



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par :

Albert Abelló Barberán

le jeudi 15 novembre 2018

Titre :

Turbo égalisation à haute performance pour la transmission par satellite au-delà de la cadence de Nyquist

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED MITT : Réseaux, télécom, système et architecture

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA SCANR

Directeur(s) de Thèse :

M. Jérôme LACAN (directeur de thèse)

M. Damien ROQUE (co-directeur de thèse)

Jury :

Mme Marie-Laure BOUCHERET Professeur INP Toulouse - Présidente

Mme Catherine DOUILLARD Professeur IMT-Atlantique - Rapporteur

M. Jean-Marc BROSSIER Professeur Grenoble-INP - Rapporteur

M. Giulio COLAVOLPE Professeur Université de Parme

M. Ronan COSQUER Ingénieur de Recherche DGA/MI

M. Jérôme LACAN Professeur ISAE-SUPAERO - Directeur de thèse

M. Damien ROQUE Professeur Associé ISAE-SUPAERO - Co-directeur de thèse

Remerciements

J'adresse mes premiers remerciements à mon co-directeur et encadrant de thèse ISAE, Damien Roque, pour m'avoir donné l'opportunité de découvrir le monde de la recherche et de l'enseignement, pour son investissement dans cette thèse et pour le temps considérable qu'il a consacré à relire mes articles et ce manuscrit. Merci également à Jérôme Lacan pour avoir accepté de diriger cette thèse et d'avoir apporté son expérience dans le bon déroulement de celle-ci.

Un grand merci à mon co-encadrant Eutelsat, Jean-Marie Freixe, pour son soutien, pour sa gentillesse et pour son investissement tout au long de la thèse grâce auquel j'ai beaucoup appris en égalisation, codage correcteur d'erreurs et théorie de l'information.

Un grand merci à mon co-encadrant Eutelsat, Nghia Pham, pour ses conseils techniques et pour sa vision applicative qui m'a permis d'en apprendre plus sur les tenants et aboutissants de la recherche industrielle.

Je tiens à remercier Mme Catherine Douillard, M. Ronan Cosquer, M. Giulio Colavolpe, Mme Marie-Laure Boucheret et M. Jean-Marc Brossier qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse et de participer à ma soutenance de thèse en tant que jury.

Merci à mes collègues d'Eutelsat, en particulier à Cristina, Rafa, Stefano et Alex pour leur soutien et pour leur contribution à la très bonne ambiance au travail (et en dehors du travail!), à Laurent pour ses qualités humaines et pour ses bons conseils et à Viphakone pour son esprit critique et pour son humour toujours intelligent. Plus généralement, je souhaite remercier tous mes collègues des départements technique et innovation qui m'ont permis d'en apprendre plus sur le domaine des communications par satellite et sur la recherche et développement industriel.

Merci à mes collègues de l'ISAE, en particulier à Aymeric et Sébastien pour leur soutien et pour leur gentillesse, à Robin pour les soirées guitare, à Stéphanie pour son soutien et pour ses conseils, à Lamine pour ses cours d'histoire et plus généralement à tous les collègues que j'ai pu croiser au département DEOS au cours de la première année et demi de thèse.

Enfin, merci Laura de m'avoir accompagné et soutenu tout au long de cette thèse.

Table des matières

Notations	xii
Table des sigles et acronymes	xv
Introduction	1
1 Techniques de transmission sur canaux à interférence	7
1.1 Émetteur-récepteur linéaire monoporteuse sur canal à AWGN	8
1.2 Détection du message émis en présence d'ISI	17
1.3 Égalisation et décodage itératifs	21
1.4 Synthèse - Vers la réception à complexité maîtrisée	28
2 Égalisation par <i>channel shortening</i>	29
2.1 Structure du système de transmission à raccourcissement de canal	30
2.2 Information mutuelle généralisée	32
2.3 Optimisation de l'égaliseur <i>channel shortening</i>	34
2.4 Synthèse - vers une solution plus compacte de l'égaliseur <i>channel shortening</i> .	39
3 Égaliseur <i>channel shortening</i> avec information <i>a priori</i> sous forme analytique	43
3.1 Expression analytique de l'égaliseur en présence de symboles <i>a priori</i>	44
3.2 <i>Channel shortening</i> et égalisation linéaire MMSE	52
3.3 Évaluation des performances de l'égaliseur	57
3.4 Synthèse - Égalisation <i>channel shortening</i> et information <i>a priori</i>	60
4 Estimation des symboles <i>a priori</i> en entrée de l'égaliseur <i>channel shortening</i>	65
4.1 Structure du récepteur et problème d'estimation	65

4.2	Estimation des symboles <i>a priori</i> à partir des probabilités	67
4.3	Évaluation des performances dans le cadre de l'égalisation <i>channel shortening</i>	71
4.4	Synthèse - Vers un turbo égaliseur rapprochant les limites théoriques	76
5	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> avec codage correcteur d'erreurs	81
5.1	Performances du système de transmission complet sur canal AWGN	82
5.2	Évaluation des performances du système en considérant une synchronisation imparfaite du récepteur	88
5.3	Synthèse - Système de réception complet avec turbo égalisation	92
	Conclusion	93
	A Modèle discret équivalent	99
A.1	Factorisation de \mathbf{G}	99
A.2	Réponse impulsionnelle du canal discret équivalent	103
	Bibliographie	112

Table des figures

1.1	Schéma bloc du système non codé.	8
1.2	Schéma bloc du système discret équivalent non codé.	10
1.3	Taux d'information avec une mise en forme en SRRC ($\alpha = 0, 2$) et alphabet <i>quadrature phase-shift keying</i> (QPSK).	15
1.4	Taux d'information d'un système de Nyquist pour différents alphabets de modulation.	15
1.5	Efficacité spectrale atteignable avec une mise en forme en SRRC ($\alpha = 0, 2$) et alphabet <i>quadrature phase-shift keying</i> (QPSK).	16
1.6	Illustration de l'algorithme BCJR sur le graphe décrivant la factorisation (1.22). 19	
1.7	Exemple de graphe de Tanner illustrant les connexions de la matrice de parité du code correcteur d'erreurs pour $M = 4, P = 8$	21
1.8	Schéma du code IRA vu comme une sous-catégorie de code LDPC.	23
1.9	Schéma bloc de l'émetteur avec codage de canal.	26
1.10	Schéma bloc du récepteur avec turbo égalisation.	27
2.1	Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur <i>channel shortening</i>	30
2.2	Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur <i>channel shortening</i> en présence de symboles <i>a priori</i>	31
2.3	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> sur le canal EPR4.	39
2.4	Comparaison des performances du récepteur <i>channel shortening</i> et du récepteur BCJR classique avec troncature de la réponse impulsionnelle discrète équivalente sur le canal FTN05.	40
2.5	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> sur le canal EPR4.	41
3.1	Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec <i>channel shortening</i>	49
3.2	Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur BCJR en présence de symboles <i>a priori</i>	52

3.3	Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur MMSE en présence de symboles <i>a priori</i>	53
3.4	Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur <i>channel shortening</i> exprimé comme la concaténation d'un filtre MMSE, un filtre correcteur et un égaliseur BCJR de complexité réduite.	55
3.5	Diagramme illustrant les différents cas particuliers du récepteur <i>channel shortening</i> avec retour souple.	57
3.6	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> pour $\nu = 2$ sur le canal FTN05.	60
3.7	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> avec $\sigma_e^2 = 0,5$ sur le canal FTN05.	61
3.8	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> avec $\sigma_e^2 = 0,5$ sur le canal FTN07.	62
3.9	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> avec $\sigma_e^2 = 0,5$ sur le canal FTN09.	62
3.10	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> avec $\sigma_e^2 = 0,5$ sur le canal EPR4.	63
3.11	Performances du récepteur <i>channel shortening</i> sur le canal EPR4.	63
4.1	Schéma bloc de l'émetteur-récepteur <i>channel shortening</i> avec codage correcteur d'erreurs.	66
4.2	Illustration des relations d'entrée-sortie des estimateurs EC et MVU en fonction de la variance du bruit d'estimation.	69
4.3	Comparaison des variances des estimateurs EC et MVU.	70
4.4	Comparaison des erreurs quadratiques moyennes des estimateurs EC et MVU.	70
4.5	Évolution du coefficient γ en fonction du bruit d'estimation pour les estimateurs MVU et EC sur le canal FTN05 avec $\nu = 2$, $E_b/N_0 = 5$ dB.	72
4.6	Évaluation des performances de l'égaliseur <i>channel shortening</i> analytique avec estimateurs MVU et EC en fonction de la variance du bruit d'estimation sur le canal FTN05 avec $\nu = 2$	73
4.7	Évaluation des performances de l'égaliseur <i>channel shortening</i> analytique avec estimateur MVU et de l'égaliseur obtenu numériquement avec contrainte et estimateur EC en fonction de la variance du bruit d'estimation sur le canal FTN05 avec $\nu = 2$	74
4.8	Coefficients de \mathbf{b}_{cs} avec $\nu = 2$ en fonction de γ sur le canal FTN05.	75
4.9	Coefficients de \mathbf{b}_{cs} avec $\gamma = 0,15$ en fonction de ν sur le canal FTN05.	76

4.10	Comparaison des performances de l'égaliseur BCJR-APS avec estimateur symbole MVU et l'égaliseur BCJR classique avec retour probabilités <i>a priori</i> en fonction de la variance du bruit d'estimation pour le canal FTN05.	77
4.11	Comparaison des performances de l'égaliseur BCJR-APS avec estimateur symbole EC et l'égaliseur BCJR classique avec retour probabilités <i>a priori</i> en fonction de la variance du bruit d'estimation pour le canal FTN05.	78
4.12	Histogramme des symboles en sortie de l'estimateur en fonction de la variance du bruit d'estimation, alphabet 2-PAM.	79
5.1	Comparaison des taux d'information théoriques du système FTN05 et les taux atteignables en considérant un FER cible de 10^{-3} , en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2 et avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie). 8 itérations globales.	83
5.2	Comparaison des taux d'information théoriques du système FTN07 et les taux atteignables en considérant un FER cible de 10^{-3} , en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2 et avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie). 8 itérations globales.	84
5.3	Comparaison des taux d'information théoriques du système FTN09 et les taux atteignables en considérant un FER cible de 10^{-3} , en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2 et avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie). 8 itérations globales.	85
5.4	Comparaison des taux d'information du système FTN05 en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie), 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2.	86
5.5	Comparaison des taux d'information théoriques du système FTN05 et les taux atteignables en considérant un FER cible de 10^{-3} et en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie). Évaluation de l'impact du nombre d'itérations globales (2, 4, 6 et 8 de droite à gauche).	87
5.6	Comparaison des taux d'information du système FTN05 en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2. Évaluation de l'impact de la taille du treillis de l'égaliseur BCJR ($\nu = \{2, 3, 4\}$ de droite à gauche).	87

5.7	Comparaison des taux d'information du système FTN05-bis construit avec $\alpha = 0,05$ en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie), 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2.	89
5.8	Schéma bloc du système de communications complet sur canal AWGN.	90
5.9	Comparaison des taux d'information du système FTN05 en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie), 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2. Évaluation de l'impact d'une erreur fixe d'échantillonnage $\epsilon = \{0, 0,05T_s, 0, 1T_s\}$. 91	91
5.10	Comparaison des taux d'information du système FTN05 en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 2$ (BCJR à 4 états sur chaque voie), 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2. Évaluation de l'impact d'une erreur fixe d'échantillonnage $\epsilon = \{0, 0,05T_s, 0, 1T_s\}$. 91	91
5.11	Schéma bloc du récepteur <i>channel shortening</i> étudié.	93
5.12	Diagramme illustrant les différents cas particuliers du récepteur <i>channel shortening</i> proposé dans ces travaux de thèse.	94
A.1	Factorisation de la réponse impulsionnelle discrète pour le canal FTN05, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ où la notation '05' indique une accélération $\tau = 0,5$ avec $\rho = 1,67$ et $L = 8$	101
A.2	Factorisation de la réponse impulsionnelle discrète pour le canal FTN07, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ et accélération $\tau = 0,7$ avec $\rho = 1,19$ et $L = 8$	101
A.3	Factorisation de la réponse impulsionnelle discrète pour le canal FTN05-bis, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,05$ et accélération $\tau = 0,5$ avec $\rho = 1,9$ et $L = 20$	101
A.4	Factorisation de la réponse impulsionnelle discrète pour le canal FTN09, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ et accélération $\tau = 0,9$ avec $\rho = 0,93$ et $L = 8$	102

Liste des tableaux

1.1	<i>Bit degree distributions</i> du standard de diffusion par satellite DVB-S2 pour des trames codées longues ($P = 64800$).	25
3.1	Erreur quadratique entre les filtres obtenus analytiquement et les filtres obtenus avec la méthode du gradient projeté sur le canal FTN05.	58
3.2	Erreur quadratique entre les filtres obtenus analytiquement et les filtres obtenus avec la méthode du gradient projeté sur le canal EPR4.	59
5.1	<i>Bit degree distributions</i> optimisés pour transmission FTN avec channel shortening et $\alpha = 0,2$	85
5.2	<i>Bit degree distributions</i> optimisés pour transmission FTN avec channel shortening et $\alpha = 0,05$	88

Notations

Mathématiques et probabilité

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
$(x * y)$	Produit de convolution entre les variables x et y
$ z $	Module du nombre complexe z ou valeur absolue du nombre réel z
$P(x)$	Probabilité pour la variable aléatoire X de prendre la valeur x
$p(x)$	Densité de probabilité de la variable aléatoire continue x
$E\{x\}$	Espérance mathématique de la variable aléatoire x
$E\{x y\}$	Espérance mathématique de la variable aléatoire x conditionnée par y
\mathbf{a}	Vecteur ligne
\mathbf{A}	Matrice
\mathbf{I}	Matrice identité
$\mathbf{0}$	Matrice nulle ou vecteur nul
$\text{Tr}\{\mathbf{A}\}$	Trace de \mathbf{A}
$\det\{\mathbf{A}\}$	Déterminant de \mathbf{A}
\mathbf{A}^T	Matrice transposée de \mathbf{A}
\mathbf{A}^H	Matrice transposée conjuguée de \mathbf{A}
$\ \mathbf{a}\ $	Norme Euclidienne de \mathbf{a}
$\nabla_B A$	Gradient de la fonction A de plusieurs variables sur la variable matricielle B

Communications numériques

R_s	Rythme symbole
T	Période symbole
τ	Facteur d'accélération du système
ρ	Densité du système
α	Facteur d'excès de bande des filtres SRRC
E_b	Énergie par bit d'information transmis
N_0	Densité spectrale de puissance de bruit
M	Taille de l'alphabet de modulation
$\log_2(M)$	Nombre de bit par symbole transmis
R	Rendement du code correcteur d'erreurs
\mathbf{G}_c	Matrice génératrice du code correcteur d'erreurs
\mathbf{H}_c	Matrice de parité du code correcteur d'erreurs
ψ_i	Nombre de <i>check nodes</i> de degré i dans la matrice de parité du code
ρ_i	Nombre de <i>bit nodes</i> de degré i dans la matrice de parité du code

K	Taille de la séquence de bit non-codés
P	Taille de la séquence de bit codés
N	Taille de la séquence de symboles
\mathbf{a}	Séquence de bit non-codés
\mathbf{b}	Séquence de bit codés
\mathbf{c}	Séquence de bit codés et entrelacés
\mathbf{s}	Séquence de symboles émis
$\hat{\mathbf{a}}$	Séquence de bit non-codés décidée en sortie du décodeur
$\hat{\mathbf{s}}$	Séquence de symboles <i>a priori</i> en entrée de l'égaliseur
$h(t)$	Réponse impulsionnelle du filtre d'émission
$m(t)$	Signal analogique émis après filtrage d'émission
$n(t)$	Bruit additif blanc Gaussien du canal de propagation
$\check{h}(t)$	Réponse impulsionnelle du filtre de réception
$g(t)$	Réponse impulsionnelle du filtre d'émission-réception du système
\mathbf{g}	Réponse impulsionnelle discrète du système obtenue en échantillonnant $g'(t)$ avec période T
$2L + 1$	Longueur de la réponse impulsionnelle discrète du système \mathbf{g}
\mathbf{G}	Matrice du système
$x(t)$	Signal en sortie du canal à bruit additif blanc Gaussien
$y(t)$	Signal reçu après filtrage adapté
\mathbf{y}	Séquence d'échantillons après filtrage adapté et échantillonnage
$\boldsymbol{\eta}$	Séquence d'échantillons de bruit après filtrage adapté et échantillonnage
\mathbf{C}_η	Matrice d'auto-corrélation de $\boldsymbol{\eta}'$
\mathbf{x}	Séquence d'échantillons équivalents en sortie du canal de propagation
\mathbf{H}	Matrice d'émission du système discret équivalent obtenue à partir de la factorisation de \mathbf{G}'
\mathbf{H}^H	Matrice de réception du système discret équivalent
\mathbf{h}	Réponse impulsionnelle discrète du système discret équivalent
$\boldsymbol{\nu}$	Séquence d'échantillons de bruit plus interférence résiduelle en sortie du traitement linéaire dans le récepteur
λ_c	Séquence de LLR en sortie de l'égaliseur
λ_c	Séquence de LLR en sortie du désentrelaceur
λ_b	Séquence de LLR en sortie du décodeur
I	Information mutuelle entre les séquences observée et émise
I_G	Information mutuelle généralisée entre les séquences observée et émise
\mathbf{F}	Matrice de réception du système discret équivalent à optimiser
\mathbf{t}	Séquence d'échantillons après traitement de réception \mathbf{F}
\mathbf{B}	Matrice de réception du système discret équivalent à optimiser
\mathbf{G}_r	Matrice du système <i>channel shortening</i> à optimiser
\mathbf{z}	Séquence d'échantillons après traitements \mathbf{F} et \mathbf{B}
\mathbf{F}_{cs}	Matrice de réception <i>channel shortening</i> maximisant l'information mutuelle généralisée
\mathbf{B}_{cs}	Matrice de réception <i>channel shortening</i> maximisant l'information mutuelle généralisée

