation permet également de valider les modèles de couche limite et l'analogie de

Chilton-Colburn utilisée pour estimer les transferts massiques (voir l'état de l'art paragraphe 1.3.3).

Enfin, notons que dans le solveur de FILM sont utilisées les équations de Saint-Venant, qui correspondent à des équations intégrales sur la conservation de la masse et sur la quantité de mouvement (voir Ruyer-Quil *et al.* [73, 74] pour la théorie et Laurent [54] pour les équations implémentées et schémas numériques utilisés). En revanche, l'utilisation d'un modèle de lubrification suppose l'équilibre mécanique local du film ; par conséquent, il n'y a pas d'équation résolue sur la quantité de mouvement qui n'est supposée dépendre que de la hauteur du film et des conditions externes locales (cisaillement, gradient de pression). De plus, le modèle thermique implémenté dans FILM est un profil de température parabolique, qui est donc plus précis que SLUSH2D pour lequel il est supposé uniforme. Ainsi, ce cas test permettra de valider certaines des hypothèses utilisées pour la couche du film ruisselant du modèle tricouche.

Comme ce calcul est réalisé sur paroi chauffée (puisque celle-ci est supposée se trouver à  $39.85^\circ\text{C}$ ), on utilise le code de couche limite CLICET [7] qui est plus adapté pour le calcul des flux de chaleur et de d'évaporation.

Les résultats sont affichés sur la figure 6.12

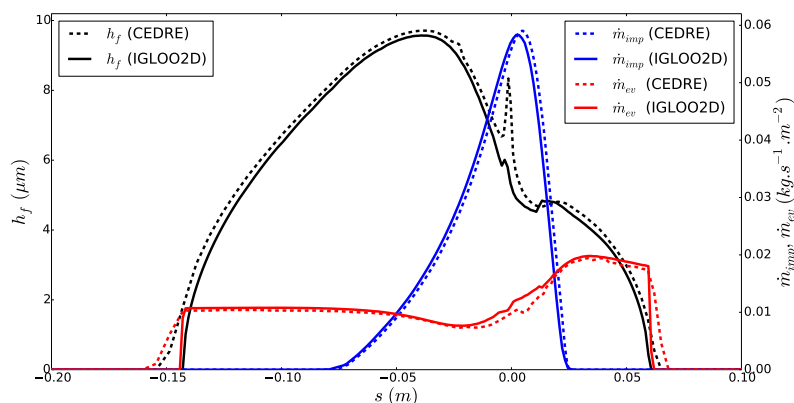


FIGURE 6.12 – État stationnaire d'un film liquide sur un profil NACA0012. Les courbes en pointillé correspondent aux résultats obtenus avec CEDRE et les courbes continues ceux obtenus avec IGLOO2D. L'échelle de gauche s'applique à la hauteur de film, et l'échelle de droite aux taux d'impact de gouttelettes et d'évaporation.

On observe un très bon accord des résultats, à l'exception d'un petit « pic » au niveau du point d'arrêt pour la hauteur de film prévue par CEDRE. Ce pic est présent dans une bien moindre mesure avec le code IGLOO2D, mais nous ne sommes en mesure d'expliquer précisément cette différence.

### 6.3.2 Simulation d'un système d'antigivrage *bleed-air* et comparaisons expérimentales

Des expériences sur un profil d'aile antigivré par un système *bleed-air* ont été menées par Lee *et al.* en septembre 2003 à l'*Icing Research Tunnel* de la NASA, puis synthétisées et simulées par Wright [98] en 2004. Le profil utilisé est un NACA23014 de corde 1.53 m. La couche métallique formant ce profil est épaisse de 3.175 mm et sa conductivité est égale à  $176.53\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Comme expliqué dans le paragraphe 1.3.5.1 (p. 38), on ne modélise pas le système de protection dans son ensemble, mais seulement à partir de la couche métallique. A l'interface inférieure de celle-ci, on applique une condition aux

limites thermique de type Fourier avec un coefficient d'échange non uniforme donné par une corrélation expérimentale. En raison de la géométrie du système de protection et en particulier de la position des trous par lequel l'air chaud provenant du tube piccolo est injecté dans la voilure (voir l'illustration 6.13), le problème est tridimensionnel.

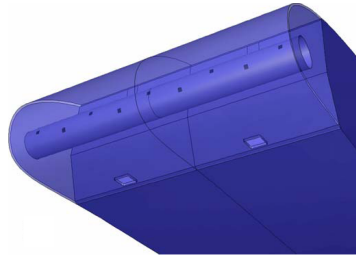


FIGURE 6.13 – Illustration 3D d'un système d'antigivrage par tube piccolo [44]

Néanmoins, Wright propose de simuler le problème sur des sections bidimensionnelles et de le comparer à des relevés expérimentaux de température sur la surface. Il considère trois sections, une située en face de deux jets, une en face d'un jet et la troisième entre deux jets. Une corrélation expérimentale lui permet de calculer le coefficient d'échange interne pour chacune de ces sections. Les courbes correspondantes sont tracées sur la figure 6.14 en fonction de l'abscisse curviligne le long du profil, dans chacune des sections.

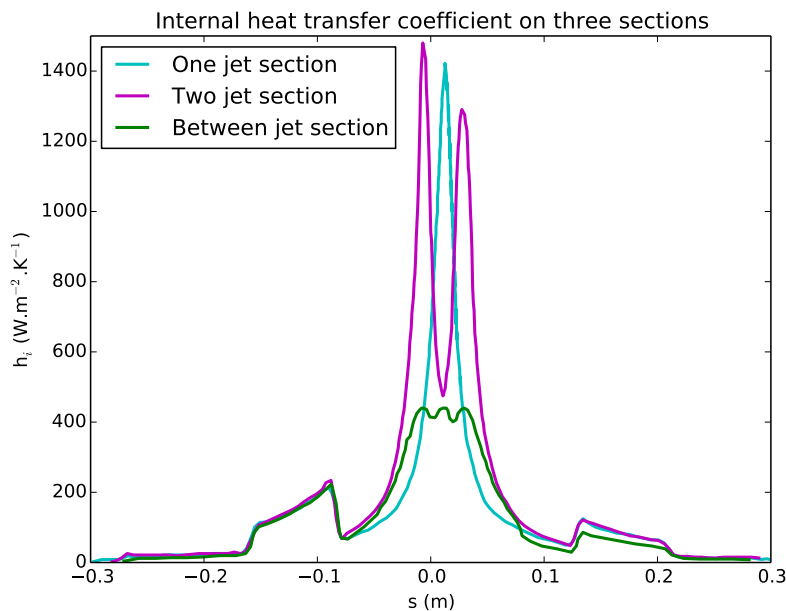


FIGURE 6.14 – Coefficients d'échange interne du système piccolo

Le coefficient d'échange interne le plus bas se trouve sur la section entre deux jets qui reçoit le moins d'air chaud. Pour les deux autres sections, on observe des pics sur les coefficients d'échange internes. Ils correspondent à la présence d'un jet d'air chaud impactant la couche métallique.

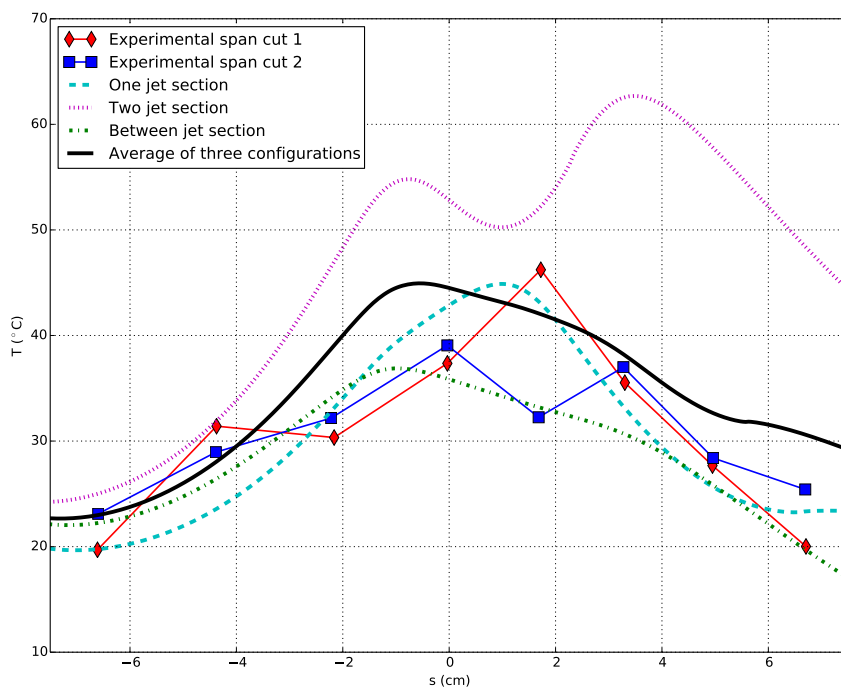
De plus, la température de référence interne est donnée à  $176.85^{\circ}\text{C}$ . Les autres données du problème sont résumées dans la table suivante :



Angle d'attaque ( $^{\circ}$ )	3
$M_{\infty}$	0.18021
$T_{\infty}$ (K)	268.2056
$P_{\infty}$ (Pa)	101325
$LWC$ ( $\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ )	0.87
$MVD$ ( $\mu\text{m}$ )	29

TABLE 6.5 – Données externes du problème de simulation d'un système piccolo

Grâce à ces données, on peut simuler avec la chaîne IGLOO2D le problème sur les trois sections données. Dans la zone proche du point d'arrêt, le système de protection permet de maintenir la paroi suffisamment chaude pour que le givre ne puisse pas se former, il y a donc un film qui se forme et ruisselle. Des relevés expérimentaux de température ont été effectués dans cette zone. Ils sont comparés à nos résultats numériques sur la figure 6.15. Il faut bien noter que les sections sur lesquelles sont effectuées les relevés de températures et sur lesquelles sont effectuées les simulations ne sont pas les mêmes. De plus, dans les simulations, les transferts de chaleur dans la direction de l'envergure ne sont pas pris en compte car le code est bidimensionnel. Or, on peut penser que ces flux de chaleur sont importants au vu du caractère tridimensionnel du problème. Par conséquent, la comparaison ne peut pas être totalement quantitative

FIGURE 6.15 – Température de surface du système d'antigivrage piccolo : simulations *vs* données expérimentales

On observe que dans la section avec deux jets, la température semble surestimée, ce qui s'explique très probablement par le fait qu'en réalité une partie de la chaleur provenant du système de protection est conduite dans la direction de l'envergure, ce qui n'est pas pris en compte dans notre modèle bidimensionnel. Pour les deux autres sections, les résultats semblent être plus en accord avec les relevés expérimentaux. La courbe en noire représente

une simulation dans laquelle on a moyenné les trois coefficients de transfert thermique. Dans ce cas encore, la température obtenue numériquement semble être en bon accord avec l'expérience.

Il faut noter que dans ces cas test, le film n'est pas totalement évaporé et ruisselle le long de l'aile, comme on peut le voir sur la figure ci-dessous :

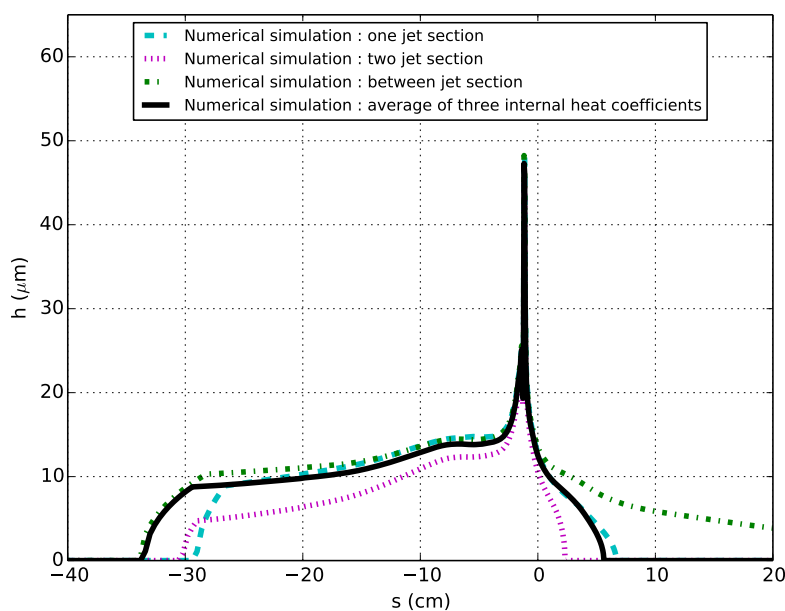


FIGURE 6.16 – Hauteur de film calculée pour les simulations considérées

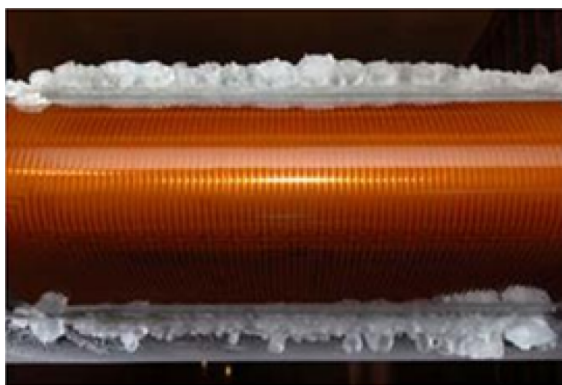
On observe que proche du point d'arrêt, ces hauteurs de film sont très proches bien que les températures soient éloignées. En fait, cela signifie que dans une certaine mesure, le processus d'évaporation a très peu d'effet sur le bilan de masse. En revanche, il est toujours primordial de bien l'évaluer car il a un effet très important sur le bilan d'énergie, puisqu'il est très endothermique.

Pour ces trois cas, le coefficient d'échange thermique a été calculé grâce à un couplage de SLUSH2D avec le code de couche limite CLICET. Il faut noter que ce coefficient d'échange joue un rôle fondamental vis-à-vis de la température obtenue. En effet, en dehors de la zone de captation, les seuls phénomènes refroidissant le film sont le flux de chaleur convectif et l'évaporation, qui sont tous deux pilotés par ce coefficient d'échange. Ainsi, ce cas test valide également la façon dont ce coefficient est évalué.

En conclusion, ce cas test a permis de montrer que la chaîne IGLOO2D était capable de reproduire un cas test d'antigivrage, puisque les températures de paroi obtenues sont qualitativement correctes. Néanmoins, on note ici la limite du code bidimensionnel qui n'est pas en mesure de calculer les flux de chaleur dans la direction de l'envergure, non négligeables dans ce cas.

### 6.3.3 Simulation de regel sur une paroi chauffée (*runback ice*)

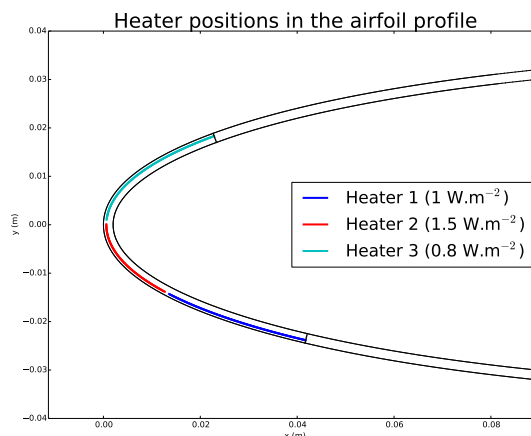
Comme l'indiquait Carroll *et al.* [21] dès 1929, les systèmes de protection thermique contre le givre peuvent induire la formation d'un film d'eau liquide ruisselant et pouvant geler dans une zone en aval non protégée (« *the heated leading edge will prevent the formation of ice at that location, but [...] the formation may be expected farther back along the chord* »). La prévision de la formation de ce type de givre est donc primordiale pour le dimensionnement de ces systèmes.



Dans cette section, nous proposons de simuler ce phénomène grâce au code SLUSH2D. Pour ce cas test, on considère un profil NACA0012, de corde 0.6 m et d'épaisseur 2 mm, chauffé de manière stationnaire grâce à des résistances dans la paroi placées à 0.6 mm de la surface. La zone protégée est située entre les abscisses curvilignes  $s=-5.1$  cm et 0.8 cm (l'abscisse de référence étant le point le plus gauche) et est composée d'un matériau conducteur proche de l'aluminium ( $\rho = 2710$  kg.m<sup>-3</sup>,  $c_p = 1256$  SI et  $\lambda = 176.53$  SI). La zone non protégée est composée d'un isolant thermique proche d'un composite ( $\rho = 1889$  kg.m<sup>-3</sup>,  $c_p = 1100$  SI et  $\lambda = 0.6$  SI). La position des résistances par rapport à  $s$  ainsi que leurs puissances sont résumées dans la table 6.6 :

N° de résistance	1	2	3
Abscisse gauche (cm)	-5.1	-2	0.1
Abscisse droite (cm)	-2.1	0	3.1
Puissance (W.cm <sup>-2</sup> )	1	1.5	0.8

TABLE 6.6 – Positions et puissances des résistances



Au départ, la simulation s'effectue en considérant qu'il n'y a pas de dépôt de gouttelette, ce qui permet de calculer le champ de température lorsque la voilure est à l'équilibre avec l'écoulement externe, comme on peut l'observer sur la figure 6.17 :

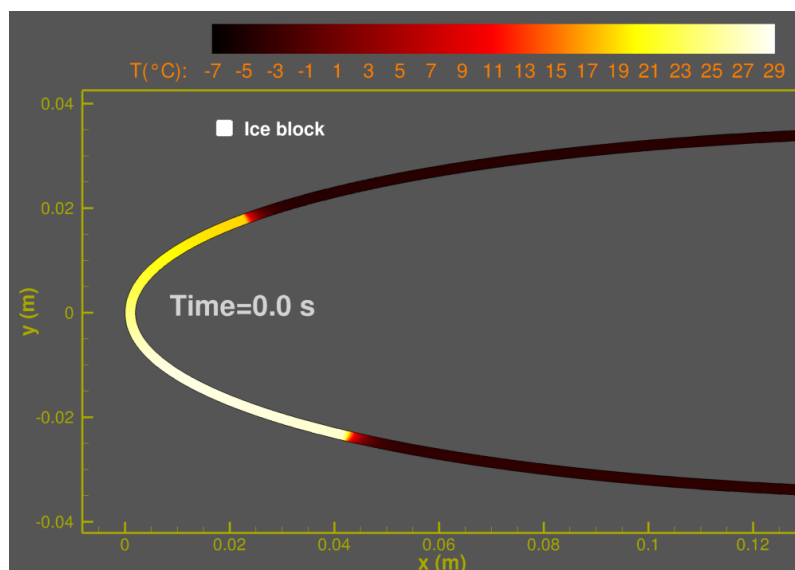
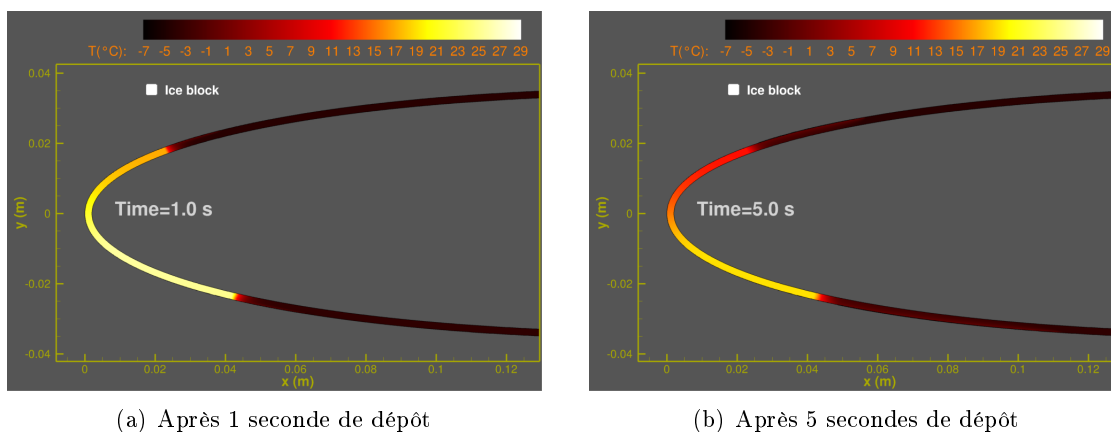


FIGURE 6.17 – Voilure à l'équilibre avec l'air sec

On observe que lorsqu'il n'y a pas de gouttelettes, la température maximale de  $28^{\circ}\text{C}$  est atteinte au niveau du point d'arrêt. Remarquons que celui-ci est situé sur l'intrados à cause de l'angle d'attaque de  $4^{\circ}$ . Dès que les gouttes sont injectées, cette température chute très rapidement, d'une part parce que les gouttes sont plus froides, et d'autre part parce qu'elles s'évaporent en partie. Ainsi, au bout d'une seconde de dépôt des gouttes, la température maximale vaut environ  $26^{\circ}\text{C}$  et  $19^{\circ}\text{C}$  après 5 secondes, comme on peut le voir sur la figure 6.18 :



(a) Après 1 seconde de dépôt

(b) Après 5 secondes de dépôt

FIGURE 6.18 – Température de la voilure après une et cinq secondes de dépôt des gouttes

Néanmoins, le bord d'attaque est suffisamment chauffé pour que le givre ne puisse pas se former. Par conséquent, les gouttes demeurent à l'état liquide et ruissellent le long de la paroi pendant que celle-ci se réchauffe. Lorsque le film atteint une zone non protégée, il se solidifie et on observe alors une forme de *runback ice*. Numériquement, le premier dépôt de givre apparaît après 10 s, mais la couche est alors microscopique (une dizaine de microns au plus). Après une minute, on observe une forme de givre sur l'intrados et une sur l'extrados. Il faut noter que si l'on ne prend pas en compte l'évolution du champ aérodynamique externe, on se retrouve dans les hypothèses du modèle de Messinger, et le

problème devient stationnaire, au sens où le taux de croissance de givre ne dépend plus du temps. Autrement dit, la hauteur de givre en tout point de la paroi dépend linéairement du temps. Ainsi, après 1 et 3 minutes d'accrétion, on obtient les dépôts suivants :

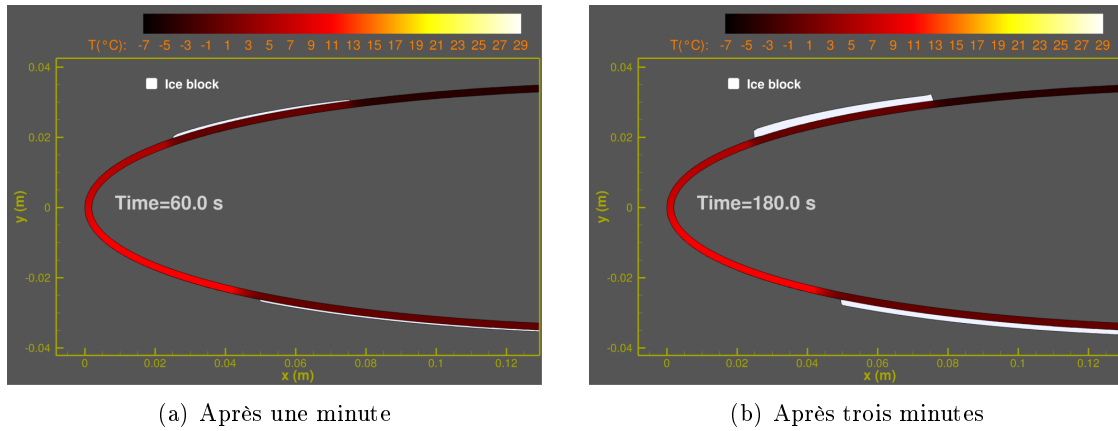


FIGURE 6.19 – Blocs de givre après une et trois minutes d'accrétion

On peut refaire ce calcul en prenant en compte l'évolution du champ aérodynamique externe sur la forme de givre. Pour ce faire, on le recalcule avec IGLOO2D toutes les dix secondes. Le calcul de l'écoulement externe est évalué de manière quasi-stationnaire, alors que le calcul d'accrétion est instationnaire. Cela revient à considérer que les échelles de temps de l'écoulement externe sont petites devant celles relatives à l'accrétion et au ruissellement. Avec cette procédure, appelée *multi-pas*, on obtient, après une et trois minutes d'accrétion, les dépôts de givre suivants :

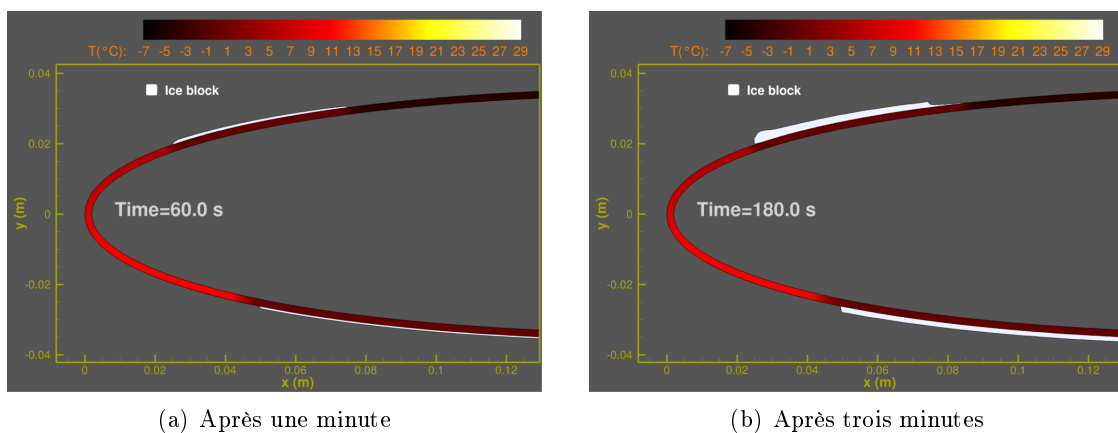


FIGURE 6.20 – Blocs de givre après une et trois minutes d'accrétion en mode multi-pas

Sur la figure 6.21 sont affichées les deux formes de givre (sur l'intrados et sur l'extrados), pour une et trois minutes d'accrétion, avec et sans utilisation du mode multi-pas.

