



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par :

Marion GONZALEZ

le mercredi 6 mai 2015

Titre :

Détermination des incertitudes de mesures de charge en essais en vol

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED MEGeP : Génie mécanique, mécanique des matériaux

Unité de recherche :

Institut Clément Ader

Directeur(s) de Thèse :

M. Joseph MORLIER (directeur de thèse)
M. Nicolas BINAUD (co-directeur de thèse)

Jury :

M. CHATEAUNEUF Alaa Prof. UBP/Inst. Pascal - Président
M. BES Christian Prof., UPS
M. CREMONA Christian Dir. tech., CEREMA - Rapporteur
Mme ESPINOSA Christine Prof. associée, ISAE-SUPERO
M. FLORENTIN Éric Prof., INSA VL/PRISME - Rapporteur
M. GOGU Christian MCF, UPS
M. LECIEUX Yann MCF, Université de Nantes
M. MORLIER Joseph Prof., ISAE-SUPAERO

Table des matières

Table des matières	5
Liste des figures	9
Liste des tableaux	11
Notations	14
1 Introduction	15
1.1 Contexte et enjeux	16
1.2 Problème considéré	18
1.2.1 Définition du problème	18
1.2.2 Problématiques	19
1.3 Cadre et objectifs	21
2 État de l'art	25
2.1 Introduction	27
2.2 Estimation des efforts résultants en vol	27
2.2.1 Méthodes d'estimation	27
2.2.2 Applications existantes	30
2.2.3 Améliorations proposées	32
2.2.4 Considération des incertitudes	38
2.3 Prise en compte des incertitudes	38
2.3.1 Généralités sur les incertitudes	38
2.3.2 Types et sources d'incertitude	40
2.3.3 Modélisation des incertitudes	42
2.4 Type de problèmes considérés	45
2.4.1 Définitions	45
2.4.2 Formulations	49
2.4.3 Résolution	51
2.5 Méta-modélisation ou modélisation par modèle de substitution	52

2.5.1	Types de méta-modèle	54
2.5.2	Construction	59
2.5.3	Validation	60
2.5.4	Améliorations	62
2.6	Conclusions	66
3	Méthode d'estimation de l'incertitude des charges	69
3.1	Introduction	71
3.2	Cadre pour le développement de la méthode	72
3.2.1	Introduction	72
3.2.2	Détermination des charges en vol	73
3.2.3	Hypothèses du problème considéré	77
3.2.4	Incertitudes du problème	79
3.2.5	Contraintes industrielles	85
3.2.6	Conclusions	85
3.3	Méthode actuelle d'estimation des charges	86
3.3.1	Introduction	86
3.3.2	Résolution du problème inverse	87
3.3.3	Application du problème direct	97
3.3.4	Limites	98
3.4	Prise en compte des incertitudes	99
3.4.1	Introduction	99
3.4.2	Nouvelles formulations du problème	101
3.4.3	Résolution du problème inverse	102
3.4.4	Application du problème direct	115
3.5	Mise en place de la méthode sur un cas industriel	116
3.5.1	Introduction	116
3.5.2	Méthodologie actuelle	116
3.5.3	Méthodologie développée pour prendre en compte les incertitudes	118
3.5.4	Conclusions	120
3.6	Conclusions	121
4	Estimation de l'incertitude des charges sur un cas industriel	123
4.1	Introduction	125
4.2	Objet de l'étude	125
4.2.1	Structure étudiée	125
4.2.2	Moyens	131
4.2.3	Hypothèses	132
4.3	Problème inverse : Calibration au sol sous incertitudes	133
4.3.1	Sources d'incertitude	133

4.3.2	Analyse des données de la base d'apprentissage	134
4.3.3	Résolution du problème inverse	138
4.4	Étude éléments finis : détermination de l'incertitude relative à l'ex- trapolation des charges en vol	161
4.4.1	Introduction	161
4.4.2	Sources d'incertitude	162
4.4.3	Problème inverse : Calibration au sol virtuelle	163
4.4.4	Problème direct : Essais en vol virtuels	178
4.4.5	Conclusions	182
4.5	Conclusions	183
5	Conclusions	185
5.1	Résultats	186
5.2	Perspectives	188
	Annexes	193
	Annexes	193
A	Rappels de probabilité	193
A.1	Espace de probabilité	193
A.2	Variable aléatoire	194
B	Compléments en résistance des matériaux	199
B.1	Résistance des matériaux	199
B.2	Définitions concernant la structure de poutre	202
B.3	Théorie des poutres	204
C	Autres résultats : Influence des incertitudes sur le problème	207
	Bibliographie	215
	Bibliographie	215

Liste des figures

1.1	Pyramide des essais structuraux de l'avion	17
1.2	Comparaison essais/modèle de l'estimation des charges	17
1.3	Illustration de la problématique	20
1.4	Structures primaire et secondaire d'une voilure	22
2.1	Approches déterministe ou probabiliste de l'incertitude	40
2.2	Diagramme de causes et effets sur l'incertitude d'une mesure	42
2.3	Histogramme pour une loi normale centrée	44
2.4	Illustration du problème direct	46
2.5	Système direct	46
2.6	Principe du problème direct	46
2.7	Système inverse	48
2.8	Principe du problème inverse	48
3.1	Efforts appliqués sur la voilure au cours des essais au sol	74
3.2	Profil macroscopique des efforts résultants dans la voilure	74
3.3	Effort appliqué T_{z_i} , au sol, au cours du temps t	76
3.4	Exemple de phénomène d'hystérésis sur la déformation ε_{ik}^s	76
3.5	Interprétation graphique du problème d'optimisation actuel	92
3.6	Interprétation graphique des sommes des carrés	95
3.7	Interprétation graphique du problème d'optimisation réel	111
3.8	Méthodologie actuelle d'estimation des efforts résultants en vol	117
3.9	Méthodologie d'estimation des incertitudes relatives au vol	119
3.10	Méthodologie complète d'estimation des efforts résultants en vol	120
4.1	Profil aérodynamique d'une voilure	126
4.2	Structure de l'aile d'un avion	127
4.3	Exemples d'ailettes marginales	128
4.4	Axes de l'avion	129
4.5	Exemples de dièdre de la voilure	130
4.6	Problème inverse	133
4.7	Dépendance linéaire entre deux ponts de jauge	135

4.8	Dépendance non linéaire entre deux ponts de jauge	136
4.9	Efforts appliqués T_{z_i} en fonction des déformations ε_{ik}^{B,A^s}	137
4.10	Comparaison des écarts-type des erreurs en fonction des incertitudes considérées, pour le cisaillement	144
4.11	Comparaison des écarts-type moyens des réponses du modèle en fonction des incertitudes considérées, pour le cisaillement	145
4.12	Évolution des écarts-type des erreurs en fonction du classement des modèles construits	147
4.13	Comparaison des écarts-type des erreurs	148
4.14	Comparaison des écarts-type moyens des réponses du modèle	149
4.15	Analyse des écarts-type des réponses du modèle	151
4.16	Dépendance linéaire entre deux ponts de jauge (MEF)	164
4.17	Dépendance non linéaire entre deux ponts de jauge (MEF)	164
4.18	Sections de coupe pour le torseur des efforts internes	166
4.19	Évolution des écarts-type des erreurs du modèle en fonction du clas- sement des modèles construits (MEF)	168
4.20	Comparaison des écarts-type des erreurs du modèle (MEF)	169
4.21	Comparaison des écarts-type moyens des réponses du modèle (MEF)	170
4.22	Analyse des écarts-type des réponses du modèle (MEF)	171
4.23	Écarts entre les réponses du modèle et les valeurs de référence, pour le cisaillement	180
4.24	Écarts entre les réponses du modèle et les valeurs de référence, sans points aberrants, pour le cisaillement	181
4.25	Écarts entre les réponses du modèle et les valeurs de référence, pour la flexion	182
A.1	Fonction de densité de probabilité de la loi normale	196
A.2	Fonction de répartition de la loi normale	197
A.3	Fonction de densité de probabilité de la loi uniforme	197
A.4	Fonction de répartition de la loi uniforme	198
B.1	Principe de la coupure virtuelle sur un solide	201
B.2	Vecteur contrainte	201
B.3	Exemple de structure de poutre	203
B.4	Définitions relatives à la structure de poutre	203
B.5	Déformation globale de la poutre selon les différentes théories	205
C.1	Comparaison des écarts-type des erreurs en fonction des incertitudes considérées, pour la flexion	208
C.2	Comparaison des écarts-type moyens des réponses du modèle en fonction des incertitudes considérées, pour la flexion	209

C.3	Comparaison des écarts-type des erreurs en fonction des incertitudes considérées, pour la torsion	210
C.4	Comparaison des écarts-type moyens des réponses du modèle en fonction des incertitudes considérées, pour la torsion	211

Liste des tableaux

3.1	Résumé des incertitudes sur les grandeurs du problème	86
3.2	Tableau d'analyse de la variance du modèle	96
4.1	Type de dépendance en fonction du type de pont de jauge	138
4.2	Résultats pour le meilleur modèle, pour le cisaillement	152
4.3	Résultats pour le meilleur modèle, pour la flexion	153
4.4	Résultats pour le meilleur modèle, pour la torsion	155
4.5	Résultats en validation pour le meilleur modèle, pour le cisaillement	158
4.6	Résultats en validation pour le meilleur modèle, pour la flexion . . .	160
4.7	Résultats en validation pour le meilleur modèle, pour la torsion . . .	161
4.8	Type de dépendance en fonction du type de pont de jauge	165
4.9	Résultats pour le meilleur modèle	172
4.10	Résultats en validation pour le meilleur modèle	175
4.11	Pourcentage des efforts résultants dans les intervalles correspondants	178

Notations

normal	scalaire
gras	vecteur ou matrice
$\mathbb{1}_{b,c}$	matrice de $1 \in \mathbb{R}^{b \times c}$
$E[X]$	espérance de la variable aléatoire X
$\text{Var}[\cdot]$	variance de la variable aléatoire X
\bar{a}	moyenne de la variable a
a^*	valeur « vraie » de la variable a
\hat{a}	valeur estimée de la variable a
\mathcal{BA}	base d'apprentissage
<i>sol</i>	données issues des mesures au sol
<i>vol</i>	données issues des mesures en vol
s	indexe des sections de voilure étudiées
i	indexe pour les cas de chargement
n_s	nombre de cas de chargement pour la section s
j	indexe pour les paliers de chargement
l_i	nombre de palier pour le cas de chargement i
k	indexe pour les ponts de jauge
p_s	nombre de ponts de jauge pour la section s
\mathcal{T}	torseur
M_i	point d'application du cas de chargement i , de coordonnées (x_i, y_i, z_i) dans le repère \mathcal{R}_{xyz}
M_s	centre de la section s , de coordonnées (x_s, y_s, z_s) dans le repère \mathcal{R}_{xyz}
ϕ^s	modèle pour la section s
β_k^s	paramètre du modèle ϕ^s associé au pont de jauge k
$\mathbf{S}_{\beta^s \beta^s}$	matrice de variance-covariance des paramètres du modèle β^s
$\sigma_{\beta_k^s}$	écart-type du paramètre du modèle β_k^s
ε_k^s	déformation du pont de jauge k collé à proximité de la section s
$F_{rés}^s = \{T_z^s, M_{fy}^s, M_t^s\}$	efforts résultants exprimés au centre M_s de la section s :

$\sigma_{\bar{F}_{rés}^s}$	effort tranchant, moment de flexion et moment de torsion écart-type de la réponse moyenne, c'est-à-dire de l'effort résultant moyen $\bar{F}_{rés}^s$, du modèle ϕ^s
$\sigma_{F_{rés}^s}$	écart-type de la réponse, c'est-à-dire de l'effort résultant $F_{rés}^s$, du modèle ϕ^s
e^s ou v^s	erreur du modèle ϕ^s
σ_{e^s} ou σ_{v^s}	écart-type de l'erreur du modèle e^s ou v^s
q^s	« erreur dans l'équation » du modèle ϕ^s
u_k^s	incertitude associée à la déformation ε_k^s
$\mathbf{S}_{\mathbf{u}^s \mathbf{u}^s}$	matrice de variance-covariance des incertitudes \mathbf{u}^s sur les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$
w^s	incertitude associée à l'effort résultant $F_{rés}^s$
$S_{w^s w^s}$	variance de l'incertitude w^s sur l'effort résultant $F_{rés}^s$
σ_{w^s}	écart-type de l'incertitude w^s sur l'effort résultant $F_{rés}^s$
$S_{\mathbf{u}^s w^s}$	matrice de variance-covariance entre les incertitudes \mathbf{u}^s sur les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ et l'incertitude w^s sur l'effort résultant $F_{rés}^s$
R^{s2}	coefficient de détermination pour la section s
R_{aj}^{s2}	coefficient de détermination ajusté pour la section s
Q^{s2}	coefficient de détermination équivalent en validation croisée pour la section s
SC_{Tot}^s	somme des carrés totaux pour la section s
$SC_{Rés}^s$	somme des carrés résiduels pour la section s
SC_{Exp}^s	somme des carrés expliqués pour la section s
CM_{Tot}^s	carré moyen total pour la section s
$CM_{Rés}^s$	carré moyen résiduel pour la section s
CM_{Exp}^s	carré moyen expliqué pour la section s
ddl_{Tot}^s	nombre de degrés de liberté associés à la somme des carrés totaux pour la section s
$ddl_{Rés}^s$	nombre de degrés de liberté associés à la somme des carrés résiduels pour la section s
ddl_{Exp}^s	nombre de degrés de liberté associés à la somme des carrés expliqués pour la section s

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Contexte et enjeux	16
1.2	Problème considéré	18
1.2.1	Définition du problème	18
1.2.2	Problématiques	19
1.3	Cadre et objectifs	21

1.1 Contexte et enjeux

Airbus est, avec Boeing, l'un des deux principaux constructeurs aéronautiques internationaux, assurant la conception, la fabrication et la commercialisation de ses avions. L'un des enjeux majeurs d'un constructeur d'avion est de certifier tout nouvel avion conçu ou modifié. Plusieurs années sont nécessaires pour concevoir et produire un nouvel avion qui doit répondre à un besoin du marché pour rester compétitif. Une fois construit, cet avion doit être testé et certifié pour être conforme aux exigences des autorités aéronautiques, telles que l'Agence Européenne de la Sécurité Aérienne (EASA) pour l'Europe ou la *Federal Aviation Administration* (FAA) pour les États-Unis. Cette preuve de sécurité permet à l'avionneur de lancer la production de série et de livrer les premiers avions commandés, déjà construits.

La certification d'un avion nécessite de nombreux essais. Ces essais sont classés sous forme pyramidale, connus sous le nom de pyramide des essais (Figure 1.1). Après une phase de conception, les essais sont effectués sur des pièces de taille croissante, allant du coupon au sous-ensemble avant d'être effectués sur des structures d'ensemble, complétant la pyramide des essais structuraux avec les essais en vol. Les essais en vol, réalisés sur l'avion, sont effectués dans la continuité, dans le cadre de la certification et de l'entrée en service. L'ensemble de ces essais permet notamment de vérifier la sécurité et la conformité de l'avion aux réglementations en vigueur. Le « Centre des essais en vol et d'intégration » d'Airbus a la responsabilité d'effectuer toutes les vérifications en termes de sécurité mais aussi en termes de performance et de respect des objectifs des nouveaux avions. En particulier, l'une des tâches du service « Charge et contrainte », où s'est effectuée cette thèse, est d'estimer, à partir de mesures, les charges auxquelles la structure d'un nouvel avion est soumise en vol.

L'estimation de ces charges répond à deux besoins. Le premier besoin correspond à la surveillance en temps réel du non-dépassement de ces charges au-delà des limites admissibles, préalablement définies, au cours des vols d'essais. Le but est d'assurer l'intégrité de la structure et la sécurité de l'équipage en toute circonstance. Le deuxième besoin correspond à la validation du « modèle charge » permettant d'estimer ces charges à partir de simulations numériques. Ce « modèle charge », établi par le « Bureau d'Études », correspond à une boucle de calcul complexe faisant intervenir plusieurs types de modèles physiques (fluide, structure, masse, . . .) sur lesquelles de multiples itérations sont effectuées pour vérifier les différents équilibres physiques (aérodynamique, structural, . . .). Le « modèle charge » est utilisé dans toutes les phases de conception, de fabrication et de fonctionnement de l'avion. C'est, entre autres, à partir de ce « modèle charge » que l'avion est certifié. Il est donc nécessaire de corréliser les estimations des charges issues de ce modèle avec les estimations issues des essais réels. En fonction des estimations obtenues issues des essais réels, ce « modèle charge » est soit validé, soit ré-ajusté



FIGURE 1.1 – Pyramide des essais structuraux de l’avion

si les estimations de celui-ci sont trop éloignées des estimations issues des essais réels. Ce ré-ajustement est effectué jusqu’à être suffisamment fidèle à la réalité.

Pour comparer l’estimation des charges en vol par ce « modèle charge » avec les estimations issues des essais réels, il est donc nécessaire de connaître l’incertitude associée aux charges dans ces deux cas (Figure 1.2). Or, aujourd’hui, ni l’incertitude associée aux charges estimées par le « modèle charge », ni celle associée aux charges estimées par les essais en vol ne sont considérées d’un point de vue mathématique. En revanche, les valeurs sont encadrées de manière empirique par une méthode conservative, non présentée dans ce mémoire. La connaissance de l’une et de l’autre pourrait permettre de réduire le temps nécessaire à la certification de l’avion.

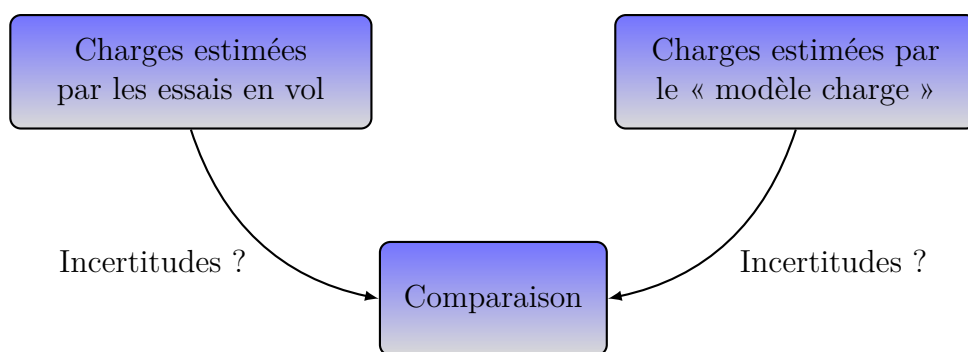


FIGURE 1.2 – Comparaison essais/modèle de l’estimation des charges

D’un point de vue de la surveillance en vol, les charges peuvent atteindre des

niveaux élevés. Ces charges sont parfois proches de valeurs correspondant à la limite d'élasticité de la structure considérée. Ces valeurs élevées de charges demandent à être analysées pour vérifier leur pertinence. Sans la connaissance de l'incertitude associée à ces estimations de charges issues des essais réels, l'interprétation de ces valeurs d'essais en vol est moins fiable, même comparées aux résultats des calculs sur le « modèle charge ». En effet, la méconnaissance de l'incertitude d'un point de vue mathématique impose une méthode conservatrice qui n'est ainsi pas optimisée. Cette méthode conservatrice permet d'encadrer les valeurs des charges obtenues. Ceci peut donc allonger le temps nécessaire pour réaliser le vol d'essai du fait des difficultés à interpréter les résultats. Il peut aussi être nécessaire de refaire la manœuvre concernée au cours du vol ou d'un autre vol d'essai. Dans le cas extrême, si les charges atteignent voire dépassent les valeurs limites, le vol d'essai peut être interrompu et re-planifié. En cas de doute, la structure concernée peut être inspectée. La connaissance de l'incertitude sur les charges permettrait d'aider à statuer sur la réalisation d'une inspection voire de limiter leur nombre. Tous ces aspects viennent rallonger le temps nécessaire pour réaliser les essais en vol et donc diminuer le temps d'analyse de ces résultats pour valider et recalculer le « modèle charge » afin de respecter la date prévue de certification.

La connaissance de l'incertitude sur l'estimation des charges, en vol ou par le modèle charge, peut donc apporter un gain conséquent. Cette thèse porte uniquement sur la détermination de l'incertitude sur les charges estimées à partir des mesures en vol. Un projet de recherche similaire a également été lancé, plus récemment, sur la détermination de l'incertitude sur les charges estimées à partir du « modèle charge ». Ce deuxième projet est toujours en cours.

1.2 Problème considéré

1.2.1 Définition du problème

Du point de vue de la structure, les charges d'intérêt sont les composantes du torseur des efforts résultants en certains points bien choisis. Il n'existe pas de capteurs permettant de mesurer directement les efforts résultants des structures étudiées, comme par exemple la voilure, et dans les conditions d'un vol d'essai. Une solution pourrait être de mesurer les efforts appliqués sur la structure et d'en déduire les efforts résultants. Il existe d'ailleurs des capteurs de pression tels que les ceintures de pression et les micro-systèmes électromécaniques. Cependant, ils ne donnent accès qu'aux efforts aérodynamiques. Or, les efforts résultants sont des efforts structuraux comportant également une part inertielle, liée à la masse et au déplacement du carburant dans la structure.

En revanche, les déformations locales de la structure sont facilement accessibles

à l'aide de jauges de déformation. Leur utilisation intensive depuis des années permet de bien maîtriser leur fonctionnement et en font une solution évidente et peu coûteuse pour de nouvelles applications. Deux types de capteurs existent : des jauges classiques et des jauges optiques, basées sur l'utilisation d'un réseau de Bragg.

Il reste donc à établir la relation permettant de déterminer les efforts résultants de la structure, à partir des mesures de déformation par ces jauges. Les efforts résultants sont des grandeurs physiques globales. Ces efforts résultants sont estimés au centre de certaines sections de coupe de la structure étudiée. Les déformations sont des grandeurs physiques locales. Ces déformations sont mesurées en différents points dans une zone autour de cette section d'intérêt. Écrire explicitement les relations entre les déformations et les efforts résultants serait difficile compte tenu de la complexité des structures étudiées. Une telle solution dépend de la position et de l'orientation des jauges ainsi que des caractéristiques de la structure. Par conséquent, un modèle implicite est construit entre les déformations et les efforts résultants. Ce modèle peut s'écrire de la manière suivante :

$$F_{rés}^s = \phi^s(\varepsilon_k^s) \quad (1.1)$$

où :

- $F_{rés}^s$ est l'effort résultant exprimé au centre M_s de la section d'intérêt s ,
- ε_k^s est la déformation du pont de jauge k , collé dans la zone à proximité de la section d'intérêt s ,
- ϕ^s est une fonction à définir, représentant la relation entre les déformations ε_k^s et l'effort résultant $F_{rés}^s$. Dans la suite, cette fonction ϕ^s est définie par des coefficients, appelés paramètres du modèle et notés β_k^s .

Le problème défini par l'équation précédente (1.1) est un problème direct. En supposant la fonction ϕ^s connue, les efforts résultants $F_{rés}^s$ dans une section d'intérêt s sont estimés directement à partir de la mesure des déformations ε_k^s des ponts de jauge k collés à proximité de cette section s . En réalité, les efforts résultants $F_{rés}^s$ ne sont donc pas mesurés mais estimés par le modèle ϕ^s défini par l'équation précédente (1.1).

1.2.2 Problématiques

Jusqu'à présent, les incertitudes présentes dans la méthode d'estimation des efforts résultants en vol ne sont pas considérées d'un point de vue mathématique, seulement de manière empirique, c'est-à-dire conservative et donc non optimisée. Les incertitudes de mesure peuvent notamment modifier les paramètres du modèle β_k^s , identifiés par un étalonnage au sol, et donc l'estimation des efforts résultants $F_{rés}^s$ en vol. De plus, l'incertitude de mesure sur les déformations ε_k^s de la structure

est différente entre l'étalonnage au sol et les essais en vol. En effet, au sol, les conditions d'essais sont idéales permettant de négliger ou de minimiser certaines sources d'incertitude (température, bruit des cartes d'acquisition des signaux, ...). Ces simplifications ne sont plus possibles en vol. Que ce soit pour les paramètres du modèle β_k^s ou les déformations ε_k^s en vol, l'estimation des efforts résultants $F_{rés}^s$ en vol en prenant en compte ces incertitudes, mathématiquement, peut donc être différente de l'estimation actuelle.

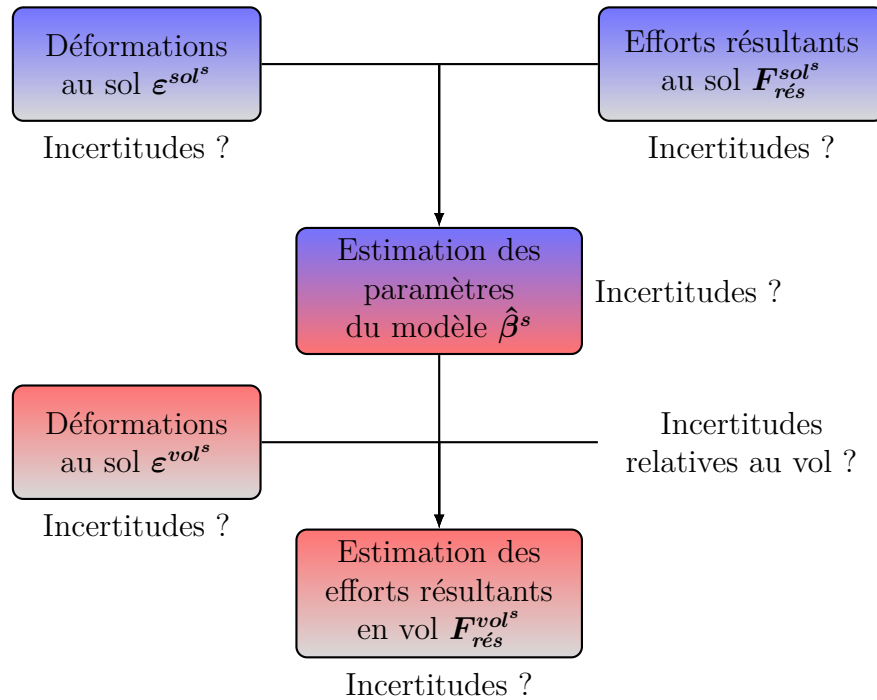


FIGURE 1.3 – Illustration de la problématique :
incertitudes à considérer pour l'étalonnage au sol (en bleu)
et les essais en vol (en rouge)

La première problématique consiste donc à considérer les incertitudes de chaque variable et chaque paramètre intervenant dans le modèle dans chacune des étapes permettant d'estimer les efforts résultants $F_{rés}^s$ en vol afin de déterminer ainsi l'incertitude associée aux efforts résultants (Figure 1.3). Que ce soit pour l'étalonnage au sol ou les essais en vol, les hypothèses retenues sont linéaires.

Les sollicitations de la structure étudiée en vol sont très différentes des sollicitations appliquées au sol pour identifier les paramètres du modèle β_k^s . Le passage de conditions de chargement ponctuelles, de valeur limitée au sol, à des conditions de chargement répartis, de valeur plus élevée, peut être sujette à des erreurs et donc introduire une incertitude, sur l'estimation des efforts résultants $F_{rés}^s$ en

vol. D'autres effets, non couverts par les hypothèses linéaires, peuvent également introduire une erreur. Par exemple, différentes répartitions de chargement sur la structure peuvent donner la même valeur d'effort résultant $F_{rés}^s$ au centre d'une section d'intérêt s alors que les champs de déformation ε_k^s dans la structure sont différents. De plus, des non-linéarités de comportement peuvent apparaître localement, dûes par exemple à des effets locaux comme des introductions d'effort ou à des valeurs de chargement proches voire dépassant les valeurs limites. Ces effets peuvent donc modifier localement les déformations ε_k^s à partir desquelles sont estimés les efforts résultants $F_{rés}^s$.

Même si les ponts de jauge utilisés pour mesurer les déformations ε_k^s sont auto-compensés en température, la structure se déforme en fonction de la température. Le comportement thermo-élastique de la structure n'est pas pris en compte actuellement ou dans cette thèse, ni dans l'étalonnage du modèle ϕ^s au sol permettant d'estimer les efforts résultants $F_{rés}^s$ en vol, ni par exemple en rajoutant un terme dans l'utilisation en vol de ce modèle ϕ^s . En effet, les mesures ne sont pas utilisées brutes mais en tant qu'incrément entre deux instants ce qui permet de s'affranchir des effets thermiques.

La deuxième problématique consiste donc à considérer les incertitudes ou erreurs liées au domaine d'application en vol, différent du domaine d'étalonnage au sol. Ces incertitudes sont appelées incertitudes relatives au vol dans la suite (Figure 1.3). Avant de prendre en compte les incertitudes liées aux non-linéarités de comportement et aux effets thermiques dans le cas où les données seraient utilisées brutes, il est nécessaire de quantifier les incertitudes dans un cadre linéaire. Dans ce cadre là, les travaux de thèse ont porté sur la caractérisation de l'incertitude relative à l'application du modèle, étalonné au sol, dans un domaine différent, celui du vol. Une étude spécifique a donc été réalisée par quantifier les effets liés à la répartition des efforts appliqués en vol.

1.3 Cadre et objectifs

Les structures étudiées sur l'avion sont généralement des structures portantes ou directionnelles, comme la voilure ou les empennages horizontal et vertical (aussi appelé dérive). Dans le cadre d'étude statique de cette thèse, ces structures peuvent être assimilées à des poutres encastrées sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli.

Dans le cadre de cette thèse, les travaux ne portent que sur la voilure (Figure 1.4). C'est la structure la plus complexe en termes d'architecture et de comportement. La voilure est constituée d'un caisson central délimité par des longerons et entrecoupé par des nervures. Il s'agit de la structure primaire qui reprend les efforts. Les peaux, supérieure et inférieure, sont parcourues par des raidisseurs. Des trous d'homme, utilisés pour la maintenance, sont présents le long de la peau

inférieure. La voilure comporte également une ailette marginale et des surfaces mobiles (becs, volets, ailerons et destructeurs de portance) constituant la structure secondaire. Les chargements des essais d'étalonnage au sol sont appliqués sur des « points durs », c'est-à-dire des points particulièrement rigides, de la structure. Ils sont appliqués de manière symétrique sur les deux ailes pour maintenir l'équilibre de l'avion.

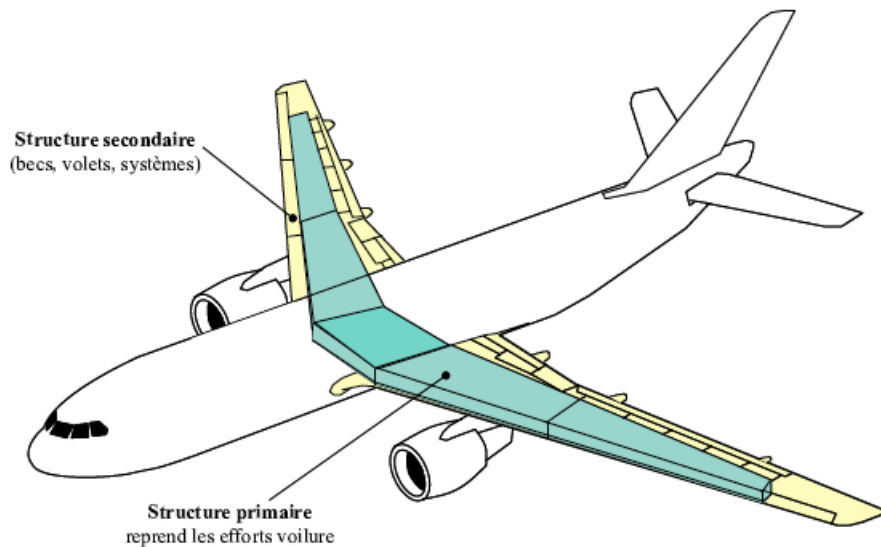


FIGURE 1.4 – Structures primaire et secondaire d'une voilure

Le premier objectif de cette thèse est de considérer les incertitudes existant pour chaque variable à chaque étape de l'estimation des charges en vol. Ceci peut aboutir à des valeurs de charges en vol différentes de celles estimées actuellement compte tenu des incertitudes prises en compte. De plus, la méthode mise en place doit fournir l'incertitude sur ces charges. Le deuxième objectif de cette thèse est de quantifier l'incertitude sur l'estimation des charges en vol non prise en compte par la méthode mise en place, tout en restant dans un cadre d'hypothèses linéaires. Cette incertitude est relative à l'application du modèle, étalonné au sol, dans les conditions des essais en vol. En effet, comme précisé auparavant, le domaine dans lequel le modèle est étalonné est, d'une part, limité par le nombre de cas de chargement appliqué et, d'autre part, différent de son domaine d'application.

La suite de ce mémoire est organisée de la manière suivante :

- Le chapitre 2 est dédié à l'état de l'art sur les méthodes d'estimations des charges, c'est-à-dire des efforts résultants, les bases théoriques pour la considération des incertitudes, les différents types de problèmes mathématiques

auxquels il est possible d'être confronté ainsi que le type de modélisation adopté pour relier les déformations aux efforts résultants.

- Le chapitre 3 est dédié à la présentation de la méthode mise en place pour considérer les incertitudes dans le problème. Ce chapitre commence par définir le cadre d'application de cette nouvelle méthode : les étapes de la méthode actuelle pour l'estimation des efforts résultants, les hypothèses retenues, les incertitudes à considérer et les contraintes industrielles à respecter. Par la suite, le détail de la méthode actuelle et celle mise en place pour prendre en compte les incertitudes du problème est présenté. Ce chapitre se termine avec la présentation de la méthodologie complète pour l'estimation des efforts résultants et de l'incertitude sur ces efforts, compte tenu des incertitudes existant à chaque étape.
- Le chapitre 4 illustre l'application de la méthodologie proposée en fin du chapitre précédent à un cas industriel, c'est-à-dire dans un contexte réel des essais en vol. Les résultats de l'étalonnage au sol réel, prenant en compte ou non les incertitudes, et de l'étude spécifique, permettant de quantifier les incertitudes relatives au vol, sont analysés en détail.

Chapitre 2

État de l'art

Sommaire

2.1	Introduction	27
2.2	Estimation des efforts résultants en vol	27
2.2.1	Méthodes d'estimation	27
2.2.1.1	Par la mesure des déformations	28
2.2.1.2	Par la mesure des distributions de pression	29
2.2.2	Applications existantes	30
2.2.2.1	Types d'aéronef et de structure testés	30
2.2.2.2	Conditions d'application en vol	31
2.2.3	Améliorations proposées	32
2.2.3.1	Étalonnage au sol et exploitation des mesures	32
2.2.3.2	Méthodes de résolution du problème inverse	33
2.2.3.3	Choix des ponts de jauge	35
2.2.3.4	Choix des surfaces de réponse polynomiales	36
2.2.3.5	Effets de la température	37
2.2.4	Considération des incertitudes	38
2.3	Prise en compte des incertitudes	38
2.3.1	Généralités sur les incertitudes	38
2.3.2	Types et sources d'incertitude	40
2.3.3	Modélisation des incertitudes	42
2.3.3.1	Modélisation d'une variable aléatoire à partir d'un jugement d'expert	42
2.3.3.2	Modélisation d'une variable aléatoire à partir d'observations	43
2.4	Type de problèmes considérés	45
2.4.1	Définitions	45

2.4.1.1	Problème direct	45
2.4.1.2	Problème inverse	47
2.4.2	Formulations	49
2.4.2.1	Définitions implicites	49
2.4.2.2	Définitions explicites	50
2.4.3	Résolution	51
2.4.3.1	Problème direct	51
2.4.3.2	Problème inverse	51
2.5	Méta-modélisation ou modélisation par modè- le de substitution	52
2.5.1	Types de méta-modèle	54
2.5.1.1	Les surfaces de réponse polynomiales	54
2.5.1.2	Le krigeage	56
2.5.1.3	Les réseaux de neurones artificiels	58
2.5.2	Construction	59
2.5.3	Validation	60
2.5.3.1	Validation (classique)	61
2.5.3.2	Validation croisée	62
2.5.4	Améliorations	62
2.5.4.1	Sur les données	62
2.5.4.2	Sur les paramètres du modèle	63
2.5.4.3	Sur la résolution du problème	65
2.6	Conclusions	66

2.1 Introduction

La méthode de détermination des charges en vol, ou plutôt d'estimation des efforts résultants, traitée dans le cadre de ce mémoire est la principale méthode utilisée dans le domaine aéronautique comme le montrent les différentes applications existantes, présentées à la section 2.2.

Pour pouvoir considérer les incertitudes dans le problème d'estimation des efforts résultants en vol, il est nécessaire de connaître les bases à ce sujet présenté à la section 2.3. Après avoir défini le vocabulaire relatif à la métrologie et aux incertitudes, les théories de prise en compte et les modélisations possibles de l'incertitude sont définies.

La méthode d'estimation des efforts résultants en vol comporte deux étapes (Figure 1.3). La première étape consiste à déterminer les paramètres du modèle permettant de définir la relation entre les déformations et les efforts résultants. Il s'agit d'un problème inverse. La deuxième étape consiste à estimer les efforts résultants, connaissant les déformations et les paramètres du modèle. Il s'agit d'un problème direct. Ces deux types de problème sont définis à la section 2.4.

La résolution d'un problème inverse soulève généralement des questions sur la pertinence de la modélisation du problème direct adoptée. Ici, la relation entre les déformations et les efforts résultants n'est pas connue explicitement. C'est pourquoi une modélisation implicite approchée est choisie : la relation physique inconnue par une relation approchée, souvent plus simple. Ce type de modélisation s'appelle la méta-modélisation définie à la section 2.5.

2.2 Estimation des efforts résultants en vol

2.2.1 Méthodes d'estimation

Dans la littérature, deux méthodes différentes sont proposées pour mesurer les composantes $F_{rés}^{vol^s}$ du tenseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$. Chaque composante $F_{rés}^{vol^s}$ est la somme de deux contributions : une contribution aérodynamique et une contribution inertielle. Ces composantes $F_{rés}^{vol^s}$ du tenseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$ ne peuvent être mesurées directement. De plus, la relation entre le tenseur des contraintes σ dans la structure et les efforts appliqués F sur la structure n'est pas évidente du fait de la complexité de la structure. Ainsi, la mesure, ou plutôt l'estimation, de chaque composante $F_{rés}^{vol^s}$ du tenseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$ est réalisée par la mesure d'autres grandeurs physiques caractéristiques relatives à la structure.

2.2.1.1 Par la mesure des déformations

La méthode la plus classique pour déterminer chaque composante $F_{rés}^{vol^s}$ du torseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$ est par la mesure des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ dans certaine section d'intérêt s de la structure. La méthode est connue sous le nom de « méthode de Skopinski », d'après le nom du principal auteur de cette méthode [SAH54]. Cette méthode permet dans un premier temps de construire une surface de réponse polynomiale ϕ^s , telle que définie à la sous-sous-section 2.5.1.1, et dans un second temps d'estimer chaque composante $F_{rés}^{vol^s}$ du torseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$.

La surface de réponse polynomiale ϕ^s permet d'établir une relation entre les caractéristiques mesurées, c'est-à-dire les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ dans la section d'intérêt s , et l'une des composantes $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$. La surface de réponse polynomiale ϕ^s à construire pour chaque section d'intérêt s , définie par l'équation (1.1), s'écrit donc :

$$F_{rés}^s = \phi^s(\boldsymbol{\varepsilon}^s) + e^s = \boldsymbol{\varepsilon}^s \boldsymbol{\beta}^s + e^s \quad (2.1)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^s = (\varepsilon_k^s)$ est un vecteur fini des déformations dans la section d'intérêt s ;
- $\boldsymbol{\beta}^s = (\beta_k^s)$ est un vecteur fini de coefficients, appelés paramètres du modèle, associés aux déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$;
- $F_{rés}^s$ est l'une des composantes du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$;
- e^s est l'erreur de la surface de réponse polynomiale ϕ^s , appelée erreur du modèle ;
- ϕ^s est la surface de réponse polynomiale, à construire.

D'après la théorie des poutres classique, il existe une relation entre les mesures des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ et chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ dans une section droite s de la structure. Dans le cas général, les composantes $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ étudiés sont la force de cisaillement (aussi appelé effort tranchant) T_z , le moment de flexion (aussi appelé moment fléchissant) M_{f_y} et le moment de torsion M_t .

Les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ sont mesurées à l'aide de ponts de jauge. Les ponts de jauge de déformation sont composés d'extensomètres à fils résistifs montés en pont de Wheastone à quatre bras. Deux ou trois types de ponts sont généralement utilisés. Chaque type de pont est dédié à la mesure d'une composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ dans une section d'intérêt s de la voilure. La position et l'orientation des ponts sont supposées avoir été choisies de manière adaptée, en fonction du type d'effort résultant à mesurer et dans des zones à faible gradient de contraintes.

La première étape de la méthode consiste à résoudre le problème inverse, défini aux sous-sous-sections 2.4.1.2 et 2.4.3.2, du système défini par l'équation (2.1) pour

identifier les paramètres du modèle β^s associés à la surface de réponse polynomiale ϕ^s . Pour cela, des efforts connus sont appliqués sur la structure au sol. Les mesures des ponts de jauges de déformation ϵ^{sol^s} sont relevées ce qui permet de déterminer les coefficients β^s .

Plusieurs expérimentations ont été réalisées concernant l'essai au sol pour améliorer la détermination des paramètres β^s de cette surface de réponse polynomiale ϕ^s , présentées à la sous-sous section 2.2.3.1. De plus, des travaux ont été faits sur la résolution de ce problème inverse, présentés à la sous-sous-section 2.2.3.2.

La seconde étape de cette méthode consiste à appliquer le problème direct dans le cadre des essais en vol. Le comportement de la structure, représenté par les paramètres du modèle β^s , est connu d'après l'étalonnage réalisé au sol de chaque composante $F_{rés}^s$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$. Les mesures des ponts de jauges de déformation ϵ^{vol^s} sont relevées. Ainsi, chaque composante $F_{rés}^{vol^s}$ du tenseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$ peut être estimée en vol.

De nombreuses applications de cette méthode ont été faites, présentées à la sous-section 2.2.2.

2.2.1.2 Par la mesure des distributions de pression

Une autre méthode pour déterminer chaque composante $F_{rés}^{vol^s}$ du tenseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$ est par la mesure des distributions de pression ([AH49] et [TSS78]).

Certaines sections sont instrumentées sur chaque voilure. La distribution de pression pour ces sections de voilure est mesurée par deux manomètres, connectés au moyen de tubes d'aluminium à orifices, installés dans les voilures.

Le principe de cette méthode repose sur la détermination des coefficients aérodynamiques.

Des comparaisons ont été faites avec la méthode précédente. La corrélation entre l'estimation de certaines composantes $F_{rés}^{vol^s}$ du tenseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$ par la mesure des déformations ϵ^s , présentée à la sous-sous-section 2.2.1.1, et par la mesure des distributions de pression est généralement correcte ([AH49] et [TSS78]). En effet, les tendances de variation pour chacune des méthodes précédentes sont proches. Cependant, les valeurs obtenues pour chaque méthode peuvent être décalées. De plus, des comparaisons avec des mesures effectuées dans une soufflerie ne permettent pas de privilégier une méthode ou une autre [TSS78].

Dans la pratique, les estimations des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol^s}}$ fournies par ces deux méthodes sont proches dans le cas où les effets inertiels sont peu significatifs.

L'avantage de cette méthode réside dans le fait que ce type de mesures ne nécessite pas d'être préalablement étalonné au sol. Cependant, seuls les efforts

aérodynamiques sont estimés. Or, ce sont les efforts structuraux, c'est-à-dire la somme des efforts aérodynamiques et inertiels, qui sont considérés ici.

2.2.2 Applications existantes

La première méthode, c'est-à-dire la « méthode de Skopinski » [SAH54], a été appliquée sur différents types d'aéronef, différentes structures et dans des conditions de vol différentes. Cette méthode est la méthode traitée pour la prise en compte des incertitudes dans le cadre de ce mémoire.

La plupart des applications de la « méthode de Skopinski » ont été résumées dans un rapport technique [JD97]. Dans la suite, les sources disponibles relatives à chaque application sont citées.

2.2.2.1 Types d'aéronef et de structure testés

La méthode d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol s}$ dans chaque section d'intérêt s à partir des mesures de déformation ε_k^s a été appliquée sur différents types d'aéronef et sur différentes structures de ces aéronefs :

1. sur des avions commercialisés :
 - (a) sur des avions militaires :
 - i. North American F-51D Mustang :
Cette méthode a été appliquée sur la voilure ([AH49] et [HS55]), sur l'empennage horizontal ([SA48] et [HS55]).
 - ii. North American XB-70 Valkyrie :
Cette méthode a été appliquée sur les canards, sur les ailerons et sur les ailettes marginales [JAAU69].
 - iii. Lockheed YF-12 :
Cette méthode a été appliquée sur la voilure ([JKC77] et [JK77]).
 - iv. Hawker Hunter F-2 :
Cette méthode a été appliquée sur l'empennage horizontal [Nic63].
 - v. English Electric Lightning Mk T.5 :
Cette méthode a été appliquée sur la voilure [BTKB79].
 - vi. Grumman X-29 :
Cette méthode a été appliquée sur la voilure [SMRR89].
 - vii. A400M,
 - (b) sur des avions commerciaux :
Cette méthode a été, entre autres, appliquée sur tous les types d'avions civils construits par AIRBUS depuis l'A320 (A320, A330, A340, A380, A350XWB, A320NEO, ...).

- (c) sur des engins spatiaux :
 - i. North American X-15 :
Cette méthode a été appliquée sur la voilure [MF73], sur l’empennage horizontal ([Fie70] et [FOM72]).
 - ii. Northrop HL-10 :
Cette méthode a été appliquée sur la dérive et sur les surfaces portantes [TP71].
 - iii. Martin Marietta X-24 :
Cette méthode a été appliquée sur la voilure et sur la dérive [TD69].
- (d) sur des drones :
Cette méthode a été appliquée sur le Ryan Firebee II BQM-34E, sur sa voilure ([PE75] et [Eck76]) et sur la dérive [PE75].
- 2. sur des prototypes ou des cellules d’essai :
 - (a) sur un prototype d’un avion commercial :
Cette méthode a été appliquée sur le prototype d’un avion réel testé en soufflerie pour des comparaisons [AH49].
 - (b) sur une partie testée :
Cette méthode a été appliquée sur la dérive d’un spécimen de l’arrière du fuselage, pour conserver une bonne représentativité de l’avion commercial concerné. Elle a été testée en laboratoire pour des comparaisons avec la structure réelle [HWR64].
 - (c) sur un profil d’aile :
Cette méthode a été appliquée sur un profil d’aile. Ce profil d’aile a été testé en soufflerie. Des comparaisons ont été réalisées pour observer les effets des surfaces hypersustentatrices [JAAU69].
- 3. sur un modèle Éléments Finis :
Certains résultats réels ont été comparés à ceux d’un modèle éléments finis simplifié de la structure testée ([Eck76] et [JKC77]).
Ainsi, des structures de forme très différentes ont été testées :
 - des structures à facteur de forme élevé :
Il s’agit des surfaces portantes des avions civils comme la voilure, les empennages vertical ou horizontal ;
 - des structures à facteur de forme faible :
Il s’agit des voilures des avions supersoniques, qui sont des structures à multiples longerons.

2.2.2.2 Conditions d’application en vol

Configuration de l’avion

Presque tous les essais sur les différents types d’aéronef et de structure ont été

réalisés pour une configuration lisse. Ceci signifie que les effets des surfaces mobiles ne sont pas pris en compte dans les études précédentes.

Dans le cadre d'une étude, certains essais ont été réalisés dans une configuration hypersustentatrice. Pour cette étude, les effets des surfaces mobiles ont donc été pris en compte [TP71].

Conditions de vol

La « méthode de Skopinski » a été appliquée pour des conditions de vol très différentes :

- à différentes altitudes :
Cette méthode a été appliquée à basse altitude pour les avions civils et militaires et à haute altitude pour la navette spatiale.
- à différentes vitesses :
Cette méthode a été appliquée pour des vols subsoniques ([AH49], [HS55], [TP71] et [PE75]), transsoniques ([Nic63] et [TP71]), supersoniques ([TP71], [PE75] et [JKC77]) et hypersoniques [TS80].
- pour différentes manœuvres :
Cette méthode a été notamment appliquée pour des dérapages [JAAU69], en montée ([SA48], [AH49], [HS55] et [Nic63]) et en décrochage ([SA48], [AH49] et [HS55]).
- des conditions statiques et dynamiques :
Cette méthode a été appliquée en vol croisière [JAAU69], en virage en palier [JAAU69], en descente [JAAU69], en montée [JAAU69], en décrochage ([SA48], [AH49] et [HS55]), en présence de flottement ([SA48], [AH49], [HS55] et [JAAU69]).

2.2.3 Améliorations proposées

Plusieurs améliorations de la méthode d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ par la mesure des déformations ϵ^s , présentée à la sous-sous-section 2.2.1.1, ont été proposées. Ces améliorations, présentées ci-après, concernent la réalisation des essais au sol, l'exploitation des mesures, le calcul des paramètres du modèle β^s , le choix des ponts de jauge et des différentes surfaces de réponse polynomiales ϕ^s construites ainsi que les conditions d'essais.

2.2.3.1 Étalonnage au sol et exploitation des mesures

La première étape de la « méthode de Skopinski » est l'étalonnage au sol. L'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ dépend de la bonne représentativité des conditions de vol pendant les essais au sol.

Les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ sont distribués alors que ceux appliqués pendant les essais au sol sont ponctuels. Deux possibilités sont considérées pour améliorer l'étalonnage au sol ([PE75] et [JK77]) :

- la superposition de plusieurs chargements ponctuels uniques et appliqués séparément :
Pour rappel, les structures testées sont supposées suivre la théorie des poutres classique et donc respecter le principe de superposition. L'étalonnage au sol peut être amélioré en superposant les mesures de différents points uniques de chargement. Par la superposition de ces différents cas de chargement, un chargement distribué peut ainsi être simulé.
- l'application d'un chargement ponctuel en plusieurs points simultanément :
Ici, plusieurs chargements ponctuels en un seul point sont appliqués simultanément sur la structure. Cette méthode de chargement permet de tester la structure avec un chargement proche d'un chargement distribué, comme c'est le cas en vol.

De bons résultats sont obtenus pour ces deux améliorations de l'étalonnage au sol permettant la caractérisation de la surface de réponse polynomiale ϕ^s associée à la structure étudiée.

2.2.3.2 Méthodes de résolution du problème inverse

Le système à résoudre pour déterminer la surface de réponse polynomiale ϕ^s modélisant le comportement de la structure est sous-déterminé : il y a plus d'inconnues que d'équations. Mais, il est connu que certaines variables de régression, correspondant aux mesures à chaque pont de jauge k , sont redondantes. En général, deux à quatre ponts de jauge sont au plus nécessaires pour représenter le comportement de la structure. Dans ces cas là, le système devient sur-déterminé : il y a plus d'équations que d'inconnues. Il est donc envisageable de résoudre le système.

Plusieurs méthodes de résolution, décrites ci-après, ont été exploitées pour inverser ce système.

Par l'équation normale des moindres carrés

La manière la plus classique pour résoudre un système avec plus d'équations que d'inconnues est par la méthode des moindres carrés ([SAH54], [CML07] et [MMAC09]). Le système à résoudre étant sur-déterminé, il n'y a pas de solution unique. La méthode des moindres carrés donne la solution qui minimise la somme des carrés des erreurs du modèle e^{sol^s} obtenues au sol, correspondant à la différence entre les valeurs des efforts résultants $F_{rés}^{sol^s}$ calculés au sol et les valeurs des efforts résultants $\hat{F}_{rés}^{sol^s}$ prédits par la surface de réponse polynomiale ϕ^s à construire. La solution, donnée en passant par l'équation normale des moindres carrés, est la

suivante :

$$\hat{\beta}^s = \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s T} \boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s T} \mathbf{F}_{rés}^{sol^s} \quad (2.2)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s}$ est la matrice des déformations de plusieurs ponts de jauge pour plusieurs cas de chargement, mesurées au sol ;
- $\mathbf{F}_{rés}^{sol^s}$ est le vecteur des efforts résultants pour plusieurs cas de chargement, calculés au sol ;
- $\hat{\beta}^s$ sont les paramètres estimés du modèle, associés à la surface de réponse polynomiale $\hat{\phi}^s$ ainsi construite.

Cette résolution est limitée par la singularité de la matrice des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s}$. En effet, à cause du calcul de l'inverse de $\boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s T} \boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s}$, la solution donnée par l'équation (2.2) n'est pas stable si le conditionnement de cette matrice est élevé.

Par la décomposition en valeurs singulières

La matrice des déformations mesurées pendant les essais d'étalonnage au sol $\boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s}$, de taille $L \times C$ et de rang R , peut être décomposée de la manière suivante [Kon94] :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s} = \mathbf{U}^{sol^s} \boldsymbol{\Sigma}^{sol^s} \mathbf{V}^{sol^s T} \quad (2.3)$$

où :

- \mathbf{U}^{sol^s} est une matrice orthonormée de taille $L \times L$;
- \mathbf{V}^{sol^s} est une matrice orthonormée de taille $C \times C$;
- $\boldsymbol{\Sigma}^{sol^s}$ est une matrice de taille $L \times C$ dont les termes extra-diagonaux sont nuls et les termes diagonaux, positifs ou nuls, sont ordonnés de manière décroissante, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{sol^s} = \text{diag}[\lambda_1^{sol^s}, \dots, \lambda_C^{sol^s}] \quad (2.4)$$

avec :

$$\lambda_1^{sol^s} \geq \dots \geq \lambda_R^{sol^s} \geq \lambda_{R+1}^{sol^s} = \lambda_{R+2}^{sol^s} = \dots = \lambda_C^{sol^s} = 0 \quad (2.5)$$

où :

- $\boldsymbol{\lambda}^{sol^s} = (\lambda_k^{sol^s})$ sont les termes diagonaux de la matrice $\boldsymbol{\Sigma}^{sol^s}$, appelés valeurs singulières.

La solution, donnée en passant par la décomposition en valeurs singulières de la matrice des déformations mesurées au sol $\boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s}$, est la suivante :

$$\hat{\beta}^s = \mathbf{U}^{sol^s T} \boldsymbol{\Sigma}^{sol^s+} \mathbf{V}^{sol^s} \mathbf{F}_{rés}^{sol^s} \quad (2.6)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{sol^s+} = \text{diag}[\lambda_1^{sol^s-1}, \dots, \lambda_R^{sol^s-1}, 0, \dots, 0] \quad (2.7)$$

Cette solution est stable même si le rang R de la matrice des déformations mesurées au sol $\boldsymbol{\varepsilon}^{sol^s}$ n'est pas plein.

2.2.3.3 Choix des ponts de jauge

Comme précisé en introduction de cette sous-section 2.2.3, il y a plus de ponts de jauge de déformation disponibles que nécessaires pour construire la surface de réponse polynomiale ϕ^s . Dans le cas de la résolution du problème inverse par l'équation normale des moindres carrés, deux critères pour sélectionner les ponts de jauge k nécessaires à la construction de la surface de réponse polynomiale ϕ^s ont été testés et sont présentés ci-après [TS80].

Par le test de Student

Le premier critère pour réduire le nombre de ponts de jauge k dans la surface de réponse polynomiale ϕ^s à construire repose sur le calcul des valeurs t_k^s du test de Student associées à chaque paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$, c'est-à-dire :

$$t_k^s = \frac{\hat{\beta}_k^s}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s}} \quad (2.8)$$

où :

- t_k^s est la valeur du test de Student, associée au paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$;
- $\hat{\beta}_k^s$ est le paramètre estimé du modèle, associé au pont de jauge k collé à proximité de la section d'intérêt s ;
- $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s}$ est l'écart-type estimé du paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$, associé au pont de jauge k .

La variable de régression pour le pont de jauge k associé au paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$ dont la valeur t_k^s est la plus petite est enlevée. Une nouvelle surface de réponse polynomiale ϕ^s sans cette variable de régression est alors construite. Ce procédé a été répété jusqu'à ce qu'il ne reste que deux ponts de jauge dans la surface de réponse polynomiale ϕ^s , en ayant douze ponts de jauge k au départ.

Par le test de Student modifié

Le second critère pour réduire le nombre de ponts de jauge k dans la surface de réponse polynomiale ϕ^s à construire repose sur l'application du critère précédent, modifié pour prendre en compte les amplitudes et les corrélations entre les variables de régression associées aux paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}_k^s$:

$$t_k^{s(m)} = \frac{\sqrt{|\varepsilon_k^s|} \lambda_k^s \hat{\beta}_k^s}{\gamma_k^s \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s}} \quad (2.9)$$

où :

- $t_k^{s(m)}$ est la valeur du test de Student modifié, associée au paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$;
- $|\bar{\varepsilon}_k^s|$ est la moyenne des amplitudes absolues des mesures du pont de jauge k ;
- λ_k^s est le coefficient de corrélation entre le pont de jauge k et les efforts appliqués F ;
- γ_k^s est le coefficient de corrélation entre le pont de jauge k et les autres ponts de jauge.

Ce critère permet ainsi de normaliser les valeurs du test de Student précédentes dans le cas où les amplitudes de variation des ponts de jauge k sont différentes, tout en prenant en compte les possibles corrélations.

Le même procédé que précédemment a été appliqué.

Les deux critères précédents permettent de sélectionner les ponts de jauge k significatifs dans la surface de réponse polynomiale construite $\hat{\phi}^s$ de manière formalisée et systématique. La comparaison entre les valeurs des efforts résultants $F_{rés}^{sol^s}$ calculés au sol et les valeurs des efforts résultants $\hat{F}_{rés}^{sol^s}$ prédits par la surface de réponse polynomiale construite $\hat{\phi}^s$ montre que la sélection des ponts de jauge k par le test de Student modifié semble plus cohérente. En effet, ce dernier critère donne des résultats plus précis en terme d'estimation des efforts résultants $\hat{F}_{rés}^{sol^s}$.

2.2.3.4 Choix des surfaces de réponse polynomiales

Plusieurs combinaisons de ponts de jauge k peuvent être utilisées pour construire une surface de réponse polynomiale ϕ^s entre les déformations ε^s et les efforts résultants $F_{rés}^s$, comme précisé auparavant en introduction de cette sous-section 2.2.3. Un grand nombre de surfaces de réponse polynomiales $\hat{\phi}^s$ peut ainsi être construit. Cependant, il n'est ni nécessaire, ni possible en termes de moyen de toutes les utiliser pour l'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. Quelques unes seulement sont retenues. Plusieurs critères peuvent être vérifiés pour orienter le choix des surfaces de réponse polynomiales construites $\hat{\phi}^s$ à conserver ([Fie70] et [JK77]). Une liste non exhaustive de critères est résumée ici :

- l'absence de dépendance entre les ponts de jauge :
Les ponts de jauge k utilisés dans l'équation de charge doivent être indépendants. Pour observer ce type de comportement entre les ponts de jauge, les valeurs mesurées d'un pont de jauge k_1 doivent être tracées en fonction des valeurs mesurées d'un autre pont de jauge k_2 . Si ces tracés font apparaître des corrélations entre les valeurs des deux ponts de jauge k_1 et k_2 considérés alors ils ne sont pas indépendants.
- le minimum de la moyenne des erreurs du modèle :
Pour vérifier la validité de la surface de réponse polynomiale construite $\hat{\phi}^s$,

c'est-à-dire des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$, les efforts résultants au sol $F_{rés}^{sol^s}$ sont recalculés à partir des déformations mesurées au sol ϵ^{sol^s} par les ponts de jauge k . Les différences entre les efforts résultants $F_{rés}^{sol^s}$ calculés au sol et les efforts résultants $\hat{F}_{rés}^{sol^s}$ recalculés par la surface de réponse polynomiale construite $\hat{\phi}^s$ correspondent aux erreurs du modèle e^{sol^s} . La moyenne \bar{e}^{sol^s} des erreurs du modèle e^{sol^s} doit être la plus petite possible.

- le minimum d'écart-type sur les erreurs du modèle :
L'écart-type $\sigma_{e^{sol^s}}$ des erreurs du modèle e^{sol^s} est la quantité qui est justement minimisée dans le cas de la résolution des moindres carrés.
- la cohérence entre les ponts de jauge choisis et la composante du tenseur des efforts résultants à estimer :
En général, la surface de réponse polynomiale construite $\hat{\phi}^s$ pour une composante $F_{rés}^s$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ doit comporter au moins un pont de jauge k sensible principalement à ce type d'effort résultant $F_{rés}^s$.

Les surfaces de réponse polynomiales ϕ^s , aussi appelées équations de charge, retenues sont donc le résultat de compromis pour respecter au maximum les critères, non exhaustifs, précédents.