\mathbf{G}_{cs}	Matrice du système <i>channel shortening</i> maximisant l'information mutuelle généralisée
\mathbf{F}_{mse}	Matrice de réception minimisant l'erreur quadratique moyenne
\mathbf{B}_{mse}	Matrice de réception minimisant l'erreur quadratique moyenne
\mathbf{f}_{cs}	Réponse impulsionnelle discrète associée à \mathbf{F}_{cs}
\mathbf{b}_{cs}	Réponse impulsionnelle discrète associée à \mathbf{B}_{cs}
\mathbf{f}_{mse}	Réponse impulsionnelle discrète associée à \mathbf{F}_{mse}
\mathbf{b}_{mse}	Réponse impulsionnelle discrète associée à \mathbf{B}_{mse}
ν	Longueur de contrainte déterminant le nombre d'états de l'algorithme BCJR
σ_n^2	Variance du bruit du canal
σ_e^2	Variance du bruit de l'estimateur symbole
σ_w^2	Variance du bruit des LLR en sortie du décodeur
\mathbf{w}	Séquence d'échantillons de bruit des LLR en sortie du décodeur
\mathbf{e}	Séquence d'échantillons de bruit en sortie de l'estimateur symbole
\mathbf{C}_0	Matrice d'auto-corrélation de la séquence de symboles <i>a priori</i>
\mathbf{C}_1	Matrice d'inter-corrélation des séquences de symboles émis et symboles <i>a priori</i>
\mathbf{C}_n	Matrice d'auto-corrélation du bruit du canal
ϵ	Erreur d'échantillonnage en réception

Table des sigles et acronymes

APSK	<i>Amplitude Phase-Shift Keying</i>
AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i>
BCH	<i>Bose, Ray-Chaudhuri et Hocquenghem</i>
BCJR	<i>Bahl, Cocke, Jelinek, Raviv</i>
BCJR-APS	BCJR - a priori symboles
BER	<i>Bit Error Rate</i>
BPSK	<i>Binary Phase-Shift Keying</i>
CLS	Convertisseur LLR-symboles
CS	<i>Channel Shortening</i>
CSL	Convertisseur symboles-LLR
CSP	Convertisseur symboles-probabilités
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i>
DVB-S	<i>Digital Video Broadcast - Satellite</i>
DVB-S2	<i>Digital Video Broadcast - Satellite 2nd generation</i>
DVB-S2X	<i>Digital Video Broadcast - Satellite 2nd generation extensions</i>
EC	Espérance Conditionnelle
EPR4	Extended Partial Response 4
EXIT	<i>EXtrinsic Information Transfer</i>
FTN	<i>Faster-Than-Nyquist</i>
IID	Indépendants et Identiquement Distribués
IRA	<i>Irregular Repeat Accumulate</i>
ISI	<i>Inter-Symbol Interference</i>
LDPC	<i>Low-Density Parity-Check</i>
LLR	<i>Log-likelihood ratio</i>
MAP	<i>Maximum A Posteriori</i>
MMSE	<i>Minimum Mean Square Error</i>
MSE	<i>Mean Square Error</i>
MVU	<i>Minimum Variance Unbiased</i>
PAM	<i>Pulse Amplitude Modulation</i>
PAPR	<i>Peak-to-average Power Ratio</i>
PSK	<i>Phase-Shift Keying</i>
QPSK	<i>Quadrature Phase-Shift Keying</i>

RLS	Recursive Least Squares
SPA	<i>Sum-Product Algorithm</i>
SRRC	<i>Square-Root-Raised-Cosine</i>
SSPA	<i>Solid State Power Amplifier</i>
TWTA	<i>Traveling-Wave Tube Amplifier</i>
ZF	<i>Zero-Forcing</i>

Introduction

Nous sommes à une époque où de grandes innovations en communications numériques ont déjà été proposées. Les systèmes actuels de transmission étant déjà très proches des limites théoriques sur des canaux à bruit additif blanc Gaussien (AWGN), des techniques qui représentent une vraie rupture technologique sont nécessaires afin d'améliorer l'efficacité spectrale de ces systèmes. La technique dite *faster-than-Nyquist* (FTN) a été proposée pour la première fois par James Mazo en 1975 et consiste à augmenter le débit symbole du système de transmission au-delà de la limite imposée par le critère de Nyquist [1]. Il a été montré que le FTN offre des capacités supérieures à celles des systèmes de Nyquist [2]. Toutefois, le non-respect du critère de Nyquist entraîne inévitablement l'apparition d'interférence entre symboles (ISI) en réception. Ainsi, même si un émetteur FTN est *a priori* très simple à implémenter en l'absence de techniques de pré-codage, des techniques de réception avec une forte complexité calculatoire sont nécessaires afin de limiter l'interférence et ainsi exploiter la capacité offerte par le système.

Les gains de capacité obtenus grâce à la technique FTN et l'augmentation de la complexité calculatoire associée à cette méthode de transmission sont à mettre en perspective par rapport aux systèmes de communications actuels avec modulations linéaires. Dans un système classique de Nyquist, une augmentation de la taille de la constellation n'est pas non plus exempte d'une augmentation de la complexité du point de vue de l'émetteur aussi bien que du point de vue du récepteur. Les systèmes de Nyquist actuels de type *bit interleaved coded modulation* (BICM) incluent des opérations de *mapping* et *demapping* dont la complexité augmente linéairement avec la taille de la constellation [3]. Il faut également prendre en compte le fait que les systèmes de transmission actuels ont tendance à diminuer l'excès de bande des filtres d'émission afin d'être plus efficaces spectralement. Or, diminuer l'excès de bande a plusieurs conséquences sur le système. La plus évidente est l'augmentation de la durée de la réponse impulsionnelle des filtres, ce qui entraîne plus de complexité de décodage du point de vue du récepteur. Il a été également montré que le *peak-to-average power ratio* (PAPR) du signal modulé augmente dans le cadre des transmissions FTN monoporteuse [4]. Cette propriété du FTN est à prendre en compte dans le dimensionnement de tout système utilisant des amplificateurs de puissance opérés près du point de saturation car un PAPR non négligeable entraîne la distorsion non-linéaire et par conséquent une dégradation de la performance. C'est en particulier le cas des systèmes de communication par satellite pour lesquels des amplificateurs de type *traveling-wave tube amplifier* (TWTA) ou de type *solid state power amplifier* (SSPA) sont souvent opérés près du point de saturation afin d'obtenir une bonne efficacité énergétique [5].

De nouvelles techniques de réception ont permis à la technique FTN de gagner en popularité dans ces dernières années. Des réalisations pratiques ont été présentées dans [6], [7]. D'autre part, les signaux FTN ont été étendus au cas multiporteuse en rapprochant les impulsions de mise en forme temporellement et fréquentiellement [8]. Plusieurs récepteurs avec une complexité abordable basés sur l'annulation itérative d'interférence ont été proposés à cet effet

[9], [10]. Des systèmes par fibre optique transmettant au-delà de la cadence de Nyquist ont été également étudiés dans la littérature [11], [12] et ont montré des gains d'efficacité spectrale jusqu'à 12 %. Les acteurs majeurs de l'industrie, dans le domaine du satellite aussi bien que du terrestre, travaillent activement dans l'étude et le prototypage de systèmes de transmission FTN. Nous pouvons notamment citer Hughes Networks Systems (HNS), Novelsat, Huawei et Ericsson, qui ont déposé des brevets à ce sujet [13]–[17]. Le FTN a été initialement envisagé dans la 5G, même si l'inclusion de ce type de solution est finalement reporté à des évolutions futures. Au vue des avancées technologiques dans les systèmes de communications terrestres, les acteurs du domaine satellite intensifient leurs efforts pour rester en tête d'une course qui a pour but de maîtriser des systèmes de transmission de plus en plus efficaces spectralement et par conséquent, de plus en plus complexes.

Problématique de thèse

Dans ces travaux de thèse, nous souhaitons nous focaliser sur l'étude du récepteur dans le cadre des transmissions FTN monoporteuse sur canal AWGN. Les méthodes d'égalisation optimales ayant une complexité exponentielle avec la longueur du canal [18], des techniques sous-optimales sont souvent envisagées [19]–[21]. Des résultats préliminaires ont permis de montrer que les techniques d'égalisation linéaires [22]–[24] ne sont pas suffisamment performantes lorsque des systèmes FTN à haute densité de transmission sont considérés. À travers une analyse bibliographique du périmètre, nous avons plus tard identifié la technique dite *channel shortening* [25]–[27] comme étant une alternative particulièrement adaptée aux canaux de type *faster-than*-Nyquist car elle permet d'obtenir un très bon compromis entre performance et complexité pour ces canaux à ISI si l'on se restreint à des constellations de petite taille [27, Chapitre 5]. D'autre part, nous souhaitons étudier des techniques permettant d'approcher les limites de performance théoriques des systèmes FTN. Il est possible d'approcher ces limites avec une complexité abordable en effectuant l'égalisation et le décodage correcteur d'erreurs itératifs [28]. Les premiers travaux sur le *channel shortening* ont été étendus au contexte turbo en considérant des traitements supplémentaires du point de vue du récepteur. Or, ces travaux se sont basés sur des méthodes d'optimisation numériques [29]. En outre, l'optimisation du code correcteur d'erreurs doit être considérée afin d'obtenir un système complet approchant les limites de performance théoriques. Plusieurs auteurs ont étudié l'optimisation du code dans le cadre des système à ISI [30], [31] et FTN [32], [33] et ont montré qu'un gain significatif des performances peut être obtenu en faisant un choix judicieux des codes utilisés.

Les contributions décrites dans ce manuscrit de thèse ont comme point de départ les résultats sur le *channel shortening* mentionnés précédemment. En particulier, l'enjeu de cette thèse est de proposer une optimisation de l'égaliseur *channel shortening* en se basant sur un calcul analytique des traitements du récepteur. Le domaine d'applicabilité d'une telle solution sera étudié et évalué lors de ces travaux de thèse. Finalement, les performances du turbo égaliseur avec codage correcteur d'erreurs pourront être évaluées en exploitant des méthodes d'optimisation de la littérature.

Synthèse des contributions

Les travaux de thèse décrits dans ce manuscrit sont composés de trois contributions principales :

1. Nous obtenons, en présence d'information *a priori*, l'expression analytique de l'égaliseur *channel shortening* (CS) maximisant l'information mutuelle généralisée du système. Cette méthode permet d'éviter un calcul numérique des traitements linéaires de l'égaliseur. En outre, ce résultat permet de montrer que le *channel shortening* généralise d'autres méthodes d'égalisation. En particulier, nous montrons que l'égaliseur CS généralise l'égalisation MMSE avec information *a priori*. Ce résultat étend des résultats précédents sur le CS qui avaient déjà montré cette dépendance dans le cas sans information *a priori*. Nous allons également proposer un égaliseur BCJR prenant à son entrée des symboles *a priori* au lieu de probabilités. Nous montrerons que cette architecture d'égalisation est en réalité un cas particulier de l'égaliseur CS proposé dans ces travaux de thèse.
2. Dans le cadre de la turbo égalisation, les symboles *a priori* utilisés par le récepteur CS doivent être estimés à partir des probabilités fournies par le bloc décodeur correcteur d'erreurs. Nous proposons, dans le cas des constellations binaires symétriques réelles, un estimateur linéaire *minimum variance unbiased* (MVU) adapté au récepteur CS analytique proposé précédemment. Nous montrons par simulation que l'estimateur MVU permet de minimiser de la probabilité d'erreur binaire sous certaines conditions. Nous comparons cette solution aux méthodes CS existantes qui reposent sur un calcul numérique du récepteur et sur l'utilisation d'un estimateur symbole *a priori* selon le critère de l'espérance conditionnelle (EC).
3. Nous évaluons par simulation les performances du système de communications FTN complet avec codage correcteur d'erreurs et turbo égalisation. Nous montrons qu'un gain conséquent sur les performances du système peut être obtenu par un choix judicieux de la matrice de parité du code correcteur d'erreurs. Nous évaluons également les performances du système en présence d'erreurs de synchronisation temporelle.

D'autres axes de recherche ont été explorés mais elles ne sont pas détaillées dans ce manuscrit car elles portent sur des sujets connexes au thème central de la thèse. Ces travaux ont permis une mise en perspective par rapport à l'étude du récepteur FTN monoporteuse :

1. Nous avons proposé un égaliseur *zero forcing* dans le cadre d'un système *faster-than-Nyquist* multiporteuse en utilisant des filtres à réponse impulsionnelle de courte durée. L'utilisation de ces impulsions de mise en forme permet d'implémenter le récepteur avec une faible complexité calculatoire.
2. Nous avons étudié l'estimation aveugle du rythme symbole des systèmes FTN par une analyse de cyclostationnarité. Après avoir démontré que les signaux FTN ne présentent pas de caractéristiques cycliques au second ordre, nous avons proposé un estimateur aveugle du rythme symbole en utilisant des statistiques d'ordre quatre du signal reçu.

Publications et communications

Cette thèse s'inscrit dans un travail de recherche ayant donné lieu à sept communications :

Journaux internationaux avec comité de lecture

- [94] A. ABELLO, J.M. FREIXE et D. ROQUE. « Closed-form expressions for channel shortening receivers using *a priori* information », *IEEE Communications Letters*, t. 22, n° 7, p. 1394-1397, 2018. http://oatao.univ-toulouse.fr/19908/1/Abello_19908.pdf
- [44] A. ABELLO, D. ROQUE, J.-M. FREIXE et S. MALLIER. "Faster-than-Nyquist signaling : on linear and non-linear reduced-complexity turbo equalization ». *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, p. 1-10, 2017. http://oatao.univ-toulouse.fr/16212/1/Abello_16212.pdf

Conférences internationales avec comité de lecture

- [48] A. ABELLO, D. ROQUE et J.-M. FREIXE, « Blind symbol rate estimation of faster-than-Nyquist signals based on higher-order statistics », *Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks*, Lisbonne, septembre 2018. http://oatao.univ-toulouse.fr/19819/1/Abello_19819.pdf
- [45] A. ABELLO, D. ROQUE, C. SICLET et A. MARQUET. « On zero-forcing equalization for short-filtered multicarrier faster-than-Nyquist signaling ». *Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, novembre 2016. http://oatao.univ-toulouse.fr/17615/1/Abello_17615.pdf
- [43] A. ABELLO, D. ROQUE, J.-M. FREIXE et S. MALLIER, « Performance evaluation of a faster-than-Nyquist system based on turbo equalization and LDPC codes », *Wireless Innovation Forum Conference*, Washington, mars 2016. http://oatao.univ-toulouse.fr/15648/1/Abello_15648.pdf

Colloques (sans actes)

- A. ABELLO, D. ROQUE, J.M. FREIXE et N. PHAM. « Transmission au-delà de la cadence de Nyquist pour les liaisons vidéo pour drones ». *Journée thématique DGA-Maîtrise de l'information*, Rennes, mai 2016. http://oatao.univ-toulouse.fr/15790/1/Abello_15790.pdf
- A. ABELLO. « On zero-forcing equalization for short-filtered multicarrier faster-than-Nyquist signaling ». *École d'été Cyber Physical Systems à INSA/CNRS*, Toulouse, septembre 2016.

Structure du document

Ce manuscrit de thèse est composé de cinq chapitres, dont principalement les trois derniers présentent nos contributions. Dans le chapitre 1, nous fixons tout d'abord le périmètre de l'étude et nous introduisons les hypothèses de départ. Nous détaillons ensuite le modèle du système et la notion de transmission au-delà de la cadence de Nyquist ainsi que les limites théoriques d'efficacité spectrale que l'on peut atteindre en utilisant cette technique de transmission. Après cette première étape de mise en contexte, nous détaillons les techniques de réception adaptées aux canaux à interférence entre symboles. Les méthodes d'égalisation optimales et sous-optimales sont abordées. Le codage correcteur d'erreurs et la turbo égalisation sont ensuite expliqués. Le chapitre 2 détaille la technique de réception dite *channel shortening* (CS) permettant d'égaliser des canaux à interférence entre symboles avec une complexité abordable au prix d'une dégradation des performances du récepteur. La littérature récente sur le *channel shortening* est abordée. Les contraintes et limites liées aux méthodes existantes sont expliquées.