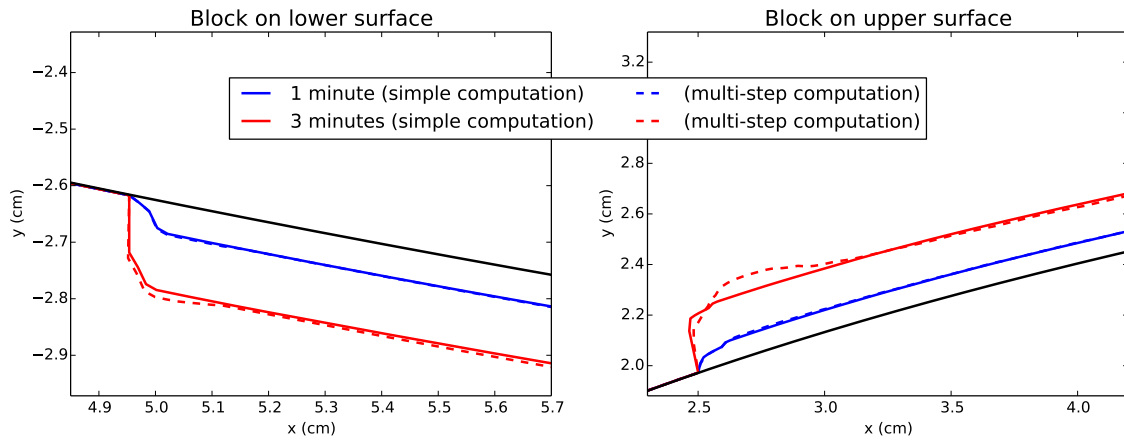


FIGURE 6.21 – Comparaison des formes de givre avec et sans utilisation de la procédure multi-pas

Sur la figure de gauche correspondant au bloc sur l'intrados, on observe que l'utilisation de la procédure multi-pas entraîne une augmentation de la hauteur de givre à l'extrémité gauche. Cela s'explique par le fait que la présence du bloc déjà accrété induit un pic de captation de gouttes sur le coin du bloc, comme on peut le voir sur la figure 6.22(a).

Concernant le bloc situé sur l'extrados (figure de droite), ce phénomène ne se produit pas car l'angle d'attaque est trop important pour qu'il y ait de la captation. Sur la partie la plus à gauche du bloc de givre, on observe que la hauteur de givre est légèrement moins importante, ce qui s'explique par le fait que localement le coefficient de transfert thermique diminue (voir figure 6.22(b)) car l'écoulement est à une vitesse plus faible. Par conséquent, l'atmosphère extrait moins de chaleur au film, ce qui réduit la vitesse de solidification. En revanche, l'écoulement est accéléré sur le dessus du bloc et le coefficient est donc plus important localement, ce qui explique la petite « bosse ».

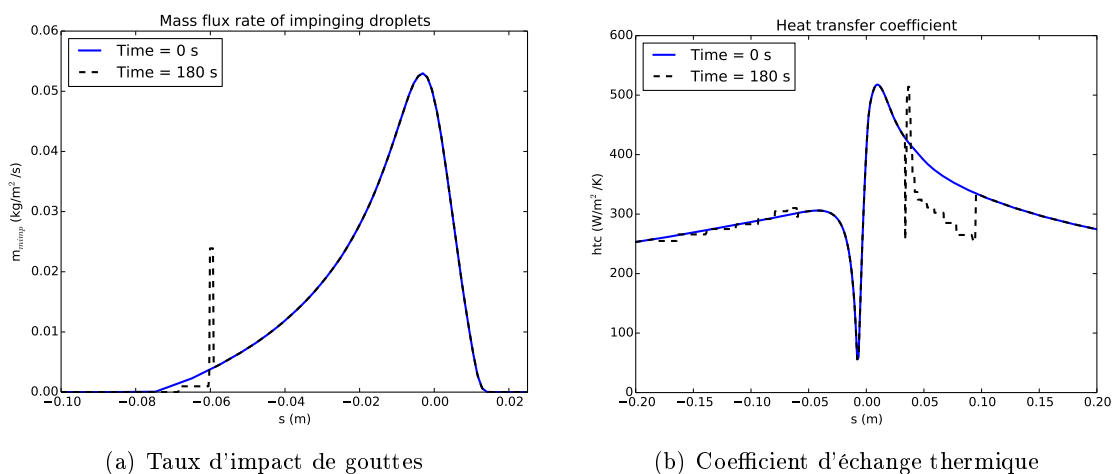


FIGURE 6.22 – Taux d'impact de gouttes et coefficient d'échange thermique

Ce cas test a permis de montrer que l'on peut simuler une forme de *runback ice shape* avec SLUSH2D. Bien que nous ne soyons pas en mesure de valider les formes de givre obtenues faute de données expérimentales, elles sont globalement en accord avec des photos

que l'on peut trouver dans la littérature sur le sujet. Nous avons également constaté que le fait d'effectuer un calcul en mode multi-pas avait un léger effet sur le bloc de givre obtenu, ce qui s'explique essentiellement par la modification de la captation de gouttes et/ou des échanges thermiques avec l'écoulement externe.

Il faut cependant noter que dans nos applications, les films prévus par le modèle sont très minces. En réalité, ils n'existent donc pas à l'état de films continus mais se séparent pour former des ruisselets. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans le modèle tricouche, ce qui en fait l'une des principales limitations. Cette problématique est l'objet d'une thèse de doctorat entreprise en octobre 2015 à l'ONERA.

## 6.4 Modélisation d'un dégivreur électrothermique

### 6.4.1 Modélisation et validation de la propagation d'un front de fusion

Dans ce cas test, on considère un bloc de givre déjà déposé sur la paroi, et on active un dégivreur électrothermique. L'objectif est de valider la capacité du code à reproduire correctement la propagation d'un front de fusion dans la couche de glace. On considère pour simplifier l'analyse qu'il n'y a ni dépôt de goutte, ni sublimation à la surface du givre. Le couplage entre tous ces phénomènes sera pris en compte dans le cas test suivant 6.4.2.

L'intérêt de ces hypothèses simplificatrices est de pouvoir comparer les résultats avec ceux du code *Thermal Ice* développé dans le cadre de la thèse de L. Bennani, dans lequel les équations de changement de phase sont pleinement résolues grâce à la méthode enthalpique. Sur le principe, ce code utilise la même modélisation que le code présenté au paragraphe 3.4.1 de ce document (p. 84). *Thermal Ice* présente l'avantage d'être non structuré, ce qui permet de traiter des géométries complexes comme une forme de dépôt de givre.

On considère un profil NACA0012 de corde 0.6 m. L'intérieur du profil est épais de 4.52 mm et comporte plusieurs couches composées de différents matériaux. Les détails de la géométrie se trouvent au paragraphe 6.3.2 de la thèse de L. Bennani [13]. Des résistances de 2.2 cm de long et espacées de 2 mm se trouvent dans la paroi proche du point d'arrêt.

On considère un bloc de givre déposé sur ce profil. La hauteur de givre en chaque point est donnée par une formule analytique, elle ne résulte pas d'un calcul numérique. La position des résistances dans la paroi et la forme de givre initiale sont illustrées sur la figure 6.23 :

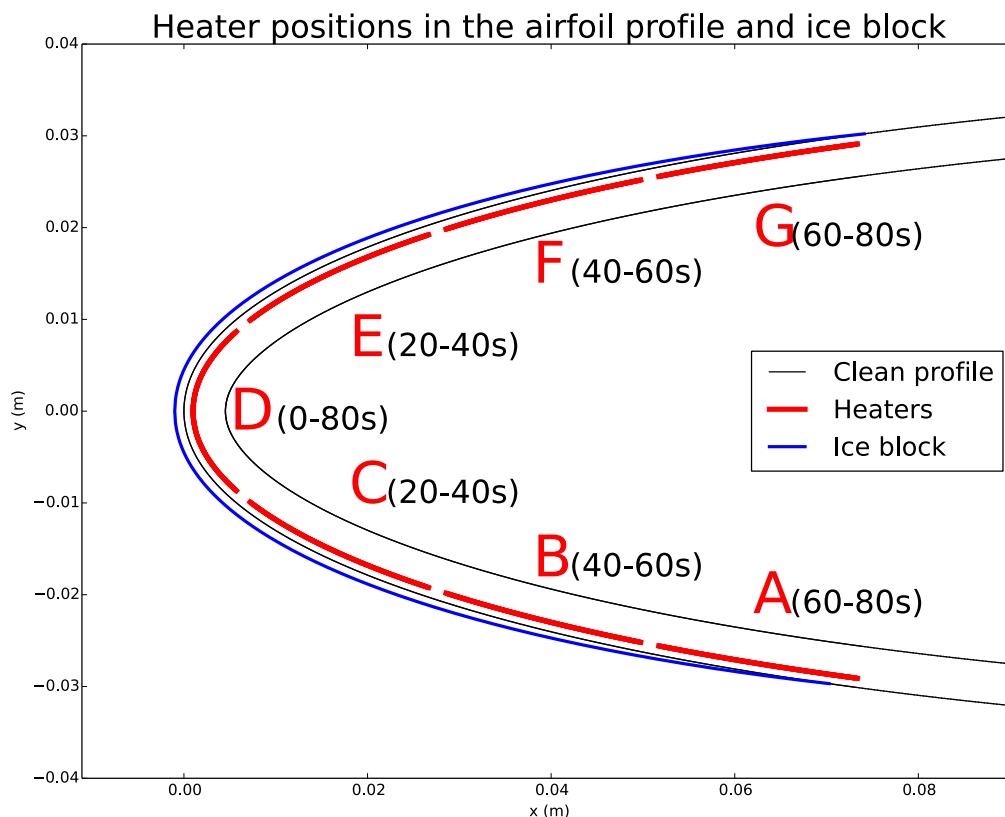


FIGURE 6.23 – Illustration du système de protection thermique et de la forme de givre initiale déposée sur le profil lisse

La résistance D fonctionne en mode *parting strip*, son activation est donc continue. Sa puissance est fixée à  $3 \text{ W.cm}^{-2}$ . Les autres résistances ont une puissance de  $1.5 \text{ W.cm}^{-2}$ , et sont activées de manière cyclique. Un cycle complet dure 80 secondes. Les premières 20 secondes, seule la résistance D fonctionne. Les 20 secondes suivantes, les résistances C et E sont activées pendant 20 secondes puis éteintes, alors que les résistances B et F sont allumées pendant 20 secondes. Enfin, pour les dernières 20 secondes du cycle, ces deux résistances sont désactivées pendant que A et G s'activent. De plus, au temps initial, on considère que la température dans le bloc de givre et le dégivreur est uniformément égale à  $-10^\circ\text{C}$ .

Pour la modélisation des échanges thermiques avec l'extérieur, le calcul du coefficient d'échange et de la température de récupération a été effectué grâce à la chaîne IGLOO2D, en considérant à l'infini amont un nombre de Mach de 0.4, une pression de 61640 Pa, une température de  $-10^\circ\text{C}$  et un angle d'incidence de  $4^\circ$ . Ces deux grandeurs sont données sur la figure 6.24 :



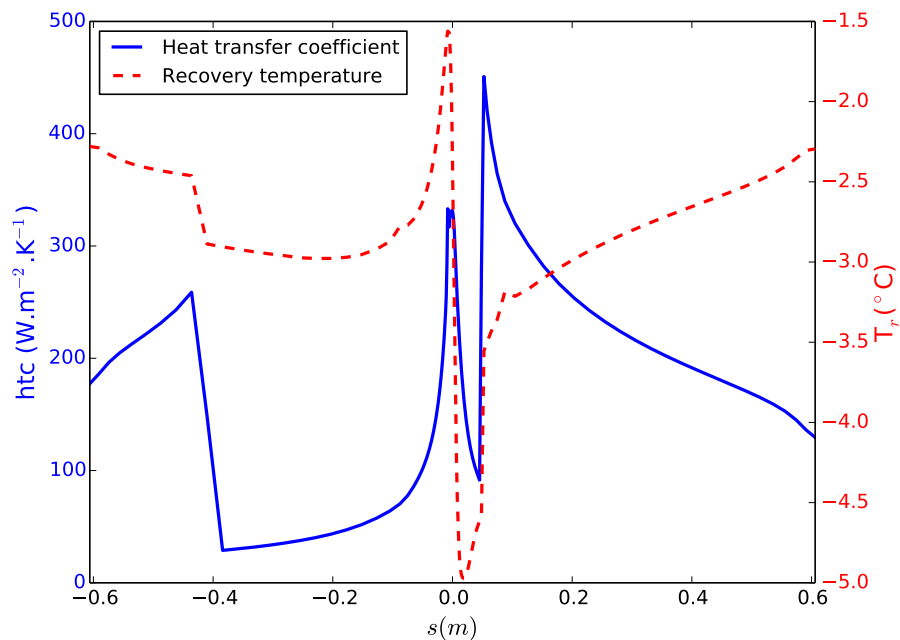


FIGURE 6.24 – Coefficient de transfert thermique et température de récupération calculés avec IGLOO2D

On effectue deux simulations, l'une en utilisant le code SLUSH2D qui résout le modèle tricouche et l'autre en utilisant le code *Thermal Ice* qui résout les équations de changement de phase, en prenant en compte les flux de chaleur dans les deux directions. On compare les fronts de fusion observés en trois points qui sont repérés à l'interface entre la paroi et le bloc, comme illustré sur la figure 6.25 :

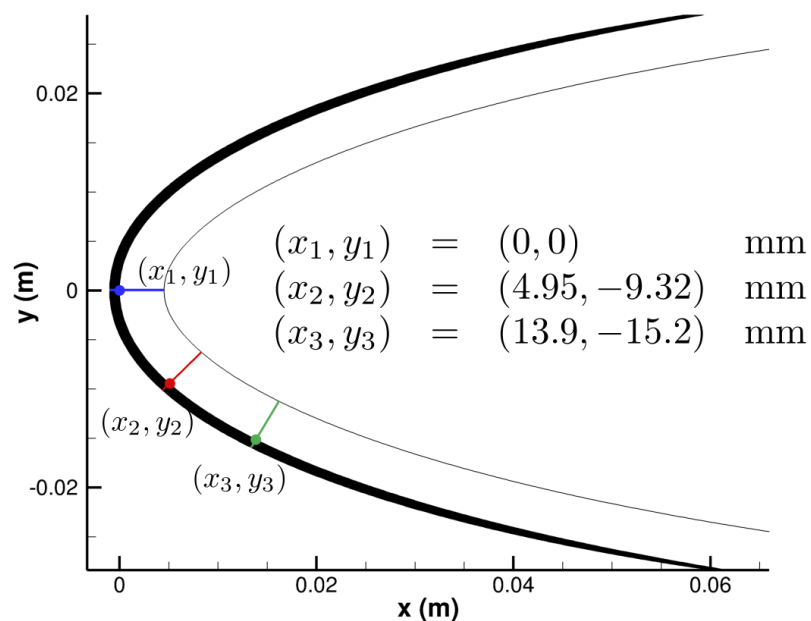


FIGURE 6.25 – Positions des points sur lesquels les fronts de fusion sont suivis

Pour le code SLUSH2D, la définition du front de fusion ne présente pas d'ambiguïté puisqu'il s'agit de la hauteur du film statique  $h_s$ . En revanche, pour le code *Thermal Ice* dans lequel est implémentée la formulation enthalpique, qui est un modèle à interface diffuse, l'interface entre l'eau liquide et le givre n'est pas suivie. Le moyen utilisé ici pour calculer le front de fusion est d'intégrer la fraction liquide sur la hauteur. Ainsi, en posant  $\Phi$  la fraction liquide,  $f$  le front de fusion et  $e$  la hauteur du bloc (qui ne varie pas au cours du temps), on a la relation

$$f(s) = \int_0^{e(s)} \Phi(s, z) dz \quad (6.4)$$

où  $s$  est une abscisse curviligne sur le profil et  $z$  la direction normale. En pratique, le maillage étant non structuré, une boîte à outil de Tecplot est utilisée pour calculer l'intégrale.

Les fronts de fusions obtenus sont affichés sur la figure 6.26 :

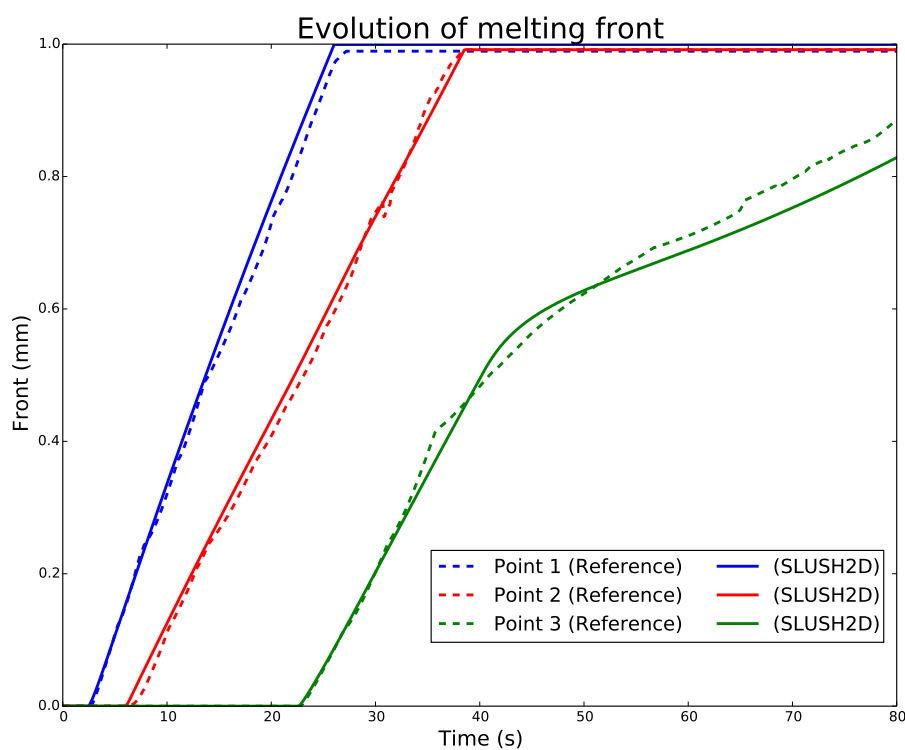


FIGURE 6.26 – Fronts de fusion obtenus avec *Thermal Ice* (référence) et SLUSH2D

Les fronts de fusion sont donc bien reproduits avec le code SLUSH2D. Cela valide d'une part les méthodes numériques utilisées, et d'autre part l'hypothèse exposée au chapitre 2 stipulant que les transferts de chaleur dans la direction tangentielle sont négligeables. En effet, les flux de chaleurs sont pris en compte dans toutes les directions dans le module *Thermal Ice*.

#### 6.4.2 Modélisation complète d'un dégivreur électrothermique

Dans ce paragraphe le système de protection électrothermique précédent est modélisé, en considérant cette fois l'accrétion de givre, le ruissellement et le détachement de la glace. Les conditions externes relatives à l'écoulement d'air (nombre de Mach, pression et tempé-

rature à l'infini amont) sont conservées. De plus, on suppose que le LWC vaut  $0.3 \text{ g.m}^{-1}$ , que le MVD vaut  $40 \mu\text{m}$  et que l'air est saturé en vapeur d'eau à l'amont du profil.

De plus, les cycles de 80 secondes sont conservés et la résistance D (*parting strip*) délivre toujours une puissance de  $3 \text{ W.cm}^{-2}$ . La puissance des résistances activées de manière cyclique (A-B-C-E-F-G) est en revanche abaissée à  $1 \text{ W.cm}^{-2}$ .

Pour le premier cycle (les premières 80 secondes du calcul), on suppose que l'air est sec (aucune gouttelette injectée), afin notamment de vérifier que l'activation et l'extinction des résistances sont correctes. D'un point de vue numérique, on utilise un pas de temps de  $0.025 \text{ s}$ . On peut observer sur les figures 6.27 et 6.28 sur le cycle est bien respecté, puisque la résistance D est activée en permanence, et que les autres s'allument par paire (C-E, E-F et G-H) puis s'éteignent toutes les 20 secondes.

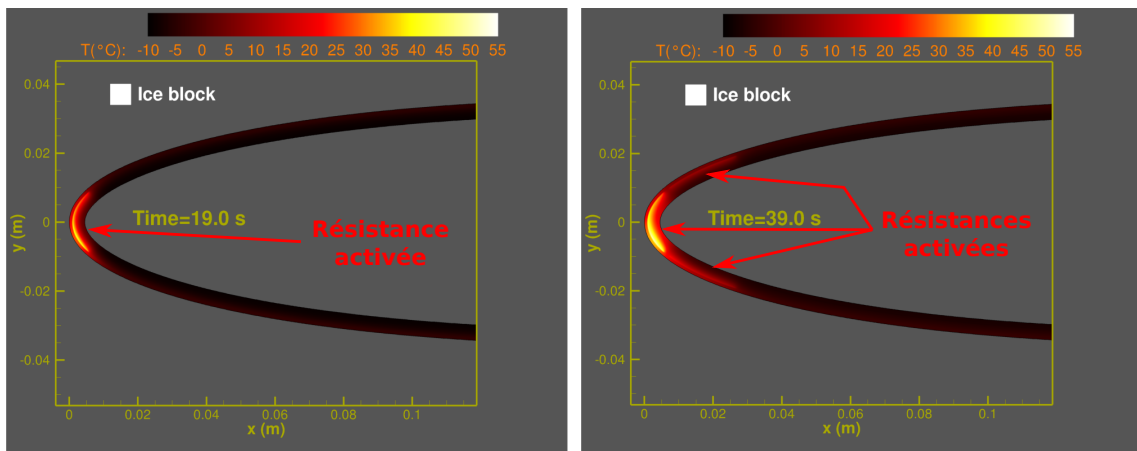


FIGURE 6.27 – Calcul en air sec aux temps 19 et 39 s

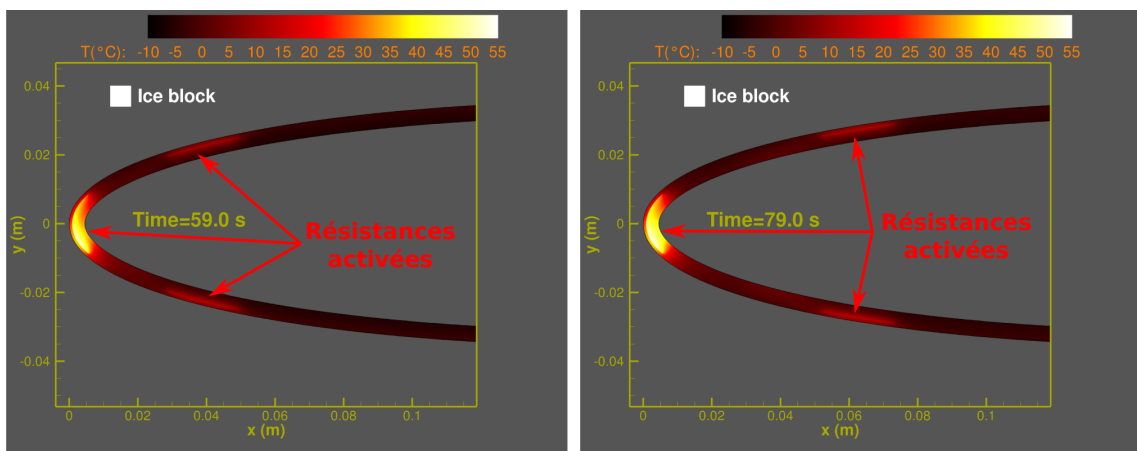


FIGURE 6.28 – Calcul en air sec aux temps 59 et 79 s

La suite de la simulation est effectuée en mode multi-pas ; les grandeurs externes sont recalculées toutes les 10 s. Enfin, un calcul de mécanique permettant de prévoir le détachement des blocs de givre déposés sur l'aile est effectué toutes les secondes grâce au module développé dans la thèse de L. Bennani [13].