2.2.3.5 Effets de la température

Les ponts de jauge de déformation sont sensibles aux variations de température. Les ponts de jauge sont en fait constitués de jauges de déformation à fils résistifs montés en pont complet. Ce type de montage est supposé compenser la déformation des jauges présentes dans le pont due à la variation de température. Deux jauges sur les quatre jauges présentes dans les montages en pont complet permettent de supprimer cet effet.

Cependant, la structure sur laquelle ces ponts de jauge sont collés est également sensible aux changements de température. Jusqu'à maintenant, l'effet de la température sur le comportement thermo-élastique de la structure n'est pas pris en compte car les estimations des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ sont comparées entre deux instants d'une même manœuvre.

Quelques travaux ont été réalisés pour évaluer cet effet sur l'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. Les essais réalisés pour ces travaux ont été faits sur des structures qui sont supposées subir des températures très élevées en vol, telle que celles de la navette spatiale ([Fie70], [FOM72], [MF73] et [Rea89]). Ces structures ont été testées au sol pour différentes températures. Les résultats montrent que l'étalonnage au sol en température n'est pas nécessaire. Mais la dérive des mesures provenant de l'effet de la température doit être connue.

Il n'y a pas d'essais similaires connus pour les avions commerciaux subissant des températures moins élevées.

2.2.4 Considération des incertitudes

L'incertitude des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ est difficile à évaluer. En effet, malgré toutes les applications qui ont été faites, la méthode d'estimation des efforts résultants en vol par l'intermédiaire des mesures de déformation est complexe. Quelques travaux sur la prise en compte des sources potentielles d'incertitude sur les efforts résultants en vol existent néanmoins.

Tout d'abord, l'impact de la méthode de chargement utilisée pour l'étalonnage au sol pour l'estimation des efforts résultants en vol a été considérée, présenté à la sous-sous-section 2.2.3.1. Un chargement ponctuel appliqué simultanément en plusieurs points permet d'améliorer la représentativité de la surface de réponse polynomiale construite $\hat{\phi}^s$ aux conditions de vol et non seulement aux efforts appliqués F lors de l'étalonnage du sol [JK77]. Cependant, ce type de chargement augmente les erreurs de calcul.

Les effets de la température sur les mesures des ponts de jauge ont également été analysés, présentés à la sous-sous-section 2.2.3.5. Des incertitudes ont été introduites dans le cas de simulations thermiques d'un vol pour observer l'impact des incertitudes de température sur les mesures des ponts de jauge et donc sur l'estimation des efforts résultants [Fie70].

Plus récemment, des travaux apparaissent encourageants à ce sujet. En effet, le mémoire de thèse de Kong [Kon94] montre qu'un compromis doit être fait entre la précision du méta-modèle et sa sensibilité au bruit. Dans ce mémoire [Kon94], différentes formulations du problème prenant en compte les incertitudes (moindres carrés totaux et analyse factorielle des correspondances) et différentes méthodes de résolution (équation normale, décomposition QR et décomposition en valeurs singulières) ont également été comparées. De plus, des approches linéaire et non-linéaire ont été appliquées. Dans le cas du mémoire précédent [Kon94], l'approche linéaire apparaît insuffisante mais l'approche non-linéaire nécessite de connaître la modélisation exacte de la relation entre les déformations et les efforts résultants en vol. C'est pourquoi un réseau de neurone artificiel a été adopté à la place d'une surface de réponse polynomiale. Les résultats obtenus sont encourageants. Cependant, le nombre élevé de neurones artificiels à utiliser dans la couche cachée rend sa construction complexe.

2.3 Prise en compte des incertitudes

2.3.1 Généralités sur les incertitudes

Avant toute étude des incertitudes, il est nécessaire de définir un certain nombre de termes de vocabulaire qui peuvent être rencontrés dans les documents techniques ou dans la littérature scientifique. Ces termes peuvent être associés soit à

la métrologie, soit à l'étude des incertitudes. Les termes liés à la métrologie sont extraits de deux ouvrages : l'un sur le vocabulaire de la **métrologie** [JCGb] et l'autre sur la considération des **incertitudes de mesure** [JCGa]. Ces deux ouvrages servent de base pour aborder les incertitudes liées à la mesure dans un contexte industriel. D'autres ouvrages traitent également de la considération des incertitudes de mesure, souvent basés sur ces deux premiers ouvrages ([TK94] et [Gra05]).

Une **grandeur** désigne toute propriété, physique ou géométrique, d'un phénomène, d'une structure ou d'un fluide, susceptible d'être distinguée qualitativement et déterminée quantitativement. Dans le cadre d'essais, la grandeur à mesurer est appelée **mesurande** et sa mesure est appelée **mesurage**. De manière plus précise, le **mesurage** d'une grandeur désigne le processus permettant d'obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs qui peuvent être raisonnablement attribuées à cette grandeur. L'ensemble des valeurs attribuées au mesurande s'appelle le **résultat de mesure**. Le **résultat de mesure** est donc l'ensemble des mesurages du mesurande. Il peut être complété par toutes autres informations pertinentes et disponibles. La **métrologie** est la science des mesurages et de ses applications.

Une **mesure** est une estimation de la grandeur à mesurer. Idéalement, tout résultat de mesure d'une grandeur doit donc être accompagné d'une **indication quantitative** sur la **qualité** de ce résultat. Cette indication permet d'estimer la fiabilité de ces mesures. Sans cette indication, les résultats de mesure ne peuvent pas être comparés entre eux ou par rapport à des valeurs de référence. Ces références peuvent être données par des normes ou par des prédictions numériques, issues de modèles éléments finis ou de méta-modèles tels que ceux présentés à la section 2.5. Cette indication peut être de deux types :

- la **résolution de mesure** :

Aussi appelée **précision de la mesure**, elle est intrinsèque aux moyens de mesure. Elle correspond à la plus petite variation de la grandeur mesurée produisant une variation perceptible de l'indication délivrée par le moyen de mesure. C'est la différence entre la valeur du mesurande et la valeur mesurée. Dans le cas d'un instrument de mesure analogique, la précision de mesure correspond à l'espacement entre les graduations. Elle est ainsi liée à la qualité d'un étalon. Dans le cas d'un instrument de mesure numérique, la précision de mesure est donnée par la valeur unitaire du dernier chiffre de l'affichage.

- l'**incertitude de mesure** :

C'est le paramètre, non négatif, qui caractérise la dispersion des résultats de mesure d'un mesurande, à partir des informations disponibles. L'incertitude de mesure peut être dûe à plusieurs causes, appelées sources d'incertitude. Le moyen de mesure est l'une de ces sources d'incertitude. La précision de mesure participe donc à l'incertitude de mesure.

D'une manière générale, les incertitudes, dont les incertitudes de mesure, désignent l'expression du doute sur une grandeur considérée. Il existe deux manières de représenter les incertitudes (Figure 2.1) :

- par une **approche déterministe** :

Le déterminisme est une notion philosophique qui suppose que tout événement est prévisible. En physique, il repose sur le principe de causalité : tout événement ou phénomène est prévisible d'après une théorie physique ou un modèle mathématique. La théorie déterministe nie donc toute part de hasard dans les phénomènes.

L'approche déterministe consiste à définir l'incertitude à l'aide d'un intervalle borné autour de la valeur de la grandeur d'intérêt considérée. Cette incertitude est souvent représentée par des barres d'erreurs.

Cette approche n'est pas nécessairement l'approche la plus adaptée pour étudier les effets des incertitudes dans un problème. Elle est cependant très utilisée en première approximation pour quantifier l'importance de cette incertitude ou dans un contexte industriel.

- par une **approche non-déterministe** ou **indéterministe** :

L'indéterminisme est l'opposé du déterminisme. Cette théorie considère qu'il existe une part d'aléatoire dans les phénomènes physiques étudiés ou dans les modèles mathématiques utilisés.

Cette approche repose sur la théorie des probabilités, d'où son autre désignation d'**approche probabiliste**. L'incertitude est alors définie comme une variable aléatoire.

Cette approche est plus adaptée à l'étude des incertitudes et à leur propagation dans un système.



FIGURE 2.1 – Approches déterministe (à gauche) ou probabiliste (à droite) de l'incertitude :
valeur de la grandeur considérée (en noir) et son incertitude (en rouge)

Afin de préciser les bases des deux approches précédentes, quelques notions de probabilités sont rappelées en Annexe A.

2.3.2 Types et sources d'incertitude

La notion d'incertitude se définit comme une erreur entre la valeur « vraie » d'une grandeur d'intérêt, géométrique ou physique, et ses valeurs observées, quelles

soient mesurées ou simulées. Idéalement, toute valeur observée devrait être accompagnée d'une incertitude, *a fortiori* s'il s'agit d'une observation mesurée.

Les incertitudes peuvent se classer en deux catégories, décrites notamment dans [SAS13] et [KD09] :

- **aléatoire** :

Le caractère aléatoire d'une incertitude est liée à l'observation du phénomène physique. Dans le cas, par exemple, de valeurs mesurées expérimentalement, l'incertitude aléatoire correspond, entre autres, au bruit de mesure.

Cet aspect aléatoire traduit le caractère non reproductible de la mesure : deux mesures d'une même grandeur ne donneront jamais les mêmes valeurs. En effet, dans la réalité, il est impossible de maintenir des conditions d'essais parfaitement identiques pour deux mesures d'une même grandeur.

- **systématique** ou **épistémique** :

Ce caractère est lié au phénomène physique mis en jeu. Comme son nom l'indique, il s'agit d'une incertitude qui apparaît « systématiquement » dans l'observation de la grandeur d'intérêt. C'est une incertitude qui correspond à l'état actuel des connaissances et qui est bien maîtrisée.

Une incertitude systématique correspond, par exemple, à la dérive dans le temps d'un appareil de mesure, à une erreur dans la préparation d'un essai ou à un biais de modélisation.

Souvent, une incertitude est d'abord considérée comme aléatoire, par manque de connaissances de la physique mise en jeu, avant de devenir systématique.

Les incertitudes peuvent provenir de différentes sources. Un moyen classique pour lister toutes les sources d'incertitude dans un contexte donné est d'utiliser le **diagramme de causes et effets**. Ce diagramme, aussi appelé **diagramme d'Ishikawa** du nom de son inventeur [Ish90], **diagramme en arêtes de poisson** ou **méthode 5M**, est un outil pour la gestion de la qualité. Il permet d'énumérer les sources d'incertitude qui peuvent apparaître dans le cadre d'une mesure (Figure 2.2). Ces sources sont regroupées en fonction de leurs origines. D'après ce diagramme, les sources d'incertitude peuvent être classées en cinq groupes, d'où son nom de méthode des 5M :

- Matière ;
- Moyen ;
- Milieu ;
- Main d'œuvre ;
- Méthode.

Ce diagramme peut aussi servir dans un contexte plus général pour lister les différentes sources d'incertitude présentes.

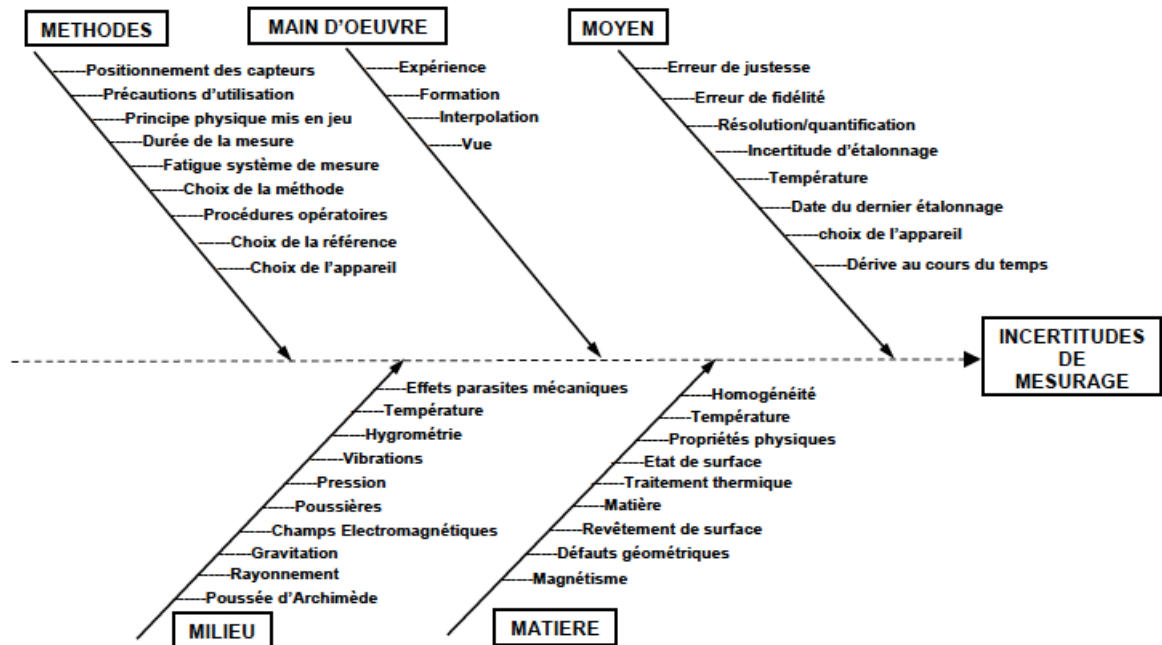


FIGURE 2.2 – Diagramme de causes et effets sur l'incertitude d'une mesure

2.3.3 Modélisation des incertitudes

Toute grandeur observée est incertaine. Cette incertitude est modélisable par une variable aléatoire notée X telle que définie en Annexe A.2. La mesure de cette grandeur se caractérise par sa justesse et sa fidélité. La justesse correspond à la présence ou non d'une erreur systématique. Elle est modélisée par l'espérance $E[X]$, aussi appelée moyenne notée μ_X , de cette variable aléatoire X . La fidélité correspond à la dispersion statistique autour de la valeur moyenne de cette mesure. Elle est modélisée par la variance σ_X^2 ou l'écart-type σ_X de la variable aléatoire X . Deux modélisations possibles de l'incertitude sont présentées dans la suite, inspirées des travaux de thèse de Perrin [Per08].

2.3.3.1 Modélisation d'une variable aléatoire à partir d'un jugement d'expert

Dans le cas où peu d'informations sont disponibles sur la grandeur considérée, il est difficile de reconstruire sa loi de distribution. Une loi de distribution est alors choisie d'après un jugement d'expert. Ce jugement prend en compte le peu d'informations disponibles ainsi que le retour d'expérience pour orienter le choix vers une loi de distribution. Ces informations, subjectives, sont traitées par le principe de maximum d'entropie ([Jay57], [KK92] et [Ven98]). Ce principe permet

de définir une fonction de densité de probabilité f_X pour cette variable aléatoire X sans hypothèse supplémentaire.

Le principe de maximum d'entropie suppose que la fonction de densité de probabilité f_X représentant au mieux l'information connue est celle qui maximise l'entropie H au sens de Shannon :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \log(f_X(x)) dx \quad (2.10)$$

où :

- H est la fonction d'entropie ;
- f_X est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X .

L'idée du principe de maximum d'entropie est de maximiser la fonction d'entropie H tout en vérifiant les informations connues et objectives. Ces informations sont définies comme des contraintes dans \mathbb{R} , \mathbb{R} étant l'espace des réels :

$$\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1, \text{ la contrainte connue} \quad (2.11)$$

$$E[c_i(X)] = \gamma_i \text{ avec } i = \{1, \dots, n_c\}, \text{ les autres contraintes} \quad (2.12)$$

- \mathbb{P}_X est la probabilité de la variable aléatoire X ;
- $c_i(X)$ sont les contraintes, à définir, sur la variable aléatoire X ;
- $\gamma_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Il s'agit donc d'un problème d'optimisation sous contraintes. La loi de distribution retenue, qui maximise l'entropie H , correspond à celle qui contient le moins d'informations. Ce n'est donc pas un choix arbitraire. Dans la pratique, le principe de maximum d'entropie conduit à :

- une loi uniforme :
Si le domaine de variation de la variable aléatoire X est borné ;
- une loi exponentielle :
Si la moyenne μ_X de la variable aléatoire X est connue et si son domaine de variation est borné ou semi-borné ;
- une loi normale, aussi appelée gaussienne :
Si la moyenne μ_X et l'écart-type σ_X de la variable aléatoire X sont connus et si son domaine de variation est non borné.

2.3.3.2 Modélisation d'une variable aléatoire à partir d'observations

S'il existe un échantillon de taille non négligeable, il est possible de reconstruire la fonction de densité de probabilité f_X de la grandeur observée X ainsi que de calculer les caractéristiques de cette loi. C'est ce que l'on appelle la modélisation statistique [Tas85]. La démarche pour cette modélisation est détaillée par Saporta [Sap06].

Pour identifier une loi de distribution à partir d'un échantillon comprenant n_x observations d'une variable aléatoire X , une méthode classique est de construire l'histogramme des observations de cette variable.

Un histogramme est un diagramme représentant les informations d'une grandeur sous forme de barres (Figure 2.3). Différents types d'histogramme peuvent être envisagés :

- un histogramme à pas h fixe :
Le principe est de diviser le domaine des valeurs de l'échantillon par des intervalles à pas h fixe. Les valeurs proches, contenues dans le même intervalle, sont regroupées en classes. Chaque classe est donc d'une largeur fixe égale au pas h défini.
L'histogramme à pas h fixe est un diagramme dont chaque classe est représentée par une barre. Pour chaque classe, la largeur de la barre est égale au pas h et la hauteur de la barre est égale au nombre d'observations dans cette classe.
- un histogramme à fenêtre mobile ou à pas h aléatoire :
Le principe est le même que précédemment à la différence qu'une classe est construite pour chaque observation. Un nombre n_x de classes est donc construit. Ces classes, centrées sur chaque observation, sont d'une largeur h fixe.

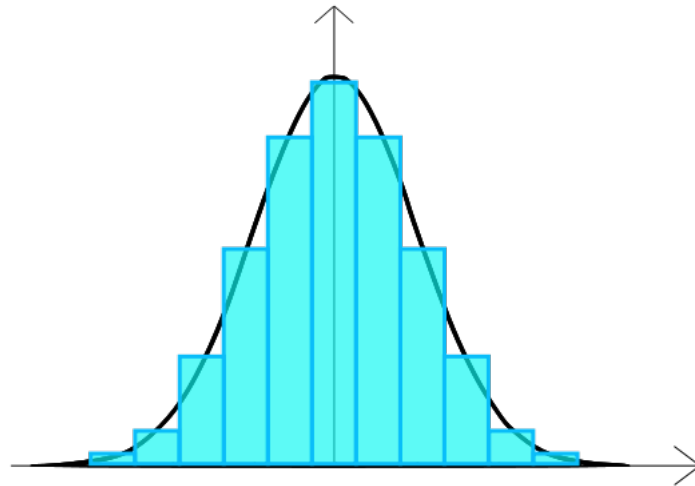


FIGURE 2.3 – Histogramme pour une loi normale centrée (Annexe A.2, Figures A.1 et A.2)

D'autres méthodes permettent de compléter les informations données par un

histogramme. Par exemple, la méthode du polygone permet d'estimer certains quantiles par interpolation linéaire, en reliant les milieux des arêtes-sommets des classes d'un histogramme.

Lorsque l'échantillon est de taille suffisante, il est possible de calculer certaines caractéristiques de la variable aléatoire X observée. Des estimations de la moyenne μ_X et la variance σ_X^2 de cette variable aléatoire X peuvent être calculées de la manière suivante :

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} x_i \quad (2.13)$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n_x - 1} \sum_{i=1}^{n_x} (x_i - \hat{\mu}_X)^2 \quad (2.14)$$

où :

- x_i sont les réalisations de la variable aléatoire X ;
- n_x est le nombre de réalisations x_i de la variable aléatoire X .

Les deux relations précédentes sont valables si l'échantillon contient au minimum 30 observations [Bri06]. En dessous, les caractéristiques estimées sont très approximatives. Entre 30 et 100 observations, la précision des caractéristiques précédentes est suffisante pour une majorité des applications. Au delà de 100 observations, ces caractéristiques sont estimées avec un degré de confiance de plus en plus élevé permettant de définir des probabilités de défaillance.

2.4 Type de problèmes considérés

Le premier problème traité dans le cadre de ce mémoire est un problème inverse : l'étalonnage des efforts résultants au sol. Le deuxième problème traité est un problème direct.

Avant d'aborder les problèmes inverses, il convient de parler de la théorie des problèmes directs. Dans la suite, les deux types de problèmes traités dans ce mémoire sont décrits.

2.4.1 Définitions

2.4.1.1 Problème direct

En sciences, le problème direct pourrait se définir comme la prédiction des effets d'un phénomène connaissant ses causes. Le phénomène, décrit par une théorie physique ou un modèle, établit la relation entre les causes et les conséquences (Figure 2.4).

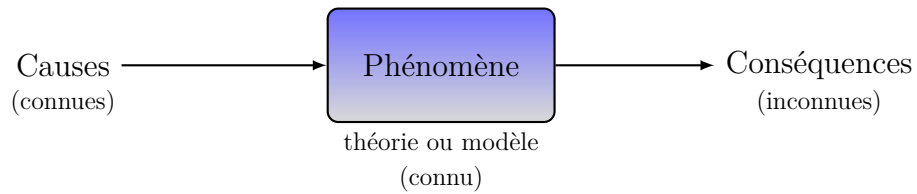


FIGURE 2.4 – Illustration du problème direct

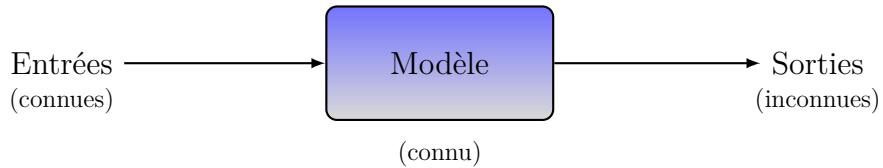


FIGURE 2.5 – Système direct

D'un point de vue système, les causes sont les entrées du système, les conséquences sont les sorties (Figure 2.5).

En fait, une définition plus générale du problème direct peut être donnée. Le problème direct correspond au problème classique où, connaissant la relation entre les entrées et les sorties, les sorties sont calculées à partir des entrées connues. Comme décrit par Menke dans [Men89], la théorie du problème direct repose sur trois éléments fondamentaux (Figure 2.6) : un **modèle quantitatif**, issu de principes physiques généraux ou d'une théorie physique, les **paramètres du modèle** et les **données**. La résolution du problème direct permet donc de prédire une grandeur physique à partir de principes physiques ou d'un modèle et d'un ensemble de conditions ou d'hypothèses spécifiques au problème considéré.

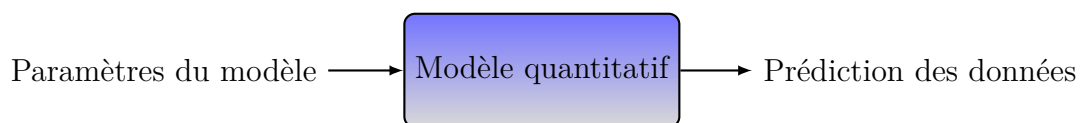


FIGURE 2.6 – Principe du problème direct

Pour faire le parallèle avec le point de vue système du problème direct, les paramètres du modèle constitue le modèle, quantitatif, permettant de prédire les sorties, appelées ici données, à partir de sollicitations définies par les entrées. Le modèle quantitatif correspond à la théorie permettant de modéliser le problème, c'est-à-dire d'estimer les sorties à partir des paramètres connus du modèle.

En mécanique, les entrées et les sorties sont généralement des grandeurs physiques et/ou géométriques telles que les dimensions de la structure étudiée, ses rigidités, les déformations ou contraintes de cette structure, *etc.* Les entrées peuvent être estimées, par exemple par un autre modèle, mesurées ou fixées, comme dans le cas d'une étude paramétrique. Le modèle est souvent issu de la discrétisation d'une équation différentielle régissant le comportement de l'objet étudié ou la physique du phénomène considéré.

Sauf dans le cas où le problème considéré est très simple, les paramètres du modèle sont en général estimés, donc connus avec une certaine précision et une certaine incertitude comme définies à la sous-section 2.3.1. Les prédictions de ce problème sont donc également des estimations, calculées avec une incertitude.

Le problème direct s'applique souvent dans le cadre d'essais. Il permet de comparer la valeur prédite de la grandeur considérée à sa valeur mesurée. La valeur prédite est rarement identique à la valeur observée pour deux raisons : les incertitudes de mesure et les imperfections de modélisation. D'après Tarantola dans [Tar05], ces deux sources d'erreurs, pourtant très différentes, produisent en général des incertitudes du même ordre de grandeur. En effet, les expérimentations aboutissent à des théories physiques et ces théories physiques permettent de prédire les résultats expérimentaux. Par conséquent, grâce aux progrès continus de la recherche scientifique, dès que de nouvelles méthodes expérimentales permettent de diminuer les incertitudes de mesure, de nouvelles théories et de nouveaux modèles sont développés. Ces derniers permettent ainsi de prédire plus précisément les résultats d'essais. C'est pourquoi le problème direct est aussi appelé problème de modélisation ou problème de simulation.

2.4.1.2 Problème inverse

Le problème inverse se définit comme l'inverse du problème direct. D'un point de vue système, il correspond à la détermination des paramètres du modèle, caractérisant le système, connaissant les entrées et les sorties (Figure 2.7). Les entrées et les sorties sont souvent des données observées, accessibles par l'expérience, ou simulées, par toute méthode dérivant de la discrétisation d'une équation différentielle d'un phénomène physique. Les paramètres du modèle sont souvent inaccessibles par l'expérience.

Cette définition est évidente avec la définition du problème direct de Menke [Men89] définie précédemment à la sous-sous-section 2.4.1.1. Le problème inverse est bien l'inverse du problème direct (Figure 2.8).

Les problèmes inverses sont en général motivés par le besoin de maîtriser les informations concernant les propriétés de la structure étudiée [BC05]. Les paramètres du modèle représente le « savoir » du phénomène physique étudié [Men89].

Le but du problème inverse est d'apporter de l'information sur les paramètres

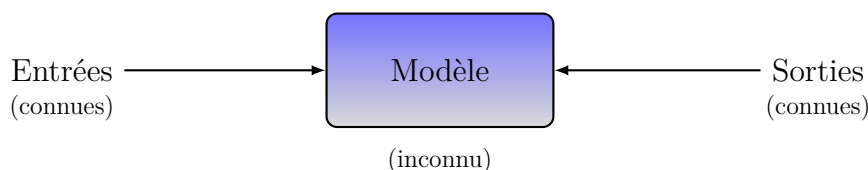


FIGURE 2.7 – Système inverse

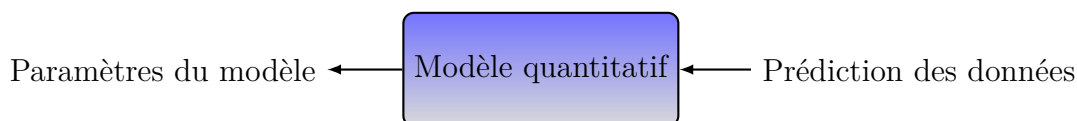


FIGURE 2.8 – Principe du problème inverse

inconnus du modèle. En revanche, il ne fournit pas le modèle. Cette question relève d'un problème de modélisation, donc d'un problème direct, qui nécessite de considérer toutes informations disponibles. Ce problème de modélisation est l'objet de la section 2.5 suivante.

La théorie des problèmes inverses fournit également des moyens d'évaluer l'exactitude d'un modèle donné ou d'orienter le choix entre plusieurs modèles possibles. Même dans le cas où seuls les paramètres du modèle sont recherchés, utiliser le problème inverse comme un outil sans se poser la question de la qualité du modèle obtenu n'est pas pertinent. Différents critères existent pour quantifier la qualité de ce modèle. L'utilisation de ces critères dépend des caractéristiques recherchées pour la solution du problème inverse.

La théorie des problèmes inverses a été développée dans des contextes et avec des buts différents. Il en résulte trois versions différentes [Men89] :

- une **version probabiliste** :

Il s'agit de la version la plus générale et la plus simple. Dans cette version, les données et les paramètres du modèle sont décrits par des variables aléatoires. L'accent est mis sur la détermination des fonctions de densité de probabilité des paramètres du modèle [Men89].

Toutes informations connues sur les paramètres du modèle permettent d'associer une distribution de probabilité sur certaines caractéristiques du problème. En considérant la théorie physique sur laquelle repose le problème ainsi que les données observées, cette version probabiliste permet de transformer ces distributions de probabilité supposées en distributions effectives [Tar05].

Cette version probabiliste peut s'appliquer à tout type de problème inverse, qu'il soit linéaire ou fortement non linéaire. C'est aussi la version la plus

utilisée [Tar05]. Cette version mène naturellement à l'analyse de l'erreur de modélisation et aux tests d'importance des paramètres du modèle, présentés à la sous-sous-section 2.5.4.2.

- une **version déterministe** :

Dans cette version, toute utilisation de la théorie des probabilités est évitée. L'accent est mis sur l'estimation des paramètres du modèle. Ces estimations sont parfois accompagnées de barres d'erreur.

Même dans cette version non probabiliste, l'estimation des paramètres du modèle correspond à une estimation de l'espérance de la densité de probabilité de chaque paramètre du modèle.

- une **version continue** :

Les deux versions précédentes proposent en fait d'approcher des fonctions physiques continues par un nombre fini de paramètres du modèle. La version continue du problème inverse développe des méthodes pour traiter explicitement des modélisations à base de fonctions continues. C'est la version la moins utilisée.

2.4.2 Formulations

Un modèle doit capturer l'essentiel de la physique du problème étudié avec des paramètres physiques ou non, comme dans le cas d'un méta-modèle ou modèle approché tel que défini à la section 2.5. Souvent, les problèmes direct et inverse sont utilisés dans le cadre d'essais. Les données et les paramètres du modèle peuvent donc être considérés comme des variables discrètes. Dans cette partie, les données sont notées $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^T$ et les paramètres du modèle sont notés $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_p)^T$. Les définitions suivantes portent sur le problème direct tel que défini par Menke dans [Men89], la résolution du problème inverse consistant à inverser ces relations.

2.4.2.1 Définitions implicites

Les données \mathbf{d} et les paramètres du modèle \mathbf{m} peuvent être reliés par une ou L équations implicites :

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{d}, \mathbf{m}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_L(\mathbf{d}, \mathbf{m}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mathbf{0}_{L,1} \quad (2.15)$$

Cette formulation résume la manière dont sont reliés les données \mathbf{d} , observées ou simulées, aux paramètres du modèle \mathbf{m} , inconnus. Cette formulation peut être utilisée dans le cas de fonctions simples ou complexes, même non linéaires.

Dans le cas où la fonction \mathbf{f} est linéaire par rapport aux données \mathbf{d} et aux paramètres du modèle \mathbf{m} , la relation précédente peut être ré-écrite sous forme matricielle :

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mathbf{0}_{L,1} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (2.16)$$

où :

- $\mathbf{F} \in M_{L,n+p}(\mathbb{R})$;
- $\mathbf{x} = (\mathbf{d}^T, \mathbf{m}^T)^T \in M_{n+p,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur concaténation de \mathbf{d} et \mathbf{m} .

Dans le cas d'un problème inverse, rien ne précise cependant que le système contient assez d'informations pour définir de manière unique les paramètres du modèle \mathbf{m} ou si ce système est consistant. L'objectif de la théorie inverse est de répondre à ces questions et de fournir des moyens pour résoudre les problèmes posés.

2.4.2.2 Définitions explicites

Dans de nombreux cas, il est possible de séparer les données \mathbf{d} des paramètres du modèle \mathbf{m} et de former $L = n$ équations. Ces équations, définies par le vecteur de fonctions \mathbf{g} , sont linéaires par rapport aux données \mathbf{d} et non linéaires par rapport aux paramètres du modèle \mathbf{m} :

$$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \Leftrightarrow \mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) = \mathbf{0}_{n,1} = \mathbf{f}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \quad (2.17)$$

Dans la formulation explicite linéaire, le vecteur de fonctions \mathbf{g} est également linéaire, conduisant au système matriciel suivant :

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} \Leftrightarrow \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{0}_{n,1} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (2.18)$$

où :

- $\mathbf{G} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Cette formulation est équivalente à la version implicite linéaire en posant :

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I}_n, -\mathbf{G}] \quad (2.19)$$

Dans le cas discret, où un nombre fini de paramètres du modèle \mathbf{m} est recherché, la formulation explicite du problème direct est la suivante :

$$d_i = \sum_{k=1}^p G_{ik} m_k, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (2.20)$$

Si les données \mathbf{d} restent discrètes mais qu'une fonction continue du modèle m est recherchée, la formulation explicite du problème direct devient :

$$d_i = \int G_i(x) m(x) dx, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (2.21)$$

Dans le cas où les données et les paramètres du modèle correspondent à deux fonctions continues d et m , la formulation explicite du problème direct est :

$$d(y) = \int G(y, x)m(x)dx \quad (2.22)$$

2.4.3 Résolution

2.4.3.1 Problème direct

La résolution du problème direct consiste à prédire la réponse \mathbf{d} du modèle considéré à partir d'entrées connues. Les paramètres du modèle \mathbf{m} entre les entrées et les sorties étant connus, cette résolution est évidente.

Dans le cas déterministe, la solution au problème direct est unique. Si les prédictions de la réponse \mathbf{d} à partir des paramètres du modèle \mathbf{m} sont amenées à être comparées à des résultats d'essais, une attention particulière doit être portée sur l'incertitude de chaque prédiction fournie. L'incertitude de ces prédictions \mathbf{d} à partir des paramètres du modèle \mathbf{m} peut provenir soit d'une imperfection de modélisation due à une modélisation incomplète ou à l'incertitude des paramètres du modèle \mathbf{m} , soit des incertitudes sur les entrées.

2.4.3.2 Problème inverse

La résolution d'un problème inverse est sensiblement plus difficile que la résolution d'un problème direct. Par exemple, il est plus difficile de réaliser une régression linéaire sur des données pour déterminer les coefficients du polynôme de degré 1 décrivant le comportement entre les entrées et les sorties que d'évaluer ce polynôme.

La théorie des problèmes inverses vise à résoudre ce type de problème ou à « inverser » les problèmes directs. La résolution d'un problème inverse permet de déterminer les « meilleurs » paramètres du modèle \mathbf{m} . Le problème inverse consiste donc à chercher les valeurs des paramètres du modèle \mathbf{m} de sorte que les valeurs prédites des données $\hat{\mathbf{d}}$ coïncident de manière consistante avec les valeurs observées \mathbf{d} . Dans la pratique, le problème inverse est souvent formulé comme la minimisation d'une fonction de coût \mathcal{J} :

$$\mathbf{m}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(\mathbf{m}) \quad (2.23)$$

où :

- \mathbf{m}^* est la valeur « vraie » des paramètres du modèle \mathbf{m} ;
- \mathcal{J} est la fonction de coût à minimiser ;
- \mathcal{M} est l'espace des paramètres du modèle \mathbf{m} .

C'est un problème d'optimisation. Dans le cas linéaire, il s'écrit :

$$\mathbf{m}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} \|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}\|_{L_p} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} \|\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}\|_{L_p} \quad (2.24)$$

où :

- $\hat{\mathbf{d}}$ est l'estimation par le modèle, défini par ses paramètres \mathbf{m} , des données \mathbf{d} ;
- L_p est la norme p définie sur l'espace \mathcal{M} .

L'équation précédente introduit la notion de « meilleur » ajustement entre les données observées \mathbf{d} et les données simulées $\hat{\mathbf{d}}$. La norme L_p choisie pour cette minimisation dépend des informations connues au préalable sur le problème. Les paramètres du problème \mathbf{m} à identifier correspondent alors au minimum global de cette fonction de coût. Dans le cas où ce minimum global ne peut être déterminé de manière explicite, diverses méthodes algorithmiques peuvent être utilisées. Ces méthodes de recherche d'un extremum peuvent globalement se diviser en deux classes : les méthodes à base de gradient ou les méthodes métaheuristiques ([Hol92], [Gal05a] et [Gal05b]).

L'analyse des problèmes inverses met en évidence deux considérations importantes. Premièrement, il n'est pas possible d'aborder un problème inverse sans avoir une connaissance suffisante, voire approfondie, du problème direct. En effet, il est nécessaire de connaître la manière dont le système répond à des sollicitations, ou entrées, imposées. Deuxièmement, le caractère « mal posé » au sens d'Hadamard [Had02] du problème mathématique peut entraîner l'existence d'un grand nombre de solutions possibles pour les paramètres du modèle \mathbf{m} . Ceci provient des incertitudes de mesure sur les données \mathbf{d} . Ces solutions peuvent être très éloignées les unes des autres. Un problème est dit « bien posé » selon Hadamard s'il admet une solution unique qui dépend continûment des données le définissant.

Pour espérer résoudre correctement un problème inverse, il faut donc vérifier l'existence, l'unicité et la stabilité d'une telle solution. Dans le cas d'un problème inverse linéaire, ce caractère est évaluable par le conditionnement de la matrice représentant le système. Si la matrice est mal conditionnée, il peut être nécessaire de « régulariser » le problème. La régularisation la plus classique est celle de Tikhonov, aussi appelée régularisation d'arête rappelée à la sous-section 2.5.4.3.

2.5 Méta-modélisation ou modélisation par modèle de substitution

Le problème direct considéré dans ce mémoire définit une relation analytique entre les déformations de la structure et les efforts résultants. D'un point de vue

système, les déformations correspondent aux entrées et les efforts résultants correspondent aux sorties. Cette relation n'est pas *a priori* connue. Il serait possible d'établir cette relation explicitement mais trop contraignant dans le cas présent. Cela demanderait, par exemple, de mettre en place des moyens supplémentaires, potentiellement coûteux, pour mesurer de manière précise les caractéristiques physiques nécessaires à l'établissement de cette relation. La construction de cette relation relève donc d'un problème inverse tel que défini à la sous-sous-section 2.4.1.2. La question se pose alors de la forme de la relation à rechercher. Tout dépend alors de la modélisation adoptée pour le problème direct tel que défini à la sous-sous-section 2.4.1.1 et à la sous-section 2.4.2.

Une solution est d'utiliser une méthode de méta-modélisation. Le principe de la méta-modélisation, introduit par Box et Wilson en 1951 [BW51], consiste à remplacer le modèle physique entre les entrées et les sorties du système par un modèle approché. Ce modèle approché est appelé méta-modèle, modèle de substitution, surface de réponse, modèle réduit ou encore émulateur. L'objectif d'un méta-modèle est d'imiter le comportement du modèle physique de manière aussi fidèle que possible tout en étant plus simple et moins coûteux. L'idée est donc de considérer la relation entre les entrées et les sorties du système comme une « boîte noire » et de s'intéresser au comportement du système. Ce type de modèle peut être utilisé dans le cas où le modèle physique est connu ou inconnu. En revanche, dans le cas où le modèle physique n'est pas connu, toutes informations *a priori* connues sur le problème direct peuvent être utiles dans le choix de la famille de méta-modèles à utiliser et dans la détermination des paramètres de ce méta-modèle [Tar05].

Les méta-modèles sont couramment utilisés pour remplacer certains essais ou des simulations numériques complexes. En effet, ils permettent d'accéder à une grandeur d'intérêt qui peut être difficile à mesurer directement ou à estimer. L'intérêt de remplacer des essais, coûteux, est évidente puisqu'il a amené à un déploiement de l'utilisation des simulations numériques. Grâce à l'augmentation des puissances de calcul, l'augmentation de l'utilisation de modèles numériques permet d'améliorer en permanence les modèles physiques, par corrélation avec les essais. Ces modèles numériques deviennent ainsi plus complexes et plus précis rendant les simulations numériques plus coûteuses. De plus, les analyses répétitives et paramétriques sont désormais réalisables dans le cadre de la conception, de l'optimisation, de l'analyse de sensibilité ou encore de la propagation d'incertitudes. Ces analyses réclament un grand nombre de simulations et sont donc coûteuses d'où l'intérêt d'utiliser des méta-modèles, plus simples.

Dans la suite sont présentées différentes familles de méta-modèles telles que les surfaces de réponse polynomiales, le krigeage ou encore les réseaux de neurones artificiels ([Rou11] et [Bau12]). Par la suite, la démarche générale pour la

construction d'un méta-modèle est abordée avant de définir les méthodes pour valider ce modèle ainsi construit. Deux méthodes de validation sont décrites : la validation simple et la validation croisée. Enfin, des méthodes pour optimiser ces méta-modèles sont proposés de manière non exhaustive.

2.5.1 Types de méta-modèle

Un méta-modèle ϕ permet d'établir une relation approchée entre des paramètres d'entrée $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$, où $p \in \mathbb{R}$, et une grandeur d'intérêt y :

$$y = \phi(\mathbf{x}) \quad (2.25)$$

où :

- \mathbf{x} est le vecteur des paramètres d'entrée, aussi appelées variables de régression, régresseurs ou variables explicatives ;
- y est le paramètre de sortie, aussi appelé variable de sortie, réponse ou variable expliquée ;
- ϕ est la fonction du méta-modèle se substituant au « vrai » modèle.

Le vecteur des paramètres d'entrée \mathbf{x} est aussi appelé vecteur des variables indépendantes du problème. En effet, les paramètres d'entrée \mathbf{x} sont supposés être indépendants. La réponse y est aussi appelée variable dépendante du problème car elle dépend des paramètres d'entrée \mathbf{x} .

Il existe différentes familles de méta-modèles. Elles se différencient par leur utilisation et leur fonction génératrice. Elles peuvent être basées sur des techniques de régression ou sur des techniques d'interpolation. Historiquement, les surfaces de réponse polynomiales, basées sur des techniques de régression linéaire, sont les plus anciennes.

Compte tenu des contraintes industrielles, le choix d'une surface de réponse polynomiale, initialement utilisée dans l'estimation des efforts résultants en vol, pour modéliser la relation entre les déformations et les efforts résultants est conservé dans le cadre de ces travaux de thèse. Mais l'utilisation de méta-modèles d'autres familles est envisageable.

Le but de cette partie est donner un aperçu de quelques familles de méta-modèles existantes. Ces différentes familles de méta-modèles sont utilisées pour de nombreuses applications et font également l'objet de nombreuses publications et comparaisons [Jon01].

2.5.1.1 Les surfaces de réponse polynomiales

Les surfaces de réponse polynomiales sont parfois appelées simplement surface de réponse car ce sont chronologiquement les plus anciennes. À l'origine, elles ont été utilisées dans le cadre d'essais expérimentaux pour caractériser la relation

entre un nombre fini de paramètres d'entrée $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ et une grandeur physique d'intérêt y . Comme son nom l'indique, la relation ϕ recherchée ici est de forme polynomiale. Le cas le plus simple et le plus classique consiste à rechercher une approximation sous la forme d'un développement limité d'ordre K de chaque paramètre d'entrée :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha, \|\alpha\|_1 \leq K} m_{\alpha} \mathbf{x}^{\alpha} \quad (2.26)$$

où :

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$;
- $\mathbf{m} = (m_{\alpha})$ est le vecteur des paramètres du modèle ;
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ est le vecteur des paramètres d'entrée.

La base de ce polynôme est donc composée de monômes \mathbf{x}^{α} . C'est la forme la plus répandue des surfaces de réponse polynomiales. D'autres bases peuvent être utilisées pour construire ce type de méta-modèle. Par exemple, les bases d'Hermite ou de Legendre permettent de construire un type de surfaces de réponse polynomiales appelé « polynôme de chaos » ou « chaos polynomial » [Sud08].

Dans la relation précédente, il y a $\frac{K+p}{K!p!}$ paramètres du modèle \mathbf{m} à déterminer. Pour calculer ces paramètres du modèle \mathbf{m} , il faut disposer d'un échantillon de données contenant plusieurs ensembles de valeurs des paramètres d'entrée \mathbf{x} associées à la valeur de la réponse y correspondante. Il faut donc un échantillon comprenant au moins autant de données que de paramètres du modèle \mathbf{m} à déterminer. Dans le cas où le nombre de données dans cet échantillon est égal au nombre de paramètres du modèle \mathbf{m} , si une solution au problème inverse existe, elle est unique. Si le nombre de données dans l'échantillon est plus important que le nombre de paramètres du modèle \mathbf{m} , il peut exister une infinité de solutions. Des techniques de régression sont alors utilisées.

Le problème inverse à résoudre correspond donc à un problème d'optimisation. Il s'agit donc de trouver les paramètres du modèle \mathbf{m} qui minimisent la distance entre les prédictions de la réponse \hat{y} du modèle ϕ et les réponses connues de l'échantillon y .

La méthode la plus utilisée est la méthode des moindres carrés, qui minimise la somme des carrés des distances entre les valeurs de la réponse y données par l'échantillon et les valeurs de la réponse \hat{y} prédites par le modèle à construire. Cette méthode repose sur l'utilisation de la norme euclidienne, ou norme L_2 . Elle est bien adaptée lorsque l'erreur recherchée entre les valeurs connues de la réponse et les valeurs prédites par le modèle suit une loi normale centrée. C'est le cas dans la majorité des applications. Cette méthode présente cependant l'inconvénient de donner plus de poids aux points aberrants de part l'utilisation de la norme L_2 . Dans ce cas, il est préférable d'utiliser la norme L_1 , ou norme absolue, plus robuste.

Plus l'ordre du polynôme recherché est élevé, plus le nombre de paramètres du modèle \mathbf{m} à déterminer augmente. Il faut donc d'autant plus de données dans

l'échantillon pour les estimer. C'est pourquoi le degré du polynôme recherché doit être le plus bas possible. Si un polynôme d'ordre élevé est recherché, une solution est d'utiliser la méthode des polynômes creux. La méthode consiste à supprimer les monômes de coefficients nuls de la définition de la surface de réponse polynomiale. Dans la pratique, des surfaces de réponse polynomiales au maximum d'ordre 2 suffisent à approcher une grande majorité des phénomènes étudiés.

Comme précisé précédemment, les méta-modèles sont des modèles approchés. Il convient donc, dans le cas des surfaces de réponse polynomiales, de rechercher une fonction vérifiant :

$$y = \phi(\mathbf{x}) + e \quad (2.27)$$

où :

- \mathbf{x} est le vecteur des paramètres d'entrée du modèle ϕ ;
- y est la réponse du modèle ϕ ;
- ϕ est la fonction représentant la surface de réponse polynomiale ;
- e est l'erreur du modèle ϕ , aussi appelée résidu, entre les valeurs connues de la réponse y données par l'échantillon et les valeurs prédites de la réponse \hat{y} par la surface de réponse polynomiale construite $\hat{\phi}$.

L'erreur du modèle e provient du manque d'ajustement de la surface de réponse polynomiale et du bruit des données de l'échantillon. La variable d'entrée \mathbf{x} est supposée exacte alors que la variable de sortie y et la variable d'erreur e sont considérées aléatoires.

De part leur simplicité, les surfaces de réponse polynomiales sont utilisées dans de nombreuses applications. Elles fournissent une expression analytique simple décrivant un phénomène et où l'effet de chaque paramètre d'entrée x_k sur la réponse y est intuitif. Elles peuvent aussi être utilisées pour des phénomènes plus complexes, en approchant par morceaux le comportement du phénomène sur des domaines limités.

2.5.1.2 Le krigeage

Le krigeage, du terme *kriging* en anglais, est une méthode d'interpolation. Son nom vient de D.G. Krige, un ingénieur minier sud-africain qui a exposé cette méthode dans son mémoire de Master en 1953. Elle a été formalisée par le mathématicien français Georges Matheron, de l'école des Mines de Paris, en 1963 pour l'analyse minière et la géostatistique. Le krigeage a ensuite été appliqué dans de nombreux domaines dont la météorologie, l'électromagnétisme et les sciences de l'environnement. C'est une méthode aujourd'hui très populaire pour la construction du méta-modèle.

Contrairement aux surfaces de réponse polynomiales, le krigeage permet de construire un modèle approché même pour des phénomènes complexes. Ce méta-modèle est du type interpolant : il prédit de manière exacte les points utilisés pour

sa construction. L'erreur de prédiction dépend ici de la distance entre les points de l'échantillon et de nouveaux points. Plus les nouveaux points sont éloignés de l'échantillon utilisé pour sa construction, plus l'intervalle de confiance sur ces nouvelles prédictions sera grand.

Le principe du krigeage repose sur la théorie des probabilités. La grandeur d'intérêt Y est supposée être la réalisation d'un processus gaussien qui dépend du vecteur des paramètres d'entrée \mathbf{x} . Le modèle de krigeage se décompose en deux parties : une partie déterministe et une partie aléatoire. Il peut s'écrire de la manière suivante :

$$Y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + e(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} m_{\alpha} h_{\alpha}(\mathbf{x}) + e(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

où :

- $\mu(\mathbf{x})$ est la partie déterministe :
Le terme $\mu(\mathbf{x})$ représente la tendance moyenne du processus. Les coefficients $\mathbf{m} = (m_{\alpha})$ sont les paramètres du modèle à déterminer. Les fonctions $\mathbf{h} = (h_{\alpha})$ sont des fonctions du vecteur des paramètres d'entrée \mathbf{x} . En général, il s'agit de fonctions polynomiales d'ordre inférieur ou égal à 2.
- $e(\mathbf{x})$ est la partie aléatoire :
Le terme aléatoire $e(\mathbf{x})$ est un processus gaussien. Chaque erreur $e_k = e(x_k)$ est une variable aléatoire gaussienne pour toutes valeurs x_k , de moyenne nulle, de variance σ_e^2 et d'auto-covariance :

$$\gamma_k = Cov(e(x_{k1}), e(x_{k2})) = \sigma_e^2 R(x_{k1}, x_{k2}) \quad (2.29)$$

Il s'agit en fait d'une fonction d'auto-corrélation où R est la fonction de corrélation, dépendant de la distance entre les deux valeurs x_{k1} et x_{k2} du paramètre d'entrée x_k .

Il existe plusieurs types de krigeage qui dépendent de la forme donnée à la tendance moyenne du processus :

- le krigeage simple :

$$\mu(\mathbf{x}) = \text{constante} \in \mathbb{R}, \text{ connue} \quad (2.30)$$

- le krigeage ordinaire :

$$\mu(\mathbf{x}) = \text{constante} \in \mathbb{R}, \text{ inconnue} \quad (2.31)$$

- le krigeage universel :

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} h_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad \text{où } \mathbf{h} = (h_{\alpha}) \text{ sont des fonctions connues} \quad (2.32)$$

Dans le cas où les fonctions $\mathbf{h} = (h_\alpha)$ sont des fonctions polynomiales, le krigeage universel se différencie des surfaces de réponse polynomiales seulement par son terme d'erreur. En effet, e est une variable aléatoire dans le cas des surfaces de réponse polynomiales alors qu'ici $e(\mathbf{x})$ est un processus gaussien.

Le krigeage étant un méta-modèle interpolant, il prédit parfaitement la grandeur d'intérêt Y pour toutes les valeurs des paramètres d'entrée \mathbf{x} de l'échantillon utilisé pour sa construction. Il n'y a donc pas de manque d'ajustement comme dans le cas des surfaces de réponse polynomiales. Les incertitudes apparaissent pour des valeurs des paramètres d'entrée \mathbf{x} qui n'ont pas été utilisées pour la construction du modèle. L'incertitude des prédictions de ces nouvelles valeurs est alors donnée par la variance du modèle de krigeage. En effet, le krigeage fournit une indication sur la dispersion des réponses Y possibles du modèle autour de sa valeur moyenne pour toutes valeurs des paramètres d'entrée \mathbf{x} .

2.5.1.3 Les réseaux de neurones artificiels

Les réseaux de neurones artificiels sont une autre famille de méta-modèle de plus en plus employés pour représenter de manière approchée un phénomène. Comme son nom l'indique, ils s'inspirent du fonctionnement des neurones biologiques. Ils sont utilisés pour de la classification d'objet, de la reconnaissance de motif, en météorologie, en économétrie ou encore en modélisation. Les méta-modèles basés sur un réseau de neurones artificiels sont constitués de neurones artificiels assemblés en plusieurs couches. C'est pourquoi ils sont aussi appelés perceptron multicouche (*Multi Layer Perceptron*).

Un neurone artificiel est une entité qui possède plusieurs paramètres d'entrée $\mathbf{x} = (x_k)$ et une variable de sortie y . Le neurone artificiel réalise une somme pondérée des paramètres d'entrée \mathbf{x} à laquelle peut être ajouté un biais, filtré par une fonction d'activation t :

$$y(\mathbf{x}) = t \left(m_0 + \sum_{k=1}^p m_k x_k \right) \quad (2.33)$$

où :

- $\mathbf{x} = (x_k)$ sont les paramètres d'entrée du modèle ;
- $\mathbf{m} = (m_k)$ sont les paramètres du modèle ;
- t est la fonction d'activation.

Différentes fonctions d'activation t , aussi appelées fonctions de transfert ou de seuillage, existent. Les plus courantes sont les suivantes :

- la fonction de Heaviside aussi appelée fonction seuil :

Le neurone est activé pour une valeur supérieure ou égale à une valeur seuil

choisie. Cette fonction est notamment utilisée dans les réseaux de neurones artificiels pour la classification car elle réalise un choix binaire.

- la fonction sigmoïde :

Cette fonction en forme de « S » agit comme un filtre progressif sur le neurone, à l'opposé du filtre précédent. La vitesse de défilage est réglée par un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$t(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda \mathbf{x})} \quad (2.34)$$

- la fonction linéaire :

Comme son nom l'indique, elle réalise une transformation linéaire de ses entrées. Par exemple :

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \text{pour } x \geq 0 \quad (2.35)$$

Un réseau de neurones artificiels est donc l'assemblage de neurones artificiels en différentes couches. La couche d'entrée est constituée par le vecteur des paramètres d'entrée \mathbf{x} . La couche de sortie ne possède qu'un neurone donnant la grandeur d'intérêt y . Il est possible cependant d'avoir plusieurs grandeurs d'intérêt en sortie. Entre ces deux couches se trouvent des couches intermédiaires aussi appelées couches cachées. Chaque neurone de la couche cachée N prend en entrée toutes les sorties des neurones de la couche $N - 1$ précédente.

La difficulté de construction de ce méta-modèle repose sur le nombre de couches cachées et de neurones artificiels de chaque couche. Un nombre insuffisant de neurones artificiels ne permet pas d'approcher le phénomène considéré avec une qualité correcte. Un nombre trop important de neurones artificiels rend difficile la détermination des paramètres du modèle m . Différentes techniques existent pour résoudre cette difficulté.

Il existe d'autres types de réseaux de neurones artificiels comme ceux à fonctions de base radiales (*Radial Basis Function*). Plutôt que de réaliser une combinaison linéaire des paramètres d'entrée \mathbf{x} , les réseaux de neurones artificiels à fonctions de base radiales reposent sur une combinaison des distances entre ces paramètres d'entrée \mathbf{x} .

2.5.2 Construction

La construction des méta-modèles repose sur trois étapes :

1. l'échantillonnage :

Dans le cas d'un essai, l'échantillonnage correspond au prélèvement des différents points de mesure représentatifs du phénomène physique étudié. Les réponses y de l'essai sont mesurées pour différentes valeurs des paramètres

de l'essai, correspondant généralement aux paramètres d'entrée \boldsymbol{x} du problème direct. Lorsqu'un modèle numérique est disponible, ce modèle sert de référence. L'échantillonnage consiste donc à réaliser un plan d'expérience, expérimental ou numérique, permettant de connaître la réponse d'intérêt y pour certaines valeurs des paramètres d'entrée \boldsymbol{x} , judicieusement choisies. Dans les deux cas, cet échantillon forme un échantillon d'apprentissage pour le méta-modèle, appelé **base d'apprentissage**. Il sert en effet à construire le méta-modèle défini.

2. la construction :

Il s'agit en fait de la résolution d'un problème inverse. À partir de l'échantillon d'apprentissage, les paramètres \boldsymbol{m} du méta-modèle sont estimés. La qualité du méta-modèle est alors évaluée. En fonction de ce résultat, le méta-modèle peut être amélioré. Il peut être complexifié par l'ajout de nouveaux paramètres d'entrée x_k ou simplifier par le retrait de paramètres d'entrée x_k peu influents, comme proposé à la sous-sous-section 2.5.4.2. Il peut également être amélioré par l'évaluation du modèle pour de nouvelles valeurs des paramètres d'entrée \boldsymbol{x} . Une fois la qualité souhaitée atteinte, le méta-modèle est validé. De nombreux indicateurs permettent d'évaluer la qualité et la robustesse du méta-modèle trouvé à tout moment de sa construction.

3. l'exploitation :

Il s'agit de l'application du problème direct. C'est la phase d'utilisation du méta-modèle. Elle fournit donc une estimation de la grandeur d'intérêt y pour de nouvelles observations du vecteur des paramètres d'entrée \boldsymbol{x} . Cette estimation est souvent accompagnée d'un intervalle de confiance. Parfois, il est même possible d'obtenir la loi de distribution de la variable de sortie y . C'est le cas lorsque l'on utilise par exemple une méthode de Monte Carlo, moins coûteuse appliquée sur un méta-modèle que sur un modèle physique numérique complexe.

2.5.3 Validation

Un méta-modèle, même précis, reste un modèle approché d'un modèle quantitatif d'un phénomène physique. Il est donc nécessaire de valider sa robustesse. L'erreur du modèle e permet souvent de quantifier la qualité de celui-ci. Mais cette erreur du modèle e repose sur la différence entre les observations de la grandeur d'intérêt y et leur prédiction \hat{y} par le méta-modèle.

Dans le cas d'un méta-modèle basé sur des techniques de régression, cette erreur diminue avec l'augmentation de la taille de l'échantillon d'apprentissage. Cependant, un phénomène de sur-apprentissage apparaît lorsque cet échantillon d'apprentissage devient trop important. L'erreur de modèle e devient alors trop

faible. Le méta-modèle approche alors trop finement les valeurs de l'échantillon d'apprentissage, perdant simultanément sa capacité à prédire la réponse du modèle y pour de nouvelles valeurs des paramètres d'entrée \mathbf{x} . Ce phénomène est d'autant plus problématique lorsque les données sont bruitées car, dans ce cas là, le méta-modèle doit prédire la valeur « vraie » et non pas la valeur bruitée.

Dans le cas d'un méta-modèle basé sur des techniques d'interpolation, cette erreur est nulle puisque les prédictions sont exactes sur les points de l'échantillon d'apprentissage. Évaluer la qualité du modèle sur la base d'apprentissage n'est donc pas suffisante pour valider le méta-modèle. D'où l'intérêt de déterminer la robustesse du modèle construit.

2.5.3.1 Validation (classique)

En même temps que le méta-modèle est construit, il doit être validé. Cette validation permet de vérifier la robustesse du méta-modèle construit par rapport aux paramètres d'entrée \mathbf{x} . Il en résulte un indicateur, appelé erreur de validation, qui se différencie de l'erreur du modèle e évaluant sa qualité.

Lorsqu'un échantillon d'apprentissage de taille importante est disponible, il est divisé en deux parties : l'une est conservée pour la base d'apprentissage et l'autre constitue la base de validation. Le méta-modèle est donc construit sur cette base d'apprentissage réduite. Il est ensuite évalué sur sa base de validation. L'erreur de validation correspond à une moyenne des erreurs entre les valeurs de la réponse y observée, non utilisées pour construire le méta-modèle, et les valeurs prédites \hat{y} par ce méta-modèle. Plus cette erreur de validation est faible, moins le modèle construit est sensible aux paramètres d'entrée \mathbf{x} . Il est donc plus robuste. La taille de l'échantillon de validation dépend généralement de la taille de l'échantillon d'apprentissage avant division. En général, la moitié de l'échantillon est utilisée pour la base de validation, l'autre moitié étant utilisée comme base d'apprentissage.

Cette répartition entre base d'apprentissage réduite et base de validation est effectuée au hasard dans la base d'apprentissage initiale. Mais il est possible d'utiliser une méthode de sélection adaptée au problème considéré. Ces méthodes peuvent, par exemple, choisir des échantillons bien répartis dans l'espace d'entrée.

Dans le cas où la base d'apprentissage est enrichie pour améliorer le méta-modèle, la validation permet de contrôler et d'arrêter cet enrichissement. En effet, l'enrichissement améliore la qualité du méta-modèle en diminuant l'erreur du modèle e . Mais lorsque l'erreur de validation augmente, l'enrichissement n'est plus utile car le modèle, précis pour les valeurs de la base d'apprentissage, n'est plus capable de représenter avec fidélité le domaine absent de la base d'apprentissage. C'est le phénomène de sur-apprentissage.

2.5.3.2 Validation croisée

Pour des échantillons de taille limitée, il n'est pas envisageable de diviser la base d'apprentissage pour valider le méta-modèle. Dans ce cas une validation croisée est appliquée. La validation croisée consiste à valider le méta-modèle selon la méthode présentée précédemment mais de manière répétée.