Le chapitre 3 constitue la première contribution décrite dans ce manuscrit de thèse. Ce chapitre est consacré à l'optimisation de l'égaliseur *channel shortening*. D'autres architectures d'égalisation, optimales du point de vue de la probabilité d'erreur binaire mais également sous-optimales seront étudiées. Nous allons voir à travers ces résultats que l'égalisation *channel shortening* avec information *a priori* généralise la méthode d'égalisation MMSE et l'égalisation avec algorithme BCJR.

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à la turbo égalisation avec codage correcteur d'erreurs. Dans ce contexte, les symboles *a priori* utilisés par le récepteur CS doivent être estimés à partir des probabilités fournies par le décodeur. Nous proposons dans ce chapitre un estimateur symbole pour des alphabets binaires symétriques réels adapté au récepteur CS analytique proposé précédemment. Nous montrons par simulation que l'utilisation conjointe de l'égaliseur CS et de l'estimateur symbole proposés dans ces travaux de thèse offre de meilleures performances que les approches par optimisation numériques présentes dans la littérature.

Dans le chapitre 5, nous évaluons par simulation les performances du système de communications FTN complet avec codage correcteur d'erreurs et turbo égalisation. Nous montrons qu'un gain conséquent sur les performances du système peut être obtenu par un choix judicieux de la matrice de parité du code correcteur d'erreurs. Nous évaluons également les performances du système en présence d'erreurs d'échantillonnage dans le récepteur.

Techniques de transmission sur canaux à interférence

Sommaire

1.1	Émetteur-récepteur linéaire monoporteuse sur canal à AWGN	8
1.1.1	Modèle du système non-codé	8
1.1.2	Transmission au-delà de la cadence de Nyquist	11
1.1.3	Taux d'information du système	14
1.2	Détection du message émis en présence d'ISI	17
1.2.1	Détection suivant le critère du maximum <i>a posteriori</i> et algorithme BCJR	17
1.2.2	Détection sous-optimale basée sur le BCJR et techniques linéaires	19
1.3	Égalisation et décodage itératifs	21
1.3.1	Codes correcteurs d'erreurs	21
1.3.2	Turbo égalisation	26
1.3.3	Conversion symboles-LLR dans le cadre de la turbo égalisation	27
1.4	Synthèse - Vers la réception à complexité maîtrisée	28

La première partie de ce chapitre a pour objectif de décrire le modèle du système sur lequel vont s'appuyer les parties suivantes de ce manuscrit. Nous considérons une synchronisation parfaite du récepteur et nous prenons un modèle équivalent complexe en bande de base du système de transmission. Nous considérons dans ces travaux de thèse des modulations linéaires monoporteuses envoyées à travers un canal à bruit additif blanc Gaussien.

Dans un deuxième temps, nous introduisons la technique de transmission dite *faster-than-Nyquist* (FTN) [1]. Nous verrons que cette technique permet d'augmenter les taux d'information d'un système de transmission monoporteuse sans changer la taille de l'alphabet de modulation au prix d'une augmentation de la complexité de décodage du récepteur [2]. Cela est dû au fait que cette technique entraîne l'apparition d'interférence entre symboles (ISI) en sortie d'une première étape de filtrage adapté et échantillonnage. Nous allons pouvoir caractériser le canal à ISI en fonction des paramètres de l'émetteur. Ce canal sera considéré connu du récepteur et invariant dans le temps.

Afin d'approcher les taux d'information du FTN, des techniques de réception non-linéaires seront nécessaires. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude des techniques de réception permettant de décoder efficacement un message en présence d'ISI. En particulier, les notions d'égalisation, codage correcteur d'erreurs et turbo égalisation seront abordés

[28]. Nous allons voir que les méthodes de réception permettant de minimiser la probabilité d'erreur binaire ont une forte complexité calculatoire dépendante de la longueur du canal. Ce résultat permet enfin de motiver et de positionner nos travaux postérieurs qui vont consister à trouver un bon compromis entre la performance et la complexité calculatoire du système de transmission FTN.

1.1 Émetteur-récepteur linéaire monoporteuse sur canal à AWGN

1.1.1 Modèle du système non-codé

Le modèle du système de transmission complexe équivalent en bande de base est donné dans la Figure 1.1.

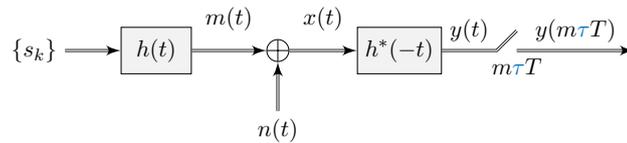


FIGURE 1.1 – Schéma bloc du système non codé.

Notons $\{s_k\}_{k \in \{0, \dots, N-1\}}$ la séquence de symboles à transmettre, considérés à moyenne nulle, indépendants et identiquement distribués (IID) de variance σ_s^2 . Nous supposons que les symboles appartiennent à un ensemble fini dénombrable $\Omega \in \mathbb{C}^M$. Comme expliqué en introduction de ce manuscrit, nous nous intéressons lors de cette thèse aux constellations de petite taille. Les alphabets de type *quadrature phase-shift keying* (QPSK), exprimés com une modulation *2-pulse amplitude modulation* (PAM) centrée sur la voie réelle et une 2-PAM centrée sur la voie imaginaire seront considérés. Le signal émis en bande de base est donné par

$$m(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k h(t - kT) \quad (1.1)$$

où T est la période symbole et $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre d'émission. Le signal modulé est affecté par un canal à bruit additif blanc Gaussien (AWGN) centré avec densité spectrale de puissance N_0 . Le signal à la sortie du canal s'écrit

$$x(t) = m(t) + n(t). \quad (1.2)$$

En réception, afin de maximiser le rapport signal à bruit, un filtre $\check{h}(t) = h^*(-t)$ adapté au filtre d'émission est considéré. En supposant une synchronisation parfaite, la sortie de ce filtre s'écrit

$$\begin{aligned}
y(t) &= (x * \check{h})(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k (h * \check{h})(t - kT) + (n * \check{h})(t) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} s_k g(t - kT) + \eta(t)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

où $g(t) = (h * \check{h})(t)$ est la réponse impulsionnelle du système après filtrage et $\eta(t) = (n * \check{h})(t)$ est le bruit filtré. Nous obtenons une observation discrète en effectuant une opération d'échantillonnage au rythme symbole

$$\begin{aligned}
y_m \triangleq y(mT) &= \sum_{k=0}^{N-1} s_k g((m - k)T) + \eta(mT) \quad m = 0, \dots, N - 1 \\
&= \sum_{l=m}^{m-N+1} s_{m-l} g_l + \eta_m
\end{aligned} \tag{1.4}$$

où $g_l = g(lT)$ est le l -ième coefficient de la réponse impulsionnelle discrétisée. Nous considérons que $g(t)$ est une réponse symétrique dont l'énergie décroît avec le temps et nous retenons les $2L + 1$ coefficients les plus énergétiques $[g_{-L}, \dots, g_0, \dots, g_L]$ où nous supposons que L est une valeur paire. Les échantillons η_m ont une puissance

$$\sigma_n^2 = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\check{H}(f)|^2 df = N_0 g_0. \tag{1.5}$$

D'autre part, l'énergie par symbole de l'enveloppe complexe transmise s'écrit

$$E_s = \int_0^T \mathbb{E} \{m(t)m^*(t)\} dt = \sigma_s^2 g_0. \tag{1.6}$$

Notons qu'en présence de codage correcteur d'erreurs un bit d'information peut représenter plusieurs éléments binaires par le biais du rendement de codage, R . En prenant en compte cela, l'énergie par bit d'information est donnée par

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2(M)} = \frac{\sigma_s^2 g_0}{R \log_2(M)}. \tag{1.7}$$

Il est possible d'exprimer la relation (1.4) sous forme matricielle

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{s} + \boldsymbol{\eta} \tag{1.8}$$

avec $\mathbf{s} = [s_0, \dots, s_{N-1}]^T$ la séquence de symboles émis, $\boldsymbol{\eta} = [\eta_0, \dots, \eta_{N-1}]^T$ la séquence d'échantillons de bruit avec matrice d'auto-corrélation $\mathbf{C}_\eta = \sigma_n^2 \mathbf{G}$ et $\mathbf{y} = [y_0, \dots, y_{N-1}]^T$ la séquence après filtrage avec

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & g_{-1} & \dots & g_{-L} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & \dots & g_{-L} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_L & g_{L-1} & \dots & \dots & \dots & g_{-L} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g_L & g_{L-1} & \dots & \dots & \dots & g_{-L} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & g_L & \dots & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

une matrice Toeplitz bande de taille $N \times N$ avec $N > L$. Cette matrice est complètement décrite par la réponse impulsionnelle discrète

$$\mathbf{g} = [g_{-L}, \dots, g_{-1}, g_0, g_1, \dots, g_L]. \quad (1.10)$$

La séquence \mathbf{y} est une statistique suffisante [34] pour l'estimation de \mathbf{s} et correspond au modèle d'observation d'Ungerboeck [35]. Toutefois, nous souhaitons travailler au long de ce manuscrit avec un modèle de canal discret équivalent à bruit blanc faisant intervenir un traitement en émission et un traitement en réception. La raison de cela est que dans le Chapitre 2, le traitement de réception sera soumis à une optimisation dans le domaine discret. Pour faire cela, nous posons la factorisation

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^H \mathbf{H}. \quad (1.11)$$

Les conditions qui permettent la factorisation de \mathbf{G} sont discutées dans l'Annexe A.1 sous la contrainte \mathbf{H} Toeplitz et dans les différents scénarios de transmission utilisés au cours du manuscrit (i.e., filtres équivalents *raised-cosine*). En considérant (1.11), nous posons

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1.12)$$

avec $\mathbf{n} = [n_0, \dots, n_{N-1}]^T$ une séquence d'échantillons de bruit centrés avec matrice d'auto-corrélation $\mathbf{C}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$. Si l'on peut écrire (1.11), alors toute réalisation du vecteur aléatoire (1.12) est également une statistique suffisante pour l'estimation de \mathbf{s} (en effet, on peut construire $\mathbf{H}^H \mathbf{x}$ un vecteur aléatoire de même distribution que (1.8), après conditionnement par rapport à \mathbf{s}). Le modèle discret équivalent est illustré dans la Figure 1.2.

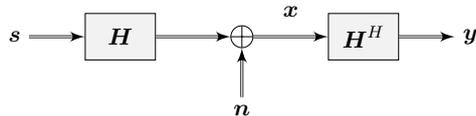


FIGURE 1.2 – Schéma bloc du système discret équivalent non codé.

Notons qu'il n'est pas possible dans le cas général de construire une réalisation de \mathbf{x} à partir d'une réalisation de \mathbf{y} [36] mais l'on pourra utiliser indifféremment (1.8) et (1.12) pour l'estimation/détection de \mathbf{s} en prenant garde à aboutir à des algorithmes réalisables dans ce dernier cas.

1.1.2 Transmission au-delà de la cadence de Nyquist

Le critère de Nyquist [37] impose $g_l = g_0\delta_{0,l}$, avec $\delta_{0,l}$ le symbole de Kronecker. Dans ce cas, les échantillons reçus sont sans interférence entre symboles (ISI)

$$y_m = g_0s_m + \eta_m. \quad (1.13)$$

Au cours de ce manuscrit, nous considérons que les impulsions de mise en forme sont normalisées en énergie de sorte à ce que le système de référence soit orthonormal. Cela se traduit par $g_0 = 1$. Le critère de Nyquist est respecté dans les systèmes de transmission actuels car il permet de reconstruire les symboles émis en réception avec une très faible complexité. En effet, la mise en œuvre d'un filtre de réception et d'un échantillonneur suffit à la reconstruction des symboles. Or, l'évolution technologique permet aujourd'hui d'envisager des techniques qui ne respectent plus ce critère afin d'augmenter l'efficacité spectrale de ces systèmes de communication. La technique *faster-than-Nyquist* a été introduite par James Mazo en 1975 [1]. Si l'on part d'un système respectant le critère de Nyquist avec un certain filtre d'émission $h(t)$ et un espacement entre symboles T , il est possible d'en augmenter la cadence de transmission sans changer la taille de l'alphabet de modulation en posant

$$m(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k h(t - k\tau T_N) \quad 0 < \tau < 1 \quad (1.14)$$

avec τ le facteur d'accélération du système et T_N le temps symbole du système transmettant à la cadence de Nyquist. Le temps symbole du système est donné par $T = \tau T_N$. Le débit symbole est donc augmenté d'un facteur $1/\tau$. En contrepartie, lorsque l'on transmet au-delà de la cadence de Nyquist, les échantillons (1.4) contiennent de l'ISI. Des techniques de réception prenant en compte un modèle à ISI sont alors requises afin de reconstruire le plus fidèlement possible la séquence de symboles émise [34]. Mazo a par ailleurs montré qu'il existe une valeur limite de facteur d'accélération ($\tau = 0,8$ en considérant des impulsions de mise en forme en sinus cardinal) pour laquelle la distance euclidienne minimale entre les signaux émis reste inchangée [1]. Cette valeur porte aujourd'hui le nom de limite de Mazo. Les travaux fondateurs sur la transmission FTN accordent beaucoup d'importance à la distance minimale entre signaux car celle-ci permet d'encadrer la probabilité d'erreur binaire dans le cas d'un canal à ISI d'après [38]. Or, les travaux présentés à l'époque ne supposaient pas de codage correcteur d'erreurs et encore moins de turbo égalisation. Cet indicateur de performance n'est donc pas pertinent dans le cadre de ces travaux de thèse. Nous choisissons à la place le taux d'information comme borne de performance d'un système FTN tel que décrit dans la partie suivante de ce chapitre.

Notons que dans la définition faite par Mazo et par beaucoup d'autres auteurs, un système de référence transmettant à la cadence de Nyquist est "accélééré" d'un facteur $1/\tau$ afin d'obtenir un système FTN. Une définition alternative pour le FTN consiste à considérer la limite énoncée par Nyquist pour la transmission sans interférence sur un canal à bande limitée. Si $H(f)$ est à support borné de largeur B alors nous pouvons définir la densité du système comme le

rapport entre le rythme symbole et la largeur de bande du signal émis $\rho = 1/TB$. Lorsque $\rho \leq 1$, il est possible d'établir une transmission sans ISI en choisissant des impulsions de mise en forme et une période d'échantillonnage appropriées. En revanche, si $\rho > 1$, l'interférence entre symboles apparaît inconditionnellement en sortie du récepteur linéaire décrit précédemment [39, p. 492]. Le paramètre densité permet donc de se détacher du choix des impulsions de mise en forme lors de la caractérisation d'un système FTN. Cela est d'autant plus pertinent que les systèmes FTN n'ont pas besoin d'utiliser des filtres permettant le respect du critère de Nyquist, comme par exemple les filtres de type *square root raised cosine* (SRRC). Des filtres permettant d'optimiser le rapport signal à bruit plus interférence ou des filtres permettant une réduction de la complexité de décodage du récepteur peuvent être considérés [40], [41]. Bien que rien ne justifie l'utilisation de filtres de mise en forme permettant de respecter le critère de Nyquist en FTN, nous choisissons tout de même des filtres d'émission en SRRC dans le but de comparer équitablement les système FTN proposés avec des systèmes orthogonaux de la littérature. La relation entre la densité et l'accélération pour ces filtres est

$$\rho = \frac{1}{\tau(1 + \alpha)} \quad (1.15)$$

où $1 + \alpha$ est l'excès de bande du filtre d'émission, avec α le facteur de roll-off du filtre. Puisque les filtres d'émission seront toujours les mêmes au long de ce manuscrit, nous considérerons dans les chapitres suivants un système de référence transmettant à la cadence de Nyquist et nous utiliserons τ pour caractériser notre système FTN.

Dans le cadre des communications avec ISI, de nouvelles techniques de réception ont permis au FTN de gagner en popularité dans ces dernières années. Les travaux de Mazo ont été étendus aux systèmes FTN employant des filtres SRRC [42]. Il a été par ailleurs montré que les signaux FTN permettent d'augmenter les taux d'information par rapport aux systèmes respectant le critère de Nyquist [2], [43]. Des réalisations pratiques ont été présentées dans [6], [7], [44], [45]. Ces travaux ont permis de montrer la pertinence des systèmes basés sur la turbo égalisation dans le cadre des transmissions FTN. D'autre part, les signaux FTN ont été étendus au cas multiporteuse en rapprochant les impulsions de mise en forme temporellement et fréquentiellement [8]. Plusieurs récepteurs avec une complexité abordable basés sur l'annulation itérative d'interférence ont été proposés à cet effet [9], [10], [46], [47]. Il a par ailleurs été montré qu'il est possible de choisir l'espacement élémentaire temps-fréquence des modulations linéaires FTN de manière à maximiser l'efficacité spectrale sur canal à bruit additif blanc Gaussien [48], [49] ainsi que sur des liens par satellite comportant des non linéarités [50].