Dès le dépôt des gouttes à la quatre-vingtième seconde, on observe que le système se refroidit très rapidement. En effet, au bout de 80 s, la température à la surface de la paroi, au niveau du point d'arrêt, vaut environ 35°C (environ 55°C au niveau de la résistance D), alors que 20 secondes plus tard, elle se stabilise autour de 15°C (environ 35°C au niveau de la résistance D) jusqu'à la fin de la simulation. Le bord d'attaque est suffisamment chaud pour que le givre ne puisse pas se former (ce qui est le rôle de la résistance *parting strip* D), et un film ruisselle vers l'aval du profil et se solidifie dans une zone non protégée. Au bout de 100 secondes (c'est-à-dire 20 secondes après le début de l'accrétion), un dépôt de givre relativement étroit se trouve sur l'extrados, alors que sur l'intrados, se trouve un dépôt plus étalé, comme on peut l'observer sur la figure 6.29 :

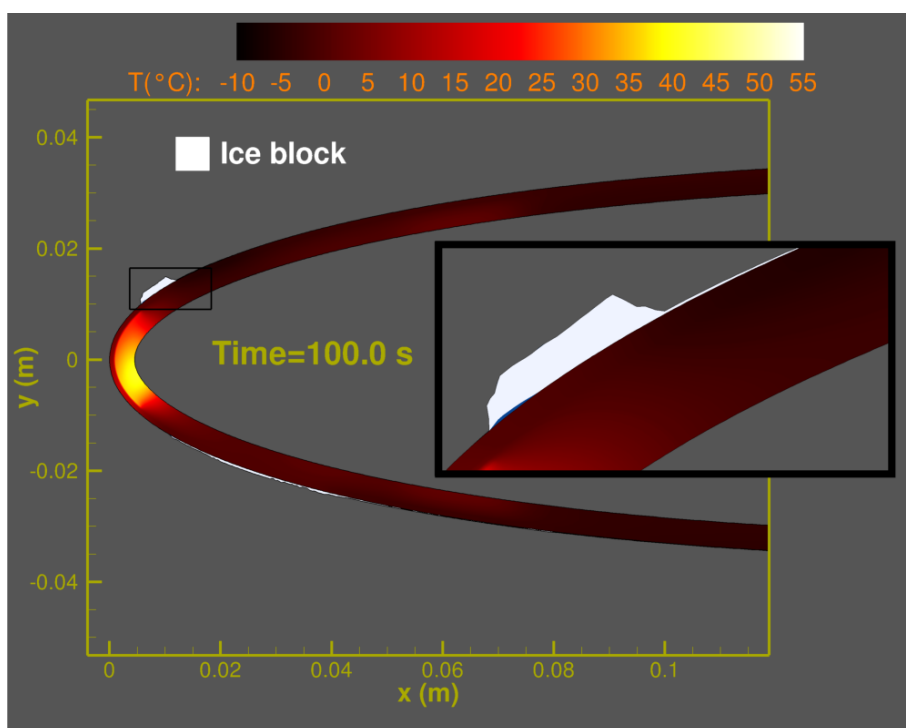


FIGURE 6.29 – Dépôt de givre après 100 secondes de simulation

Cette différence s'explique par le fait que le coefficient d'échange est plus important sur l'extrados, par conséquent le taux de solidification est plus grand et donc le film ruisselle moins loin. Dix secondes plus tard, le bloc de givre a continué de se développer, mais comme la résistance E a été activée depuis dix secondes, un film d'eau liquide s'est formé entre le givre et la paroi, comme on peut le voir sur la figure 6.30 :

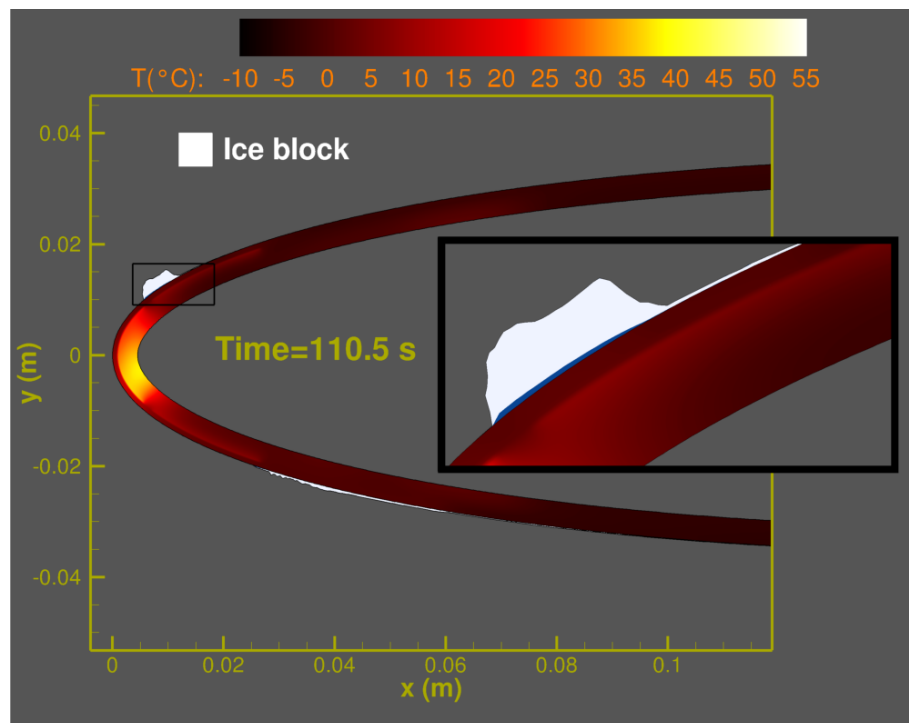


FIGURE 6.30 – Dépôt de givre après 110.5 secondes de simulation

Ce bloc de givre est ensuite arraché par les forces aérodynamiques et tant que la résistance E n'est pas éteinte, le givre ne peut pas se reformer au-dessus de la résistance. On peut donc en déduire qu'entre 100 secondes et 110 secondes, le bloc a pu grossir uniquement car il isolait suffisamment le film ruisselant de la paroi pour que celui-ci puisse se solidifier.

Au bout de 120 secondes, les résistances E et C s'éteignent pendant que les résistances B et F s'activent. Au-dessus de la résistance E, un bloc de givre commence à se reformer, et après 160 secondes (2 cycles complets), on obtient la figure 6.31 :

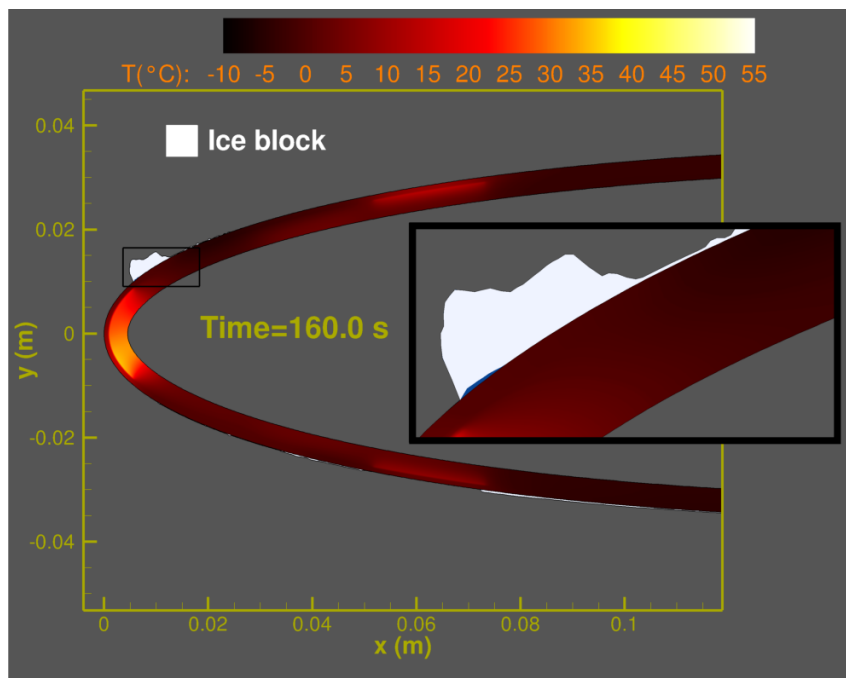


FIGURE 6.31 – Dépôt de givre après 160 secondes de simulation

Il faut noter qu'au niveau de l'intrados, on a simplement des couches de givre très minces qui se déposent et se détachent à mesure que les résistances s'activent.

À la fin du second cycle la résistance E demeure éteinte durant 20 secondes, et le bloc de givre continue de se développer. Au bout de 180 secondes, elle s'active, et 1.5 secondes après, on obtient le dépôt suivant :

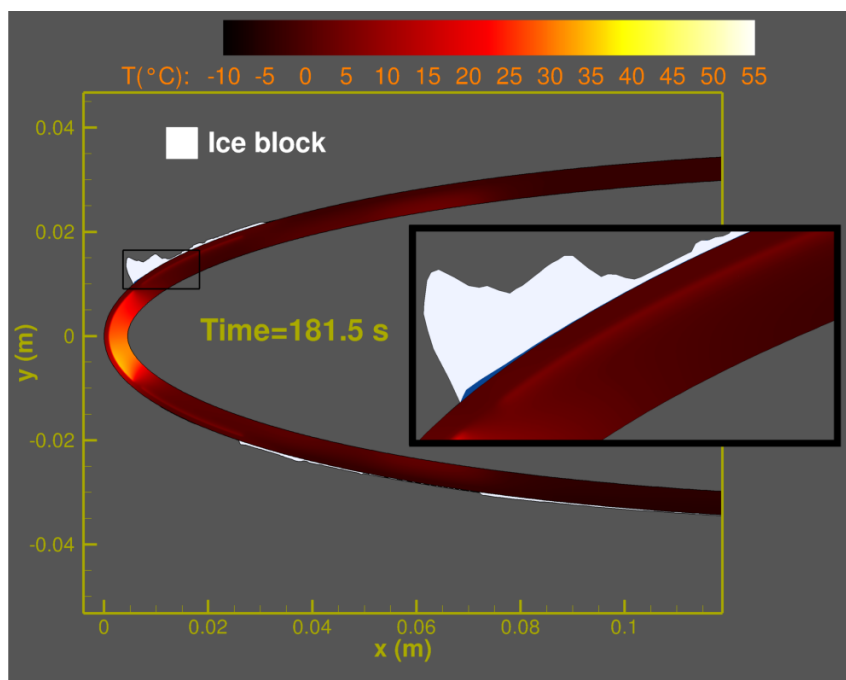


FIGURE 6.32 – Dépôt de givre après 181.5 secondes de simulation

Ce bloc est ensuite arraché par l'écoulement d'air grâce à la présence du mince film d'eau qui l'isole mécaniquement de la paroi. On peut donc remarquer qu'il a fallu 2 secondes au bloc de givre pour se détacher depuis l'activation de la résistance E dans le troisième cycle alors qu'il en avait fallu 11 dans le second<sup>2</sup>. Cela s'explique par le fait que dans le troisième cycle, le bloc est plus épais, il est donc d'avantage sensible aux forces aérodynamiques externes et la présence d'un petit film d'eau liquide sous le givre suffit à le faire se détacher.

En pratique, l'arrachement d'un bloc de givre peut engendrer un risque important, puisqu'il est possible qu'il impacte et endommage une partie de l'avion ou qu'il soit ingéré par le moteur. C'est l'une des raisons pour lesquels des auteurs étudient sa trajectoire après son détachement. On peut notamment citer Beaugendre *et al.* [12] ou Morency *et al.* [61] qui étudient ce phénomène.

---

2. Notons que le calcul permettant de prévoir le détachement du givre est effectué toutes les secondes. Par conséquent, les valeurs de 2 et 11 secondes ne sont que des ordres de grandeur.





## Chapitre 7

# Applications en trois dimensions

Dans le cadre de la thèse, un code en trois dimensions (*SLUSH3D*) a été développé afin d’implanter le modèle tricouche. Il est construit selon la même structure que le code *SLUSH2D* présenté dans le chapitre précédent, mais il est pour l’instant à l’état de prototype. En particulier, contrairement à *SLUSH2D*, *SLUSH3D* n’est pas couplé à un module modélisant un système de protection thermique. Par conséquent, des conditions aux limites arbitraires doivent pour l’instant être imposées à la paroi.

### 7.1 Accrétion sur deux profils non chauffés

L’ONERA dispose du code de calcul d’accrétion *ACCRET3D*, dans lequel est implémentée une extension du modèle de Messinger en trois dimensions. Dans ce modèle, les principales hypothèses sont :

- Paroi adiabatique
- Profil de température uniforme dans la direction normale à la paroi
- Taux de croissance de givre, hauteur du film ruisselant et températures indépendants du temps

Si la paroi est adiabatique, alors les solutions correspondant au modèle tricouche et au modèle de Messinger doivent être très proches.

L’objectif principal de ce premier cas test est donc de valider le modèle tricouche (code *SLUSH3D*) en comparant les résultats obtenus à ceux du modèle de Messinger (code *ACCRET3D*).

Dans le projet *SUNSET 2*<sup>1</sup>, une simulation numérique d’accrétion de givre a été réalisée. Cette simulation a participé au pré-dimensionnement d’une expérience menée ensuite par la NASA dans le cadre du projet, où le but est d’étudier la captation de givre sur une voilure<sup>2</sup>. Dans la mesure où il n’existe aucune similitude exacte pour l’accrétion de givre<sup>3</sup> et au vu des contraintes techniques liées aux dimensions de la soufflerie, le bord d’attaque du profil est conservé à l’échelle 1 mais la taille de la corde est diminuée. Afin de préserver au maximum les propriétés de l’écoulement au niveau du bord d’attaque, un volet situé au

---

1. *SUNSET 2* est un projet dans lequel collaborent la NASA, l’ONERA et la FAA. L’un de ses objectifs est la modélisation et les méthodes de simulations des phénomènes de givrage en 3D, en particulier des ailes en flèches.

2. Voilure CRM (*Common Research Model*) [20]

3. On peut montrer grâce au théorème de  $\pi$ -Buckingham que la seule façon de respecter les règles de similitudes en givrage est de conserver toutes les grandeurs. D’un point de vue pratique, cela signifie que les essais en soufflerie devraient nécessairement se faire à échelle 1, ce qui n’est pas toujours possible étant données les contraintes techniques. Pour pallier ces contraintes, certains auteurs ont proposé des lois de similitudes approchées (voir par exemple [4]).

niveau du bord de fuite permet d'ajuster la circulation de l'écoulement aérodynamique. Le dispositif est attaché par un des bords latéraux à la veine de la soufflerie. Il a été maillé avec le logiciel commercial ICEM-Hexa et l'écoulement en air sec a été simulé grâce au logiciel de l'ONERA elsA<sup>4</sup> (solveur Navier-Stokes), qui a permis d'estimer le coefficient de frottement (figure 7.1), le coefficient d'échange thermique et la température de récupération. Pour ce calcul, l'angle d'attaque considéré est  $3.67^\circ$  pour le premier profil et  $15^\circ$  pour le second. Le nombre de Mach de l'écoulement vaut 0.363, la pression 90011 Pa et la température 269.15 K. Il convient de noter que l'influence de la rugosité du givre n'a pas été prise en compte dans le calcul elsA.

Les trajectoires des gouttelettes surfondues ont ensuite été évaluées grâce au module eulérien SPIREE (un des modules du code CEDRE de l'ONERA). Le coefficient de captation, défini par  $\beta = \frac{\dot{m}_{imp}}{LWC V_\infty}$  est donné dans la figure 7.2. Le LWC est pris à  $0.551 \text{ g.m}^{-3}$  et le MVD à  $20 \mu\text{m}$ .

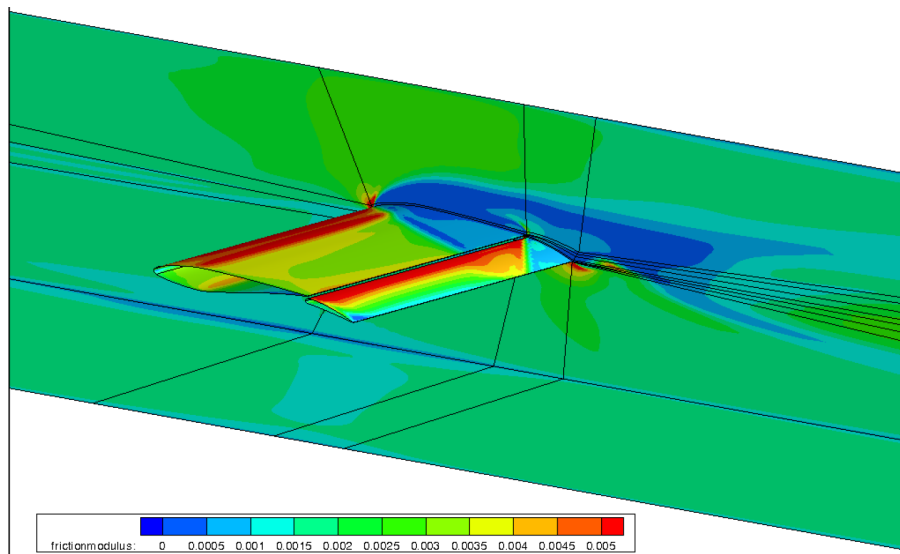


FIGURE 7.1 – Coefficient de frottement des profils

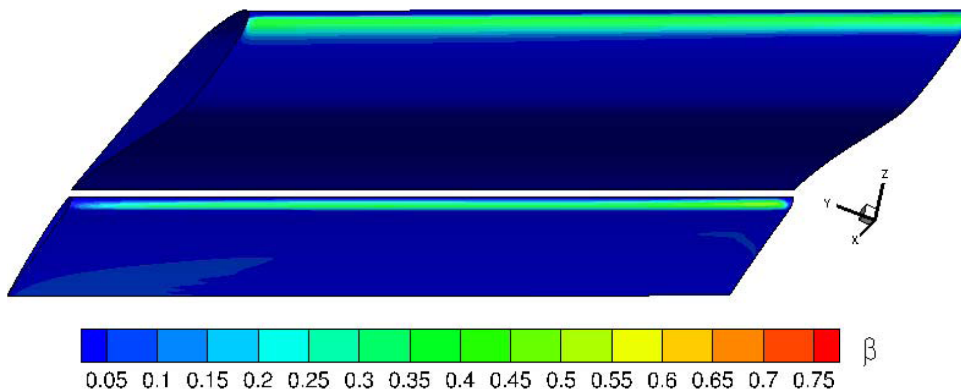


FIGURE 7.2 – Coefficient de captation des profils

Enfin, la forme de givre a été calculée grâce au code ACCRET3D. Ce calcul a été effectué en mode *predictor* uniquement, c'est-à-dire en supposant que le dépôt de givre ne

4. <http://elsa.onera.fr/>

modifie pas les grandeurs externes. Le résultat de cette simulation d'accrétion de givre est exposé sur la figure 7.3. Le temps d'accrétion est de 45 minutes.

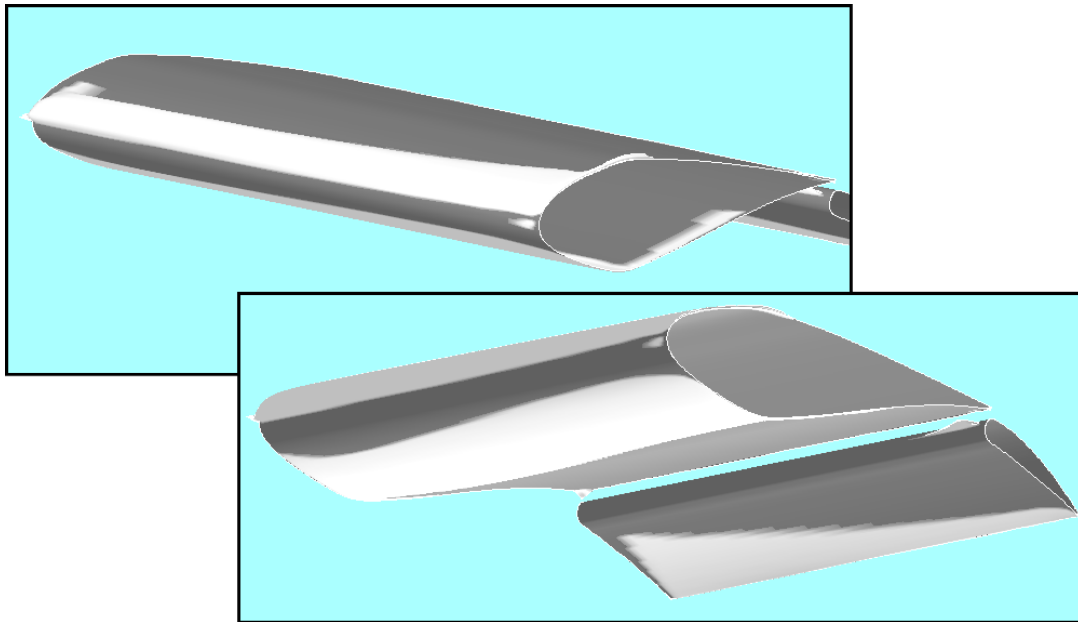
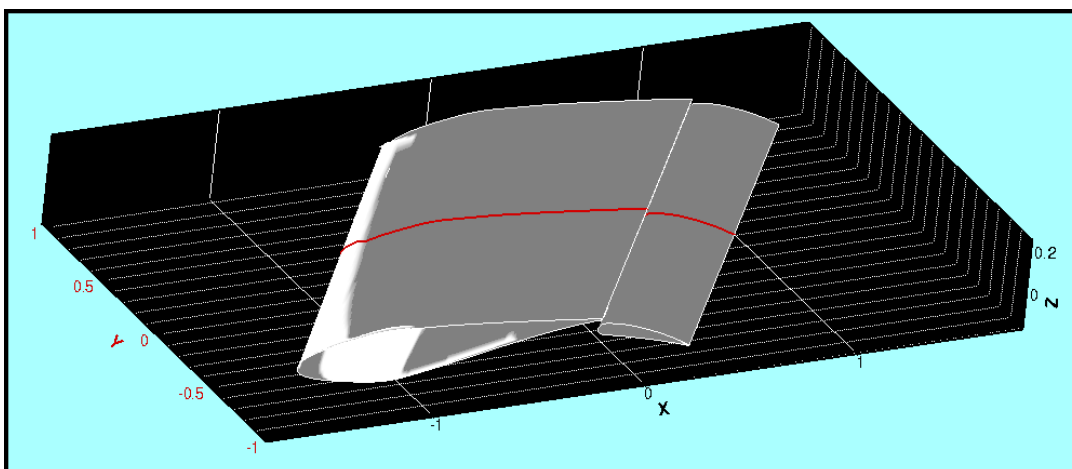


FIGURE 7.3 – Dépôt de givre obtenu avec le logiciel ACCRET3D. Les zones grises correspondent à la paroi et les zones blanches à du dépôt.

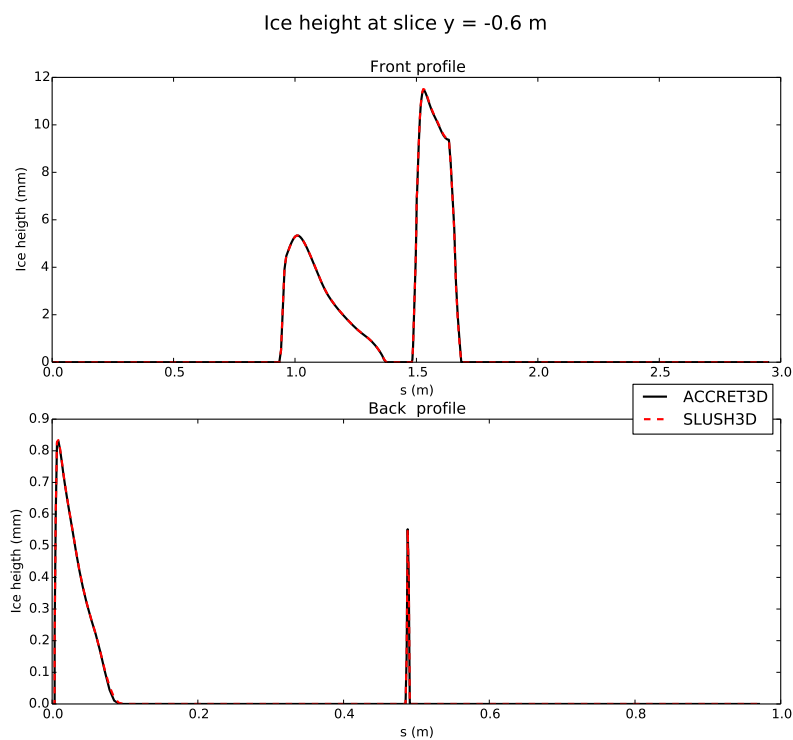
On observe que sur le premier profil, il n'y a pas de dépôt proche de la zone de captation des gouttes. Cela s'explique par le fait que la température de récupération dans cette zone est positive (proche de  $3^{\circ}\text{C}$ ), et les échanges thermiques ne sont donc pas suffisants pour solidifier les gouttelettes. Par ailleurs, comme l'air est supposé saturé en vapeur d'eau (humidité relative égale à 1), les effets d'évaporation, qui participent à l'extraction de chaleur nécessaire à la solidification, sont également limités. Ainsi, les gouttelettes ruissellent et gèlent plus loin sur le profil.