Pour cela, différentes bases d'apprentissage réduites et bases de validation, complémentaires, sont construites aléatoirement. Une validation est effectuée sur chaque couple de bases (apprentissage réduite + validation complémentaire). L'erreur de validation est donc calculée pour chaque couple de bases. Il est d'usage de calculer ensuite une erreur de validation moyenne à partir de l'erreur de validation de chaque couple de bases. Dans le cas de la validation croisée, il n'y a donc pas de sur-apprentissage possible car l'échantillon d'apprentissage initial n'est pas enrichi.

Deux types de validation croisée sont souvent effectués :

- une conservant 80% de la base d'apprentissage initiale en tant que base d'apprentissage réduite et 20% pour la base de validation ;
- l'autre conservant tous les points de la base d'apprentissage initiale à l'exception d'un en tant que base d'apprentissage réduite et le point restant en tant que base de validation.

2.5.4 Améliorations

Il existe plusieurs moyens pour améliorer une surface de réponse. Il est possible de travailler sur l'échantillon des observations, sur les paramètres du modèle ou encore sur la formulation du modèle. Dans la suite sont présentées quelques unes des pistes d'améliorations possibles des surfaces de réponse.

2.5.4.1 Sur les données

Normalisation des données

Il est parfois préférable de normaliser l'échantillon des observations, que ce soit les entrées ou les sorties, avant de construire et/ou d'utiliser une surface de réponse. Ceci permet d'éviter d'avoir des observations d'ordre de grandeur très différents. En effet, en ramenant les valeurs des données de cet échantillon dans un intervalle restreint, cela permet de donner le même poids à chaque variable d'entrée. De plus, que ce soit pour sa construction ou son utilisation, il est plus robuste, pour le modèle, de n'avoir à traiter que des valeurs raisonnables.

Deux types de normalisation sont possibles :

- une normalisation des données sur l'intervalle $[-1,1]$;

- une normalisation dite isoprobabiliste, qui transforme toutes les variables d'entrée en variables aléatoires normales centrées réduites.

Pour l'exploitation, il est ensuite nécessaire de dé-normaliser les données.

Enrichissement de l'échantillon de départ

Lorsque cela est possible, il est intéressant de disposer de nouveaux points d'échantillonnage pour améliorer la surface de réponse. Il s'agit alors de savoir quels nouveaux points pourraient améliorer la qualité de la surface de réponse. Il existe différentes méthodes pour enrichir l'échantillon de départ, par exemple les méthodes basées sur l'échantillonnage par hypercube latin dites « *inherited* » ou « *nested* ».

2.5.4.2 Sur les paramètres du modèle

Différentes variables d'entrée peuvent être utilisées pour construire une surface de réponse. Toutes ces variables ne sont souvent pas nécessaires pour avoir une surface de réponse de qualité souhaitée. Il faut donc trouver le meilleur ensemble de variables d'entrée décrivant le problème. Pour cela, il existe plusieurs méthodes de sélection :

- la sélection *forward* :
 Cette méthode démarre avec un modèle vide ou avec un nombre réduit de termes prédéfini. À chaque itération, un terme est ajouté au modèle. Le terme ajouté est celui qui améliore le plus un critère choisi. La sélection s'arrête si tous les termes ont été ajoutés ou si aucun des termes restants n'améliore ce critère.
- la sélection *backward* :
 C'est la méthode inverse de la méthode *forward*. Cette méthode démarre avec le modèle complet. À chaque itération, un terme est supprimé du modèle. Ce terme est celui dont le retrait améliore le mieux un critère d'erreur choisi. La sélection s'arrête si aucun terme ne peut plus être retiré ou si le modèle ne contient plus de terme. Dans le premier cas, cela signifie que les termes restants sont nécessaires à la surface de réponse. Le retrait de l'un d'entre eux dégraderait sa qualité. Dans le deuxième cas, le type de surface de réponse envisagé peut ne pas être le bon ou aucune relation de dépendance n'existe entre les variables d'entrée et la variable de sortie.

Ces deux types de sélection sont des sélections de base. Il existe d'autres méthodes de sélection. Certaines couplent les deux méthodes précédentes, comme la sélection *stepwise* ou la sélection par *sequential replacement*. La première ajoute et retire un terme à chaque itération. La deuxième remplace les termes, un à un, par un autre entre deux sélections *forward*. D'autres sont basées sur des principes métaheuristiques, inspirés de phénomènes physiques naturels, de la biologie ou de

l'étologie, telles que les algorithmes génétiques ([Hol92], [Gal05a] et [Gal05b]) ou l'optimisation par essais particuliers ([Cle04] et [FNB⁺11]).

Aucune méthode ne fournit le meilleur choix de paramètres du modèle. En général, les solutions de chacune d'elles sont comparées. La meilleure est conservée. c'est pourquoi certaines méthodes combinent les différentes méthodes de base.

Parmi les critères utilisés pour quantifier l'importance d'un paramètre dans le modèle, les tests de signification sont les plus couramment utilisés avec la méthode *backward* et les critères par pénalisation avec la méthode *forward*.

Critères par pénalisation

- le coefficient de détermination ajusté R_{aj}^2 :
Il s'agit du coefficient de détermination R^2 pondéré par le nombre de degré de liberté correspondant de la surface de réponse. En effet, l'ajout d'un terme dans la surface de réponse augmente systématiquement le coefficient de détermination R^2 alors que le coefficient de détermination ajusté R_{aj}^2 peut diminuer si l'ajout d'un terme n'est pas nécessaire.

$$R_{aj}^2 = 1 - \frac{n_x - 1}{n_x - p} (1 - R^2) \quad (2.36)$$

- le C_p de Mallow :
Ce critère repose sur le même principe que précédemment. Il est basé sur la somme des erreurs au carré et est pénalisé par le nombre de terme de la surface de réponse. Le choix des paramètres du modèle se fait par rapport au C_p minimum.

$$C_p = \frac{SC_{Rés}}{\hat{\sigma}_e^2} - n_x + 2p \quad (2.37)$$

- l'*AIC* ou le *BIC* :
Il s'agit de variantes du C_p de Mallow. L'idée est toujours de compenser la diminution de la somme des carrés résiduelles $SC_{Rés}$ suite à l'ajout de nouveaux termes.

$$AIC = n_x \log \frac{SC_{Rés}}{n_x} + 2p \quad (2.38)$$

$$BIC = n_x \log \frac{SC_{Rés}}{n_x} + p \log n_x \quad (2.39)$$

Tests de signification

Il s'agit, par exemple, des tests de Student présentés à la sous-sous-section [2.2.3.3](#).

2.5.4.3 Sur la résolution du problème

Pour rappel, si le nombre d'observations est inférieur au nombre de paramètres du modèle à déterminer, il n'est pas possible de déterminer une solution. Si le nombre d'observations est égal au nombre de paramètres du modèle à déterminer, il n'existe qu'une seule solution au problème inverse considéré. Si le nombre d'observations est supérieur au nombre de paramètres du modèle à déterminer, une infinité de solutions existe.

La solution classique calculée est celle dont la somme des erreurs entre les observations des sorties et les estimations par le modèle, prises au carré, est minimum, méthode connue sous le nom de la méthode des moindres carrés. Elle est donnée par la résolution de l'équation normale du problème. En effet, le système n'étant pas carré mais rectangulaire et sur-déterminé, le problème à résoudre devient :

$$y = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^T y = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \boldsymbol{\beta} \quad (2.40)$$

où $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ est carré. La solution est donc :

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T y \quad (2.41)$$

En fonction du conditionnement de la matrice $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$, différents algorithmes existent pour améliorer la résolution et éviter la propagation d'erreurs. Entre autre, il est possible d'utiliser la transformation de Householder, la transformation de Givens ou encore la décomposition en valeurs singulières. Les deux premières transformations sont basées sur la décomposition QR où \mathbf{Q} est une matrice orthogonale, c'est-à-dire $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est la matrice identité, et \mathbf{R} est une matrice triangulaire supérieure. La troisième s'applique directement sur la matrice rectangulaire et permet de diagonaliser la matrice normale à l'aide d'une base orthonormée de vecteurs propres.

Lorsque le conditionnement est mauvais, cela correspond à un problème mal posé. Dans ce cas, une régularisation peut être envisagée. Le but de la régularisation est de reformuler le problème en terme moins ambitieux. Cela revient souvent à introduire de l'information *a priori* dans le modèle. Il existe plusieurs régularisation possible dont la régularisation de Tikhonov, appelée aussi régularisation d'arête, ou la régularisation dite « LASSO », *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*.

La régularisation de Tikhonov permet d'ajouter une contrainte à la norme L_2 du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ des paramètres du modèle. Il s'agit donc de résoudre un problème d'optimisation sous contrainte, cette contrainte étant que la norme du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ ne doit pas dépasser une certaine valeur. Le problème d'optimisation peut se réécrire comme un problème d'optimisation sans contrainte de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\beta} = \operatorname{argmin} \|y - \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}\|_{L_2} + \|\boldsymbol{\beta}\|_{L_2} \quad (2.42)$$

où $\mathbf{\Gamma}$ est la matrice de Tikhonov. Cette matrice est souvent choisie comme un multiple de la matrice identité :

$$\mathbf{\Gamma} = \alpha \mathbf{1} \quad (2.43)$$

La solution explicite de ce problème d'optimisation est :

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} \right)^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (2.44)$$

La forme générale de la régularisation de Tikhonov est la suivante :

$$\boldsymbol{\beta} = \operatorname{argmin} \| \mathbf{y} - \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} \|_P^2 + \| \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0 \|_Q^2 \quad (2.45)$$

où $\| \boldsymbol{\beta} \|_Q^2 = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta}$ avec \mathbf{Q} l'inverse de la matrice de variance-covariance de $\boldsymbol{\beta}$, \mathbf{P} l'inverse de la matrice de variance-covariance de \mathbf{x} et $\boldsymbol{\beta}_0$ l'espérance de $\boldsymbol{\beta}$, au sens de l'interprétation bayésienne. La matrice de Tikhonov est donc donnée par la factorisation de la matrice $\mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma}$ (par exemple, la factorisation de Choleski). La solution générale au problème régularisé par Tikhonov devient :

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{Q} \right)^{-1} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{y} + \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta}_0 \right) \quad (2.46)$$

Ceci revient à pénaliser le vecteur des paramètres du modèle par une variable aléatoire normale centrée.

La méthode de LASSO est équivalente à la régularisation de Tikhonov, la norme L_2 étant remplacée par la norme L_1 . De même que précédemment, ce problème d'optimisation sous contrainte peut être réécrit comme un problème d'optimisation sans contrainte. Cette fois, le vecteur des paramètres du modèle est pénalisé par une variable aléatoire suivant une loi de Laplace.

2.6 Conclusions

Beaucoup d'applications de la méthode d'estimation des efforts résultants en vol ont été réalisées. Cependant, peu d'études ont porté sur la considération des incertitudes dans cette méthode, à l'exception des travaux de thèse de Kong en 1994 [Kon94]. Les résultats sont assez prometteurs, même si les incertitudes prises en compte correspondent essentiellement au bruit de mesure. De plus, ce bruit de mesure est propagé dans un réseau de neurone artificiel comprenant un nombre élevé de neurones rendant sa construction complexe. Les incertitudes relatives à l'application du modèle en vol ne sont pas prises en compte.

C'est pourquoi des notions de base sur les incertitudes ont ensuite été rappelées pour aborder les incertitudes dans un cadre plus général. Cependant, certains ouvrages servant de références pour le calcul des incertitudes dans la suite de ce

mémoire sont remis en cause. En particulier, certains pensent que la méthode du GUM [JCGa], bien que très utile et couramment employée dans le domaine industriel, aurait besoin d'être entièrement revue compte tenu des progrès sur le sujet depuis 1995 [Gra]. Un certain recul dans son utilisation doit donc lui être accordé.

La méthode mise en place doit permettre de prendre en compte les incertitudes dans les deux étapes de la méthode d'estimation des efforts résultants en vol. La première étape correspond à un problème inverse pour lequel les paramètres du modèle sont identifiés. La deuxième étape correspond à un problème direct où le modèle, construit dans l'étape précédente, est appliqué pour estimer les efforts résultants en vol. La prise en compte des incertitudes dans chacune de ces étapes est donc différente.

La relation entre les déformations et les efforts résultants n'étant pas accessible facilement, le modèle construit pour estimer les efforts résultants en vol est un modèle implicite approché. La relation explicite entre les déformations et les efforts résultants est donc remplacée par un méta-modèle, aussi appelé modèle de substitution ou modèle approché. Plus précisément, il s'agit d'une surface de réponse polynomiale, choisie et conservée pour sa simplicité et sa pertinence avec les hypothèses du problème.

Chapitre 3

Méthode d'estimation de l'incertitude des charges

Sommaire

3.1	Introduction	71
3.2	Cadre pour le développement de la méthode	72
3.2.1	Introduction	72
3.2.2	Détermination des charges en vol	73
3.2.2.1	Étalonnage au sol	73
3.2.2.2	Application aux essais en vol	77
3.2.3	Hypothèses du problème considéré	77
3.2.4	Incertitudes du problème	79
3.2.4.1	Incertitudes sur les déformations	79
3.2.4.2	Incertitudes sur les efforts résultants	81
3.2.4.3	Incertitudes sur les paramètres du modèle	84
3.2.5	Contraintes industrielles	85
3.2.6	Conclusions	85
3.3	Méthode actuelle d'estimation des charges	86
3.3.1	Introduction	86
3.3.2	Résolution du problème inverse	87
3.3.2.1	Base d'apprentissage	87
3.3.2.2	Mise en donnée	88
3.3.2.3	Résolution du problème inverse	90
3.3.2.4	Évaluation de la qualité du méta-modèle construit	93
3.3.3	Application du problème direct	97
3.3.3.1	Estimation de la réponse	97

3.3.3.2	Intervalle de confiance sur la prévision d'une nouvelle observation	98
3.3.4	Limites	98
3.4	Prise en compte des incertitudes	99
3.4.1	Introduction	99
3.4.2	Nouvelles formulations du problème	101
3.4.3	Résolution du problème inverse	102
3.4.3.1	Base d'apprentissage	102
3.4.3.2	Mise en donnée	102
3.4.3.3	Résolution du problème inverse	110
3.4.3.4	Évaluation de la qualité du méta-modèle construit	113
3.4.4	Application du problème direct	115
3.4.4.1	Estimation de la réponse	115
3.4.4.2	Intervalle de confiance sur la prévision d'une nouvelle observation	115
3.5	Mise en place de la méthode sur un cas industriel . . .	116
3.5.1	Introduction	116
3.5.2	Méthodologie actuelle	116
3.5.3	Méthodologie développée pour prendre en compte les incertitudes	118
3.5.3.1	Quantification des incertitudes relatives au vol	118
3.5.3.2	Méthodologie modifiée complète	120
3.5.4	Conclusions	120
3.6	Conclusions	121

3.1 Introduction

Les charges en vol, c'est-à-dire les composantes $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants en vol $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$, sont estimées à partir des mesures des déformations en vol $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$ dans chaque section d'intérêt s de la structure. La relation entre les efforts résultants $F_{rés}^s$ et les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ n'est pas définie explicitement mais implicitement par un méta-modèle.

Ce problème est modélisé par une surface de réponse polynomiale d'ordre 1 notée ϕ^s pour chaque section d'intérêt s . Les paramètres d'entrée \boldsymbol{x}^s du méta-modèle correspondent aux déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ des ponts de jauge collés à différents endroits sur la voilure, à proximité de la section d'intérêt s . La réponse y^s du modèle pour la section d'intérêt s correspond à l'un des efforts résultants $F_{rés}^s$, qui peut être désigné par le terme de charge, dans cette section étudiée s de la voilure. D'après la description des surfaces de réponse polynomiales à la sous-sous-section 2.5.1.1, la relation entre les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ et l'un des efforts résultants $F_{rés}^s$ pour la section d'intérêt s est de la forme suivante :

$$F_{rés}^s = \phi^s(\boldsymbol{\varepsilon}^s) + e^s \quad (3.1)$$

avec :

$$\phi^s(\boldsymbol{\varepsilon}^s) = \sum_k \varepsilon_k^s \beta_k^s + \beta_0^s \quad (3.2)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^s = (\varepsilon_k^s)$ sont les paramètres d'entrée du modèle ϕ^s ;
- $\boldsymbol{\beta}^s = (\beta_k^s)$ sont les paramètres du modèle ϕ^s ;
- $F_{rés}^s$ est la réponse du modèle ϕ^s ;
- e^s est l'erreur du modèle ϕ^s .

Dans l'écriture classique de ce méta-modèle ϕ^s , les paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ sont supposées être exactes. Seules l'erreur e^s et la réponse $F_{rés}^s$ sont représentées par une variable aléatoire. Or, dans le cas présent, les paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ sont également incertains. Ceci peut conduire à une erreur dans l'identification des paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$. L'un des objectifs est donc de modifier la formulation classique du problème afin de prendre également en compte les incertitudes des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^s$.

De plus, la relation définie par l'équation (3.1) entre les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ et l'un des efforts résultants $F_{rés}^s$ repose sur les hypothèses retenues pour ce problème. Or, l'application de ce problème se fait dans un domaine qui est différent du domaine où le méta-modèle ϕ^s est identifié. Cet aspect peut remettre en cause les hypothèses retenues initialement. Un autre objectif est donc de quantifier l'impact de l'application du problème dans un domaine non étalonné par le méta-modèle ϕ^s correspondant au contexte réel d'application industrielle de ce problème.

Enfin, le dernier objectif ici est de fournir une estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol}$ prenant en compte les sources d'incertitude citées avant mais aussi de donner un encadrement de son estimation en fournissant son incertitude.

Avant de présenter les modifications à apporter au problème actuel pour considérer les incertitudes, il est nécessaire de présenter plus précisément le problème considéré. Dans un premier temps, les informations utiles à la compréhension du problème et à la mise en place de la nouvelle méthode d'estimation des efforts résultants en vol sont présentées. Elles concernent les essais à effectuer pour appliquer la méthode d'estimation des efforts résultants en vol dans le contexte industriel, les hypothèses retenues, les différentes sources d'incertitude et les contraintes industrielles à respecter. Dans la suite, la méthode d'estimation des efforts résultants en vol ainsi que la méthode développée pour prendre en compte les incertitudes sont détaillées. Des indicateurs de la qualité des méta-modèles construits sont également fournis pour ces deux méthodes. Pour finir, la méthodologie proposée pour prendre en compte les incertitudes pour son application dans le contexte industriel est présentée.

3.2 Cadre pour le développement de la méthode

3.2.1 Introduction

La structure étudiée dans ce problème est une voilure. Les hypothèses prises pour la modélisation de cette structure sont les hypothèses de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, aussi appelées hypothèses de poutre classique ou de l'ingénieur. Avant de définir l'application de ces hypothèses au problème considéré dans la sous-section 3.2.3, il est nécessaire de présenter les essais réalisés pour estimer les efforts résultants en vol à la sous-section 3.2.2 et d'effectuer quelques rappels sur les hypothèses générales de la résistance des matériaux à la sous-section 3.2.3.

Par la suite, l'ensemble des sources d'incertitude à prendre en considération dans le problème considéré est listé à la sous-section 3.2.4. Certaines de ces incertitudes sont connues ou facilement quantifiables de part les études et les expérimentations réalisées au préalable et dans le cadre de cette thèse. Les autres sont considérées comme inconnues car non accessibles directement. Elles sont l'objet de la méthode mise en place à la section 3.4.

Enfin, la méthode pour prendre en compte les incertitudes présentes à chaque étape de l'estimation des efforts résultants en vol doit être applicable dans un contexte industriel. Elle doit donc satisfaire certaines contraintes, orientant ainsi le choix de la méthode à adopter.

3.2.2 Détermination des charges en vol

Les charges en vol à déterminer correspondent aux efforts résultants $F_{rés}^s$ exprimés au centre M_s de certaines sections d'intérêt s de la structure. L'estimation en vol de chaque effort résultant dans ces sections s , notés $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$, s'effectue en deux étapes :

1. l'étalonnage au sol :
Il s'agit de réaliser une identification des méta-modèles ϕ^s , associés à chaque section s étudiée, à utiliser pour les essais en vol.
2. l'application aux essais en vol :
Les méta-modèles ϕ^s , identifiés auparavant, sont utilisés pour estimer chaque effort résultant $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ au centre M_s de chaque section s étudiée dans le cas de manœuvres effectuées en vol.

Cette méthode d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ est présentée ci-après.

3.2.2.1 Étalonnage au sol

La première étape consiste à déterminer les paramètres du modèle β^s de chaque méta-modèle ϕ^s associé à chaque effort résultant $F_{rés}^s$ pour la section d'intérêt s . C'est le principe d'un problème inverse tel que défini aux sous-sections [2.4.1.2](#) et [2.4.3.2](#).

Pour identifier les paramètres du modèle β^s définissant la relation entre les déformations ϵ^s et l'un des efforts résultants $F_{rés}^s$ exprimé au centre M_s de la section d'intérêt s , un étalonnage de la structure est réalisé. Des chargements connus T_{z_i} sont appliqués sur la structure (Figure [3.1](#)). Les déformations ϵ^s sont mesurées simultanément. Les mesures effectuées pendant ces essais au sol constituent la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s de chaque modèle ϕ^s à déterminer.

La calibration au sol est réalisée dans un hangar. Les sections s instrumentées de la voilure sont choisies de manière à reconstruire le profil macroscopique de chaque effort résultant $F_{rés}^s$ le long de la structure étudiée (Figure [3.2](#)). En vol, ces sections s étudiées doivent permettre d'identifier les effets provenant des différents éléments de la structure pouvant modifier ce profil (moteur, aileron, becs, volets, ...).

Pendant les essais au sol, la structure est chargée ponctuellement en différents « points durs » de celle-ci. Ces points durs sont des points particulièrement rigides de la structure, où un chargement ponctuel peut être appliqué sans que celle-ci soit endommagée. La structure est soumise à des efforts tranchants T_{z_i} de direction desaxée par rapport à la fibre neutre. Pour chaque effort tranchant T_{z_i} appliqué au point M_i et chaque section s étudiée de la voilure, le torseur des efforts résultants

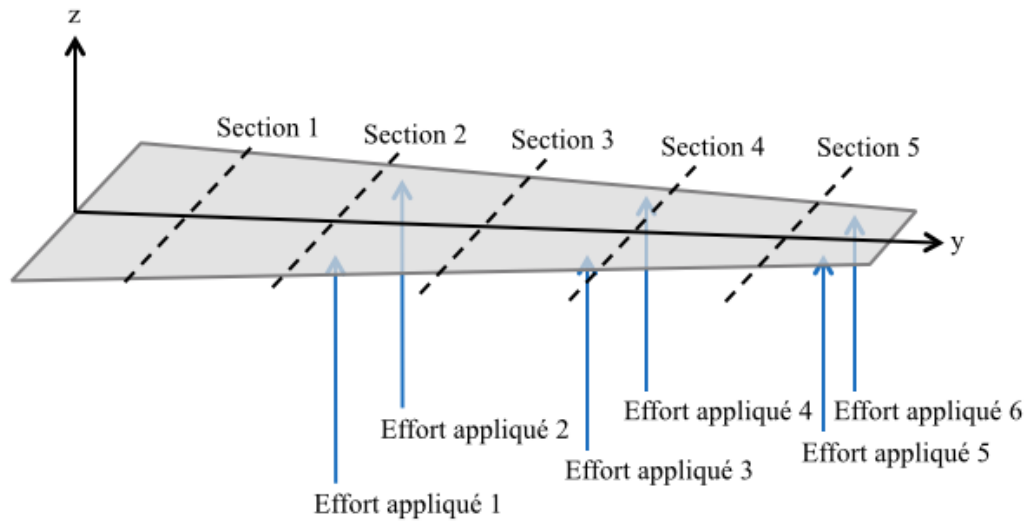


FIGURE 3.1 – Efforts appliqués sur la voilure pour l'étalonnage de la structure au sol

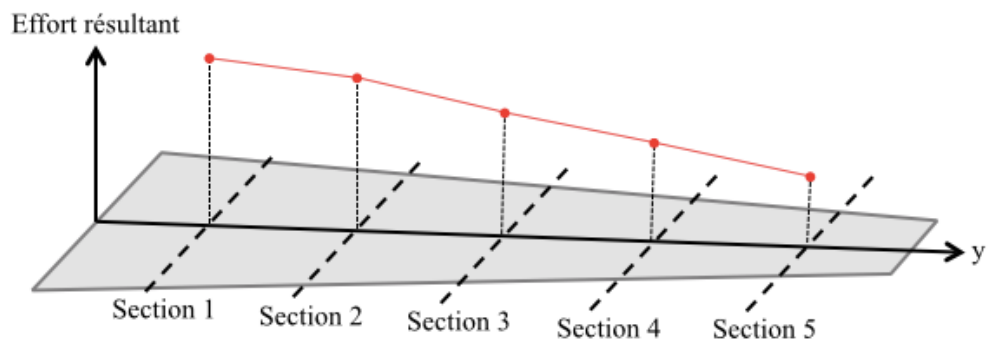


FIGURE 3.2 – Profil macroscopique des efforts résultants dans la voilure

correspondant $\mathcal{T}_{F_{rés_i}^s}$ exprimé au centre M_s de cette section s s'écrit :

$$\mathcal{T}_{F_{rés_i}^s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_{z_i} & 0 \end{pmatrix}_{(M_i, \mathcal{R}_{xyz})} \quad (3.3)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (y_i - y_s)T_{z_i}^s \\ 0 & -(x_i - x_s)T_{z_i}^s \\ T_{z_i}^s & 0 \end{pmatrix}_{(M_s, \mathcal{R}_{xyz})} = \begin{pmatrix} 0 & M_{t_i}^s \\ 0 & M_{f_{y_i}}^s \\ T_{z_i}^s & 0 \end{pmatrix}_{(M_s, \mathcal{R}_{xyz})} \quad (3.4)$$

où :

- $(x_i - x_s)$ et $(y_i - y_s)$ sont les distances entre le point d'application M_i du cas de chargement i et le centre M_s de la section droite étudiée s , appelés bras de levier dans la suite ;
- \mathcal{R}_{xyz} est le repère orthonormé direct (x, y, z) de l'aile considérée.

Les efforts tranchants T_{z_i} génèrent donc des moments de flexion $M_{f_{y_i}}^s$ et des moments de torsion $M_{t_i}^s$ en tout point de la structure non confondu avec le point d'application de ces efforts tranchants T_{z_i} . Dans la suite, ces efforts résultants sont notés de manière unique par $F_{rés_i}^s = \{T_{z_i}^s, M_{f_{y_i}}^s, M_{t_i}^s\}$.

Pour chaque cas de chargement, la structure est chargée par paliers. Ce type de chargement permet d'assurer une mise en place progressive de la structure, pour ne pas l'endommager, et de vérifier la linéarité de comportement (Figure 3.3). Le palier à 100% correspond à l'effort maximal admis pour ce cas de chargement dans les conditions de l'essai au sol. La valeur de ce palier est très inférieur à l'effort limite acceptable en élasticité dans les conditions d'essai en vol.

À chaque palier j , les mesures des efforts appliqués $T_{z_{ij}}$ et des déformations ε_{ij}^s pour tous les ponts de jauge sont relevées. Ces mesures aux paliers permettent également de vérifier la linéarité de comportement entre les déformations ε_{ik}^s pour chaque pont de jauge k et chaque cas de chargement i correspondant à l'effort appliqué T_{z_i} . Une hystérésis peut apparaître mais doit rester faible pour que les mesures puissent être utilisées avec confiance pour étalonner la structure (Figure 3.4).

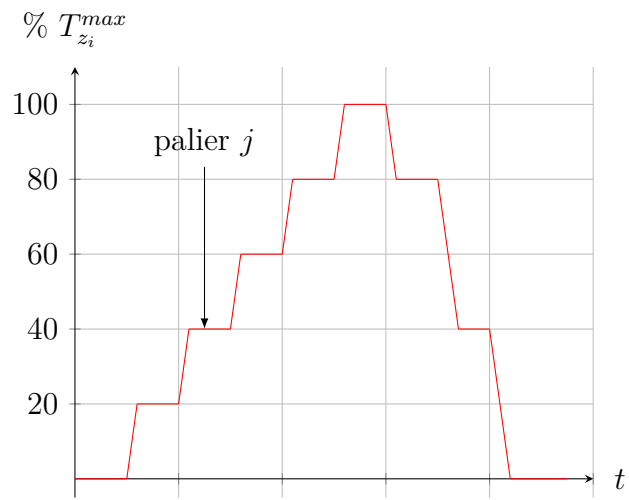


FIGURE 3.3 – Effort appliqué T_{z_i} , en pourcentage de l'effort maximal autorisé au sol $T_{z_i}^{max}$, au cours du temps t

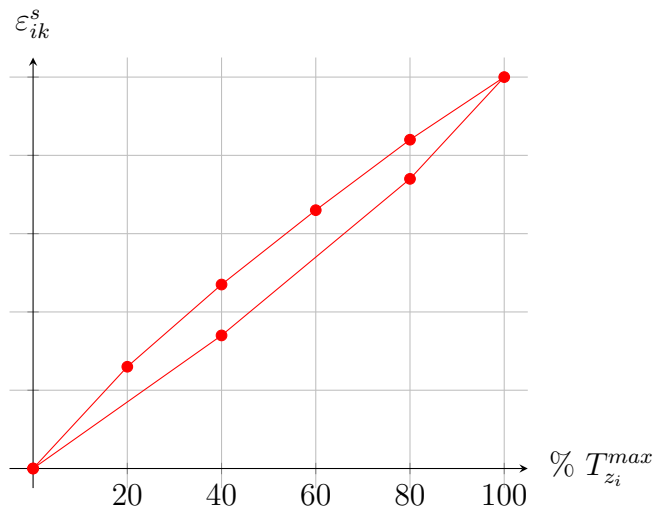


FIGURE 3.4 – Exemple de phénomène d'hystérésis observé sur la déformation ε_{ik}^s du pont de jauge k de la section étudiée s pour l'effort appliqué T_{z_i}

3.2.2.2 Application aux essais en vol

La deuxième étape consiste à estimer chaque effort résultant en vol $F_{rés}^{vol^s}$ exprimé au centre M_s de chaque section étudiée s à partir des déformations ϵ^{vol^s} de la structure, connaissant les paramètres du modèle β^s associés à chaque méta-modèle ϕ^s . C'est le principe d'un problème direct tel que défini aux sous-sous-sections 2.4.1.1 et 2.4.3.1.

En vol, les efforts auxquels est soumise la structure sont distribués et non ponctuels comme pour l'étalonnage au sol. Cependant, les hypothèses de linéarité de la structure étudiée permettent d'appliquer le principe de superposition. Ceci permet donc d'utiliser les méta-modèles $\hat{\phi}^s$ étalonnés au sol pour estimer chaque effort résultant en vol $F_{rés}^{vol^s}$. Les niveaux de chargement de la structure en vol sont également plus élevés que ceux des chargements appliqués lors de l'étalonnage au sol. Ils peuvent atteindre des valeurs proches des valeurs limites d'élasticité de la structure. Or, le comportement de la structure étant supposé linéaire, les méta-modèles ϕ^s restent valables pour des niveaux de chargement plus élevés, tant que ces niveaux restent inférieurs aux valeurs limites.

3.2.3 Hypothèses du problème considéré

La voilure peut être considérée comme une poutre d'après les définitions rappelées dans l'Annexe B.2. Même si le matériau est anisotrope et n'est pas homogène en tout point, la loi de Hooke généralisée permet d'étendre l'étude des poutres dans le cadre anisotrope. Comme précisé auparavant à la sous-section 3.2.1, la théorie retenue est celle d'Euler-Bernoulli, rappelée dans l'Annexe B.3. Dans cette théorie, les effets de cisaillement dans les sections droites sont négligés.

Le but est de déterminer les incertitudes sur le calcul des efforts extérieurs, définis par le torseur $\mathcal{T}_{F_{ext}}$, appelés ici efforts résultants, auxquels est soumise la structure. Ces efforts comprennent une part aérodynamique et une autre part inertielle.

En vol, le caractère quasi-statique et quasi-isotherme peut être vérifié si les efforts sont étudiés entre deux instants d'une même manœuvre non dynamique. En effet, les manœuvres étudiées en vol sont de courtes durées et la température ne varie quasiment pas pour chacune d'elle. Le comportement du matériau peut être considéré comme élastique tant que la structure n'atteint pas des valeurs limites de chargement. En revanche, l'hypothèse de petits déplacements n'est pas nécessairement vérifiée ici. Dans le cas des grands déplacements, il faudrait considérer la géométrie déformée et non initiale. Mais les entrées du problème considéré sont les déformations ϵ^s dans les sections droites d'intérêt s , et non les déplacements U^s . Or, ces déformations ϵ^s restent ici limitées. Le principe de Saint-Venant est dans le cas présent le principe le plus difficile à remplir. En effet, la voilure se

décompose en une structure principale raidie, le caisson central, et une structure secondaire, comprenant les ailettes marginales et les surfaces mobiles rattachées à la structure principale par de nombreuses liaisons. En vol, les efforts sont répartis sur toute la structure. Par conséquent, quelle que soit la section droite s étudiée de la structure, il est difficile de respecter ce principe du fait de la complexité de cette structure, de la proximité de liaisons et des potentiels concentrations des efforts extérieurs appliqués localement. Ceci constitue la première difficulté du problème considéré. Néanmoins, en première approximation, l'hypothèse de poutre peut être conservée pour relier les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ de chaque section droite étudiée s aux efforts extérieurs exprimé au centre M_s de cette section, représentés par le torseur $\mathcal{T}_{F_{ext}^s}$.

La deuxième difficulté provient du fait que les caractéristiques matériaux ne sont pas accessibles facilement. C'est pourquoi la modélisation du problème par un méta-modèle est adoptée. Compte tenu de la linéarité du comportement entre les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ et les efforts extérieurs F_{ext} appliqués à la structure, le choix d'une surface de réponse polynomiale d'ordre 1 paraît approprié. Dans la suite, le torseur des efforts extérieurs $\mathcal{T}_{F_{ext}^s}$ exprimé au centre M_s de la section droite étudiée s est appelé torseur des efforts résultants noté $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ pour insister sur le point de vue structure de ce problème. Chaque composante de ce torseur $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$, exprimé au point M_s peut donc être définie de manière linéaire par rapport aux déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ mesurées à proximité de la section droite s étudiée :

$$F_{rés}^s = \phi^s(\boldsymbol{\varepsilon}^s) + e^s = \sum_k \varepsilon_k^s \beta_k^s + \beta_0^s + e^s \quad (3.5)$$

où :

- $F_{rés}^s = \{T_z^s, M_{f_y}^s, M_t^s\}$ est l'une des composantes du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ exprimé au centre M_s de la section droite étudiée s ;
- ε_k^s est la déformation du pont de jauge k collé à proximité de la section droite s ;
- β_k^s est le coefficient associé à la déformation ε_k^s ;
- β_0^s est le coefficient constant.

Les déformations ε_k^s ne sont pas exprimées dans un repère commun mais dans leur repère local. La détermination des paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$ de chaque méta-modèle ϕ^s correspond à la résolution d'un problème inverse, tel que défini aux sous-sous-sections 2.4.1.2 et 2.4.3.2. L'identification des paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$ nécessite un étalonnage réalisé au sol, décrit auparavant à la sous-sous-section 3.2.2.1.

Dans le cadre des essais réalisés au sol pour l'étalonnage, les chargements appliqués ponctuellement n'excèdent pas certaines valeurs pré-définies afin de ne pas endommager la structure. Le problème peut donc être considéré comme un problème d'élasticité en petits déplacements. La structure est placée dans un hangar dont

la température varie peu et les mesures sont réalisées aux paliers de chargement stabilisés. Le problème est bien quasi-statique et quasi-isotherme. Les chargements appliqués, utilisés pour étudier chacune des sections droites s choisies, vérifient le principe de Saint-Venant. La théorie des poutres peut donc être appliquée.

3.2.4 Incertitudes du problème

Compte tenu du problème étudié, les incertitudes peuvent porter sur trois grandeurs :

- les paramètres d'entrée \mathbf{x} du modèle, c'est-à-dire ici les déformations ε_k^s , mesurées au sol et en vol ;
- la réponse y du modèle, c'est-à-dire ici l'un des efforts résultants $F_{rés}^s$, mesuré au sol et estimé en vol ;
- les paramètres du modèle β^s , déterminés au sol et utilisés en vol, définissant le méta-modèle ϕ^s représentant le comportement à imiter.

Dans la suite, les différentes sources d'incertitude pour chacune de ces grandeurs sont présentées ainsi que leur caractère connu ou inconnu dans le problème.

3.2.4.1 Incertitudes sur les déformations

Que ce soit au sol ou en vol, ces incertitudes peuvent être estimées donc sont connues. Les hypothèses adoptées pour calculer ces incertitudes diffèrent entre les essais réalisés au sol et ceux réalisés en vol. Le calcul de ces incertitudes s'effectue selon les méthodes et recommandations définies par le GUM [JCGa]. Presque toutes les incertitudes sur les déformations ε^s ont été identifiées et quantifiées dans le cadre d'une étude réalisée par le CETIM [Hac10] pour AIRBUS. Un outil de calcul des incertitudes sur les déformations ε^s a également été fourni. Ce travail et cet outil ont été repris pour calculer les incertitudes des déformations ε^s dans le cas présent.

Sources d'incertitude sur les déformations

Les différentes sources d'incertitude prises en compte sont présentées de manière succincte dans la suite. Elles sont listées d'après le regroupement du diagramme de causes et effets (Figure 2.2).

Matière

Il n'y a pas d'incertitude liée aux matériaux dans cette étude.

Moyen

Pour mesurer les déformations, des jauges de déformation montées en quart de

pont sont utilisées. La valeur indiquée par le pont de jauge comporte une incertitude. Cette incertitude est due aux erreurs de justesse des jauges provenant de deux sources :

1. l'incertitude sur le facteur de jauge ;
2. le facteur de sensibilité transverse.

Milieu

Les incertitudes dues au milieu sont liées à l'environnement naturel. Elles proviennent ici de la température et de l'humidité :

1. l'effet de la température sur la valeur de la résistance électrique initiale de la jauge ;
2. l'effet de la température sur la valeur du facteur de jauge ;
3. les effets de la dérive en température de la résistance du fil de manganin ;
4. les effets de la variation de température des fils de câblage des jauges ;
5. les effets de l'humidité sur les barrettes de raccordement des ponts de jauge ;
6. les effets d'humidité sur la couche protectrice en PR des jauges.

Main d'œuvre

Les incertitudes de main d'œuvre englobent toutes les incertitudes liées aux facteurs humains, qui dépendent de l'opérateur qui réalise les tâches liées à la mesure :

1. la variation de l'épaisseur du joint de colle ;
2. la présence de bulles dans le joint de colle ;
3. le choix de la soudure à l'étain.

Méthode

Les incertitudes de méthode proviennent de la mise en place des moyens de mesure pour estimer la grandeur concernée. Elles proviennent de plusieurs sources :

1. le positionnement des jauges ;
2. le nombre de cycles de sollicitations, la fatigue et la durée des mesures ;
3. la dynamique des signaux ;
4. le choix des éléments de la chaîne de mesure, l'effet de la résistance des fils de câblage et la désensibilisation ;
5. l'échauffement de la grille des jauges dû au courant d'alimentation du pont de Wheastone.

Modélisation de l'incertitude sur les déformations

Les sources d'incertitude sur les déformations sont nombreuses. Ces différentes sources d'incertitude, listées précédemment, sont considérées indépendantes.

Chacune des incertitudes sur les déformations est modélisable par une variable aléatoire notée ici u_d pour des raisons de simplification. Ces variables aléatoires u_d suivent en général soit une loi normale (Figures A.1 et A.2), soit une loi uniforme (Figures A.3 et A.4). La variance correspondant à chaque incertitude u_d est notée $\sigma_{u_d}^2$.

D'après le théorème central limite et le nombre de sources d'incertitude, l'incertitude finale sur les déformations ε_k^s du pont de jauge k collé à proximité de la section droite s étudiée peut être modélisée par une variable aléatoire notée u_k^s suivant une loi normale centrée, c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance $\sigma_{u_k^s}^2$:

$$u_k^s \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{u_k^s}^2) \quad (3.6)$$

C'est une incertitude dite de type composée. D'après [JCGa], la variance $\sigma_{u_k^s}^2$ de cette variable aléatoire u_k^s se définit comme la somme des variances $\sigma_{u_d}^2$ de toutes les sources d'incertitude sur les déformations ε_k^s :

$$\text{Var} [u_k^s] = \sigma_{u_k^s}^2 = \sum_d \sigma_{u_d}^2 \quad (3.7)$$

En réalité, cette variance dépend de la valeur de la déformation ε_k^s :

$$\text{Var} [u_k^s(\varepsilon_k^s)] = \sigma_{u_k^s}^2(\varepsilon_k^s) = \sum_d \sigma_{u_d}^2(\varepsilon_k^s) \quad (3.8)$$

Cette propriété s'appelle l'hétéroscédasticité : la variance de la variable aléatoire considérée dépend de la valeur de cette variable. Il existe des tests permettant de contrôler le caractère homoscélasticité/hétéroscédastique de variables aléatoires [GQ65].

3.2.4.2 Incertitudes sur les efforts résultants

Au sol, ces incertitudes sont majorées sur l'étendue de mesure notée EM . Elles sont donc connues. Comme pour les déformations ε^s , le calcul de ces incertitudes sur chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ s'effectue selon les méthodes définies par le GUM [JCGa]. Toutes les incertitudes sur les efforts appliqués T_z ont été identifiées et quantifiées dans le cadre d'un travail effectué en interne à AIRBUS. Le résultat du calcul de l'incertitude sur les efforts appliqués T_z est utilisé ici. L'incertitude sur le bras de levier a été rajouté dans le cadre de ce mémoire. Le calcul de l'incertitude sur les efforts résultants $F_{rés}^s$ pour l'étalonnage au sol a ainsi été quantifié.

En vol, l'incertitude sur les efforts résultants $F_{rés}^s$ est encadrée par la méthode empirique conservatrice, non optimisée, mais inconnue mathématiquement et donc à déterminer. C'est l'un des objectifs de ce mémoire.

Sources d'incertitude sur les efforts résultants

Comme pour les déformations ϵ^s , les différentes sources d'incertitude prises en compte sont présentées de manière succincte dans la suite. Elles sont également listées d'après le regroupement du diagramme de causes et effets (Figure 2.2).

Matériau

De même que pour les incertitudes sur les déformations présentées à la sous-section 3.2.4.1, il n'y a pas de source d'incertitude concernant les matériaux.

Moyens

Les charges appliquées sur la structure sont mesurées à l'aide de cellules de charge qui présentent trois sources d'incertitude :

1. la présence d'une déviation non-linéaire du capteur ;
2. l'apparition d'une hystérésis ;
3. la sensibilité excentrique de charge.

Milieu

Les sources d'incertitude liées au milieu sont :

1. les effets de température, qui impactent la non-linéarité de la cellule d'effort ;
2. la non-répétabilité des essais.

Main d'œuvre

La seule source d'incertitude pour la main d'œuvre est liée au positionnement et à la dimension du patin du vérin hydraulique, utilisé pour appliquer les charges sur la structure. Cette incertitude est portée par les bras de levier.

Méthode

Comme défini précédemment à la sous-section 3.2.3, la charge résultante est le produit de la charge appliquée sur la structure et du bras de levier. Pour être tout à fait précis, l'effort tranchant est le produit de l'effort appliqué et du dièdre de la voilure et les moments de flexion et de torsion sont le produit de l'effort appliqué et du bras de levier associé prenant en compte le dièdre et l'angle d'attaque de la voilure. Mais, les angles de la voilure sont supposés exacts et ne varient pas car leurs effets sur le calcul des efforts résultants sont négligeables.

La charge appliquée, mesurée par une cellule de charge, présente deux sources d'incertitude d'un point de vue méthode :

1. la sensibilité aux efforts transverses ;
2. l'effet de fluage.

D'un point de vue méthode, la longueur du bras de levier comporte une source d'incertitude. Il s'agit de l'incertitude sur la position du centre de la section droite considérée.

Modélisation de l'incertitude sur les efforts résultants

Au sol, les efforts résultants $F_{rés}^s$ sont obtenus soit directement par la mesure des efforts appliqués T_z , soit par leur produit avec les bras de levier correspondants.

Les hypothèses pour la considération des incertitudes sur ces deux composantes des efforts résultants $F_{rés}^s$ sont les suivantes :

1. pour les efforts appliqués T_z :

Les sources d'incertitude, listées précédemment, sont nombreuses et considérées indépendantes. Comme pour les déformations, chacune des incertitudes sur les efforts appliqués T_z est modélisable par une variable aléatoire notée ici w_f , de variance $\sigma_{w_f}^2$. L'incertitude finale sur les efforts appliqués T_z peut également être modélisée par une variable aléatoire notée w_T^s suivant une loi normale centrée, c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance $\sigma_{w_T^s}^2$:

$$w_T^s \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{w_T^s}^2) \quad (3.9)$$

C'est aussi une incertitude de type composée. D'après [JCGa], la variance $\sigma_{w_T^s}^2$ de cette variable aléatoire w_T^s se définit ainsi comme la somme des variances $\sigma_{w_f}^2$ de toutes les sources d'incertitude sur les efforts appliqués T_z :

$$\text{Var} [w_T^s] = \sigma_{w_T^s}^2 = \sum_f \sigma_{w_f}^2 \quad (3.10)$$

2. pour les bras de levier :

Aucune donnée n'existe sur l'incertitude du bras de levier. Une modélisation à partir d'un jugement d'expert, tel que défini à la sous-sous-section 2.3.3.1, est réalisée. La moyenne de l'incertitude sur le bras de levier est supposée nulle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'erreur systématique sur la valeur du bras de levier. Le bras de levier est donc en moyenne égal à sa valeur théorique.

Il est possible de supposer que cette incertitude est bornée donc suit une loi uniforme. En effet, les dimensions de la voilure font que le bras de levier ne peut être infini. Mais, l'une des deux sources d'incertitude sur le bras de levier est un facteur humain. Il paraît ainsi plus approprié de modéliser

cette incertitude par une loi normale. L'incertitude sur le bras de levier est donc modélisée par une variable aléatoire notée w_b^s suivant une loi normale centrée, c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance $\sigma_{w_b^s}^2$:

$$w_b^s \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{w_b^s}^2) \quad (3.11)$$

Ces deux composantes des efforts résultants $F_{rés}^s$ étant considérées indépendantes, l'incertitude finale sur les efforts résultants $F_{rés}^s$ peut être modélisée par une variable aléatoire notée w^s suivant une loi normale centrée, c'est-à-dire de moyenne nulle et de variance $\sigma_{w^s}^2$ définie de la manière suivante :

- pour les efforts tranchants T_z^s :
Comme la somme des variances $\sigma_{w_f}^2$ de toutes les sources d'incertitude sur les efforts appliqués T_z :

$$\text{Var}[w^s] = \sigma_{w^s}^2 = \sigma_{w_T^s}^2 = \sum_f \sigma_{w_f}^2 \quad (3.12)$$

- pour les moments de flexion M_{fy}^s et de torsion M_t^s :
Comme le produit de la variance définie précédemment par l'équation (3.12) et de la variance sur le bras de levier $\sigma_{w_b^s}^2$ correspondant :

$$\text{Var}[w^s] = \sigma_{w^s}^2 = \sigma_{w_T^s}^2 \sigma_{w_b^s}^2 = \left(\sum_f \sigma_{w_f}^2 \right) \sigma_{w_b^s}^2 \quad (3.13)$$

C'est encore une incertitude de type composée.

En vol, l'incertitude sur les efforts résultants $F_{rés}^s$ est inconnue. L'identification et la quantification de cette incertitude est l'objectif principal de ce mémoire. Cette incertitude doit également porter l'incertitude liée au non-respect des hypothèses selon lesquelles le méta-modèle ϕ^s est défini.

3.2.4.3 Incertitudes sur les paramètres du modèle

L'incertitude des paramètres du modèle β^s est connue dans le cadre de la résolution classique par la méthode des moindres carrés du problème inverse considéré. Cette incertitude est définie à la sous-sous-section 3.3.2.3 par l'équation (3.37). Elle n'est cependant pas prise en compte dans l'application actuelle de la méthode d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$.

La nouvelle méthode pour prendre en compte toutes les incertitudes apparaissant à chaque étape du problème doit également définir l'incertitude des paramètres du modèle β^s associés dans ce cas. En revanche, l'incertitude liée à la modélisation du problème lui-même n'est pas considérée. Cette incertitude, relative aux hypothèses du problème et aux conditions d'application dans le domaine

industriel, doit être quantifiée par une étude spécifique détaillée à la sous-sous-section 3.5.3.1. Cette incertitude est appelée incertitude relative au vol dans la suite car elle est due à l'application du méta-modèle au domaine du vol, qui diffère du domaine du sol dans lequel le méta-modèle a été étalonné.

3.2.5 Contraintes industrielles

Les contraintes industrielles liées à ce problème peuvent être divisées en deux catégories : des contraintes de moyens et des contraintes de temps.

Les contraintes de temps sont liées au fait que les essais d'étalonnage au sol et l'analyse de ces données doivent être fait dans un minimum de temps. En effet, quelques semaines seulement séparent ces essais d'étalonnage au sol au premier vol de l'avion. Il faut donc une méthode rapide pour estimer les incertitudes des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ qui s'adapte à ces contraintes de temps. Il n'est donc pas possible, par exemple, de réaliser des tirages de Monte Carlo pour calculer les caractéristiques des distributions de probabilité des grandeurs mises en jeu, telles que les paramètres du modèle β^s et les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. De plus, en vol, la surveillance est réalisée en temps réel. Il n'est donc pas envisageable de réaliser des calculs complexes pour statuer rapidement sur les données observées.

La méthode pour prendre en compte les incertitudes intervenant à chaque étape du problème doit pouvoir s'appliquer sans mettre en œuvre des moyens trop coûteux et trop importants qui peuvent impacter le temps de certification de l'avion.

Il faut donc mettre en place une méthode fiable, robuste, facile à appliquer et peu coûteuse pour estimer les incertitudes des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ à partir des essais réalisés et des connaissances sur les incertitudes.

3.2.6 Conclusions

La structure de la voilure est une structure très complexe. Il est donc difficile de respecter toutes les hypothèses de la théorie des poutres, en particulier dans le domaine du vol. En première approximation, il est cependant possible de retenir cette théorie pour construire un méta-modèle ϕ^s , correspondant à une surface de réponse polynomiale d'ordre 1, entre les déformations ϵ^s et les efforts résultants $F_{rés}^s$ pour chaque section droite d'intérêt s de la structure (Équations (3.1) et (3.2)).

Dans la formulation actuelle du problème présentée à la section 3.3, les incertitudes, pourtant connues pour certaines grandeurs physiques d'intérêt, ne sont pas considérées. La méthode mise en place, présentée à la section 3.4, a pour but de considérer les incertitudes intervenant à chaque étape de la méthode d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. Les incertitudes connues et inconnues du problème, définies à la sous-section 3.2.4, sont résumées dans le Tableau 3.1.

Incertitudes sur	Au sol	En vol
Déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$	Connues	Connues
Paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$	Inconnus	
Charges résultantes $F_{rés}^s$	Connues	Inconnues

Tableau 3.1 – Résumé des incertitudes, connues et inconnues, sur les grandeurs du problème

La méthode à mettre en place doit donc permettre de quantifier les incertitudes inconnues, au sol et en vol, dans le problème considéré. Les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ ainsi que l'incertitude associée doivent au final être estimés compte tenu de ces incertitudes. Pour des contraintes de moyens et de temps, une méthode directe de calcul est choisie et développée à la section 3.4. La méthodologie proposée pour sa mise en place pour une application industrielle est présentée à la section 3.5.

3.3 Méthode actuelle d'estimation des charges

3.3.1 Introduction

D'après la sous-section 3.2.3, la relation entre les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ et l'effort résultant considéré $F_{rés}^s$ dans une même section droite s étudiée est modélisable par une surface de réponse polynomiale d'ordre 1 notée ϕ^s . Les caractéristiques des surfaces de réponse polynomiales, présentées ci-après, sont largement décrites dans la littérature ([CML07] ou [MMAC09]). Cette surface de réponse polynomiale est linéaire en paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$ et en paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^s$, comme définie par l'équation (3.5).

Comme présenté à la sous-section 3.2.2, l'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ s'effectue en deux étapes :

1. l'étalonnage au sol, correspondant à un problème inverse ;
2. l'application aux essais en vol, correspondant à un problème direct.

Le détail de la résolution mathématique de ces deux problèmes est présenté dans la suite. Des indicateurs utiles à l'analyse de la qualité du méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ sont également présentés. La méthode actuelle d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ est détaillée ici pour deux raisons :

- donner des indicateurs rigoureux permettant d'améliorer l'analyse des résultats ;
- servir de base de comparaison pour la nouvelle méthode, permettant d'identifier les modifications apportées à la prise en compte des incertitudes.

3.3.2 Résolution du problème inverse

3.3.2.1 Base d'apprentissage

La détermination des paramètres du modèle β^s est l'objet du problème inverse. Pour déterminer ces paramètres du modèle β^s , il est nécessaire de disposer d'un échantillon des valeurs prises par les paramètres d'entrée ε^s et la réponse $F_{rés}^s$. Cet échantillon est obtenu au cours des essais d'étalonnage de la structure, réalisés au sol.

Pendant les essais, les mesures des déformations de la structure ε et des efforts appliqués T_z sont effectuées pour chaque palier de chargement ou de déchargement j . Pour chaque section droite étudiée s , ces valeurs forment un ensemble $(\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}; F_{rés}^{\mathcal{BA}^s})$ de points de mesure constituant la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s :

$$\mathcal{BA}^s = \left(\begin{array}{cccc|c} \varepsilon_{111}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{112}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{11p_s}^{\mathcal{BA}^s} & F_{rés11}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{1l_11}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{1l_12}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{1l_1p_s}^{\mathcal{BA}^s} & F_{rés1l_1}^{\mathcal{BA}^s} \\ \varepsilon_{211}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{212}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{21p_s}^{\mathcal{BA}^s} & F_{rés21}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{2l_21}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{2l_22}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{2l_2p_s}^{\mathcal{BA}^s} & F_{rés2l_2}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{n_s l_{n_s} 1}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{n_s l_{n_s} 2}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{n_s l_{n_s} p_s}^{\mathcal{BA}^s} & F_{rés n_s l_{n_s}}^{\mathcal{BA}^s} \end{array} \right) \quad (3.14)$$

où :

- $\varepsilon_{ijk}^{\mathcal{BA}^s}$ est la déformation du pont de jauge k collé à proximité de la section droite s pour le palier j du cas de chargement i ;
- $F_{résij}^{\mathcal{BA}^s} = \left\{ T_{z_{ij}}^{\mathcal{BA}^s}, M_{f_{y_{ij}}}^{\mathcal{BA}^s}, M_{l_{ij}}^{\mathcal{BA}^s} \right\}$ est l'une des composantes du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}}$ exprimé au centre M_s de la section droite s pour le palier j du cas de chargement i ;
- n_s est le nombre de cas de chargement i pris en compte pour la section droite s ;
- l_i est le nombre de palier, de chargement et de déchargement, du cas de chargement i ;
- p_s est le nombre de pont de jauge k collé à proximité de la section droite s .

3.3.2.2 Mise en donnée

La base d'apprentissage \mathcal{BA}^s précédente permet de construire la matrice $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ des paramètres d'entrée et le vecteur $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la réponse du problème direct :

$$\varepsilon^{\mathcal{BA}^s} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_{111}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{112}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{11p_s}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon_{1l_11}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{1l_12}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{1l_1p_s}^{\mathcal{BA}^s} \\ 1 & \varepsilon_{211}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{212}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{21p_s}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon_{2l_21}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{2l_22}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{2l_2p_s}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon_{n_s l_{n_s} 1}^{\mathcal{BA}^s} & \varepsilon_{n_s l_{n_s} 2}^{\mathcal{BA}^s} & \cdots & \varepsilon_{n_s l_{n_s} p_s}^{\mathcal{BA}^s} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$F_{rés}^{\mathcal{BA}^s} = \begin{pmatrix} F_{rés11}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots \\ F_{rés1l_1}^{\mathcal{BA}^s} \\ F_{rés21}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots \\ F_{rés2l_2}^{\mathcal{BA}^s} \\ \vdots \\ F_{résn_s l_{n_s}}^{\mathcal{BA}^s} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Avec ces notations, le problème à inverser peut se réécrire pour chaque section droite s étudiée :

$$F_{rés}^{\mathcal{BA}^s} = \varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \beta^s + e^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.17)$$

où :

- $\beta^s = (\beta_0^s, \beta_1^s, \dots, \beta_{p_s}^s)^T$ sont les paramètres du modèle, à déterminer ;
- $e^{\mathcal{BA}^s}$ est l'erreur du modèle, aussi appelée résidu, pour la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s de la section droite s .

L'erreur du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ désigne l'erreur entre les réponses estimées $\hat{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ par le modèle construits $\hat{\phi}^s$ pour les observations des variables d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ et les réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ mesurées. Cette erreur provient du manque d'ajustement du modèle, les variables d'entrée ε_k^s choisies ne permettant pas de décrire parfaitement le problème, et du bruit des échantillons de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s . Le système à résoudre comporte donc :

$$p_s + 1 \quad \text{inconnues} \quad (3.18)$$

$$\sum_{i=1}^{n_s} l_i \quad \text{équations} \quad (3.19)$$

Les essais d'étalonnage au sol s'effectue sur plusieurs jours. Au cours de cette période d'essais, les mesures des ponts de jauge k peuvent légèrement dériver en fonction des conditions initiales présentes pour chaque cas de chargement i . Dans la pratique, les déformations mesurées $\varepsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont donc recalées par rapport aux mesures de chaque pont de jauge k effectuées au palier de chargement initial. Dans le cas où les mesures sont utilisées en relatif, la matrice $\varepsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des paramètres d'entrée est remplacée par la matrice $\Delta\varepsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et le vecteur $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la réponse est remplacé par le vecteur $\Delta F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$:

$$\Delta\varepsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{121}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{111}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \varepsilon_{122}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{112}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \cdots & \varepsilon_{12p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{11p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{1l_11}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{111}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \varepsilon_{1l_12}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{112}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \cdots & \varepsilon_{1l_1p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{11p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \\ \varepsilon_{221}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{211}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \varepsilon_{222}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{212}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \cdots & \varepsilon_{22p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{21p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{2l_21}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{211}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \varepsilon_{2l_22}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{212}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \cdots & \varepsilon_{2l_2p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{21p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n_s l_{n_s} 1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{n_s 11}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \varepsilon_{n_s l_{n_s} 2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{n_s 12}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} & \cdots & \varepsilon_{n_s l_{n_s} p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{n_s 1p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$\Delta F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \begin{pmatrix} F_{rés12}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - F_{rés11}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \\ \vdots \\ F_{rés1l_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - F_{rés11}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \\ F_{rés22}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - F_{rés21}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \\ \vdots \\ F_{rés2l_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - F_{rés21}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \\ \vdots \\ F_{résn_s l_{n_s}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - F_{résn_s 1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Ici, quelque soit le cas de chargement i , les références prises pour chaque variable sont les mesures faites au 1^{er} palier du cas de chargement i considéré :

$$\Delta\varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{i1k}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad (3.22)$$

$$\Delta F_{résij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = F_{résij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - F_{rési1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad (3.23)$$

De manière plus générale, pour chaque cas de chargement i , il est possible de prendre un palier de référence j différent, noté $réf_i$. Les déformations relatives $\Delta\varepsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et les efforts résultants relatifs $\Delta F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ précédents sont remplacés par :

$$\Delta\varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \varepsilon_{i\text{réf}_i k}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad (3.24)$$

$$\Delta F_{résij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = F_{résij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - F_{rési\text{réf}_i}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad (3.25)$$

L'utilisation d'une référence par cas de chargement i et non d'une référence unique pour tous les cas de chargement peut s'expliquer par le fait que les conditions initiales peuvent très légèrement varier pour deux cas de chargement différents. Quelque soit la référence considérée, les lignes nulles de la matrice $\Delta \epsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et du vecteur $\Delta F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont supprimées. Le problème à inverser devient :

$$\Delta F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \Delta \epsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \beta^s + e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad (3.26)$$

où :

- $\beta^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_{p_s}^s)^T$ sont les paramètres du modèle, à déterminer.