D'autre part, il a été montré que le *peak-to-average power ratio* (PAPR) du signal modulé augmente avec la densité dans le cas d'une transmission monoporteuse [4] et que celui-ci diminue avec la densité dans le cas multiporteuse pourvu que des filtres de mise en forme appropriés soient utilisés [51]. Cette propriété du FTN est à prendre en compte dans le dimensionnement de tout système utilisant des amplificateurs de puissance opérés près du point de saturation car un PAPR non négligeable entraîne la distorsion non linéaire et par conséquent une dégradation de la performance. C'est en particulier le cas des systèmes de

communication par satellite pour lesquels des amplificateurs de type *traveling-wave tube amplifier* (TWTA) ou de type *solid state power amplifier* (SSPA) sont souvent opérés près du point de saturation afin d'obtenir un bon rendement énergétique [5]. En outre, les signaux avec $\rho > 1$ ne présentent pas de caractéristiques cycliques au second ordre. Des techniques utilisant des statistiques d'ordre supérieur sont nécessaires afin de réaliser l'estimation aveugle de certains paramètres, en particulier le rythme symbole du signal, ce qui rend la tâche de synchronisation plus difficile et ce d'autant plus que la densité est élevée [52].

Afin de mettre en évidence l'intérêt du FTN du point de vue des limites théoriques, nous montrons dans la section suivante les taux d'information du système en fonction du facteur d'accélération et nous les comparons à ceux d'un système classique transmettant à la cadence de Nyquist. Ce résultat va motiver l'étude de techniques de réception performantes permettant d'approcher les taux d'information d'une transmission FTN.

Au long du manuscrit, cinq canaux discrets différents seront considérés lors des simulations et sont définis ci-dessous

- canal EPR4 avec $L = 3$. Ce canal est utilisé à des fins de comparaison avec les résultats de la littérature [25], [26].
- système FTN05, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ où la notation '05' indique une accélération $\tau = 0,5$. Ce système est caractérisé par un canal à réponse impulsionnelle discrète équivalente tronquée de sorte que $L = 8$. La densité du système est $\rho = 1,67$.
- système FTN05-bis, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,05$ et accélération $\tau = 0,5$. Ce système est caractérisé par un canal à réponse impulsionnelle discrète équivalente tronquée de sorte que $L = 20$. La densité du système est $\rho = 1,9$.
- système FTN07, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ et accélération $\tau = 0,7$. Ce système est caractérisé par un canal à réponse impulsionnelle discrète équivalente tronquée de sorte que $L = 8$. La densité du système est $\rho = 1,19$.
- système FTN09, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ et accélération $\tau = 0,9$. Ce système est caractérisé par un canal à réponse impulsionnelle discrète équivalente tronquée de sorte que $L = 12$. La densité du système est $\rho = 0,93$.

Les coefficients des réponses impulsionnelles discrètes équivalentes sont données dans l'Annexe A.2. Les valeurs choisies d'accélération $\tau \in \{0,5, 0,7, 0,9\}$ et de roll-off $\alpha \in \{0,2, 0,05\}$ permettent de nous comparer à des travaux de référence en FTN monoporteuse [2], [27]. D'autre part, les valeurs choisies nous permettent d'atteindre des efficacités spectrales similaires à celles des standards actuels de diffusion vidéo et de transmission de données par satellite [53], [54].

1.1.3 Taux d'information du système

La capacité d'un système de transmission est le nombre maximal de bit par seconde et par Herz qui peut être transmis sans erreurs sur un canal de transmission sur toutes les distributions possibles des symboles émis [55]. Sur un canal à bruit additif blanc Gaussien, cette capacité est atteinte lorsque les symboles émis suivent une distribution Gaussienne et on appelle cette borne "capacité non-contrainte". De façon plus pratique, le taux d'information [56] d'un système de transmission est défini comme le nombre maximal de bit par symbole qui peut être transmis sans erreurs sur un canal de propagation. Notons que cette définition permet de borner les performances du système en présence d'interférence entre symboles, en particulier celle introduite par le FTN, pour un alphabet de modulation donné. Le taux d'information du système est donné par l'information mutuelle entre les séquences observée et d'entrée [56]

$$I_D = E_{\mathbf{x},s} \{ \log(p(\mathbf{x}|s)) \} - E_{\mathbf{x}} \{ \log(p(\mathbf{x})) \} \quad [\text{bit/symbole}] \quad (1.16)$$

où l'indice $(\cdot)_D$ indique que nous évaluons le taux d'information sur le système de transmission à temps discret (1.12). Afin de simplifier les notations, nous notons $\log(\cdot)$ le logarithme base 2 tout au long de ce manuscrit. Il est possible de montrer que le premier terme dans (1.16) dépend seulement de la variance du bruit. Or, les densités de probabilité $p(\mathbf{x})$ ne bénéficient pas d'expressions compactes dans le cas général. Des approximations et des méthodes numériques ont été proposées dans la littérature afin de calculer les taux d'information. Il faut mentionner la solution analytique proposé dans [57] faisant une hypothèse de distribution Gaussienne des symboles émis. Une méthode d'estimation numérique plus précise de I_D a été proposé [58] sans faire l'hypothèse de distribution Gaussienne des symboles émis et sera considérée tout au long de ce manuscrit.

Notons d'autre part qu'un système FTN monoporteuse peut être vu comme une transmission classique sur canal à ISI avec une efficacité spectrale $1/\tau$ fois supérieure. De ce fait, le taux d'information d'un système FTN est donné par [2]

$$I = \frac{1}{\tau} I_D. \quad (1.17)$$

Les taux d'information du système FTN sont montrés dans la Figure 1.3 en fonction du facteur d'accélération. Ces taux d'information sont comparés aux taux des systèmes transmettant à la cadence de Nyquist. Nous posons I_N le taux d'information du système transmettant à la cadence de Nyquist et I_{FTN} le taux d'information du système transmettant au-delà de la cadence de Nyquist. Nous constatons qu'à même alphabet de modulation, le taux d'information du système FTN est supérieur à celui de Nyquist et que celui augmente avec l'accélération du système pour une mise en forme en racine de cosinus surélevé (SRRC). On constate généralement $I_{FTN} > I_N$ pour τ donné quelle que soit la taille de l'alphabet de modulation même s'il est possible de trouver des impulsions de mise en forme pour lesquelles cette propriété n'est pas respectée [2]. Dans un cas général, ce résultat met en lumière l'intérêt des modulations FTN monoporteuses car il montre que l'on peut trouver des systèmes FTN monoporteuse plus

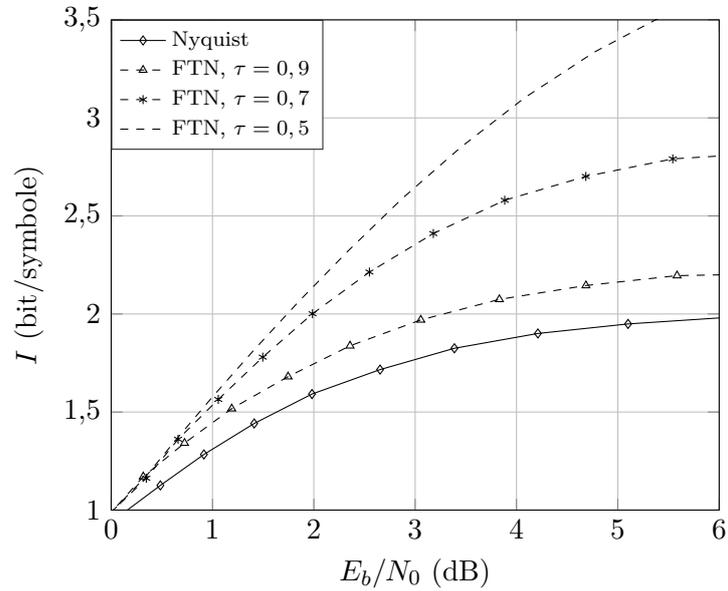


FIGURE 1.3 – Taux d’information avec une mise en forme en SRRC ($\alpha = 0,2$) et alphabet *quadrature phase-shift keying* (QPSK).

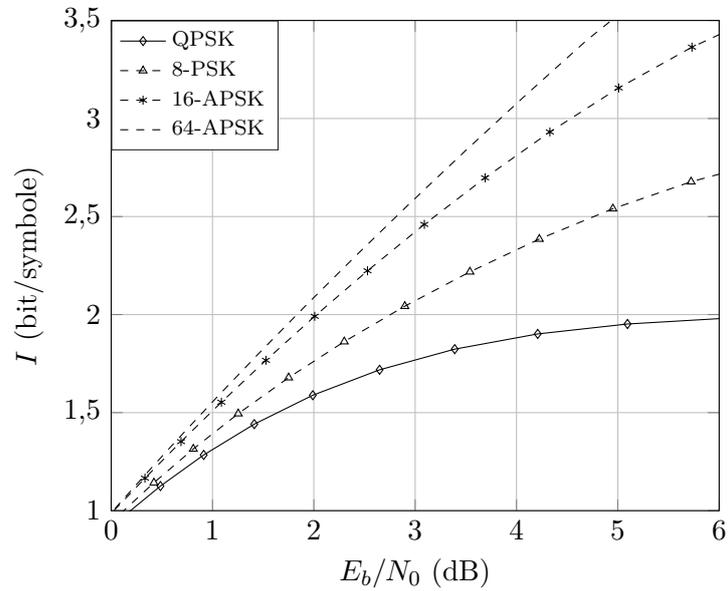


FIGURE 1.4 – Taux d’information d’un système de Nyquist pour différents alphabets de modulation.

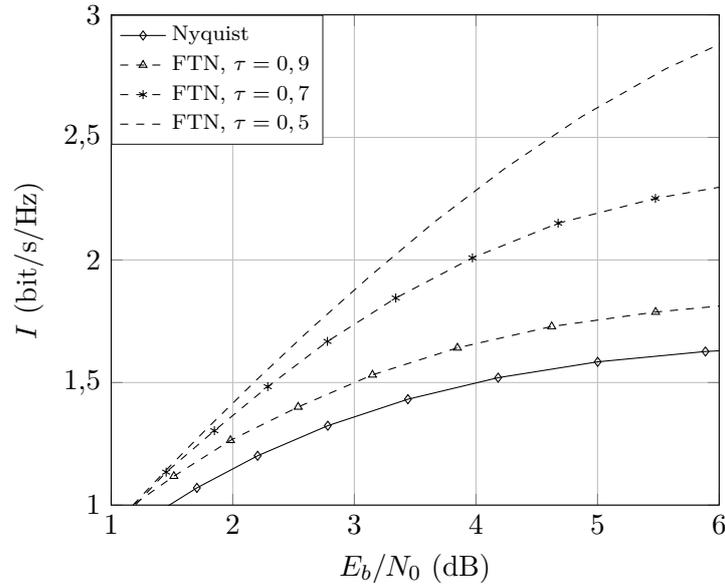


FIGURE 1.5 – Efficacité spectrale atteignable avec une mise en forme en SRRC ($\alpha = 0,2$) et alphabet *quadrature phase-shift keying* (QPSK).

performants que ses homologues à la cadence de Nyquist. Or, il faut mettre en perspective ce gain théorique car il intervient au prix d’une augmentation de la complexité. La Figure 1.4 montre les taux d’information d’un système transmettant à la cadence de Nyquist pour différents alphabets de modulation de type *phase-shift keying* (PSK) et de type *amplitude phase-shift keying* (APSK) spécifiés dans le standard DVB-S2 [53]. Nous observons dans cette figure qu’une augmentation de la taille de l’alphabet permet également d’augmenter le taux d’information du système. En particulier, pour des impulsions de mise en forme en SRRC avec excès de bande $\alpha = 0,2$, une modulation de type 64-APSK a une borne théorique similaire à celles du système FTN avec $\tau = 0,5$.

Une mesure de taux d’information en bit/s/Hz est parfois utilisée afin de comparer des systèmes transmettant à des largeurs de bande différentes. Dans la Figure 1.5 sont montrés les taux d’information en bit/s/Hz pour la même mise en forme et excès de bande que dans les exemples précédents. Il s’agit donc de l’efficacité spectrale maximale que peut atteindre une transmission FTN sans erreurs.

Si l’on souhaite comparer un système de Nyquist et un système FTN, d’autres considérations sont à prendre en compte. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, même si un émetteur FTN est *a priori* très simple à implémenter (à condition de ne pas considérer des techniques pré-codage [59]), des techniques de réception avec une forte complexité calculatoire sont nécessaires afin d’approcher les taux d’information du système. D’autre part, dans un système de Nyquist, une augmentation de la taille de la constellation n’est pas non plus exempte d’un accroissement de la complexité du point de vue de l’émetteur aussi bien que du point de vue du récepteur. Les systèmes de Nyquist actuels de type *bit interleaved coded modulation* (BICM) incluent des opérations de *mapping* et *demapping* symbole dont la

complexité augmente rapidement avec la taille de la constellation [3].

Il faut également prendre en compte le fait que les systèmes de transmission actuels ont tendance à diminuer l'excès de bande des filtres de mise en forme afin d'être plus efficaces spectralement. Or, diminuer l'excès de bande a plusieurs conséquences sur le système de communications. La plus évidente est l'accroissement de la longueur de la réponse impulsionnelle après filtrage, ce qui entraînera, contrairement au cas de Nyquist, une augmentation de la complexité de décodage du récepteur. En outre, le PAPR diminue avec α pour un système FTN mais également pour un système transmettant à la cadence de Nyquist.

En définitive, pour rendre intéressante la transmission au-delà de la cadence de Nyquist, il est nécessaire d'étudier des techniques permettant d'approcher les limites théoriques tout en maîtrisant la complexité, en particulier du point de vue du récepteur. Le chapitre suivant est dédié à la détection du message émis en présence d'interférence entre symboles. Les chapitres postérieurs auront pour but d'étudier des méthodes sous-optimales qui permettent une réduction significative de la complexité du récepteur tout en conservant de bonnes performances.

1.2 Détection du message émis en présence d'ISI

1.2.1 Détection suivant le critère du maximum *a posteriori* et algorithme BCJR

En présence d'ISI, la détection du message émis suivant le critère du maximum *a posteriori* (MAP) est optimale du point de vue de la probabilité d'erreur binaire et constitue donc un point de référence dans les récepteurs actuels. Un détecteur symbole selon le critère du MAP s'obtient en posant

$$\hat{s}_k = \underset{s_k}{\operatorname{argmax}} P(s_k|\mathbf{x}) \quad k = 0, \dots, N - 1. \quad (1.18)$$

Une méthode permettant de calculer $P(s_k|\mathbf{x})$ a été initialement introduite dans [60] en supposant la non corrélation des échantillons de bruit [34] et a été plus tard nommée algorithme BCJR. La théorie développée initialement pour aboutir à l'algorithme BCJR n'est pas valable dans le contexte étudié dans ces travaux car les échantillons de bruit sont généralement corrélés dans le cadre du FTN. Ce n'est qu'en 2005 qu'un détecteur MAP pour les symboles émis en utilisant un modèle à bruit coloré a été démontré [18]. Cette méthode est décrite ci-dessous.

Les probabilités *a posteriori* de chacun des symboles de la séquence $P(s_k|\mathbf{x})$ peuvent s'obtenir en marginalisant la probabilité de la séquence

$$P(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{s})P(\mathbf{s})}{p(\mathbf{x})} \quad (1.19)$$

la densité de probabilité conditionnelle de la séquence étant donnée par

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = K(\mathbf{x}) \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \left(2\Re\left\{\mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{x}\right\} - \mathbf{s}^H \mathbf{G} \mathbf{s}\right)\right) \quad (1.20)$$

avec

$$K(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi\sigma_n^2)^N} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{x}^H \mathbf{x}\right). \quad (1.21)$$

En premier lieu, nous posons la factorisation [35]

$$\exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \left(2\Re\left\{\mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{x}\right\} - \mathbf{s}^H \mathbf{G} \mathbf{s}\right)\right) P(\mathbf{s}) = \prod_{k=0}^{N-1} T_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1}) P(s_k) \quad (1.22)$$

avec

$$T_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1}) = \exp\left(\Re\left\{s_k^* y_k - \frac{1}{2} g_0 |s_k|^2 - s_k^* \sum_{l=1}^L g_l s_{k-l}\right\}\right) \quad (1.23)$$

où $\sigma_k = [s_{k-1}, \dots, s_{k-L}]$ définit l'état du système à l'instant k . Notons que σ_k peut prendre M^L valeurs possibles. D'autre part, la factorisation du terme $P(\mathbf{s})$ est possible grâce à l'hypothèse d'indépendance des symboles émis. Puisque nous considérons ces symboles identiquement distribués, les probabilités $P(s_k)$ sont généralement équiréparties. L'algorithme somme-produit permet de marginaliser une fonction de plusieurs variables à condition que l'on puisse l'exprimer d'abord comme un produit de fonctions locales chacune dépendante d'un sous-ensemble de variables. Le principe de cet algorithme est de représenter la factorisation dans un graphe, appelé couramment *factor graph*, et de marginaliser les fonctions locales de manière successive en réalisant des sommes sur l'ensemble dans lequel sont contenues les variables [61]. Notons qu'il n'existe pas une solution unique lorsque l'algorithme somme-produit est appliqué sur un *factor graph*. L'ordre dans lequel les marginalisations sont effectuées détermine une configuration ou instance de l'algorithme. La factorisation (1.22) est décrite par le graphe de la Figure 1.6. Notons qu'il n'est pas possible de tracer un chemin fermé dans ce graphe. On appelle ce type de représentation un graphe acyclique. Cette considération est importante car l'application de l'algorithme somme-produit sur un graphe acyclique permet une marginalisation exacte des probabilités symbole *a posteriori* [18]. Nous décrivons ici une instance de l'algorithme faisant intervenir trois étapes. La première étape, appelé récursion *forward*, calcule les valeurs

$$\alpha(\sigma_{k+1}) = \sum_{\sim \sigma_{k+1}} T_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1}) \Lambda_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1}) P(s_k) \alpha(\sigma_k) \quad (1.24)$$

où $\sum_{\sim \sigma_{k+1}}$ dénote la somme sur tous les états possibles sauf σ_{k+1} . La fonction indicatrice $\Lambda_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1})$ prend la valeur 1 lorsque la transition de l'état σ_k vers l'état σ_{k+1} est possible sachant que le symbole s_k a été émis et prend la valeur zéro autrement. Nous pouvons désormais remarquer que cet algorithme entraîne une complexité exponentielle avec L et avec

$\log_2(M)$. Une deuxième phase appelée récursion *backward* calcule les valeurs

$$\beta(\sigma_k) = \sum_{\sim \sigma_k} T_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1}) \Lambda_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1}) P(s_k) \beta(\sigma_{k+1}). \quad (1.25)$$

Les probabilités *a posteriori* des symboles sont finalement obtenues grâce à une troisième étape appelée complétion

$$P(s_k | \mathbf{x}) = P(s_k) \sum_{\sim s_k} \alpha(\sigma_k) T_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1}) \Lambda_k(s_k, \sigma_k, \sigma_{k+1}) \beta(\sigma_{k+1}). \quad (1.26)$$

Nous avons choisi cette instance de l'algorithme somme-produit car elle est également connue sous le nom d'algorithme BCJR [60]. En conclusion, l'algorithme BCJR permet un calcul exact des probabilités symbole *a posteriori* quel que soit le modèle d'observation considéré. Le principal inconvénient de cette approche optimale est que sa complexité augmente de façon exponentielle avec la longueur du canal et avec le nombre de bit par symbole émis.