Ce cas test a été reproduit avec le code SLUSH3D, en supposant une paroi adiabatique. Comme expliqué dans l'introduction de ce paragraphe, les deux modèles sont presque équivalents dans ce cas. La seule différence provient du fait que les instationnarités dues au temps d'établissement du film ruisselant sont captées dans SLUSH3D, contrairement à ACCRET3D. Néanmoins, comme le temps de simulation est très long, les résultats finaux doivent être presque identiques.

Visuellement, si l'on superpose les deux dépôts de givre, ils semblent bien identiques. Plus précisément, traçons les hauteurs de givre obtenues pour différentes sections normales à l'axe  $y$  (voir figure ci-dessous).

FIGURE 7.4 – Illustration du plan d'équation  $y = 0$  m

On observe ainsi une parfaite adéquation entre les codes, comme l'attestent les figures représentant ces hauteurs de givre sur 2 plans de coupe :

FIGURE 7.5 – Hauteur de givre prévues par SLUSH3D et ACCRET3D dans le plan d'équation  $y = 0.6$  m

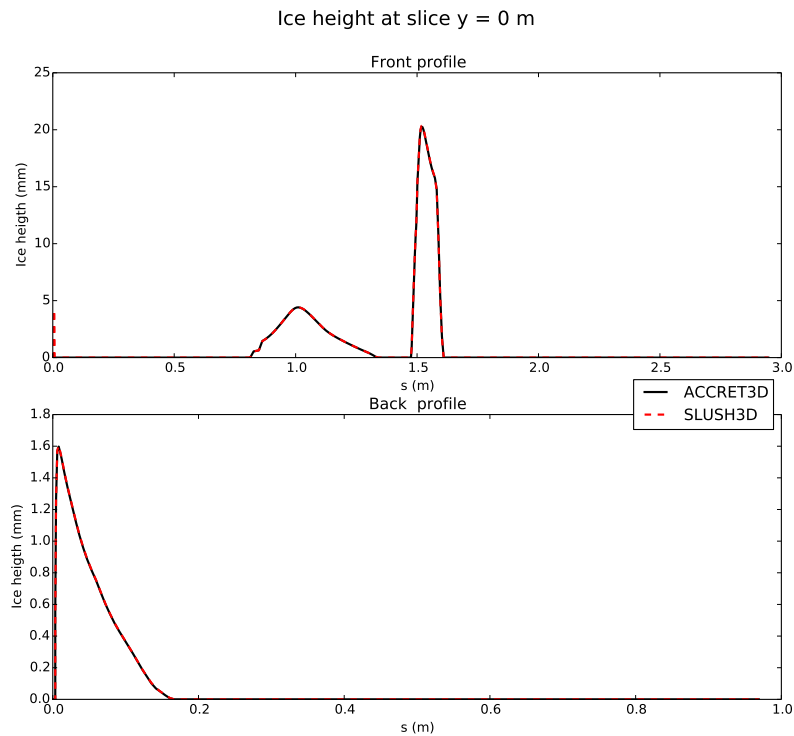


FIGURE 7.6 – Hauteur de givre prévues par SLUSH3D et ACCRET3D dans le plan d'équation  $y = 0$  m

Ces résultats confirment que le modèle tricouche inclut le modèle de Messinger lorsque l'on considère les grandeurs externes stationnaires, une paroi adiabatique et un long temps d'accrétion. Il faut néanmoins remarquer que des différences sont observables sur des temps courts d'accrétion, car dans le modèle de Messinger on considère que l'établissement du film ruisselant est instantané, alors que dans le modèle tricouche, son établissement est modélisé.

Afin d'illustrer cet effet, on effectue le même calcul pour seulement 1 minute d'accrétion. Dans le plan  $y = 0$ , on obtient les formes de givre de la figure 7.7. On observe que sur l'intrados du premier profil, la hauteur de givre calculée par le modèle de Messinger est supérieure, ce qui confirme que l'état stationnaire dans le modèle tricouche n'a pas encore été atteint. Cet effet est encore plus marqué si l'on considère uniquement 10 secondes d'accrétion, comme on peut le voir sur la figure 7.8. Remarquons enfin que même pour ces temps très courts d'accrétion, les modèles de Messinger et tricouche prévoient la même forme de givre sur le second profil (pour la section  $y = 0$ ). Cela s'explique par le fait que sur ce profil, il n'y a pas de ruissellement car l'intégralité des gouttelettes se solidifie à l'impact.

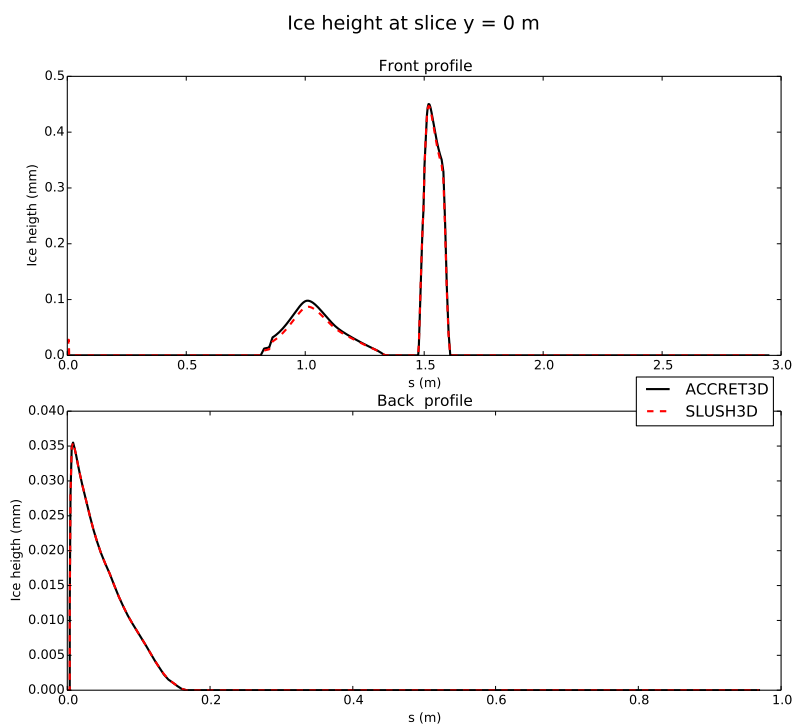


FIGURE 7.7 – Hauteur de givre prévues par SLUSH3D et ACCRET3D dans le plan d'équation  $y = 0$  m pour une minute d'accrétion

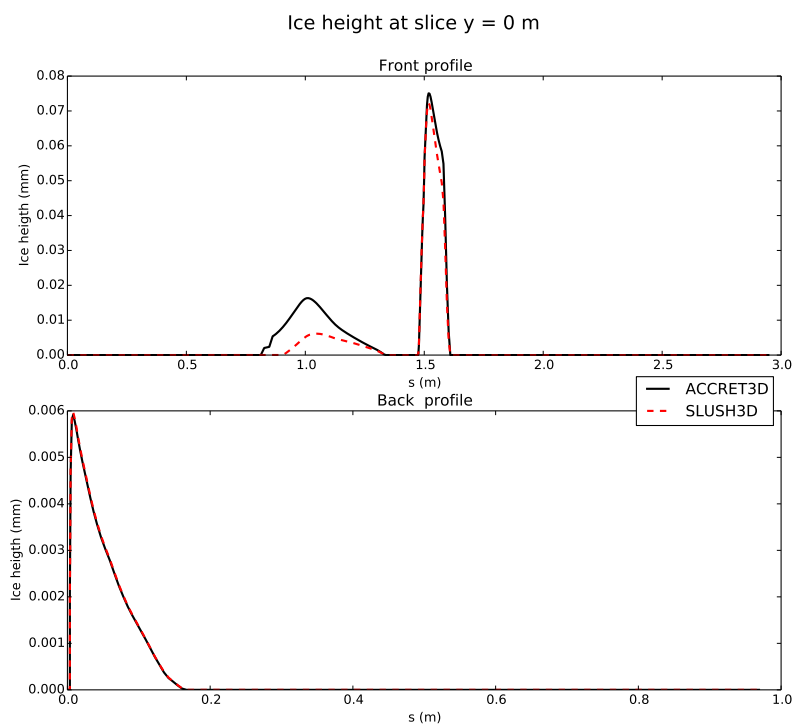


FIGURE 7.8 – Hauteur de givre prévues par SLUSH3D et ACCRET3D dans le plan d'équation  $y = 0$  m pour dix secondes d'accrétion

## 7.2 Accrétion sur une paroi chauffée

On reprend le cas test précédent que l'on modifie légèrement. Au lieu de considérer que la paroi est adiabatique sur toute la surface, on suppose qu'elle est chauffée sur une certaine zone autour de la ligne d'arrêt, comme illustré sur la figure 7.9

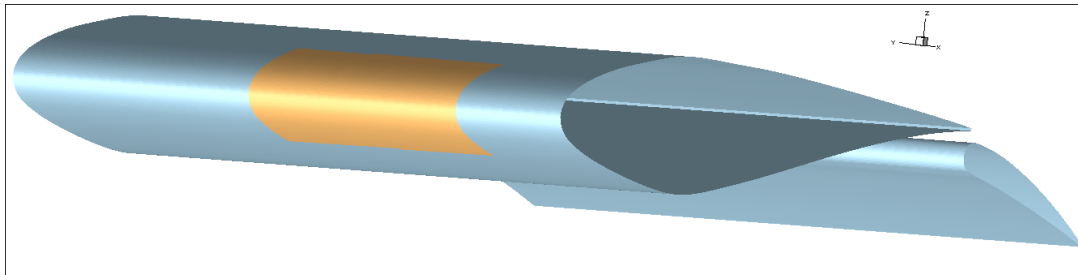


FIGURE 7.9 – Illustration de l'aile chauffée. La zone orange correspond à la zone chauffée, et la zone bleue à une paroi adiabatique

La zone chauffée (en orange sur la figure ci-dessus), est caractérisée par le système d'inéquations suivant :

$$\begin{aligned} x - 0.77y + 0.78 &< 0 \\ -0.6 &< y < 0.1 \end{aligned}$$

où  $x$  et  $y$  sont exprimés en mètres. Dans cette zone de chauffage, une puissance de chauffage de  $1 \text{ W.m}^{-2}$  est imposée, ce qui suffit à antigivrer la zone. Cela produit la formation d'un film d'eau qui ruisselle et gèle dans la zone non protégée, comme on peut le voir sur la figure 7.10 :

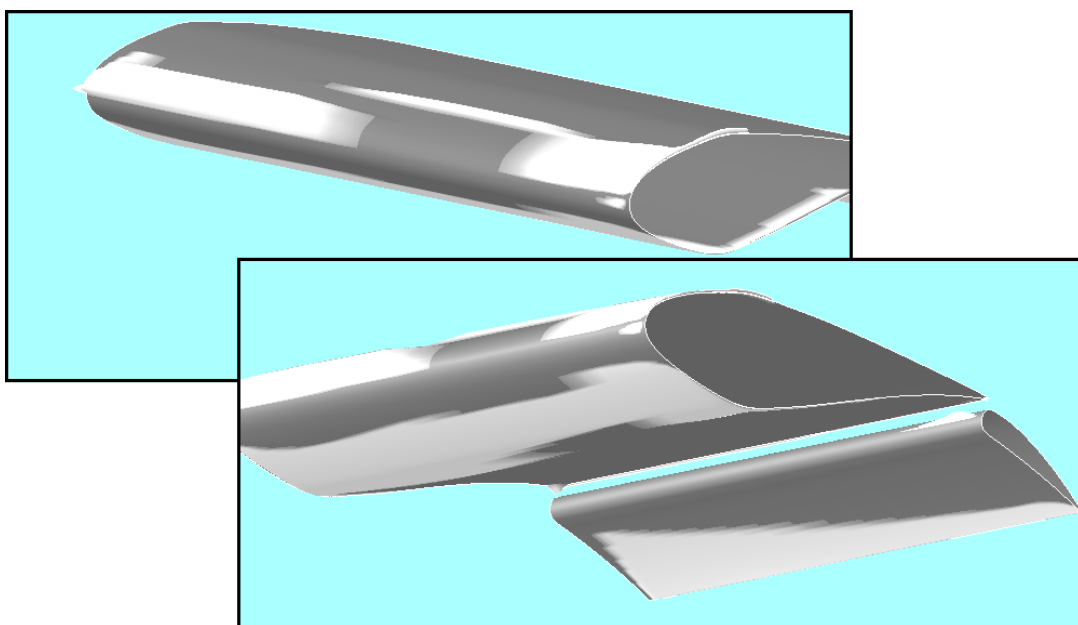


FIGURE 7.10 – Dépôt de givre obtenu avec le code SLUSH3D

### 7.3 Conclusion sur les outils 3D

Dans le cadre de cette thèse, un modèle d'accrétion et des méthodes numériques en trois dimensions ont été développées. Cependant, l'essentiel du développement a été effectué sur le code 2D qui est aujourd'hui utilisable pour des applications industrielles complexes. En revanche, le code 3D n'est pour l'instant qu'à l'état de prototype ; en particulier, sa principale lacune est qu'il n'est pas couplé à un solveur modélisant un système de protection thermique dans la paroi. Les calculs réalisés dans ce chapitre ont néanmoins permis de montrer qu'il était capable de reproduire les résultats obtenus par le modèle de Messinger, ce qui est évidemment le minimum requis. De plus, nous avons montré qu'il était possible de calculer un forme de regel lorsque la paroi est chauffée, bien que pour l'instant nous soyons dans l'obligation d'imposer la valeur du flux de chaleur à la paroi.

Bien que de nombreux développements soient encore à réaliser pour utiliser SLUSH3D sur des configurations industrielles, ces premières applications sont encourageantes quant aux potentialités de la méthode développée dans cette thèse pour traiter des applications complexes en 3D couplant de multiples phénomènes physiques.



# Conclusion et perspectives

L'objectif de ces travaux était de développer un modèle unifié pour traiter l'accrétion de givre, le ruissellement et les phénomènes de changement de phase avec ou sans système de protection activé. Ce modèle devait pouvoir être intégré dans des chaînes de calcul industrielles existantes ce qui rendait impossible le recours à une approche de type DNS traitant de manière détaillée tous les phénomènes physiques quelle que soit leur échelle de temps ou d'espace (impact et solidification des gouttes, formation et effets des rugosités, turbulence, *etc.*). De plus, dans le cas de l'accrétion de givre sur une paroi non chauffée, il devait permettre d'obtenir une solution au moins aussi précise qu'avec le modèle de Messinger qui constitue l'état de l'art dans le domaine.

Nous avons donc opté pour un modèle intégré dans la direction normale à la paroi, ce qui permet d'éliminer une variable. Cette simplification a le double avantage de rendre possible l'utilisation d'un maillage uniquement surfacique et d'éviter un remaillage fréquent du dépôt de givre dont la topologie évolue constamment et peut être complexe (forme en corne par exemple). Ce choix et la contrainte de pouvoir traiter aussi bien le cas des parois froides que celui des parois chauffées nous a conduit naturellement à l'élaboration d'un modèle tricouche permettant de tenir compte des changements de phase aux interfaces givre / paroi et givre / écoulement d'air. Souhaitant pouvoir modéliser le fonctionnement stationnaire et instationnaire des systèmes de protection thermiques, nous avons attaché une grande importance à la modélisation des transferts de chaleur, ce qui nous a amenés à développer une méthode de Galerkin sur un domaine à frontières mobiles ainsi qu'une variante de la méthode de Schwarz sans recouvrement pour coupler fortement le modèle tricouche au modèle thermique du dégivreur. Au niveau numérique, une des principales difficultés que nous avons dues surmonter tient au fait que le système d'équations à résoudre peut varier spatialement et temporellement en raison des phénomènes de changement de phase qui peuvent conduire à l'apparition ou à la disparition de certaines des « couches » du modèle. Nous avons développé pour cela une méthode de point fixe permettant une discrétisation implicite des équations, essentielle en raison de la raideur du problème (due aux termes source en particulier).

Afin de valider les choix effectués en termes de modélisation et de méthodes numériques, nous avons développé des codes en 2 et 3 dimensions d'espace et réalisé différentes simulations sur des configurations académiques pour les unes et plus proches des applications visées pour les autres. Nous avons tout d'abord vérifié que le modèle était bien équivalent au modèle de Messinger dans les cas les plus simples et nous avons également montré, en 2D et 3D, qu'il permettait de simuler les « formes de regel » qui apparaissent lorsqu'un film d'eau se forme sur une zone chauffée sans s'évaporer totalement et se solidifie en aval. Dans le cas 2D, nous sommes allés beaucoup plus loin en réalisant des simulations complètes du fonctionnement d'un dégivreur électrothermique en modes stationnaire et instationnaire,

démontrant ainsi les potentialités de l'approche proposée dans la thèse pour le traitement d'applications complexes, même si à ce stade aucune validation quantitative n'a pu être effectuée.

Pour l'avenir, de nombreuses choses restent à étudier et à améliorer. Premièrement, comme expliqué plus en détails dans les conclusions du chapitre 2, le modèle de lubrification employé pour la modélisation du film d'eau présente plusieurs limites. D'une part, il repose sur l'hypothèse d'un film continu ce qui ne permet pas de reproduire les régimes d'écoulements associés à la présence de ruisselets ou de gouttes isolées qui sont pourtant couramment observés en pratique en raison de la finesse des films. Il faudrait donc, au minimum, introduire les forces de tension de surface afin de pouvoir traiter ces phénomènes. De plus, le modèle retenu est trop simple pour permettre de prévoir, même qualitativement, l'apparition d'instabilités à la surface du film qui pourtant, d'après certains auteurs [88], jouent un rôle important dans la formation des rugosités en conditions « *glaze ice* ». Dans cette optique, le passage à un modèle de type Saint-Venant pourrait être une étape obligée [74, 65]. Par ailleurs, il existe des conditions givrantes dans lesquelles des cristaux de glace coexistent avec des gouttes surfondues. Ces conditions constituent un risque important pour les turboréacteurs car les cristaux peuvent s'accréter sur les aubes des premiers étages du compresseur basse pression et conduire au pompage ou à l'extinction du moteur [59]. Pour l'instant, la présence de cristaux n'est pas prévue dans la formulation du modèle tricouche mais celle-ci pourrait être généralisée en introduisant une couche poreuse, composée d'eau liquide et de cristaux de glace partiellement fondus. Il serait non seulement nécessaire de généraliser le modèle de transfert thermique et de changement de phase mais également de prendre en compte les phénomènes d'érosion à la surface de la couche de givre sous l'action des cristaux qui l'impactent. Des travaux sur ce sujet sont actuellement menés par l'ONERA dans le cadre du projet HAIC (*High Altitude Ice Crystal*).

Enfin, les modèles et méthodes développés dans le cadre de cette étude ont bien été éprouvés en deux dimensions ; il reste à terminer l'industrialisation et la validation du code SLUSH2D. En revanche, en trois dimensions, le code développé jusqu'à présent n'est qu'un prototype et de nombreux développements sont encore nécessaires pour le rendre utilisable dans un contexte industriel avec en premier lieu son couplage avec un modèle de dégivreur thermique afin de pouvoir réaliser des simulations de dégivrage et d'antigivrage sur des voilures ou des entrées d'air de moteurs.

# Références bibliographiques

- [1] G. ACKERMANN : Plattenthermometer in strömung mit großer geschwindigkeit und turbulenter grenzschicht. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 13(6):226–234, 1942. <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02585341#>. (Cité page 34)
- [2] V. ALEXIADES et A.D. SOLOMON : *Mathematical Modeling Of Melting And Freezing Processes*. Taylor & Francis, 1992. <https://books.google.fr/books?id=WfJ13xBpBNYC>. (Cité pages 83, 84, 204 et 208)
- [3] K.M. AL-KHALIL : Further development of an anti-icing runback model. *AIAA 29<sup>th</sup> Aerospace Science Meeting, Reno, NV (USA)*, 1991. (Cité pages 36 et 37)
- [4] D.N. ANDERSON : Manual of scaling methods. *NASA CR*, 212875, 2004. <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20040042486.pdf>. (Cité page 183)
- [5] D. ARNAL, E. COUSTOLS et J.C. JUILLEN : Etude expérimentale et théorique de la transition sur une aile en flèche infinie. *La Recherche Aéronautique*, (4):275–290, 1984. (Cité page 31)
- [6] B. AUPOIX, H. BÉZARD, S. CATRIS et M. WOLFSHTEIN : Étude de modèles de turbulence. rapport final rf. *ONERA, Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique*, 2000. (Cité page 31)
- [7] B. AUPOIX : *Couches Limites Bidimensionnelles Compressibles. Descriptif et Mode D'emploi du Code CLICET–Version 2015*. ONERA, Rapport technique, 2015. (Cité pages 30, 31, 41, 149 et 165)
- [8] B.S. BALDWIN et H.L. OMAX : Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *16th Aerospace Sciences Meeting*, 1978. [ftp://ftp.demec.ufpr.br/CFD/bibliografia/turbulencia/Baldwin\\_Lomax\\_1978.pdf](ftp://ftp.demec.ufpr.br/CFD/bibliografia/turbulencia/Baldwin_Lomax_1978.pdf).
- [9] S. BANACH : *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*. Thèse de doctorat, 1922. [http://kielich.amu.edu.pl/Stefan\\_Banach/pdf/oeuvres2/305.pdf](http://kielich.amu.edu.pl/Stefan_Banach/pdf/oeuvres2/305.pdf). (Cité page 130)
- [10] C. BAYEUX : Modélisation numérique tridimensionnelle de l'accrétion de givre - application au cas des ailes en flèche. *Rapport non publié*, 2015. (Cité page 33)
- [11] H. BEAUGENDRE, F. MORENCY et W. HABASHI : Fensap-ice's three-dimensional in-flight ice accretion module : Ice3d. *Journal of Aircraft*, 2003. <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/2.3113>. (Cité page 27)
- [12] H. BEAUGENDRE et F. MORENCY : Innovative model for flow governed solid motion based on penalization and aerodynamic forces and moments, 2015. <https://hal.inria.fr/hal-01144855/document>. (Cité page 181)
- [13] L. BENANNI : *Modélisation bidimensionnelle de systèmes électrothermiques de protection contre le givre*. Thèse de doctorat, ISAE, 2014. (Cité pages 21, 26, 27, 37, 38, 39, 40, 56, 83, 117, 158, 173 et 177)
- [14] L. BENANNI, P. VILLEDIEU, M. SALAUN et P. TRONTIN : Numerical simulation and modeling of ice shedding : Process initiation. *Computers & Structures*, 142(0):15 – 27, 2014. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794914001333>. (Cité pages 39 et 149)