Dans cette formulation, le paramètre constant du modèle β_0^s n'apparaît plus. Même si le nombre de paramètres du modèle β_k^s à déterminer ici est de p_s , le nombre d'inconnues est toujours de $p_s + 1$. Le système à résoudre comporte ici :

$$p_s + 1 \quad \text{inconnues} \quad (3.27)$$

$$\sum_{i=1}^{n_s} (l_i - 1) \quad \text{équations} \quad (3.28)$$

Dans la suite, pour des raisons de simplification, une notation unique est utilisée pour les différentes notations précédentes :

- les matrices des paramètres d'entrée du modèle $\epsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta \epsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sont désignées de manière unique par $\epsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$;
- les vecteurs des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sont désignés de manière unique par $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$;
- β^s est le vecteur des paramètres du modèle correspondant au système à résoudre (avec β_0^s en absolu et sans β_0^s en relatif) ;
- le nombre de cas de chargement i pris en compte pour la section droite s est de n_s (en absolu ou en relatif) ;
- le nombre de palier considéré l_i (en absolu) ou $l_i - 1$ (en relatif) pour le cas de chargement i est désigné de manière unique par l_i ;
- le nombre de pont de jauge k collé à proximité de la section droite s est de p_s (en absolu ou en relatif) ;
- le nombre d'équations $\sum_{i=1}^{n_s} l_i$ (en absolu) ou $\sum_{i=1}^{n_s} (l_i - 1)$ (en relatif) est désigné de manière unique par $\sum_{i=1}^{n_s} l_i$;
- le nombre d'inconnues est de $p_s + 1$ (en absolu ou en relatif).

3.3.2.3 Résolution du problème inverse

La résolution du problème inverse consiste à déterminer les paramètres du modèle β^s pour chaque section droite étudiée s . Le problème est sur-déterminé :

$$\sum_{i=1}^{n_s} l_i > p_s + 1 \quad (3.29)$$

Il existe donc une infinité de solutions à ce problème inverse. La solution choisie est alors donnée par un problème d'optimisation, qui peut être sous contraintes.

Dans le cas classique, les variables d'entrée sont supposées exactes. Seule la réponse $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ pour la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s porte l'incertitude du problème, définie par l'erreur du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ (Figure 3.5). Le problème classique d'optimisation à résoudre consiste à minimiser cette erreur du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$, selon une certaine norme L_p . La résolution du problème inverse se définit alors comme la résolution du problème d'optimisation, sans contrainte, suivant :

$$\beta^s = \operatorname{argmin}_{\beta^s \in \mathbb{R}^{p_s+1}} \left\| e^{\mathcal{BA}^s} \right\|_{L_p} \quad (3.30)$$

$$= \operatorname{argmin}_{\beta^s \in \mathbb{R}^{p_s+1}} \left\| \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \right\|_{L_p} \quad (3.31)$$

$$= \operatorname{argmin}_{\beta^s \in \mathbb{R}^{p_s+1}} \left\| \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s} \beta^s \right\|_{L_p} \quad (3.32)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s}$ est la matrice des paramètres d'entrée de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s ;
- β^s est le vecteur des paramètres du modèle, à déterminer ;
- $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ est le vecteur des réponses de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s ;
- $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ est le vecteur des réponses estimées par le modèle construit pour les observations des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s}$;
- $e^{\mathcal{BA}^s}$ est le vecteur des erreurs du modèle entre les réponses estimées par le modèle $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ et les réponses mesurées $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$.

Ici, la norme L_2 , ou norme euclidienne, est choisie. Le problème d'optimisation précédent devient :

$$\beta^s = \operatorname{argmin}_{\beta^s \in \mathbb{R}^{p_s+1}} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \left(F_{rés_{ij}}^{\mathcal{BA}^s} - \varepsilon_{ij}^{\mathcal{BA}^s} \beta^s \right)^2 \quad (3.33)$$

$$= \operatorname{argmin}_{\beta^s \in \mathbb{R}^{p_s+1}} \left(\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s} \beta^s \right)^T \left(\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s} \beta^s \right) \quad (3.34)$$

De part l'utilisation de la norme L_2 , la méthode de résolution de ce problème d'optimisation est appelée « méthode des moindres carrés » car elle minimise la somme des carrés des erreurs du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$. La solution de ce problème d'optimisation est obtenue facilement par dérivation de l'expression précédente et aboutit à l'équation normale suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s T} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s} \hat{\beta}^s = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s T} \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.35)$$

Cette équation conduit à une estimation de la solution β^s du problème inverse pour la section droite s :

$$\hat{\beta}^s = \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s T} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s T} \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.36)$$

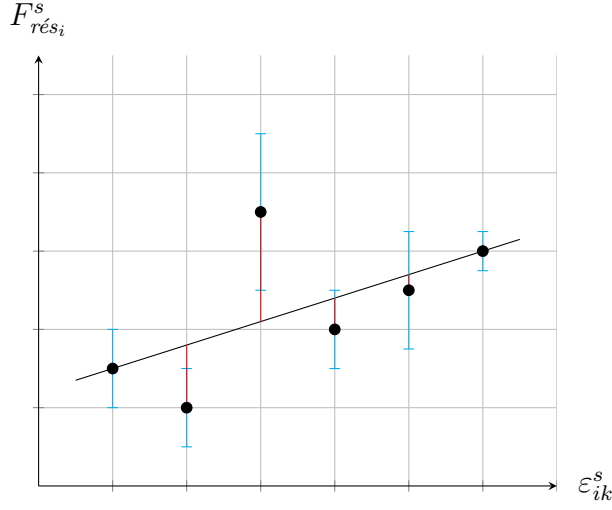


FIGURE 3.5 – Interprétation graphique du problème d’optimisation : les incertitudes (en cyan) ne portent que sur les réponses $F_{rés_{ij}}^{B,A^s}$, les erreurs du modèle e_{ij}^{B,A^s} (en rouge) correspondent à la différence entre les mesures des réponses $F_{rés_{ij}}^{B,A^s}$ et leur estimation par la droite de régression (en noir)

En fonction du problème d’optimisation choisi, d’autres solutions sont possibles.

La solution du problème défini par l’équation (3.17) issue de la résolution des moindres carrés est la plus classique car c’est la solution de plus faible variance. En effet, cette solution permet de déterminer les paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$ ayant la plus petite variance. Une estimation de cette variance est donnée par la matrice de variance-covariance des paramètres estimés du modèle $\hat{S}_{\hat{\beta}^s \hat{\beta}^s}$:

$$\hat{S}_{\hat{\beta}^s \hat{\beta}^s} = \hat{\sigma}_{e^{B,A^s}}^2 \left(\epsilon^{B,A^s T} \epsilon^{B,A^s} \right)^{-1} \quad (3.37)$$

$$= \hat{\sigma}_{e^{B,A^s}}^2 C_{e^{B,A^s}} \quad (3.38)$$

avec :

$$C_{e^{B,A^s}} = \left(\epsilon^{B,A^s T} \epsilon^{B,A^s} \right)^{-1} \quad (3.39)$$

où :

- $\hat{\sigma}_{e^{B,A^s}}$ est une estimation de l’écart-type de l’erreur du modèle e^{B,A^s} , définie à la sous-sous-section 3.3.2.4 par l’équation (3.47).

L’écart-type de chaque paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$ est donc :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s} = \sqrt{\hat{S}_{\hat{\beta}_k^s \hat{\beta}_k^s}} = \sqrt{\hat{\sigma}_{e^{B,A^s}}^2 C_{e^{B,A^s},kk}} \quad (3.40)$$

À partir de l'écart type $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s}$ de chaque paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$, l'intervalle de confiance pour chaque paramètre du modèle β_k^s peut être construit :

$$\hat{\beta}_k^s - t_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s} \leq \beta_k^s \leq \hat{\beta}_k^s + t_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s} \quad (3.41)$$

où :

- $\hat{\beta}_k^s$ est l'estimation du paramètre du modèle β_k^s , donnée par l'équation (3.36) ;
- $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s}$ est l'estimation de l'écart-type $\sigma_{\hat{\beta}_k^s}$ du paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$, donnée par l'équation (3.40) ;
- $t_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2}$ est l'inverse de la fonction de répartition de la distribution de Student t pour $\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1)$ degrés de liberté et une probabilité de $1 - \alpha/2$, α étant le niveau de risque choisi. La valeur de α est comprise entre 0 et 1, 1 correspondant à un risque de 100%. Généralement, la valeur de α est de 0,05 soit un risque de 5%, c'est-à-dire qu'il y a 5% de chance pour que les valeurs possibles ne soient pas comprises dans cet intervalle. Autrement dit, l'intervalle de confiance construit contient 95% des valeurs possibles, d'où sa probabilité de 0,95.

3.3.2.4 Évaluation de la qualité du méta-modèle construit

Analyse des erreurs du modèle

L'erreur du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ pour la section droite s peut être calculée pour chaque valeur de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s :

$$e^{\mathcal{BA}^s} = \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.42)$$

$$= \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s} \hat{\boldsymbol{\beta}}^s \quad (3.43)$$

Dans le cas d'une résolution inverse par la méthode des moindres carrés, l'erreur du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ doit être normalement distribuée, de moyenne nulle et de variance $\sigma_{e^{\mathcal{BA}^s}}^2$. Ces propriétés se traduisent par :

$$\mathbb{E} [e^{\mathcal{BA}^s}] = 0 \quad (3.44)$$

$$\text{Var} [e^{\mathcal{BA}^s}] = \sigma_{e^{\mathcal{BA}^s}}^2 \quad (3.45)$$

où :

- $\mathbb{E}[\cdot]$ est l'espérance ;
- $\text{Var}[\cdot]$ est la variance.

Toutes les valeurs de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s ayant le même poids, l'espérance

et la variance de l'erreur du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ sont estimées par :

$$\hat{E} \left[e^{\mathcal{BA}^s} \right] = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} e_{ij}^{\mathcal{BA}^s}}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \quad (3.46)$$

$$\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{BA}^s}}^2 = \sqrt{\frac{e^{\mathcal{BA}^s T} e^{\mathcal{BA}^s}}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1)}} \quad (3.47)$$

La normalité de l'erreur du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ peut être vérifiée par le tracé de son histogramme tel que défini à la sous-sous-section 2.3.3.2, à condition que la taille de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s soit suffisante pour que le tracé soit représentatif de la distribution.

Analyse de la variance du modèle

Le variance totale du modèle se définit comme la somme des carrés totaux, notée $SC_{Tot}^{\mathcal{BA}^s}$ pour la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s . Elle est constituée de deux parties : une partie due à la régression, dite expliquée par le modèle, et une partie due aux erreurs autour du modèle de régression, dite non-expliquée ou résiduelle. Ces deux composantes correspondent respectivement à la somme des carrés expliqués $SC_{Exp}^{\mathcal{BA}^s}$ et résiduels $SC_{Rés}^{\mathcal{BA}^s}$ pour la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s (Figure 3.6). Chacune de ces sommes est définie par :

$$SC_{Tot}^{\mathcal{BA}^s} = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \left(F_{rés_{ij}}^{\mathcal{BA}^s} - \bar{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \right)^2 \quad (3.48)$$

$$SC_{Rés}^{\mathcal{BA}^s} = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \left(F_{rés_{ij}}^{\mathcal{BA}^s} - \hat{F}_{rés_{ij}}^{\mathcal{BA}^s} \right)^2 \quad (3.49)$$

$$SC_{Exp}^{\mathcal{BA}^s} = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \left(\hat{F}_{rés_{ij}}^{\mathcal{BA}^s} - \bar{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \right)^2 \quad (3.50)$$

Ces sommes peuvent se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$SC_{Tot}^{\mathcal{BA}^s} = \left(\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \bar{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^{n_s} l_{i,1}} \right)^T \left(\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \bar{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^{n_s} l_{i,1}} \right) \quad (3.51)$$

$$SC_{Rés}^{\mathcal{BA}^s} = \left(\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \right)^T \left(\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \right) \quad (3.52)$$

$$SC_{Exp}^{\mathcal{BA}^s} = \left(\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \bar{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^{n_s} l_{i,1}} \right)^T \left(\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} - \bar{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^{n_s} l_{i,1}} \right) \quad (3.53)$$

où :

- $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ est le vecteur des réponses de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s ;
- $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ est le vecteur des réponses estimées par le modèle construit pour les observations des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\epsilon}^{\mathcal{BA}^s}$;

- $\bar{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ est la moyenne des réponses de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$:

$$\bar{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad (3.54)$$

La variance totale $SC_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la réponse du modèle pour la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ est donc la somme de la variance expliquée $SC_{Exp}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et de la variance résiduelle $SC_{Rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$:

$$SC_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = SC_{Exp}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} + SC_{Rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad (3.55)$$

Si $SC_{Rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0$ alors le modèle construit prédit exactement toutes les réponses $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ à partir des paramètres d'entrée $\epsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de cette même base. Si $SC_{Exp}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0$ alors le modèle identifié n'est pas adapté. Dans ce cas, la meilleure estimation des réponses $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ est la moyenne de ces réponses $\bar{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$.

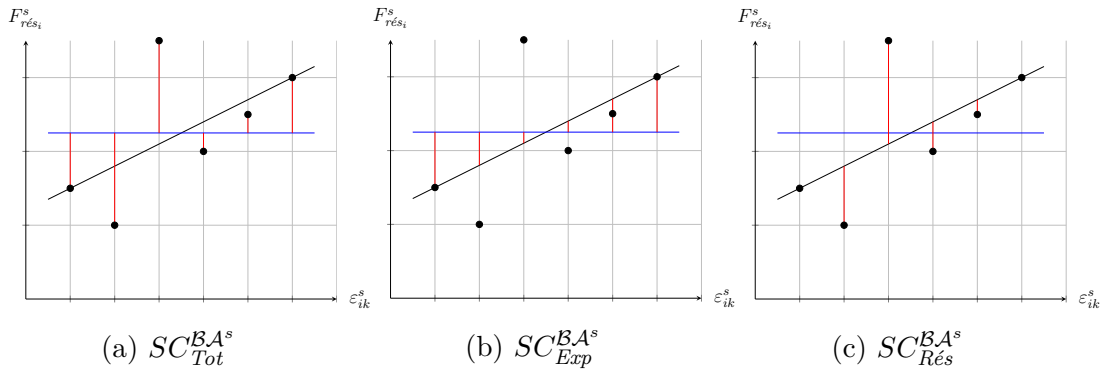


FIGURE 3.6 – Interprétation graphique des sommes des carrés $SC^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$: les mesures $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et leur estimation par la droite de régression (en noir), la moyenne des mesures $\bar{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en bleu) et les distances considérées pour chaque somme des carrés $SC^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en rouge)

Ces différentes variances sont souvent représentées sous la forme d'un tableau (Tableau 3.2), appelé tableau d'analyse de la variance ou ANOVA (*ANalysis Of VAriance*). En plus des sommes des carrés $SC^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$, ce tableau mentionne le nombre de degrés de liberté ddl associé à chacune de ces sommes ainsi que leur carré moyen $CM^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. Le nombre de degrés de liberté de chaque somme correspond à la dimension du sous-espace auquel elle appartient. Le carré moyen $CM^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de chaque somme des carrés $SC^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ correspond au rapport entre la somme des carrés $SC^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et le nombre de degrés de liberté ddl associé à

cette somme :

$$CM_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \frac{SC_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}{ddl_{Tot}} \quad (3.56)$$

$$CM_{Exp}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \frac{SC_{Exp}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}{ddl_{Exp}} \quad (3.57)$$

$$CM_{Rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \frac{SC_{Rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}{ddl_{Rés}} \quad (3.58)$$

Causes	$SC^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$	ddl	$CM^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$
Régression (inter-classe)	$SC_{Exp}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$	p_s	$CM_{Exp}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$
Résidus (intra-classe)	$SC_{Rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$	$\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1)$	$CM_{Rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$
Totale	$SC_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$	$\sum_{i=1}^{n_s} l_i - 1$	$CM_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$

Tableau 3.2 – Tableau d’analyse de la variance du modèle

Coefficient de détermination

L’indicateur le plus utilisé pour évaluer la qualité de l’ajustement du modèle construit par la régression linéaire multiple est probablement le coefficient de détermination, noté $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s^2}$ pour la base d’apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$. Il se définit à partir des sommes des carrés $SC^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ précédentes :

$$R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s^2} = \frac{SC_{Exp}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}{SC_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = 1 - \frac{SC_{Rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}{SC_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad (3.59)$$

D’après sa définition, le coefficient de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s^2}$ mesure la proportion de la variance totale qui est expliquée par le modèle construit. Il traduit la proximité des estimations des réponses du modèle $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ par rapport aux réponses mesurées $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la base d’apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$. Les estimations des réponses du modèle $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont globalement proches des réponses mesurées $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ si le coefficient de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s^2}$ est proche de 1.

En revanche, ce coefficient $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s^2}$ n’indique pas si le modèle choisi est pertinent. En effet, un coefficient de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s^2}$ faible peut être dû à la présence d’un bruit important sur les mesures alors que le modèle choisi est pertinent. Pour estimer la pertinence d’un modèle par rapport aux données de la base d’apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$, il est préférable d’utiliser le test de Fisher, généralement défini dans les ouvrages traitant des régressions linéaires ([CML07] et [MMAC09]). Le coefficient de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s^2}$ est donc un indicateur de l’ajustement du modèle par rapport aux données de la base d’apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ mais pas de la pertinence du modèle construit.

Ce coefficient ne doit pas être confondu avec le coefficient de corrélation multiple $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \sqrt{R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s2}}}$. Le coefficient $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ indique le niveau de corrélation linéaire entre les paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et les réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. Ce niveau de corrélation est élevé si $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ est proche de -1 ou 1.

Le coefficient de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s2}}$ présente un autre inconvénient lorsque des modèles avec un nombre différent de paramètres d'entrée sont comparés. En effet, l'ajout d'une variable dans le modèle augmente systématiquement la valeur du coefficient de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s2}}$, que la variable ajoutée apporte ou pas davantage d'information au système. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser le coefficient de détermination ajusté $R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s2}}$ qui introduit une pénalisation des sommes aux carrés $SC^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ par le nombre de degrés de liberté ddl correspondants :

$$R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s2}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - 1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1)} (1 - R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s2}}) \quad (3.60)$$

Le coefficient de détermination ajusté $R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s2}}$ est toujours inférieur au coefficient de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s2}}$.

Intervalle de confiance sur la réponse moyenne du modèle

Il est possible d'encadrer la réponse moyenne du modèle $E[F_{rés}^s]$ par un intervalle de confiance. Cet intervalle est défini à partir de l'estimation de la réponse du modèle $\hat{F}_{rés}^s$ pour un ensemble quelconque de valeurs des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^s$:

$$\hat{F}_{rés}^s - t_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} \hat{\sigma}_{\bar{F}_{rés}^s} \leq E[F_{rés}^s] \leq \hat{F}_{rés}^s + t_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} \hat{\sigma}_{\bar{F}_{rés}^s} \quad (3.61)$$

avec :

$$\hat{\sigma}_{\bar{F}_{rés}^s} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{sT} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s T} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^s} \quad (3.62)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ est un vecteur de valeurs quelconques des paramètres d'entrée ;
- $E[F_{rés}^s]$ est la réponse moyenne du modèle $F_{rés}^s$ pour le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ des paramètres d'entrée ;
- $\hat{F}_{rés}^s = \boldsymbol{\varepsilon}^s \hat{\boldsymbol{\beta}}^s$ est l'estimation de la réponse du modèle $F_{rés}^s$ pour le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ des paramètres d'entrée ;
- $\hat{\sigma}_{\bar{F}_{rés}^s}$ est l'estimation de l'écart-type de la réponse moyenne du modèle $E[F_{rés}^s]$.

3.3.3 Application du problème direct

3.3.3.1 Estimation de la réponse

La résolution du problème inverse permet d'estimer les paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$. Une fois le modèle construit $\hat{\phi}^s$ validé, il est possible de l'exploiter. Dans le

cas présent, il s'agit d'estimer les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. L'estimation de la réponse du modèle $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ est ainsi donnée par :

$$\hat{F}_{rés}^{vol^s} = \boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s} \hat{\boldsymbol{\beta}}^s \quad (3.63)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$ est le vecteur des paramètres d'entrée du modèle construit $\hat{\phi}^s$ précédemment, mesurés en vol ;
- $\hat{\boldsymbol{\beta}}^s$ est l'estimation des paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$ identifiés précédemment à la sous-sous-section 3.3.2.3 ;
- $\hat{F}_{rés}^{vol^s} = \{\hat{T}_z^{vol^s}, \hat{M}_{f_y}^{vol^s}, \hat{M}_t^{vol^s}\}$ est l'estimation en vol de l'une des composantes du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ exprimé au centre M_s de la section droite s .

Cette réponse est une estimation car elle dépend des paramètres estimés du modèle $\hat{\boldsymbol{\beta}}^s$, déterminés par la résolution du problème inverse. Les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$ sont supposées exactes dans cette formulation du problème.

3.3.3.2 Intervalle de confiance sur la prévision d'une nouvelle observation

L'estimation précédente peut être encadrée par un intervalle de confiance. Cet intervalle, qui est différent de l'intervalle de confiance précédent sur la réponse moyenne du modèle, permet d'encadrer la réponse du modèle $F_{rés}^{vol^s}$ pour une nouvelle observation des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$. Cette observation correspond à des valeurs des paramètres d'entrée qui n'ont pas été utilisées pour construire le modèle ϕ^s . Cet intervalle de confiance est défini par :

$$\hat{F}_{rés}^{vol^s} - t_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} \hat{\sigma}_{F_{rés}^{vol^s}} \leq F_{rés}^{vol^s} \leq \hat{F}_{rés}^{vol^s} + t_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} \hat{\sigma}_{F_{rés}^{vol^s}} \quad (3.64)$$

avec :

$$\hat{\sigma}_{F_{rés}^{vol^s}} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}}^2 \left(1 + \boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s T} (\boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{B} \mathcal{A}^s T \boldsymbol{\varepsilon} \mathcal{B} \mathcal{A}^s)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s} \right)} \quad (3.65)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$ est une nouvelle observation des paramètres d'entrée ;
- $F_{rés}^{vol^s}$ est la réponse du modèle pour le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$ des paramètres d'entrée ;
- $\hat{F}_{rés}^{vol^s} = \boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s} \hat{\boldsymbol{\beta}}^s$ est l'estimation de la réponse du modèle $F_{rés}^{vol^s}$ pour le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$ des paramètres d'entrée ;
- $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{vol^s}}$ est l'estimation de l'écart-type de la réponse du modèle $F_{rés}^{vol^s}$.

3.3.4 Limites

Dans la formulation précédente du problème, chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants est considéré comme incertain alors que les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ sont supposées exactes.

Dans le cas de l'étalonnage réalisé au sol pour identifier les paramètres du modèle β^s , les efforts résultants $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s et les erreurs du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ entre ces efforts résultants mesurés et ceux estimés par le modèle construit $\hat{\phi}^s$ sont considérés comme des variables aléatoires. Les déformations $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont ici supposées exactes. Le problème traité dans cette partie s'écrit en fait :

$$F_{rés}^{\mathcal{BA}^s} = \epsilon^{\mathcal{BA}^{s*}} \beta^s + e^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.66)$$

où :

- $\epsilon^{\mathcal{BA}^{s*}}$ est la matrice des déformations dites « vraies » de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s .

Les efforts résultants $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ peuvent ainsi s'interpréter comme la somme d'une valeur exacte, dite « vraie », et d'un terme représentant l'incertitude des efforts résultants $F_{rés}^s$:

$$F_{rés}^{\mathcal{BA}^s} = F_{rés}^{\mathcal{BA}^{s*}} + e^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.67)$$

où :

- $F_{rés}^{\mathcal{BA}^{s*}}$ est la valeur « vraie » de la réponse $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ du modèle.

La résolution du problème inverse présentée à la sous-sous-section 3.3.2.3 fournit donc une estimation des paramètres du modèle β^s pour ce modèle, ainsi qu'une estimation de leur variance $\hat{S}_{\hat{\beta}^s \hat{\beta}^s}$.

Dans le cas de l'application du problème en vol, les déformations ϵ^{vol^s} sont toujours supposées exactes. L'effort résultant estimé en vol $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ est alors incertain car il est calculé à partir des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$ défini par l'équation (3.66).

En réalité, les déformations ϵ^s sont également incertaines, que ce soit au sol ou en vol, car ces valeurs sont obtenues par mesure. Or, la formulation actuelle du problème supposent qu'elles sont exactes alors que ce n'est pas le cas ici. C'est la raison pour laquelle la formulation actuelle du problème a été enrichie dans le cadre de cette thèse pour prendre également en compte des incertitudes sur les déformations ϵ^s . La nouvelle formulation proposée est présentée ci-après à la section 3.4.

3.4 Prise en compte des incertitudes

3.4.1 Introduction

Comme vu précédemment à la sous-section 3.3.4, la méthode actuelle d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ n'est pas complètement représentative de la réalité. Jusqu'à maintenant, les déformations ϵ^s étaient considérées exactes et

seul l'effort résultant $F_{rés}^s$ était considéré incertain. Or, dans le cas traité, l'effort résultant $F_{rés}^s$ et les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ sont incertains. C'est pourquoi la définition actuelle du problème est modifiée pour correspondre à la réalité en s'inspirant des méthodes proposées par Fuller [Ful87] et Buonaccorsi [Buo95].

Ces méthodes permettent de modéliser un problème de régression linéaire comportant des erreurs pour chaque variable. Dans la littérature scientifique, ce type de modélisation portent le nom de *measurement error models*, de *error-in-variables models* ou encore de *regression with errors in both variables*. Un état de l'art historique de ces méthodes de modélisation a été réalisé par Gillard [Gil06].

De nouvelles notations sont ainsi introduites :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s = \boldsymbol{\varepsilon}^{s*} + \mathbf{u}^s \quad (3.68)$$

$$F_{rés}^s = F_{rés}^{s*} + w^s \quad (3.69)$$

où :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ et $F_{rés}^s$ sont respectivement les déformations et l'une des composantes du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ de la section droite s ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}^{s*}$ et $F_{rés}^{s*}$ sont respectivement les valeurs « vraies » des déformations et de l'une des composantes du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ pour cette même section droite s ;
- \mathbf{u}^s et w^s sont respectivement les incertitudes des déformations et de l'une des composantes du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ correspondants.

Les incertitudes sont considérées comme des variables aléatoires normales. L'incertitude \mathbf{u}^s sur les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ correspond donc à un vecteur aléatoire dont la moyenne est représentée par le vecteur $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}^s}$ et la variance est représentée par la matrice de variance-covariance $\mathbf{S}_{\mathbf{u}^s \mathbf{u}^s}$:

$$\mathbf{u}^s \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}^s}, \mathbf{S}_{\mathbf{u}^s \mathbf{u}^s}) \quad (3.70)$$

$$\begin{pmatrix} u_0^s \\ u_1^s \\ \vdots \\ u_{p_s}^s \end{pmatrix}^T \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} \mu_{u_0^s} \\ \mu_{u_1^s} \\ \vdots \\ \mu_{u_{p_s}^s} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} S_{u_0^s u_0^s} & S_{u_0^s u_1^s} & \cdots & S_{u_0^s u_{p_s}^s} \\ S_{u_1^s u_0^s} & S_{u_1^s u_1^s} & \cdots & S_{u_1^s u_{p_s}^s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{u_{p_s}^s u_0^s} & S_{u_{p_s}^s u_1^s} & \cdots & S_{u_{p_s}^s u_{p_s}^s} \end{pmatrix} \right) \quad (3.71)$$

où :

- $\mu_{u_k^s}$ est la moyenne de l'incertitude u_k^s sur la déformation ε_k^s du pont de jauge k collé à proximité de la section droite s ;
- $S_{u_k^s u_k^s}$ est la variance de l'incertitude u_k^s sur la déformation ε_k^s du pont de jauge k collé à proximité de la section droite s ;
- $S_{u_{k_1}^s u_{k_2}^s}$ est la covariance entre les incertitudes $u_{k_1}^s$ et $u_{k_2}^s$ entre les déformations $\varepsilon_{k_1}^s$ et $\varepsilon_{k_2}^s$ des ponts de jauge k_1 et k_2 collé à proximité de la section droite s .

L'incertitude w^s sur l'une des composantes $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ correspond à une variable aléatoire dont la moyenne est représentée par μ_{w^s} et la variance est représentée par $S_{w^s w^s}$:

$$w^s \sim \mathcal{N}(\mu_{w^s}, S_{w^s w^s}) \quad (3.72)$$

où :

- $\mu_{w_k^s}$ est la moyenne de l'incertitude w_k^s sur l'une des composantes $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ de la section droite s ;
- $S_{w_k^s w_k^s}$ est la variance de l'incertitude w_k^s sur l'une des composantes $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ de la section droite s .

Les incertitudes sont calculées spécifiquement pour l'utilisation qui en est faite. Elles sont donc différentes pour les essais d'étalonnage au sol et pour les essais en vol.

Pour rappel, l'effort résultant à déterminer en vol est l'effort résultant réel, c'est-à-dire la valeur vraie de l'effort résultant en vol $F_{rés}^{vol}$.

3.4.2 Nouvelles formulations du problème

Compte tenu des incertitudes présentes, le problème à inverser s'écrit pour chaque section droite s étudiée :

$$F_{rés}^{s*} = \boldsymbol{\varepsilon}^{s*} \boldsymbol{\beta}^s + q^s \quad (3.73)$$

où :

- q^s est l'erreur du modèle, ou résidu, ici appelée « erreur dans l'équation » ;
- les variables étoilées * correspondent aux valeurs « vraies » des variables correspondantes.

De part l'utilisation des valeurs « vraies » des variables mises en jeu, l'erreur du modèle q^s représente le manque d'ajustement de ce modèle. Il est dû au fait que la réponse $F_{rés}^s$ n'est pas uniquement dépendante des paramètres d'entrée ε_k^s utilisées dans le modèle. Elle dépend également d'autres paramètres d'entrée, non présent dans le modèle.

Le problème équivalent au problème défini par l'équation (3.73) mettant en jeu les variables incertaines est le suivant :

$$F_{rés}^s = \boldsymbol{\varepsilon}^s \boldsymbol{\beta}^s + v^s \quad (3.74)$$

où :

- v^s est l'erreur du modèle, ou résidu ;
- les variables, ici non étoilées, sont des variables incertaines.

3.4.3 Résolution du problème inverse

3.4.3.1 Base d'apprentissage

La base d'apprentissage est inchangé par rapport à la méthode de régression classique (Équation (3.14)).

3.4.3.2 Mise en donnée

La matrice $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ des paramètres d'entrée et le vecteur $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la réponse du problème, correspondants respectivement aux déformations et à l'une des composantes du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$, restent inchangés par rapport à la méthode de régression classique présentée à la sous-sous-section 3.3.2.2, que ce soit pour une utilisation des données en absolu (Équations (3.15) et (3.16)) ou en relatif (Équations (3.20) et (3.21)).

En revanche, les données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s étant incertaines, le problème à inverser est différent du problème précédent donné par l'équation (3.17) en absolu et l'équation (3.26) en relatif. D'après les nouvelles formulations du problème à la sous-section 3.4.2, le problème à inverser peut se réécrire pour chaque section droite s étudiée :

$$F_{rés}^{\mathcal{BA}^s} = \varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \beta^s + v^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.75)$$

où :

- $\beta^s = (\beta_0^s, \beta_1^s, \dots, \beta_{p_s}^s)^T$ sont les paramètres du modèle, à déterminer ;
- $v^{\mathcal{BA}^s}$ est l'erreur du modèle, aussi appelée résidu, pour la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s de la section droite s .

L'erreur du modèle $v^{\mathcal{BA}^s}$ désigne l'erreur entre les réponses $\hat{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ estimées par le modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour les observations des variables d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ et les réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ mesurées. Contrairement à la méthode de régression classique, cette erreur provient principalement du bruit des échantillons de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s . En effet, le manque d'ajustement du modèle est ici porté par l'erreur du modèle $q^{\mathcal{BA}^s}$ associée au problème définissant la relation entre les variables « vraies », c'est-à-dire sans incertitude.

En relatif, de la même manière que présenté à la sous-sous-section 3.3.2.2, le problème à inverser devient pour chaque section droite s étudiée :

$$\Delta F_{rés}^{\mathcal{BA}^s} = \Delta \varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \beta^s + v^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.76)$$

où :

- $\beta^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_{p_s}^s)^T$ sont les paramètres du modèle, à déterminer.

Le système à résoudre comporte le même nombre d'inconnues et d'équations que pour la méthode de régression classique présentée à la sous-sous-section 3.3.2.2 (Expressions (3.18) et (3.19), (3.27) et (3.28)).

À ces notations, il faut ajouter les notations prises pour les incertitudes. Dans le cas des essais d'étalonnage au sol, elles sont calculées pour les valeurs des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et de la réponse $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ rappelée précédemment à la sous-sous-section 3.4.3.1.

Pour considérer les incertitudes dans le problème, deux possibilités sont proposées :

1. une incertitude par valeur ;
2. une incertitude majorée.

Une incertitude par valeur

Une incertitude est associée à chaque valeur de chaque variable. Cette incertitude dépend donc des valeurs de ces variables.

Sur les déformations

Pour chaque cas de chargement i et chaque palier j , l'incertitude associée au vecteur des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = (1 \ \varepsilon_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \ \cdots \ \varepsilon_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s})$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ de la section droite s est modélisée par le vecteur aléatoire $\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$:

$$\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \left(u_{ij0}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad u_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad \cdots \quad u_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \right) \sim \mathcal{N} \left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}, \mathbf{S}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \right) \quad (3.77)$$

avec :

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = \left(\mu_{u_{ij0}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad \mu_{u_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad \cdots \quad \mu_{u_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \right) \quad (3.78)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = \begin{pmatrix} S_{u_{ij0}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ij0}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & S_{u_{ij0}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & \cdots & S_{u_{ij0}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \\ S_{u_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ij0}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & S_{u_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & \cdots & S_{u_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{u_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ij0}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & S_{u_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ij1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & \cdots & S_{u_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ijp_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

où :

- $\mu_{u_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est l'espérance de l'incertitude $u_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la déformation $\varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ du pont de jauge k pour la valeur au palier j du cas de chargement i ;
- $S_{u_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est la variance de l'incertitude $u_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la déformation $\varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ du pont de jauge k pour la valeur au palier j du cas de chargement i ;
- $S_{u_{ijk_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{ijk_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est la covariance entre les incertitudes $u_{ijk_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $u_{ijk_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des déformations $\varepsilon_{ijk_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $\varepsilon_{ijk_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des ponts de jauge k_1 et k_2 pour la valeur au palier j du cas de chargement i .

La première composante $u_{ij0}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ du vecteur de la variable d'incertitude $\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ sur les paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ est associée à la constante du problème. Ce paramètre d'entrée ne comporte pas d'incertitude de mesure. La variable aléatoire $u_{ij0}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ associée est donc de moyenne et de variance nulle :

$$u_{ij0}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \sim \mathcal{N}(0, 0) \quad (3.80)$$

Les chaînes de mesure de chaque pont de jauge k sont supposées indépendantes. Quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré, les covariances $S_{u_{ijk_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} u_{ijk_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ entre les incertitudes $u_{ijk_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ et $u_{ijk_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de deux paramètres d'entrée $\varepsilon_{k_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ et $\varepsilon_{k_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B},\mathcal{A}^s$ de la section droite s sont donc supposées nulles :

$$S_{u_{ijk_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} u_{ijk_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = 0 \quad (3.81)$$

Pour chaque cas de chargement i et chaque palier j , le vecteur de l'espérance $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ et la matrice de variance-covariance $\mathbf{S}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ dépendent des valeurs de déformation $\varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B},\mathcal{A}^s$ de la section droite s d'où :

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = f_{\mu}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}) \quad (3.82)$$

$$S_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = f_S(\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}) \quad (3.83)$$

où :

- f_{μ} est la fonction permettant de calculer la moyenne $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ de l'incertitude $\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ sur la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$;
- f_S est la fonction permettant de calculer la variance $S_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ de l'incertitude $\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ sur la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$.

La définition des deux fonctions f_{μ} et f_S est abordée à la sous-section 3.2.4.1 et n'est pas redétaillée ici.

Les incertitudes définies ci-avant sont supposées indépendantes. Pour considérer les incertitudes dans le problème dans le cas où les mesures sont utilisées en relatif (Équations (3.24)), l'incertitude $\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ associée au vecteur des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} = (1 \ \varepsilon_{ij1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \ \dots \ \varepsilon_{ijp_s}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s})$ est remplacée par l'incertitude $\Delta \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ associée au vecteur des paramètres d'entrée $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} = (\Delta \varepsilon_{ij1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \ \dots \ \Delta \varepsilon_{ijp_s}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s})$:

$$\Delta \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} = \begin{pmatrix} \Delta u_1^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} & \dots & \Delta u_{p_s}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

$$\sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_{\Delta \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}, \mathbf{S}_{\Delta \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \Delta \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}\right) \quad (3.85)$$

avec :

$$\boldsymbol{\mu}_{\Delta \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}_{i \text{ réf}_i k}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \quad (3.86)$$

$$S_{\Delta \mathbf{u}_{ijk_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \Delta \mathbf{u}_{ijk_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = S_{\mathbf{u}_{ijk_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \mathbf{u}_{ijk_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} + S_{\mathbf{u}_{i \text{ réf}_i k_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \mathbf{u}_{i \text{ réf}_i k_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \quad (3.87)$$

où :

- $\mu_{\Delta u_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ est l'espérance de l'incertitude $\Delta u_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la déformation $\Delta \varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ du pont de jauge k pour la valeur au palier j du cas de chargement i ;
- $S_{\Delta u_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \Delta u_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ est la variance de l'incertitude $\Delta u_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la déformation $\Delta \varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ du pont de jauge k pour la valeur au palier j du cas de chargement i ;
- $S_{\Delta u_{ijk_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \Delta u_{ijk_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ est la covariance entre les incertitudes $\Delta u_{ijk_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ et $\Delta u_{ijk_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ des déformations $\Delta \varepsilon_{ijk_1}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ et $\Delta \varepsilon_{ijk_2}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ des ponts de jauge k_1 et k_2 pour la valeur au palier j du cas de chargement i .

Sur les efforts résultants

De même, pour chaque cas de chargement i et chaque palier j , l'incertitude associée à la réponse $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B},\mathcal{A}^s$ de la section droite s est modélisée par la variable aléatoire $w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$:

$$w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} = \left\{ w_{T_{z_{ij}}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}, w_{T_{f_{y_{ij}}}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}, w_{M_{t_{ij}}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \right\} \sim \mathcal{N} \left(\mu_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}, S_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \right) \quad (3.88)$$

où :

- $\mu_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ est l'espérance de l'incertitude $w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la réponse $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ pour la valeur au palier j du cas de chargement i ;
- $S_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ est la variance de l'incertitude $w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la réponse $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ pour la valeur au palier j du cas de chargement i .

Pour chaque cas de chargement i et chaque palier j , l'espérance $\mu_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ et la variance $S_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ dépendent des valeurs de l'effort résultant $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B},\mathcal{A}^s$ de la section droite s d'où :

$$\mu_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = g_{\mu} \left(F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \right) \quad (3.89)$$

$$S_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = g_S \left(F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \right) \quad (3.90)$$

où :

- g_{μ} est la fonction permettant de calculer la moyenne $\mu_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ de l'incertitude $w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ sur l'effort résultant $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$;
- g_S est la fonction permettant de calculer la variance $S_{w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ de l'incertitude $w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ sur l'effort résultant $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$.

La définition des deux fonctions g_{μ} et g_S est abordée à la sous-section 3.2.4.2 et n'est pas redétaillée ici.

De même, les incertitudes définies ci-avant sont supposées indépendantes. Pour considérer les incertitudes dans le problème dans le cas où les mesures sont utilisées en relatif (Équations (3.24)), l'incertitude $w_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ associée à la réponse $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ est

remplacée par l'incertitude $\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ associée à la réponse $\Delta F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$:

$$\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \left\{ \Delta w_{\Delta T_{z_{ij}}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}, \Delta w_{\Delta T_{f_{y_{ij}}}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}, \Delta w_{\Delta M_{t_{ij}}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \right\} \quad (3.91)$$

$$\sim \mathcal{N} \left(\mu_{\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}, S_{\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \right) \quad (3.92)$$

avec :

$$\mu_{\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = \mu_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} - \mu_{w_{i\text{réf}_i}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad (3.93)$$

$$S_{\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = S_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} + S_{w_{i\text{réf}_i}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} w_{i\text{réf}_i}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad (3.94)$$

où :

- $\Delta \mu_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est l'espérance de l'incertitude $\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la réponse $\Delta F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la valeur au palier j du cas de chargement i ;
- $\Delta S_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est la variance de l'incertitude $\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la réponse $\Delta F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la valeur au palier j du cas de chargement i .

Une incertitude majorée

Une incertitude constante est associée à chaque variable, quelle que soit la valeur de cette variable. Cette incertitude est donc bornée.

Sur les déformations

Quel que soit le cas de chargement i et le palier j , l'incertitude associée à la matrice des vecteurs des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \left(\mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{n_s} l_{i,1}} \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \cdots \boldsymbol{\varepsilon}_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \right)$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ de la section droite s est modélisée par le vecteur aléatoire $\boldsymbol{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$:

$$\boldsymbol{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \left(u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad u_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad \cdots \quad u_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \right) \sim \mathcal{N} \left(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}, \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \boldsymbol{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \right) \quad (3.95)$$

avec :

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = \left(\mu_{u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad \mu_{u_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad \cdots \quad \mu_{u_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \right) \quad (3.96)$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \boldsymbol{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = \begin{pmatrix} S_{u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & S_{u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & \cdots & S_{u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \\ S_{u_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & S_{u_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & \cdots & S_{u_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{u_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & S_{u_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} & \cdots & S_{u_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

où :

- $\mu_{u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est l'espérance de l'incertitude $u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ du pont de jauge k quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré ;

- $S_{u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est la variance de l'incertitude $u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des déformations $\varepsilon_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ du pont de jauge k quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré ;
- $S_{u_{k_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{k_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est la covariance entre les incertitudes $u_{k_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $u_{k_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des déformations $\varepsilon_{k_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $\varepsilon_{k_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des ponts de jauge k_1 et k_2 quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré.

La première composante $u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ du vecteur de la variable d'incertitude $\mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sur les paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ est associée à la constante du problème. Ce paramètre d'entrée ne comporte pas d'incertitude de mesure. La variable aléatoire $u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ associée est donc de moyenne et de variance nulle :

$$u_0^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \sim \mathcal{N}(0, 0) \quad (3.98)$$

De même que précédemment, les chaînes de mesure de chaque pont de jauge k sont supposées indépendantes. Quel que soit le cas de chargement i et le palier j les covariances $S_{u_{k_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{k_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ entre les incertitudes $u_{k_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $u_{k_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de deux paramètres d'entrée $\varepsilon_{k_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $\varepsilon_{k_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont donc supposées nulles :

$$S_{u_{k_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_{k_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = 0 \quad (3.99)$$

Quel que soit le cas de chargement i et le palier j , le vecteur de l'espérance $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ et la matrice de variance-covariance $\mathbf{S}_{\mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ sont définis par le cas le plus contraignant, c'est-à-dire pour la valeur de déformation la plus élevée d'où :

$$\mu_{u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = f_\mu \left(\max_i \left(\max_j \varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \right) \right) \quad (3.100)$$

$$S_{u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = f_S \left(\max_i \left(\max_j \varepsilon_{ijk}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \right) \right) \quad (3.101)$$

où :

- f_μ est la fonction permettant de calculer la moyenne $\mu_{u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ de l'incertitude $u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sur les déformations $\varepsilon_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$;
- f_S est la fonction permettant de calculer la variance $S_{u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ de l'incertitude $u_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sur les déformations $\varepsilon_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$.

La définition des deux fonctions f_μ et f_S est abordée à la sous-section 3.2.4.1 et n'est pas redétaillée ici.

Les incertitudes définies ci-avant sont supposées indépendantes. Pour considérer les incertitudes dans le problème dans le cas où les mesures sont utilisées en relatif (Équations (3.24)), l'incertitude $\mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ associée à la matrice des vecteurs des paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \left(\mathbf{1}_{\sum_{i=1}^{n_s} l_{i,1}} \varepsilon_1^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \dots \varepsilon_{p_s}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \right)$ est remplacée par l'incertitude $\Delta \mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ associée à la matrice des vecteurs des paramètres d'en-

trée $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s} = (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathcal{BA}^s} \dots \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{p_s}^{\mathcal{BA}^s}) :$

$$\Delta \mathbf{u}^{\mathcal{BA}^s} = \left(\Delta u_1^{\mathcal{BA}^s} \dots \Delta u_{p_s}^{\mathcal{BA}^s} \right) \quad (3.102)$$

$$\sim \mathcal{N} \left(\boldsymbol{\mu}_{\Delta \mathbf{u}^{\mathcal{BA}^s}}, \mathbf{S}_{\Delta \mathbf{u}^{\mathcal{BA}^s} \Delta \mathbf{u}^{\mathcal{BA}^s}} \right) \quad (3.103)$$

avec :

$$\mu_{\Delta u_k^{\mathcal{BA}^s}} = \mu_{u_k^{\mathcal{BA}^s}} - \mu_{u_k^{\mathcal{BA}^s}} \quad (3.104)$$

$$S_{\Delta u_{k_1}^{\mathcal{BA}^s} \Delta u_{k_2}^{\mathcal{BA}^s}} = S_{u_{k_1}^{\mathcal{BA}^s} u_{k_2}^{\mathcal{BA}^s}} + S_{u_{k_1}^{\mathcal{BA}^s} u_{k_2}^{\mathcal{BA}^s}} \quad (3.105)$$

où :

- $\Delta \mu_{u_k^{\mathcal{BA}^s}}$ est l'espérance de l'incertitude $\Delta u_k^{\mathcal{BA}^s}$ des déformations $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathcal{BA}^s}$ du pont de jauge k quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré ;
- $S_{\Delta u_k^{\mathcal{BA}^s} \Delta u_k^{\mathcal{BA}^s}}$ est la variance de l'incertitude $\Delta u_k^{\mathcal{BA}^s}$ des déformations $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathcal{BA}^s}$ du pont de jauge k quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré ;
- $S_{\Delta u_{k_1}^{\mathcal{BA}^s} \Delta u_{k_2}^{\mathcal{BA}^s}}$ est la covariance entre les incertitudes $\Delta u_{k_1}^{\mathcal{BA}^s}$ et $\Delta u_{k_2}^{\mathcal{BA}^s}$ des déformations $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k_1}^{\mathcal{BA}^s}$ et $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k_2}^{\mathcal{BA}^s}$ des ponts de jauge k_1 et k_2 quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré.

Sur les efforts résultants

De même, quel que soit le cas de chargement i et le palier j , l'incertitude associée au vecteur de la réponse $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s de la section droite s est modélisée par la variable aléatoire $w^{\mathcal{BA}^s}$:

$$w^{\mathcal{BA}^s} = \left\{ w_{T_z}^{\mathcal{BA}^s}, w_{T_{fy}}^{\mathcal{BA}^s}, w_{M_t}^{\mathcal{BA}^s} \right\} \sim \mathcal{N} \left(\mu_{w^{\mathcal{BA}^s}}, S_{w^{\mathcal{BA}^s} w^{\mathcal{BA}^s}} \right) \quad (3.106)$$

où :

- $\mu_{w^{\mathcal{BA}^s}}$ est l'espérance de l'incertitude $w^{\mathcal{BA}^s}$ des réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré ;
- $S_{w^{\mathcal{BA}^s} w^{\mathcal{BA}^s}}$ est la variance de l'incertitude $w^{\mathcal{BA}^s}$ des réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré.

Quel que soit le cas de chargement i et le palier j , l'espérance $\mu_{w^{\mathcal{BA}^s}}$ et la variance $S_{w^{\mathcal{BA}^s} w^{\mathcal{BA}^s}}$ sont définies par le cas le plus contraignant, c'est-à-dire pour la valeur d'effort résultant générant le plus d'incertitude en ce qui concerne la variance d'où :

$$\mu_{w^{\mathcal{BA}^s}} = g_\mu \left(\mu_{w_{ij}^{\mathcal{BA}^s}} \right) \quad (3.107)$$

$$S_{w^{\mathcal{BA}^s} w^{\mathcal{BA}^s}} = g_S \left(\max_i \left(\max_j S_{w_{ij}^{\mathcal{BA}^s} w_{ij}^{\mathcal{BA}^s}} \right) \right) \quad (3.108)$$

où :

- g_μ est la fonction permettant de calculer la moyenne $\mu_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ de l'incertitude $w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ sur les efforts résultants $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$;
- g_S est la fonction permettant de calculer la variance $S_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ de l'incertitude $w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ sur les efforts résultants $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$.

La définition des deux fonctions g_μ et g_S est abordée à la sous-section 3.2.4.2 et n'est pas redétaillée ici.

À noter, la valeur la plus élevée de chaque paramètre d'entrée $\varepsilon_k^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ n'est pas nécessairement obtenue pour le même cas de chargement i et le même palier j et ne correspond pas forcément à la valeur de l'effort résultant $F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ générant le plus d'incertitude. De plus, le cas de chargement i et le palier j générant le plus d'incertitude sur l'effort résultant $F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ dépend de l'effort résultant considéré ($T_z^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$, $M_{fy}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ ou $M_t^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$).

De même, les incertitudes définies ci-avant sont supposées indépendantes. Pour considérer les incertitudes dans le problème dans le cas où les mesures sont utilisées en relatif (Équations (3.24)), l'incertitude $w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ associée au vecteur de la réponse $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ est remplacée par l'incertitude $\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ associée au vecteur de la réponse $\Delta \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$:

$$\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} = \left\{ \Delta w_{\Delta T_z}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}, \Delta w_{\Delta T_{fy}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}, \Delta w_{\Delta M_t}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \right\} \quad (3.109)$$

$$\sim \mathcal{N}(\mu_{\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}, S_{\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}) \quad (3.110)$$

avec :

$$\mu_{\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = \mu_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} - \mu_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \quad (3.111)$$

$$S_{\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = S_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} + S_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \quad (3.112)$$

où :

- $\mu_{\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ est l'espérance de l'incertitude $\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ des réponses $\Delta \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré ;
- $S_{\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ est la variance de l'incertitude $\Delta w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ des réponses $\Delta \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré.

Dans la méthode mise en place pour considérer les incertitudes, seule la variance des incertitudes est propagée dans le système. En effet, la moyenne des incertitudes est supposée nulle d'après les hypothèses du problème.

Dans la suite, pour des raisons de simplification comme précédemment à la sous-section 3.3.2.2, une notation unique est utilisée pour les différentes notations précédentes. En plus des notations équivalentes précédentes, il faut ajouter les notations équivalentes suivantes :

- les incertitudes par valeur $\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sur le vecteur des paramètres d'entrée $\varepsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta \varepsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sont désignées de manière unique par $\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$;

- les incertitudes par valeur $w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sur la réponse $F_{résij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta F_{résij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sont désignées de manière unique par $w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$;
- les incertitudes majorées $\mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta \mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sur la matrice des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sont désignées de manière unique par $\mathbf{u}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$;
- les incertitudes majorées $w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sur le vecteur de la réponse $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en absolu) ou $\Delta \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (en relatif) sont désignées de manière unique par $w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$.

3.4.3.3 Résolution du problème inverse

Comme pour la méthode de régression classique, le problème est sur-déterminé (Équation (3.29)). Dans le cas modifié, les variables d'entrée sont considérées incertaines contrairement au cas classique où les variables d'entrée sont supposées exactes. Les incertitudes du problème sont donc portées par les paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et par la réponse $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ (Figure 3.7). La résolution du problème inverse défini par l'équation (3.73) est faite sur le principe du maximum de vraisemblance.

Une incertitude par valeur

Dans le cas où une incertitude par valeur mesurée est considérée, une estimation de la solution $\hat{\boldsymbol{\beta}}^s$ du problème inverse pour la section droite s est donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^s = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^{-1} \mathbf{M}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad (3.113)$$

avec :

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s T} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \mathbf{S}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad (3.114)$$

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s T} F_{résij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \mathbf{S}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad (3.115)$$

où :

- $\mathbf{S}_{\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ est le vecteur de covariance entre les incertitudes $\mathbf{u}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et l'incertitude $w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de l'effort résultant $F_{résij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la valeur au palier j du cas de chargement i .

Comme pour la méthode de régression classique, la variabilité des paramètres estimés du modèle $\hat{\boldsymbol{\beta}}^s$ est également connue dans le cas où les incertitudes sont prises en compte.

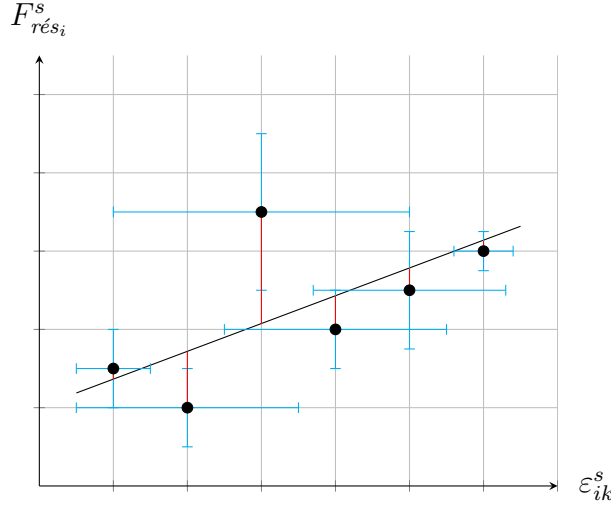


FIGURE 3.7 – Interprétation graphique du problème d'optimisation : les incertitudes (en cyan) portent sur les paramètres d'entrée $\epsilon_{ijk}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ et sur les réponses $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$, les erreurs du modèle $e_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ (en rouge) correspondent à la différence entre les mesures des réponses $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ et leur estimation par la droite de régression (en noir)

Une estimation de cette variance est donnée par la matrice de variance-covariance des paramètres estimés du modèle $\hat{\mathbf{S}}_{\hat{\beta}^s \hat{\beta}^s}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{\beta}^s \hat{\beta}^s} = & M_{\epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}^{-1} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \left(\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}^2 M_{\epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \right. \right. \\ & \left. \left. + S_{u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} v_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} S_{v_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \right) M_{\epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (3.116)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_{\epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} M_{\epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} - S_{u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s T} \epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} - S_{u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$S_{u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} v_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} = -S_{u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \hat{\beta}^s \quad (3.118)$$

Une incertitude majorée

Dans le cas où les incertitudes sont majorées, une estimation de la solution β^s du problème inverse pour la section droite s est donnée par :

$$\hat{\beta}^s = \left(M_{\epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} \epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} - S_{u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \right)^{-1} \left(M_{\epsilon_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} - S_{u_{ij}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s} w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}} \right) \quad (3.119)$$

avec :

$$M_{\varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \varepsilon^{\mathcal{BA}^s}} = \varepsilon^{\mathcal{BA}^s T} \varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.120)$$

$$M_{\varepsilon^{\mathcal{BA}^s} F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}} = \varepsilon^{\mathcal{BA}^s T} F_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \quad (3.121)$$

où :

- $S_{u^{\mathcal{BA}^s} w^{\mathcal{BA}^s}}$ est le vecteur de covariance entre les incertitudes $u^{\mathcal{BA}^s}$ des déformations $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ et l'incertitude $w^{\mathcal{BA}^s}$ des efforts résultants $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ quel que soit le cas de chargement i et le palier j considéré.

De même, la variabilité des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$ est également connue dans le cas où les incertitudes sont prises en compte de manière majorée.

Une estimation de cette variance est donnée par la matrice de variance-covariance des paramètres estimés du modèle $\hat{S}_{\hat{\beta}^s \hat{\beta}^s}$:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\hat{\beta}^s \hat{\beta}^s} = & M_{\varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \varepsilon^{\mathcal{BA}^s}}^{-1} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \left(\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{BA}^s}}^2 M_{\varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \varepsilon^{\mathcal{BA}^s}} \right. \right. \\ & \left. \left. + S_{u^{\mathcal{BA}^s} v^{\mathcal{BA}^s}} S_{v^{\mathcal{BA}^s} u^{\mathcal{BA}^s}} \right) \right] M_{\varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \varepsilon^{\mathcal{BA}^s}}^{-1} \end{aligned} \quad (3.122)$$

avec :

$$M_{\varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \varepsilon^{\mathcal{BA}^s}} = M_{\varepsilon^{\mathcal{BA}^s} \varepsilon^{\mathcal{BA}^s}} - S_{u^{\mathcal{BA}^s} u^{\mathcal{BA}^s}} \quad (3.123)$$

$$S_{u^{\mathcal{BA}^s} v^{\mathcal{BA}^s}} = -S_{u^{\mathcal{BA}^s} u^{\mathcal{BA}^s}} \hat{\beta}^s \quad (3.124)$$

Dans le cas où les incertitudes sont prises en compte, par valeur ou de manière majorée, l'écart-type de chaque paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$ est donc :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s} = \sqrt{\hat{S}_{\hat{\beta}_k^s \hat{\beta}_k^s}} \quad (3.125)$$

De plus, les chaînes de mesure des déformations $\varepsilon_k^{\mathcal{BA}^s}$ pour chaque pont de jauge k et de chaque efforts résultants $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ sont indépendantes d'où :

$$S_{u_{ij}^{\mathcal{BA}^s} w_{ij}^{\mathcal{BA}^s}} = 0_{p_s+1,1} \quad (3.126)$$

$$S_{u^{\mathcal{BA}^s} w^{\mathcal{BA}^s}} = 0_{p_s+1,1} \quad (3.127)$$

Il est possible d'obtenir une estimation plus consistante des paramètres du modèle β^s dans notre cas. En effet, les données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s pour les différents paliers j de chaque cas de chargement i peuvent être considérées comme des données répliquées. Ce cas particulier est étudié dans [Sha03].

3.4.3.4 Évaluation de la qualité du méta-modèle construit

Analyse des erreurs du modèle

L'erreur du modèle $\mathbf{q}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$, appelée « erreur dans l'équation », pour la section droite s n'est pas accessible directement car les valeurs « vraies » des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s*}}$ et des efforts résultants $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s*}}$ ne sont pas connues. Seules les valeurs mesurées de ces grandeurs et l'incertitude associée sont connues. Dans un premier temps, l'erreur du modèle est donc caractérisée par $\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. L'erreur du modèle $\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ correspond à l'erreur du modèle définie pour la formulation mettant en jeu les valeurs incertaines des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et des réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ de la section droite s (Équation (3.74)).

L'erreur du modèle $\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la section droite s peut être calculée pour chaque valeur de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$:

$$\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \hat{\mathbf{F}}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \quad (3.128)$$

$$= \mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \hat{\boldsymbol{\beta}}^s \quad (3.129)$$

Comme précédemment, l'erreur du modèle $\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ doit toujours être normalement distribuée, de moyenne nulle et de variance $\sigma_{\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2$. Ces propriétés se traduisent par :

$$\mathbb{E} [\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}] = 0 \quad (3.130)$$

$$\text{Var} [\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}] = \sigma_{\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2 \quad (3.131)$$

Toutes les valeurs de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ ayant le même poids, l'espérance et la variance de l'erreur du modèle $\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont estimées par :

$$\hat{\mathbb{E}} [\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}] = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} v_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \quad (3.132)$$

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s T} \mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1)}} \quad (3.133)$$

À partir de l'erreur du modèle $\mathbf{v}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ précédente correspondant à la formulation mettant en jeu les données incertaines, l'erreur du modèle $\mathbf{q}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ appelée « erreur dans l'équation » correspondant à la formulation mettant en jeu les données exactes peut être estimée. L'erreur du modèle $\mathbf{q}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$, ou « erreur dans l'équation », doit également être normalement distribuée, de moyenne nulle et de variance $\sigma_{\mathbf{q}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2$:

$$\mathbb{E} [\mathbf{q}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}] = 0 \quad (3.134)$$

$$\text{Var} [\mathbf{q}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}] = \sigma_{\mathbf{q}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2 \quad (3.135)$$

La variance de l'erreur du modèle $\mathbf{q}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ est connue. Elle est définie ci-après dans chaque cas.

Une incertitude par valeur

Toutes les valeurs de la base d'apprentissage $\mathcal{B}A^s$ ayant le même poids, une estimation de la variance de l'erreur du modèle $q^{\mathcal{B}A^s}$ est donnée par :

$$\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}A^s}}^2 = \hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}A^s}}^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_s} l_i} \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} \left(S_{w_{ij}^{\mathcal{B}A^s} w_{ij}^{\mathcal{B}A^s}} + \hat{\beta}^s{}^T S_{u_{ij}^{\mathcal{B}A^s} u_{ij}^{\mathcal{B}A^s}} \hat{\beta}^s - 2\hat{\beta}^s{}^T S_{u_{ij}^{\mathcal{B}A^s} w_{ij}^{\mathcal{B}A^s}} \right) \quad (3.136)$$

Une incertitude majorée

De même, une estimation de la variance de l'erreur du modèle $q^{\mathcal{B}A^s}$ est donnée par :

$$\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}A^s}}^2 = \hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}A^s}}^2 - \left(S_{w^{\mathcal{B}A^s} w^{\mathcal{B}A^s}} + \hat{\beta}^s{}^T S_{u^{\mathcal{B}A^s} u^{\mathcal{B}A^s}} \hat{\beta}^s - 2\hat{\beta}^s{}^T S_{u^{\mathcal{B}A^s} w^{\mathcal{B}A^s}} \right) \quad (3.137)$$

De même qu'à la sous-sous-section 3.3.2.4, la normalité des erreurs du modèle $v^{\mathcal{B}A^s}$ et $q^{\mathcal{B}A^s}$ peut être vérifiée par le tracé de leur histogramme tel que défini à la sous-sous-section 2.3.3.2, à condition que la taille de la base d'apprentissage $\mathcal{B}A^s$ soit suffisante pour que le tracé soit représentatif de la distribution. Si les erreurs du modèle $v^{\mathcal{B}A^s}$ et $q^{\mathcal{B}A^s}$ ne suivent pas une loi normale alors la méthode doit être modifiée d'après [SS97].