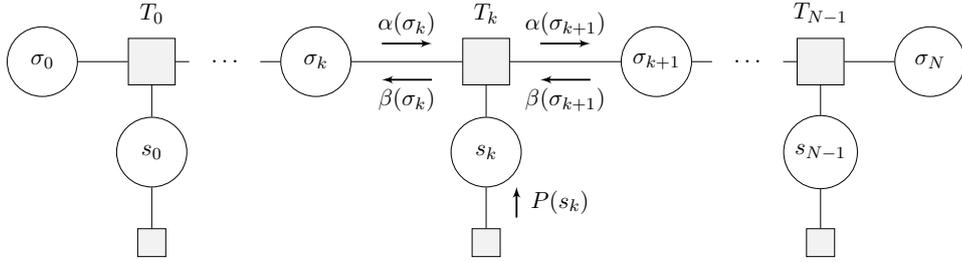


FIGURE 1.6 – Illustration de l'algorithme BCJR sur le graphe décrivant la factorisation (1.22).

1.2.2 Détection sous-optimale basée sur le BCJR et techniques linéaires

De nombreuses alternatives à moindre complexité par rapport à l'algorithme BCJR ont été proposées dans la littérature. L'algorithme M-BCJR consiste à retenir seulement les M états les plus probables à chaque instant discret [19]. La méthode EP-MBCJR [62] permet de marginaliser les probabilités *a posteriori* avec une complexité comparable à celle du M-BCJR tout en montrant des gains de performance significatifs en utilisant la théorie de la propagation d'espérance [21]. L'algorithme max-log BCJR approche une somme d'exponentielles par le maximum des exposants dans le calcul de probabilités marginales [63] et permet une réduction de complexité encore plus importante même si les performances se dégradent considérablement. Les approches mentionnées précédemment gardent la même classe de complexité exponentielle que l'approche optimale.

D'autre part, des factorisations alternatives à (1.22) peuvent être exploitées par l'algorithme somme-produit entraînant une complexité seulement linéaire avec L [20] avec $2L + 1$ la longueur des bandes de \mathbf{G} . Or, ces solutions sont sous-optimales car le graphe associé à ces factorisations contient des cycles. Elles offrent donc de bonnes performances seulement lorsqu'une grande majorité des coefficients de \mathbf{g} sont nuls [64]. Par conséquent, ces méthodes

seraient peu adaptées aux transmissions FTN, pour lesquelles la réponse impulsionnelle équivalente discrète n'est pas creuse. Il existe d'autres méthodes dont la complexité augmente linéairement avec la longueur du canal ou la taille de la constellation. En particulier, la technique d'égalisation linéaire MMSE consiste à réaliser une opération de filtrage minimisant l'erreur quadratique moyenne entre la séquence à sa sortie et la séquence de symboles émise. Une amélioration consiste à réaliser l'égalisation linéaire MMSE fractionnée, c'est-à-dire, avec l'utilisation de plusieurs échantillons par symbole émis [65]. L'égalisation linéaire MMSE peut être implémentée à faible complexité dans le domaine fréquentiel, en particulier lorsque le canal est décrit ou peut être approché par une matrice circulante, diagonalisable par transformée discrète de Fourier (DFT) et par conséquent facilement inversible [66]. Des égaliseurs MMSE dans le domaine fréquentiel appliqués aux canaux FTN ont été présentés dans [67]–[69] et ont montré de bonnes performances pour des accélérations faibles. Une dégradation de performance conséquente par rapport à l'algorithme BCJR est souvent obtenue en utilisant des approches d'égalisation linéaire. Il est généralement pas possible d'approcher les taux d'information du système en utilisant ces méthodes. Nous cherchons donc des techniques permettant d'approcher les taux d'information du système tout en conservant un récepteur de complexité abordable.

La technique *channel shortening* a d'abord été introduite dans [70] puis améliorée dans [25], [71], [72]. Cette méthode permet de faire un calcul approximatif des probabilités symbole *a posteriori* en faisant un premier traitement linéaire de la séquence observée suivi d'un algorithme BCJR. La particularité de cette méthode est que l'algorithme BCJR n'est pas construit en considérant \mathbf{G} mais en prenant une nouvelle matrice dont la longueur des bandes est inférieure à $2L + 1$. Les derniers travaux sur le *channel shortening* proposent d'optimiser les traitements linéaires du récepteur sous critère de maximisation de l'information mutuelle généralisée du système [25]. Il a été montré que le *channel shortening* a de bonnes performances sur des canaux FTN [27, Chapitre 5]. Par conséquent, cette technique d'égalisation a été retenue comme référence dans ces travaux et sera expliquée en détail dans le chapitre 2 car nos contributions en découlent. Il est important de noter que la technique *channel shortening* conserve la même classe de complexité que l'algorithme BCJR classique car le nombre d'états de l'égaliseur augmente toujours de façon exponentielle avec la longueur des bandes de la matrice considérée par l'algorithme et avec le nombre de bit par symbole. Le périmètre d'utilisation de cette méthode est donc limité aux constellations de petite taille.

Finalement, notons que dans un but d'atteindre les taux d'information présentés dans la Section 1.1.3, les techniques de détection présentées ci-dessus (y comprise la détection optimale) s'avèrent insuffisantes [28]. Il est nécessaire d'ajouter du codage correcteur d'erreurs en émission et de l'exploiter en réception à l'aide de la turbo égalisation.

1.3 Égalisation et décodage itératifs

1.3.1 Codes correcteurs d'erreurs

Le codage correcteur d'erreurs consiste à ajouter de la redondance en émission de façon structurée de sorte que cette information supplémentaire puisse être utilisée en réception pour corriger des erreurs et ainsi accroître la fiabilité de la communication.

Un codeur en bloc effectue l'opération $\mathbf{b} = \mathbf{G}_c \mathbf{a}$ donnant à sa sortie une séquence codée $\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_{P-1}]^T$ à partir d'une séquence source $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{K-1}]^T$ où \mathbf{G}_c est la matrice génératrice du code et $R = K/P$ est le rendement du code. En réception, la redondance ajoutée par le codeur est exploitée grâce à la matrice de parité \mathbf{H}_c du code. Les matrices génératrices et de parité respectent la condition biorthogonalité $\mathbf{G}_c \mathbf{H}_c^T = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{0}$ la matrice nulle. La performance du code est déterminée par le choix des matrices et par l'algorithme de décodage utilisé, souvent sous-optimal. Il existe un bon nombre de familles de codes en bloc dans la littérature [73].

Les codes *low-density parity-check* (LDPC) ont été présentés pour la première fois en 1962 par Robert G. Gallager dans ses travaux de thèse [74]. Les codes LDPC sont des codes en bloc caractérisés par une matrice de parité creuse. Cette matrice contient M lignes ou équations de parité. Chacune de ces équations fait intervenir plusieurs bits de la séquence non-codée suivant la position des "1" dans la matrice de parité. La dépendance entre bit et équations de parité est souvent représentée dans un graphe bipartite appelé graphe de Tanner [75] tel qu'illustré dans la Figure 1.7. Dans un graphe de Tanner, les équations de parité (ou *check nodes*) f_i sont connectées par des lignes aux bit non-codés a_i (également appelés *bit nodes*). Le degré d'une équation de parité correspond au nombre de *bit nodes* auquel elle est connectée. En parallèle, le degré d'un *bit node* est le nombre d'équations de parité auxquelles il est connecté.

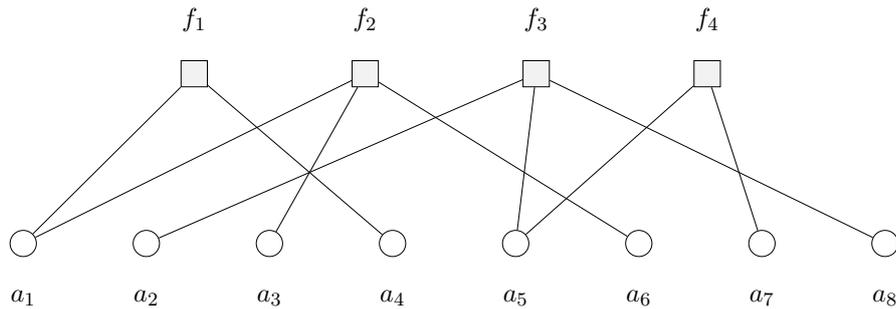


FIGURE 1.7 – Exemple de graphe de Tanner illustrant les connexions de la matrice de parité du code correcteur d'erreurs pour $M = 4$, $P = 8$.

Le graphe de Tanner décrit précédemment permet de caractériser une matrice de parité particulière. Or, pour de matrices creuses de grande taille, la performance du code n'est pas déterminée par la position des connexions mais par le nombre de connexions d'un degré donné. Ainsi, la matrice de parité du code est souvent décrite de façon compacte par le polynôme

$$v(x) = \sum_{i=1}^{d_v} v_i x^{i-1} \quad (1.27)$$

où v_i correspond au pourcentage de connexions émanant d'un *bit node* de degré i et d_v est le degré maximum des *bit nodes*. Alternativement, le nombre de connexions des *check nodes* est décrit par le polynôme

$$h(x) = \sum_{i=1}^{d_c} h_i x^{i-1} \quad (1.28)$$

où h_i correspond au pourcentage de connexions émanant d'un *check node* de degré i et d_c est le degré maximum des *check nodes*. Ces deux polynômes forment un ensemble de codes, également appelé *degree distribution*. Un code particulier est obtenu à partir de cet ensemble en fixant la position des connexions dans le graphe.

Une façon plus intuitive pour caractériser le *degree distribution* d'un code en bloc consiste à spécifier tout simplement le nombre de *check nodes* de degré i

$$\psi_i = \frac{h_i}{i} \left(\sum_{j=1}^{d_c} h_j / j \right)^{-1} \quad (1.29)$$

ou alternativement le nombre de *bit nodes* de degré i

$$\rho_i = \frac{v_i}{i} \left(\sum_{j=1}^{d_v} v_j / j \right)^{-1}. \quad (1.30)$$

On appelle un code régulier celui pour lequel tous les nœuds ont le même degré. Il est courant aujourd'hui de considérer des codes en bloc irréguliers. La raison de cela est que les *bit nodes* de degré élevé ont tendance à être corrigés plus facilement. Cette information est alors exploitée par les *check nodes* qui la relayent à des *bit nodes* de degré plus faible. Ce phénomène permet un décodage efficace et est connu sous le nom de *wave effect* [76]. Des approches basées sur la représentation d'une matrice de parité irrégulière sur un graph de Tanner et l'application de l'algorithme somme-produit sur ce graph a permis aux codes LDPC de rapprocher les limites théoriques sur canal à AWGN avec une complexité de décodage raisonnable [77]–[79]. Néanmoins, dans un souci constant de réduction de la complexité des codes, en particulier celle du codage, des alternatives aux codes LDPC ont été étudiées dans la littérature. Les codes *irregular repeat accumulate* (IRA) ont initialement été introduits comme une sous-catégorie de turbocodes qui permettait de montrer facilement des résultats théoriques sur le codage correcteur d'erreurs [80]. Les auteurs se sont alors aperçus que ces codes très simples avaient des performances comparables à celles des meilleurs codes correcteurs d'erreurs. Le schéma d'un codeur IRA systématique est donné dans la Figure 1.8.

Dans un codeur IRA, la séquence de bit non-codés \mathbf{a} de longueur K passe d'abord à travers un code à répétition de sorte que chaque bit a_i est répété r_i fois. Le rendement du code à répétition est donné par

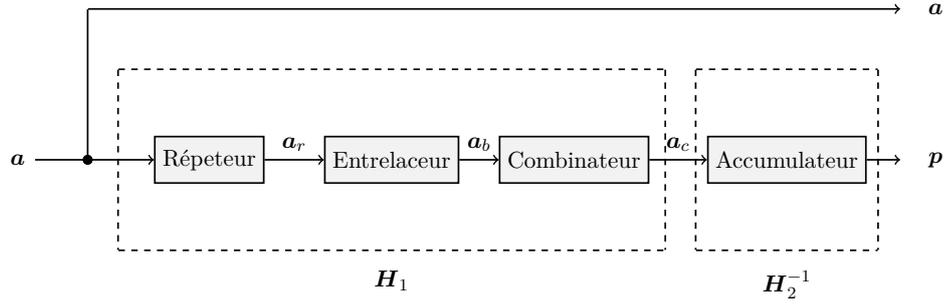


FIGURE 1.8 – Schéma du code IRA vu comme une sous-catégorie de code LDPC.

$$R_r = K \left(\sum_{i=1}^K r_i \right)^{-1}. \quad (1.31)$$

La séquence à la sortie du code à répétition est alors entrelacée. L'entrelaceur est une permutation pseudo-aléatoire de la sortie du code à répétition. Le bloc suivant, appelé combinateur, effectue des sommes en groupes de M bit avec b_i bit dans le i -ième groupe. Le rendement du combinateur est donné par

$$R_b = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M b_i. \quad (1.32)$$

La séquence combinée passe finalement à travers un accumulateur. Ce dernier bloc peut être vu comme un code convolutif récursif de rendement unitaire

$$p_i = p_{i-1} \oplus a_{c_i}. \quad (1.33)$$

Le rendement global de l'encodeur IRA systématique s'écrit

$$R = \frac{K}{K + M} = \frac{R_r R_b}{1 + R_r R_b} \quad (1.34)$$

et la sortie s'écrit

$$\mathbf{b} = [\mathbf{a} \ \mathbf{p}]. \quad (1.35)$$

Le code est systématique, c'est-à-dire, les K premiers bit de la séquence codée correspondent à la séquence non-codée. Un code IRA peut être vu également comme un code LDPC dont matrice de parité est divisée en deux parties

$$\mathbf{H}_c = [\mathbf{H}_1 \ \mathbf{H}_2] \quad (1.36)$$

où \mathbf{H}_1 est une matrice de taille $M \times K$. Les degrés de cette matrice sont déterminés par le

répéteur et le combineur. Ces deux blocs définissent donc un ensemble de codes IRA. La position des connexions est fixée par l'entrelaceur, qui détermine une instance de cet ensemble ou code particulier.

D'autre part, la matrice \mathbf{H}_2 , de taille $M \times M$, effectue l'opération inverse d'un accumulateur et a la forme

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Nous notons que dans la matrice de parité d'un code IRA, le nombre de *bit nodes* de degré 2 est nécessairement supérieur ou égal à $M - 1$ ou de façon équivalente $(1 - R)P - 1$, à cause de la présence de l'accumulateur. Cela impose une contrainte d'optimisation supplémentaire par rapport aux codes LDPC

$$v_2 \geq 2(1 - R - 1/P) \sum_{j=1}^{d_v} \frac{v_j}{j}. \quad (1.38)$$

Il est intéressant de noter que le standard de diffusion par satellite DVB-S2 spécifie une matrice de parité LDPC contenant exactement $(1 - R)P - 1$ *bit nodes* de degré 2, tel qu'illustré dans le Tableau 1.1. La raison de cela est que lors de l'optimisation du code LDPC au moyen de la technique *density evolution* [78], on obtient des matrices de parité LDPC contenant un grand nombre de *bit nodes* de degré 2. Afin d'éviter des cycles dans le graphe de Tanner avec un tel nombre de colonnes de degré 2, d'autres auteurs ont proposé de les placer sous la forme d'un accumulateur [81]. Par conséquent, les codes LDPC du standard DVB-S2 sont des codes IRA, ce qui permet un encodage à faible complexité de même que pour les turbo codes, et permet un décodage à faible complexité grâce à l'application de l'algorithme somme-produit au graphe de Tanner décrivant une matrice creuse.