- [15] Norman R BERGRUN, David JUKOFF, Bernard A SCHLAFF et Carr B NEEL JR : The calculation of the heat required for wing thermal ice prevention in specified icing conditions. 1947. <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930082126.pdf>. (Cité page 16)
- [16] M.-P. BERTHE : *Méthodes de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes optimisées pour l'équation de convection-diffusion instationnaire discrétisée par volumes finis*. Thèse de doctorat, 2013. <http://www.math.univ-paris13.fr/~japhet/Students/Berthe-Thesis.pdf>. (Cité pages 118 et 119)
- [17] J.B. BIOT : *Précis élémentaire de physique expérimentale, Tome 2, Livre huitième*. Imprimerie de Leblanc, 1821. [http://iris.univ-lille1.fr/bitstream/handle/1908/1182/530%20BIOT\\_002.pdf?sequence=73](http://iris.univ-lille1.fr/bitstream/handle/1908/1182/530%20BIOT_002.pdf?sequence=73). (Cité page 73)
- [18] Y. BOURGAULT, H. BEAUGENDRE et W.G. HABASHI : Development of a shallow-water icing model in fensap-ice. *Journal of Aircraft*, 37(4):640–646, 2000. <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/2.2646?journalCode=ja>. (Cité page 36)
- [19] H. BRÉZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999. <https://books.google.fr/books?id=aykKPQAACAAJ>. (Cité pages 78, 123, 222 et 224)
- [20] Andy P BROEREN, Mark G POTAPCZUK, James T RILEY, Philippe VILLEDIEU, Frédéric MOËNS et Michael B BRAGG : Swept-wing ice accretion characterization and aerodynamics. *AIAA Paper*, 2824:2013, 2013. <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2013-2824>. (Cité page 183)
- [21] T. CARROLL et W. H. MCAVOY : *The Formation of Ice Upon Airplanes in Flight*. 1929. [https://ia800501.us.archive.org/11/items/nasa\\_techdoc\\_19930081134/19930081134.pdf](https://ia800501.us.archive.org/11/items/nasa_techdoc_19930081134/19930081134.pdf). (Cité pages 21, 23 et 169)
- [22] P. CHARTON, F. NATAF et F. ROGIER : Méthode de décomposition de domaine pour l'équation d'advection-diffusion. *C.R. Acad. Sci.*, 313:623–626, 1991. (Cité page 119)
- [23] K.Y. CHIEN : Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-reynolds-number turbulence model. *AIAA Journal*, 20, 1982. (Cité page 30)
- [24] T. H. CHILTON et A. P. COLBURN : Mass transfer (absorption) coefficients prediction from data on heat transfer and fluid friction. *Industrial & Engineering Chemistry*, 26(11):1183–1187, 1934. (Cité page 34)
- [25] R. COURANT, K. FRIEDRICHS et H. LEWY : On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11(2):215–234, 1967. <https://web.stanford.edu/class/cme324/classics/courant-friedrichs-lewy.pdf>.
- [26] J. COUSTEIX : *Couche limite laminaire*. Cepadues, 1989. (Cité pages 32 et 33)
- [27] J. COUSTEIX, V. SAINT-MARTIN, R. MESSING, H. BÉZARD et B. AUPOIX : development of the  $k - \varphi$  turbulence model. *Eleventh Symposium on Turbulent Shear Flows, Institut National Polytechnique, Université Joseph Fourier*, 1997. (Cité page 31)
- [28] J. DILLINGH et H. HOEIJMAKERS : Simulation of ice accretion on airfoils during flight. *SAE Technical Paper*, 2003. <http://papers.sae.org/2003-01-2137/>. (Cité page 27)
- [29] C.N. DONATTI, R.A. SILVEIRA, G. BRIDI, C.R. MALISKA et da SILVA A.F.C : Ice accretion simulation in presence of a hot air anti-icing system. *19<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, 2007. <http://www.abcm.org.br/anais/cobem/2007/pdf/COBEM2007-1234.pdf>. (Cité page 38)
- [30] Eleuterio F. TORO : *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 1999.
- [31] Federal Aviation ADMINISTRATION : *Aeronautical Information Manual*. 2014. [https://www.faa.gov/air\\_traffic/publications/media/aim.pdf](https://www.faa.gov/air_traffic/publications/media/aim.pdf). (Cité page 19)
- [32] V.M. FALKNER et S.W. SKAN : *Some Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations*. Reports and memoranda. H.M. Stationery Office, 1930. <https://books.google.fr/books?id=UknCtgAACAAJ>. (Cité page 32)

- [33] M.J. GANDER : Optimized schwarz methods. pages 15–28, 2006. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.118.5739&rep=rep1&type=pdf>. (Cité page 118)
- [34] W.C. GEER et M. SCOTT : The prevention of the ice hazard on airplanes. *National Advisory Committee for Aeronautics*, 1930. [https://ia600304.us.archive.org/6/items/nasa\\_techdoc\\_19930081073/19930081073.pdf](https://ia600304.us.archive.org/6/items/nasa_techdoc_19930081073/19930081073.pdf). (Cité page 22)
- [35] F.G. GELDER, J.P. LEWIS et S.L. KOUTZ : *Icing protection for a turbojet transport airplane : heating requirements, methods of protection, and performance penalties*. 1953. <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/001412.pdf>.
- [36] R.W. GENT : *TRAJICE2 - A Combined Water Droplet Trajectory and Ice Accretion Prediction Program for Aerofoils*. Royal Aerospace Establishment, 1990. (Cité page 27)
- [37] R. W. GENT, N. P. DART et J. T. CANSDALE : Aircraft icing. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 358(1776): 2873–2911, 2000. <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/358/1776/2873.short>. (Cité pages 20 et 21)
- [38] German Federal Bureau of AIRCRAFT ACCIDENT INVESTIGATION : *Study of Reported Occurrences in Conjunction with Cabin Air Quality in Transport Aircraft*. 2014. [http://www.bfu-web.de/EN/Publications/Safety%20Study/Studies/140507\\_Fume\\_Events.pdf?\\_blob=publicationFile](http://www.bfu-web.de/EN/Publications/Safety%20Study/Studies/140507_Fume_Events.pdf?_blob=publicationFile). (Cité page 25)
- [39] G. GOMEZ DE SEGURA SOLAY : Development and validation of a tool for icing computations in 2d and 3d, 2015. Rapport de stage ONERA/ISAE.
- [40] V.H. GRAY, D.T. BOWDEN et U. von GLAHN : *Preliminary Results of Cyclical De-Icing of a Gas-Heated Airfoil*. NACA, 1952. <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19810068710.pdf>. (Cité page 25)
- [41] D. GUFFOND, T. HEDDE et R. HENRY : Overview of icing research at onera. Rapport technique, ONERA, 1993. (Cité page 27)
- [42] T. HEDDE et D. GUFFOND : Onera three-dimensional icing model. *AIAA journal*, 33(6):1038–1045, 1995. <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/3.12795>. (Cité page 27)
- [43] R. HENRY : Development of an eletrothermal de-icing/anti-icing model. *AIAA 30<sup>th</sup> Meeting, Reno, NV (USA)*, 1992. (Cité page 36)
- [44] J. HUA, F. KONG et Hugh H.T. LIU : Unsteady thermodynamic computational fluid dynamics simulations of aircraft wing anti-icing operation. *Journal of aircraft*, 44(4):1113–1117, 2007. <http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/1.24122>. (Cité page 166)
- [45] E. JAMBUNATHAN, K. and Lai, M.A. MOSS et B.L. BUTTON : A review of heat transfer data for single circular jet impingement. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 13(2):106 – 115, 1992. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0142727X92900174>. (Cité page 38)
- [46] R.K. JECK : *Icing Design Envelopes (14 CFR Parts 25 and 29, Appendix C) Converted to a Distance-Based Format*. 2002. [http://www.faa.gov/aircraft/air\\_cert/design\\_approvals/small\\_airplanes/icing\\_protection\\_systems/faa\\_documents/media/acereportar-00-30.pdf](http://www.faa.gov/aircraft/air_cert/design_approvals/small_airplanes/icing_protection_systems/faa_documents/media/acereportar-00-30.pdf). (Cité page 21)
- [47] R.K. JECK : A history and interpretation of aircraft icing intensity definitions and faa rules for operating in icing conditions. 2011. [https://www.faa.gov/aircraft/air\\_cert/design\\_approvals/small\\_airplanes/icing\\_protection\\_systems/faa\\_documents/media/aceReportAR-01-91.pdf](https://www.faa.gov/aircraft/air_cert/design_approvals/small_airplanes/icing_protection_systems/faa_documents/media/aceReportAR-01-91.pdf).
- [48] W.P. JONES et B.E. LAUNDER : The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1972. (Cité page 30)
- [49] W. KAYS et M. CRAWFORD : *Convective heat and mass transfer*. McGraw-Hill, 1993.
- [50] R. KING, A. FEO et C. A. GOLIA, Shah : Ice accretion simulation, chapter 4 (experimental techniques and facilities). Rapport technique, 1997. [https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCYQFjAAahUKEwiB5onHooDIAhXDuxQKHe8wAmA&url=http%3A%2F%2Fwww.dtic.mil%2Fget-tr-doc%2Fpdf%3FLocation%3DU2%26doc%3DGetTRDoc.pdf%26AD%3DADA336679&usg=AFQjCNFSatXTevmu\\_qV8eo2cTGwf7L-J0w&sig2=ckLQbKJvUCL1SdE-3MkV0w&cad=rja](https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCYQFjAAahUKEwiB5onHooDIAhXDuxQKHe8wAmA&url=http%3A%2F%2Fwww.dtic.mil%2Fget-tr-doc%2Fpdf%3FLocation%3DU2%26doc%3DGetTRDoc.pdf%26AD%3DADA336679&usg=AFQjCNFSatXTevmu_qV8eo2cTGwf7L-J0w&sig2=ckLQbKJvUCL1SdE-3MkV0w&cad=rja).

- [51] C. LAFORTE, J.L. LAFORTE et J.C. CARRIER : How a solid coating can reduce the adhesion of ice on a structure. *IWAIS*, 6, 2002. <http://www.uqac.ca/amil/en/publications/presentations/IcephobicCoatingsIWAIS2002.pdf>. (Cité page 22)
- [52] B. LARROUTUROU : How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows. *Journal of Computational Physics*, 95(1):59–84, 1991. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919190253H>. (Cité page 99)
- [53] B. E. LAUNDER et N. SHIMA : Second-moment closure for the near-wall sublayer - development and application. *AIAA Journal*, 27(10):1319–1325, Oct 1989. (Cité page 30)
- [54] C. LAURENT : Modélisation des films liquides minces. *Rapport non publié*, 2011. (Cité pages 164 et 165)
- [55] G. LAVALLE : *Integral modeling of liquid films sheared by a gas flow*. Thèse de doctorat, ISAE, 2014. <https://hal-onera.archives-ouvertes.fr/tel-01139899/document>.
- [56] W.M. LEARY : “We Freeze to Please” (*A History of NASA’s Icing Research Tunnel and the Quest for Flight Safety*). 2002. <http://history.nasa.gov/sp4226.pdf>. (Cité page 22)
- [57] J.P. LEWIS et D.T. BOWDEN : *Preliminary Investigation of Cyclic De-Icing of an Airfoil Using an External Electric Heater*. NACA. <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19810068711.pdf>. (Cité page 26)
- [58] P. L. LIONS : On the schwarz alternating method. iii : a variant for nonoverlapping subdomains. *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia*, 1990. [http://www.ddm.org/DD03/On\\_the\\_Schwarz\\_Alternating\\_Method\\_III\\_A\\_Variant\\_for\\_Nonoverlapping\\_Subdomains\\_%28Lions%29.pdf](http://www.ddm.org/DD03/On_the_Schwarz_Alternating_Method_III_A_Variant_for_Nonoverlapping_Subdomains_%28Lions%29.pdf). (Cité pages 119, 124, 126 et 141)
- [59] Jeanne G MASON, J Walter STRAPP et Philip CHOW : The ice particle threat to engines in flight. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, pages 9–12, 2006. (Cité page 192)
- [60] B. L. MESSINGER : Equilibrium temperature of an unheated icing surface as a function of air speed. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20:29–42, 1953. (Cité pages 16, 34 et 43)
- [61] F. MORENCY, H. BEAUGENDRE et F; GALLIZIO : Aerodynamic force evaluation for ice shedding phenomenon using vortex in cell scheme, penalisation and level set approaches. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 26(9-10):435–450, 2012. <http://dx.doi.org/10.1080/10618562.2012.739683>. (Cité page 181)
- [62] T. G. MYERS : Extension to the messinger model for aircraft icing. *AIAA Journal*, 39(2):211–218, Feb 2001. <http://dx.doi.org/10.2514/2.1312>. (Cité page 37)
- [63] T.G. MYERS, S.L. MITCHELL, G. MUCHATIBAYA et M.Y. MYERS : A cubic heat balance integral method for one-dimensional melting of a finite thickness layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(25):5305–5317, 2007. [http://www.staff.ul.ie/mitchells/Myers\\_IJHMT07.pdf](http://www.staff.ul.ie/mitchells/Myers_IJHMT07.pdf). (Cité page 37)
- [64] Johann NIKURADSE : *Laws of flow in rough pipes*. National Advisory Committee for Aeronautics Washington, 1950. <http://www.hach.ulg.ac.be/cms/en/system/files/Nikuardse%20trad%20NASA.pdf>. (Cité pages 31 et 33)
- [65] Pascal NOBLE et Jean-Paul VILA : Stability theory for difference approximations of some dispersive shallow water equations and application to thin film flows. *arXiv preprint arXiv :1304.3805*, 2013. <http://arxiv.org/abs/1304.3805>. (Cité pages 65 et 192)
- [66] NATIONAL TRANSPORTATION SAFETY BOARD : *AIRCRAFT ACCIDENT REPORT*. 1994. <http://www.ntsb.gov/investigations/AccidentReports/Reports/AAR9601.pdf>. (Cité page 21)
- [67] W. NUSSELT : Die oberflächen kondensation der wasserdampfes. *Z. Ver. Dent. Ing.*, 60:541–546, 1916.
- [68] I. PARASCHIVOIU et F. SAEED : Ice accretion simulation code canice. *Journal of Aircraft*, 1991. <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/2.2541?journalCode=ja>. (Cité page 27)

- [69] H. R. PRUPPACHER : A new look at homogeneous ice nucleation in supercooled water drops. 1995. <http://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469%281995%29052%3C1924%3AANLAHI%3E2.O.CO%3B2>.
- [70] L.A. RODERT et R. JACKSON : A description of the ju 88 airplane anti-icing equipment. NACA, 1942. [http://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc61803/m2/1/high\\_res\\_d/19930093054.pdf](http://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc61803/m2/1/high_res_d/19930093054.pdf). (Cité page 24)
- [71] P.L. ROE : Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2):357–372, 1981. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.457.5978&rep=rep1&type=pdf>. (Cité page 99)
- [72] Morris W RUBESIN et HA JOHNSON : A critical review of skin-friction and heat-transfer solutions of the laminar boundary layer of a flat plate. *Trans. ASME*, 71(4):383–388, 1949. (Cité page 34)
- [73] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Modeling film flows down inclined planes. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 6(2):277–292, 1998. <http://dx.doi.org/10.1007/s100510050550>. (Cité pages 65 et 165)
- [74] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Improved modeling of flows down inclined planes. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 15(2):357–369, 2000. <http://dx.doi.org/10.1007/s100510051137>. (Cité pages 65, 165 et 192)
- [75] T. SATTELMAYER et S. WITTIG : Internal flow effects in prefilming airblast atomizers : mechanisms of atomization and droplet spectra. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 108(3):465–472, 1986.
- [76] H. A. SCHWARZ : Über einen grenzübergang durch alternierendes verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15:272–286, 1870. (Cité page 118)
- [77] W.L. SMITH : Weather problems peculiar to the new york-chicago airway. 1929. <http://docs.lib.noaa.gov/rescue/mwr/057/mwr-057-12-0503.pdf>. (Cité page 19)
- [78] B.R. SMITH : Prediction of hypersonic shock wave turbulent boundary layer interactions with the  $k-l$  two equation turbulence model. *AIAA Paper, 33<sup>rd</sup> Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, 1995. (Cité page 31)
- [79] Important new values of the physical constants of 1986, vapor pressure formulations based on its-90 and psychrometer formulae. *Zeitschrift für Meteorologie*, 1990. (Cité page 201)
- [80] P.R. SPALART et S.R. ALLMARAS : A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *30<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, 1992. (Cité page 30)
- [81] P.R. SPALART et S.R. ALLMARAS : A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aérospatiale*, 1994. (Cité page 30)
- [82] P.R. SPALART : Trends in turbulence treatments. *AIAA Paper 2000-2306, Fluids*, 2000. (Cité page 30)
- [83] J.R. STALDER, M. W. RUBESIN et T. TENDELAND : A determination of the laminar-, transitional-, and turbulent-boundary-layer temperature-recovery factors on a flat plate in supersonic flow. Rapport technique, NACA, 1950. <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930082751.pdf>. (Cité page 34)
- [84] J. STEFAN : Über die theorie der eisbildung, insbesondere über die eisbildung im polar-meere. *Sitzungsberichte der Osterreichischen Akademie der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*, pages 965–983, 1889. [http://www.landesmuseum.at/pdf\\_frei\\_remote/SBAWW\\_98\\_2a\\_0965-0983.pdf](http://www.landesmuseum.at/pdf_frei_remote/SBAWW_98_2a_0965-0983.pdf). (Cité pages 51 et 204)
- [85] T. THEODORSEN et W.C. CLAY : Ice prevention on aircraft by means of engine exhaust heat and a technical study of heat transmission from a clark y airfoil. *Report 403, NACA*, 1933. <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/1933/naca-report-403.pdf>. (Cité pages 23, 24 et 26)
- [86] Bryan THWAITES : *Approximate calculation of the laminar boundary layer*. Royal Aeronautical Society, 1949. (Cité page 32)

- [87] P. TRONTIN et P. VILLEDIEU : Heat and mass transfer analogies for evaporation models at high evaporation rate. *6<sup>th</sup> AIAA Atmospheric and Space Environments Conference*, Jun 2014. <http://dx.doi.org/10.2514/6.2014-2062>. (Cité page 201)
- [88] J.-C. TSAO, A.P. ROTHMAYER et A.I. RUBAN : Stability of air flow past thin liquid films on airfoils. *Computers & Fluids*, 26(5):427 – 452, 1997. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793097000054>. (Cité pages 37 et 192)
- [89] J.C. TSAO et A.P. ROTHMAYER : Application of triple-deck theory to the prediction of glaze ice roughness formation on an airfoil leading edge. *Computers & Fluids*, 31(8):977 – 1014, 2002. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793001000500>. (Cité pages 37 et 65)
- [90] H. A. van der VORST : Bi-cgstab : A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2):631–644, mars 1992. <http://dx.doi.org/10.1137/0913035>.
- [91] E.R. VAN DRIEST : Turbulent boundary layer in compressible fluids. *Journal of Aeronautical Sciences*, 18, 1951. (Cité page 30)
- [92] M. VARGAS et J. TSAO : Parametric study of ice accretion formation on a swept wing at sld conditions. *SAE Technical Paper 2007-01-3345*, 2007. (Cité page 20)
- [93] P. VILLEDIEU, P. TRONTIN et R. CHAUVIN : Glaciated and mixed phase ice accretion modeling using onera 2d icing suite. *6<sup>th</sup> AIAA Atmospheric and Space Environments Conference*, 2014. <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2014-2199>. (Cité page 41)
- [94] V. R. VOLLER et M. CROSS : Accurate solutions of moving boundary problems using the enthalpy method. *J. Heat Mass Transfer*, 24:545–556, 1980. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931081900624>. (Cité page 204)
- [95] V. R. VOLLER : An implicit enthalpy solution for phase change problems : with application to a binary alloy solidification. *Applied Mathematical Modelling*, 11(2):110 – 116, 1987. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X87901545>. (Cité page 204)
- [96] E.A. WHALEN, A.P. BROEREN, et M.G BRAGG : *Characteristics of Runback Ice Accretions and Their Aerodynamic Effects*. Federal Aviation Administration, 2007. <http://www.tc.faa.gov/its/worldpac/techrpt/ar0716.pdf>. (Cité page 23)
- [97] D.C. WILCOX : Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26, 1988. (Cité page 31)
- [98] W.B. WRIGHT : An evaluation of jet impingement heat transfer correlations for piccolo tube application. *42<sup>nd</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2004. (Cité page 165)
- [99] W. WRIGHT : *User's Manual for LEWICE Version 3.2*. NASA, 2008. <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20080048307.pdf>. (Cité pages 27 et 38)
- [100] S. ZHANG, O. EL KERDI, R.A KHURRAM et W.G. HABASHI : {FEM} analysis of in-flight ice break-up. *Finite Elements in Analysis and Design*, 57:55 – 66, 2012. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X1200056X>. (Cité page 39)



# Annexes



## Annexes A

# Formule de Sonntag pour le calcul de la pression de vapeur saturante de l'eau

Dans les applications en givrage, on modélise le flux d'évaporation par un coefficient de transfert massique [87]

$$\dot{m}_{ev} \approx \rho_w h_m (Y_{vs} - Y_{ve}) \quad (\text{A.1})$$

où  $\rho_w$  est la masse volumique de l'eau,  $h_m$  le *coefficient d'échange massique*,  $Y_{vs}$  la fraction massique de vapeur à la surface du système et  $Y_{ve}$  la fraction massique à l'extérieur de la couche limite. Dans cette relation, les fractions massiques est reliée aux fractions molaires  $X_{vi}$  par

$$Y_{vi} = \frac{X_{vi}}{X_{vi} + \frac{M_a}{M_w}(1 - X_{vi})} \quad (\text{A.2})$$

Dans cette expression,  $i$  doit être remplacé par  $s$  ou  $e$ . De plus,  $M_a$  et  $M_w$  sont les masses molaires de l'air et l'eau, respectivement. On a donc

$$\frac{M_a}{M_w} \approx \frac{28.97 \times 10^{-3}}{18.015 \times 10^{-3}} \approx 1.6081$$

Les fractions molaires sont reliées aux pressions :

$$X_{vi} = \frac{p_{vi}}{p_{gi}} \quad (\text{A.3})$$

où  $p_{vi}$  est la pression de la vapeur et  $p_{gi}$  la pression du gaz. On suppose l'équilibre thermodynamique du système, ce qui nous permet d'écrire que  $p_{vi} = p_{\text{sat}}(T_{vi})$ , avec  $p_{\text{sat}}$  la pression de vapeur saturante qui ne dépend que de la température de la vapeur  $T_{vi}$ . Pour évaluer cette température, on utilise la formule de Sonntag [79]

$$p_{\text{sat}}(T) \approx e^{aT^{-1}+b+cT+dT^2+e \ln T} \quad (\text{A.4})$$

où la température  $T$  est exprimée en Kelvin.

Les coefficients diffèrent selon qu'il s'agisse d'évaporation d'eau liquide ou de sublimation de glace. Ces coefficients sont donnés dans le tableau suivant

	Eau liquide	glace
A	-6096.9385	-6024.5282
B	21.2409642	29.32707
C	$-2.711193 \times 10^{-2}$	$1.0613868 \times 10^{-2}$
D	$1.673952 \times 10^{-5}$	$-1.3198825 \times 10^{-5}$
E	2.433502	-0.49382577

Finalement, grâce au calcul de l'aérodynamique externe, les pressions et températures sont connues. Finalement, on peut donc synthétiser le calcul de l'évaporation par l'expression

$$\dot{m}_{ev} \approx \rho_w h_m (Y_{vs}(T_s) - Y_{ve}(T_e)) \quad (\text{A.5})$$

## Annexes B

# Description du code utilisé pour le calcul de la solution de référence en thermique avec changement de phase

Un petit code permettant de valider les modèles de transferts thermiques dans SLUSH2D a été développé au cours de cette thèse. Il est brièvement présenté dans le paragraphe 3.4.1 ; cette annexe permet de détailler les modèles et les schémas et de donner une validation académique.

### B.1 Position du problème

Soient  $h_a$ ,  $L$  et  $h_i$  trois nombres strictement positifs. On pose  $\Omega_a$  le rectangle (cf. figure 3.4)

$$] - L/2, L/2[ \times ] - h_a, 0[ \quad (\text{B.1})$$

et  $\Omega_e$  le rectangle

$$] - L/2, L/2[ \times ] 0, h_i[ \quad (\text{B.2})$$

On suppose que  $\Omega_a$  est composé d'un matériau de densité  $\rho_a$ , de capacité calorifique  $c_a$  et de conductivité  $\lambda_a$ . Le domaine  $\Omega_e$  est composé d'eau, qui peut être localement à l'état liquide ou solide. On fait l'approximation que la densité de la glace et de l'eau liquide sont toutes deux égales à  $\rho_e = 1$  kg/L. De plus, on pose  $c_w$  (resp.  $c_i$ ) la capacité calorifique du l'eau liquide (resp. l'eau solide) et  $\lambda_w$  (resp.  $\lambda_i$ ) sa conductivité.