Analyse de la variance du modèle

Les sommes des carrés $SC^{\mathcal{B}A^s}$ (Équations (3.48), (3.49) et (3.50)), les carrés moyens $CM^{\mathcal{B}A^s}$ (Équations (3.56), (3.58) et (3.57)) et les remarques présentés pour la méthode de régression classique présentée à la sous-sous-section 3.3.2.4 sont inchangés. Pour rappel, la somme des carrés résiduels $SC_{Rés}^{\mathcal{B}A^s}$ est associée ici à l'erreur du modèle $v^{\mathcal{B}A^s}$.

Coefficient de détermination

Les coefficients de détermination classique $R^{\mathcal{B}A^s}$ et ajusté $R_{aj}^{\mathcal{B}A^s}$ sont inchangés par rapport à la méthode de régression classique (Équations (3.59) et (3.60)) puisqu'ils sont définis à partir des sommes des carrés $SC^{\mathcal{B}A^s}$ précédentes.

3.4.4 Application du problème direct

3.4.4.1 Estimation de la réponse

L'estimation de la réponse du modèle $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ est donnée de la même manière que pour la méthode de régression classique (Équation (3.63)).

Les paramètres du modèle $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$ correspondent bien aux déformations mesurées donc incertaines dans cette formulation du problème, et non supposées exactes comme dans la formulation précédente du problème défini à la sous-section 3.3.4 par l'équation (3.66). L'effort résultant $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ estimé ici est bien une estimation de l'effort résultant mesuré $F_{rés}^{vol^s}$ donc incertain. L'effort résultant « vrai » $F_{rés}^{vol^{s*}}$ reste inaccessible.

3.4.4.2 Intervalle de confiance sur la prévision d'une nouvelle observation

Comme pour la méthode de régression classique présentée à la sous-sous-section 3.3.3.2, l'estimation précédente peut être encadrée par un intervalle de confiance. Cet intervalle permet d'encadrer l'estimation de la réponse « vraie » du modèle pour une nouvelle observation des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$. Cette observation correspond à des valeurs des paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s}$ qui n'ont pas été utilisées pour construire le modèle ϕ^s . Cet intervalle de confiance est défini par :

$$\hat{F}_{rés}^{vol^s} - \Gamma_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} \hat{\sigma}_{w^{vol^s}} \leq F_{rés}^{vol^{s*}} \leq \hat{F}_{rés}^{vol^s} + \Gamma_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} \hat{\sigma}_{w^{vol^s}} \quad (3.138)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{w^{vol^s}}^2 &= \hat{\sigma}_q^{vol^s} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^{sT} \mathbf{S}_{\mathbf{u}^{vol^s} \mathbf{u}^{vol^s}} \hat{\boldsymbol{\beta}}^s \\ &+ \boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s T} \mathbf{S}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}^s \hat{\boldsymbol{\beta}}^s} \boldsymbol{\varepsilon}^{vol^s} - \text{tr} \left(\mathbf{S}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}^s \hat{\boldsymbol{\beta}}^s} \mathbf{S}_{\mathbf{u}^{vol^s} \mathbf{u}^{vol^s}} \right) \end{aligned} \quad (3.139)$$

où :

- $F_{rés}^{vol^{s*}}$ est la réponse « vraie » du modèle ;
- $\hat{\sigma}_{w^{vol^s}}$ est l'estimation de l'écart-type de la réponse « vraie » du modèle $F_{rés}^{vol^{s*}}$;
- $\Gamma_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2}$ est un coefficient à définir en fonction de l'écart-type de la distribution des réponses observées du modèle $\hat{\sigma}_{w^{vol^s}}$, du nombre de degrés de liberté $\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1)$ du système inversé et de la probabilité de $1 - \alpha/2$ choisie pour encadrer la réponse exacte du modèle $F_{rés}^{vol^{s*}}$. Si les réponses observées suivent une loi normale alors, pour une probabilité de 97,5% soit un risque α de 0,05 :

$$\Gamma_{\sum_{i=1}^{n_s} l_i - (p_s + 1), 1 - \alpha/2} = 1,96 \quad (3.140)$$

Dans ce cas, il y a 5% de chance pour que les réponses exactes du modèle $F_{rés}^{vol^s}$ ne soient pas comprises dans l'intervalle $\hat{F}_{rés}^{vol^s} \pm 1,96 \hat{\sigma}_{w^{vol^s}}$.

3.5 Mise en place de la méthode sur un cas industriel

3.5.1 Introduction

Les incertitudes apparaissant dans la méthode d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ sont de plusieurs types. Comme présenté à la sous-section 3.2.4, les incertitudes portent sur les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^s$, les efforts résultants $F_{rés}^s$ et les paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$. Ces incertitudes proviennent soit des incertitudes de mesure, soit des erreurs de calcul. Ces incertitudes sont prises en compte à chaque étape de la méthode d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ présentée à la section 3.4.

Cependant, les incertitudes relatives au vol, discutée à la sous-sous-section 3.2.4.3, n'est pas prise en compte dans cette méthode. Elle nécessite une étude spécifique, développée dans le cadre de cette thèse et présentée à la sous-sous-section 3.5.3.1.

Dans la suite, les deux méthodologies sont présentées :

- la méthodologie actuelle, sans incertitude considérée mathématiquement mais encadrée empiriquement ;
- le méthodologie proposée pour prendre en compte toutes les incertitudes du problème.

3.5.2 Méthodologie actuelle

Comme précisé auparavant à la sous-section 3.2.2, l'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ s'effectue en 2 étapes (Figure 3.8) :

1. l'étalonnage au sol :

Les essais d'étalonnage au sol permettent de déterminer les paramètres du modèle $\boldsymbol{\beta}^s$ pour chaque section droite étudiée s . Cette étape se décompose en trois phases :

- (a) l'analyse des données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s :

Les mesures de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{BA}^s}$ effectuées sont analysées. Il s'agit de vérifier que les valeurs mesurées sont exploitables et que les ponts de jauge possèdent de bonnes propriétés pour la suite. La linéarité de comportement de chaque pont de jauge k par rapport aux efforts appliqués T_{z_i} est notamment vérifié.

- (b) la résolution du problème inverse :
 Les paramètres du modèle β^s sont estimés ainsi que certaines autres caractéristiques, comme l'écart-type sur l'erreur du modèle $\hat{\sigma}_{e\mathcal{B}A^s}$.
- (c) le choix des méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$:
 Compte tenu de l'analyse des données, des ponts de jauge k utilisés dans chaque méta-modèle construits $\hat{\phi}^s$, du type d'effort résultant à estimer et des résultats de certaines caractéristiques de ces méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$, les plus représentatifs du comportement de la structure et les plus précis sont sélectionnés. Les critères de sélection des méta-modèles $\hat{\phi}^s$ ne sont pas détaillés ici, pour des raisons de confidentialité.
2. les essais en vol :
 Les essais en vol permettent d'estimer les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$.
- (a) la résolution du problème direct :
 Les déformations en vol ϵ^{vol^s} sont mesurées. Ces mesures de déformations en vol ϵ^{vol^s} et les paramètres du modèle β^s identifiés précédemment permettent ainsi d'estimer les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$.
- (b) la validation :
 Les résultats sont comparés pour les différents méta-modèles $\hat{\phi}^s$ retenus. Une méthode empirique conservative permet d'encadrer, de manière non optimisée, ces efforts résultants.

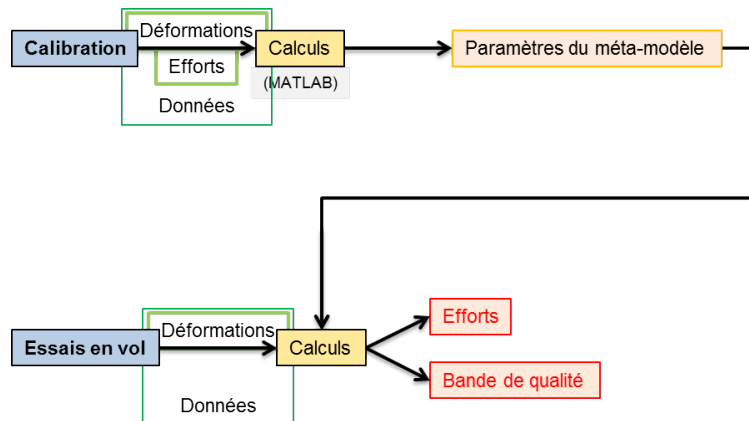


FIGURE 3.8 – Méthodologie actuelle d'estimation des efforts résultants en vol

C'est la méthodologie actuelle d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. Cette méthodologie repose sur la méthode présentée à la section 3.3. Or, dans cette méthode, les incertitudes ne sont pas prises en compte. Seul un encadrement empirique de l'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ est calculé.

3.5.3 Méthodologie développée pour prendre en compte les incertitudes

La prise en compte des incertitudes du problème s'effectue par deux études :

- une étude spécifique pour quantifier les incertitudes relatives au vol ;
- une étude classique mais dans laquelle les incertitudes de mesure et de calcul sont prises en compte.

3.5.3.1 Quantification des incertitudes relatives au vol

Les incertitudes relatives au vol est liée à l'utilisation du méta-modèle ϕ^s dans un domaine différent de son domaine d'identification et au potentiel non-respect des hypothèses retenues. En effet, les essais au sol et en vol sont effectués dans des conditions différentes concernant :

- le mode d'application des efforts :
Pour l'étalonnage au sol, les efforts sont appliqués ponctuellement.
En vol, les efforts sont répartis sur la structure.
- les niveaux d'efforts :
Pour l'étalonnage au sol, les niveaux d'effort appliqué sont limités pour ne pas endommager la structure compte tenu de leur mode d'application.
En vol, les niveaux d'effort sont plus élevés, voire proches de la limite d'élasticité de la structure. Le comportement de la structure peut alors devenir localement non-linéaire.
- les conditions de température :
Pour l'étalonnage au sol, la température varie peu. Les conditions des essais au sol sont donc quasi-isothermes.
En vol, la température peut être considérée quasi-constante pendant une manœuvre, compte tenu de sa durée. Mais cette température est différente de la température à laquelle l'étalonnage au sol a été effectué. La structure travaille donc en thermo-élasticité. Cependant, la considération des données mesurées en relatif, c'est-à-dire prises entre deux instants de chaque manœuvre, permet de s'affranchir de cet effet.
- la configuration de la voilure :
Pour l'étalonnage au sol, la voilure est en configuration lisse.
En vol, différentes configurations becs/volets sont possibles, dépendant de la manœuvre effectuée.
- les systèmes mécaniques mis en jeu, les jeux dans la structure, le carburant,
...

Le moyen retenu pour quantifier ces incertitudes est l'utilisation d'un modèle élément fini. Le modèle utilisé est un modèle complet de l'avion sous NASTRAN, présenté à la sous-sous-section 4.2.2.3. Il est modifié pour répondre aux besoins de

l'estimation des efforts résultants. C'est un modèle linéaire sur lequel des analyses linéaires (cas de chargement au sol et manœuvres statiques en vol pour différentes configurations de la voilure) et thermiques sont possibles.

Pour quantifier les incertitudes relatives au vol, il est nécessaire de connaître les valeurs « vraies » des efforts résultants ou d'avoir un moyen fiable d'obtenir une valeur approchée suffisamment précise pour l'étude. Pour cela, un outil est disponible dans PATRAN, le logiciel de pré/post-traitement de NASTRAN. Cet outil réalise l'intégration de tous les efforts internes présents dans la structure isolée, les efforts résultants étant l'opposé des efforts internes tels que présentés dans l'Annexe B.1 (Équation (B.1)). Les efforts résultants ainsi obtenus servent de référence pour comparer avec les efforts résultants estimés par le méta-modèle $\hat{\phi}^s$ et quantifier les incertitudes relatives au vol.

La méthodologie mise en place pour quantifier les incertitudes relatives au vol consiste à réaliser un étalonnage virtuel puis à estimer les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ pour un grand nombre de manœuvres statiques (Figure 3.9). La comparaison des résultats entre les efforts résultants $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ estimés par le méta-modèle $\hat{\phi}^s$ et ceux calculés par le modèle éléments finis grâce à l'outil précédent permet d'identifier la loi de distribution de l'incertitude sur les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. Cette incertitude correspond à l'application du méta-modèle dans un domaine différent de son domaine d'étalonnage. Cette incertitude est désignée ici par incertitude relative au vol, d'écart-type σ_{vol} .

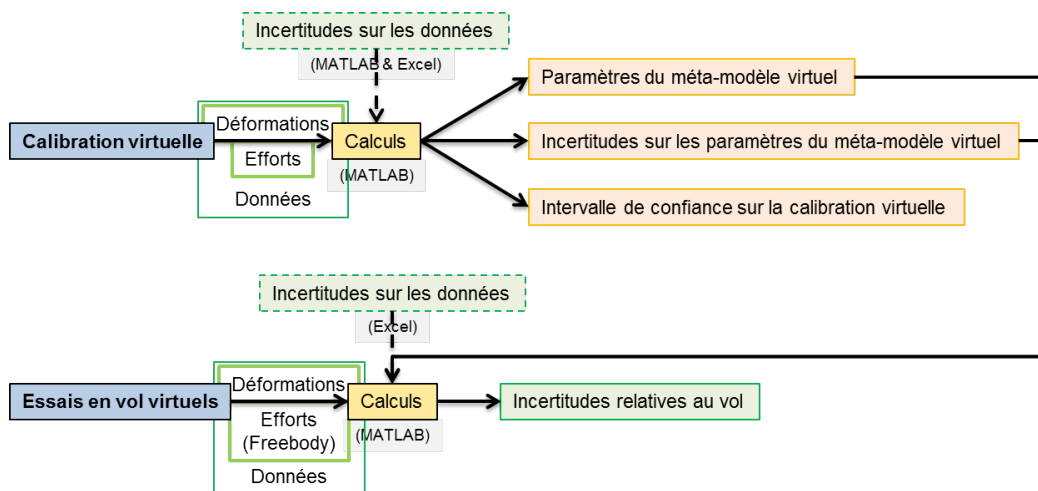


FIGURE 3.9 – Méthodologie d'estimation des incertitudes relatives au vol

3.5.3.2 Méthodologie modifiée complète

La méthodologie modifiée pour prendre en compte les incertitudes du problème est sensiblement la même que la méthodologie actuelle (Figure 3.10). Les étapes de la résolution du problème inverse et direct correspondent à la méthode d'estimation des efforts résultants modifiée pour prendre en compte les incertitudes présentées à la section 3.4. La prise en compte des incertitudes relatives au vol n'intervient pas sur l'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. Elle n'intervient que sur l'intervalle de confiance final où l'estimation de l'écart-type $\hat{\sigma}_{w^{vol^s}}$ de la réponse « vraie » du méta-modèle $F_{rés}^{vol^s*}$ est remplacé par $\hat{\sigma}_{final}$:

$$\hat{\sigma}_{final} = \sqrt{\hat{\sigma}_{w^{vol^s}}^2 + \sigma_{vol}^2} \quad (3.141)$$

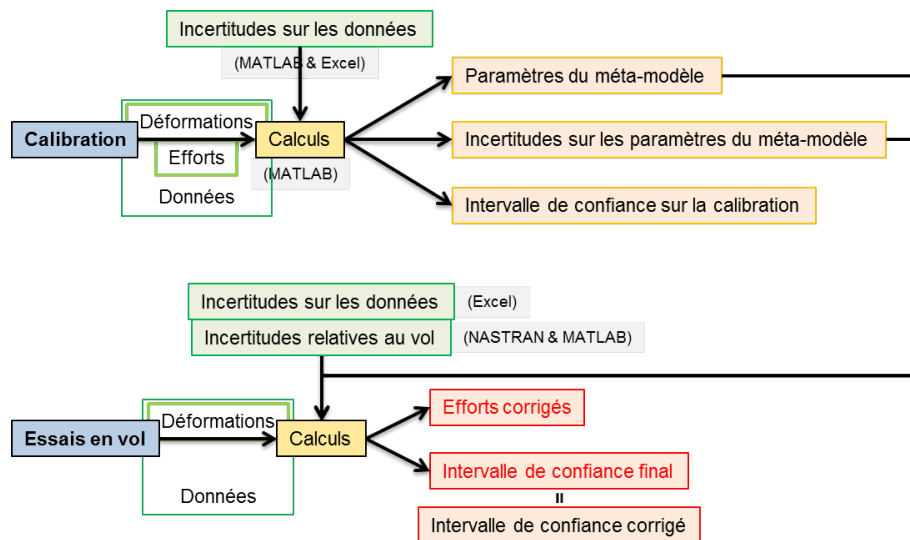


FIGURE 3.10 – Méthodologie complète d'estimation des efforts résultants en vol prenant en compte les incertitudes

3.5.4 Conclusions

Les deux méthodologies, actuelle et modifiée, assez sont proches. La méthode actuelle d'estimation des efforts résultants, présentée à la section 3.3, dans la première est remplacée par la méthode prenant en compte les incertitudes, présentée à la section 3.4, dans l'autre. La différence majeure entre ces deux méthodologies est l'étude spécifique qui est rajouté pour quantifier les incertitudes relatives au vol.

À noter, l'application de la méthode d'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ pour des données issues du modèle éléments finis se fait sans incertitude

puisque le modèle éléments finis est supposé exact. Mais il est possible de rajouter artificiellement du bruit sur les données. En effet, le programme utilisé pour cette étude virtuelle est le même que celui utilisé sur les données réelles, avec ou sans incertitude.

Un programme existait déjà pour l'exploitation des données des essais d'étalonnage au sol, l'estimation des paramètres du modèle β^s pour chaque section droite s et chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ ainsi que pour l'analyse des résultats. Cependant, compte tenu de la difficulté à modifier ce programme pour intégrer la prise en compte des incertitudes, un nouveau programme, inspiré du précédent, a été entièrement développé dans le cadre de cette thèse. Ce nouveau programme reprend les fonctionnalités du précédent en intégrant la prise en compte des incertitudes. Il fonctionne pour les données issues d'essais réels ou issues de modèle numérique comme un modèle éléments finis. Un second programme a été développé dans le cadre de cette thèse pour réaliser l'analyse des données d'essais en vol, réelles ou numériques comme dans le cas de l'étude spécifique sur le modèle éléments finis pour quantifier l'incertitude relative au vol. Ce second programme s'appuie sur les résultats obtenus par le premier programme réalisant l'étalonnage au sol, avec ou sans incertitude. Ces deux programmes sont entièrement paramétrés pour gérer :

- le(s) type(s) d'avion(s) :
Il est possible d'analyser les données de plusieurs avions en ne paramétrant qu'une seule fois le programme.
- le(s) type(s) de structure :
Par exemple, la voilure et la dérive de l'avion.
- la(les) configuration(s) de cette(ces) structure(s) :
Pour la voilure par exemple, il y a 8 configurations possibles.
- le(s) section(s) droite s à analyser ;
- le(s) composante(s) $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ à traiter ;
- le(s) nombre(s) de ponts de jauge k à utiliser pour construire le méta-modèle ϕ^s ;
- la prise en compte des incertitudes ou pas ;
- certaines sorties :
Il est possible de paramétrer l'écriture de certains fichiers textes et/ou de certains graphiques.

3.6 Conclusions

Le comportement des mesures de déformations pendant les essais d'étalonnage au sol de la structure étant linéaire par rapport aux efforts résultants, le méta-modèle choisi pour représenter la relation entre ces deux grandeurs est pertinent.

Les conditions d'essais au sol linéaires et optimales permettent également de justifier les hypothèses retenues en première approche, c'est-à-dire les hypothèses de poutre d'Euler-Bernoulli. La prise en compte des incertitudes dans le problème consiste donc à modifier la définition du méta-modèle établissant la relation entre les déformations et les efforts résultants, tout en respectant les hypothèses retenues et les contraintes industrielles. La méthode présentée pour considérer les incertitudes reste ainsi simple et explicite.

Les sources d'incertitude présentes dans ce problème sont nombreuses. Elles portent sur les déformations et les efforts résultants dans les deux étapes de la méthode mais aussi sur le modèle. En ce qui concerne le modèle, les sources d'incertitude peuvent se diviser en deux catégories : les incertitudes liées à l'estimation des paramètres de ce modèle et les incertitudes liées à l'application de ce modèle dans un domaine différent de celui pour lequel il a été établi. La prise en compte des incertitudes sur les déformations, les efforts résultants et les paramètres du modèle à chaque étape de la méthode a été définie à la section 3.4. Cette méthode fournit également l'incertitude sur l'estimation des efforts résultants, dans un domaine identique au domaine d'identification du modèle. La considération des incertitudes relatives à l'application du modèle dans un domaine différent de celui où les paramètres du modèle ont été estimés nécessite une étude spécifique. Cette étude spécifique ainsi que la méthodologie complète pour l'application dans le contexte industriel ont été proposées à la section 3.5.

Dans le chapitre suivant, cette méthodologie est appliquée au cas industriel traité, détaillé à la section 4.2. L'étalonnage au sol en prenant en compte les incertitudes, par valeur ou de manière majorée, est présenté à la section 4.3. L'étude spécifique permettant de caractériser les incertitudes relatives au vol est présentée à la section 4.4.

Chapitre 4

Estimation de l'incertitude des charges sur un cas industriel

Sommaire

4.1 Introduction	125
4.2 Objet de l'étude	125
4.2.1 Structure étudiée	125
4.2.1.1 Profil	125
4.2.1.2 Détails de la structure d'une voilure	126
4.2.2 Moyens	131
4.2.2.1 Essais au sol	131
4.2.2.2 Essais en vol	131
4.2.2.3 Modèle éléments finis	132
4.2.3 Hypothèses	132
4.3 Problème inverse : Calibration au sol sous incertitudes	133
4.3.1 Sources d'incertitude	133
4.3.2 Analyse des données de la base d'apprentissage	134
4.3.2.1 Introduction	134
4.3.2.2 Dépendances entre les paramètres d'entrée	134
4.3.2.3 Linéarité de comportement entre les paramètres d'entrée et la réponse	136
4.3.2.4 Conclusions	138
4.3.3 Résolution du problème inverse	138
4.3.3.1 Introduction	138
4.3.3.2 Influence des incertitudes sur le problème	139
4.3.3.3 Analyse générale des résultats	146

4.3.3.4	Analyse spécifique des résultats et aide au choix des méta-modèles	150
4.3.3.5	Validation croisée	156
4.4	Étude éléments finis : détermination de l'incertitude relative à l'extrapolation des charges en vol	161
4.4.1	Introduction	161
4.4.2	Sources d'incertitude	162
4.4.3	Problème inverse : Calibration au sol virtuelle	163
4.4.3.1	Analyse des données de la base d'apprentissage	163
4.4.3.2	Validation de l'outil d'extraction des efforts résultants	165
4.4.3.3	Résolution du problème inverse	167
4.4.3.4	Validation croisée	175
4.4.3.5	Validation des résultats par méthode de Monte Carlo	176
4.4.4	Problème direct : Essais en vol virtuels	178
4.4.5	Conclusions	182
4.5	Conclusions	183

4.1 Introduction

La méthodologie proposée pour la prise en compte des incertitudes présentée à la sous-section 3.5.3 est appliquée à un cas industriel. Dans un premier temps, les caractéristiques de la structure étudiée, les moyens disponibles et les hypothèses retenues sont présentés.

La prise en compte des incertitudes sur l'étalonnage au sol réel est ensuite présentée. Les sources d'incertitude considérées sont rappelées. Après avoir analysé les données d'essai, le problème inverse, c'est-à-dire l'identification des paramètres β^s du méta-modèle ϕ^s , est résolu. La méthode utilisée pour résoudre ce problème est la méthode développée à la section 3.4, modifiée par rapport à la méthode actuelle définie à la section 3.3 pour prendre en compte les incertitudes.

Enfin, l'étude spécifique pour l'estimation de l'incertitude relative au vol est réalisée. Pour cette étude réalisée sur un modèle éléments finis, les hypothèses choisies sur les incertitudes considérées sont définies. Un étalonnage au sol sur le modèle éléments finis est nécessaire avant d'appliquer des cas de chargement représentatifs du vol. Un outil permet alors d'extraire les efforts résultants dans les sections droites s étudiées servant ainsi de référence pour quantifier l'incertitude relative au vol.

À noter, en pratique, l'étude spécifique pour l'estimation de l'incertitude relative au vol peut être réalisée avant l'étalonnage au sol réel.

4.2 Objet de l'étude

4.2.1 Structure étudiée

La structure étudiée ici est la voilure de l'avion. La voilure est la structure assurant la portance de l'avion qui s'étend de part et d'autre du fuselage. Une aile désigne la demi-voilure.

La voilure d'un avion est une structure complexe mais peut être définie de manière simplifiée par son profil. Elle comporte deux parties : une structure primaire, correspondant au caisson central, et une structure secondaire, regroupant les surfaces mobiles et l'extrémité extérieure de la voilure (Figure 1.4).

4.2.1.1 Profil

Toute voilure peut être définie par son profil aérodynamique (Figure 4.1). La partie supérieure de ce profil s'appelle l'extrados et la partie inférieure s'appelle l'intrados. Au sol, le poids de la voilure génère une traction de l'extrados et une compression de l'intrados. En vol, la portance étant prépondérante, les effets sont inversés : l'extrados subit une compression et l'intrados subit une traction. La ligne

moyenne ou squelette, aussi appelée ligne de cambrure, se situe à mi-distance entre l'extrados et l'intrados.

Dans le sens de l'écoulement autour de la voilure, le bord d'attaque du profil aérodynamique correspond à la partie avant, arrondie, et le bord de fuite du profil aérodynamique correspond à la partie arrière, généralement fine. La corde est la ligne droite reliant le bord d'attaque au bord de fuite.

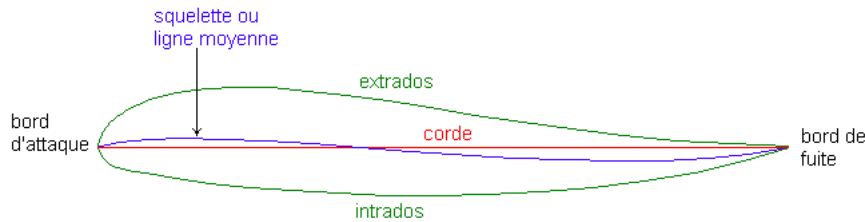


FIGURE 4.1 – Profil aérodynamique d'une voilure

Ce profil aérodynamique permet de générer la structure d'une voilure d'avion par extrusion dans la direction proche de la perpendiculaire au plan du profil.

Dans la suite, le profil de la voilure correspond à une coupe perpendiculaire à l'axe neutre longitudinal de la structure.

4.2.1.2 Détails de la structure d'une voilure

Structure primaire

La structure primaire de la voilure (en bleu sur la Figure 4.2) correspond au caisson central. Il débute à la jonction entre l'aile et le fuselage, appelée emplanture, et s'arrête à l'extrémité extérieure de l'aile, appelée saumon. Le caisson central de la voilure est délimité à l'avant et à l'arrière par des longerons, raccordés au fuselage au niveau de l'emplanture. Des longerons intermédiaires peuvent être présents entre ces deux longerons.

Ce caisson est fermé par des peaux, la peau supérieure correspondant à l'extrados et la peau inférieure correspondant à l'intrados. Ces peaux sont rigidifiées par la présence de nombreux raidisseurs, disposés dans le sens de la longueur de l'aile. De plus, la peau inférieure est parcourue de trous d'homme afin d'assurer la maintenance de la voilure. Ces peaux reposent sur des nervures, placées tout le long du caisson central, perpendiculairement à la courbe moyenne de l'aile. Les nervures permettent de transmettre les efforts appliqués sur les peaux de la voilure aux longerons.

Le caisson central sert aussi de réservoir pour le carburant. De plus, il est le support de divers systèmes pour :

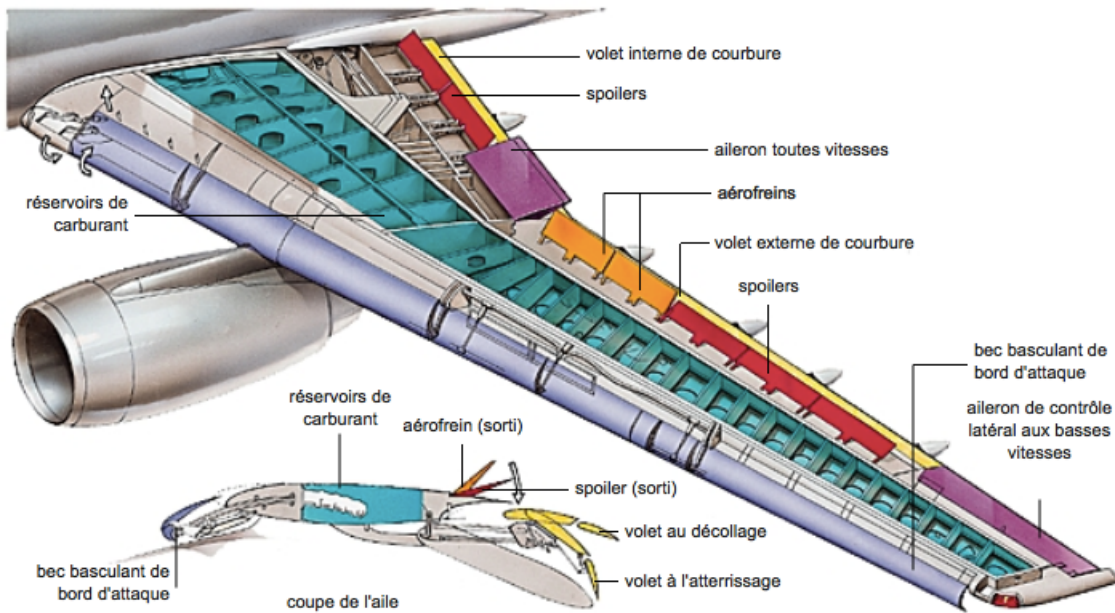


FIGURE 4.2 – Structure de l'aile d'un AIRBUS A300

- le pilotage : commandes des gouvernes ;
- la navigation : détecteur de décrochage ;
- la signalisation : feux aux extrémités de la voilure, par exemple.

Structure secondaire

La structure secondaire de la voilure est constituée des surfaces mobiles et de l'extrémité de l'aile. L'extrémité de l'aile peut être soit coupée nette, soit pourvue d'une ailette marginale. Il existe plusieurs types d'ailettes marginales (Figure 4.3) : droites (Figure 4.3a) ou courbées (Figure 4.3b), dirigées vers le haut (Figure 4.3b), le bas ou les deux (Figure 4.3a).

Les surfaces mobiles (Figure 4.2) peuvent être divisées en deux types :

- les système de contrôle primaire ou gouvernes :
Elles permettent de contrôler la trajectoire de l'avion. Sur la voilure, seules les gouvernes en roulis, c'est-à-dire les ailerons, sont présentes. Pour générer un mouvement de roulis, les ailerons sont actionnés de manière opposée sur les deux ailes : l'un monte pendant que l'autre descend. Généralement, les ailerons sont placés sur l'extrados à proximité du bord de fuite et à l'extrémité de la voilure. Ils sont utilisés pour des vitesses faibles. L'effet est d'autant plus grand que le bras de levier généré est grand. Des ailerons peuvent également être placé plus près de l'emplanture. Ils sont utilisés pour des vitesses plus élevées afin de réduire la torsion subie par la voilure.



(a) Type *fence*



(b) Type courbé

FIGURE 4.3 – Exemples d'ailettes marginales

- les systèmes de contrôle secondaire :
Elles agissent sur la portance et la traînée.
 - les becs :
Placés sur le bord d'attaque, ils permettent d'augmenter la cambrure de l'aile, sa surface et ainsi retarder le décollement de la couche limite. Sur les avions de ligne, deux types de becs sont en général employés : des becs « à fente commandé », qui se déploient vers l'avant à l'ordre du pilote, et des becs *Krueger*, qui pivotent.
 - les volets :
Placés sur le bord de fuite entre le fuselage et les ailerons, ils permettent, tout comme les becs, d'augmenter la cambrure de la voilure et donc sa portance. Ils améliorent les capacités de vol à basses vitesses et diminuent la vitesse de décrochage. Plusieurs types de volets existent : des volets de courbure, à fente, d'intrados ou de type *Fowler*. Ce dernier type devient très répandu sur les avions de ligne.
 - les aérofreins :
Les aérofreins sont placés sur l'extrados de la voilure. Leur fonction principale est d'augmenter la traînée en générant des turbulences aérodynamiques. Ils s'utilisent de manière symétrique sur la voilure. Ils peuvent

aussi avoir ou pas une influence sur la portance. Si leur déploiement laisse un espace avec la voilure, ils ne modifient pas la portance. Souvent, ils sont même percés. Si leur déploiement ne laisse pas d'espace avec la voilure, alors ils diminuent la portance. Sur les avions de ligne, ils tendent à être remplacé par des destructeurs de portance.

- les destructeurs de portance ou *spoilers* :
Placés sur l'extrados du bord de fuite, ils permettent d'augmenter la traînée et de diminuer la portance. Utilisés symétriquement sur les deux ailes, ils servent d'aérofreins. Utilisés de manière dissymétriques, ils améliorent la précision des virages.

Angles caractéristiques de la voilure

À cette description détaillée de la structure de la voilure, il faut ajouter les angles caractéristiques de son implantation par rapport au fuselage. Ces angles sont définis par rapport aux axes de l'avion (Figure 4.4) :

- l'axe de roulis :
C'est l'axe longitudinale de l'avion, suivant le fuselage.
- l'axe de tangage :
C'est l'axe transversal, perpendiculaire à l'axe de roulis dans le plan horizontal.
- l'axe de lacet :
C'est l'axe perpendiculaire au plan horizontal.

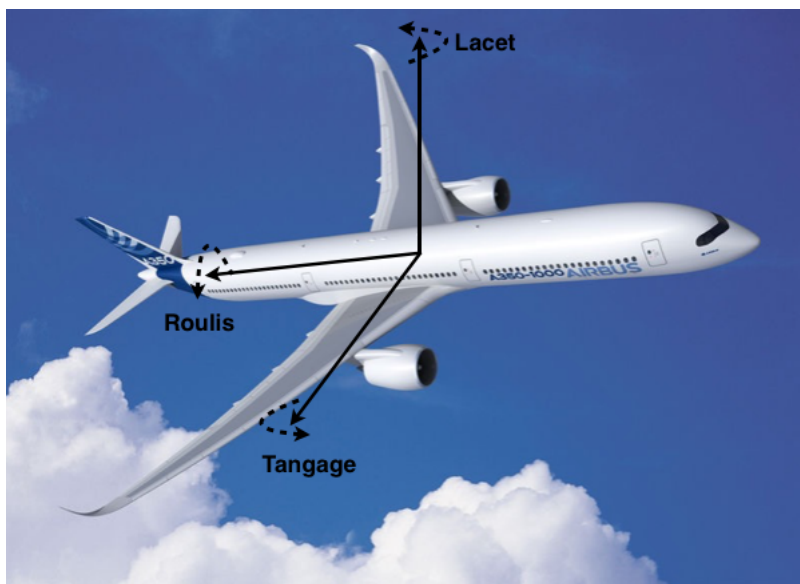


FIGURE 4.4 – Axes de l'avion

À partir de ces trois axes, trois angles définissent la voilure :

- le dièdre :

C'est l'angle formé par l'axe de tangage et l'axe longitudinale de l'aile, dans le plan perpendiculaire à l'axe de roulis (Figure 4.5). Cet angle est choisi pour optimiser la stabilité des manœuvres en lacet.



(a) Dièdre positif



(b) Dièdre négatif

FIGURE 4.5 – Exemples de dièdre de la voilure

- l'angle de calage :

C'est l'angle formé par l'axe de roulis et la corde de référence du profil de l'aile, dans le plan perpendiculaire à l'axe de tangage. Cet angle peut varier le long de la voilure : c'est le vrillage. Il ne doit pas être confondu avec l'angle d'incidence ou d'attaque qui est formé par le vecteur vitesse du vent

relatif, en vol, et la corde de référence du profil de l'aile.

- l'angle de flèche :

C'est l'angle formé par l'axe de tangage et la droite constituée des points situés au quart avant des cordes du profil de l'aile, dans le plan perpendiculaire à l'axe de lacet. Si ces points ne forment pas une droite, la flèche est variable et le bord d'attaque peut être pris pour référence.

4.2.2 Moyens

Pour réaliser l'étude et la quantification des incertitudes des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$, plusieurs moyens sont utilisés :

- des essais :
 1. au sol : pour identifier les paramètres du modèle β^s ,
 2. en vol : pour estimer les efforts résultants $F_{rés}^{vol^s}$;
- des simulations numériques :

Utilisées pour quantifier l'incertitude relative au vol.

4.2.2.1 Essais au sol

Les essais réalisés au sol correspondent aux essais d'étalonnage, présentés à la sous-sous-section 3.2.2.1. En général, ces essais ne sont réalisés qu'une seule fois pour chaque avion. Plusieurs cas de chargement sont appliqués. Les sections étudiées correspondent à des sections droites de la voilure. Ces sections sont choisies judicieusement pour reconstruire le profil macroscopique des efforts résultants, exprimés au centre M_s des sections droites s , le long de la voilure. Elles doivent permettre d'identifier les effets provenant des différents éléments de la voilure, présentés précédemment à la sous-sous-section 4.2.1.2.

Ces essais, réalisés sur la voilure en configuration lisse, permet de mesurer les données constituant la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s pour chaque section étudiée s de la voilure. Chaque base d'apprentissage \mathcal{BA}^s permet de construire les méta-modèles ϕ^s pour chaque section droite s et chaque composante $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s} = \{T_z^s, M_{f_y}^s, M_t^s\}$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}}$. Trois méta-modèles ϕ^s sont donc construits pour chaque section droite s .

4.2.2.2 Essais en vol

De nombreux vols sont réalisés avec des objectifs différents. Dans le cadre de l'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$, seules les manœuvres statiques présentent un intérêt. Même si les efforts résultants peuvent être estimés à tout moment, quel que soit le vol effectué, ces manœuvres statiques rentrent dans les

hypothèses retenues, définies précédemment à la sous-section 3.2.3 et rappelées ci-après.

Ne disposant pas d'un moyen alternatif pour estimer les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$, les données en vol ne peuvent pas être utilisées pour quantifier leur incertitude. En effet, il n'est pas possible d'avoir une référence fiable à laquelle comparer les réponses des méta-modèles ϕ^s , identifiés par l'étalonnage au sol, et donc de quantifier l'incertitude sur l'estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$.

C'est pourquoi un modèle éléments finis est utilisé pour quantifier les incertitudes relatives au vol.

4.2.2.3 Modèle éléments finis

Le modèle éléments finis (MEF) est un modèle global linéaire mais complet de l'avion réel. La structure primaire et secondaire de la voilure sont modélisées. Les surfaces mobiles sont également représentées. Les différentes configurations becs/volets de la voilure sont possibles.

Les sections droites s étudiées de la voilure sont raffinées afin d'avoir un champ de déformation représentatif dans ces zones. La taille de chaque maille dans ces zones correspond aux dimensions d'un pont de jauge. Chaque pont de jauge collé sur la structure réelle est donc modélisé par son équivalent dans le modèle.

Contrairement à l'avion réel, les mesures de déformation sont considérées exactes. Le problème étudié correspond donc au problème actuel, défini à la section 3.3. La seule erreur présente dans ce modèle est donc le manque d'ajustement de celui-ci 3.4.2. Ce modèle est d'abord étalonné au sol pour déterminer les paramètres du modèle « virtuel » β^s , et non « réel » comme précédemment à la sous-section 4.2.2.1. Cet étalonnage au sol virtuel s'effectue de la même manière que l'étalonnage au sol sur l'avion réel, excepté en ce qui concerne les valeurs des efforts appliqués. En effet, le niveau des efforts appliqués peut être arbitraire compte tenu de la parfaite linéarité du modèle éléments finis. Les paramètres du modèle « virtuel » β^s sont ensuite utilisés pour estimer les efforts résultants en vol « virtuels » $F_{rés}^{vol^s}$ pour différents cas de chargement représentatifs du vol. Les estimations des efforts résultants en vol « virtuels » $F_{rés}^{vol^s}$ sont comparés à des valeurs de référence permettant de quantifier l'incertitude sur ces estimations. Les valeurs de références sont obtenues par intégration des efforts internes, correspondant à l'opposé des efforts résultants, de la structure concernée au centre M_s des sections droites s étudiées. Un outil dans le modèle éléments finis permet d'accéder à ces valeurs.

4.2.3 Hypothèses

Malgré la complexité de la structure de la voilure, les hypothèses retenues pour le problème considéré sont celles définies précédemment à la sous-section 3.2.3,

c'est-à-dire celles de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

4.3 Problème inverse : Calibration au sol sous incertitudes

4.3.1 Sources d'incertitude

Dans le cadre des essais d'étalonnage au sol, il existe deux variables incertaines en entrée du problème inverse (Figure 4.6) :

- les paramètres d'entrée du méta-modèle ϕ^s , c'est-à-dire les déformations $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$, mesurées au sol ;
- la réponse du méta-modèle ϕ^s , c'est-à-dire l'une des composantes $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}}$, calculée à partir des mesures des efforts appliqués T_{z_i} sur la structure.

Les différentes sources d'incertitude pour chaque variable ont été présentées en 3.2.4. Cependant, certaines de ces sources d'incertitude peuvent être minimisées dans le cas des essais d'étalonnage au sol. La température variant peu, les sources d'incertitude faisant intervenir la température deviennent négligeables.

La variable de sortie du problème inverse est le vecteur des paramètres du modèle β^s caractérisant le méta-modèle ϕ^s à construire. Les paramètres du modèle β^s sont donc incertains, d'une part à cause des incertitudes sur les variables en entrée du problème inverse, d'autre part à cause des incertitudes de modélisation. Cette variable est une source d'incertitude pour l'application du problème direct en vol.

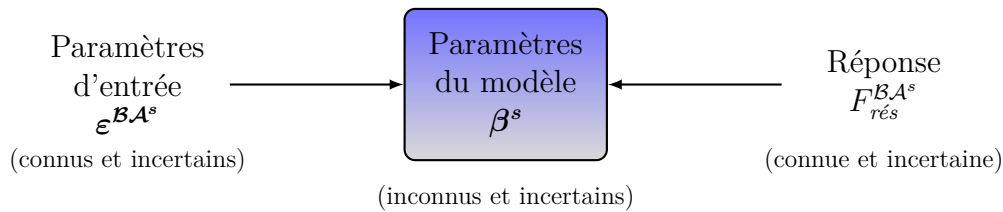


FIGURE 4.6 – Problème inverse

Ces différentes sources d'incertitude impliquent une incertitude sur l'effort résultant estimé $\tilde{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ par le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$. L'effort résultant estimé $\tilde{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ n'est pas une source d'incertitude pour la suite mais il permet de quantifier la qualité du méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour les données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s .

4.3.2 Analyse des données de la base d'apprentissage

4.3.2.1 Introduction

Avant de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire d'identifier les paramètres du modèle β^s pour chaque composante $F_{rés}^s$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ et pour chaque section droite s étudiée, il est nécessaire d'analyser les données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s . Cette analyse a deux buts :

- observer les dépendances de comportement entre deux ponts de jauge k_1 et k_2 :

Ces observations doivent permettre de déceler les couples de ponts de jauge k_1 et k_2 se comportant de la même manière afin d'éviter de les utiliser simultanément dans la construction des méta-modèles ϕ^s . En effet, si deux ponts de jauge k_1 et k_2 sont dépendants, la matrice des déformations $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s est alors mal conditionnée. Ceci a pour conséquence de rendre le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ à partir de ces deux ponts de jauge k_1 et k_2 potentiellement instable car le problème est alors « mal posé ».

- vérifier la linéarité de comportement entre les efforts appliqués T_{z_i} et les déformations mesurées $\varepsilon_k^{\mathcal{BA}^s}$ de chaque pont de jauge k :

La linéarité de comportement, la présence d'une hystérésis et la régularité du signal des ponts de jauge k sont ainsi vérifiés. Ceci permet de valider l'utilisation de chaque pont de jauge k .

4.3.2.2 Dépendances entre les paramètres d'entrée

D'après les hypothèses du problème, les paramètres d'entrée $\varepsilon_k^{\mathcal{BA}^s}$ du méta-modèle ϕ^s sont supposés indépendants les uns des autres. Les signaux de chaque pont de jauge k doivent donc être mutuellement indépendants entre eux.

Pour observer cet aspect, les valeurs d'un pont de jauge k_1 sont tracées en fonction des valeurs d'un autre pont de jauge k_2 . Pour chaque cas de chargement i , les déformations mesurées $\varepsilon_{ik_1}^{\mathcal{BA}^s}$ et $\varepsilon_{ik_2}^{\mathcal{BA}^s}$ de chacun des ponts de jauge k_1 et k_2 correspondant au même palier j sont tracées.

Quelle que soit la section droite s étudiée, deux types de comportement entre ces deux ponts de jauge k_1 et k_2 sont observés :

1. co-linéaire (Figure 4.7) :

Les signaux des deux ponts de jauge k_1 et k_2 sont linéairement liés. Cette tendance observée peut être plus ou moins bruitée. Il existe deux types de dépendance linéaire :

- (a) co-monotone (Figure 4.7a) :

Si le profil formé est croissant, il s'agit d'une dépendance linéaire co-

monotone. Les signaux des deux ponts de jauge k_1 et k_2 évoluent linéairement l'un en fonction de l'autre et dans le même sens : si la déformation d'un des deux ponts de jauge augmente, la déformation de l'autre pont de jauge augmente aussi.

(b) contra-monotone (Figure 4.7b) :

Si le profil formé est décroissant, il s'agit d'une dépendance linéaire contra-monotone. Les signaux des deux ponts de jauge k_1 et k_2 évoluent linéairement l'un en fonction de l'autre mais en sens opposé : si la déformation d'un des deux ponts de jauge augmente, la déformation de l'autre pont de jauge diminue.

Ce type de comportement est observé entre deux ponts de jauge de flexion et parfois entre deux ponts de jauge de torsion.

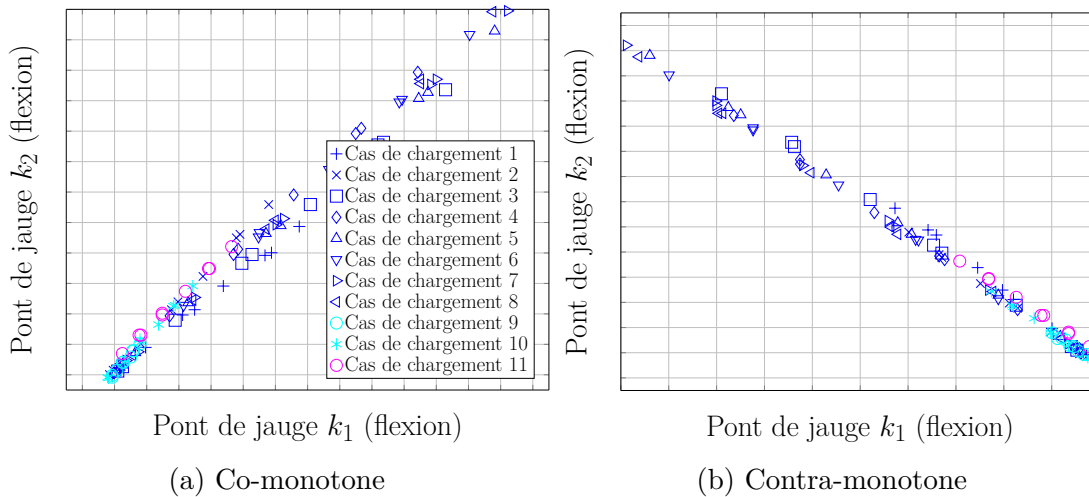


FIGURE 4.7 – Dépendance linéaire entre deux ponts de jauge k_1 et k_2

Ce type de dépendance entre deux ponts de jauge k_1 et k_2 est à considérer avec précaution pour la suite. En effet, un méta-modèle ϕ^s faisant intervenir deux ponts de jauge k_1 et k_2 linéairement liés sera évité car il ne sera pas physiquement représentatif du comportement à modéliser.

2. étoilé (Figure 4.8) :

Les signaux des deux ponts de jauge k_1 et k_2 pour chaque cas de chargement i sont linéairement liés, par la physique, mais *a priori* indépendants, mathématiquement, les uns des autres. Pour chaque cas de chargement i , les signaux des deux ponts de jauge k_1 et k_2 forment une droite. Ces droites ont généralement une origine commune mais des pentes différentes. La répartition des droites formant l'étoile peut parfois présenter une certaine

corrélation avec la position des cas de chargement i , observable par l'apparition de symétries (Figure 4.8a). Il est donc difficile de tirer des conclusions générales sur ce type de comportement.

Ce type de comportement est observé pour toute combinaison de deux ponts de jauge k_1 et k_2 , à l'exception des combinaisons citées précédemment qui sont co-linéaires.

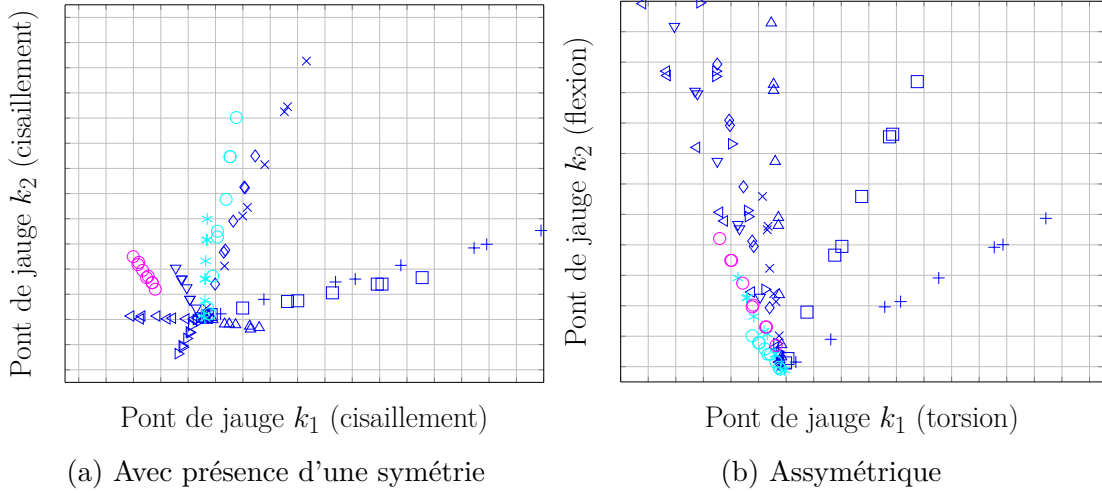


FIGURE 4.8 – Dépendance non linéaire entre deux ponts de jauge k_1 et k_2

Contrairement au comportement co-linéaire précédent, il s'agit du type de comportement que les méta-modèles ϕ^s à construire doivent pouvoir représenter. Deux ponts de jauge k_1 et k_2 présentant ce type de comportement seront de préférence retenus pour la construction des méta-modèles ϕ^s .

4.3.2.3 Linéarité de comportement entre les paramètres d'entrée et la réponse

Avant d'utiliser les données mesurées pendant les essais d'étalonnage au sol et formant la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s du modèle ϕ^s à construire, il est nécessaire de vérifier que le comportement de la structure est bien linéaire. Pour cela, quelle que soit la section droite s étudiée, les déformations mesurées $\varepsilon_{ik}^{\mathcal{BA}^s}$ de chaque pont de jauge k et pour chaque cas de chargement i sont tracées en fonction des valeurs mesurées de l'effort appliqué T_{z_i} correspondant au même palier j .

D'après ces tracés, un comportement linéaire entre les déformations mesurées $\varepsilon_{ik}^{\mathcal{BA}^s}$ et les efforts appliqués mesurés T_{z_i} est constaté. C'est le cas pour toutes les jauges k des sections droites s étudiées et tous les cas de chargement i .

Ces tracés permettent de vérifier 3 aspects (Figure 4.9) :

- la linéarité de comportement entre les déformations $\varepsilon_{ik}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de chaque pont de jauge k et chaque effort appliqué T_{z_i} ;
- la présence ou non d'une hystérésis de comportement sur les déformations $\varepsilon_{ik}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de chaque pont de jauge k :
Cette hystérésis est due à la mise en place de la structure sous chargement et doit rester faible.
Sur la figure 4.9, les déformations du pont de jauge k font apparaître une hystérésis pour les cas de chargements 1, 5 et 10.
- la régularité de la réponse en déformation de chaque pont de jauge k :
Ces tracés permettent de repérer les ponts de jauge k qui n'ont pas un comportement en adéquation avec le comportement linéaire attendu. Ils mettent ainsi en évidence des ponts de jauge k qui pourrait être mal collés, endommagés ou présenter un mauvais comportement.
Sur la figure 4.9, les déformations du pont de jauge k font apparaître une irrégularité de comportement pour le cas de chargement 9.

Dans l'ensemble, ce pont de jauge k a un bon comportement excepté pour les cas de chargement 1, 5, 9 et 10. Une attention particulière est alors donnée pour l'utilisation potentielle de ce pont de jauge k dans un méta-modèle ϕ^s .

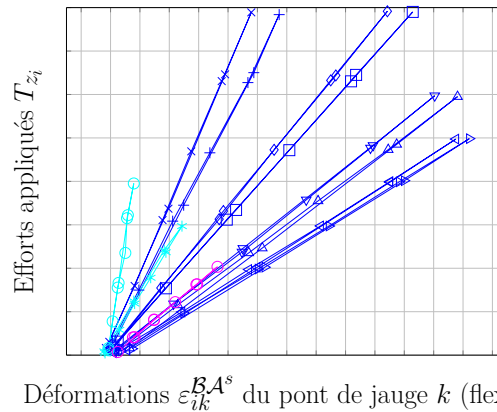


FIGURE 4.9 – Efforts appliqués T_{z_i} en fonction des déformations $\varepsilon_{ik}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ du pont de jauge k

La figure 4.9 permet également de mettre en évidence la dispersion pouvant exister dans le comportement d'un pont de jauge k en fonction de l'effort appliqué T_{z_i} à la structure, quel que soit le type d'effort résultant $F_{rés}^s$ auquel ce pont de jauge k est sensible. Ceci montre qu'un pont de jauge k ne suffit pas à modéliser le comportement de la structure.

4.3.2.4 Conclusions

Le tableau 4.1 résume les dépendances existants entre deux ponts de jauges k_1 et k_2 , en fonction du type d'effort résultant auquel ils sont sensibles, ainsi que les couples à retenir ou à éviter dans la construction d'un méta-modèle ϕ^s dans le cas d'un étalonnage au sol sur l'avion réel, telles que présentées à la sous-sous-section 4.3.2.2.

Type de pont de jauge	Cisaillement	Flexion	Torsion	
Cisaillement	étoilée	étoilée	étoilée	
Flexion		co-linéaire	étoilée	
Torsion			co-linéaire	étoilée

Tableau 4.1 – Type de dépendance en fonction du type de pont de jauge : à retenir (en vert) ou à considérer avec précaution (en orange)

Même si toutes les hypothèses de la résistance des matériaux et de la théorie des poutres ne sont pas parfaitement vérifiées, les tracés précédents aux sous-sous-sections 4.3.2.2 et 4.3.2.3 montrent que le choix d'un méta-modèle ϕ^s polynomiale d'ordre 1 entre les paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et la réponse $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ est justifié.

4.3.3 Résolution du problème inverse

4.3.3.1 Introduction

Le but des essais d'étalonnage au sol est de déterminer les paramètres β^s du méta-modèle ϕ^s pour chaque section droite s étudiée et chaque composante $F_{rés}^s$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$. Le nombre de ponts de jauge p_s disponibles dans chaque section droite s pour construire ces méta-modèles ϕ^s est supérieur au nombre de ponts de jauge nécessaires pour avoir une qualité suffisante sur l'estimation des efforts résultants $F_{rés}^s$. En général, les déformations $\varepsilon_{ik_1}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$, $\varepsilon_{ik_2}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $\varepsilon_{ik_3}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 permettent de décrire correctement le comportement de la structure étudiée. Ces trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 sont ainsi utilisés comme paramètres d'entrée des méta-modèles ϕ^s .

D'une manière générale, quel que soit le nombre de ponts de jauge choisi, les ponts de jauge k à utiliser doivent être judicieusement choisis. Comme présenté précédemment en 4.3.2.2 et 4.3.2.3, il est conseillé de ne pas utiliser des ponts de jauge :

- dont deux d'entre eux présentent une dépendance co-linéaire ;
- ayant un comportement non-linéaire par rapport aux efforts appliqués ;
- présentant un cycle d'hystérésis important ;
- dont le signal est irrégulier, tel que présenté à la sous-sous-section 4.3.2.3.

De plus, il est d'usage de préférer certaines combinaisons de ponts de jauge k en fonction du type d'effort résultant $F_{rés}^s$ à décrire et du type d'effort résultant $F_{rés}^s$ auquel chaque pont de jauge k est sensible. Il existe d'autres critères pour sélectionner les ponts de jauge k , non détaillés ici. Le choix des ponts de jauge k reste toujours de la responsabilité de l'ingénieur, qui fait appel à son expérience et à son sens critique. Le choix des méta-modèles ϕ^s , donc des combinaisons de ponts de jauge k , n'est validé qu'une fois les premiers essais en vol effectués et analysés.

Dans le cadre de cette thèse, les méta-modèles ϕ^s sont construits :

- pour chaque section droite s étudiée ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}^s$;
- pour toutes les combinaisons de ponts de jauge k possibles ;
- pour des nombres fixés de ponts de jauge k ;
- pour chaque formulation du problème :
 1. sans incertitude,
 2. avec incertitudes, par valeur (*pv*) ou majorées (*maj*).

Les méta-modèles ainsi construits $\hat{\phi}^s$ sont ensuite classés de manière croissante en fonction de la dispersion qu'ils génèrent, c'est-à-dire en fonction de la variance estimée $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. Pour chaque section droite s étudiée et chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}^s$, le meilleur méta-modèle $\hat{\phi}^s$, c'est-à-dire la meilleure combinaison de ponts de jauge k pour un nombre fixé de ponts de jauge, selon ce critère peut différer en fonction de la formulation du problème.

Dans la suite, les résultats sont présentés :

- pour une section droite s étudiée uniquement ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}^s$;
- pour chaque formulation du problème, dont les solutions sont définies par les équations (3.36), (3.119) et (3.113).

4.3.3.2 Influence des incertitudes sur le problème

Au préalable, une étude simplifiée sur l'impact des différentes sources d'incertitude est effectuée. Pour chaque formulation, les écart-types estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (Équations respectivement (3.47) dans le cas où les incertitudes ne sont pas prises en compte et (3.133) dans le cas où les incertitudes sont prises en compte), les écart-types estimés $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (Équations (3.136) et (3.137)) et la moyenne des écart-types estimés $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ et $\bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s*}$ (Équations (3.65) et (3.139)) sont comparées dans 4 cas :

1. les incertitudes sur les paramètres d'entrée $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et sur les réponses $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ sont nulles :

(a) méthode prenant en compte une incertitude par valeur :

$$\mathbf{S}_{u_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} u_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0 \quad (4.1)$$

$$S_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0 \quad (4.2)$$

(b) méthode prenant en compte les incertitudes de manière majorée :

$$\mathbf{S}_{u^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} u^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0 \quad (4.3)$$

$$S_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0 \quad (4.4)$$

2. les incertitudes sur les paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ sont nulles mais les incertitudes sur les réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ sont prises en compte :

(a) méthode prenant en compte une incertitude par valeur :

$$\mathbf{S}_{u_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} u_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0 \quad (4.5)$$

$$S_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \neq 0 \quad (4.6)$$

(b) méthode prenant en compte les incertitudes de manière majorée :

$$\mathbf{S}_{u^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} u^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0 \quad (4.7)$$

$$S_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \neq 0 \quad (4.8)$$

3. les incertitudes sur les paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ sont prises en compte mais les incertitudes sur les réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ sont nulles :

(a) une incertitude par valeur :

$$\mathbf{S}_{u_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} u_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \neq 0 \quad (4.9)$$

$$S_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0 \quad (4.10)$$

(b) une incertitude majorée :

$$\mathbf{S}_{u^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} u^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \neq 0 \quad (4.11)$$

$$S_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} = 0 \quad (4.12)$$

4. les incertitudes sur les paramètres d'entrée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et sur les réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ sont prises en compte :

(a) une incertitude par valeur :

$$S_{u_{ij}^{\mathcal{BA}^s}} u_{ij}^{\mathcal{BA}^s} \neq 0 \quad (4.13)$$

$$S_{w_{ij}^{\mathcal{BA}^s}} w_{ij}^{\mathcal{BA}^s} \neq 0 \quad (4.14)$$

(b) une incertitude majorée :

$$S_{u^{\mathcal{BA}^s}} u^{\mathcal{BA}^s} \neq 0 \quad (4.15)$$

$$S_{w^{\mathcal{BA}^s}} w^{\mathcal{BA}^s} \neq 0 \quad (4.16)$$

Les résultats présentés ici concernent :

- un type d'effort résultant $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$: le cisaillement ;
Les résultats pour les autres types d'effort résultant $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ se trouvent en Annexe C.
- le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ selon le critère défini à la sous-section 4.3.3.1 ;
- un nombre de ponts de jauge compris entre 1 et 4.