Dans certains cas, en particulier pour des codes à bas rendement de codage, l'optimisation par *density evolution* peut aboutir à un *degree distribution* qui n'est pas compatible avec le nombre minimum de colonnes de degré 2 d'un code IRA. Dans ce scénario, la réduction de complexité d'encodage offerte par les codes IRA est au prix d'une diminution de la performance par rapport aux codes LDPC. Afin d'éviter ce problème, il a été proposé dans la littérature de remplacer l'accumulateur par une structure plus complexe [82]. Dans ces travaux, nous souhaitons garder une faible complexité d'encodage et garderons la structure IRA avec bloc accumulateur.

En dehors de leur utilisation dans les standards actuels de diffusion par satellite [53], [54], les codes IRA et par extension les codes LDPC ont été confirmés dans la cinquième génération de communications mobiles (5G) [83]. Ces codes vont partager la couche physique avec les

R	ρ_{13}	ρ_{12}	ρ_{11}	ρ_8	ρ_4	ρ_3	ρ_2	ρ_1
1/4		5400				10800	48599	1
1/3		7200				14400	43199	1
1/2				12960		19440	32399	1
3/5		12960				25920	25919	1
2/3	4320					38880	21599	1
3/4		5400				43200	16199	1
4/5			6480			45360	12959	1
5/6	5400					48600	10799	1
8/9					7200	50400	7199	1
9/10					6480	51840	6479	1

Tableau 1.1 – *Bit degree distributions* du standard de diffusion par satellite DVB-S2 pour des trames codées longues ($P = 64800$).

codes polaires [84], proposés récemment dans la littérature et prévus également dans la 5G [85]. Notons que beaucoup d’autres familles de codes peuvent être exprimées sous la forme d’un code en bloc ou la concaténation de codes en bloc ayant une matrice de parité creuse. Les codes convolutifs, par exemple, génèrent la redondance selon une combinaison linéaire des entrées retardées en utilisant un ou plusieurs registres à décalage. Ces codes sont caractérisés par une matrice de parité creuse avec une structure échelonnée permettant un encodage à faible complexité. En contrepartie, leur graphe contenant un nombre élevé de cycles, il n’est pas possible d’obtenir une instance performante de l’algorithme somme-produit dont la complexité serait linéaire avec la mémoire des registres du codeur. Il est donc nécessaire d’utiliser des techniques de décodage à base de treillis comme l’algorithme BCJR. D’autre part, les turbo codes, présents dans les standards actuels de communications par satellite [86], [87] et mobiles [88], sont formés par la concaténation de deux codes convolutifs dont le décodage se fait itérativement avec un couple de décodeurs de type BCJR et permettent d’approcher les les taux d’information des canaux AWGN [89].

Les codes correcteurs d’erreurs présentés ci-dessus ne permettent malheureusement pas à eux seuls d’approcher les taux d’information présentés dans la section 1.1.3 dans le cadre d’une transmission avec ISI. Il est néanmoins possible d’approcher ces limites en exploitant ces codes conjointement avec les techniques de détection présentées dans la section 1.2.1. Nous verrons par la suite que ces détecteurs sont alors appelés égaliseurs car, au lieu de prendre de décisions sur les bit émis, ils génèrent des informations souples (probabilistes) sur ces bit afin de permettre un échange efficace avec le décodeur correcteur d’erreurs. D’autre part, la matrice de parité du code correcteur d’erreurs doit être optimisée pour un canal à ISI. Les méthodes d’optimisation basées sur la théorie *density evolution* sont seulement applicables aux canaux à AWGN. Une extension de cette théorie a été étudiée dans [31] afin d’optimiser le code LDPC dans le cadre des canaux FTN. Des approches empiriques ou semi-empiriques permettant d’optimiser le code dans un canal à ISI ont également été étudiées dans la littérature. Les méthodes les plus répandues sont celles se basant sur les courbes *extrinsic transfert information* (EXIT) [90], [91]. Des solutions basées sur les courbes EXIT ont été présentées dans la littérature montrant un gain sensible sur les performances [30].

1.3.2 Turbo égalisation

Le schéma bloc de l'émetteur est donné dans la Figure 1.9. La séquence codée \mathbf{b} est entrelacée donnant lieu à la séquence $\mathbf{c} = [c_0, \dots, c_{P-1}]^T$. Un convertisseur bit symbole (CBS) permet d'obtenir la séquence de symboles \mathbf{s} suivant une certaine règle d'association à partir de la séquence binaire codée et entrelacée.

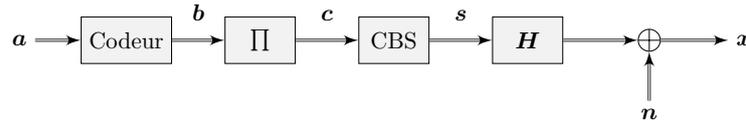


FIGURE 1.9 – Schéma bloc de l'émetteur avec codage de canal.

La turbo égalisation [28] est une extension de la théorie des turbo codes [89] et consiste à effectuer un échange itératif entre un bloc égaliseur et un bloc décodeur correcteur d'erreurs en réception. Les valeurs échangées par ces deux blocs sont probabilistes et sont souvent présentées sous forme de logarithmes du rapport de vraisemblance (LLR)

$$\lambda_{c_k} = \ln \frac{P(c_k = 1|\mathbf{y})}{P(c_k = 0|\mathbf{y})}. \quad (1.39)$$

La séquence en sortie du bloc égaliseur est donnée par $\boldsymbol{\lambda}_c = [\lambda_{c_0}, \dots, \lambda_{c_{P-1}}]^T$. Nous posons $\boldsymbol{\lambda}_d$ la séquence de rapports de vraisemblance en sortie du désentrelaceur. La séquence égalisée et désentrelacée sert comme entrée au bloc décodeur correcteur d'erreurs. Grâce à la redondance ajoutée en émission, ce bloc fournit une nouvelle estimation de la séquence de symboles émise. Cette séquence peut être exploitée comme information *a priori* conjointement avec la séquence observée par l'égaliseur. Après un certain nombre d'itérations, le décodeur fournit l'estimation des bit émis. Le schéma bloc du turbo égaliseur est donné dans la Figure 1.10.

On identifie souvent deux conditions nécessaires pour la convergence du turbo égaliseur. D'une part, un couple entrelaceur-désentrelaceur est utilisé afin de décorrélérer des bit consécutifs de la séquence échangée entre les blocs égaliseur et décodeur. L'hypothèse de non corrélation est faite par certains algorithmes de décodage correcteur d'erreurs tel que l'algorithme somme-produit. Cela est critique dans le cas des codes IRA car les équations de parité qui dépendent de l'accumulateur sont toutes composées de deux bits consécutifs. D'autre part, les blocs égaliseur et décodeur doivent échanger ce que l'on appelle information extrinsèque afin d'éviter une convergence vers un maximum local. L'information extrinsèque est obtenue en soustrayant aux LLR en sortie d'un bloc les LLR qu'il avait à son entrée.

Dans un système turbo, nous appelons information *a priori* celle en entrée de l'un des deux blocs principaux provenant de l'autre bloc du turbo égaliseur. L'algorithme BCJR présenté dans la section 1.2.1 peut facilement intégrer des probabilités *a priori* dans le calcul des métriques d'état (1.22). D'autres approches d'égalisation peuvent faire intervenir des estimés des symboles émis au lieu de valeurs probabilistes. Il est alors nécessaire d'effectuer une conversion LLR-symboles (CLS) permettant d'estimer des symboles \hat{s}_k à chaque instant k

en utilisant les LLR en sortie du décodeur λ_{b_k} . La méthode d'estimation symbole classique sera détaillée dans le Chapitre 4 à des fins de comparaison avec l'estimateur proposé dans ces travaux de thèse. De plus, les techniques d'égalisation linéaires ont également besoin d'un convertisseur symboles-LLR (CSL) à leur sortie permettant un échange probabiliste avec le décodeur correcteur d'erreurs. Une technique très répandue ayant besoin de ces conversions est l'égalisation linéaire MMSE [24]. La section suivante décrit le convertisseur CSL dans le cadre de la turbo égalisation linéaire.

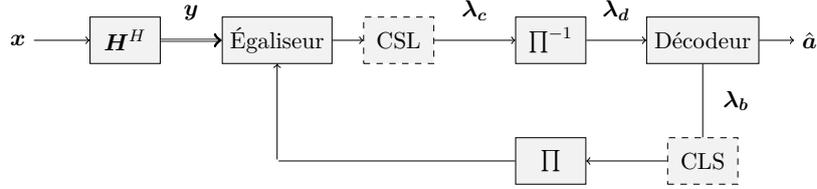


FIGURE 1.10 – Schéma bloc du récepteur avec turbo égalisation.

1.3.3 Conversion symboles-LLR dans le cadre de la turbo égalisation

En sortie d'un égaliseur linéaire, il est nécessaire d'effectuer une conversion symboles-LLR permettant un échange probabiliste avec le décodeur correcteur d'erreurs. Pour faire cela, nous supposons que les symboles en sortie de l'étape linéaire peuvent se décomposer en deux parties : un terme de symbole émis plus un terme de bruit plus interférence résiduelle. Cela se fait en ré-écrivant la sortie des traitements linéaires [92, p. 370]

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\nu}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est le terme de bruit plus interférence en sortie de l'égaliseur. Le LLR du l -ième bit du k -ième symbole en sortie de l'égaliseur s'écrit

$$\lambda_{c_{k,l}} = \ln \left(\frac{\sum_{m=0}^{M-1} P(s_{k,m}|y_k) \Gamma_{m,l}}{\sum_{n=0}^{M-1} P(s_{k,n}|y_k) (1 - \Gamma_{n,l})} \right) \quad (1.40)$$

où $P(s_{k,m}|y_k)$ est la probabilité que le k -ième symbole transmis corresponde au m -ième symbole de l'alphabet de modulation conditionnée par l'observation. La fonction indicatrice $\Gamma_{m,l}$ prend la valeur 1 lorsque le l -ième bit du m -ième symbole de l'alphabet est égal à 1 et prend la valeur zéro autrement. En appliquant le théorème de Bayes

$$\lambda_{c_{k,l}} = \ln \left(\frac{\sum_{m=0}^{M-1} p(y_k|s_{k,m}) P(s_{k,m}) \Gamma_{m,l}}{\sum_{n=0}^{M-1} p(y_k|s_{k,n}) P(s_{k,n}) (1 - \Gamma_{n,l})} \right). \quad (1.41)$$

Nous supposons dans ce qui suit que le terme de bruit plus interférence a une distribution Gaussienne de sorte que [23]

$$P(y_k|s_{k,m}) = \frac{1}{\pi\sigma_v^2} \exp\left(-\frac{|y_k - s_{k,m}|^2}{\sigma_v^2}\right) \quad (1.42)$$

et les LLR en sortie de l'égaliseur sont donnés par

$$\lambda_{c_{k,l}} = \ln \left(\frac{\sum_{m=0}^{M-1} P(s_{k,m}) \exp\left(-\frac{|y_k - s_{k,m}|^2}{\sigma_v^2}\right) \Gamma_{m,l}}{\sum_{n=0}^{M-1} P(s_{k,n}) \exp\left(-\frac{|y_k - s_{k,n}|^2}{\sigma_v^2}\right) (1 - \Gamma_{n,l})} \right). \quad (1.43)$$

1.4 Synthèse - Vers la réception à complexité maîtrisée

La transmission FTN permet d'augmenter l'efficacité spectrale et les taux d'information des systèmes de communications monoporteuse par rapport aux systèmes transmettant à la cadence de Nyquist sans augmenter la taille de l'alphabet de modulation. Néanmoins, la transmission au-delà de la cadence de Nyquist entraîne l'interférence entre symboles. En réception, des techniques permettant de reconstruire le plus fidèlement possible la séquence émise sont requises. Les approches d'égalisation minimisant la probabilité d'erreur binaire ont une complexité exponentielle avec la longueur du canal et le nombre de bit par symbole, ce qui peut être prohibitif dans le cadre des transmissions FTN avec une grande densité. Les approches qui présentent une complexité linéaire avec la longueur du canal ne permettent pas d'approcher les taux d'information sur des canaux à ISI sauf pour des cas très particuliers. Concrètement, les approches basées sur les graphes approchent les taux d'information seulement pour des canaux creux, incompatibles avec les réponses impulsionnelles obtenues dans une transmission FTN. Notre objectif premier étant d'approcher les limites théoriques pour des constellations de petite taille, nous nous intéressons donc à des approches d'égalisation avec une classe de complexité exponentielle avec la taille de la réponse impulsionnelle discrète équivalente et nous cherchons à maîtriser leur complexité. La technique *channel shortening* permet de répondre à cette problématique et sera décrite en détail dans le Chapitre 2.

D'autre part, le choix du code correcteur d'erreurs est déterminant du point de vue de la performance offerte par le turbo égaliseur. Les codes LDPC peuvent approcher les taux d'information pour des canaux à bruit additif blanc Gaussien mais restent à optimiser dans le cadre des transmissions avec ISI. Nous montrerons dans le Chapitre 5 qu'une optimisation des codes permet d'approcher les taux d'information du système dans le cadre des transmissions FTN.

Égalisation par *channel shortening*

Sommaire

2.1	Structure du système de transmission à raccourcissement de canal	30
2.2	Information mutuelle généralisée	32
2.3	Optimisation de l'égaliseur <i>channel shortening</i>	34
2.3.1	Expression analytique sans traitement B	34
2.3.2	Méthodes d'optimisation numérique	37
2.3.3	Performances de l'égaliseur <i>channel shortening</i>	38
2.4	Synthèse - vers une solution plus compacte de l'égaliseur <i>channel shortening</i>	39

Nous avons vu dans le chapitre précédent que dans le cadre des transmissions avec interférence entre symboles, l'algorithme BCJR permet un calcul exact des probabilités *a posteriori* au prix d'une complexité exponentielle avec la longueur du canal et avec le nombre de bit par symbole. Des techniques sous-optimales permettant de réduire la complexité calculatoire du récepteur doivent être envisagées. En particulier, les approches dites à réduction de treillis consistent à considérer, du point de vue du récepteur, un canal de longueur réduite de sorte que le nombre d'états calculé par l'égaliseur puisse être abaissé, ce qui aura un impact sur le nombre d'opérations et la mémoire requise en réception. C'est notamment le cas de l'algorithme M-BCJR ou ses variantes mentionnés précédemment. Plus récemment, d'autres méthodes à réduction de treillis ont été étudiées. Parmi les travaux de la littérature, nous avons identifié la technique dite *channel shortening* comme étant une alternative particulièrement adaptée aux canaux de type *faster-than*-Nyquist car elle permet d'obtenir un très bon compromis entre performance et complexité calculatoire pour ces types de canaux à interférence entre symboles. Dans ce chapitre, nous détaillons les derniers travaux réalisés sur le *channel shortening* et nous décrivons les contraintes et inconvénients liés aux méthodes existantes. Ce chapitre a pour objectif de positionner nos contributions sur le raccourcissement de canal qui seront détaillées dans les Chapitres 3 et 4.

2.1 Structure du système de transmission à raccourcissement de canal

Le terme *channel shortening* (CS) regroupe un ensemble de méthodes d'égalisation à réduction de treillis. La spécificité de ces approches est que la matrice de corrélation \mathbf{G} est remplacée par une nouvelle matrice \mathbf{G}_r , appelée matrice objectif, ayant une contrainte sur la longueur des bandes, permettant ainsi de réduire le nombre d'états de l'algorithme BCJR. De plus, cet algorithme est précédé par un traitement linéaire \mathbf{F} qui n'est pas nécessairement adapté à la matrice de canal \mathbf{H} . Le traitement linéaire et la nouvelle matrice sont alors optimisés suivant des critères appropriés. Les premiers travaux sur le *channel shortening* étaient basés sur un critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne [70]. Des travaux plus récents ont montré que ce critère ne permet pas au récepteur d'approcher les taux d'information du système et ont proposé des matrices maximisant une variante de l'information mutuelle entre l'émetteur et le récepteur, également appelée information mutuelle généralisée I_G [25], [26]. En faisant une hypothèse de distribution Gaussienne des symboles émis, une expression analytique pour I_G a été proposée dans ces travaux précédents. Cela permet d'obtenir \mathbf{F} analytiquement par un simple calcul de dérivée partielle. La difficulté revient sur un calcul analytique de \mathbf{G}_r car une contrainte supplémentaire sur la longueur de ses bandes est à appliquer lors du processus d'optimisation. Toutefois, cette problématique a été résolue en faisant une décomposition de Cholesky de \mathbf{G}_r , ce qui a permis d'obtenir l'expression analytique des deux matrices du récepteur *channel shortening* sous critère de maximisation l'information mutuelle généralisée [25]. L'émetteur-récepteur *channel shortening* proposé dans ces premiers travaux est illustré dans la Figure 2.1. Il est à noter que par rapport à l'égaliseur BCJR classique permettant un calcul exact des probabilités *a posteriori* symbole, l'égaliseur CS est composé d'un traitement linéaire au lieu de \mathbf{H}^H et calcule des probabilités *a posteriori* symbole approximatives en exploitant le même algorithme BCJR sur \mathbf{G}_r . La sortie du traitement linéaire est maintenant définie par

$$\mathbf{t} = \mathbf{F}\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

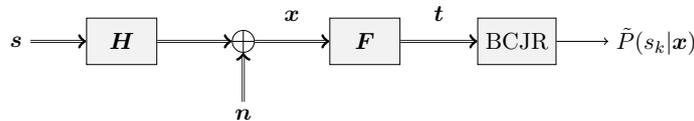


FIGURE 2.1 – Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur *channel shortening*.