On note  $T_a$  la température dans  $\Omega_a$  et  $T_e$  la température dans  $\Omega_e$ . De plus, on introduit  $H_a$  et  $H_e$  l'enthalpie massique dans chacun des domaines. Dans chacun des domaines, on impose le zéro de l'enthalpie lorsque le corps est à l'état solide et à la température de fusion de la glace. Pour  $\Omega_a$ , on a donc

$$H_a(T_a) = c_a(T_a - T_m)$$

Pour  $\Omega_e$ , il faut distinguer les deux phases possibles. Si l'eau est à l'état solide, on a

$$H_e(T_e) = c_i(T_e - T_m)$$

et

$$H_e(T_e) = c_w(T_e - T_m) + L_m$$

Ainsi, la température s'exprime en fonction de la variable enthalpie de la façon suivante

$$T_a = \frac{H_a}{c_a} + T_m \quad (\text{B.3})$$

$$T_e = \begin{cases} \frac{H_e}{c_i} + T_m & \text{si } H_e \leq 0 \\ T_m & \text{si } 0 \leq H_e \leq L_m \\ \frac{H_e - L_m}{c_w} + T_m & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

De plus, dans  $\Omega_e$ , on pose  $\phi$  la fraction liquide, définie entre 0 et 1

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } H_e \leq 0 \\ \frac{H_e}{L_m} & \text{si } 0 \leq H_e \leq L_m \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Le domaine  $\Omega_a$  est régi par l'équation de la chaleur

$$\rho_a c_a \frac{\partial T_a}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_a \nabla T_a) + S_a$$

où  $S_a$ , le terme source, est non nul lorsque l'on se place sur la résistance chauffante. Cette équation peut se réécrire dans une formulation enthalpique

$$\rho_a \frac{\partial H_a}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_a \nabla T_a(H_a)) + S_a \quad (\text{B.6})$$

Pour le domaine  $\Omega_e$  dans lequel peut coexister deux phases, l'équation de la chaleur s'applique dans chacune des phases, soit

$$\rho_e c_x \frac{\partial T_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_x \nabla T_e)$$

où  $x$  vaut  $w$  pour la phase liquide et  $i$  pour la phase solide. À l'interface du changement de phase, s'applique une *condition de Stefan* [84], qui relie la discontinuité du flux de chaleur et l'évolution du front de fusion. L'inconvénient de ce genre de formulation est qu'elle requiert de suivre l'interface. Pour pallier cette difficulté, on peut à la place utiliser la *formulation enthalpique*, qui permet, d'une part, de s'affranchir du suivi du front de fusion, et d'autre part de n'avoir qu'une seule équation pour tout le domaine  $\Omega_e$ . L'équation régissant le changement de phase en formulation enthalpique s'écrit [94, 95, 2]

$$\rho_e \frac{\partial H_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_e(H_e) \nabla T_e(H_e)) \quad (\text{B.7})$$

où  $\lambda_e$  est une *conductivité équivalente*. Pour un point particulier de l'espace, lorsque  $H_e < 0$ , cela signifie que ce point est à l'état solide, on a donc évidemment  $\lambda_e = \lambda_i$ . De même, lorsque  $H_e > L_m$ , le point est à liquide donc  $\lambda_e = \lambda_w$ . Lorsque  $0 < H_e < L_m$ , le point est dans un état mixte (fraction liquide entre 0 et 1), la conductivité doit donc être interpolée. Plusieurs choix sont possibles, mais Solomon et Alexiades [2] proposent d'interpoler linéairement la résistance thermique (inverse de la conductivité) plutôt que la conductivité, par rapport à la fraction liquide. En résumé, on a donc

$$\lambda_e(H_e) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } H_e < 0 \\ \lambda_w & \text{si } H_e > L_m \\ \left( \frac{\phi}{\lambda_w} + \frac{1-\phi}{\lambda_i} \right)^{-1} = \left( \frac{H_e/L_m}{\lambda_w} + \frac{1-H_e/L_m}{\lambda_i} \right)^{-1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Finalement, l'équation de thermique qu'il faut résoudre sur le domaine  $\Omega = \Omega_a \cup \Omega_e$  s'écrit

$$\boxed{\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda(H) \nabla T(H))} \quad (\text{B.9})$$

avec

$$H = \begin{cases} H_a & \text{si } z < 0 \\ H_e & \text{sinon} \end{cases}, \quad T = \begin{cases} T_a & \text{si } z < 0 \\ T_e & \text{sinon} \end{cases}, \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_a & \text{si } z < 0 \\ \lambda_e & \text{sinon} \end{cases}, \quad S = \begin{cases} S_a & \text{si } z < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, les conditions aux limites pour ce problème sont, pour  $x = -h_a$ ,  $z = -L/2$  et  $z = L/2$  (paroi adiabatique, voir figure 3.4)

$$\lambda \nabla T(H(x, z)) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Pour le bord supérieur, on a une condition de type coefficient d'échange

$$\lambda_e \left. \frac{\partial T_e}{\partial z} \right|_{x, z=h_i} = h_{tc}(T_r - T_e(x, z = h_i)) \quad (\text{B.11})$$

Enfin, on suppose qu'à l'état initial, on a

$$T = T_0 \quad (\text{B.12})$$

avec  $T_0$  une température donnée.

### Schémas numériques

Étant donné que le domaine étudié est rectangle, on utilise un schéma aux différences finies pour la discrétisation spatiale. Pour cela, on maille de façon cartésienne le domaine  $\Omega$ , avec un pas  $\Delta z$  dans la direction normale et un pas  $\Delta x$  dans la direction tangentielle, comme illustré sur la figure B.1. On pose  $N_x$  (resp.  $N_z$ ) le nombre de points dans la direction  $x$  (resp.  $z$ ).

Pour  $1 \leq i \leq N_z$  et  $1 \leq j \leq N_x$  entiers, on pose le point  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} -\frac{L}{2} + j\Delta x \\ -h_a i \Delta z \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

On discrétise le temps avec un pas  $\Delta t$ , et on pose

$$t^n = n\Delta t \quad (\text{B.14})$$

Maintenant, pour un temps  $t^n$  et un point de l'espace  $\mathbf{x}$ , on pose

$$\begin{aligned} H_{i,j}^n &\stackrel{\text{déf}}{=} H(t^n, \mathbf{x}_{ij}) \\ \lambda_{i,j}^n &\stackrel{\text{déf}}{=} \lambda(H_{i,j}^n) \\ T_{i,j}^n &\stackrel{\text{déf}}{=} T(H_{i,j}^n) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

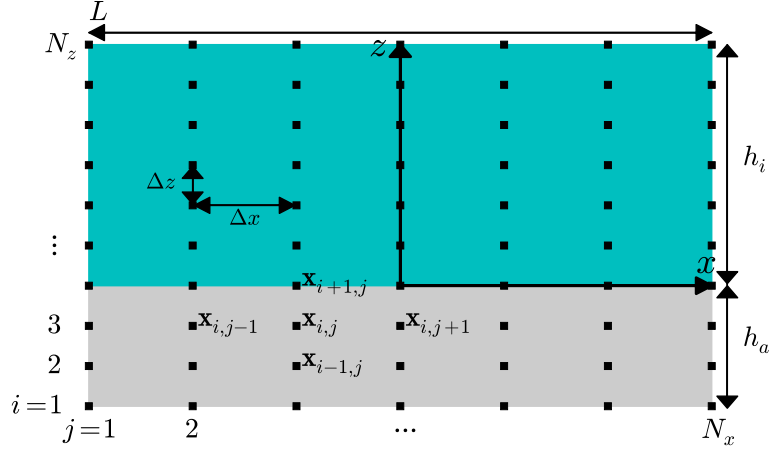


FIGURE B.1 – Maillage du code de validation

Pour la discrétisation spatiale, on utilise un schéma aux différences finies d'ordre 2. Discrétisons les dérivées spatiales dans la direction  $x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) (\mathbf{x}_{ij}) &\approx \frac{\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] (\mathbf{x}_{i,j+\frac{1}{2}}) - \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right] (\mathbf{x}_{i,j-\frac{1}{2}})}{\Delta x} \\
&\approx \frac{\lambda_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial x} (\mathbf{x}_{i,j+\frac{1}{2}}) - \lambda_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial x} (\mathbf{x}_{i,j-\frac{1}{2}})}{\Delta x} \\
&\approx \frac{\frac{\lambda_{i,j+1} + \lambda_{i,j}}{2} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}}{2} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\
&\approx \frac{(\lambda_{i,j+1} + \lambda_{i,j})(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1})(T_{i,j} - T_{i,j-1})}{2\Delta x^2}
\end{aligned}$$

**Remarque :** Dans le cas  $\lambda_{i,j+1} = \lambda_{i,j-1} = \lambda_{i,j}$ , on retrouve bien le schéma classique

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (\mathbf{x}_{ij}) \approx \lambda_{i,j} \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2}$$

De même, la discrétisation dans la direction  $z$  donne

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) (\mathbf{x}_{ij}) \approx \frac{(\lambda_{i+1,j} + \lambda_{i,j})(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j})(T_{i,j} - T_{i-1,j})}{2\Delta z^2}$$

Pour la discrétisation temporelle, on utilise, afin notamment de limiter les coups numériques, un schéma Euler implicite. Finalement, le schéma utilisé pour les points intérieurs ( $2 \leq j \leq N_x - 1$ ,  $2 \leq i \leq N_z - 1$ ) est le suivant

$$\boxed{
\begin{aligned}
\rho \frac{H_{ij}^n - H_{ij}^{n-1}}{\Delta t} &= -T_{i,j}^n \left( \frac{\lambda_{i,j+1}^n + 2\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i,j-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{\lambda_{i+1,j}^n + 2\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i-1,j}^n}{2\Delta z^2} \right) \\
&+ T_{i,j+1}^n \frac{\lambda_{i,j+1}^n + \lambda_{i,j}^n}{2\Delta x^2} + T_{i,j-1}^n \frac{\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i,j-1}^n}{2\Delta x^2} \\
&+ T_{i+1,j}^n \frac{\lambda_{i+1,j}^n + \lambda_{i,j}^n}{2\Delta z^2} + T_{i-1,j}^n \frac{\lambda_{i,j}^n + \lambda_{i-1,j}^n}{2\Delta z^2} \\
&+ S_{ij}^n
\end{aligned}
} \tag{B.16}$$

Pour les conditions aux limites, les quatre bords sont à considérer



- Pour le bord supérieur, on a  $i = N_z$ . Le point  $\mathbf{x}_{N_z+1,j}$  n'a pas d'existence réelle mais on le considère comme un point fantôme. La conductivité est simplement prolongée de la façon suivante

$$\lambda_{N_z+1,j} \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda_{N_z,j}$$

Pour la température, on approche la dérivée en  $z$  en  $\mathbf{x}_{N_z+1,j}$  par le schéma centré d'ordre 2. En utilisant la condition aux limites (B.11), on a donc

$$\lambda_{N_z,j} \frac{\partial T}{\partial z}(\mathbf{x}_{N_z,j}) \lambda_{N_z,j} \approx \frac{T_{N_z+1,j} - T_{N_z-1,j}}{2\Delta z} \approx h_{tc} (T_r - T_{N_z,j})$$

Ainsi, le schéma pour les points du bord supérieurs s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho \frac{H_{N_z,j}^n - H_{N_z,j}^{n-1}}{\Delta t} = & -T_{N_z,j}^n \left[ \frac{\lambda_{N_z,j+1}^n + 2\lambda_{N_z,j}^n + \lambda_{N_z,j-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{3\lambda_{N_z,j}^n + \lambda_{N_z-1,j}^n}{2\Delta z^2} + \frac{h_{tc}}{\Delta z} \right] \\ & + T_{N_z,j+1}^n \frac{\lambda_{N_z,j+1}^n + \lambda_{N_z,j}^n}{2\Delta x^2} + T_{N_z,j-1}^n \frac{\lambda_{N_z,j}^n + \lambda_{N_z,j-1}^n}{2\Delta x^2} \\ & + T_{N_z-1,j}^n \frac{3\lambda_{N_z,j}^n + \lambda_{N_z-1,j}^n}{2\Delta z^2} \\ & + \frac{h_{tc} T_r}{\Delta z} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Les termes en rouges sont ceux qui diffèrent par rapport à (B.16) à cause de la condition de la limite.

- Pour les trois autres bords, on applique le même raisonnement, et on trouve

$$\begin{aligned} \rho \frac{H_{1,j}^n - H_{1,j}^{n-1}}{\Delta t} = & -T_{1,j}^n \left( \frac{\lambda_{1,j+1}^n + 2\lambda_{1,j}^n + \lambda_{1,j-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{\lambda_{1+1,j}^n + 3\lambda_{1,j}^n}{2\Delta z^2} \right) \\ & + T_{1,j+1}^n \frac{\lambda_{1,j+1}^n + \lambda_{1,j}^n}{2\Delta x^2} + T_{1,j-1}^n \frac{\lambda_{1,j}^n + \lambda_{1,j-1}^n}{2\Delta x^2} \\ & + T_{2,j}^n \frac{\lambda_{2,j}^n + 3\lambda_{1,j}^n}{2\Delta z^2} \\ & + S_{1,j}^n \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{H_{i,N_x}^n - H_{i,N_x}^{n-1}}{\Delta t} = & -T_{i,1}^n \left( \frac{\lambda_{i,2}^n + 3\lambda_{i,1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{\lambda_{i+1,1}^n + 2\lambda_{i,1}^n + \lambda_{i-1,1}^n}{2\Delta z^2} \right) \\ & + T_{i,2}^n \frac{\lambda_{i,2}^n + 3\lambda_{i,1}^n}{2\Delta x^2} \\ & + T_{i+1,1}^n \frac{\lambda_{i+1,1}^n + \lambda_{i,1}^n}{2\Delta z^2} + T_{i-1,1}^n \frac{\lambda_{i,1}^n + \lambda_{i-1,1}^n}{2\Delta z^2} \\ & + S_{i,1}^n \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{H_{i,N_x}^n - H_{i,N_x}^{n-1}}{\Delta t} = & -T_{i,N_x}^n \left( \frac{3\lambda_{i,N_x}^n + \lambda_{i,N_x-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{\lambda_{i+1,N_x}^n + 2\lambda_{i,N_x}^n + \lambda_{i-1,N_x}^n}{2\Delta z^2} \right) \\ & + T_{i,N_x-1}^n \frac{3\lambda_{i,N_x}^n + \lambda_{i,N_x-1}^n}{2\Delta x^2} \\ & + T_{i+1,N_x}^n \frac{\lambda_{i+1,N_x}^n + \lambda_{i,N_x}^n}{2\Delta z^2} + T_{i-1,N_x}^n \frac{\lambda_{i,N_x}^n + \lambda_{i-1,N_x}^n}{2\Delta z^2} \\ & + S_{i,N_x}^n \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Il faut bien noter que (B.16-B.20) est un système d'équations non linéaires. En effet, les variables principales sont les nombres  $H_{ij}^n$ , et les grandeurs  $T_{i,j}^n$  et  $\lambda_{i,j}^n$ , à cause des phénomènes de changement de phase, sont des fonctions non linéaires des  $H_{ij}^n$ . Ainsi, la résolution de (B.16-B.20) se fait grâce à un algorithme de Newton.

## B.2 Validation du code : problème de Stefan

Pour valider le code, nous allons l'utiliser pour résoudre numériquement un problème dont nous pouvons calculer une solution analytique. On considère un bloc de glace semi-infini de température initiale  $T_0 < T_m$  et de largeur  $L$ . Les parois latérales sont supposées adiabatiques, et, à la paroi inférieure, on pose  $T(t, z = 0) = T_{\text{wall}} > T_m$ . Le problème, illustré sur la figure (B.2), se réduit donc à un problème unidimensionnel.

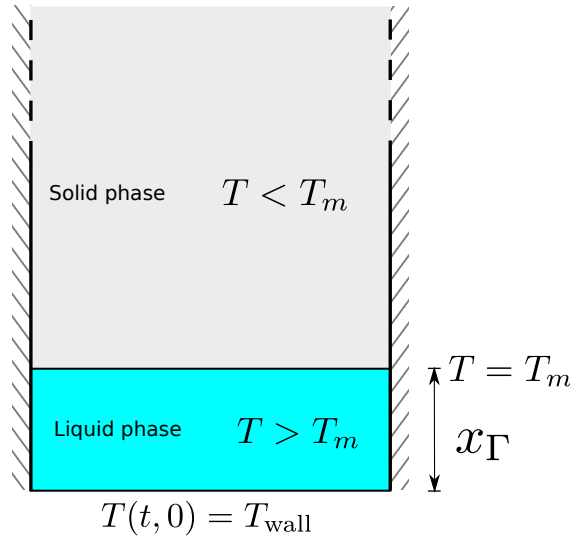


FIGURE B.2 – Illustration du problème de Stefan

On note  $x_\Gamma$  l'ordonnée du front de fusion. On peut démontrer [2] que

$$x_\Gamma(t) = 2\chi \sqrt{\frac{\lambda_w}{\rho_e c_w} t} \quad (\text{B.21})$$

avec  $\chi$  la solution de l'équation

$$\frac{St_w}{\exp(\chi^2) \operatorname{erf}(\chi)} - \frac{St_i}{\nu \exp(\nu^2 \chi^2) \operatorname{erfc}(\nu \chi)} - \chi \sqrt{\pi} = 0$$

où les *nombre de Stefan*  $St_w$  et  $St_i$  et le nombre sans dimension  $\nu$  sont définis par

$$St_w = \frac{c_w(T_{\text{wall}} - T_m)}{L_m}, \quad St_i = \frac{c_i(T_m - T_0)}{L_m}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\lambda_w}{\rho_e c_w} \frac{\rho_e c_i}{\lambda_i}}$$

et les fonctions d'erreur sont définies par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

Pour ce cas test, on pose  $T_{\text{wall}} = 10^\circ\text{C}$  et  $T_0 = -10^\circ\text{C}$ , ce qui donne, après résolution numérique  $\chi \approx 0.29573601432884933$ . Comme le bloc de givre est supposé semi-infini, on pose  $h_i = 1\text{ m}$ , longueur qui est très grande devant le front de fusion que l'on va regarder. Afin d'évaluer la convergence en maillage, on effectue la simulation sur trois pas de maillage  $\Delta z$  différents. Sur la figure B.3 sont affichés les évolutions des fronts de fusion pour les trois pas d'espace. Il est clair que pour le maillage le plus fin (en vert, mailles de  $10\ \mu\text{m}$ ), le front de fusion est très bien reproduit. En revanche, lorsque les mailles sont trop grossières (courbe rouge), on observe, d'une part, que la résolution est imprécise, et d'autre part des paliers dans le front de fusion. Ceci est un effet de maillage qui intervient lorsqu'un point est à la température de fusion (c'est-à-dire lorsqu'il possède une fraction liquide strictement comprise entre 0 et 1). Pour le maillage intermédiaire (en bleu), cet effet est encore très légèrement présent. Ainsi, des mailles de 10 microns seront systématiquement utilisées dans lors des simulations.

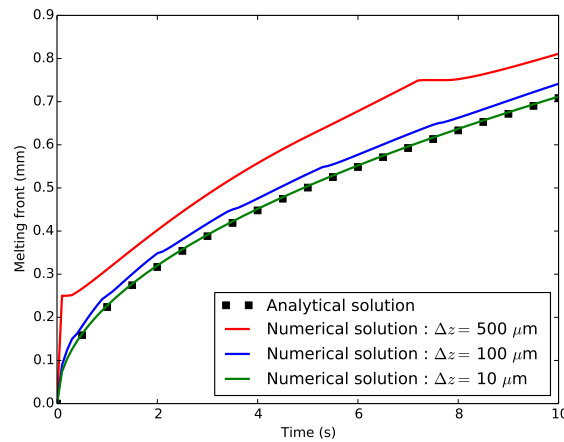


FIGURE B.3 – Illustration des cas test académiques



## Annexes C

# Résolution d'un problème de chauffage académique

### C.1 Résolution du problème

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la relation (3.19) qui intervient la discussion de la méthode intégrale pour la discrétisation spatiale de l'équation de la chaleur du modèle tricouche. Plus précisément, l'objectif est de trouver une formule analytique au problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{z}) = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2}(\tilde{t}, \tilde{z}) & \forall (\tilde{t}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]-1, 0[ \quad (\text{C.1a}) \\ \tilde{T}(0, \tilde{z}) = 1 & \forall \tilde{z} \in [-1, 0] \quad (\text{C.1b}) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{t}, -1) = Bi T(\tilde{t}, -1) & \forall \tilde{t} \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{C.1c}) \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{t}, 0) = 0 & \forall \tilde{t} \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{C.1d}) \end{array} \right.$$

On cherche une solution à (C.1) en utilisant la méthode de séparation des variables, on suppose donc que  $\tilde{T}$  s'écrit

$$\tilde{T}(\tilde{t}, \tilde{z}) = f(\tilde{t})g(\tilde{z}) \quad (\text{C.2})$$

En injectant (C.2) dans (C.1a), on trouve l'expression

$$\frac{f'(\tilde{t})}{f(\tilde{t})} = \frac{g''(\tilde{z})}{g(\tilde{z})} \quad \forall (\tilde{t}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]-1, 0[ \quad (\text{C.3})$$

Or,  $\tilde{t}$  et  $\tilde{z}$  varient de façon indépendantes, ce qui implique que les deux termes de l'équation (C.3) sont égaux à une constante  $K \in \mathbb{R}$ , qui ne dépend ni de  $\tilde{t}$  ni de  $\tilde{z}$ , soit

$$\frac{f'(\tilde{t})}{f(\tilde{t})} = \frac{g''(\tilde{z})}{g(\tilde{z})} = K \quad (\text{C.4})$$

L'intégration de cette constante par rapport au temps donne

$$f(\tilde{t}) = C_0 e^{K\tilde{t}} \quad (\text{C.5})$$

où  $C_0 \in \mathbb{R}$  est une constante d'intégration qui sera discutée par la suite.

Pour être physiquement acceptable, la solution ne doit pas exploser lorsque le  $t \rightarrow \infty$ , ce qui impose  $K < 0$ . On peut donc poser

$$K = -\omega^2, \quad \omega > 0 \quad (\text{C.6})$$

(C.2) peut maintenant être intégré en espace, et il vient

$$g(\tilde{z}) = C_1 \cos(\omega \tilde{z}) + C_2 \sin(\omega \tilde{z}) \quad (\text{C.7})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles d'intégration.

Finalement,  $\tilde{T}$  peut donc être explicité. Les constantes  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  se regroupent en seulement deux constantes réelles, qui l'on nomme  $A$  et  $B$ . Il vient

$$\tilde{T}(\tilde{t}, \tilde{z}) = e^{-\omega^2 \tilde{t}} (A \cos(\omega \tilde{z}) + B \sin(\omega \tilde{z})) \quad (\text{C.8})$$

Maintenant, si l'on injecte (C.8) dans (C.1d) on trouve

$$\omega e^{-\omega^2 \tilde{t}} (-A \sin(\omega 0) + B \cos(\omega 0)) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0} \quad (\text{C.9})$$

d'où

$$\boxed{\tilde{T}(\tilde{t}, \tilde{z}) = A e^{-\omega^2 \tilde{t}} \cos(\omega \tilde{z})} \quad (\text{C.10})$$

De plus, en injectant (C.10) dans (C.1c), on a

$$-A \omega e^{-\omega^2 \tilde{t}} \sin(-\omega) = B i A e^{-\omega^2 \tilde{t}} \cos(-\omega) \quad (\text{C.11})$$

et donc

$$p(\omega) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \boxed{\omega \tan \omega = B i} \quad (\text{C.12})$$

La solution de cette \u00e9quation n'est pas unique, puisque la fonction  $p$  n'est pas bijective sur  $\mathbb{R}$ . En particulier, si l'on pose

$$E = \left\{ \lambda_k \mid \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

on a

$$\forall \lambda_k \in E, \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \lambda_k^-} = -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow \lambda_k^+} = +\infty \end{cases}$$

De plus, il est tr\u00e8s facile de montrer que

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \setminus E, p'(\omega) > 0$$

On a donc la relation fondamentale suivante

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall B i \in \mathbb{R}^{+*}, \exists ! \omega \in ]\lambda_k, \lambda_{k+1}[ , \omega \tan \omega = B i \quad (\text{C.13})$$

On a par ailleurs la m\u00eame relation sur l'intervalle  $]0, \lambda_0[$  (rappelons que  $\lambda_0 = \pi/2$ )

$$\forall B i \in \mathbb{R}^{+*}, \exists ! \omega \in ]0, \lambda_0[ , \omega \tan \omega = B i \quad (\text{C.14})$$

Enfin, on remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p(n\pi) = 0$ , ce qui implique, que  $p$  est une fonction strictement croissante sur chaque intervalle  $[n\pi, \pi/2 + n\pi[$ . De plus, sur chacun de ces intervalle,  $p$  prend toutes les valeurs r\u00e9elles positive.