De cette étude, plusieurs remarques sont faites :

- les résultats sans incertitudes sur les paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ et sur les réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont identiques quel que soit la formulation utilisée (Figures 4.10a et 4.11a) :

Ceci permet de vérifier que, lorsque les incertitudes sont prises nulles, les formulations prenant en compte les incertitudes, par valeur ou de manière majorée, donnent les mêmes résultats que la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes.

- les résultats avec ou sans incertitude sur les réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont en général très proches (Figures 4.10a et 4.10b, 4.11a et 4.11b) :

Avec la remarque précédente, ceci permet d'illustrer le fait que les incertitudes sur les réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s n'a, en général, que peu d'impact sur la construction du meilleur méta-modèle $\hat{\phi}^s$ permettant d'estimer les efforts résultants $F_{rés}^s$.

- les résultats avec ou sans incertitudes sur les paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont différents (Figures 4.10a et 4.10c, 4.11a et 4.11c) :

Ceci permet d'étayer le fait que les incertitudes sur les paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s ont un impact sur la construction du meilleur méta-modèle $\hat{\phi}^s$, contrairement aux incertitudes sur les réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s .

- les résultats avec ou sans incertitudes sur les réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s mais avec incertitudes sur les paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$

de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont en général identiques (Figures 4.10c et 4.10d, 4.11c et 4.11d) :

Ceci permet de confirmer les deux remarques précédentes.

- hormis dans le cas où les incertitudes ne sont pas prises en compte, les résultats pour les différentes formulations utilisées, prenant en compte ou non les incertitudes par valeur ou de manière majorée, sont en général différents (Figures 4.10b, 4.10c et 4.10d, 4.11b, 4.11c et 4.11d) :

Ceci n'est pas toujours visible sur les figures présentées pour le cisaillement mais c'est le cas pour la flexion et la torsion pour cette même section droite s (Annexe C). En général, quelque soit le nombre de ponts de jauge k dans le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$:

$$\hat{\sigma}_{q_{pv}^{\mathcal{BA}^s}} = 0, \quad \text{excepté pour 1 pont de jauge} \quad (4.17)$$

$$\hat{\sigma}_{q_{maj}^{\mathcal{BA}^s}} = 0, \quad \text{excepté pour 1 pont de jauge} \quad (4.18)$$

$$\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{BA}^s}} \leq \hat{\sigma}_{v_{maj}^{\mathcal{BA}^s}} \leq \hat{\sigma}_{v_{pv}^{\mathcal{BA}^s}} \quad (4.19)$$

$$\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}} \leq \bar{\sigma}_{w_{pv}^{\mathcal{BA}^s}} \leq \bar{\sigma}_{w_{maj}^{\mathcal{BA}^s}} \quad (4.20)$$

où :

- pv désigne la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur ;
- maj désigne la formulation prenant en compte les incertitudes de manière majorée.

Même si l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{BA}^s}}$ des erreurs du modèle $v^{\mathcal{BA}^s}$ est plus élevé pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur que pour la formulation les prenant en compte de manière majorée, la moyenne de l'écart-type estimé $\bar{\sigma}_{w^{\mathcal{BA}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ est moins élevé pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur que pour la formulation les prenant en compte de manière majorée. Ceci signifie que la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur génère donc un méta-modèle $\hat{\phi}^s$ qui est un peu plus éloigné des données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s que la formulation prenant en compte les incertitudes de manière majorée mais qui prédit les réponses $F_{rés}^s$ avec une dispersion plus petite.

De plus, l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{BA}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ et la moyenne de l'écart-type estimé $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}}$ des réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes sont moins élevés que pour les formulations prenant en compte les incertitudes. Ceci peut s'expliquer par le fait que toutes les incertitudes du problème ne sont pas prises en compte, en particulier les incertitudes sur les paramètres d'entrée $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s . La mise en place de la méthode n'est donc pas dénuée

d'intérêt car des résultats différents sont obtenus en fonction de la prise en compte ou non des incertitudes.

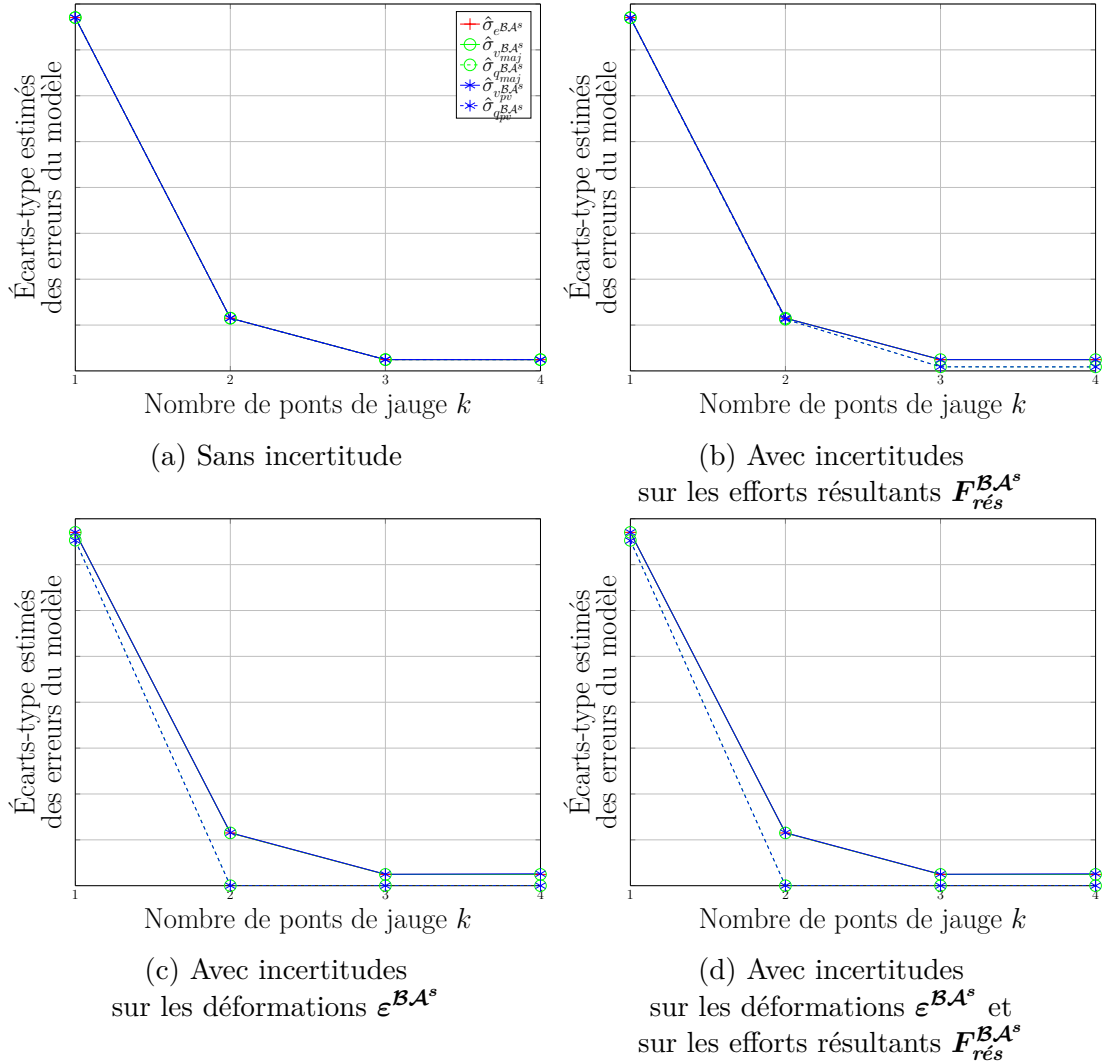


FIGURE 4.10 – Comparaison des écart-type estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) et des écart-type estimés $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation et pour le cisaillement T_z^s

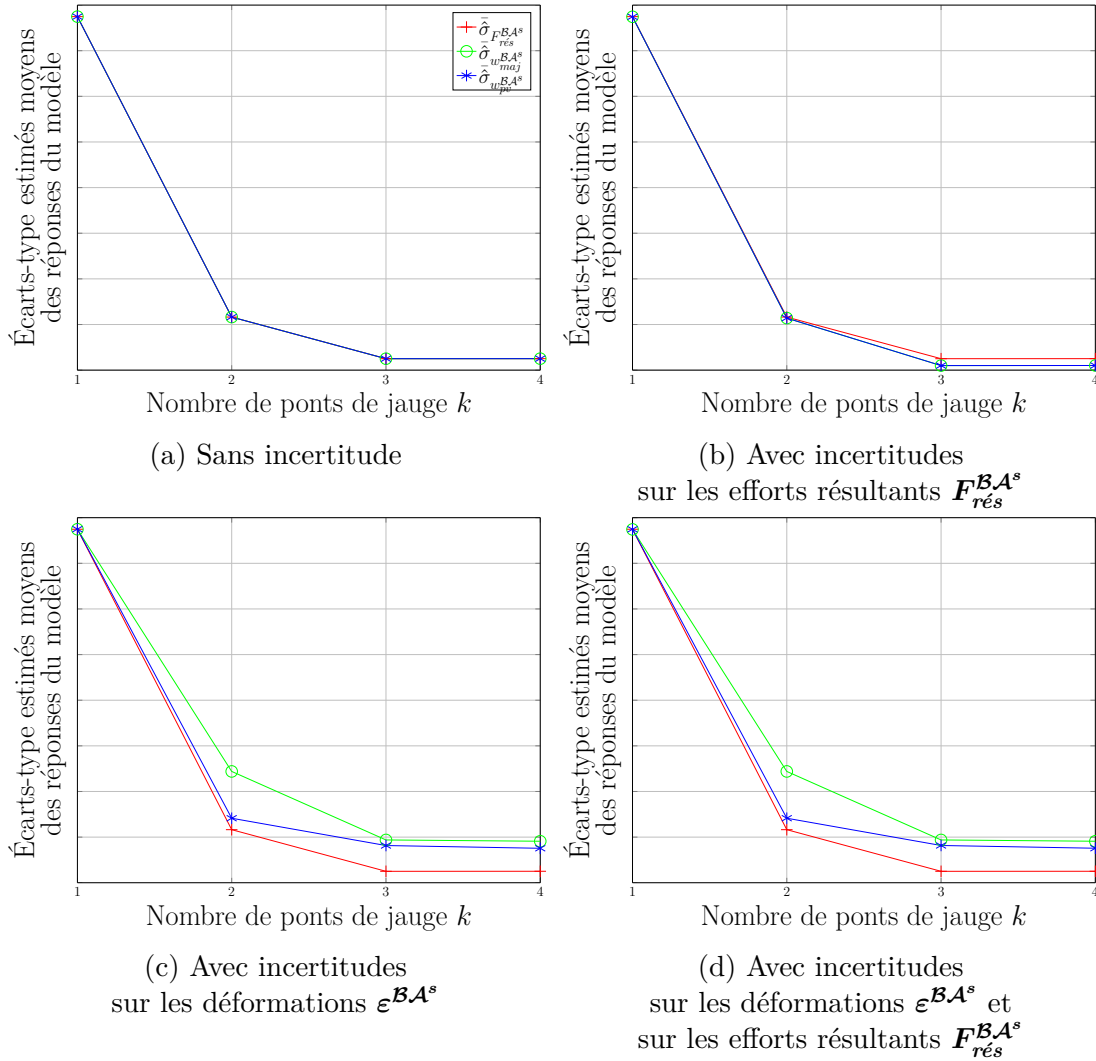


FIGURE 4.11 – Comparaison des écarts-type estimés moyens $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) ou $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^{s*}}$ (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation et pour le cisaillement T_z^s

4.3.3.3 Analyse générale des résultats

Comme précisé en 4.3.3.1, les méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$ sont classés de manière croissante en fonction de la variance estimée $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}^2$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. La figure 4.12 présente l'évolution des écarts-type $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ et $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ainsi que les écarts-type $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ en fonction du classement de ces méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$.

Les résultats sont présentés :

- pour la même section droite s que précédemment, à la sous-sous-section 4.3.3.2 ;
- pour un nombre fixé de ponts de jauge k : 3 ponts de jauge.

Quel que soit le type d'effort résultant $F_{rés}^s$ étudié, les écarts-type $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ et $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont proches pour les formulations ne prenant pas en compte les incertitudes et celle prenant en compte les incertitudes de manière majorée. Pour le cisaillement et la torsion, l'écart-type $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur reste proche des deux autres formulations pour les premiers méta-modèles classés $\hat{\phi}^s$ avant de diverger. Pour la flexion, l'écart-type $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur est plus élevé que pour les deux autres formulations pour tous les méta-modèles classés. Ceci confirme les résultats obtenus à la sous-sous-section 4.3.3.2 et les extrapolent à l'ensemble des méta-modèles $\hat{\phi}^s$ classés pour un nombre fixé de pont de jauge k .

De plus, quel que soit le type d'effort résultant $F_{rés}^s$ étudié, l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ pour les deux formulations prenant en compte les incertitudes peut devenir non nul. Un écart-type estimé $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ non nul correspond à un manque d'ajustement du méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$: les paramètres d'entrée $\varepsilon_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ retenus pour le méta-modèle $\hat{\phi}^s$ considéré ne permettent pas de représenter correctement le comportement à modéliser. Dans la pratique, cela signifie qu'il manque un paramètre d'entrée $\varepsilon_k^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ dans le méta-modèle $\hat{\phi}^s$ pour bien décrire ce comportement. En effet, toutes les combinaisons possibles pour un nombre fixé de ponts de jauge k sont tracées et classés. Ceci n'exclut donc pas la présence de combinaisons qui ne décrivent pas suffisamment le comportement à modéliser, compte tenu des ponts de jauge k utilisés dans cette combinaison. Ce manque d'ajustement n'existe pas pour les premiers méta-modèles $\hat{\phi}^s$ classés, correspondant aux méta-modèles $\hat{\phi}^s$ potentiellement retenus en pratique. Ce manque d'ajustement apparaît plus tard pour la formulation prenant en compte les incertitudes de manière majorée que pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur. Pour la flexion, il n'y a pas de manque d'ajustement pour la formulation prenant en compte les incertitudes de manière majorée.

La figure 4.13 présentent l'évolution des écart-types estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$

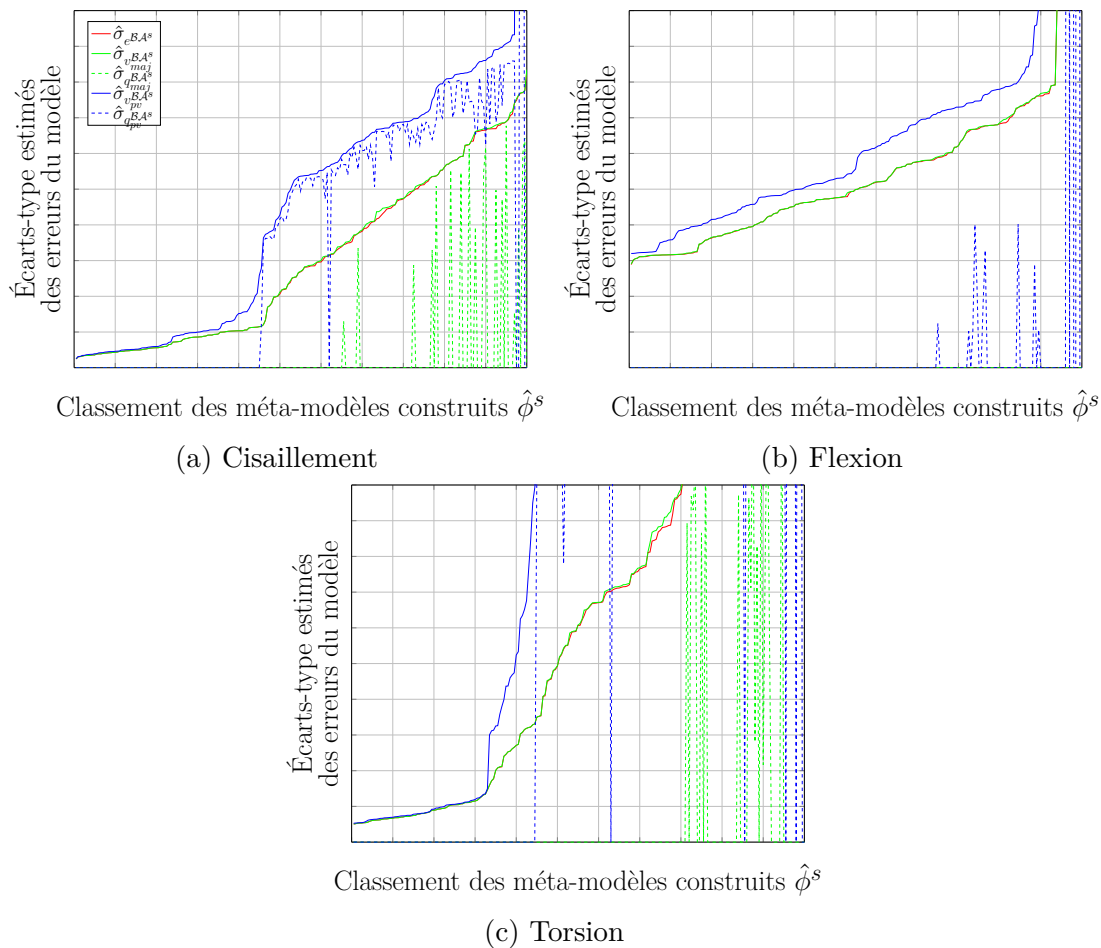


FIGURE 4.12 – Comparaison de l'évolution des écart-type estimés $\hat{\sigma}_{e^{BA^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{BA^s}}$ des erreurs du modèle e^{BA^s} (sans prise en compte des incertitudes) ou v^{BA^s} (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) et des écart-type estimés $\hat{\sigma}_{q^{BA^s}}$ des « erreurs dans l'équation » q^{BA^s} en fonction du classement des méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$

des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et de l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ en fonction du nombre de ponts de jauge k . La figure 4.14 présentent l'évolution de la moyenne des écart-types estimés $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ et $\hat{\sigma}_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s*}$ en fonction du nombre de ponts de jauge k .

Les résultats sont présentés :

- pour la même section droite s que précédemment, à la sous-sous-section 4.3.3.2 ;
- pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$, selon le critère présenté en 4.3.3.1.

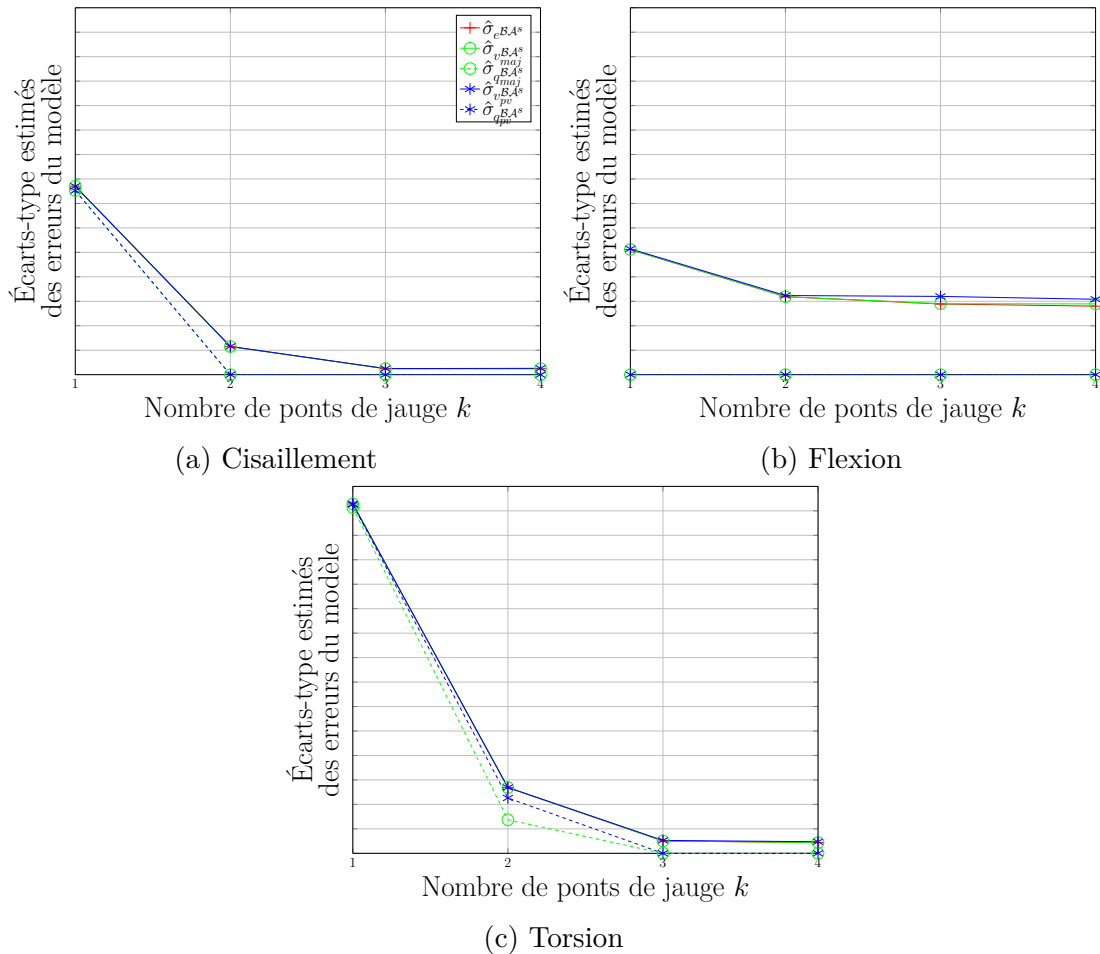


FIGURE 4.13 – Comparaison des écart-types estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) et des écart-type estimés $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation

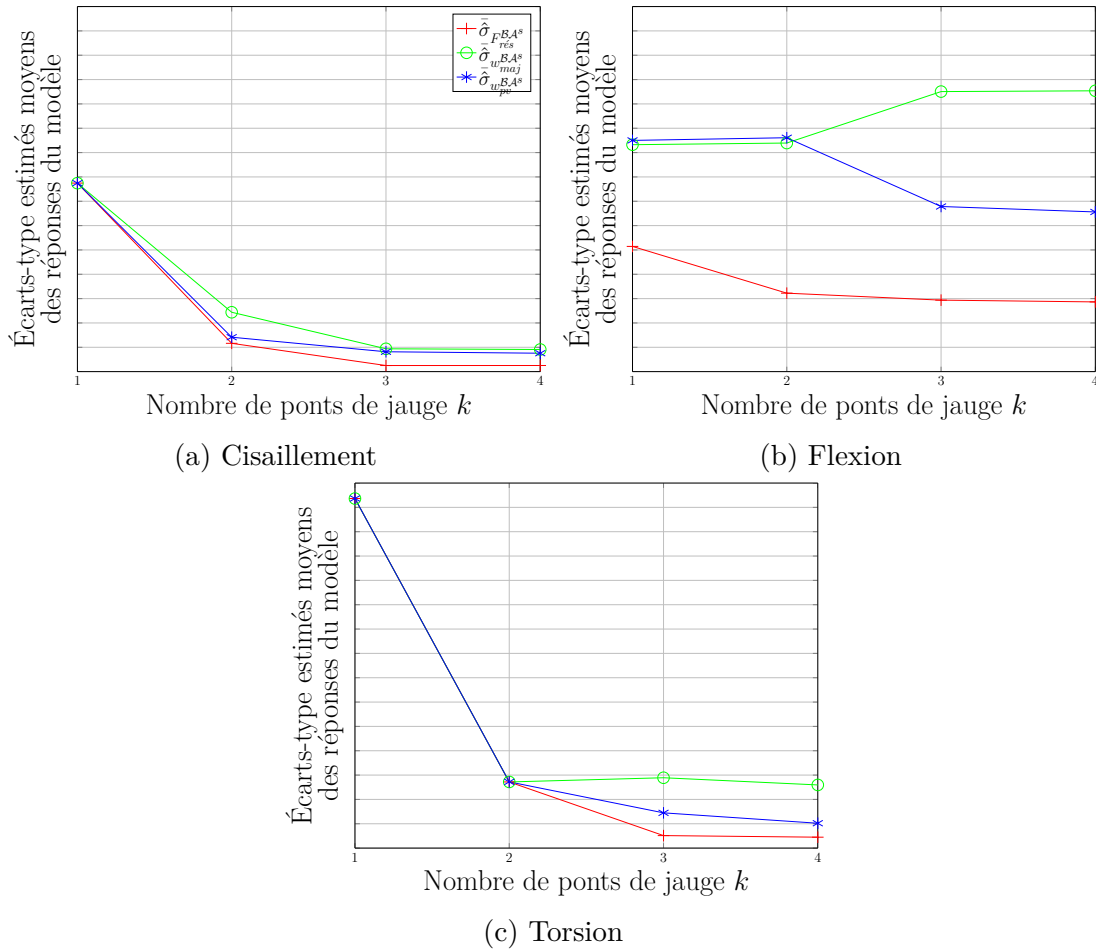


FIGURE 4.14 – Comparaison des écarts-type estimés moyens $\bar{\hat{\sigma}}_{F_{rés}^{B,A^s}}$ ou $\bar{\hat{\sigma}}_{F_{rés}^{B,A^s*}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{B,A^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) ou $F_{rés}^{B,A^s*}$ (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation

D'une manière générale, les écarts-type estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ diminuent en fonction du nombre de ponts de jauge k . L'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ est souvent nul, sauf pour un pont de jauge k_1 ou parfois deux ponts de jauge k_1 et k_2 dans le méta-modèle $\hat{\phi}^s$.

De même, d'une manière générale, la moyenne des écart-types estimés $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ et $\bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s*}$ diminuent en fonction du nombre de ponts de jauge k , excepté pour la flexion pour les formulations prenant en compte les incertitudes et pour la torsion pour la formulation prenant en compte les incertitudes de manière majorée.

Ces résultats laissent penser qu'il existe un nombre optimal de ponts de jauge k pour modéliser le comportement de la structure. En pratique, deux à quatre ponts de jauge k sont utilisés. Ce nombre représente un bon compromis entre le nombre optimum théorique de ponts de jauge k et les contraintes opérationnelles imposant d'utiliser le minimum de ponts de jauge k possible.

4.3.3.4 Analyse spécifique des résultats et aide au choix des méta-modèles

Les résultats présentés ici correspondent aux résultats :

- pour la même section droite s que précédemment, à la sous-sous-section 4.3.3.2 ;
- pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$, selon le critère présenté en 4.3.3.1 ;
- pour un nombre fixé de ponts de jauge k : 3 ponts de jauge.

Les résultats pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour une formulation sont comparés aux résultats obtenus pour la combinaison faisant intervenir les mêmes ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 pour les autres formulations.

La figure 4.15 présente un exemple de résultats obtenus concernant l'ajustement du modèle et la distribution des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. D'une manière générale, quel que soit le type d'effort résultant $F_{rés}^s$ considéré et quelle que soit la formulation utilisée, les meilleurs méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$ prédisent assez finement les efforts résultants mesurés $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (Figure 4.15a). Les erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ semblent suivre une loi normale centrée. L'histogramme des erreurs $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ du modèle semble confirmer cette propriété (Figure 4.15b).

Il convient évidemment d'analyser ces graphes au cas par cas.

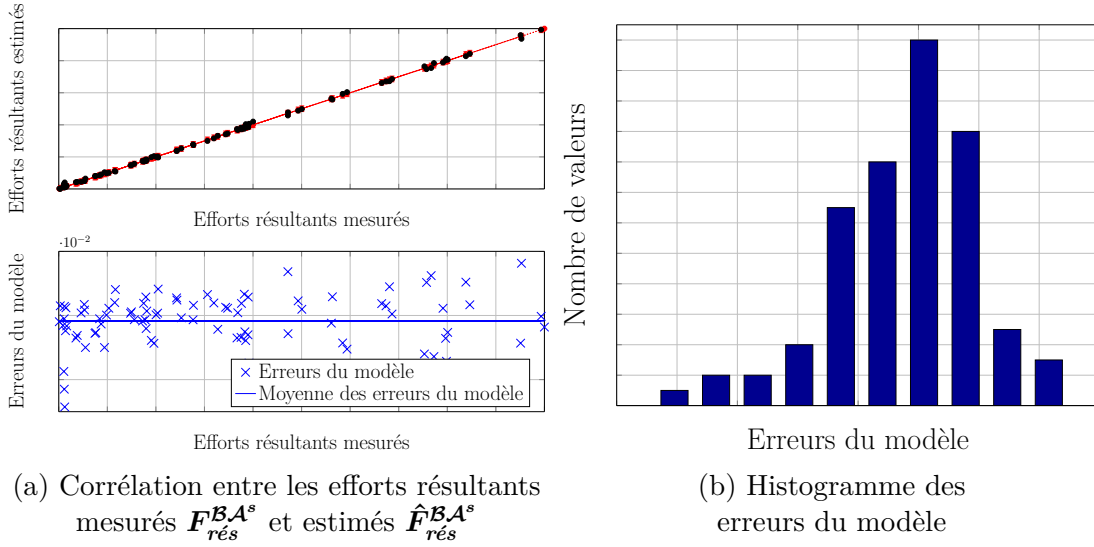


FIGURE 4.15 – Analyse des écarts-type des réponses du modèle

Cisaillement

Les résultats pour le cisaillement sont présentés dans le tableau 4.2.

Quelque soit la formulation utilisée, la meilleure combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 selon le critère précédent est la même. Cette combinaison associe deux ponts de jauge de cisaillement k_1 et k_3 avec un pont de jauge de flexion k_2 . Les paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$ dans chacun des cas sont très proches (moins de 1% de différence). Le conditionnement de la matrice des paramètres d'entrée ϵ^{BA^s} est bas. Toutes ces caractéristiques permettent de confirmer que le système est stable et que cette combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 est judicieuse.

La somme des carrés résiduelles $SC_{Rés}^{BA^s}$ est très faible en comparaison de la somme des carrés totaux $SC_{Tot}^{BA^s}$. Ceci signifie que le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ prédit bien les réponses mesurées $F_{rés}^{BA^s}$, c'est-à-dire qu'il explique bien le comportement de la structure. La variabilité du méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ est donc presque entièrement due au méta-modèle $\hat{\phi}^s$ lui-même et non au bruit des mesures. Ceci signifie que la réponse du modèle $F_{rés}^{BA^s}$ dépend principalement des valeurs des paramètres d'entrée ϵ^{BA^s} et non du bruit de mesure sur ces paramètres d'entrée.

Pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes, l'écart-type estimé moyen $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{BA^s}}$ sur la prédiction des réponses $F_{rés}^{BA^s}$ du modèle construit $\hat{\phi}^s$ est presque entièrement due à l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{e^{BA^s}}$ des erreurs du modèle e^{BA^s} . Ceci est cohérent avec le fait que les incertitudes du problème ne sont portées que par la réponse du modèle $F_{rés}^s$ dans cette formulation. Pour les formulations prenant en compte les incertitudes, l'écart-type estimé moyen $\bar{\sigma}_{w^{BA^s}}$ sur la prédiction des réponses $F_{rés}^{BA^s}$ du modèle construit $\hat{\phi}^s$ n'est que partiellement due à

	Méthode classique	Incertitudes majorées	Incertitudes par valeurs
Classement	1	1	1
Liste des jauges	Cisaillement Flexion Cisaillement		
Conditionnement	6,6	6,6	6,6
$\hat{\beta}_{k_1}$	$\hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$\hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$0,9996 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_2}$	$\hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$\hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$1,0029 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_3}$	$\hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$1,0001 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$1,0009 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$
$SC_{R\acute{e}s}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$	$0,0005 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$	$0,0005 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$	$0,0005 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$
$SC_{Exp}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$	$0,9995 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$	$0,9995 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$	$0,9995 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$
$\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$	$0,98 \cdot \bar{\sigma}_{F_{r\acute{e}s}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$	$0,26 \cdot \bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$	$0,31 \cdot \bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$
$\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$		0	0

Tableau 4.2 – Comparaison des résultats pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation pour le cisaillement T_z^s

l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $v^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$. Elle n'est pas d'ue au manque d'ajustement du modèle, c'est-à-dire à un mauvais choix des paramètres d'entrées $\varepsilon_k^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$, comme le montre la valeur nulle de l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$. Dans ces cas là, l'écart-type estimé moyen $\bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ sur la prédiction des réponses $F_{r\acute{e}s}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ du modèle construit $\hat{\phi}^s$ est principalement dû aux incertitudes sur les paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$.

Flexion

Les résultats pour la flexion sont présentés dans le tableau 4.3.

En fonction de la formulation utilisée, la meilleure combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 selon le critère précédent n'est pas la même.

1^{re} combinaison présentée

Pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes et celle les prenant en compte de manière majorée, la meilleure combinaison associe trois ponts de jauge de flexion k_1 , k_2 et k_3 . Entre ces deux formulations, les paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$ sont proches (moins de 5% de différence), excepté $\hat{\beta}_{k_1}^s$ (près de 12% de différence). Pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur, les paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$ sont très différents des deux formulations précédentes. Cependant, des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$ très différents n'impliquent pas nécessairement que la réponse du modèle $F_{r\acute{e}s}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ soit très différente.

	Méthode classique	Incertitudes majorées	Incertitudes par valeurs
Classement	1	1	167
Liste des jauges	Flexion Flexion Flexion		
Conditionnement	6527,23	6527,23	6527,23
$\hat{\beta}_{k_1}$	$\hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$1,1177 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$-0,8165 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_2}$	$\hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$1,0481 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$1,0459 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_3}$	$\hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$1,0278 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$-0,0012 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$
$SC_{R\acute{e}s}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,0007 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,0007 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,0043 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$
$SC_{Exp}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,9993 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,9993 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,9957 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$
$\hat{\sigma}_{e\mathcal{B}A^s}$ ou $\hat{\sigma}_{v\mathcal{B}A^s}$	$0,9835 \cdot \bar{\sigma}_{F\acute{e}s}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,2522 \cdot \bar{\sigma}_{w\mathcal{B}A^s}$	$1,0104 \cdot \bar{\sigma}_{w\mathcal{B}A^s}$
$\hat{\sigma}_{q\mathcal{B}A^s}$		0	$0,1408 \cdot \bar{\sigma}_w$
Classement	19	18	1
Liste des jauges			Flexion Torsion Flexion
Conditionnement	2454,25	2454,25	2454,25
$\hat{\beta}_{k_1}$	$1,0850 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$1,0873 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$\hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_2}$	$1,0117 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$1,0160 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$\hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_3}$	$0,9173 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$0,9153 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$\hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$
$SC_{R\acute{e}s}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,0008 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,0008 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,0008 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$
$SC_{Exp}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,9992 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,9992 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,9992 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}A^s}$
$\hat{\sigma}_{e\mathcal{B}A^s}$ ou $\hat{\sigma}_{v\mathcal{B}A^s}$	$0,9835 \cdot \bar{\sigma}_{F\acute{e}s}^{\mathcal{B}A^s}$	$0,4756 \cdot \bar{\sigma}_{w\mathcal{B}A^s}$	$0,4716 \cdot \bar{\sigma}_{w\mathcal{B}A^s}$
$\hat{\sigma}_{q\mathcal{B}A^s}$		0	0

Tableau 4.3 – Comparaison des résultats pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation pour la flexion $M_{f_y}^s$

En revanche, ceci est typique d'un problème mal conditionné. Le conditionnement de la matrice des paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ est d'ailleurs très élevé. Ceci s'explique par le type de ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 utilisés présentant un comportement co-linéaire deux à deux donc à éviter (Tableau 4.1). Dans la pratique, cette combinaison de trois ponts de jauge n'est effectivement pas utilisée, même si il s'agit de la meilleure combinaison selon le critère défini en 4.3.3.1 pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes, car les résultats en vol sont éloignés des résultats moyens obtenus.

Les autres résultats sont similaires aux résultats décrits ci-avant pour le cisaillement, exceptés ceux pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur. Pour cette formulation, la combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 retenue auparavant pour les deux autres formulations est très mal classée (167^e). Ceci indique que le modèle $\hat{\phi}^s$ construit par la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur pour cette combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 n'est pas judicieux. Ceci est confirmé par le fait que l'écart-type estimé moyen $\bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ sur la prédiction des réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ du modèle construit $\hat{\phi}^s$ est inférieure à l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ sur les erreurs du modèle $v^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$. Il n'est alors pas possible d'estimer correctement l'écart-type $\hat{\sigma}_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ des réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ du modèle construit $\hat{\phi}^s$. De plus, il existe un manque d'ajustement du modèle, c'est-à-dire à un mauvais choix des paramètres d'entrées $\varepsilon_k^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$, comme le montre la valeur non nulle de l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ sur les « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$. Ceci indique que les paramètres d'entrée $\varepsilon_k^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ sélectionnés traduisent mal le comportement à modéliser. Dans ce cas là, tous les résultats concordent pour indiquer que cette combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 n'est pas judicieuse pour estimer les réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ et l'écart-type $\sigma_{w^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ de celles-ci à cause du mauvais conditionnement du problème.

2^e combinaison présentée

Pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur, la meilleure combinaison associe deux ponts de jauge de flexion k_1 et k_3 avec un pont de jauge de torsion k_2 . Le conditionnement de la matrice des paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ reste très élevé. De même que précédemment, ceci s'explique par le type de ponts de jauge k_1 et k_3 utilisés présentant un comportement co-linéaire deux à deux donc à éviter (Tableau 4.1). Il est possible qu'une combinaison ne contenant que deux ponts de jauge k_1 et k_2 soit plus adaptée dans le cas de la flexion.

Les autres résultats sont similaires aux résultats décrits ci-avant pour le cisaillement. De plus, pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeur, les résultats sont améliorés par rapport à la combinaison précédente confirmant que cette première combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 n'est pas adaptée dans ce cas.

Torsion

Les résultats pour la torsion sont présentés dans le tableau 4.4.

	Méthode classique	Incertitudes majorées	Incertitudes par valeurs
Classement	1	1	2
Liste des jauges	Torsion Flexion Cisaillement		
Conditionnement	2,71	2,71	2,71
$\hat{\beta}_{k_1}$	$\hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$1,0003 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$1,0058 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_2}$	$\hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$1,0003 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$1,0166 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_3}$	$\hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$1,0002 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$1,0082 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$
$SC_{Rés}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,0007 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,0007 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,0007 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$
$SC_{Exp}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,9993 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,9993 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,9993 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$
$\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$	$0,9836 \cdot \bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$	$0,1748 \cdot \bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$	$0,3181 \cdot \bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$
$\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$		0	0
Classement	2	2	1
Liste des jauges			Torsion Flexion Cisaillement
Conditionnement	5,55	5,55	5,55
$\hat{\beta}_{k_1}$	$0,9952 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$0,9955 \cdot \hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$	$\hat{\beta}_{k_1 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_2}$	$0,9918 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$0,9920 \cdot \hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$	$\hat{\beta}_{k_2 \text{ réf}}$
$\hat{\beta}_{k_3}$	$0,9941 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$0,9943 \cdot \hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$	$\hat{\beta}_{k_3 \text{ réf}}$
$SC_{Rés}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,0007 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,0007 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,0007 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$
$SC_{Exp}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,9993 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,9993 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$	$0,9993 \cdot SC_{Tot}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}$
$\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$	$0,9836 \cdot \bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$	$0,1833 \cdot \bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$	$0,3643 \cdot \bar{\sigma}_{w^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$
$\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}, \mathcal{A}^s}}$		0	0

Tableau 4.4 – Comparaison des résultats pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation pour la torsion M_t^s

En fonction de la formulation utilisée, la meilleure combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 selon le critère précédent n'est pas la même suivant la formulation utilisée. Cependant, quelque soit la formulation utilisée, la meilleure combinaison associe un pont de jauge de torsion k_1 , un pont de jauge de flexion k_2 et un pont de jauge de cisaillement k_3 . D'une manière générale, les paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s$ dans chacun des cas sont très proches (en général, 1% ou 2% de différence). Le

conditionnement de la matrice des paramètres d'entrée $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ est bas pour les deux combinaisons présentées. Toutes ces caractéristiques permettent de confirmer que le système est stable et que ces combinaisons de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 sont judicieuse.

Les autres résultats sont similaires aux résultats décrits ci-avant pour le cisaillement. De plus, les résultats pour ces deux combinaisons de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 sont très proches car ces deux combinaisons sont très proches dans le classement des méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$ (en 1^{re} ou 2^e positions).

4.3.3.5 Validation croisée

Pour valider les résultats précédents, les coefficients de détermination classique $R^{\mathcal{BA}^s}$ et ajusté $R_{aj}^{\mathcal{BA}^s}$ (Équations (3.59) et (3.60)) sont utilisés. Connaissant les réponses estimées $\hat{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ par le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ et les écarts-type estimés $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}}$ et $\hat{\sigma}_{w^{\mathcal{BA}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ et $F_{rés}^{\mathcal{BA}^{s*}}$ (respectivement sans et avec prise en compte des incertitudes), le taux de réponses observées TR^s dans les intervalles suivants pour la section droite s étudiée est aussi calculé :

1. méthode ne prenant pas en compte les incertitudes, définie à la section 3.3 :
Pour chaque palier j de chaque cas de chargement i :

- si $F_{résij}^{\mathcal{BA}^s} \in \left[\hat{F}_{résij}^{\mathcal{BA}^s} \pm \hat{\sigma}_{F_{résij}^{\mathcal{BA}^s}} \right]$:

$$TR_{ij}^s = 1 \quad (4.21)$$

- si $F_{résij}^{\mathcal{BA}^s} \notin \left[\hat{F}_{résij}^{\mathcal{BA}^s} \pm \hat{\sigma}_{F_{résij}^{\mathcal{BA}^s}} \right]$:

$$TR_{ij}^s = 0 \quad (4.22)$$

où l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{F_{résij}^{\mathcal{BA}^s}}$ associé à chaque réponse $F_{résij}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s est défini selon l'équation 3.65.

Le taux de réponses observées TR^s dans les intervalles $\left[\hat{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s} \pm \hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}} \right]$

$$TR^s = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} TR_{ij}^s \quad (4.23)$$

2. méthode prenant en compte les incertitudes, définie à la section 3.4 :

Pour chaque palier j de chaque cas de chargement i :

- si $F_{résij}^{\mathcal{BA}^s} \in \left[\hat{F}_{résij}^{\mathcal{BA}^s} \pm \hat{\sigma}_{w_{ij}^{\mathcal{BA}^s}} \right]$:

$$TR_{ij}^s = 1 \quad (4.24)$$

- si $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \notin \left[\hat{F}_{rés_{ij}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \pm \hat{\sigma}_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \right]$:

$$TR_{ij}^s = 0 \quad (4.25)$$

où l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{w_{ij}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ associé à chaque réponse $F_{rés_{ij}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ est défini selon l'équation 3.139.

Le taux de réponses observées TR^s dans les intervalles $\left[\hat{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \pm \hat{\sigma}_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \right]$

$$TR^s = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{l_i} TR_{ij}^s \quad (4.26)$$

Une validation croisée des résultats est également effectuée. Les caractéristiques équivalentes aux précédentes sont également calculées dans le cadre de cette validation croisée :

- le coefficient de détermination en validation croisée $Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$:

$$Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2} = 1 - \sum_{VC=1}^N \frac{SC_{Rés,VC}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}{SC_{Tot}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}} \quad (4.27)$$

où $SC_{Rés,VC}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ est la somme des carrés résiduels pour chaque couple VC de bases d'apprentissage réduites et bases de validation.

- la moyenne \overline{TR}_{VC}^s des taux de réponses observées TR^s (Équations (4.23) et (4.26)) dans les intervalles définis précédemment pour chaque cas (respectivement sans et avec prise en compte des incertitudes) et pour chaque couple VC de bases d'apprentissage réduites et bases de validation, notés ainsi TR_{VC}^s ici :

$$\overline{TR}_{VC}^s = \sum_{VC=1}^N \frac{TR_{VC}^s}{N} \quad (4.28)$$

Les résultats présentés ici correspondent aux mêmes résultats que ceux présentés à la sous-sous-section 4.3.3.4, c'est-à-dire :

- pour la même section droite s que précédemment, à la sous-sous-section 4.3.3.2 ;
- pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$, selon le critère présenté en 4.3.3.1 ;
- pour un nombre fixé de ponts de jauge k : 3 ponts de jauge.

Les résultats pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour une formulation sont comparés aux résultats obtenus pour la combinaison faisant intervenir les mêmes ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 pour les autres formulations.

Cisaillement

Les résultats pour le cisaillement sont présentés dans le tableau 4.5.

Les coefficients de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ et $R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ sont très élevés et égaux. De même, le coefficient de détermination équivalent en validation croisée $Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ est très élevé et en général égal aux coefficients de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ et $R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$. À défaut de confirmer la pertinence de la combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 choisie, ces valeurs montrent le bon ajustement des données de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ par rapport au méta-modèle $\hat{\phi}^s$ construit.

De plus, la majorité des réponses mesurées $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ sont dans l'intervalle correspondant comme le confirment les valeurs des taux de réponses observées TR^s . En moyenne, des taux de réponses observées \overline{TR}_{VC}^s très proches des taux de réponses observées TR^s sont obtenus en validation croisée. Cependant, ces taux de réponses observées TR^s et moyens \overline{TR}_{VC}^s en validation croisée sont différents entre la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes et celles les prenant en compte. Pour une distribution des prédictions des réponses $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ selon une loi normale, un taux de l'ordre de 67% est attendu, ce qui est bien le cas pour la méthode classique. En revanche, pour les méthodes prenant en compte les incertitudes, ces taux de réponses observées TR^s et moyens \overline{TR}_{VC}^s en validation croisée sont plus élevés. Tout d'abord, il est normal que ces valeurs soient plus élevées car ces méthodes prennent en compte une incertitude supplémentaire sur les déformations, non considérée dans la méthode classique, réduisant ainsi le caractère prédictif du méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$. Cependant, ce taux étant de 100% pour les deux méthodes prenant en compte les incertitudes, il est possible que les incertitudes de mesure utilisées soient conservatives par rapport à la réalité.

	Méthode classique	Incertitudes majorées	Incertitudes par valeurs
Classement	1	1	1
$R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9995	0,9995	0,9995
$R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9995	0,9995	0,9995
TR^s	72,73%	100%	100%
$Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9995	0,9995	0,9994
\overline{TR}_{VC}^s	71,59%	100%	100%

Tableau 4.5 – Comparaison des résultats en validation et validation croisée (VC) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation pour le cisaillement T_z^s

Flexion

Les résultats pour la flexion sont présentés dans le tableau 4.6.

Les résultats en flexion sont assez proches des résultats décrits ci-avant pour le cisaillement. Les coefficients de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ et $R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ sont très élevés,

en général égaux pour une même formulation et globalement proches pour les différentes formulations. De même, le coefficient de détermination équivalent en validation croisée $Q^{\mathcal{BA}^s}$ est très élevé et en général égal aux coefficients de détermination $R^{\mathcal{BA}^s}$ et $R_{aj}^{\mathcal{BA}^s}$. À défaut de confirmer la pertinence de la combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 choisie, ces valeurs montrent le bon ajustement des données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s par rapport au méta-modèle $\hat{\phi}^s$ construit. Cependant, pour la formulation prenant en compte les incertitudes par valeurs, les résultats sont améliorés pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ par rapport à la combinaison correspondant au meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour les deux autres formulations. Inversement, pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes et celle les prenant en compte de manière majorée, les résultats sont améliorés pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour ces deux formulations par rapport à la combinaison correspondant au meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour l'autre formulation.

De plus, la majorité des réponses mesurées $\mathbf{F}_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont dans l'intervalle correspondant comme le confirment les valeurs des taux de réponses observées TR^s . En moyenne, des taux de réponses observées \overline{TR}_{VC}^s très proches des taux de réponses observées TR^s sont obtenus en validation croisée. Cependant, ces taux de réponses observées TR^s et moyens \overline{TR}_{VC}^s en validation croisée peuvent être assez différents en fonction de la formulation considérée. Les résultats en validation et en validation croisée peuvent donc être très élevés, dépassant ceux attendus.

Même si le problème est « mal posé » en flexion et que la résolution du problème inverse peut conduire à des paramètres du modèle β^s très différents, les prédictions du problème direct restent bonnes.

	Méthode classique	Incertitudes majorées	Incertitudes par valeurs
Classement	1	1	167
$R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9993	0,9993	0,9957
$R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9993	0,9993	0,9956
TR^s	77,27%	100%	68,18%
$Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9993	0,9993	0,9957
\overline{TR}_{VC}^s	77,27%	100%	67,05%
Classement	19	18	1
$R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9992	0,9992	0,9992
$R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9992	0,9992	0,9991
TR^s	78,41%	93,18%	94,32%
$Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$	0,9991	0,9991	0,992
\overline{TR}_{VC}^s	77,27%	93,18%	94,32%

Tableau 4.6 – Comparaison des résultats en validation et validation croisée (VC) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation pour la flexion M_{fy}^s

Torsion

Les résultats pour la torsion sont présentés dans le tableau 4.7.

Les mêmes remarques que précédemment pour le cisaillement et la flexion peuvent être faites concernant la torsion. Les coefficients de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ et $R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ sont très élevés et égaux. De même, le coefficient de détermination équivalent en validation croisée $Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ est très élevé et en général égal aux coefficients de détermination $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$ et $R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s2}$. Ces valeurs montrent le bon ajustement des données de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ par rapport au méta-modèle $\hat{\phi}^s$ construit.

De plus, la majorité des réponses mesurées $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ sont dans l'intervalle correspondant comme le confirment les valeurs des taux de réponses observées TR^s . En moyenne, des taux de réponses observées \overline{TR}_{VC}^s très proches des taux de réponses observées TR^s sont obtenus en validation croisée. Cependant, ces taux de réponses observées TR^s et moyens \overline{TR}_{VC}^s en validation croisée sont différents entre la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes et celles les prenant en compte. Les résultats en validation et en validation croisée sont donc très élevés, dépassant ceux attendus. Comme précédemment pour le cisaillement, les intervalles calculés à partir des écart-types estimés $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ et $\hat{\sigma}_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s*}$ semblent trop conservatifs.

À noter, les résultats pour ces deux combinaisons de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 sont très proches car ces deux combinaisons sont très proches dans le

classement des méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$ (en 1^{re} ou 2^e positions).

	Méthode classique	Incertitudes majorées	Incertitudes par valeurs
Classement	1	1	2
$R^{\mathcal{B},A^s,2}$	0,9993	0,9993	0,9993
$R_{aj}^{\mathcal{B},A^s,2}$	0,9993	0,9993	0,9993
TR^s	71,59%	100%	100%
$Q^{\mathcal{B},A^s,2}$	0,9993	0,9993	0,9992
\overline{TR}_{VC}^s	68,18%	100%	100%
Classement	2	2	1
$R^{\mathcal{B},A^s,2}$	0,9993	0,9993	0,9993
$R_{aj}^{\mathcal{B},A^s,2}$	0,9993	0,9993	0,9993
TR^s	65,91%	100%	100%
$Q^{\mathcal{B},A^s,2}$	0,9993	0,9993	0,9992
\overline{TR}_{VC}^s	64,77%	100%	100%

Tableau 4.7 – Comparaison des résultats en validation et validation croisée (VC) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation pour la torsion M_t^s

4.4 Étude éléments finis : détermination de l'incertitude relative à l'extrapolation des charges en vol

4.4.1 Introduction

L'une des sources d'incertitude existant dans le problème de détermination des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$ est l'utilisation du méta-modèle ϕ^s , défini pour la section droite s à partir d'essais réalisés au sol, pour estimer les effort résultants $F_{rés}^{vol^s}$ dans les conditions des essais en vol. En effet, les essais d'étalonnage au sol sont réalisés dans des conditions optimales :

- la voilure est chargée de manière ponctuelle ;
- l'application des chargements est quasi-statique ;
- les valeurs des efforts appliqués à la structure sont faibles ;
- la température varie peu ;
- la voilure est en configuration lisse : les bords et les volets ne sont pas braqués.

Or, ce n'est plus le cas en vol :

- la voilure est chargée de manière répartie ;
- les valeurs des efforts appliquées à la structure sont plus élevées qu’au sol ;
- la structure travaille en thermo-élasticité sous contraintes ;
- la voilure peut être dans une des 8 configurations becs/volets possibles.

En revanche, l’application des efforts sur la structure est toujours considérée quasi-statique pour les manœuvres étudiées car elles sont de courtes durées. Les manœuvres dynamiques ne sont donc pas étudiées.

Pour chaque section droite s étudiée, les méta-modèles ϕ^s pour chaque composante $F_{rés}^s$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$ ne peuvent être construits qu’à la suite d’essais au sol dont toutes les caractéristiques sont maîtrisées. L’utilisation de ces méta-modèles $\hat{\phi}^s$ ainsi construits dans le cadre d’un vol peut donc introduire une erreur dans l’estimation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$. Cette erreur est définie dans la suite comme l’incertitude relative à l’extrapolation des efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$.

Il n’existe pas de référence en vol à laquelle les efforts résultants estimés $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ par le méta-modèle $\hat{\phi}^s$ peuvent être comparés. Pour estimer cette incertitude, une étude à l’aide du modèle éléments finis présenté à la sous-section 4.2.2.3 est donc réalisée et présentée dans la suite.

4.4.2 Sources d’incertitude

Dans le cas de l’étude éléments finis, les données issues du modèle éléments finis sont considérées exactes. En effet, il n’y a pas de bruit puisqu’il ne s’agit pas de mesures. Même si le calcul éléments finis peut introduire des incertitudes sur les valeurs calculées, celles-ci sont considérées comme négligeables. De plus, l’étude virtuelle pour les essais au sol et en vol étant réalisée avec le même modèle éléments finis, il est supposé que ces erreurs numériques sont les mêmes dans les deux cas. Il est donc cohérent de considérer que les données sont exactes, tant que l’étude reste virtuelle. Les résultats du modèle éléments finis, pour certaines sections droites s étudiées, peuvent ainsi être utilisés comme référence pour cette étude virtuelle.

Les sources d’incertitude restant dans cette étude sur le modèle éléments finis sont le manque d’ajustement du méta-modèle $\hat{\phi}^s$ construit, les erreurs de calcul générées par la résolution mathématique et l’incertitude relative à l’extrapolation des charges en vol. Les deux premières sources d’incertitude sont quantifiables à l’issue de l’étalonnage au sol virtuel. La dernière source d’incertitude est celle qui doit être quantifiée dans le cadre de cette étude sur le modèle éléments finis.

4.4.3 Problème inverse : Calibration au sol virtuelle

Tout comme dans la réalité, il est nécessaire de réaliser un étalonnage au sol sur le modèle éléments finis avant d'appliquer des chargements représentatifs du vol. Pour chaque section droite s étudiée et chaque type d'effort résultant $F_{rés}^s$, cet étalonnage, identique à celui réalisé sur l'avion réel, permet de déterminer les paramètres du modèle β^s relatifs au modèle éléments finis utilisé.

4.4.3.1 Analyse des données de la base d'apprentissage

Introduction

Comme pour les essais réels d'étalonnage au sol, les données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont analysées.

Dans le cas de l'étalonnage au sol virtuel, il n'y a qu'un seul palier de chargement j . En effet, le modèle éléments finis étant linéaire, les valeurs des déformations $\varepsilon_{ik}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont parfaitement proportionnelles aux valeurs des effort appliqués T_{z_i} donc aux valeurs des efforts résultants $F_{rés_i}^{\mathcal{BA}^s}$. Le modèle est donc arbitrairement chargé pour les valeurs maximales des efforts T_{z_i} autorisés pour l'étalonnage au sol.

Dépendances entre les paramètres d'entrée

Comme précédemment à la sous-sous-section 4.3.2.2, pour chaque cas de chargement i , les valeurs d'un pont de jauge k_1 sont tracées en fonction des valeurs d'un autre pont de jauge k_2 pour les différents paliers de chargement j .

Deux types de comportement entre ces deux ponts de jauge k_1 et k_2 sont observés :

1. co-linéaire (Figure 4.16) :

Ce comportement est également observé dans le cas de l'étalonnage au sol réel. Ce type de comportement semble être plus ou moins bruitée même si les données sont considérées exactes. Ceci laisse penser qu'une autre dépendance existe en fonction du cas de chargement i : position, type de structure sur lequel le cas de chargement i est appliqué,...

Comme pour l'étalonnage au sol réel, deux types de dépendance linéaire existe :

- (a) co-monotone (Figure 4.16a),
- (b) contra-monotone (Figure 4.16b) ;

En plus d'être observé entre deux ponts de jauge de flexion et parfois entre deux ponts de jauge de torsion comme dans l'étalonnage au sol réel, ce comportement apparaît également entre un pont de jauge de cisaillement et un pont de jauge de torsion.

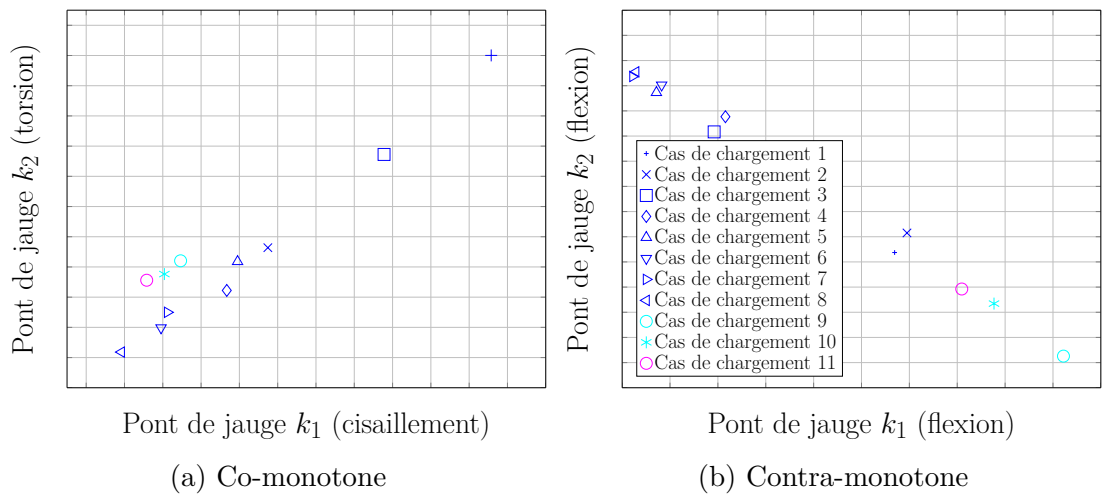


FIGURE 4.16 – Dépendance linéaire entre deux ponts de jauge k_1 et k_2

2. non linéaire (Figure 4.17) :

Les signaux des deux ponts de jauge k_1 et k_2 pour chaque cas de chargement i sont linéairement liés, par la physique, mais *a priori* indépendants, mathématiquement, les uns des autres. Cependant, des corrélations peuvent parfois apparaître entre la position des cas de chargement i et les valeurs des ponts de jauge k_1 et k_2 (Figures 4.17a et 4.17b).