Ce schéma d'égalisation, pensé initialement sans considérer la présence de codes correcteurs d'erreurs dans le système de transmission, peut être facilement adapté aux schémas de réception basés sur la turbo égalisation présentés dans le chapitre précédent. Dans le cadre de la turbo égalisation, les probabilités *a priori* fournies par le décodeur peuvent, également dans un contexte *channel shortening*, être exploitées par l'algorithme BCJR tel que décrit dans la Section 1.3.2. Ainsi, il a été montré que le turbo égaliseur *channel shortening* utilisant des codes LDPC surpasse les performances des méthodes précédentes sur canal à interférence

avec une complexité calculatoire comparable [25]. Toutefois, toujours dans un contexte de réception basé sur la turbo égalisation, des configurations de l'égaliseur *channel shortening* plus performantes peuvent être envisagées. En particulier, la manière dont l'information *a priori* est exploitée par l'égaliseur a été revue dans [26]. Ces travaux supposent que l'information *a priori* en entrée de l'égaliseur est composée de symboles estimés au lieu de probabilités. Rappelons que des égaliseurs exploitant l'information *a priori* sous forme de symboles estimés ont été amplement utilisés dans la littérature, en particulier dans le cadre des méthodes d'égalisation linéaire sous critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne [24]. Dans un contexte *channel shortening*, cette information est exploitée en effectuant un traitement \mathbf{B} tel qu'illustré dans la Figure 2.2. Dans cette nouvelle configuration, \mathbf{F} , \mathbf{B} et \mathbf{G}_T ont été optimisés conjointement sous critère de maximisation de I_G en utilisant des méthodes numériques [26], [29]. Cette configuration est une généralisation de la première et constitue le point de départ de ces travaux de thèse.

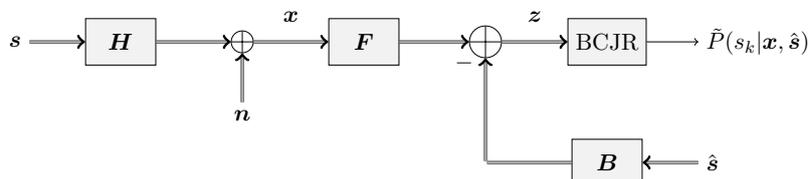


FIGURE 2.2 – Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur *channel shortening* en présence de symboles *a priori*.

D'autre part, les travaux sur le *channel shortening* ont été étendus à l'optimisation des filtres d'émission [71]. Dans ces travaux, des méthodes d'optimisation numérique ont été proposées afin d'obtenir une matrice de canal \mathbf{H} maximisant l'information mutuelle généralisée. Les résultats de simulation montrent que cette approche surpasse les solutions précédentes du point de vue des performances théoriques. Néanmoins, les filtres d'émission obtenus avec cette méthode ne sont pas à bande limitée. Dans le but de rester homogènes du point de vue du spectre d'émission, nous considérons dans travaux de thèse de impulsions de mise en forme fixées.

D'autres travaux sur le *channel shortening* ont traité le problème de l'égalisation adaptative de canaux à ISI variants dans le temps [72]. Les résultats de simulation montrent qu'une perte en taux d'information inférieure à 0,05 bit/symbole peut être obtenue en exploitant des séquences pilote de taille au moins égale à 100 symboles et en utilisant la méthode des moindres carrés récurrents (RLS). Toutefois, la dégradation du récepteur sur des canaux très sélectifs en temps reste à évaluer dans un contexte turbo. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux communications par satellite en service fixe pour lesquelles un canal invariant dans le temps constitue une très bonne approximation.

Finalement, la réception avec CS a été appliquée à l'égalisation de canaux non-linéaires, en particulier ceux provoqués par la transmission par satellite opérant près du point de saturation des amplificateurs de puissance [93]. Ceci est possible grâce à une approximation à l'ordre deux de la caractéristique d'entrée sortie de l'amplificateur. Dans ces travaux de thèse, nous considérons seulement l'égalisation CS de canaux linéaires.

2.2 Information mutuelle généralisée

Le calcul des probabilités *a posteriori* symbole effectué par l'algorithme BCJR repose sur une factorisation de la densité de probabilité conditionnelle (1.20)

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = K(\mathbf{x}) \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \left(2\Re\left\{\mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{x}\right\} - \mathbf{s}^H \mathbf{G} \mathbf{s}\right)\right).$$

Or, cette approche entraîne une complexité exponentielle avec L où $2L + 1$ correspond à la taille des bandes de la matrice de corrélation \mathbf{G} . Afin de réduire la complexité du récepteur, la technique *channel shortening* propose d'utiliser un égaliseur BCJR opérant sur une forme fonctionnelle inspirée de (1.20) [25], [26]

$$\tilde{p}(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = K(\mathbf{x}) \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \left(2\Re\left\{\mathbf{s}^H (\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}})\right\} - \mathbf{s}^H \mathbf{G}_r \mathbf{s}\right)\right). \quad (2.2)$$

La matrice \mathbf{G}_r est de longueur réduite $\nu \leq L$

$$(\mathbf{G}_r)_{i,j} = 0 \quad |i - j| > \nu \quad (2.3)$$

où $(\mathbf{G}_r)_{i,j}$ est le (i, j) -ième terme de la réponse impulsionnelle objectif. Lorsque le récepteur dispose d'information *a priori* sous la forme de symboles estimés $\hat{\mathbf{s}}$, cette information peut être soumise à un traitement linéaire \mathbf{B} et être soustraite à la séquence observée

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}. \quad (2.4)$$

La notation $\tilde{p}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}|\mathbf{s})$ faisant apparaître une dépendance avec $\hat{\mathbf{s}}$ aurait été également pertinente dans (2.2) mais nous avons choisi la notation déjà en vigueur dans la littérature [26]. Il est également à noter que (2.2) n'est pas homogène à une densité de probabilité dans le cas général. Cela est *a priori* vrai seulement lorsque $\mathbf{F} = \mathbf{H}^H$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{0}$ la matrice nulle et $\mathbf{G}_r = \mathbf{G}$. Nous montrerons dans le Chapitre 3 que (2.2) est également homogène à une densité de probabilité lorsque $\mathbf{F} = \mathbf{H}^H$ et que \mathbf{B} , \mathbf{G}_r prennent des formes particulières.

La loi modifiée (2.2) et la nouvelle séquence (2.4) sont exploitées par l'algorithme BCJR pour calculer des probabilités symbole *a posteriori* approximatives. La littérature récente considère l'information mutuelle généralisée comme critère d'optimisation [25], [26], [94]

$$I_G = \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \hat{\mathbf{s}}} \{\log(\tilde{p}(\mathbf{x}|\mathbf{s}))\} - \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}} \{\log(\tilde{p}(\mathbf{x}))\} \quad (2.5)$$

avec

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\mathbf{x}|\mathbf{s}) p(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s}.$$

Cette définition généralise l'information mutuelle présentée dans la section 1.1.3 en considé-

rant 2.2 au lieu de (1.20) et constitue une fonction objectif pertinente pour l'optimisation. Cette optimisation est posée comme suit

$$(\mathbf{F}_{\text{cs}}, \mathbf{B}_{\text{cs}}, \mathbf{G}_{\text{cs}}) = \underset{\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{G}_r}{\operatorname{argmax}} I_G \quad \text{avec} \quad (\mathbf{G}_r)_{i,j} = 0 \quad |i - j| > \nu. \quad (2.6)$$

Une première étape consiste à exprimer analytiquement (2.5) en fonction de \mathbf{F} , \mathbf{B} et \mathbf{G}_r . Rappelons que $\tilde{p}(\mathbf{x})$ ne bénéficie pas d'une expression analytique dans le cas général. Cela est toutefois possible en faisant une hypothèse de distribution Gaussienne des symboles émis. Il est supposé dans la littérature récente que les symboles émis sont indépendants et à moyenne nulle et qu'ils suivent une distribution Gaussienne circulaire symétrique de variance σ_s^2 [25]. Nous retenons ces hypothèses dans ces travaux de thèse car elles permettent une solution analytique comme expliqué précédemment. Elles peuvent sembler à première vue abusives car d'une part, les symboles émis dans un système de communications numériques sont souvent considérés comme étant uniformément distribués dans une constellation complexe choisie. Ce modèle classique a par ailleurs été considéré en début de ce manuscrit. D'autre part, l'hypothèse de circularité des symboles émis n'est pas raisonnablement applicable à certaines constellations comme par exemple celles de type *pulse amplitude modulation* (PAM) et *binary phase-shift keying* (BPSK). Or, les premiers travaux sur le *channel shortening* montrent ces hypothèses ont un impact négligeable sur les performances de l'égaliseur [25].

Nous posons les matrices d'auto-corrélation $E\{\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}^H\} = \mathbf{C}_0$ et d'inter-corrélation $E\{\mathbf{s}\hat{\mathbf{s}}^H\} = \mathbf{C}_1$. Finalement, nous supposons que les symboles *a priori* et le bruit du canal ne sont pas corrélés $E\{\mathbf{n}\hat{\mathbf{s}}^H\} = \mathbf{0}$. Dans le cadre de la turbo égalisation et plus généralement des systèmes à décodage itératifs, la non-corrélation des symboles *a priori* est obtenue grâce à l'utilisation de l'information extrinsèque [89].

Pour faciliter la lecture et sans perte de généralité, nous prenons $\sigma_s^2 = 1$ et nous introduisons σ_n^2 dans \mathbf{F} , \mathbf{B} et dans \mathbf{G}_r respectivement de sorte que

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \frac{K(\mathbf{x})}{\pi^N} \int_{\mathbf{s}} \exp\left(2\Re\{\mathbf{s}^H \mathbf{z}\} - \mathbf{s}^H (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \mathbf{s}\right) d\mathbf{s},$$

$$K(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi\sigma_n^2)^N} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}{\sigma_n^2}\right).$$

Nous imposons \mathbf{G}_r Hermitienne de sorte qu'en utilisant la complétion des carrés on obtient

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}) \det\left\{(\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1}\right\} \exp\left(\mathbf{z}^H (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{z}\right).$$

L'information mutuelle généralisée s'écrit

$$\begin{aligned}
I_G &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \hat{\mathbf{s}}} \{ \log (\tilde{p}(\mathbf{x}|\mathbf{s})) \} - \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}} \{ \log (\tilde{p}(\mathbf{x})) \} \\
&= 2\Re \left\{ \mathbb{E} \left\{ \mathbf{s}^H \mathbf{z} \right\} \right\} - \mathbb{E} \left\{ \mathbf{s}^H \mathbf{G}_r \mathbf{s} \right\} + \log (\det \{ \mathbf{G}_r + \mathbf{I} \}) - \mathbb{E} \left\{ \mathbf{z}^H (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{z} \right\}, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\{ \mathbf{s}^H \mathbf{z} \right\} &= \text{Tr} \left\{ \mathbf{F} \mathbf{H} - \mathbf{B} \mathbf{C}_1^H \right\}, \\
\mathbb{E} \left\{ \mathbf{s}^H \mathbf{G}_r \mathbf{s} \right\} &= \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}_r \right\}, \\
\mathbb{E} \left\{ \mathbf{z}^H (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{z} \right\} &= \text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{F} \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{F}^H + \mathbf{B} \mathbf{C}_0 \mathbf{B}^H - 2\Re \left\{ \mathbf{F} \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}^H \right\} \right) (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1} \right\}. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons I_G en introduisant (2.8) dans (2.7)

$$\begin{aligned}
I_G &= \log (\det \{ \mathbf{G}_r + \mathbf{I} \}) - \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}_r \right\} + 2\text{Tr} \left\{ \mathbf{F} \mathbf{H} - \mathbf{B} \mathbf{C}_1^H \right\} \\
&\quad - \text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{F} \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{F}^H + \mathbf{B} \mathbf{C}_0 \mathbf{B}^H - 2\Re \left\{ \mathbf{F} \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}^H \right\} \right) (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1} \right\}. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Les matrices \mathbf{F}_{cs} , \mathbf{B}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} s'obtiennent en maximisant la I_G résultante. Dans la littérature récente, les matrices *channel shortening* sont obtenues en utilisant des méthodes d'optimisation numérique, même si une solution analytique a été initialement proposée dans le cas particulier $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ [25]. L'optimisation de ces matrices fait l'objet de la section suivante.

2.3 Optimisation de l'égaliseur *channel shortening*

2.3.1 Expression analytique sans traitement \mathbf{B}

Une solution analytique pour \mathbf{F}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} a été initialement présentée [25] dans le cas particulier où le traitement \mathbf{B} n'est pas utilisé soit parce que le récepteur ne dispose pas d'information *a priori*, soit parce que cette information est exploitée directement par l'algorithme BCJR comme expliqué dans la Section 1.3.2. En l'absence de ce traitement, l'information mutuelle généralisée s'écrit

$$I_G = \log (\det \{ \mathbf{G}_r + \mathbf{I} \}) - \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}_r \right\} + 2\Re \left\{ \text{Tr} \left\{ \mathbf{F} \mathbf{H} \right\} \right\} - \text{Tr} \left\{ \mathbf{F} \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{F}^H (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1} \right\}. \quad (2.10)$$

En supposant d'abord \mathbf{G}_r fixé, le traitement \mathbf{F}_{cs} est calculé en posant $\nabla_{\mathbf{F}_{cs}} I_G = \mathbf{0}$ avec

$$\nabla_{\mathbf{F}_{cs}} I_G = \nabla_{\Re\{\mathbf{F}_{cs}\}} I_G + j \nabla_{\Im\{\mathbf{F}_{cs}\}} I_G, \quad (2.11)$$

$$\nabla_{\Re\{\mathbf{F}_{cs}\}} I_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial I_G}{\partial \Re\{\mathbf{F}_{cs}\}_{1,1}} & \frac{\partial I_G}{\partial \Re\{\mathbf{F}_{cs}\}_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial I_G}{\partial \Re\{\mathbf{F}_{cs}\}_{1,N}} \\ \frac{\partial I_G}{\partial \Re\{\mathbf{F}_{cs}\}_{2,1}} & \frac{\partial I_G}{\partial \Re\{\mathbf{F}_{cs}\}_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial I_G}{\partial \Re\{\mathbf{F}_{cs}\}_{2,N}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial I_G}{\partial \Re\{\mathbf{F}_{cs}\}_{N,1}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial I_G}{\partial \Re\{\mathbf{F}_{cs}\}_{N,N}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

le gradient complexe de l'information mutuelle généralisée [95, p. 25] avec $\{\mathbf{F}_{cs}\}_{i,j}$ le (i, j) -ième élément de la matrice. Le traitement optimal s'écrit

$$\mathbf{F}_{cs} = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \mu \mathbf{I})^{-1}. \quad (2.13)$$

avec $\mu = \sigma_n^2 / \sigma_s^2$. Puisque \mathbf{G}_r est supposée Hermitienne et que l'optimisation (2.6) est considérée, \mathbf{F}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} sont des matrices Toeplitz bande. Par conséquent, une opération de filtrage peut être réalisée dans le récepteur avec une complexité quasi linéaire avec la longueur des filtres de réception. Il est intéressant de constater que la solution *shortening* avec $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ correspond à la concaténation d'un traitement minimisant l'erreur quadratique moyenne entre la séquence à sa sortie et la séquence de symboles en émission [96]

$$\mathbf{F}_{mse} = \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \mu \mathbf{I})^{-1} \quad (2.14)$$

et le traitement $\mathbf{G}_r + \mathbf{I}$. Lorsque l'on fixe $\nu = 0$, l'égaliseur BCJR ne s'applique pas car $\mathbf{G}_r = \mathbf{I}$ et l'égaliseur *channel shortening* est identique à l'égaliseur linéaire MMSE. D'autre part, pour $\nu = L$ on a $\mathbf{G}_r = \mathbf{H}^H \mathbf{H}$. Pour cette réponse, $\mathbf{F} = \mathbf{H}^H$ constitue le traitement adapté à la matrice de canal. Dans ce cas, le récepteur effectue l'égalisation BCJR sans réduction de complexité.