Pour résumer, on peut donc définir la famille de nombres réels  $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Omega = \{\omega_n \in [n\pi, \pi/2 + n\pi[, \omega_n \tan \omega_n = Bi\}_{n \in \mathbb{N}}$$

On pose de plus la famille de fonctions  $F = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$F = \left\{ \begin{array}{ll} f_n : \mathbb{R}^+ \times [-1, 0] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{t}, \tilde{z}) & \rightarrow f_n(\tilde{z}) = \cos(\omega_n \tilde{z}) \end{array} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

On peut montrer que  $F$  est une famille orthogonale pour la norme  $L^2([-1, 0])$ . Pour cela on montre que  $\forall n \neq m$ , on a

$$\int_{-1}^0 f_n f_m d\tilde{z} = 0 \quad (\text{C.15})$$

La démonstration de ce résultat étant fastidieuse, nous donnons simplement quelques étapes de calcul

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f_n f_m d\tilde{z} &= \int_{-1}^0 \cos(\omega_n \tilde{z}) \cos(\omega_m \tilde{z}) d\tilde{z} \\ &= \int_{-1}^0 \frac{(e^{i\omega_n \tilde{z}} + e^{-i\omega_n \tilde{z}})(e^{i\omega_m \tilde{z}} + e^{-i\omega_m \tilde{z}})}{4} d\tilde{z} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\omega_n + \omega_m)}{\omega_n + \omega_m} + \frac{\sin(\omega_n - \omega_m)}{\omega_n - \omega_m} \right] \\ &= \frac{\cos \omega_n \cos \omega_m}{\omega_n^2 - \omega_m^2} (\omega_n \tan \omega_n - \omega_m \tan \omega_m) \\ &= 0 \quad \text{car } \omega_n \tan \omega_n = \omega_m \tan \omega_m = Bi \end{aligned}$$

De plus, on montre que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f_n^2 d\tilde{z} &= \int_{-1}^0 \cos^2(\omega_n \tilde{z}) d\tilde{z} \\ &= \int_{-1}^0 \frac{\cos 2\omega_n \tilde{z} + 1}{2} d\tilde{z} \\ &= \frac{\sin 2\omega_n + 2\omega_n}{4\omega_n} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Par construction, chaque  $f_n$  est solution de (C.1a,C.1c,C.1d). Par linéarité du problème, on peut donc affirmer que toute combinaison linéaire de  $f_n$  est toujours solution de (C.1a,C.1c,C.1d).

On admet que, réciproquement, toute solution de (C.1a,C.1c,C.1d) s'écrit comme combinaison linéaire des  $f_n$ .

**Remarque :** Pour démontrer ce résultat, il faudrait démontrer que  $F$  est génératrice de toutes les solutions du problème (C.1a,C.1c,C.1d), autrement dit que  $F$  est dense dans l'espace de ces solutions. Cela peut se faire en s'inspirant de la démonstration qui prouve que toute fonction de  $L^2$  est égale à sa décomposition en série de Fourier.

Par conséquent, on peut chercher une solution du problème (C.1) sous la forme

$$\tilde{T}(\tilde{t}, \tilde{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-\omega_n^2 \tilde{t}} \cos(\omega_n \tilde{z}) \quad (\text{C.17})$$

La condition initiale (C.1b) permet alors d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n \tilde{z}) = 1$$

d'où, pour un nombre  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \int_{-1}^0 \cos(\omega_n \tilde{z}) \cos(\omega_m \tilde{z}) dz = \int_{-1}^0 \cos(\omega_m \tilde{z}) dz$$

En utilisant (C.15,C.16), on a donc

$$A_m \frac{\sin 2\omega_m + 2\omega_m}{4\omega_m} = \frac{\sin \omega_m}{\omega_m}$$

d'où

$$A_m = \frac{4 \sin \omega_m}{\sin 2\omega_m + 2\omega_m} \quad (\text{C.18})$$

Finalement, la solution du problème (C.1) s'écrit

$$\tilde{T}(\tilde{t}, \tilde{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4 \sin \omega_n}{\sin 2\omega_n + 2\omega_n} e^{-\omega_n^2 \tilde{t}} \cos(\omega_n \tilde{z}) \quad (\text{C.19})$$

## C.2 Fonction python pour calculer la famille $\Omega_n$ (en fonction du nombre de Bi)

```

from numpy import pi , tan ,zeros,linspace
def search_eigen_values_of_wtanw (Bi,N) :
    # Solution for infinite Bi ==> will be interval borns for finite Bi
    OmegaInf = pi/2.+ linspace(0,N-1,N)*pi
    Omega = zeros(OmegaInf.shape)
    for i in range (N):
        if i==0 : # Solving omega*tan(omega)=Bi on ]0,pi/2[
            Omega[i] = Dichotomy (0.,OmegaInf[i],Bi)
        else :    # Solving omega*tan(omega)=Bi on ]pi/2+(n-1)pi,pi/2+n*pi[
            Omega[i] = Dichotomy (OmegaInf[i-1],OmegaInf[i],Bi)
    return Omega
def Dichotomy (a,b,Bi) :
    x=(a+b)/2.
    for i in range(1000) :
        if x*tan(x) > Bi :
            b=x
        else :
            a=x
    x=(a+b)/2.
    return x

```



## Annexes D

# 10 premières fonctions de base pour la méthode de Galerkin

### D.1 Fonctions mathématiques

$$\begin{aligned}\Psi_1(z) &= -0.5z + 0.5 \\ \Psi_2(z) &= 0.5z + 0.5 \\ \Psi_3(z) &= 0.968245836552z^2 - 9.13853801984e - 16z - 0.968245836552 \\ \Psi_4(z) &= 2.56173769149z^3 - 2.35413291108e - 15z^2 - 2.56173769149z + \\ & 9.5439165083e - 16 \\ \Psi_5(z) &= 5.86967844094z^4 - 1.90110017704e - 14z^3 - 6.7082039325z^2 + \\ & 9.06391468e - 15z + 0.838525491562 \\ \Psi_6(z) &= 12.744484101z^5 - 2.1432965242e - 14z^4 - 16.992645468z^3 + \\ & 2.30012157681e - 14z^2 + 4.24816136699z - 2.5340165738e - 15 \\ \Psi_7(z) &= 26.9410978601z^6 - 2.7279151333e - 13z^5 - 41.6362421474z^4 + \\ & 2.48397628423e - 13z^3 + 15.5115411922z^2 - 4.09964471688e - 14z \\ & - 0.816396904851 \\ \Psi_8(z) &= 56.0823674036z^7 + 3.74553955453e - 12z^6 - 99.2226500218z^5 \\ & - 4.02832262447e - 12z^4 + 49.0230484297z^3 + 9.61130316303e - 13z^2 \\ & - 5.88276581157z - 2.40968459991e - 14 \\ \Psi_9(z) &= 115.61676227z^8 + 5.97991766785e - 12z^7 - 231.23352454z^6 \\ & - 1.05993799772e - 11z^5 + 142.297553563z^4 + 5.24522006677e - 12z^3 \\ & - 27.4893001201z^2 - 6.30001101406e - 13z + 0.808508827061 \\ \Psi_{10}(z) &= 236.797275808z^9 - 1.75393050716e - 14z^8 - 529.311557688z^7 \\ & - 1.91179150923e - 13z^6 + 390.019042507z^5 + 3.26965341236e - 13z^4 \\ & - 105.005126829z^3 - 1.21624398785e - 13z^2 + 7.50036620206z + \\ & 6.03260670609e - 15\end{aligned}$$

### D.2 Fonctions écrites en Fortran 90

À toutes fins utiles, nous donnons les fonctions de base et leurs dérivées écrites en langage Fortran 90

```
real function base_function (d,x)
  integer , intent(in) :: d
  real    , intent(in) :: x
  select case (d)
```

```

case(1)
  base_function = &
    (-5.00000000000000000000e-01)*x**1 + &
    (5.00000000000000000000e-01)
case(2)
  base_function = &
    (5.00000000000000000000e-01)*x**1 + &
    (5.00000000000000000000e-01)
case(3)
  base_function = &
    (9.68245836551854144325e-01)*x**2 + &
    (-9.13853801983998346009e-16)*x**1 + &
    (-9.68245836551854144325e-01)
case(4)
  base_function = &
    (2.56173769148990038147e+00)*x**3 + &
    (-2.35413291108294324529e-15)*x**2 + &
    (-2.56173769148990038147e+00)*x**1 + &
    (9.54391650829807925573e-16)
case(5)
  base_function = &
    (5.86967844093691581975e+00)*x**4 + &
    (-1.90110017703631193360e-14)*x**3 + &
    (-6.70820393249935342794e+00)*x**2 + &
    (9.06391468000083475476e-15)*x**1 + &
    (8.38525491562427616188e-01)
case(6)
  base_function = &
    (1.27444841009747698024e+01)*x**5 + &
    (-2.14329652420494820659e-14)*x**4 + &
    (-1.69926454679663621050e+01)*x**3 + &
    (2.30012157681415133567e-14)*x**2 + &
    (4.24816136699159052625e+00)*x**1 + &
    (-2.53401657380433765738e-15)
case(7)
  base_function = &
    (2.69410978600753416856e+01)*x**6 + &
    (-2.72791513330428050268e-13)*x**5 + &
    (-4.16362421473915063075e+01)*x**4 + &
    (2.48397628422976392653e-13)*x**3 + &
    (1.55115411921670567352e+01)*x**2 + &
    (-4.09964471688457350939e-14)*x**1 + &
    (-8.16396904851098059730e-01)
case(8)
  base_function = &
    (5.60823674036118546837e+01)*x**7 + &
    (3.74553955452527203725e-12)*x**6 + &
    (-9.92226500217798843551e+01)*x**5 + &
    (-4.02832262447024074487e-12)*x**4 + &

```

```

(4.90230484297381465808e+01)*x**3 + &
(9.61130316302948269144e-13)*x**2 + &
(-5.88276581156990818755e+00)*x**1 + &
(-2.40968459991328330217e-14)
case(9)
  base_function = &
    (1.15616762269802237029e+02)*x**8 + &
    (5.97991766785397548005e-12)*x**7 + &
    (-2.31233524539600665548e+02)*x**6 + &
    (-1.05993799772028910266e-11)*x**5 + &
    (1.42297553562827545193e+02)*x**4 + &
    (5.24522006677431705191e-12)*x**3 + &
    (-2.74893001200905757742e+01)*x**2 + &
    (-6.30001101406118053101e-13)*x**1 + &
    (8.08508827061423462901e-01)
case(10)
  base_function = &
    (2.36797275807579922002e+02)*x**9 + &
    (-1.75393050716073994686e-14)*x**8 + &
    (-5.29311557687600611644e+02)*x**7 + &
    (-1.91179150923114770589e-13)*x**6 + &
    (3.90019042506727430464e+02)*x**5 + &
    (3.26965341236406082133e-13)*x**4 + &
    (-1.05005126828764986158e+02)*x**3 + &
    (-1.21624398784798177241e-13)*x**2 + &
    (7.50036620205825688146e+00)*x**1 + &
    (6.03260670608845353917e-15)
case default
  print*, 'The required order is too huge !'
  stop
end select
end function base_function
real function base_function_der (d,x)
  integer , intent(in) :: d
  real    , intent(in) :: x
  select case (d)
  case(1)
    base_function_der = &
      (-5.00000000000000000000e-01)
  case(2)
    base_function_der = &
      (5.00000000000000000000e-01)
  case(3)
    base_function_der = &
      (1.93649167310370828865e+00)*x**1 + &
      (-9.13853801983998346009e-16)
  case(4)
    base_function_der = &
      (7.68521307446970070032e+00)*x**2 + &

```

```

(-4.70826582216588649058e-15)*x**1 + &
(-2.56173769148990038147e+00)
case(5)
base_function_der = &
(2.34787137637476632790e+01)*x**3 + &
(-5.70330053110893611633e-14)*x**2 + &
(-1.34164078649987068559e+01)*x**1 + &
(9.06391468000083475476e-15)
case(6)
base_function_der = &
(6.37224205048738525647e+01)*x**4 + &
(-8.57318609681979282635e-14)*x**3 + &
(-5.09779364038990863151e+01)*x**2 + &
(4.60024315362830267134e-14)*x**1 + &
(4.24816136699159052625e+00)
case(7)
base_function_der = &
(1.61646587160452043008e+02)*x**5 + &
(-1.36395756665214030183e-12)*x**4 + &
(-1.66544968589566025230e+02)*x**3 + &
(7.45192885268929127471e-13)*x**2 + &
(3.10230823843341134705e+01)*x**1 + &
(-4.09964471688457350939e-14)
case(8)
base_function_der = &
(3.92576571825282996997e+02)*x**6 + &
(2.24732373271516338391e-11)*x**5 + &
(-4.96113250108899421775e+02)*x**4 + &
(-1.61132904978809629795e-11)*x**3 + &
(1.47069145289214446848e+02)*x**2 + &
(1.92226063260589653829e-12)*x**1 + &
(-5.88276581156990818755e+00)
case(9)
base_function_der = &
(9.24934098158417896229e+02)*x**7 + &
(4.18594236749778299759e-11)*x**6 + &
(-1.38740114723760393645e+03)*x**5 + &
(-5.29968998860144519017e-11)*x**4 + &
(5.69190214251310180771e+02)*x**3 + &
(1.57356602003229503479e-11)*x**2 + &
(-5.49786002401811515483e+01)*x**1 + &
(-6.30001101406118053101e-13)
case(10)
base_function_der = &
(2.13117548226821918433e+03)*x**8 + &
(-1.40314440572859195749e-13)*x**7 + &
(-3.70518090381320416782e+03)*x**6 + &
(-1.14707490553868857305e-12)*x**5 + &
(1.95009521253363709548e+03)*x**4 + &

```

```
        (1.30786136494562432853e-12)*x**3 + &
        (-3.15015380486294930051e+02)*x**2 + &
        (-2.43248797569596354481e-13)*x**1 + &
        (7.50036620205825688146e+00)
case default
    print*, 'The required order is too huge !'
    stop
end select
end function base_function_der
```



## Annexes E

# Étude des propriétés de continuité en temps des solutions associées à la MIA et à la MG

Deux méthodes de résolution pour l'équation de la chaleur unidimensionnelle viennent d'être proposées, la MIA et une méthode de Galerkin.

Dans cette annexe, nous proposons, à l'aide d'un problème de chaleur particulier, d'étudier la propriété de continuité en temps de chacune des méthodes. Nous verrons en particulier que la MIA donne une solution qui n'est pas continue en temps, ce qui constitue l'une des principales limitations de la méthode. Nous verrons ensuite que la méthode de Galerkin ne présente pas cet inconvénient.

Introduisons le problème de chauffage suivant :

Soit  $e \in \mathbb{R}^{+*}$  un nombre réel fixé, et soit un barreau  $[0, e]$ . On suppose que la diffusivité thermique de ce matériau est constante et uniforme, et vaut  $D > 0$ . On appelle  $T(t, z)$  la température du barreau au temps  $t > 0$  et au point  $0 \leq z \leq e$ .

Soit  $H$  l'espace fonctionnel suivant

$$H = \{v \in L^2(]0, e[), v|_0 = 0\} \quad (\text{E.1})$$

où  $L^2(]0, e[)$  est l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $]0, e[$ , et  $v|_0$  est la trace de  $v$  en  $z = 0$ .

On munit  $H$  de la norme  $L^2$ , soit pour tout  $v$  de  $H$ ,

$$\|v\|_H = \int_0^e |v|^2 dz \quad (\text{E.2})$$

De façon équivalente,  $H$  peut également se définir comme la fermeture pour la norme  $L^2$  des fonctions continues sur  $[0, e]$  valant 0 en 0.

On montre aisément que  $H$  est un espace de Hilbert pour la norme  $L^2$ . En effet, soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $H$ . Comme l'espace  $L^2(]0, e[)$  est complet,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u \in L^2(]0, e[)$ . De plus, comme  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n|_0 = 0$ , on a  $u|_0 = 0$ , ce qui montre que  $u \in H$ , et donc  $H$  est complet.

On considère le problème unidimensionnel de diffusion de chaleur suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(t, z) = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(t, z) & \forall (t, z) \in \mathbb{R}^{+*} \times ]0, e[ & \text{(E.3a)} \\ \frac{\partial T}{\partial z}(t, 0) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^{+*} & \text{(E.3b)} \\ T(t, e) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^{+*} & \text{(E.3c)} \\ T(0, z) = T_0(z) & \forall z \in [0, e] & \text{(E.3d)} \end{cases}$$

où  $T_0 \in H$ .

Remarquons que par construction, la condition initiale (E.3d) respecte la condition du bord supérieur (E.3c). En revanche, rien n'impose qu'elle respecte la condition du bord inférieur (E.3b). Nous verrons dans la suite que c'est précisément dans le cas où cette condition n'est pas respectée que la méthode intégrale présente une discontinuité en temps.

On peut également noter que par linéarité du problème, on aurait pu remplacer les conditions (E.3d) et (E.3c) par des conditions non homogènes (c'est-à-dire avec un second membre non nul), sans rien changer à l'étude (on se serait de toute façon ramenés à l'étude du problème homogène).

Cette partie va se décomposer en trois temps. Dans un premier temps, nous montrerons que le problème (E.3) admet une solution qui est continue en temps. Nous montrerons ensuite que la solution calculée par la MIA n'est pas continue en temps avant de montrer que solution calculée par la méthode de Galerkin est continue en temps.

## E.1 Étude du problème exact

L'objet de paragraphe est de démontrer que le problème (E.3) admet une solution qui est continue en temps. Cette démonstration fait appel à des notions d'analyse fonctionnelle tels que les *espaces de Sobolev*, la notion de *formulation faible* d'une équation aux dérivées partielles, ainsi que le théorème de Hille-Yosida.

Nous rappelons une extension du théorème de Hille-Yosida, qui va nous servir la démonstration. Elle est, par exemple, démontrée dans l'ouvrage de Brézis [19] (**Théorème VII.7**)

**5.1.1. Théorème (Hille-Yosida étendu).** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  est opérateur maximal monotone, autoadjoint. Alors, pour tout  $u_0 \in H$ , il existe une unique fonction*

$$u \in C([0, +\infty[, H) \cap C^1(]0, +\infty[, H) \cap C(]0, +\infty[, \mathcal{D}(A))$$

telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

**Remarque :** Le théorème de Hille-Yosida "classique" est écrit pour  $u_0 \in \mathcal{D}(A)$  (l'hypothèse  $A$  autoadjoint devient alors inutile). Dans cas, on a  $u \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C([0, +\infty[, \mathcal{D}(A))$ . Le fait que  $u_0$  appartienne au domaine de l'opérateur donne donc plus de régularité à la solution  $u$  en  $t = 0$ .

Pour tout  $t$  positif, on pose

$$u(t) = T(t, \cdot), \quad u_0 = T_0(z) \tag{E.4}$$



De plus, on définit  $\mathcal{D}(A)$  le sous espace vectoriel de  $H$

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ f \in H \cap H^2(]0, e[), \frac{\partial f}{\partial z}(0) = 0 \right\} \quad (\text{E.5})$$

où  $H^2(]0, e[)$  est l'espace de Sobolev dont les fonctions, leurs dérivées et leurs dérivées secondes sont intégrables.

On munit  $\mathcal{D}(A)$  de la norme  $H^2(]0, e[)$ , c'est-à-dire, pour tout  $v \in \mathcal{D}(A)$ , on pose

$$\|v\|_{\mathcal{D}(A)} = \int_0^e |v(z)|^2 dz + \int_0^e |v'(z)|^2 dx + \int_0^e |v''(z)|^2 dx \quad (\text{E.6})$$

Enfin, on définit l'opérateur linéaire  $A$ , allant de  $\mathcal{D}(A)$  vers  $H$ , tel que

$$\forall v \in \mathcal{D}(A), Av = -D \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (\text{E.7})$$

Avec ces notations, le problème (E.3) s'écrit de façon abstraite

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 & \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

Montrons que  $A$  un opérateur maximal monotone et autoadjoint

- Montrons que  $A$  est monotone : soit  $v \in \mathcal{D}(A)$ . On a

$$\langle Av, v \rangle_H = -D \int_0^e v''v dz = -D [v'v]_0^e + D \int_0^e v'v' dz = D \int_0^e v'v' dz \geq 0$$

Donc  $A$  est monotone

- Montrons que  $A$  est maximal monotone : soit  $f \in H$ . Il s'agit de montrer que

$$\exists u \in \mathcal{D}(A), \text{ tel que } u + Au = f \quad (\text{E.9})$$

On procède en deux étapes. Dans un premier temps, on cherche une solution de (E.9) dans  $H^1(]0, e[)$ , avant de montrer que la solution trouvée appartient également à  $\mathcal{D}(A)$  (autrement dit, qu'elle est dans  $H^2(]0, e[)$ )

— Soit  $G$  l'espace fonctionnel

$$G = \{v \in H \cap H^1(]0, e[), v'(0) = 0\} \quad (\text{E.10})$$

On munit  $G$  de la norme  $H^1(]0, e[)$ .

Clairement on a  $\mathcal{D}(A) \subset G$ . On s'intéresse à la formulation faible du problème (E.9), *e.i.*

$$\text{Trouver } u \in G \text{ tel que } \forall v \in G, \int_0^e uv dz + D \int_0^e u'v' dz = \int_0^e fv dz \quad (\text{E.11})$$

On pose

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_0^e uv dz + D \int_0^e u'v' dz \\ l(v) = \int_0^e fv dz \end{cases}$$

Il est clair que  $a$  est une forme bilinéaire et  $l$  une forme linéaire.  
De plus, on a pour tout  $u, v \in G$

$$\begin{cases} |a(u, v)| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + D \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \leq (1 + D) \|u\|_G \|v\|_G \\ |a(v, v)| \geq \min(1, D) \|v\|_G^2 \\ l(v) \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_G \end{cases}$$

Les deux premières lignes montrent que  $a$  est continue et coercive, la troisième que  $l$  est continue. D'après le théorème de **Lax-Milgram**, on a donc montré que

$$\exists! \tilde{u} \in G \text{ tel que } \forall v \in G, \int_0^e \tilde{u}v \, dz + D \int_0^e \tilde{u}'v' \, dz = \int_0^e fv \, dz \quad (\text{E.12})$$

— Il reste maintenant à démontrer que  $\tilde{u} \in \mathcal{D}(A)$ . En fait, cette propriété est quasiment évidente car on est en dimension 1. En effet, on vient de montrer que  $\tilde{u}$  est solution faible de l'équation  $\tilde{u} - D\tilde{u}'' = f$ . Elle est donc solution au sens des distributions. Or,  $f$  et  $\tilde{u}$  appartiennent à  $L^2(]0, e[)$ . Par suite,  $\tilde{u}'' \in L^2(]0, e[)$  et donc,  $\tilde{u} \in H^2(]0, e[)$ .

**Remarque :** *ce raisonnement n'est pas applicable aux dimensions supérieures, car le fait que  $\Delta\tilde{u} \in L^2$  n'implique pas, de façon triviale, que  $\tilde{u} \in H^2$ . Néanmoins, si l'on suppose que le domaine sur lequel est défini l'équation est  $C^1$  (c'est-à-dire s'il n'y a pas de "coin"), cette implication devient vraie (voir par exemple [19]).*

Finalement, on vient donc de montrer que  $\tilde{u} \in \mathcal{D}(A)$ , ce qui implique que (E.9) est vérifiée, et donc que  $A$  est maximal monotone.

- Enfin, il est clair que  $A$  est un opérateur autoadjoint, puisque quels que soient  $u, v \in \mathcal{D}(A)$ , on a

$$\int_0^e Auv \, dz = -D \int_0^e u''v \, dz = D \int_0^e u'v' \, dz = -D \int_0^e uv'' \, dz = \int_0^e uAv \, dz$$

- En résumé, on a défini l'espace de Hilbert  $H$ , et un opérateur linéaire  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ . De plus, on a montré que l'opérateur  $A$  était maximal monotone et autoadjoint. Enfin, on s'est donné  $u_0 \in H$  et on a posé le problème (E.8).

On peut donc appliquer le théorème E.1.1, stipulant l'existence d'une unique fonction

$$u \in C([0, +\infty[, H) \cap C^1(]0, +\infty[, H) \cap C(]0, +\infty[, \mathcal{D}(A)) \quad (\text{E.13})$$

solution de (E.8).

En particulier, cela implique que  $u \in C([0, +\infty[, L^2(]0, e[))$ , et donc que la température d'interface inférieure (définie comme la trace de  $u(t)$  en  $z = 0$ ) est continue en temps. Plus précisément, la fonction  $t \rightarrow T(t, 0)$  est continue pour tout  $t$ .

On remarque qu'en revanche, rien n'assure que la fonction  $t \rightarrow \frac{\partial T}{\partial z}(t, 0)$  soit continue lorsque  $t = 0$ . Cela est tout-à-fait compréhensible, puisqu'*a priori*,  $u_0 \notin \mathcal{D}(A)$ , autrement dit, on a *a priori*  $\frac{\partial T}{\partial z}(t = 0, 0) \neq 0$ , alors que  $\forall t > 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial z}(t, 0) = 0$ .

Physiquement, on vient donc de démontrer que pour le problème (E.3), la température est continue en temps pour tout  $t \geq 0$ , mais que le flux de chaleur est continu en temps uniquement pour  $t > 0$ .

## E.2 Étude du problème résolu par MIA

On se propose de résoudre le problème (E.3), dans un cas particulier, à l'aide de la méthode intégrale. Pour cela, on choisit arbitrairement une température  $\alpha \neq 0$  (le cas

$\alpha = 0$  étant trivial) et on pose

$$T_0(z) = \alpha \frac{e-z}{e} \quad (\text{E.14})$$

On vérifie bien que  $T_0 \in H$ , puisque  $T_0(e) = 0$ . Cela implique, au vu de la démonstration du paragraphe précédent, que la **température de l'interface inférieure ( $z=0$ ) est continue en temps**.