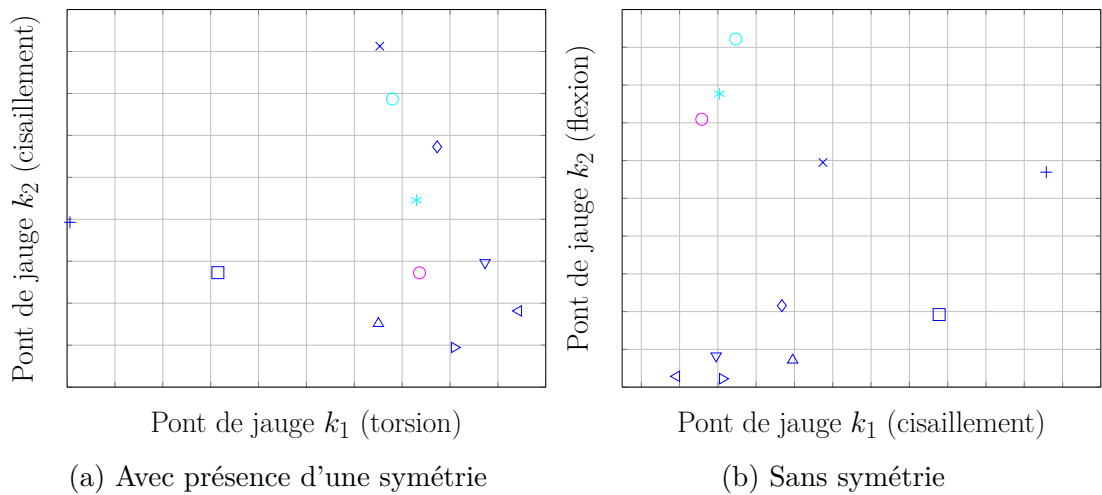


FIGURE 4.17 – Dépendance non linéaire entre deux ponts de jauge k_1 et k_2

Ce type de comportement est observé pour toutes combinaisons de deux ponts de jauge, à l'exception des combinaisons citées précédemment.

Linéarité de comportement entre les paramètres d'entrée et la réponse

Comme précisé auparavant, le modèle est parfaitement linéaire. Les déformations ε_{ik}^s de chaque pont de jauge k sont donc parfaitement proportionnelles aux valeurs de chaque cas de chargement i . Ceci justifie bien le fait d'utiliser un méta-modèle ϕ^s polynomiale d'ordre 1 entre les paramètres d'entrée, c'est-à-dire les déformations $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$, et la réponse, c'est-à-dire l'une des composantes $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}}$.

Conclusion sur l'analyse des données

Le tableau 4.8 résume les dépendances existants entre deux ponts de jauges k_1 et k_2 , en fonction du type d'effort résultant auquel ils sont sensibles, ainsi que les couples à retenir ou à éviter dans la construction d'un méta-modèle ϕ^s dans le cas d'un étalonnage au sol virtuel, telles que présentées aux paragraphes précédents.

Type de pont de jauge	Cisaillement	Flexion	Torsion	
Cisaillement	non linéaire	non linéaire	co-linéaire	non linéaire
Flexion		co-linéaire	non linéaire	
Torsion			co-linéaire	non linéaire

Tableau 4.8 – Type de dépendance en fonction du type de pont de jauge :
à retenir (en vert) ou à considérer avec précaution (en orange)

De même que pour les essais d'étalonnage au sol réels, le choix d'un méta-modèle ϕ^s polynomiale d'ordre 1 entre les paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{BA}^s}$ et la réponse $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ est justifié.

4.4.3.2 Validation de l'outil d'extraction des efforts résultants

Comme précisé à la sous-sous-section 4.2.2.3, l'utilisation du modèle éléments finis permet d'accéder au tenseur des efforts internes en tout point de la structure. Il permet donc de connaître les efforts résultants $F_{rés}^s$, correspondant à l'opposé de ces efforts internes (Équation (B.1) dans l'Annexe B.1).

Pour extraire ces efforts internes, un outil appelé « Freebody » est disponible dans l'interface de pré- et post-traitement du modèle. Pour utiliser cet outil, il est nécessaire de définir les sections de coupe où le tenseur des efforts internes doit être calculés dans la phase de pré-traitement du modèle éléments finis, ainsi que le point et le repère de calcul de ce tenseur. En tout, quatre éléments doivent donc être définis pour extraire le tenseur des efforts internes dans certaines sections de coupe (Figure 4.18) :

1. les nœuds de la section de coupe :

L'ensemble de ces nœuds doit former un contour fermé définissant la section

de coupe.

2. les éléments adjacents à la section de coupe :
Ces éléments sont les éléments limites de la partie où les efforts internes sont intégrés. Ces éléments possèdent donc au moins un nœud mais pas plus de trois nœuds appartenant à l'ensemble des nœuds précédents définissant la section de coupe.
3. le point de calcul du torseur des efforts internes :
Ce point est un nœud mais n'est pas nécessairement un nœud d'un des éléments du modèle. Un nœud fictif, non rattaché au modèle, peut donc être utilisé.
4. le repère de calcul des efforts internes :
Ce repère peut être choisi parmi les repères déjà existants dans le modèle ou peut être défini pour l'utilisation de cet outil.

Les sections de coupe doivent contenir tous les chemins de flux des efforts internes, comprenant notamment le caisson central, certaines attaches et surfaces mobiles.

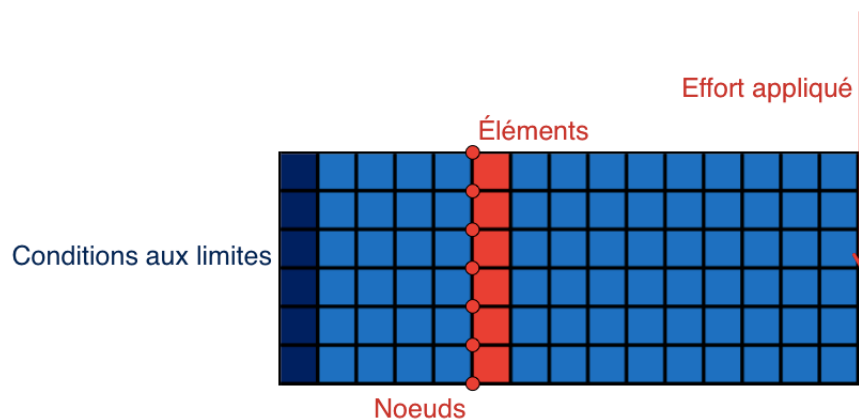


FIGURE 4.18 – Définition des sections de coupe pour l'extraction du torseur des efforts internes

Pour récupérer les valeurs des torseurs des efforts internes dans les sections de coupe définies, il est nécessaire d'ajouter une carte spécifique (GPFORCE) pour le calcul du modèle.

Pour les essais d'étalonnage au sol virtuel, les valeurs des efforts résultants obtenus à partir de cet outil sont en général très proches des valeurs des efforts résultants calculés à partir des efforts appliqués et des bras de levier. Quel que soit le cas de chargement i considéré, pour les trois sections de coupe extérieures, une différence de moins de 0,04% est constaté entre ces deux estimations des efforts résultants. Compte tenu de certains écarts constatés pour les deux sections de

coupe internes, des interrogations ont été soulevées quant à la définition exacte de ces sections de coupe.

Pour les trois sections de coupe extérieures de la voilure, cet outil est donc validé et peut être utilisé dans le cadre des essais en vol pour estimer les efforts résultants en vol $F_{rés}^{vol^s}$.

4.4.3.3 Résolution du problème inverse

Les valeurs des paramètres d'entrée $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ et de la réponse $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s fournies par le modèle éléments finis étant supposées exactes, le problème inverse est résolu de manière classique uniquement, c'est-à-dire sans prise en compte des incertitudes.

Dans le cadre de cette thèse, les méta-modèles ϕ^s sont construits :

- pour chaque section droite s étudiée ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$;
- pour toutes les combinaisons de ponts de jauge k possibles ;
- pour des nombres fixés de ponts de jauge k ;
- pour la formulation du problème ne prenant pas en compte les incertitudes.

Dans la suite, les résultats sont présentés :

- pour une section droite s étudiée uniquement : la même section droite s que précédemment pour l'étalonnage au sol réel, présenté à la sous-section 4.3.3 ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du tenseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$;
- pour une formulation du problème seulement : celle ne prenant pas en compte les incertitudes, dont la solution est définie par l'équation (3.36).

Comme précisé en 4.3.3.1, les méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$ sont classés de manière croissante en fonction de la variance estimée $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{BA}^s}}^2$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$. La figure 4.19 présente l'évolution des écarts-type $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{BA}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ en fonction du classement de ces méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$.

Les résultats sont présentés :

- pour un nombre fixé de ponts de jauge k : 3 ponts de jauge.

Comme pour l'étalonnage au sol réel (Figure 4.12), quel que soit le type d'effort résultant $F_{rés}^s$ étudié, les écarts-type $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{BA}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ augmentent en fonction du classement des méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$. Les valeurs des écarts-type $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{BA}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ sont néanmoins plus faibles que pour l'étalonnage au sol réel.

La figure 4.20 présentent l'évolution de l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{BA}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{BA}^s}$ en fonction du nombre de ponts de jauge k . La figure 4.21 présentent l'évolution de la moyenne des écart-types estimés $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ en fonction du nombre de ponts de jauge k .

Les résultats sont présentés :

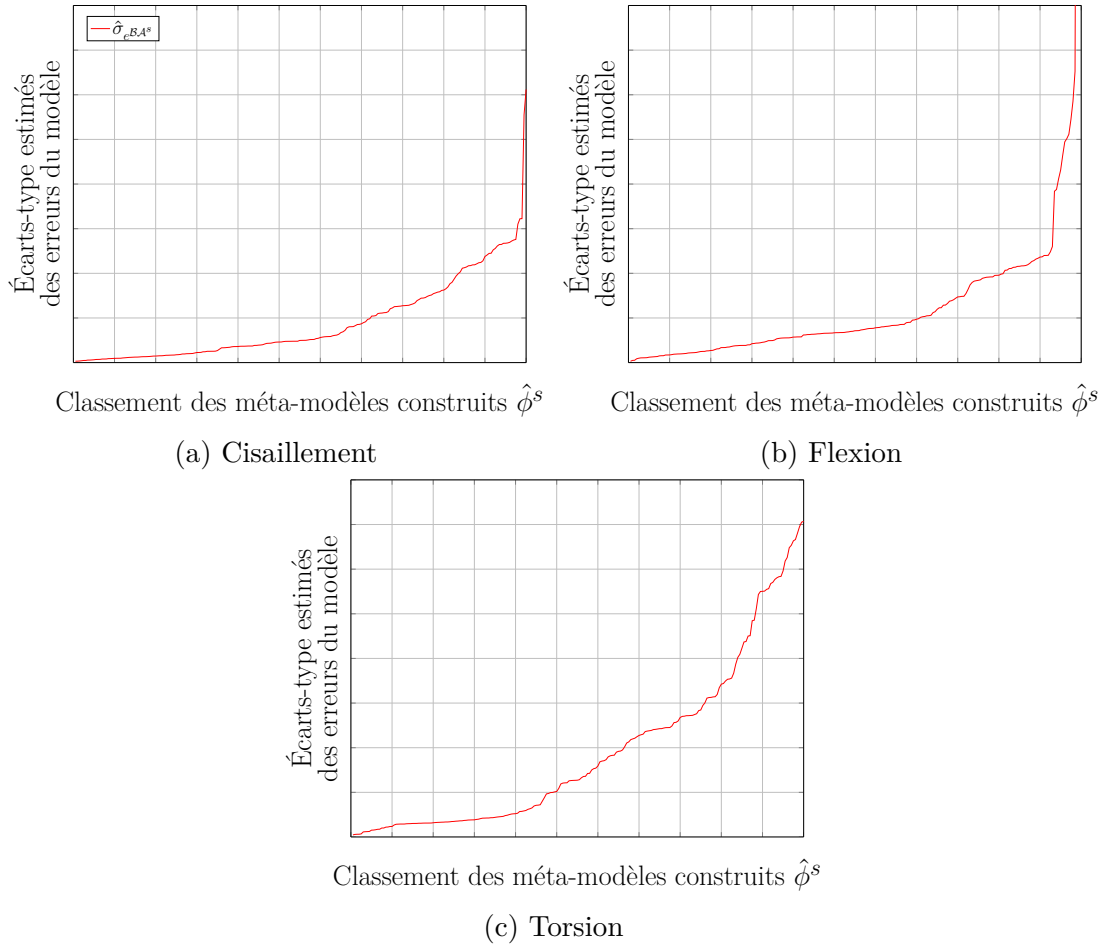


FIGURE 4.19 – Comparaison de l'évolution des écarts-type estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}A^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}A^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) en fonction du classement des méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$

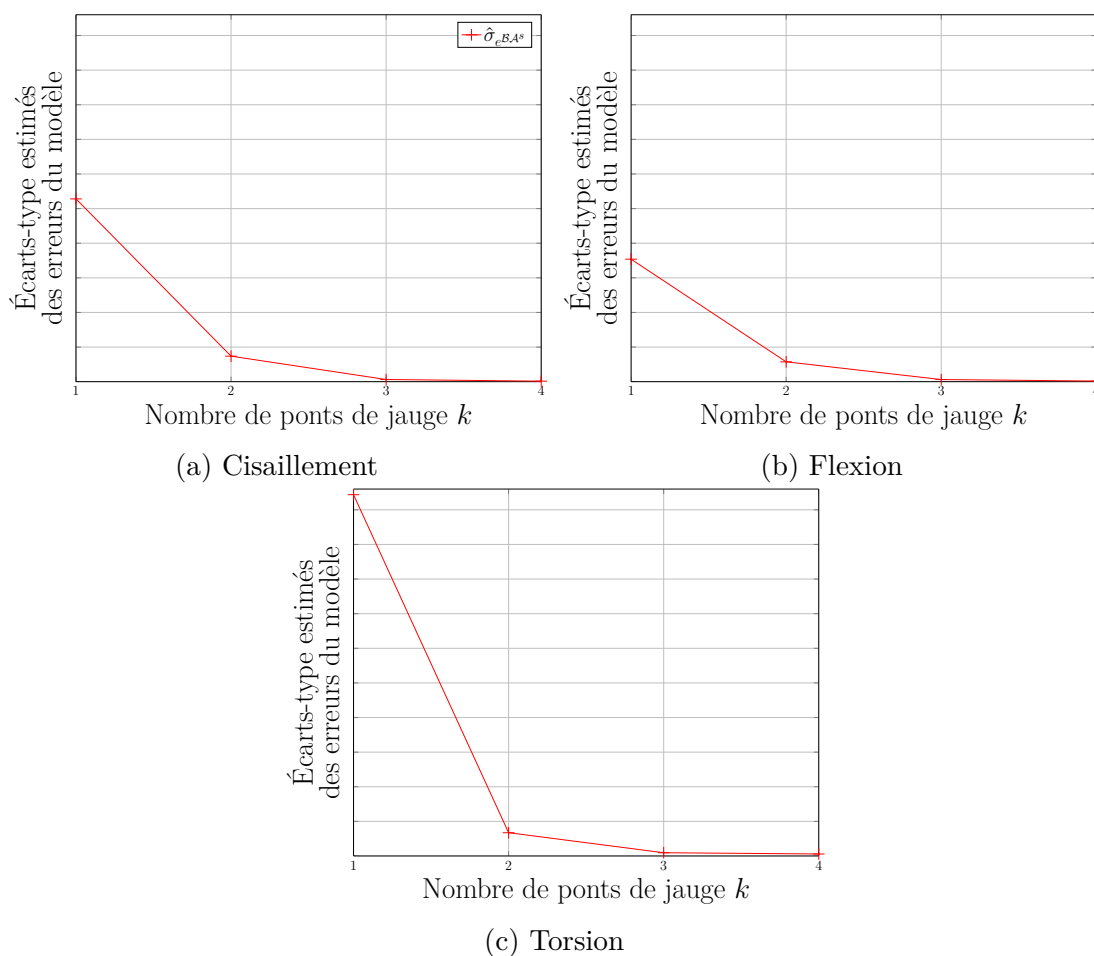


FIGURE 4.20 – Comparaison des écarts-type estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation

- pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$, selon le critère présenté en 4.3.3.1.

Comme pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Figure 4.13), l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ diminue en fonction du nombre de ponts de jauge k . Cependant, les valeurs de l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont plus faibles que pour l'étalonnage au sol réel.

Comme pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Figure 4.14), la moyenne de l'écart-type estimé $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ diminue en fonction du nombre de ponts de jauge k . Cependant, les valeurs de la moyenne de l'écart-type estimé $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des réponses du

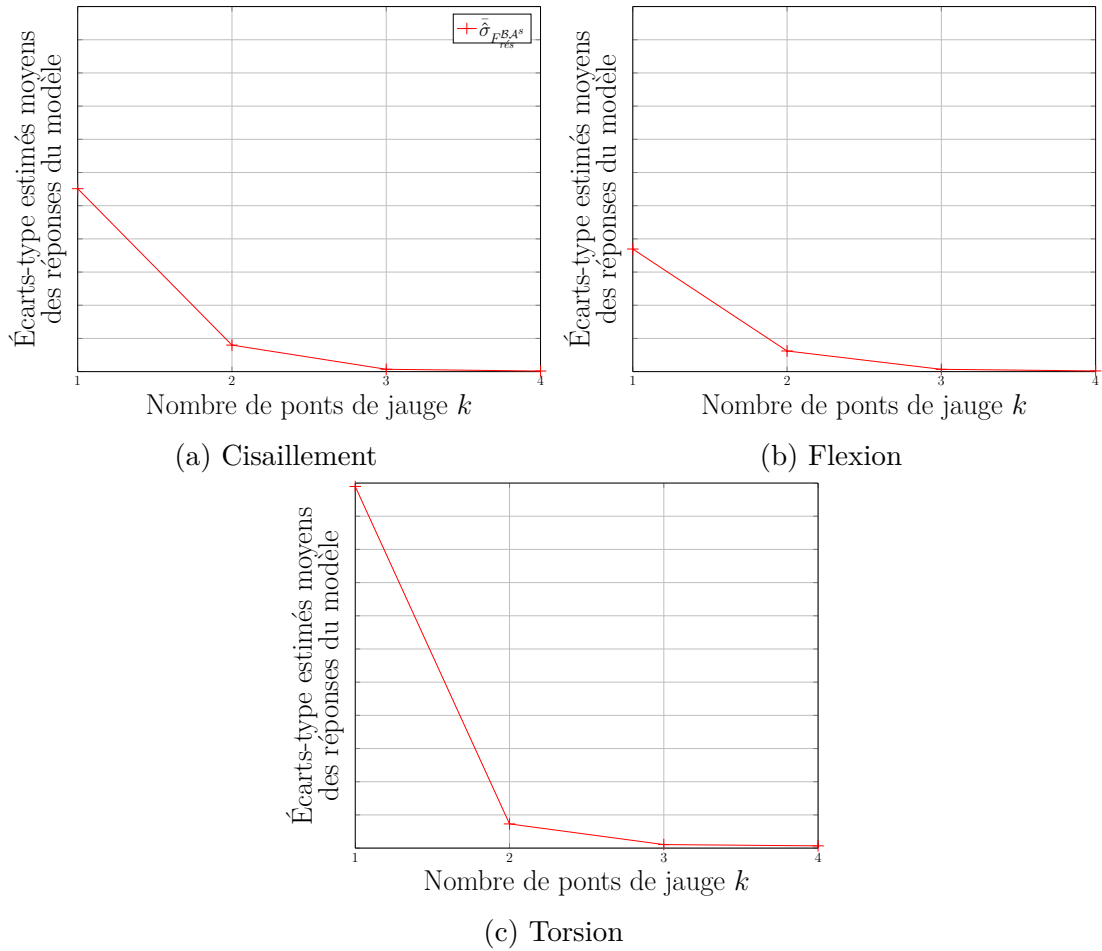


FIGURE 4.21 – Comparaison des écart-type estimés moyens $\hat{\sigma}_{F^{BA^s}}^{rés}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{BA^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation

modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont plus faibles que pour l'étalonnage au sol réel.

De même que pour l'étalonnage au sol réel, ces résultats laissent penser qu'il existe un nombre optimal de ponts de jauge k pour modéliser le comportement de la structure.

Les résultats présentés dans la suite correspondent aux résultats :

- pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$, selon le critère présenté en 4.3.3.1 ;
- pour un nombre fixé de ponts de jauge k : 3 ponts de jauge.

La figure 4.22 présente les résultats obtenus concernant l'ajustement du modèle et la distribution des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. Comme pour l'étalonnage au sol réel présenté à la sous-sous-section 4.3.3.4, quel que soit le type d'effort résultant $F_{rés}^s$ considéré, les meilleurs méta-modèles construits $\hat{\phi}^s$ prédisent assez finement les efforts résultants mesurés $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. En revanche, compte tenu du nombre limité de mesures exploitables sur le modèle éléments finis, il est difficile de conclure quant à la normalité de l'erreur du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$.

Il convient évidemment d'analyser ces graphes au cas par cas.

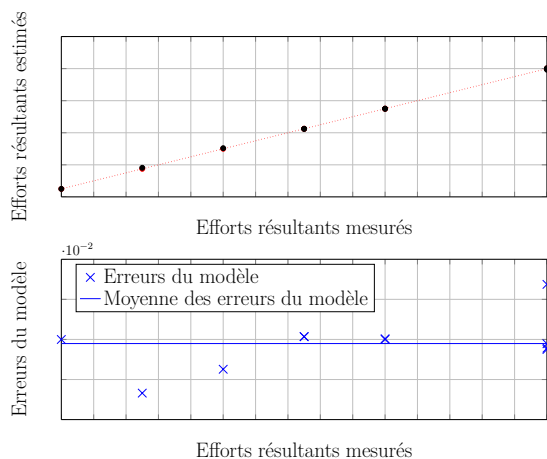


FIGURE 4.22 – Analyse des écarts-type des réponses du modèle : corrélation entre les efforts résultants mesurés $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et estimés $\hat{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$

Les résultats pour le cisaillement, la flexion et la torsion sont présentés dans le tableau 4.9.

Les résultats pour l'étalonnage au sol virtuel (Tableau 4.9) sont assez proches des résultats obtenus pour l'étalonnage au sol réel pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes, présentés à la sous-sous-section 4.3.3.4.

Quelque soit le type d'effort résultant $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ étudié, le coefficient de variation associé à l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s}$ de chaque paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$ est faible (généralement inférieure à 1%). Ces coefficients de variation associés aux écarts-type estimés $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s}$ des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}_k^s$ sont de l'ordre de

	Cisaillement	Flexion	Torsion
Classement	1	1	1
Liste des jauges	Torsion Flexion Cisaillement	Cisaillement Flexion Flexion	Flexion Torsion Cisaillement
Conditionnement	14,45	2207,01	4,15
$\hat{\beta}_{k_1}$	$\hat{\beta}_{k_1 cis}$	$\hat{\beta}_{k_1 flex}$	$\hat{\beta}_{k_1 tors}$
$\hat{\beta}_{k_2}$	$\hat{\beta}_{k_2 cis}$	$\hat{\beta}_{k_2 flex}$	$\hat{\beta}_{k_2 tors}$
$\hat{\beta}_{k_3}$	$\hat{\beta}_{k_3 cis}$	$\hat{\beta}_{k_3 flex}$	$\hat{\beta}_{k_3 tors}$
$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{k_1}}$	$0,0066 \cdot \hat{\beta}_{k_1 cis}$	$0,0076 \cdot \hat{\beta}_{k_1 flex}$	$0,0045 \cdot \hat{\beta}_{k_1 tors}$
$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{k_2}}$	$0,0021 \cdot \hat{\beta}_{k_2 cis}$	$0,0103 \cdot \hat{\beta}_{k_2 flex}$	$0,0029 \cdot \hat{\beta}_{k_2 tors}$
$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_{k_3}}$	$0,0047 \cdot \hat{\beta}_{k_3 cis}$	$0,0058 \cdot \hat{\beta}_{k_3 flex}$	$0,0032 \cdot \hat{\beta}_{k_3 tors}$
$SC_{R\acute{e}s}^{BA^s}$	$0,0002 \cdot SC_{Tot}^{BA^s}$	0	0
$SC_{Exp}^{BA^s}$	$0,9998 \cdot SC_{Tot}^{BA^s}$	$SC_{Tot}^{BA^s}$	$SC_{Tot}^{BA^s}$
$\hat{\sigma}_{e^{BA^s}}$	$0,89 \cdot \bar{\sigma}_{F_{r\acute{e}s}^{BA^s}}$	$0,89 \cdot \bar{\sigma}_{F_{r\acute{e}s}^{BA^s}}$	$0,89 \cdot \bar{\sigma}_{F_{r\acute{e}s}^{BA^s}}$

Tableau 4.9 – Comparaison des résultats pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque type d'effort résultant $F_{r\acute{e}s}^s$

grandeur ou inférieurs à ceux obtenus pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableaux 4.2, 4.3 et 4.4).

La somme des carrés résiduelles $SC_{Rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ est très faible en comparaison de la somme des carrés totaux $SC_{Tot}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$. Ceci signifie que le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ prédit bien les réponses connues $F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$, c'est-à-dire qu'il explique bien le comportement de la structure. La variabilité du méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ est donc presque entièrement due au méta-modèle $\hat{\phi}^s$ lui-même et non au bruit des mesures virtuelles. Ceci signifie que la réponse du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ dépend principalement des valeurs des paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ et non des possibles erreurs numériques sur ces paramètres d'entrée. La somme des carrés résiduelles $SC_{Rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ est plus faible et donc la somme des carrés totaux $SC_{Tot}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ est plus élevée pour l'étalonnage au sol virtuel que pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableaux 4.2, 4.3 et 4.4).

De plus, l'écart-type estimé moyen $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ sur la prédiction des réponses $F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ du modèle construit $\hat{\phi}^s$ est majoritairement due à l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$. Ceci indique que les incertitudes du problème sont majoritairement portées par la réponse du modèle $F_{rés}^s$, mais pas seulement. L'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_k^s}$ de chaque paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_k^s$ étant faible, une partie non négligeable de l'écart-type estimé moyen $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ est donc due soit aux valeurs des paramètres d'entrée $\varepsilon^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ de la base d'apprentissage $\mathcal{B},\mathcal{A}^s$, soit à un manque d'ajustement du modèle. La part de l'écart-type estimé moyen $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ sur la prédiction des réponses $F_{rés}^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ du modèle construit $\hat{\phi}^s$ due à l'écart-type estimé $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ est moins élevée pour l'étalonnage au sol virtuel que pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableaux 4.2, 4.3 et 4.4).

Cisaillement

Les résultats en cisaillement sont proches des résultats obtenus pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour le cisaillement pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableau 4.2).

La meilleure combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 selon le critère précédent associe un pont de jauge de torsion k_1 , un pont de jauge de flexion k_2 et un pont de jauge de cisaillement k_3 . Cette combinaison est différente de celle obtenue pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableau 4.2). Même si les valeurs des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}_{cis}^s$ sont de même ordre de grandeur, la valeur du paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_{cis_{k_3}}^s$ correspondant à un pont de jauge

sensible au cisaillement est la plus élevée.

Comme pour l'étalonnage au sol réel présenté à la sous-sous-section 4.3.3.4, le conditionnement de la matrice des paramètres d'entrée $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ est bas. Toutes ces caractéristiques permettent de confirmer que le système est stable et que cette combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 est judicieuse.

Flexion

Les résultats en flexion sont proches des résultats obtenus pour le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ classé en 19^e position pour la flexion pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableau 4.3).

La meilleure combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 selon le critère précédent associe un pont de jauge de cisaillement k_1 et deux ponts de jauge de flexion k_2 et k_3 . Cette combinaison est différente de celle obtenue pour le meilleur ou pour le 19^e méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableau 4.3). Les valeurs des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}_{flexk_2}^s$ et $\hat{\beta}_{flexk_3}^s$ correspondant à des ponts de jauge sensibles à la flexion sont les plus élevées.

Comme pour l'étalonnage au sol réel présenté à la sous-sous-section 4.3.3.4, le conditionnement de la matrice des paramètres d'entrée $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ est très élevé. Ceci s'explique par le type de ponts de jauge k_2 et k_3 utilisés présentant un comportement co-linéaire deux à deux donc à éviter (Tableau 4.8).

Torsion

Les résultats en torsion sont proches des résultats obtenus pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour la torsion pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableau 4.4).

La meilleure combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 selon le critère précédent associe un pont de jauge de flexion k_1 , un pont de jauge de torsion k_2 et un pont de jauge de cisaillement k_3 . Cette combinaison est différente de celle obtenue pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour la formulation ne prenant pas en compte les incertitudes pour l'étalonnage au sol réel (Tableau 4.4). Même si les valeurs des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}_{tors}^s$ sont de même ordre de grandeur, les valeurs des paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}_{torsk_2}^s$ et $\hat{\beta}_{torsk_3}^s$ correspondant à des ponts de jauge sensibles à la torsion et au cisaillement sont les plus élevées, le paramètre estimé du modèle $\hat{\beta}_{torsk_2}^s$ étant le plus grand.

Comme pour l'étalonnage au sol réel présenté à la sous-sous-section 4.3.3.4, le conditionnement de la matrice des paramètres d'entrée $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ est bas. Toutes ces caractéristiques permettent de confirmer que le système est stable et que cette combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 est judicieuse.

4.4.3.4 Validation croisée

Comme pour la validation de l'étalonnage au sol réel présenté à la sous-sous-section 4.3.3.5, pour valider les résultats précédents, les coefficients de détermination classique $R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et ajusté $R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont utilisés. Connaissant les réponses estimées $\hat{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ par le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ et les écart-types estimés $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$, le taux de réponses observées TR^s dans les intervalles $[\hat{F}_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \pm \hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}]$ pour la section droite s étudiée est aussi calculé.

Une validation croisée des résultats est également effectuée. Les caractéristiques équivalentes aux précédentes sont également calculées dans le cadre de cette validation croisée : le coefficient de détermination en validation croisée $Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (Équation (4.27)) et la moyenne \overline{TR}_{VC}^s des taux de réponses observées TR^s (Équation (4.23)) dans les intervalles définis précédemment pour chaque couple VC de bases d'apprentissage réduites et bases de validation.

Dans la suite, les résultats sont présentés :

- pour une section droite s étudiée uniquement : la même section droite s que précédemment à la sous-section 4.4.3.3 ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$;
- pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$, selon le critère présenté en 4.3.3.1 ;
- pour un nombre fixé de ponts de jauge k : 3 ponts de jauge. (3.36) ;
- pour une formulation du problème seulement : celle ne prenant pas en compte les incertitudes.

Les résultats pour le cisaillement, la flexion et la torsion sont présentés dans le tableau 4.10.

	Cisaillement	Flexion	Torsion
Classement	1	1	1
$R^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$	0,9998	1,0000	1,0000
$R_{aj}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$	0,9998	1,0000	1,0000
TR^s	81,82%	72,73%	90,91%
$Q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$	0,9997	1,0000	0,9999
\overline{TR}_{VC}^s	72,73%	72,73%	81,82%

Tableau 4.10 – Comparaison des résultats en validation et validation croisée (VC) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque type d'effort résultant $F_{rés}^s$

Les résultats pour la validation de l'étalonnage au sol virtuel (Tableau 4.10) sont assez proches des résultats obtenus pour la validation de l'étalonnage au sol réel, présentés à la sous-sous-section 4.3.3.5.

Quelque soit le type d'effort résultant $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ étudié, les coefficients de détermination $R^{\mathcal{BA}^{s2}}$ et $R_{aj}^{\mathcal{BA}^{s2}}$ sont très élevés et égaux. De même, le coefficient de détermination équivalent en validation croisée $Q^{\mathcal{BA}^{s2}}$ est très élevé et presque égal aux coefficients de détermination $R^{\mathcal{BA}^{s2}}$ et $R_{aj}^{\mathcal{BA}^{s2}}$. À défaut de confirmer la pertinence de la combinaison de trois ponts de jauge k_1 , k_2 et k_3 choisie, ces valeurs montrent le bon ajustement des données de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s par rapport au méta-modèle $\hat{\phi}^s$ construit. Les coefficients de détermination $R^{\mathcal{BA}^{s2}}$, $R_{aj}^{\mathcal{BA}^{s2}}$ et $Q^{\mathcal{BA}^{s2}}$ sont plus élevés que pour l'étalonnage au sol réel.

De plus, la majorité des réponses mesurées $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ de la base d'apprentissage \mathcal{BA}^s sont dans l'intervalle correspondant comme le confirment les valeurs des taux de réponses observées TR^s . En moyenne, des taux de réponses observées \overline{TR}_{VC}^s très proches des taux de réponses observées TR^s sont obtenus en validation croisée. Pour une distribution des prédictions des réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ selon une loi normale, un taux de l'ordre de 67% est attendu. Les résultats en validation et en validation croisée en sont relativement proches compte tenu du nombre fini de mesures exploitables.

4.4.3.5 Validation des résultats par méthode de Monte Carlo

En plus de la validation précédente, reposant principalement sur la réalisation d'une validation croisée, une validation par tirages de Monte Carlo est effectuée sur le modèle éléments finis. Cette validation consiste en plusieurs étapes :

1. récupération des données :

Pour chaque section droite s étudiée, la base d'apprentissage virtuelle \mathcal{BA}^s est construite à partir des valeurs des paramètres d'entrée $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ et des réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ obtenues pour l'étalonnage au sol réalisé sur le modèle éléments finis.

De plus, les valeurs de référence $F_{rés,réf}^{\mathcal{BA}^s}$ correspondant aux réponses $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ sont récupérées à l'aide de l'outil d'extraction des efforts internes.

2. ajout de bruit sur les données de la base d'apprentissage virtuelle \mathcal{BA}^s :

Pour chaque valeur de la base d'apprentissage virtuelle \mathcal{BA}^s , un bruit de mesure est ajouté. Ce bruit est tiré aléatoirement suivant une loi normale centrée (Figures A.1 et A.2) dont l'écart-type dépend de la valeur à bruite. Le bruit de mesure ajouté sur chaque valeur est de l'ordre de grandeur de l'incertitude existant sur la mesure réelle. Ce bruit est tiré plusieurs fois sur chaque valeur de la base d'apprentissage virtuelle \mathcal{BA}^s suivant la méthode de Monte Carlo. Les résultats suivants sont présentés pour un Monte Carlo à 100 tirages.

- sur les déformations $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$:

Pour chaque tirage de Monte Carlo, pour chaque cas de chargement i et

chaque pont de jauge k , un bruit est ajouté sur la valeur de déformation $\varepsilon_{ik}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$. L'écart-type de ce bruit a été défini à la sous-sous-section 3.2.4.1.

- sur les efforts résultants $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$:

Pour chaque tirage de Monte Carlo, pour chaque cas de chargement i , un bruit est ajouté sur la valeur de l'effort appliqué T_{z_i} et sur la valeur de chaque bras de levier. L'écart-type de ces bruits a été défini à la sous-sous-section 3.2.4.2.

Ceci permet de construire une nouvelle base d'apprentissage virtuelle et bruitée $\mathcal{B}\mathcal{A}^s_{bruitée,MC}$ pour chaque tirage de Monte Carlo.

3. réalisation d'un étalonnage au sol virtuel pour chaque base d'apprentissage virtuelle et bruitée $\mathcal{B}\mathcal{A}^s_{bruitée,MC}$:

Pour chaque tirage de Monte Carlo, c'est-à-dire pour chaque base d'apprentissage virtuelle et bruitée $\mathcal{B}\mathcal{A}^s_{bruitée,MC}$, le problème inverse est résolu pour les deux formulations prenant en compte les incertitudes, présentées au chapitre 3.4. Ceci permet de récupérer les paramètres estimés du modèle $\hat{\beta}^s_{bruitée,MC}$, les réponses estimées $\hat{F}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}_{rés,bruitée,MC}$ ainsi que les écarts-type $\hat{\sigma}_{w^{sol^s},bruitée,MC}$ sur ces réponses.

4. construction des intervalles pour la validation :

Pour chaque formulation prenant en compte les incertitudes et pour chaque réponse de la base d'apprentissage virtuelle $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$, la réponse estimée moyenne $\hat{F}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}_{rés,bruitée,MC}$ et l'écart-type moyen $\hat{\sigma}_{w^{sol^s},bruitée,MC}$ des tirages de Monte Carlo sont calculés selon la méthode présentée à la sous-sous-section 2.3.3.2 (Équations (2.13) et (2.14)). Ceci permet de construire les intervalles associés à chaque cas de chargement de la base d'apprentissage virtuelle $\mathcal{B}\mathcal{A}^s$ suivants :

$$\left[\hat{F}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}_{rés,bruitée,MC} \pm \hat{\sigma}_{w^{sol^s},bruitée,MC} \right] \quad (4.29)$$

5. calcul des taux $TR_{réf}^s$ et taux moyens \overline{TR}_{MC}^s de réponses observées dans ces intervalles :

Pour chaque tirage de Monte Carlo et pour chaque formulation prenant en compte les incertitudes, le taux TR_{MC}^s de réponses estimées $\hat{F}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}_{rés,bruitée,MC}$ observées dans les intervalles $\left[\hat{F}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}_{rés,bruitée,MC} \pm \hat{\sigma}_{w^{sol^s},bruitée,MC} \right]$ associés est calculé, comme pour la validation croisée présentée à la sous-sous-section 4.4.3.4. À partir de ces taux de réponses, pour chaque formulation prenant en compte les incertitudes, le taux moyen pour l'ensemble des tirages de Monte Carlo est ensuite calculé. Ce taux moyen \overline{TR}_{MC}^s est présenté dans le tableau 4.11.

De plus, le taux $TR_{réf}^s$ de réponses de référence $F^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}_{rés,réf}$, extraites à partir de l'outil d'extraction des efforts internes, observées dans les intervalles précédents est également calculé, comme pour la validation croisée présentée à la sous-sous-section 4.4.3.4. Ce taux $TR_{réf}^s$ est présenté dans le tableau 4.11.

Dans la suite, les résultats sont présentés :

- pour une section droite s étudiée uniquement : la même section droite s que précédemment à la sous-section 4.4.3.3 ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$;
- pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$, selon le critère présenté en 4.3.3.1 ;
- pour un nombre fixé de ponts de jauge k : 3 ponts de jauge ;
- pour deux formulations du problème : celles prenant en compte les incertitudes, par valeur ou de manière majorée.

	Cisaillement	Flexion	Torsion
$TR_{réf}^s$ (intervalles pv)	86%	93%	88%
\overline{TR}_{MC}^s (intervalles pv)	68%	65%	67%
$TR_{réf}^s$ (intervalles maj)	95%	94%	99%
\overline{TR}_{MC}^s (intervalles maj)	68%	67%	67%

Tableau 4.11 – Pourcentage des efforts résultants dans les intervalles

$$\left[\hat{F}_{rés,bruitée,\overline{MC}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \pm \hat{\sigma}_{w^{sol^s},bruitée,\overline{MC}} \right]_{pv} \text{ ou } \left[\hat{F}_{rés,bruitée,\overline{MC}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s} \pm \hat{\sigma}_{w^{sol^s},bruitée,\overline{MC}} \right]_{maj}$$

D’après ces résultats, les efforts résultants de référence $F_{rés,réf}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont majoritairement dans les intervalles correspondants construits par la méthode de Monte Carlo. Ceci signifie que les intervalles par la méthode de Monte Carlo sont réalistes. En effet, les efforts résultants estimés moyens $\hat{F}_{rés,bruitée,\overline{MC}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ calculés par la méthode de Monte Carlo sont supposés approchés les valeurs « vraies » de ces efforts. Or, les efforts résultants $F_{rés,réf}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ extraits par le modèle éléments finis servent de référence donc sont considérés comme des valeurs « vraies ». Par conséquent, les efforts résultants de référence $F_{rés,réf}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ et les efforts résultants estimés moyens $\hat{F}_{rés,bruitée,\overline{MC}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ sont sensées être proches. Ceci est justement vérifié par ces taux élevés (supérieur à 85%).

Dans l’hypothèse d’une distribution normale centrée des erreurs du modèle, un pourcentage d’environ 67% des valeurs dans ces intervalles est attendu. C’est le taux moyen obtenu par les tirages de Monte Carlo pour les efforts résultants estimés $\hat{F}_{rés,bruitée,\overline{MC}}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ par chaque méthode d’estimation des efforts résultants en vol prenant en compte les incertitudes.

4.4.4 Problème direct : Essais en vol virtuels

Le but de l’étude sur le modèle élément finis est de caractériser l’incertitude relative au vol. Une fois l’étalonnage au sol virtuel réalisé et validé, permettant

d'identifier les méta-modèles $\hat{\phi}^s$, il est donc possible d'effectuer des essais en vol virtuel.

Pour cela, environ 80 cas de chargements représentatifs de manœuvres en vol statiques ont été appliquées sur le modèle éléments finis, pour une configuration lisse de la voilure. Parmi ces manœuvres, il y a des manœuvres en vol statiques simples (montées, descentes, virages, dérapages, roulis, ...) ou avec présence de rafales (discrètes ou turbulences continues), des manœuvres au sol telles que des roulages, des freinages ou en conditions de maintenance sur des vérins. Les chargements associés à ces manœuvres sont des chargements répartis sur la voilure. Les valeurs des efforts résultants $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ sont alors estimés :

- pour chaque section droite s exploitable, définies à la sous-section 4.4.3.2 ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$;
- pour les 10 meilleures combinaisons de ponts de jauge k possibles ;
- pour des nombres fixés de ponts de jauge k ;
- pour la formulation du problème ne prenant pas en compte les incertitudes.

De plus, à partir de l'outil d'extraction des efforts internes du modèle éléments finis, les efforts résultants de référence $F_{rés,réf}^{BA^s}$ correspondant sont récupérés :

- pour les mêmes sections droites s que précédemment ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$.

Quel que soit le nombre de ponts de jauge k , pour chaque combinaison de ponts de jauge k précédente, les écarts entre les efforts résultants estimés $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ et les efforts résultants de référence $F_{rés,réf}^{BA^s}$ sont comparés. Un histogramme de ces écarts est également tracé. De plus, la moyenne et le coefficient de variation associé à l'écart-type de ces écarts sur l'ensemble des 80 cas de chargement appliqués sont alors calculés.

Dans la suite, les résultats sont présentés :

- pour une section droite s étudiée uniquement : la même section droite s que précédemment à la sous-section 4.4.3.3 ;
- pour chaque composante $F_{rés}^s$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^s}$;
- pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$, selon le critère présenté en 4.3.3.1 ;
- pour un nombre fixé de ponts de jauge k : 3 ponts de jauge. (3.36) ;
- pour une formulation du problème seulement : celle ne prenant pas en compte les incertitudes.

Cisaillement

Les écarts entre les efforts résultants estimés $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ par le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ et les efforts résultants de référence $F_{rés,réf}^{BA^s}$ sont tracés sur la figure 4.23.

La moyenne de ces écarts est proche de zéro. Ceci signifie que la loi de distri-

bution de l'incertitude relative au vol est centrée.

Le coefficient de variation associé à l'écart-type est assez important (entre 20 et 25%). Cependant, cette valeur est dégradée par la présence de quelques réponses $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ très mal estimées. En supprimant ces réponses (Figure 4.24), correspondant à la suppression de moins de 8% des manœuvres, le coefficient de variation peut être divisé par 3. Ceci montre que quelques réponses $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ très mal estimées peuvent très fortement pénaliser la valeur de cet écart-type. Il convient donc d'analyser les résultats obtenus de manière plus précise, en identifiant les manœuvres correspondant à ces efforts résultants mal estimés par le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ et en modifiant le calcul de l'écart-type, en incluant par exemple un filtre pour éliminer les réponses estimées $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ qui paraissent aberrantes.

L'interprétation de l'histogramme n'est pas évidente. En effet, même en supprimant les réponses $\hat{F}_{rés}^{vol^s}$ mal estimées, il est difficile d'identifier la distribution de l'incertitude relative au vol.

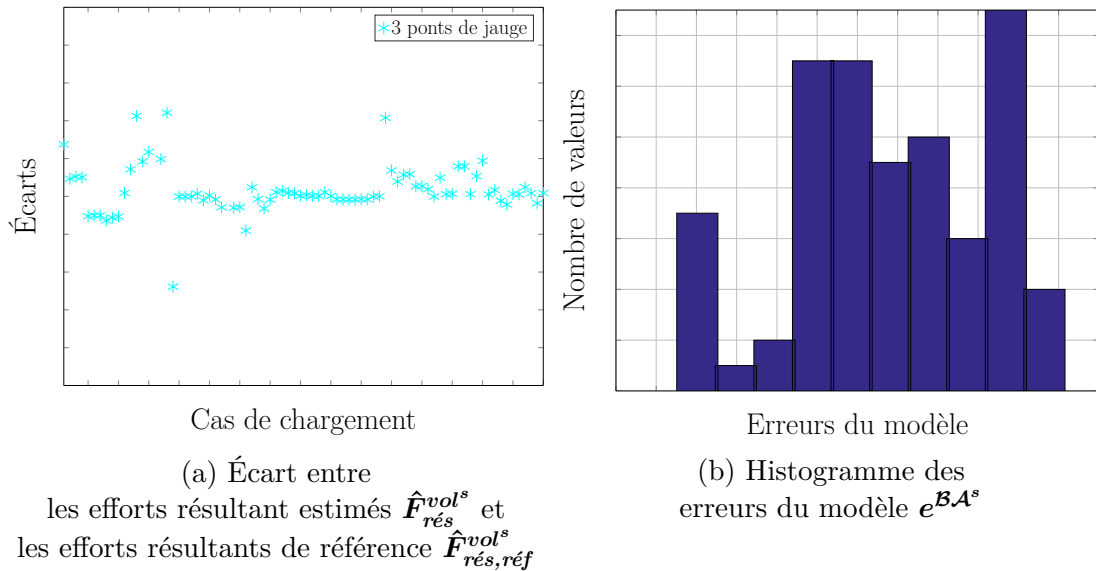


FIGURE 4.23 – Comparaison des écarts entre les réponses du modèle et les valeurs de référence, pour le meilleur méta-modèle $\hat{\phi}^s$, pour le cisaillement T_z^s

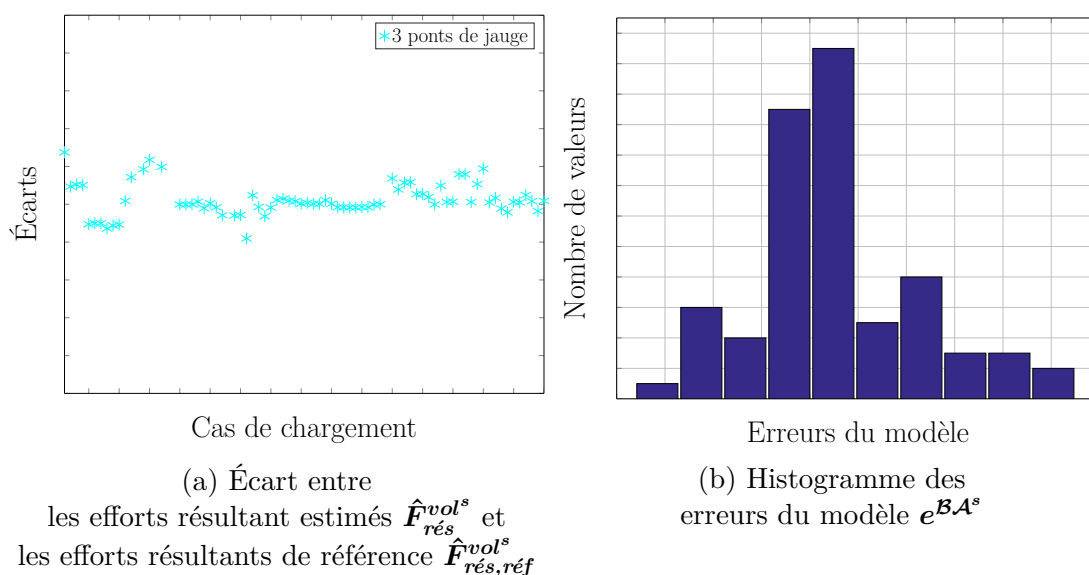


FIGURE 4.24 – Comparaison des écarts entre les réponses du modèle et les valeurs de référence en enlevant les points aberrants, pour le meilleur méta-modèle $\hat{\phi}^s$, pour le cisaillement T_z^s

Flexion

Les écarts entre les efforts résultants estimés $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{vol^s}$ par le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ et les efforts résultants de référence $\mathbf{F}_{rés,réf}^{\mathcal{BA}^s}$ sont tracés sur la figure 4.25.

La moyenne de ces écarts est proche de zéro. Ceci signifie que la loi de distribution de l'incertitude relative au vol est centrée.

Le coefficient de variation associé à l'écart-type est faible (inférieur à 5%). Ceci correspond à l'ordre de grandeur des incertitudes de mesures observées pour les déformations en vol. Comme pour le cisaillement, quelques réponses $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{vol^s}$ mal estimées apparaissent. Cependant, compte tenu de la valeur faible de ce coefficient de variation, la suppression de ces réponses modifie peu sa valeur.

De même que pour le cisaillement, l'interprétation de l'histogramme n'est pas évidente. En effet, même en supprimant les réponses $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{vol^s}$ mal estimées, il est difficile d'identifier la distribution de l'incertitude relative au vol.

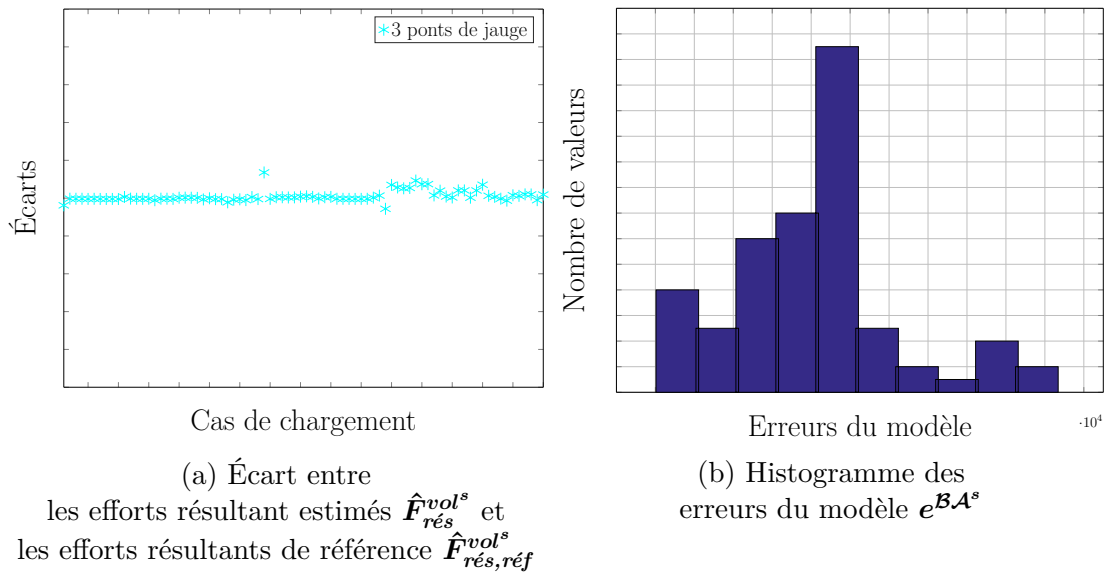


FIGURE 4.25 – Comparaison des écarts entre les réponses du modèle et les valeurs de référence, pour le meilleur méta-modèle $\hat{\phi}^s$, pour la flexion M_{fy}^s

Torsion

Les écarts entre les efforts résultants estimés $\hat{\mathbf{F}}_{rés}^{vol^s}$ par le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ et les efforts résultants de référence $\mathbf{F}_{rés,réf}^{\mathcal{BA}^s}$ montrent beaucoup de dispersion. Par conséquent, il convient d'analyser davantage ces résultats, non présentés dans ce mémoire.

4.4.5 Conclusions

L'étude éléments finis permet de quantifier les incertitudes relatives au vol, les incertitudes de mesure et du modèle éléments finis étant supposées nulles. Pour cela, un outil permet d'extraire les efforts résultants au centre des sections droites s étudiées. Ces efforts résultants servent ainsi de référence. Deux conclusions majeures peuvent être tirées de cette étude :

- le méta-modèle génère peu d'erreur comme le montrent les valeurs faibles de l'écart-type sur les erreurs du modèle pour l'étalonnage au sol virtuel ;
- l'incertitude relative au vol est non négligeable :
 - pour le cisaillement :
Cette incertitude est non négligeable, plus grande que l'incertitude liée à la mesure, tant en restant limitée.
 - pour la flexion :

Cette incertitude est non négligeable, de l'ordre de grandeur de l'incertitude liée à la mesure, c'est-à-dire plus faible que celle obtenue pour le cisaillement.

- pour la torsion :
Il serait nécessaire d'approfondir l'étude et de se demander si le modèle éléments finis est suffisamment représentatif de la torsion pour des cas de chargement du type vol ou si l'étalonnage au sol est suffisamment représentatif pour modéliser le comportement en torsion subit en vol.

4.5 Conclusions

La méthodologie développée consiste à réaliser deux études séparées pour quantifier les deux sources majeures d'incertitude :

- une étude réelle :
Cette étude est la même étude que celle qui se fait actuellement à la différence que la méthode utilisée pour identifier les paramètres du modèle β^s a été modifiée pour prendre en compte les incertitudes. Il s'agit de la méthode présentée à la section 3.4.
- une étude virtuelle :
Cette étude, présentée à la sous-sous-section 3.5.3.1, est appliquée à la section 4.4. Elle permet de quantifier les incertitudes relatives au vol, non prises en compte dans la méthode modifiée développée à la section 3.4.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées des deux études. Tout d'abord, pour les deux études, certaines combinaisons de ponts de jauge sont à éviter pour construire le méta-modèle ϕ^s , qui doit modéliser le comportement de la structure (Tableaux 4.1 et 4.8). De plus, il existe un nombre de ponts de jauge optimal pour décrire le comportement de la structure comme le montre l'écart-type sur l'erreur du modèle.

Dans l'étude réelle, il est constaté que les incertitudes sur les déformations $\epsilon^{\mathcal{BA}^s}$ peuvent avoir peu d'impact sur la dispersion du modèle, d'après l'écart-type $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{BA}^s}}$ des erreurs du modèle $v^{\mathcal{BA}^s}$. En revanche, ces incertitudes ont un impact non négligeable sur la dispersion moyenne des réponses du modèle, représentée par la moyenne des écart-types $\bar{\sigma}_{w^{\mathcal{BA}^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$. Les incertitudes sur les efforts résultants mesurés $F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}$ ont un impact faible, voire nul, sur la dispersion du modèle $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{BA}^s}}$ et sur la dispersion moyenne des réponses du modèle $\bar{\sigma}_{w^{\mathcal{BA}^s}}$. Ces résultats ont été validés par validation croisée. Même si le méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ est bien représentatif du comportement à modéliser, la dispersion de ses réponses est majoritairement due aux incertitudes sur les mesures, et en particulier des mesures de déformations compte tenu des remarques précédentes. Il y a ainsi une différence, non négligeable, entre l'incertitude $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{BA}^s}}$ sur les efforts

résultants calculés par la méthode actuellement en place, définie à la section 3.3, et l'incertitude $\hat{\sigma}_{w^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ sur les efforts résultants calculés par la méthode développée, définie à la section 3.4.

Dans l'étude virtuelle, l'outil d'extraction des efforts résultants servant de référence a d'abord été validé. La dispersion du modèle, c'est-à-dire l'écart-type des erreurs du modèle $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$, et la dispersion moyenne des réponses du modèle, c'est-à-dire la moyenne des écarts-type des réponses du modèle $\bar{\hat{\sigma}}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$, sont plus faibles que dans le cas où les incertitudes ne sont pas prises en compte dans l'étude réelle. Ces résultats ont été validés par validation croisée et par méthode de Monte Carlo. Les incertitudes relatives au vol ont également été quantifiées et ne sont pas négligeables. Leur impact sur la dispersion des réponses du modèle dépend de la composante $F_{rés}^{vol}$ du torseur des efforts résultants $\mathcal{T}_{F_{rés}^{vol}}$ étudiée.

Chapitre 5

Conclusions

Sommaire

5.1 Résultats	186
5.2 Perspectives	188

5.1 Résultats

Le but de ce mémoire est de présenter la méthode développée pour quantifier l'incertitude existant sur l'estimation des charges, c'est-à-dire les efforts résultants exprimés au centre des sections d'intérêt, de la voilure d'un avion dans le contexte d'un vol. L'estimation des efforts résultants en vol ne s'obtient pas directement. Pour cela, des mesures de déformation à l'aide de ponts de jauge sont utilisées. La relation entre ces déformations et les efforts résultants n'est pas obtenue de manière explicite mais de manière implicite. En effet, un méta-modèle, aussi appelé modèle de substitution ou modèle approché, est utilisé pour définir cette relation. L'utilisation de ce méta-modèle pour l'estimation des efforts résultants en vol est définie par une méthode développée par la NASA, dite « méthode de Skopinski » du nom du principal auteur de cette méthode [SAH54], présentée en 3.3. Cependant, aucune incertitude n'est pris en compte, d'un point de vue mathématique, dans cette méthode d'estimation des efforts résultants en vol. Cependant, une méthode empirique conservative, non optimisée, permettait d'encadrer les estimations des efforts résultants.

Dans ce problème d'estimation des efforts résultants en vol, trois types d'incertitude existent :

1. les incertitudes de mesure :
Il s'agit des incertitudes de mesure sur les déformations, prélevées au cours des essais au sol et des essais en vol, et sur les efforts résultants, calculés à partir des efforts appliqués au cours des essais au sol.
2. les incertitudes ou erreurs de modélisation :
La résolution mathématique du problème inverse, sur-déterminé, génère une solution approchée du type « moindres carrés ». De plus, ce modèle ne représente pas parfaitement la réalité, mais s'en approche, car il dépend des paramètres utilisés pour représenter le comportement de la structure ainsi que des données disponibles pour construire ce modèle approché.
3. les incertitudes relatives au vol :
Ces incertitudes correspondent à l'utilisation du méta-modèle, étalonné par les essais au sol, dans un domaine différent correspondant au vol. De plus, les hypothèses retenues pour ce problème, validées pour les essais au sol, peuvent ne pas être respectées.

C'est pourquoi une nouvelle méthode d'estimation des efforts résultants en vol ainsi qu'une nouvelle méthodologie d'application au contexte industriel ont été proposées. Ceci a ainsi aboutit au développement complet d'un programme, codé en MATLAB. Ce programme, entièrement paramétré, a été testé sur des cas d'école avant d'être utilisé pour des données réelles (mesures effectuées au cours des essais) ou virtuelle (provenant du modèle éléments finis).

La méthode proposée est une méthode basée sur la méthode actuelle, présentée en 3.3, qui a été modifiée pour prendre en compte les incertitudes du problème. Cette nouvelle méthode, présentée en 3.4, permet de considérer les incertitudes de mesure et de quantifier les incertitudes de calcul et sur les efforts résultants dans ce cadre là. La différence entre la méthode actuelle et la méthode développée pour prendre en compte les incertitudes repose essentiellement sur la considération des incertitudes, sur les déformations et sur les efforts résultants, dans le problème. La considération de ces incertitudes permet de quantifier l'incertitude sur les efforts résultants en vol, compte tenu des hypothèses considérées pour la construction du méta-modèle. En revanche, elle ne permet pas de quantifier les incertitudes relatives au vol. Une étude spécifique a été nécessaire pour considérer et quantifier ces dernières, intégrée dans la nouvelle méthodologie d'application au contexte industriel proposée.

L'application de la méthodologie proposée à un cas industriel amène à plusieurs constatations, dont les principales sont exposées ci-après. Tout d'abord, l'analyse des mesures de déformations effectuées pendant les essais d'étalonnage au sol montrent qu'il existe des dépendances entre les réponses des différents ponts de jauge. Si deux ponts de jauge, dont les mesures sont bruitées, ont un comportement s'apparentant à un comportement co-linéaire alors le conditionnement de la matrice des déformations utilisées dans la résolution du problème inverse est dégradé. Le problème inverse devient alors « mal posé » et les résultats peuvent être instables. Il convient donc d'éviter d'utiliser deux ponts de jauge ayant ce type de dépendance dans la construction des méta-modèles pour chaque type d'efforts résultants. Le problème direct est généralement stable.

Les différentes méthodes d'estimation des efforts résultants prenant en compte les incertitudes sont alors appliquées dans le cadre d'un étalonnage au sol réel. Les incertitudes considérées sont les incertitudes de mesure et celles liées au calcul. Une étude préliminaire est effectuée pour valider la nouvelle méthode et observer les résultats pour ces deux méthodes en fonction des incertitudes de mesure prises en compte. En l'absence d'incertitude sur les déformations et les efforts résultants, cette étude préliminaire montre que les résultats sont identiques pour ces deux méthodes, permettant de valider la cohérence de la méthode modifiée. En testant alternativement l'absence ou la présence d'incertitude sur les déformations et/ou les efforts résultants, cette étude montre que l'incertitude sur les déformations est prépondérante sur les résultats par rapport à l'incertitude sur les efforts résultants, dont l'impact est pratiquement nul.