On conserve les notations (3.7) introduites dans l'exposé de la méthode intégrale, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \widehat{T}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{e} \int_{z=0}^e T(t, z) dz & \text{Temp\u00e9rature moyenne du domaine} \\ T_a(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} T(t, 0) & \text{Temp\u00e9rature de l'interface inf\u00e9rieure} \\ T_b(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} T(t, e) & \text{Temp\u00e9rature de l'interface sup\u00e9rieure} \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

Il est clair que de par l'\u00e9quation (E.3c), on a  $T_b(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . De plus, la condition aux limites (E.3b) s'\u00e9crit

$$\frac{6\widehat{T}(t) - 4T_a(t) - 2T_b(t)}{e} = 0 \Rightarrow T_a(t) = \frac{3}{2}\widehat{T}(t) \quad (\text{E.16})$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} T_a(0) &= \alpha \\ \widehat{T}(0) &= \alpha/2 \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Enfin, l'\u00e9quation de conservation de l'\u00e9nergie (E.3a) se r\u00e9crit, sous forme int\u00e9grale (se r\u00e9f\u00e9rer \u00e0 (3.9a))

$$e \frac{\partial \widehat{T}}{\partial t} = 6D \frac{T_a - 2\widehat{T}}{e} = -3 \frac{D}{e} \widehat{T} \quad (\text{E.18})$$

Finalement, r\u00e9soudre le probl\u00e8me (E.3) revient \u00e0 r\u00e9soudre l'\u00e9quation aux d\u00e9riv\u00e9es ordinaires

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{T}}{\partial t}(t) = -3 \frac{D}{e^2} \widehat{T}(t) \\ \widehat{T}(0) = \alpha/2 \end{cases} \quad (\text{E.19})$$

Apr\u00e8s r\u00e9solution, on trouve que la solution du probl\u00e8me int\u00e9gral s'\u00e9crit, pour tout  $t > 0$

$$\begin{cases} T_a(t) = \frac{3}{4} \alpha \exp\left(-\frac{3D}{e^2} t\right) \\ T_b(t) = 0 \\ \widehat{T}(t) = \frac{1}{2} \alpha \exp\left(-\frac{3D}{e^2} t\right) \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

Ainsi, on vient de d\u00e9montrer que la m\u00e9thode int\u00e9grale pr\u00e9voit une temp\u00e9rature d'interface  $T_a$  discontinue en temps, ce qui n'est pas conforme \u00e0 l'\u00e9quation exacte. Cette discontinuit\u00e9 provient du fait que l'on impose un flux de chaleur \u00e0 cette interface qui est lui-m\u00eame discontinu. On peut donc conclure que la m\u00e9thode int\u00e9grale est peu adapt\u00e9e \u00e0 la r\u00e9solution de l'\u00e9quation de la chaleur unidimensionnelle lorsque les conditions aux limites varient brusquement. Pour les applications en givrage, cette limitation est probl\u00e9matique car ce cas peut survenir, par exemple \u00e0 l'activation d'un syst\u00e8me de protection thermique.

Ce phénomène peut s'expliquer intuitivement. En fait, la méthode intégrale consiste à écrire une équation d'évolution sur la température moyenne, mais pas sur les températures d'interfaces qui sont utilisées pour faire respecter les conditions aux limites. Ainsi, les températures d'interfaces varient aussi brusquement que les conditions aux limites, ce qui n'est pas conforme à l'équation de la chaleur.

En conclusion, on peut dire que **l'équation de la chaleur a des propriétés régularisantes (en temps) qui sont perdues lorsqu'on la résout avec la méthode intégrale.**

### E.3 Étude du problème résolu par la méthode de Galerkin

Dans ce paragraphe, nous montrons que la solution donnée par la méthode de Galerkin est continue en temps.

Pour ce faire, nous reprenons le problème de chauffage (E.3), avec

$$T(0, z) = \alpha \frac{e^{-z}}{e}, \quad \alpha \neq 0$$

Nous avons démontré dans le paragraphe E.1 que ce problème admet une solution continue en temps. Montrons que la méthode de Galerkin donne également une solution continue.

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On note  $T_G$  le champ de température calculé avec la méthode de Galerkin,  $T_G$  est donc une approximation du champ  $T$ . On a

$$\forall t \geq 0, \forall z \in [0, e], T_G(t, z) = \sum_{j=1}^n U_j(t) \Psi_j \left( \frac{2z}{e} - 1 \right) \quad (\text{E.21})$$

où les  $U_j$  sont des fonctions réelles qu'il reste à déterminer. Les fonctions  $\Psi_j$  sont définies dans le paragraphe 3.3.2.

Comme une condition de Dirichlet homogène est imposée en  $z = e$ , on a automatiquement

$$\forall t \geq 0, U_2(t) = 0 \quad (\text{E.22})$$

Ainsi, l'équation sur  $U_2$  peut évidemment être omise.

Comme une condition de Neumann homogène est imposée en  $z = 0$  pour tout  $t > 0$ , on a

$$\forall t > 0, \sum_{j=1}^n U_j(t) \frac{\partial \Psi_j(-1)}{\partial z} = 0 \quad (\text{E.23})$$

De plus, afin de respecter la condition initiale, on a

$$U_1(0) = \alpha \text{ et } \forall j \geq 2, U_j(0) = 0 \quad (\text{E.24})$$

Ainsi, les fonctions  $U_j$  sont solutions du système différentiel suivant

$$\begin{cases} \forall i \neq 2, \frac{e}{2} A_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial t}(t) + \frac{2D}{e} \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij} U_j(t) = 0 \\ U_1(0) = \alpha \\ \forall j \geq 3, U_j(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.25})$$

où les coefficients  $A_{ij}$  et  $\Lambda_{ij}$  sont définis en (3.37). On pose les vecteurs de  $\mathbb{R}^{n-1}$

$$\mathbf{V}(t) = (U_1(t), U_3(t), \dots, U_n(t))^T, \quad \mathbf{V}_0 = (\alpha, 0, \dots, 0)^T, \quad (\text{E.26})$$

ainsi que les matrices  $(n-1) \times (n-1)$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{31} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{13} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{33} & \cdots & \Lambda_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{n1} & \Lambda_{n3} & \cdots & \Lambda_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{E.27})$$

La matrice  $\mathbf{B}$  est inversible car elle est formée par des produits scalaires d'une famille libre de vecteurs. Le système différentiel (E.25) s'écrit donc sous forme matricielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(t) = -\frac{4D}{e^2} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{V}(t) \\ \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0 \end{cases} \quad (\text{E.28})$$

L'application  $\mathbf{V} \rightarrow -\frac{4D}{e^2} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{V}$  est lipschitzienne (étant donné que c'est une application linéaire en dimension finie), donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $\exists! \mathbf{V} \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ .

Ainsi, le champ de température obtenu avec la méthode de Galerkin s'écrit

$$T_G(t, z) = \sum_{j=1}^n U_j(t) \Psi_j \left( \frac{2z}{e} - 1 \right) \quad (\text{E.29})$$

sachant que tous des coefficients  $U_j$  sont dérivables.

En particulier, cela signifie que la fonction  $t \rightarrow T_G(t, 0)$  est continue en temps, ce qui est conforme à la solution exacte.

Cependant, on note que la fonction  $t \rightarrow \frac{\partial T_G}{\partial z}(t, 0)$  est également continue en temps, ce qui n'est pas conforme à la solution exacte. En effet, à l'instant initial, on a  $\frac{\partial T}{\partial z}(0, 0) = -\frac{\alpha}{e}$ , alors que pour tout  $t > 0$ , on a  $\frac{\partial T}{\partial z}(t, 0) = 0$  (on rappelle que le  $T$  est le champ de température du problème exact (E.3)).

À l'inverse de la méthode intégrale, on peut donc conclure que la méthode de Galerkin a tendance à prévoir des solutions "trop régulières", au sens où elle ne prévoit pas la discontinuité en temps du flux de chaleur. En pratique, si l'on s'intéresse uniquement au champ de température (ce qui est le cas dans les applications en givrage), cela ne pose pas de problème particulier car, dans la formulation de Galerkin, on n'écrit pas directement d'équation sur les flux de chaleur (car il s'agit d'une formulation faible).



## Annexes F

# Démonstration du principe du maximum pour le schéma associé à l'équation d'énergie du film

Dans la section 4.1.3, nous utilisons un schéma numérique inspiré de celui de Larroutou qui respecte un principe du maximum. Pour le démontrer, il faut montrer le résultat suivant :

Soient des fonctions réelles positives  $\alpha_j$ , et des fonctions réelles  $T_j(t)$ . On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_j \alpha_j(t)(T_j(t) - T(t)) & \forall t \geq 0 \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

On note

$$\begin{aligned} T_{\min} &= \min \left[ T_0, \min_j \left( \min_{t \geq 0} T_j(t) \right) \right] \\ T_{\max} &= \max \left[ T_0, \max_j \left( \max_{t \geq 0} T_j(t) \right) \right] \end{aligned}$$

Montrons que si  $T$  est solution de (F.1) alors

$$\forall t > 0, \quad T_{\min} \leq T(t) \leq T_{\max} \quad (\text{F.2})$$

Montrons que cette propriété est vraie pour le schéma d'Euler implicite. En effet, pour  $\Delta t > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} &= \sum_j \alpha_j^{n+1} (T_j^{n+1} - T^{n+1}) \\ &= \frac{T^n + \Delta t \sum_j \alpha_j^{n+1} T_j^{n+1}}{1 + \Delta t \sum_j \alpha_j^{n+1}} \\ \Leftrightarrow T^{n+1} &= \frac{T^n + \Delta t \sum_j \alpha_j^{n+1} T_j^{n+1}}{1 + \Delta t \sum_j \alpha_j^{n+1}} \end{aligned}$$

Ainsi,  $T^{n+1}$  est une combinaison convexe de  $T^n$  et des  $T_j^{n+1}$ , indépendamment du pas de temps choisi. Comme le schéma d'Euler implicite converge vers la solution de (F.1) (le problème et le schéma sont linéaires, et le schéma est consistant et stable), la propriété passe à la limite.





## Annexes G

# Interface graphique pour IGLOO2D

Au cours de cette thèse, une interface graphique a été développée en Python avec la bibliothèque PyQt<sup>1</sup>. Elle permet de lancer la chaîne IGLOO2D et en particulier le module SLUSH2D. L'intérêt par rapport à l'utilisation du programme en console est d'une part la simplicité, et d'autre part de pouvoir mettre des *gardes-fous* directement dans l'interface afin d'interdire dès la saisie des données des valeurs aberrantes (comme une pression négative). L'interface se présente comme sur la figure G.1

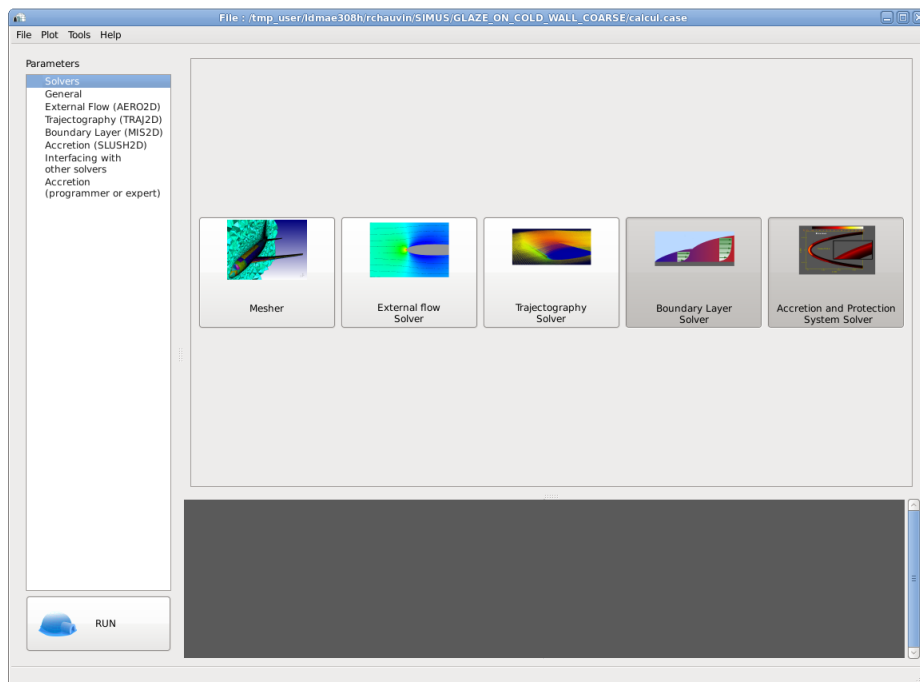


FIGURE G.1 – Interface graphique (onglet du choix des solveurs)

A l'ouverture, on peut ouvrir un fichier sur lequel on a déjà travaillé. Ce fichier est nécessairement un fichier *.case*, qui est le format créé spécialement pour la chaîne IGLOO2D. C'est un fichier ASCII qui fonctionne par systèmes de mot-clés. Ce fichier d'entrée IGLOO2D est alors lu par le logiciel.

L'interface se divise en plusieurs onglets que l'on peut sélectionner dans la colonne de gauche :

1. <https://wiki.python.org/moin/PyQt>

- L'onglet des solveurs : dans cet onglet on sélectionne les solveurs que l'on souhaite lancer. Cela permet de ne pas avoir à les relancer tous systématiquement.
- L'onglet général, dans lequel on rentre toutes les grandeurs physiques externes, comme la pression et la température à l'infini amont, le LWC, etc.
- L'onglet pour le solveur AERO2D (aérodynamique externe), dans lequel on peut rentrer certains paramètres numériques ainsi que le nom des fichiers dans lequel on peut enregistrer les champs externes dans des fichiers au format *Tecplot* ou *vtk* (si ces champs sont laissés vides, alors la sauvegarde n'a pas lieu). Notons que ces grandeurs sont toujours sauvegardées dans des fichiers binaires *.arch1d* et *.arch2d* qui permettent de coupler l'ensemble des solveurs de la chaîne IGLOO2D. Comme les fichiers *.case*, ces fichiers binaires ont des formats propres à la chaîne IGLOO2D.
- L'onglet pour le solveur de TRAJ2D (trajectographie), avec quelques options numériques et le nom des fichiers de sortie également.
- L'onglet pour le solveur MIS2D (couche limite), avec également des paramètres numériques ainsi que les grandeurs relatives à la rugosité de la paroi (cela permet de rentrer une hauteur de rugosité équivalent grain de sable). On peut également choisir entre plusieurs modèles pour la modélisation de la couche limite intégrale.
- L'onglet pour le solveur SLUSH2D (modèle tricouche) qui permet de choisir le pas de temps utilisé pour la simulation (on peut le faire dépendre du temps), activer ou non les modèles d'évaporations, activer ou non le couplage avec ETIPS (dans le cas négatif, on choisit le type de conditions aux limites que l'on souhaite imposer pour SLUSH2D), choisir entre la méthode intégrale approchée et la méthode de Galerkin (en entrant le nombre de fonctions de base pour cette dernière), etc.
- Enfin, le dernier onglet permet d'interfacer le code avec le solveur externe *Mechanical Ice*, qui permet de prévoir le détachement du givre. De plus, cet onglet permet de configurer un calcul en *multi-pas*, c'est-à-dire de relancer les modules AERO2D, TRAJ2D et MIS2D (ou CLICET) lorsque la forme de givre évolue.
- Un second onglet relatif à SLUSH2D permet de rentrer des paramètres très spécifiques, plutôt dédiés au débogage ou à la validation du code.

Une fois que la mise en données est faite, on lance le calcul en cliquant sur le bouton *RUN* en bas à gauche, et la sortie du code s'affiche alors dans le terminal.

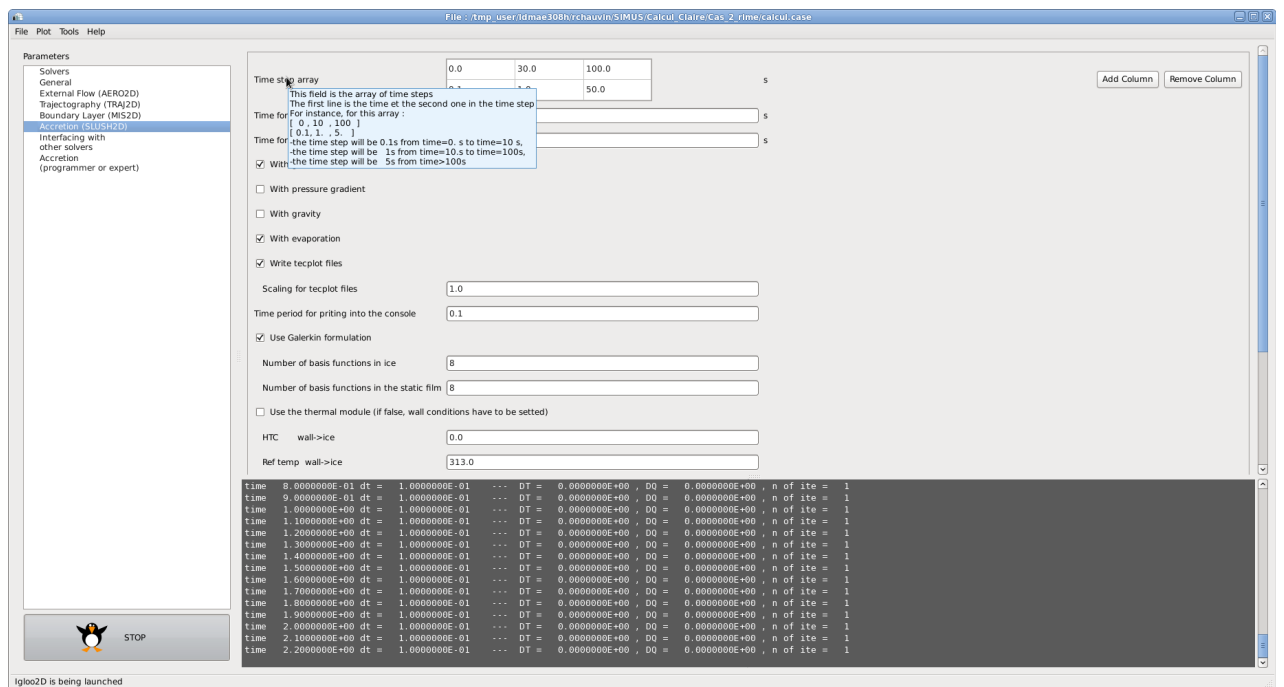


FIGURE G.2 – Interface graphique (lors de l'exécution du code)

Enfin, pour cette interface graphique, des outils de prévisualisation et de post-traitement ont été développés. On peut par exemple prévisualiser le champ de pression externe grâce à la bibliothèque `vtk`<sup>2</sup> de Python. On peut également tracer toutes les grandeurs surfaciques, qui sont les entrées du module SLUSH2D (comme les grandeurs Euler à l'extérieur de la couche limite, le taux d'impact de gouttes, etc) grâce à l'utilisation de la bibliothèque `matplotlib`<sup>3</sup>. Il est également possible d'afficher la forme de givre finale. Enfin, des outils de post-traitement pour une visualisation instationnaire avec le logiciel Tecplot<sup>4</sup> sont disponibles.

2. <http://www.vtk.org/Wiki/VTK/Examples/Python>

3. <http://matplotlib.org/>

4. <http://www.tecplot.com/>

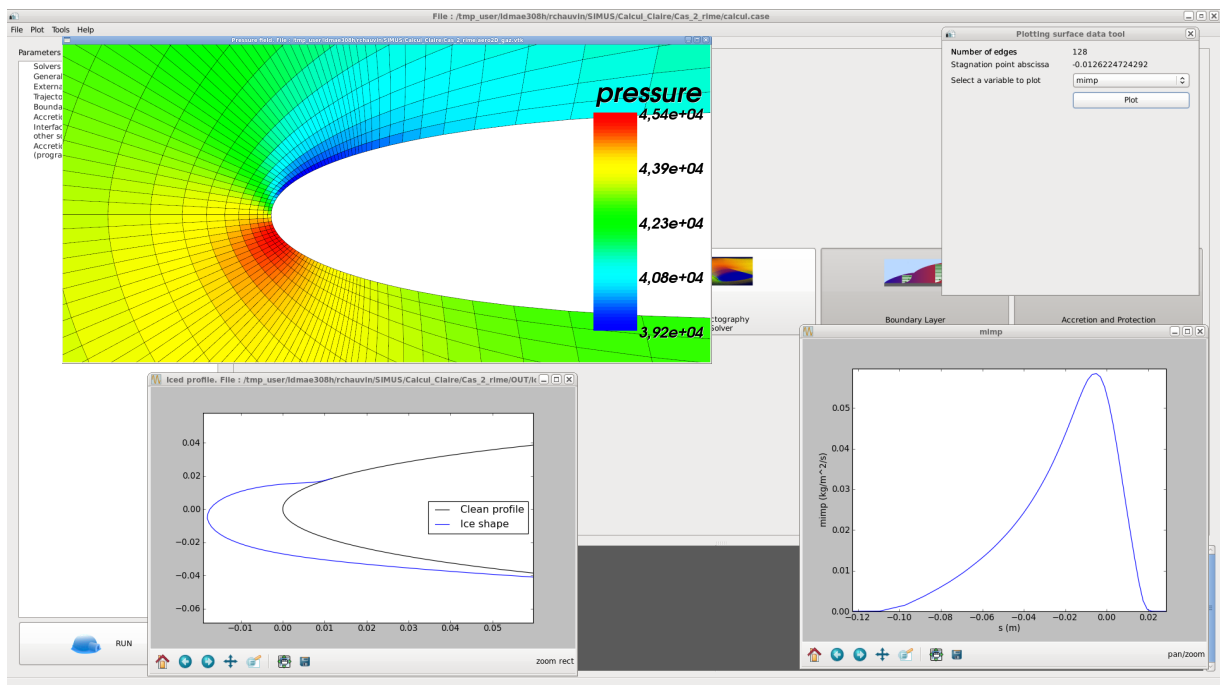


FIGURE G.3 – Interface graphique (outils de pré-visualisation)

# Annexes H

## Profil GLC-305

```
<?xml version="1.0" encoding="utf-8" standalone="no"?>
<!DOCTYPE svg PUBLIC "-//W3C//DTD SVG 1.1//EN"
  "http://www.w3.org/Graphics/SVG/1.1/DTD/svg11.dtd">
<!-- Created with matplotlib (http://matplotlib.org/) -->
<svg height="432pt" version="1.1" viewBox="0 0 576 432" width="576pt" >
  <defs>
    <style type="text/css">
      *{stroke-linecap:butt;stroke-linejoin:round;}
    </style>
  </defs>
  <g id="figure_1">
    <g id="patch_1">
      <path d="
MO 432
L576 432
L576 0
L0 0
z
" style="fill:#ffffff;"/>
    </g>
    <g id="axes_1">
      <g id="line2d_1">
        <path clip-path="url(#p7ff5b81e1d)" d="
M518.222 218.251
L510.752 218.944
L491.513 220.368
L341.9 231.266
L318.372 232.702
L298.575 233.697
L281.444 234.344
L265.912 234.704
L250.913 234.829
L233.234 234.73
L209.665 234.376
L183.421 233.766
L159.862 233.003
L140.059 232.128
L115.985 230.862
L103.16 229.991
L94.6327 229.211
L88.2513 228.429
```

L83.5004 227.636  
L80.3716 226.902  
L77.3091 225.937  
L75.34 225.094  
L74.4153 224.553  
L73.6067 223.855  
L72.945 223.014  
L72.4422 222.07  
L72.119 221.05  
L72 219.986  
L72.0908 218.919  
L72.3608 217.885  
L72.7925 216.906  
L73.3772 216.009  
L74.1013 215.221  
L74.9572 214.579  
L76.3772 213.827  
L78.8369 212.77  
L82.9024 211.408  
L87.0175 210.208  
L92.2266 208.945  
L99.0415 207.513  
L107.481 205.983  
L117.013 204.491  
L127.631 203.053  
L139.869 201.627  
L153.197 200.31  
L167.079 199.162  
L182.045 198.148  
L197.559 197.324  
L213.618 196.699  
L229.685 196.298  
L245.755 196.119  
L262.363 196.16  
L278.968 196.419  
L295.568 196.905  
L312.16 197.619  
L328.741 198.555  
L346.378 199.775  
L365.067 201.291  
L385.872 203.207  
L409.322 205.599  
L435.946 208.547  
L513.098 217.495  
L518.223 218.206  
L518.223 218.206" style="fill:none;stroke:#0000ff;stroke-linecap:square;"/>  
</g>  
</g>  
</g>  
<defs>  
<clipPath id="p7ff5b81e1d">  
<rect height="345.6" width="446.4" x="72.0" y="43.2"/>  
</clipPath>  
</defs>  
</svg>