Si les incertitudes de mesure sur les déformations et les efforts résultants sont considérées, l'incertitude du modèle liée aux erreurs de calcul, c'est-à-dire l'écart-type de l'erreur du modèle, est peu modifiée entre ces deux méthodes. La différence sur les résultats entre les deux méthodes réside principalement sur l'incertitude,

c'est-à-dire l'écart-type, de l'estimation des efforts résultants : elle est plus élevée pour la nouvelle méthode, prenant en compte les incertitudes, que pour la méthode actuelle. Cette différence n'est pas négligeable. Cette incertitude est décroissante en fonction des valeurs des efforts résultants, tendant vers une constante (de l'ordre de grandeur des incertitudes de mesure sur les déformations en vol). L'application du méta-modèle construit suite à l'étalonnage au sol permet de quantifier précisément les efforts résultants en vol et l'incertitude sur ces efforts dans ce cadre là. Mais cette incertitude ne prend en compte que les incertitudes de mesure sur les déformations et les efforts résultants de l'étalonnage au sol, les incertitudes sur les déformations en vol ainsi que les incertitudes liées aux erreurs de calcul dans les deux étapes.

Les incertitudes relatives au vol nécessitent une étude complémentaire. Un étalonnage au sol sur un modèle éléments finis permet d'identifier les paramètres du modèle. Différentes manœuvres sont alors appliquées. Les incertitudes relatives au vol sont obtenues par comparaison des efforts résultants en vol estimés par le méta-modèle avec des valeurs de référence obtenues à partir du modèle éléments finis. Les incertitudes relatives au vol sont non négligeable. Leur importance dépend du type d'effort résultant choisi. Pour l'effort tranchant, cette incertitude est supérieure à l'ordre de grandeur de l'incertitude sur les mesures de déformations en vol, tout en restant limitée. Pour le moment de flexion, cette incertitude est de l'ordre de grandeur de l'incertitude sur les mesures de déformations en vol. Pour le moment de torsion, cette incertitude semble importante et il sera nécessaire d'analyser ces résultants de manière approfondie et de proposer d'éventuelles études complémentaires.

5.2 Perspectives

Plusieurs améliorations de cette méthode peuvent être envisagées, que ce soit sur la méthode de prises en compte des incertitudes ou sur son application dans le contexte industriel.

Tout d'abord, sur la méthode, un coefficient est parfois ajouté devant les matrices de variance-covariance des incertitudes sur les déformations pour pondérer la résolution du problème inverse. Ces coefficients permettent de minimiser le biais potentiel qui peut apparaître sur le méta-modèle. Ce biais peut notamment apparaître lorsque les données de la base d'apprentissage utilisée pour l'étalonnage au sol sont utilisées en relatif. Ceci est dû au recalage des données brutes par des données bruitées, introduisant ainsi une erreur systématique 2.3.2. Ce coefficient est défini pour la méthode modifiée prenant en compte les incertitudes dans [Ful87]. Il serait intéressant de modifier le programme développé de sorte qu'un calcul avec ou sans biais soit possible, quel que soit la formulation utilisée. Pour chaque for-

mulation, un calcul classique sans pondération pour minimiser le biais pourrait être effectué systématiquement. Un test permettrait alors d'évaluer le biais sur les résultats et de relancer si nécessaire un calcul pondéré pour minimiser le biais pour la formulation concernée.

De plus, ici, tous les méta-modèles pour un nombre fixé de paramètres du modèle sont construits. Le classement de ces méta-modèles s'effectue de manière croissante selon l'incertitude du modèle liée aux erreurs de calcul, c'est-à-dire selon l'écart-type de l'erreur du modèle. Cependant, comme précisé en 2.2.3.4, le choix des méta-modèles retenus pour l'estimation des efforts résultants en vol ne relève pas uniquement de ce critère. Certains algorithmes de sélection des ponts de jauge ont déjà été testés, par la NASA tel que présenté en 2.2.3.3 ou dans le cadre de cette thèse, sur la méthode actuelle d'estimation des efforts résultants en vol. Cependant, les résultats ne concordent pas nécessairement avec les combinaisons de ponts de jauge sélectionnées par la méthode actuelle d'estimation des efforts résultants en vol. Il pourrait être intéressant de tester ces algorithmes de sélection des ponts de jauge sur la méthode modifiée pour prendre en compte les incertitudes et de comparer les résultats au choix réel des méta-modèles.

D'autres méta-modèles pourraient être utilisés. Ceci nécessiterait de trouver ou de développer une méthode de prise en compte des incertitudes adaptée à ces autres types de méta-modèle. Cependant, d'après les résultats observés, rien ne justifie dans l'immédiat de changer le type de méta-modèle utilisé pour définir la relation entre les déformations et les efforts résultants.

Enfin, l'étude spécifique sur le modèle éléments finis a montré que l'incertitude, c'est-à-dire l'écart-type, sur les efforts résultants en vol est très sensible aux points aberrants. Il serait intéressant d'analyser les manœuvres concernées afin d'identifier les causes de ces écarts. Un outil permettant la gestion de ces points aberrants pourrait alors être programmé. Un critère d'élimination pourrait être mis en place, entraînant le re-calcul de l'incertitude sur les efforts résultants en vol.

En ce qui concerne l'application de la méthodologie dans le contexte industriel, plus de cas de chargement du type vol pourraient être appliqués sur le modèle éléments finis. Par exemple, un seul point de vol par manœuvre a été arbitrairement choisi alors que plusieurs points de vol sont parfois disponibles. Ceci permettrait notamment d'estimer de manière plus précise les incertitudes relatives au vol. L'identification de la distribution de ces incertitudes sur les efforts résultants serait ainsi plus évidente.

De plus, les différentes configurations bords/volets de la voilure pourrait être testées. Ceci pourrait donner, au minimum, des informations supplémentaires sur les effets des surfaces mobiles sur l'estimation des efforts résultants en vol. En effet, certaines configurations bords/volets ne disposent que de quelques cas de chargement du type vol. Par conséquent, il ne serait pas possible d'estimer les

incertitudes relatives au vol avec une qualité suffisante pour cette configuration becs/volets.

Enfin, les aspects non-linéaire et thermique ne sont pas pris en compte. L'aspect thermique peut être étudié sur le même modèle éléments finis que celui utilisé dans le cadre de cette thèse. L'aspect non-linéaire nécessite en revanche l'utilisation d'un modèle éléments finis adapté à ce type d'analyse. Ces deux aspects n'ont pas été traités dans le cadre de cette thèse. Mais ils ont été abordés dans le cadre d'une année de césure réalisée par Erwan LE BEUVANT, sous la responsabilité de l'auteur de ce mémoire. Les études ont été réalisées sur le modèle éléments finis utilisé dans le cadre de cette thèse. Ce modèle éléments finis a été modifié pour rendre possible un calcul non-linéaire (géométrique) sous chargement itératif (Nastran, SOL400). Les résultats ont montré que le chargement non-linéaire du modèle a peu d'impact sur l'étalonnage au sol, que ce soit sur les déformations ou sur les paramètres du modèle. Un chargement non-linéaire pour un cas de type vol peut avoir un impact non négligeable sur les déformations de certains ponts de jauge, associés à certains types d'efforts. En revanche, l'impact de ce chargement non-linéaire de type vol sur les efforts résultants est faible voire négligeable pour l'effort tranchant et le moment de flexion. Pour la torsion, il n'est pas possible de statuer en raison de la modification apportée à l'outil d'extraction des efforts résultants dans le modèle éléments finis. De même, le comportement thermique de la structure semble avoir un impact non négligeable sur les déformations et donc sur l'estimation des efforts résultants en vol. Cet impact peut donc être supérieur aux incertitudes relatives au vol. Il convient de consolider cette étude. Compte tenu des impacts non négligeables des aspects thermique et peut être non-linéaire, il serait intéressant d'approfondir le sujet pour savoir comment ces deux effets doivent être pris en compte dans l'estimation des efforts résultants en vol et de leur incertitude. L'idéal serait de disposer d'un modèle unique, affiné dans les zones d'intérêt et avec des surfaces mobiles, où des calculs linéaires, non-linéaires et thermiques peuvent être effectués, voir des calculs couplés non-linéaires et thermiques.

Annexes

Annexe A

Rappels de probabilité

A.1 Espace de probabilité

Une **expérience aléatoire** est définie par l'ensemble Ω des épreuves, c'est-à-dire des résultats possibles de l'expérience notés ω . Un **évènement aléatoire** A est un sous-ensemble de l'ensemble Ω . Cet évènement aléatoire A est réalisé si l'expérience ω appartient à A , noté $\omega \in A$.

Soit A et B deux évènements de Ω . La **réunion** de ces deux évènements est la réalisation de l'évènement A ou B , notée $A \cup B$. L'**intersection** de ces deux évènements est la réalisation de l'évènement A et B , notée $A \cap B$. Ces évènements sont dits incompatibles si les sous-ensembles A et B sont disjoints :

$$A \cap B = \emptyset \tag{A.1}$$

Le contraire de l'évènement A est appelé **évènement complémentaire**, noté \bar{A} , et vérifie :

1. $A \cap \bar{A} = \emptyset$
2. $A \cup \bar{A} = \Omega$

Une **tribu** $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\Omega)$, ensemble des parties de Ω , vérifie :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$;
2. soit A un sous-ensemble de Ω : $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{T}$;
3. \mathcal{T} est stable par union dénombrable : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Les éléments de \mathcal{T} sont des évènements aléatoires. La tribu engendrée par \mathcal{A} , une famille de sous-ensemble de Ω , est la plus petite tribu contenant \mathcal{A} . Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, la tribu engendrée par les ouverts de \mathbb{R}^n est appelée tribu des Boréliens, notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Une **probabilité** \mathbb{P} est une fonction définie sur une tribu \mathcal{T} à valeurs dans $[0,1]$ vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. $\forall A, B \in \mathcal{T} / A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;
3. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n A_n \in A_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

En résumé, la théorie des probabilités permet de se munir d'un espace de probabilité défini par le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ où Ω est l'espace des événements observables, \mathcal{T} est la tribu des événements de Ω et \mathbb{P} est la mesure de probabilité définie par l'application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$.

A.2 Variable aléatoire

La notion de variable aléatoire permet d'associer une valeur scalaire à la réalisation potentielle d'un événement aléatoire ω dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Les variables aléatoires considérées ici sont réelles, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R} . Une **variable aléatoire réelle** X est une application de (Ω, \mathcal{T}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ vérifiant pour tout Borélien B de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{T} \tag{A.2}$$

Une variable aléatoire est aussi appelée **fonction mesurable**. Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont notées x . Généralement, la notation majuscule est utilisée pour désigner une variable aléatoire et la notation minuscule est utilisée pour désigner ses réalisations.

Une variable aléatoire est dite **discrète** si elle ne peut avoir qu'un nombre fini de réalisations possibles. Sinon, une variable aléatoire est dite **continue**. Dans le cas présent, les variables aléatoires considérées sont continues.

La **loi de la variable aléatoire** X sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est une probabilité définie par :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega / X(\omega) \in B) \tag{A.3}$$

D'après la définition précédente, calculer la probabilité de l'événement ω appartenant à Ω telle que son image par X soit dans B revient à calculer la probabilité des réalisations x de la variable aléatoire X appartenant à B . Pour simplifier les notations, la probabilité de la variable aléatoire X s'écrit :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}_X(X = x) \quad \text{où } x \in B \tag{A.4}$$

Si la variable aléatoire X est continue alors il existe une fonction f_X positive ou nulle appelée **densité de probabilité** telle que :

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X(x) dx \tag{A.5}$$

Cette densité de probabilité est continue. La probabilité \mathbb{P}_X vaut 1 sur \mathbb{R} d'après la définition de la probabilité donnée en A.1.

Il convient d'expliciter certaines caractéristiques sur la distribution de la variable aléatoire X . L'**espérance mathématique** $E[\cdot]$ de la variable aléatoire X , aussi appelée **moyenne** notée μ_X ou **moment centré d'ordre 1** noté m'^1 , est définie par :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \mu_X = m'^1 \quad (\text{A.6})$$

La moyenne μ_X est un indicateur de la tendance centrale de la variable aléatoire X considérée. La **variance** $Var[\cdot]$ de la variable aléatoire X , aussi appelée **moment centré d'ordre 2** noté m'^2 , est définie par :

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = m'^2 \quad (\text{A.7})$$

La variance est un indicateur de la dispersion de la variable aléatoire X considérée autour de sa moyenne μ_X . À partir des deux définitions précédentes, l'**écart-type** σ_X et le **coefficient de variation** CV_X de la variable aléatoire X sont définis :

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} \quad (\text{A.8})$$

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (\text{A.9})$$

D'une manière générale, le moment d'ordre n noté m^n et le moment centré d'ordre n noté m'^n de la variable aléatoire X sont définis par :

$$m^n = E[(X)^n] \quad (\text{A.10})$$

$$m'^n = E[(X - E[X])^n] \quad (\text{A.11})$$

Les moments centrés d'ordre 3 et 4 sont appelés respectivement **asymétrie** et **kurtosis**. Comme son nom l'indique, le moment centré d'ordre 3 est un indicateur de l'asymétrie des réalisations de la variable aléatoire X considérée. Le moment centré d'ordre 4 est un indicateur de l'aplatissement des extrêmes de la distribution de la variable aléatoire X considérée.

La **fonction de répartition** F_X de la variable aléatoire X est définie par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \mathbb{P}_X(X \leq x) \quad (\text{A.12})$$

Les **quantiles**, aussi appelé **fractiles**, de la variable aléatoire X sont les valeurs x_α telle que la probabilité, pour toute valeur x de X inférieure ou égale à x_α , soit égale à α , c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X \leq x_\alpha) = F_X(x_\alpha) = \alpha \quad (\text{A.13})$$

Les quantiles x_α sont donc donnés par la fonction de répartition inverse F_X^{-1} . L'intervalle de confiance $[x_{\alpha^-}; x_{\alpha^+}]$ à $p_\alpha = 100 \cdot \alpha \%$ de probabilité sur la variable aléatoire X correspond à :

$$\mathbb{P}(x_{\alpha^-} \leq X \leq x_{\alpha^+}) = \int_{x_{\alpha^-}}^{x_{\alpha^+}} f_X(u) du = \alpha \quad (\text{A.14})$$

Par symétrie, les bornes de cet intervalle de confiance sont données par :

$$F_X(x_{\alpha^-}) = \frac{1 - \alpha}{2} \quad (\text{A.15})$$

$$F_X(x_{\alpha^+}) = \frac{1 + \alpha}{2} \quad (\text{A.16})$$

Les intervalles de confiance les plus couramment utilisées sont les intervalles de confiance à 95% ou 99%.

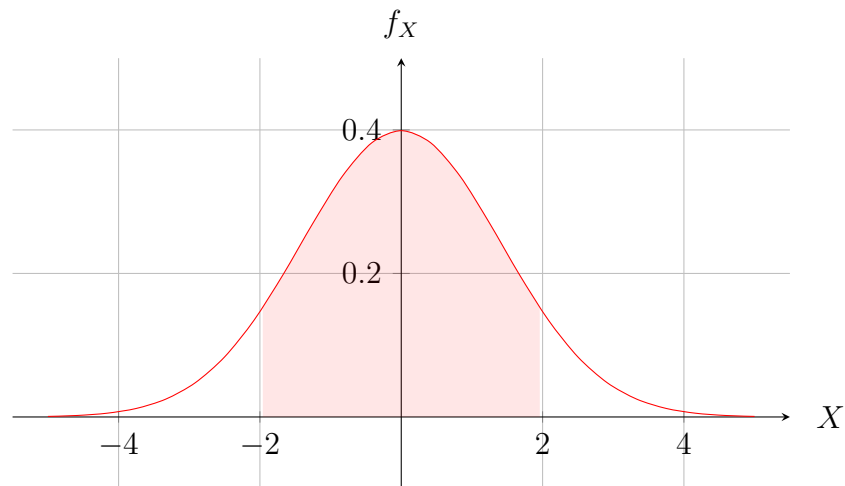


FIGURE A.1 – Fonction de densité de probabilité de la loi normale

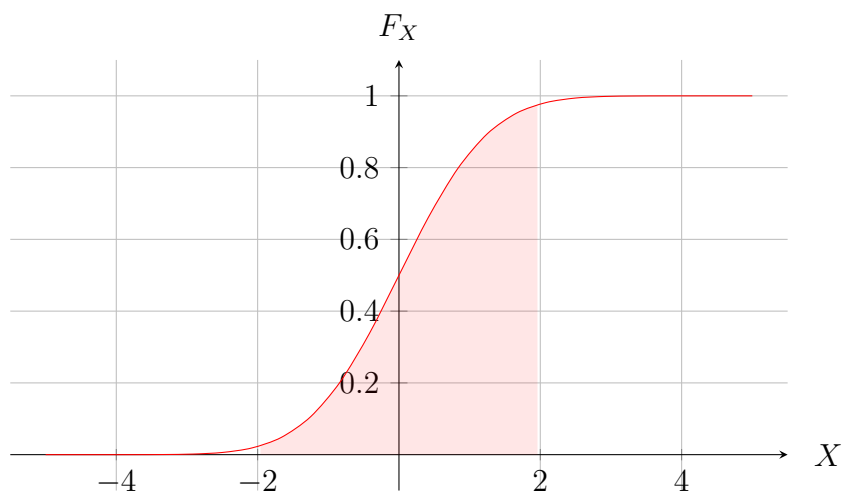


FIGURE A.2 – Fonction de répartition de la loi normale

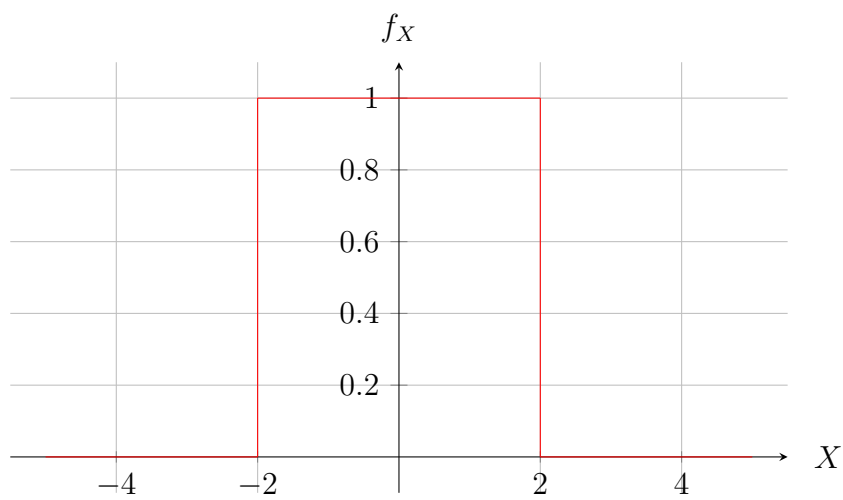


FIGURE A.3 – Fonction de densité de probabilité de la loi uniforme

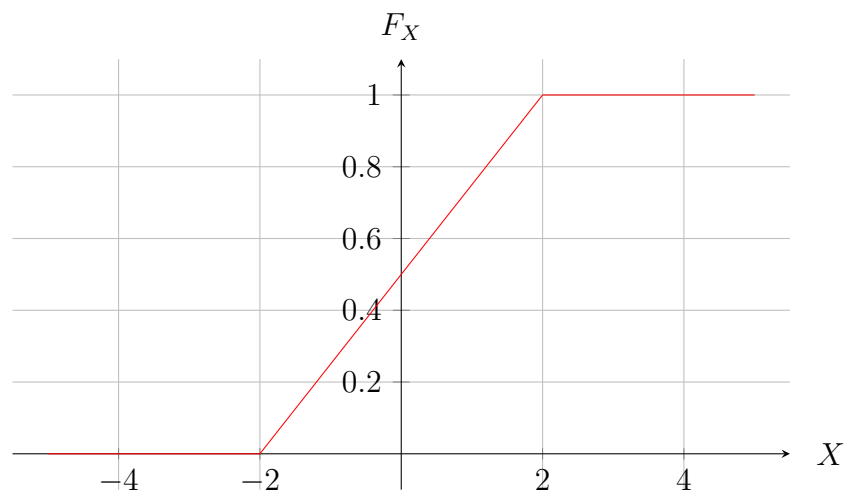


FIGURE A.4 – Fonction de répartition de la loi uniforme

Annexe B

Compléments en résistance des matériaux

B.1 Résistance des matériaux

En mécanique des milieux continus, la résistance des matériaux permet de relier le comportement global d'une structure au comportement local des matériaux constituant cette structure. Elle permet de passer des actions extérieures appliquées sur la structure au champ de déplacement local, et inversement. Elles reposent sur plusieurs hypothèses :

1. sur le problème étudié :
Il doit être sollicité :
 - (a) en petits déplacements :
La géométrie de la structure n'est pratiquement pas modifiée et les déformations sont faibles.
 - (b) quasi-statique :
Les effets dynamiques sont négligeables.
 - (c) quasi-isotherme :
La température n'évolue quasiment pas.
2. sur le matériau :
Un matériau soumis à des forces ou des moments, désignés par le terme général d'efforts, se déforme sous leurs effets. Il doit être :
 - (a) élastique :
Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiales lorsque ces efforts ne sont plus appliqués.
 - (b) linéaire :
Les déformations sont proportionnelles aux contraintes.

(c) homogène :

Le matériau est de même nature dans tout son volume. Il peut alors être défini par un volume élémentaire constitué du même matériau que l'ensemble du volume.

(d) isotrope :

Les propriétés du matériau sont identiques, quelque soit la direction.

Certaines des hypothèses précédentes sont très restrictives, comme les hypothèses de petits déplacements et de matériau isotrope. L'hypothèse de petits déplacements peut se transformer en hypothèse de grands déplacements si les déformations restent faibles et élastiques [LC04]. L'hypothèse d'isotropie du matériau n'est pas vérifiée pour beaucoup des matériaux utilisés actuellement, tels que les composites qui ont un comportement anisotrope. Ceci a donc amené à l'introduction de la loi de Hooke généralisée pour remplacer la loi de Hooke classique qui s'applique dans le cas d'un matériau isotrope.

Les hypothèses précédentes aboutissent à la démarche suivante pour relier les actions extérieures appliquées sur la structure au champ de déplacement local (et inversement) :

1. le principe de la coupure :

Le principe de la coupure, aussi appelé principe de la coupure virtuelle (Figure B.1), permet de relier les actions extérieures, représentées par le torseur $\mathcal{T}_{F_{extérieures}}$ ou $\mathcal{T}_{F_{ext}}$, au champ des efforts de cohésion ou efforts internes, représenté par le torseur $\mathcal{T}_{cohésion}$ ou \mathcal{T}_{coh} . D'après ce principe, le torseur de cohésion est égal à l'opposé du torseur des actions extérieures sur la structure, comme défini par l'équation suivante :

$$\mathcal{T}_{coh} = -\mathcal{T}_{F_{ext}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{21} \\ \mathbf{M}_{21} \end{array} \right\}_O \quad (\text{B.1})$$

où :

- R_{21} est la force résultante du torseur des efforts de cohésion \mathcal{T}_{coh} ;
- M_{21} est le moment résultant du torseur des efforts de cohésion \mathcal{T}_{coh} .

2. le principe d'équivalence :

Le principe d'équivalence intervient pour relier le champ des efforts de cohésion, \mathcal{T}_{coh} , au champ de tenseur des contraintes, noté $\overline{\overline{\sigma}}$ ou σ . Le principe d'équivalence est défini par les hypothèses de modélisation adoptées pour la structure considérée. Pour exprimer cette relation, le vecteur contrainte \mathbf{T} , calculé au point M de la surface S de normale \mathbf{n} , est introduit. Ce vecteur contrainte $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$ (Figure B.2) est défini par les équations suivantes :

$$\mathbf{R}_{21} = \int_S \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) dS \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{M}_{21} = \int_S \mathbf{OM} \wedge \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) dS \quad (\text{B.3})$$

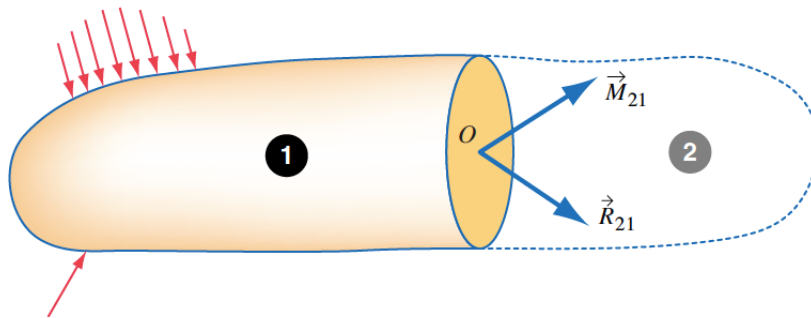


FIGURE B.1 – Principe de la coupure virtuelle sur un solide

La relation entre le vecteur contrainte $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$ et le champ de tenseur des

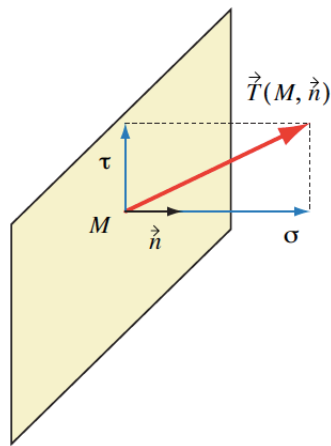


FIGURE B.2 – Vecteur contrainte

contraintes σ au point M est définie par :

$$\mathbf{T}(M, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(M) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.4})$$

Le champ de tenseur des contraintes σ est parfois noté $\overline{\mathbf{T}}$ ou \mathbf{T} . Mais cette notation ne sera pas employée ici pour ne pas être confondue avec le vecteur contrainte $\mathbf{T}(M, \mathbf{n})$.

3. la loi de Hooke généralisée :

La loi de Hooke généralisée définit la relation entre le tenseur de contraintes, σ , et le tenseur des déformations, noté $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{B.5})$$

où :

- $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, d'ordre 2 ;
 - $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations, d'ordre 2 ;
 - \boldsymbol{C} , ou $\overline{\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}}$, est le tenseur des rigidités élastiques, d'ordre 4.
4. dérivation ou intégration :
Le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ est obtenu par dérivation des composantes du champ de déplacement \boldsymbol{U} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (\text{B.6})$$

Inversement, le champ de déplacement \boldsymbol{U} est obtenu par intégration des composantes du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Le modèle de la théorie des poutres intervient au niveau du principe d'équivalence. Il est défini dans la suite [B.3](#).

B.2 Définitions concernant la structure de poutre

Une poutre se définit comme un solide engendré par des surfaces, appelées sections droites, vérifiant les caractéristiques suivantes :

1. propriétés de la courbe moyenne :
Les centres de gravité des sections droites forment une courbe continue et dérivable, appelée courbe moyenne (Figure [B.4](#)). Le rayon de courbure de la courbe moyenne est grand devant la longueur de la poutre.
2. propriétés des sections droites :
Les sections droites sont perpendiculaires à la courbe moyenne (Figure [B.4](#)). Elles varient de manière continue et lente.
3. propriétés sur les dimensions :
Les dimensions transverses, c'est-à-dire des sections droites, est petite devant la longueur de la courbe moyenne. En général, un rapport deux ou trois entre la plus grande dimension transverse et la longueur est suffisant pour pouvoir appliquer la théorie des poutres.
4. propriétés sur le matériau :
Le matériau est homogène et isotrope.

La structure de poutre la plus simple est une structure avec une courbe moyenne droite et une section droite constante (Figure [B.3](#)). D'autres structures, plus complexes, sont aussi considérées comme des poutres si elles respectent les propriétés précédentes.

Une fibre est un volume généré par un élément de surface dS d'une section droite suivant une courbe parallèle à la courbe moyenne. La fibre générée par la courbe moyenne est appelée fibre neutre (Figure [B.4](#)).



FIGURE B.3 – Exemple de structure de poutre

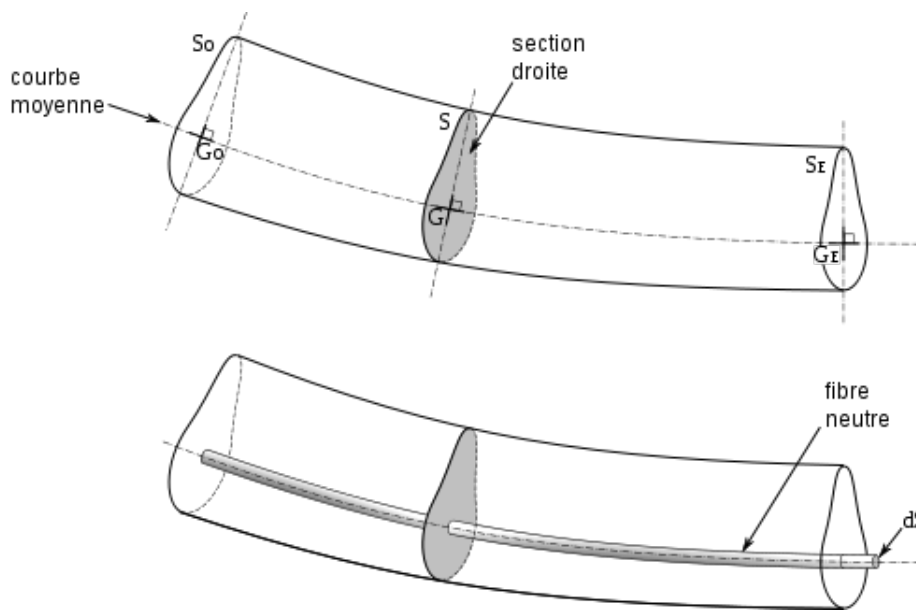


FIGURE B.4 – Définitions relatives à la structure de poutre

B.3 Théorie des poutres

L'étude des poutres est définie par la théorie des poutres. Elle repose sur plusieurs principes :

1. le principe de Saint-Venant :
Soit un point quelconque de la poutre suffisamment éloigné des points d'application des forces et des liaisons. Le comportement de ce point est indépendant de la manière dont sont appliqués les forces sur la poutre et de la conception physique des liaisons. Le comportement en ce point est donc défini par le torseur des efforts de cohésion (ou internes), qui dépend du torseur des actions extérieures tel que décrit par le principe de la coupure. Si ce principe n'est pas vérifié, il faut alors se tourner vers les principes de la mécanique des milieux continus, et non ceux de la résistance des matériaux.
2. le principe de superposition :
Toute action extérieure, aussi appelée sollicitation ou chargement, complexe sur la structure peut se décomposer en une somme d'actions extérieures élémentaires. Les effets de cette action extérieure complexe est donc la somme des effets de chaque action extérieure élémentaire. Ce principe découle de la loi de Hooke définie dans le domaine de la résistance des matériaux sur lequel repose la théorie des poutres.
3. le principe de Navier-Bernoulli :
Sous l'effet d'une sollicitation, les sections droites le long de la fibre moyenne restent planes après déformation. Or, l'étude des déformations d'une poutre sous l'effet d'un effort tranchant a montré que ces sections droites ne restent pas planes : elles subissent un gauchissement sous l'effet de ce cisaillement. Il en découle deux théories (Figure B.5) :
 - (a) la théorie d'Euler-Bernoulli :
Elle reprend le principe initial de Navier-Bernoulli selon lequel les sections droites restent planes et perpendiculaires à la courbe moyenne. Les effets de cisaillement sont alors négligés.
 - (b) la théorie de Timoshenko-Mindlin :
Les effets de cisaillement sont pris en compte. Le principe de Navier-Bernoulli est modifié et devient : deux sections droites infiniment voisines le long de la fibre moyenne deviennent deux sections gauches superposables par déplacement après déformation. Ce déplacement étant petit, les variations de longueur de tout tronçon de fibre peuvent être considérées comme des fonctions linéaires des coordonnées de cette fibre dans le plan de la section.

Comme défini précédemment, le modèle de poutre intervient sur le principe d'équivalence qui permet de relier le torseur des efforts de cohésion \mathcal{T}_{coh} au champ

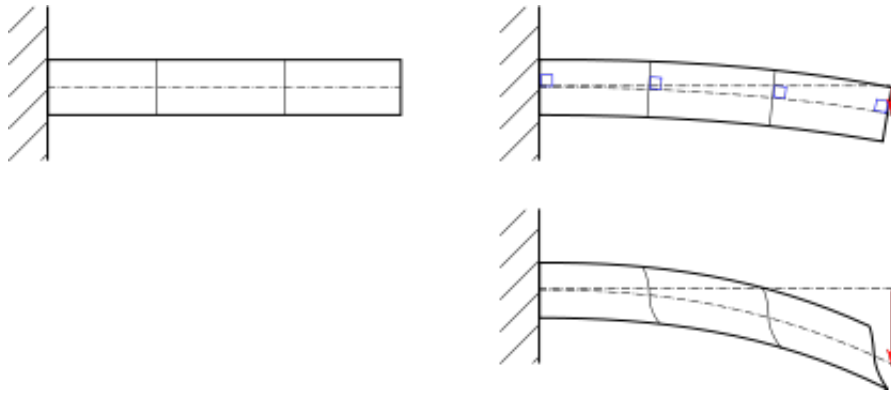


FIGURE B.5 – Poutre à l'état initial (à gauche), déformée (à droite) selon la théorie d'Euler-Bernoulli (en haut) ou de Timoschenko-Mindlin (en bas)

de tenseur des contraintes σ . D'une manière générale, le torseur de cohésion \mathcal{T}_{coh} s'écrit :

$$\mathcal{T}_{coh} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(M_0, x, y, z)} \quad (\text{B.7})$$

où :

- N est l'effort normal de direction tangente à la courbe moyenne, responsable de la traction-compression ;
- T_y et T_z sont les efforts tranchants selon y ou z , aussi notés V_y et V_z , s'exerçant perpendiculairement à la courbe moyenne, responsables du cisaillement ;
- M_t est le moment de torsion, aussi noté T , de direction tangente à la courbe moyenne, responsable de la torsion ;
- M_{fy} et M_{fz} sont les moments fléchissant ou moments de flexion selon y ou z , aussi notés M , s'exerçant perpendiculairement à la courbe moyenne, responsables de la flexion.

Le tenseur des contraintes σ s'écrit donc dans le repère (x, y, z) , renommé (e_1, e_2, e_3) ici :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} \quad (\text{B.8})$$

Du fait de sa symétrie, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ peut aussi s'écrire de manière condensée, selon la notation de Voigt suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Le modèle de poutre définit la relation entre le tenseur des efforts de cohésion \mathcal{T}_{coh} et le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ d'après les équations (B.2) à (B.4). Les contraintes existantes dans la poutre soumise à des sollicitations simples sont données ici :

$$\text{Traction : } \sigma_{yy} = \frac{T_y}{S} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{Cisaillement : } \sigma_{zy} = \frac{T_z}{S} \quad (\text{B.11})$$

$$\text{Flexion pure : } \sigma_{yy} = -\frac{M_{fx}}{I_{G_x}} z \quad (\text{B.12})$$

$$\text{Torsion : } \sigma_r = \frac{M_t}{I_G} r \quad (\text{B.13})$$

où :

- I_{G_x} est le moment quadratique d'axe x ;
- I_G est le moment quadratique de torsion.

Annexe C

Autres résultats : Influence des incertitudes sur le problème

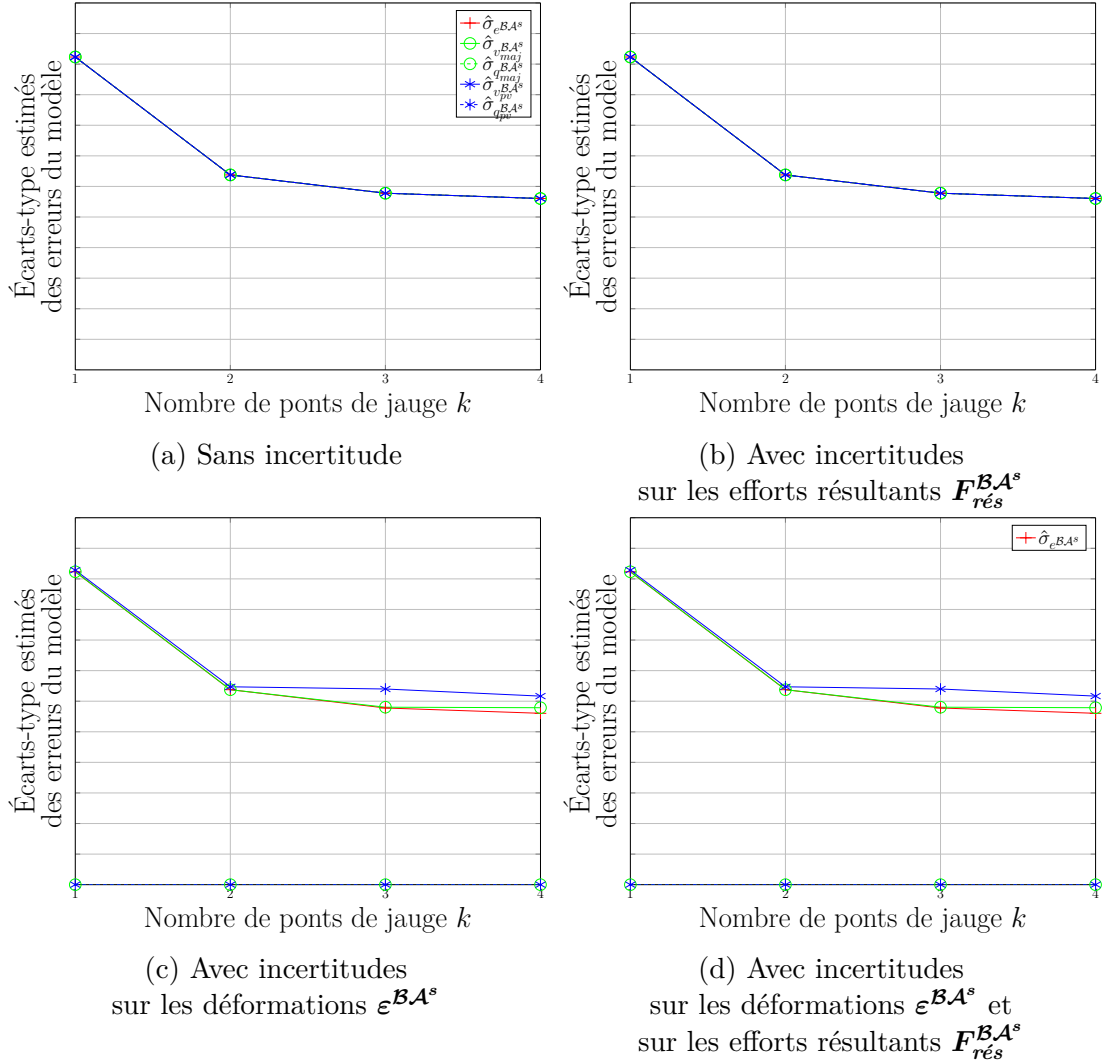


FIGURE C.1 – Comparaison des écarts-type estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) ou $v^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) et des écarts-type estimés $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B},\mathcal{A}^s}$ pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation et pour la flexion $M_{f_y}^s$

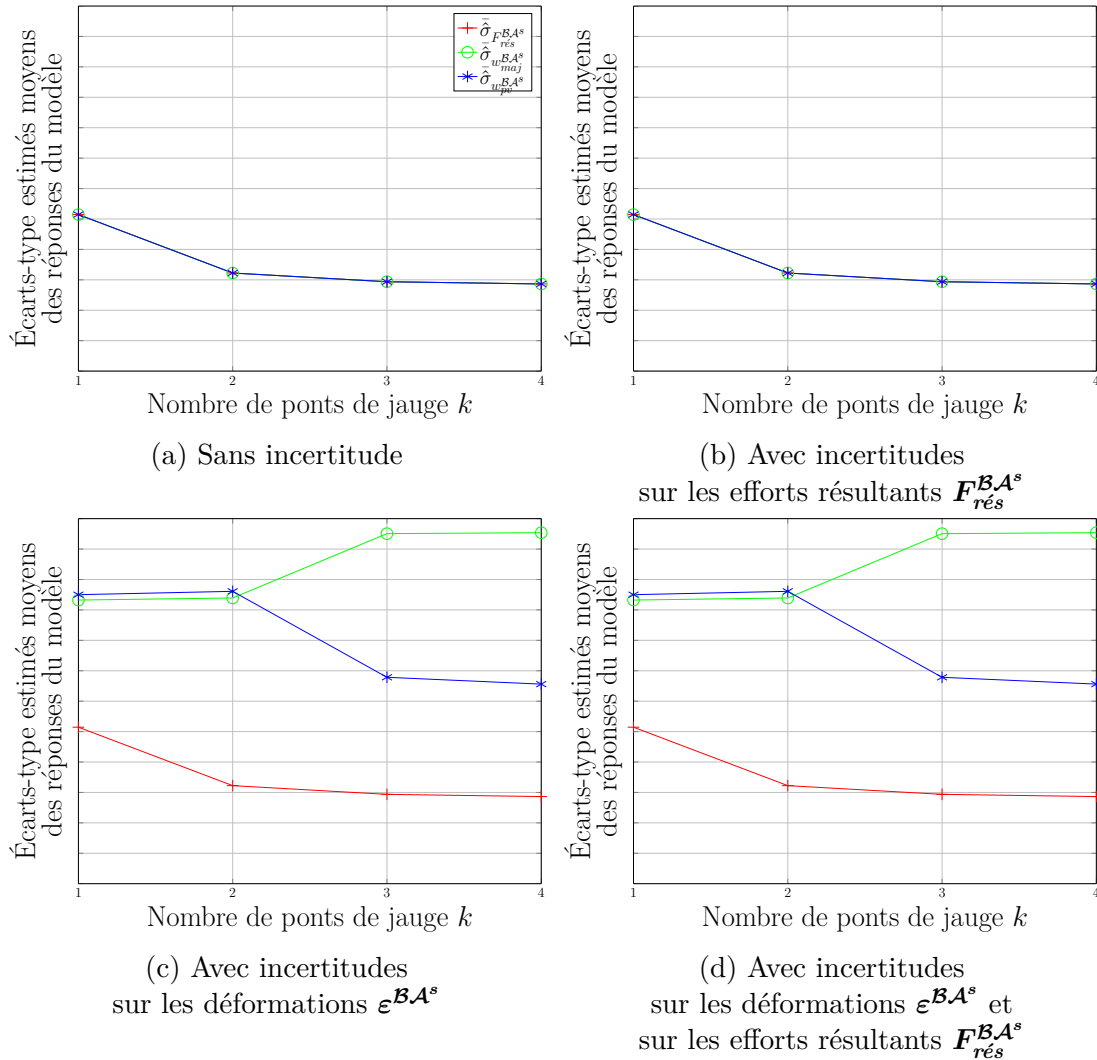


FIGURE C.2 – Comparaison des écarts-type estimés moyens $\hat{\sigma}_{F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{w}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) ou $F_{rés}^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s*}$ (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation et pour la flexion $M_{f_y}^s$

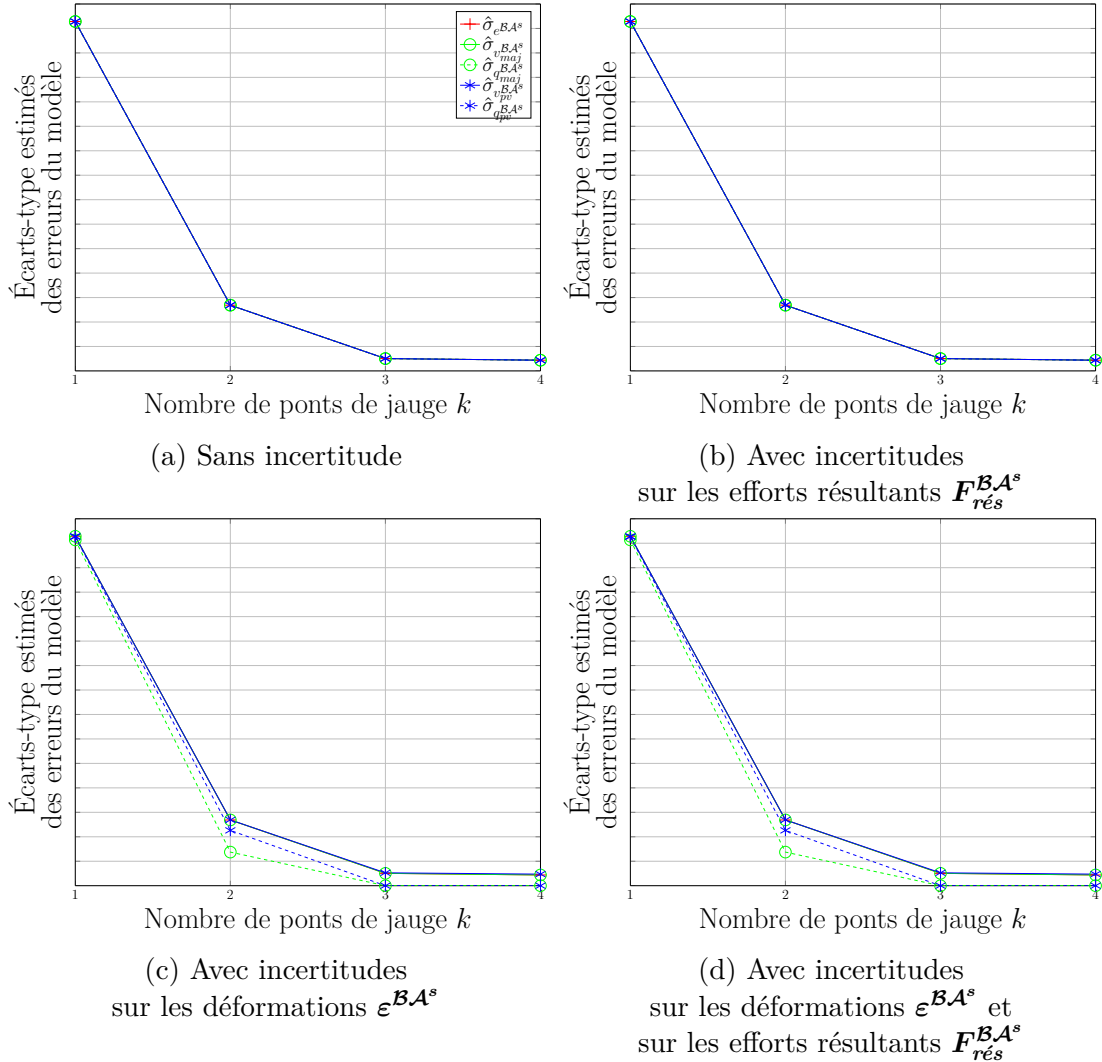


FIGURE C.3 – Comparaison des écart-types estimés $\hat{\sigma}_{e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ ou $\hat{\sigma}_{v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des erreurs du modèle $e^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) ou $v^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) et des écart-type estimés $\hat{\sigma}_{q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}}$ des « erreurs dans l'équation » $q^{\mathcal{B}\mathcal{A}^s}$ pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation et pour la torsion M_t^s

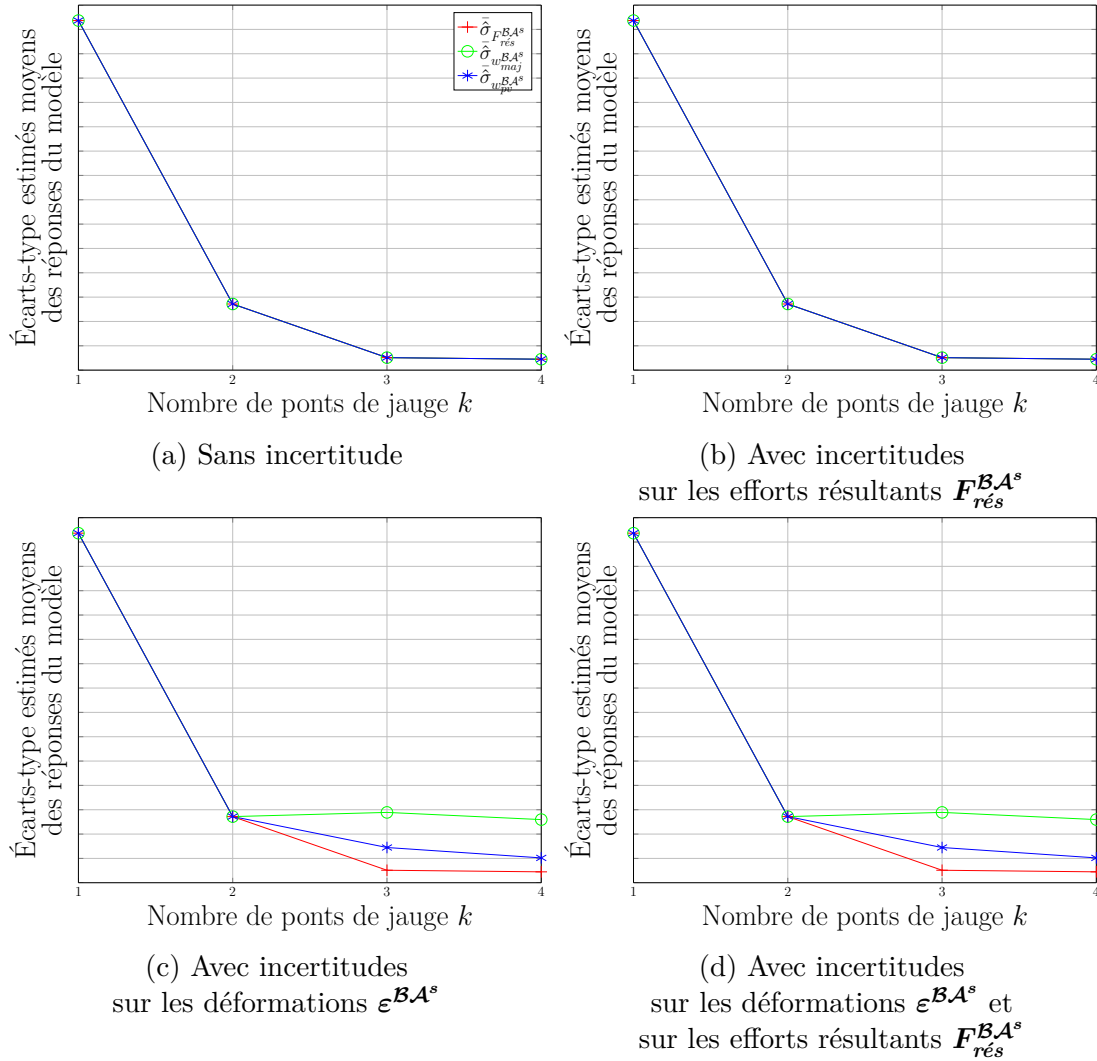


FIGURE C.4 – Comparaison des écarts-type estimés moyens $\bar{\sigma}_{F_{rés}^{BA^s}}$ ou $\bar{\sigma}_{w^{BA^s}}$ des réponses du modèle $F_{rés}^{BA^s}$ (sans prise en compte des incertitudes) ou $F_{rés}^{BA^{s*}}$ (avec prise en compte des incertitudes, de manière majorée *maj* ou par valeur *pv*) pour le meilleur méta-modèle construit $\hat{\phi}^s$ pour chaque formulation et pour la torsion M_t^s

Bibliographie

Bibliographie

- [AH49] W.S. Aiken and D.A. Howard. A comparison of wing loads measured in flight on a fighter-type airplane by strain-gage and pressure distribution methods. Technical report, National Advisory Committee for Aeronautics, Nov. 1949.
- [Bau12] Vincent Baudoui. *Optimisation robuste multiobjectifs par modèles de substitution*. PhD thesis, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Mar. 2012.
- [BC05] Marc Bonnet and Andrei Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2) :R1, 2005.
- [Bri06] P Brizemur. Analyse de résultats expérimentaux. Préparation à l'épreuve de montage du CAPES de Sciences Physiques, Septembre 2006.
- [BTKB79] A. Burns, J.P. Thompson, G.E. King, and Aeronautical Research Council (Great Britain). The application of a parametric method of fatigue load measurement to wings : Based on flight measurements on a lightning mk. 5, 1979.
- [Buo95] J.P. Buonaccorsi. Prediction in the presence of measurement error : General discussion and an example predicting defoliation. *Biometrics*, 51(4) :1562–1569, Dec 1995.
- [BW51] G. E. P. Box and K. B. Wilson. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, XIII(1) :1–45, 1951.
- [Cle04] Maurice Clerc. *L'optimisation par essais particuliers*. Hermès Science, octobre 2004.
- [CML07] Pierre-André Cornillon and Eric Matzner-Løber. *Régression : Théorie et applications*. Statistique et probabilités appliquées. Springer, 2007.
- [Eck76] C.V. Eckstrom. Flight loads measurements obtained from calibrated strain-gage bridges mounted externally on the skin of a low-aspect-ratio wing. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Dec. 1976.

- [Fie70] R.A. Fields. A study of the accuracy of a flight-heating simulation and its effect on load measurement. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Apr. 1970.
- [FNB⁺11] M. Fontan, A. Ndiaye, D. Breyse, F. Bos, and C. Fernandez. Soil–structure interaction : Parameters identification using particle swarm optimization. *Computers & Structures*, 89(17-18) :1602–1614, September 2011.
- [FOM72] R.A. Fields, F.V. Olinger, and R. C. Monaghan. Experimental investigation of mach 3 cruise heating simulations on a representative wing structure for flight loads measurement. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Mar. 1972.
- [Ful87] W.A. Fuller. *Measurement Error Models*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1987.
- [Gal05a] Céline Gallet. An example of global structural optimisation with genetic algorithms in the aerospace field. In *COMPLAS 2005, International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona (Spain), September 2005. COMPLAS 2005, International Conference on Computational Plasticity.
- [Gal05b] Céline Gallet. Global structural optimisation with genetic algorithms. In *EUCASS 2005, 1st European Conference for Aero-Space Sciences*, Moscow (Russia), July 2005. EUCASS 2005, 1st European Conference for Aero-Space Sciences.
- [Gil06] J.W. Gillard. An historical overview of linear regression with errors in both variables. *Cardiff University School of Mathematics Technical Report*, 2006.
- [GQ65] S.M. Goldfeld and R.E. Quandt. Some tests for homoscedasticity. *Journal of the American Statistical Association*, 60(310) :539–547, Jun. 1965.
- [Gra] Michael Grabe. Ten theses for a new gum.
- [Gra05] M. Grabe. *Measurement Uncertainties in Science and Technology*. Springer, 2005.
- [Hac10] Géraldine Hache. Incertitudes sur les déformations mécaniques déterminées sur matériaux composites au cours des essais en vol. Technical report, CETIM, 2010.
- [Had02] Jacques Hadamard. Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13 :49–52, 1902.
- [Hol92] John H. Holland. Genetic algorithms. *Scientific American*, pages 66–72, July 1992.

- [HS55] W.B. Huston and T.H. Skopinski. Measurement and analysis of wing and tail buffeting loads on a fighter airplane. Technical report, National Advisory Committee for Aeronautics, Jan. 1955.
- [HWR64] P.B. Hovell, D.A. Webber, and T.A. Roberts. The interpretation of strain measurements for flight load determination. Technical report, Ministry of Aviation, Aeronautical Research Council (Great Britain), Aug. 1964.
- [Ish90] K. Ishikawa. *Introduction to Quality Control*. Taylor & Francis, 1990.
- [JAAU69] J.M. Jenkins, United States. National Aeronautics, Space Administration, and Flight Research Center (U.S.). Flight measurements of canard loads, canard buffeting, and elevon and wing-tip hinge moments on the xb-70 aircraft including comparisons with predictions. Technical report, 1969.
- [Jay57] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 106 :620–630, May 1957.
- [JCGa] JCGM. *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement*. Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM).
- [JCGb] JCGM. *International vocabulary of metrology - Basic and general concepts and associated terms (VIM)*. Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM).
- [JD97] J.M. Jenkins and V.M. DeAngelis. A summary of numerous strain-gage load calibrations on aircraft wings and tails in a technological format. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Jul. 1997.
- [JK77] J.M. Jenkins and A.E. Kuhl. A study of the effect of radical load distributions on calibrated strain gage load equations. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Jul. 1977.
- [JKC77] J.M. Jenkins, A.E. Kuhl, and A.L. Carter. The use of a simplified structural model as an aid in the strain gage calibration of a complex wing. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Jul. 1977.
- [Jon01] Donald R. Jones. A taxonomy of global optimization methods based on response surfaces. *Journal of Global Optimization*, 21 :345–383, 2001.
- [KD09] A.D. Kiureghian and O. Ditlevsen. Aleatory or epistemic? does it matter? *Structural Safety*, 31(2) :105–112, 2009. Risk Acceptance and Risk Communication Risk Acceptance and Risk Communication.

- [KK92] J.N. Kapur and H.K. Kesavan. Entropy optimization principles and their applications. In *Entropy and Energy Dissipation in Water Resources*, volume 9 of *Water Science and Technology Library*, pages 3–20. Springer Netherlands, 1992.
- [Kon94] J. Kong. *The Accuracy of Parameter Estimation in System Identification of Noisy Aircraft Load Measurement*. PhD thesis, California University, Jan. 1994.
- [LC04] J. Lemaitre and J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Sciences SUP. Sciences de l'ingénieur. Dunod, 2004.
- [Men89] W. Menke. *Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory*. International Geophysics. Elsevier Science, 1989.
- [MF73] R.C. Monaghan and R.A. Fields. Experiments to study strain gage load calibrations on a wing structure at elevated temperatures. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Aug. 1973.
- [MMAC09] R.H. Myers, D.C. Montgomery, and C.M. Anderson-Cook. *Response Surface Methodology : Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2009.
- [Nic63] O.P. Nicholas. Tests on a hunter f.2 of two strain gauge methods for measuring tailplane loads in flight, with some loads measured in level flight, pitch-ups and transonic dives. Technical report, Ministry of Aviation, Aeronautical Research Council (Great Britain), Apr. 1963.
- [PE75] E.L. Peele and C.V. Eckstrom. Strain-gage bridge calibration and flight loads measurements on a low-aspect-ratio thin wing. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Oct. 1975.
- [Per08] F. Perrin. *Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures*. PhD thesis, 2008.
- [Rea89] L.F. Reardon. Evaluation of a strain-gage load calibration on a low-aspect-ratio wing structure at elevated temperature. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Jun. 1989.
- [Rou11] Nicolas Roussouly. *Approche probabiliste pour la justification par analyse des structures spatiales*. PhD thesis, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Déc. 2011.
- [SA48] A.R. Stokke and W.S. Jr Aiken. Flight measurements of buffeting tail loads. Technical report, National Advisory Committee for Aeronautics, Oct. 1948.

- [SAH54] T.H. Skopinski, W.S. Aiken, and W.B. Huston. Calibration of strain-gage installations in aircraft structures for the measurement of flight loads. Technical report, National Advisory Committee for Aeronautics, Jan. 1954.
- [Sap06] G. Saporta. *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2006.
- [SAS13] M. Sallak, F. Aguirre, and W. Schon. Incertitudes aléatoires et épistémiques, comment les distinguer et les manipuler dans les études de fiabilité? In *QUALITA2013*, Compiègne, France, Mar. 2013.
- [Sha03] Shalabh. Consistent estimation of coefficients in measurement error models with replicated observations. *Journal of Multivariate Analysis*, 86(2) :227 – 241, 2003.
- [SMRR89] R. Sims, P. McCrosson, R. Ryan, and J. Rivera. X-29a aircraft structural loads flight testing. In *20th Annual Society of Flight Test Engineers Symposium*, NASA technical report, Reno, NV, 18-21 Sep. 1989. National Aeronautics and Space Administration, United States.
- [SS97] A.K. Srivastava and Shalabh. Improved estimation of the slope parameter in a linear ultrastructural model when measurement errors are not necessarily normal. *Journal of Econometrics*, 78(2) :153 – 157, 1997.
- [Sud08] Bruno Sudret. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7) :964–979, July 2008.
- [Tar05] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [Tas85] P. Tassi. *Méthodes statistiques*. Collection Economie et statistiques avancées. Série Ecole nationale de la statistique et de l’administration et du Centre d’études des programmes économiques. Economica, 1985.
- [TD69] M.H. Tang and V.M. DeAngelis. Fin loads and control-surface hinge moments measured in full-scale wind-tunnel tests on the x-24a flight vehicle. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Nov. 1969.
- [TK94] B.N. Taylor and C.E. Kuyatt. Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of nist measurement results. Technical Report Technical Note 1297, National Institute of Standards and Technology, Physics Laboratory, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD20899-0001, Sep. 1994.

- [TP71] M.H. Tang and G.P.E. Pearson. Flight-measured hl-10 lifting body center fin loads and control surface hinge moments and correlation with wind-tunnel predictions. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Oct. 1971.
- [TS80] M.H. Tang and R.G. Sheldon. A modified t-value method for selection of strain gages for measuring loads on a low aspect ratio wing. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Nov. 1980.
- [TSS78] M.H. Tang, W.J. Sefic, and R.G. Sheldon. Comparison of concurrent strain gage- and pressure transducer-measured flight loads on a lifting reentry vehicle and correlation with wind tunnel predictions. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Oct. 1978.
- [Ven98] Véronique Venditti. *Aspects du principe de maximum d'entropie en modélisation statistique*. PhD thesis, Grenoble 1, Rocquencourt, 1998. Th. : mathématiques appliquées.