Avec \mathbf{F}_{cs} optimal, l'information mutuelle généralisée devient

$$I_G = \log(\det\{\mathbf{G}_r + \mathbf{I}\}) + N + \text{Tr}\{(\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \mathbf{A}\}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{I} + \mathbf{H}^H (\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H} \quad (2.16)$$

Une fois que I_G optimum a été calculé en fonction de \mathbf{G}_r , il reste à optimiser ce dernier. Pour faire cela, il est supposé dans la littérature que le terme $\mathbf{G}_r + \mathbf{I}$ est Hermitien et défini positif de sorte qu'il admet une décomposition de Cholesky $\mathbf{G}_r + \mathbf{I} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H$ où \mathbf{U} est une matrice triangulaire supérieure

$$(\mathbf{U})_{m,n} = \begin{cases} u_{m,n} & \text{si } n \geq m \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Avec cette décomposition, (2.15) peut être exprimé comme suit [25]

$$I_G = \left(2 \sum_{n=1}^N \log(u_{n,n}) - \text{Tr} \{ \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^H \} + N \right). \quad (2.17)$$

Le premier terme dans (2.17) est indépendant des éléments de la matrice \mathbf{U} en dehors de la diagonale. Par conséquent, I_G peut être optimisé sur les éléments dans la diagonale et en dehors de la diagonale séparément [25]

$$\mathbf{U} = \underset{u_{n,n}}{\text{argmax}} \left(2 \sum_{n=1}^N \log(u_{n,n}) + N - \underset{\{u_{m,n}\}_{m+1 \leq n \leq \min(m+\nu, N)}}{\text{argmin}} \text{Tr} \{ \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^H \} \right). \quad (2.18)$$

En définissant la matrice

$$\mathbf{A}_n^\nu = \begin{pmatrix} a_{n+1, n+1} & \cdots & a_{n+1, \min(N, n+\nu)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\min(N, n+\nu), n+1} & \cdots & a_{\min(N, n+\nu), \min(N, n+\nu)} \end{pmatrix}$$

et les vecteurs ligne $\mathbf{a}_n^\nu = [a_{n, n+1}, \cdots, a_{n, \min(N, n+\nu)}]$, $\mathbf{u}_n^\nu = [u_{n, n+1}, \cdots, u_{n, \min(N, n+\nu)}]$ alors on peut exprimer

$$\text{Tr} \{ \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^H \} = \sum_{n=1}^N \left(u_{n,n} \mathbf{u}_n^\nu \right) \begin{pmatrix} a_{n,n} & \mathbf{a}_n^\nu \\ \mathbf{a}_n^{\nu H} & \mathbf{A}_n^\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n,n} \\ \mathbf{u}_n^{\nu H} \end{pmatrix}.$$

En posant $\nabla_{\mathbf{u}_n^\nu} \text{Tr} \{ \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^H \} = \mathbf{0}$ nous obtenons

$$\mathbf{u}_n^\nu = -u_{n,n} \mathbf{a}_n^\nu (\mathbf{A}_n^\nu)^{-1}. \quad (2.19)$$

Nous introduisons \mathbf{u}_n^ν dans (2.18) obtenant

$$\mathbf{U} = \underset{u_{n,n}}{\text{argmax}} \left(2 \sum_{n=1}^N \log(u_{n,n}) + N - \sum_{n=1}^N u_{n,n}^2 c_n \right) \quad (2.20)$$

où $c_n = a_{n,n} - \mathbf{a}_n^\nu (\mathbf{A}_n^\nu)^{-1} \mathbf{a}_n^{\nu H}$. En forçant la dérivée par rapport à $u_{n,n}$ de (2.20) à zéro nous obtenons finalement

$$u_{n,n} = \sqrt{\frac{1}{c_n}}. \quad (2.21)$$

La matrice optimale \mathbf{G}_r est obtenue directement à partir de (2.19) et (2.21).

2.3.2 Méthodes d'optimisation numérique

Nous cherchons à trouver les valeurs \mathbf{F}_{cs} , \mathbf{B}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} qui maximisent l'information mutuelle généralisée (2.15). Dans la littérature, des méthodes d'optimisation numérique basées sur l'algorithme du gradient ont été proposées [26], [29]. Il a été montré que $I_{\mathbf{G}}$ est une fonction strictement concave de sorte que l'algorithme du gradient permet de converger vers le maximum global de la fonction [29]. D'autre part, la contrainte de longueur des bandes de \mathbf{G}_{r} (2.3) peut être incluse dans le processus d'optimisation en utilisant une variante de la méthode du gradient appelée méthode du gradient projeté [97]. Cette méthode est décrite ci-dessous.

La valeur \mathbf{F}_{cs} peut être calculée de façon itérative en calculant le gradient de l'information mutuelle généralisée par rapport à cette variable

$$\mathbf{F}(i+1) = \mathbf{F}(i) + k \left(\vec{\nabla}_{\mathbf{F}} I_{\mathbf{G}}(\mathbf{F}(i), \mathbf{B}(i), \mathbf{G}_{\text{r}}(i)) \right). \quad (2.22)$$

avec k le pas de convergence et $\vec{\nabla}_{\mathbf{F}}(\cdot)$ l'opérateur gradient par rapport à la variable \mathbf{F} . De même, la valeur \mathbf{B}_{cs} peut être obtenue en posant

$$\mathbf{B}(i+1) = \mathbf{B}(i) + k \left(\vec{\nabla}_{\mathbf{B}} I_{\mathbf{G}}(\mathbf{F}(i), \mathbf{B}(i), \mathbf{G}_{\text{r}}(i)) \right). \quad (2.23)$$

\mathbf{G}_{r} est calculée itérativement en ajoutant la contrainte (2.3). Cela se fait en posant

$$\mathbf{G}_{\text{r}}(i+1) = P_{\mathbf{V}} \left(\mathbf{G}_{\text{r}}(i) + k \left(\vec{\nabla}_{\mathbf{G}_{\text{r}}} I_{\mathbf{G}}(\mathbf{F}(i), \mathbf{B}(i), \mathbf{G}_{\text{r}}(i)) \right) \right) \quad (2.24)$$

où $P_{\mathbf{V}}(\cdot)$ dénote la projection sur \mathbf{V} , le sous espace obtenu après application de l'ensemble de contraintes (2.3). Le sous espace \mathbf{V} est dans le problème qui nous concerne la projection de \mathbb{C}^{N^2} sur un hyperplan dans $\mathbb{C}^{\psi} \subset \mathbb{C}^{N^2}$ avec ψ le nombre de coefficients non nuls de \mathbf{G}_{r} . La projection d'un ensemble convexe sur un hyperplan contenu dans cet ensemble est également convexe. Par conséquent, une condition suffisante pour la convergence de l'algorithme du gradient projeté est la convexité de $I_{\mathbf{G}}$ sur \mathbb{C}^{N^2} , que nous avons vérifié en pratique dans les scénarios de simulation et canaux considérés dans cette thèse. L'initialisation de l'algorithme peut être faite de manière arbitraire. Toutefois, un choix judicieux des valeurs initiales peut faciliter une convergence rapide. Intuitivement, les valeurs initiales $\mathbf{F}(0) = \mathbf{H}^H$, $\mathbf{B}(0) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{G}_{\text{r}}(0) = \mathbf{G}$ nous semblent raisonnables car elles correspondent au cas particulier $\nu = L$ ou l'information mutuelle généralisée coïncide avec l'information mutuelle.

L'algorithme décrit précédemment permet de converger vers une solution unique maximisant (2.15). Les matrices \mathbf{F}_{cs} , \mathbf{B}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} sont des matrices Toeplitz bande. Par conséquent, comme on l'avait trouvé dans le cas sans traitement des informations *a priori*, les traitements \mathbf{F}_{cs} et \mathbf{B}_{cs} peuvent s'effectuer efficacement au moyen d'opérations de filtrage.

Les méthodes d'optimisation numérique proposées dans la littérature ont plusieurs inconvénients. D'une part, les problèmes d'instabilité et de convergence, liés à tout problème d'optimisation numérique, sont à prendre en compte dans ces récepteurs *channel shortening*. D'autre part, dans un contexte turbo, l'information *a priori* change au fil des itérations effec-

tuées par le turbo égaliseur. L'information mutuelle généralisée ayant une dépendance avec cette information, les matrices de l'égaliseur doivent être calculées plusieurs fois, toujours par ces méthodes numériques. Un calcul analytique des filtres permettrait d'alléger considérablement la charge calculatoire de l'égaliseur.

2.3.3 Performances de l'égaliseur *channel shortening*

Dans cette partie sont évaluées les performances de l'égaliseur *channel shortening* pour des alphabets de modulations BPSK sur deux canaux à interférence entre symboles différents. Les performances de l'égaliseur CS pour le canal EPR4 sont montrées dans la Figure 2.3. Notons que l'égaliseur CS a quatre points de fonctionnement sur ce canal à quatre coefficients ($L = 3$). Comme expliqué dans ce chapitre, $\nu = 0$ correspond à effectuer un filtrage MMSE. Lorsque les valeurs intermédiaires $\nu = 1$ et $\nu = 2$ sont considérés, le récepteur réalise une première étape de filtrage non adapté à la matrice de canal, suivie d'un calcul de probabilités *a posteriori* à l'aide de l'algorithme BCJR. La matrice \mathbf{G}_{cs} prise en compte par l'algorithme comporte, pour ces deux valeurs de ν , 2 et 4 états respectivement. Le troisième et dernier scénario $\nu = L = 3$ correspond au récepteur classique à filtrage adapté à la matrice de canal suivi d'un égaliseur BCJR classique. Nous constatons à travers ce résultats que l'impact de ν sur le BER en sortie de l'égaliseur est linéaire pour ce type de canal dont les coefficients ont la même amplitude. Le comportement est très différent lorsque des systèmes de transmission FTN avec des filtres de mise en forme en SRRC sont considérés. Dans la Figure 2.4 sont montrées les performances de l'égaliseur sur le canal FTN05. Les lignes continues représentent les performances de l'égaliseur CS. En considérant ce type de canal dont les coefficients ont une énergie décroissante, le récepteur CS converge très rapidement vers les performances optimales ($L=8$). Les lignes en pointillé montrent les performances que nous obtenons en utilisant un filtre adapté à la matrice d'émission suivi d'un égaliseur BCJR classique prenant en entrée une matrice de corrélation \mathbf{G} dont la longueur des bandes a été tronquée à ν éléments. Un gain significatif des performances est obtenu grâce à une optimisation pertinente du traitement linéaire précédant le BCJR et de la matrice de treillis considérée par celui-ci.

Nous montrons finalement dans la Figure 2.5 les performances de l'égaliseur CS en présence de symboles *a priori*. Afin de simplifier les simulations et d'obtenir des résultats qui sont indépendants du choix du code correcteur d'erreurs et des méthodes d'estimation symbole choisies, nous considérons le modèle $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + \mathbf{e}$ pour les symboles *a priori* en entrée de l'égaliseur avec $\mathbf{e} \sim \mathcal{CN}\{\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}\}$. Les matrices \mathbf{F}_{cs} , \mathbf{B}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} sont calculés itérativement, pour chaque valeur de σ_e^2 , à l'aide de la méthode du gradient projeté décrite dans la section précédente. Nous pouvons constater sur ces résultats après convergence de l'algorithme que les performances diminuent avec σ_e^2 , comme était attendu. Nous observons également que lorsque σ_e^2 diminue, ce qui correspond à avoir une meilleure estimation de l'information *a priori*, le paramètre ν semble avoir légèrement moins d'impact sur les performances de BER de l'égaliseur.

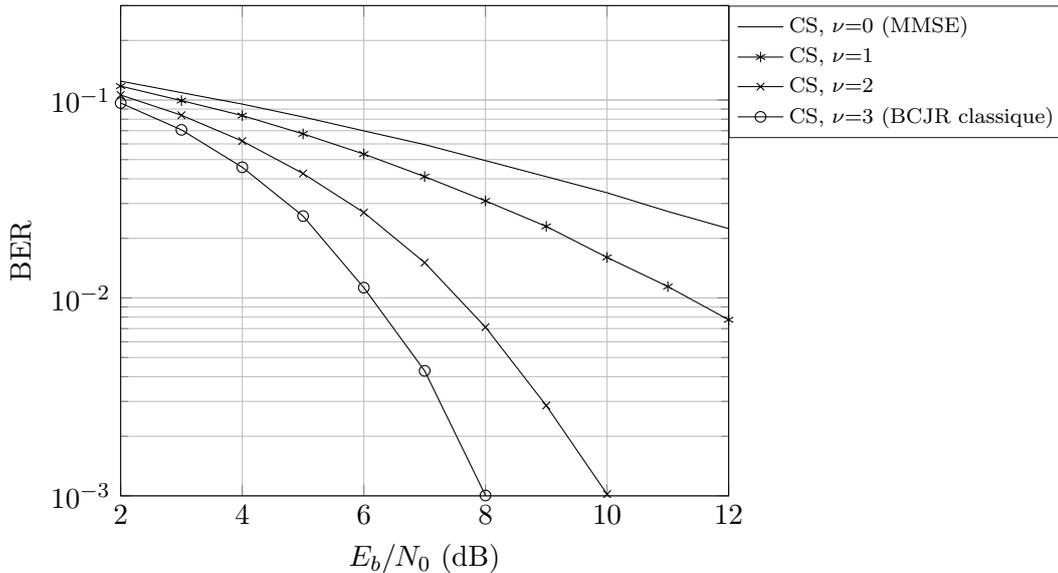


FIGURE 2.3 – Performances du récepteur *channel shortening* sur le canal EPR4.

2.4 Synthèse - vers une solution plus compacte de l'égaliseur *channel shortening*

Les techniques d'égalisation de canaux à interférence entre symboles dites à réduction de treillis sont motivées par la grande complexité calculatoire de l'approche classique où les probabilités *a posteriori* symbole sont couramment calculées de façon exacte en utilisant l'algorithme BCJR. Parmi cet ensemble de techniques à complexité réduite, nous avons identifié la technique dite *channel shortening* comme étant particulièrement pertinente dans le cadre des transmissions au-delà de la cadence de Nyquist avec des filtres de mise en forme en racine de cosinus surélevé. Les résultats de simulation montrent qu'un récepteur maximisant l'information mutuelle généralisée du système permet d'obtenir un très bon compromis entre performance BER et complexité calculatoire du récepteur, mesurée par le biais du nombre d'états utilisés par l'algorithme BCJR. Toutefois, il est à noter que cette technique est à privilégier pour des systèmes de transmission utilisant des alphabets de modulation à petite taille car, même si l'on parvient à maîtriser le nombre d'états de l'algorithme en limitant la mémoire considérée par celui-ci, sa complexité reste exponentielle avec le nombre de bit par symbole du système.

Des travaux plus récents sur le *channel shortening* se sont intéressés à l'égalisation en présence d'information *a priori* et en particulier au scénario où cette information prend la forme de symboles estimés [26]. Dans ce contexte, un égaliseur *channel shortening* dans lequel les symboles *a priori* subissent un traitement linéaire supplémentaire ont été proposés. L'information mutuelle généralisée prend dans ces récepteurs une forme encore plus générale car elle dépend de l'information *a priori* du système. Dans la littérature, les traitements linéaires ainsi que la matrice objectif, utilisée par l'algorithme BCJR, sont optimisés par des méthodes numériques. En particulier, une variante de la méthode du gradient permet un calcul itératif

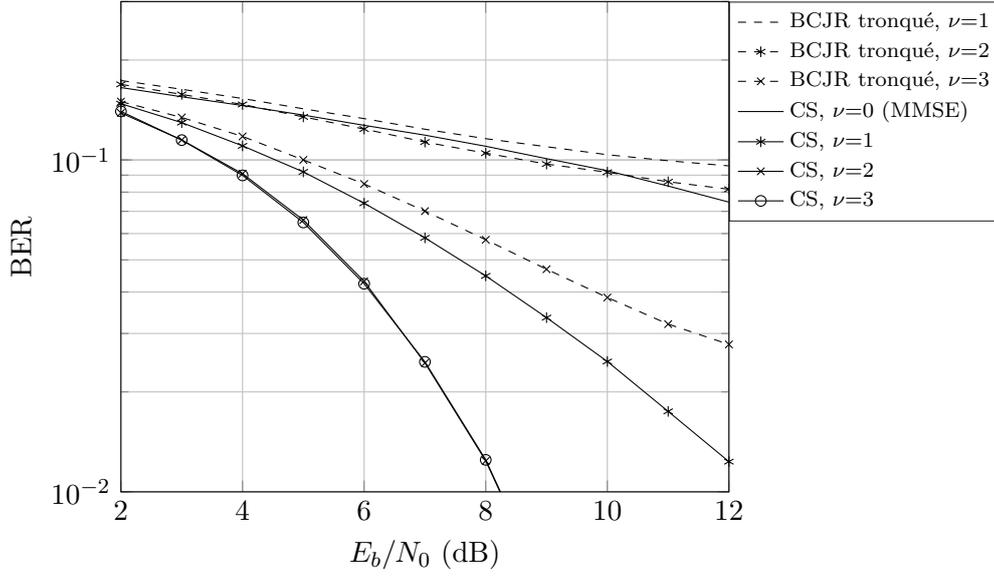


FIGURE 2.4 – Comparaison des performances du récepteur *channel shortening* et du récepteur BCJR classique avec troncature de la réponse impulsionnelle discrète équivalente sur le canal FTN05.

avec contrainte des trois matrices de l'égaliseur. Ces méthodes ont plusieurs inconvénients. D'une part, les problèmes d'instabilité et de convergence, liés à tout problème d'optimisation numérique, sont à prendre en compte dans ces récepteurs *channel shortening*. D'autre part, dans un contexte turbo, l'information *a priori* change au fil des itérations effectuées par le turbo égaliseur. La fonction objectif ayant une dépendance avec cette information, les matrices de l'égaliseur doivent être calculées plusieurs fois, toujours par des méthodes numériques. Nous proposons dans le chapitre suivant notre première contribution sur le *channel shortening* qui consiste à proposer une forme analytique pour toutes les matrices de l'égaliseur en gardant la métrique information mutuelle généralisée.

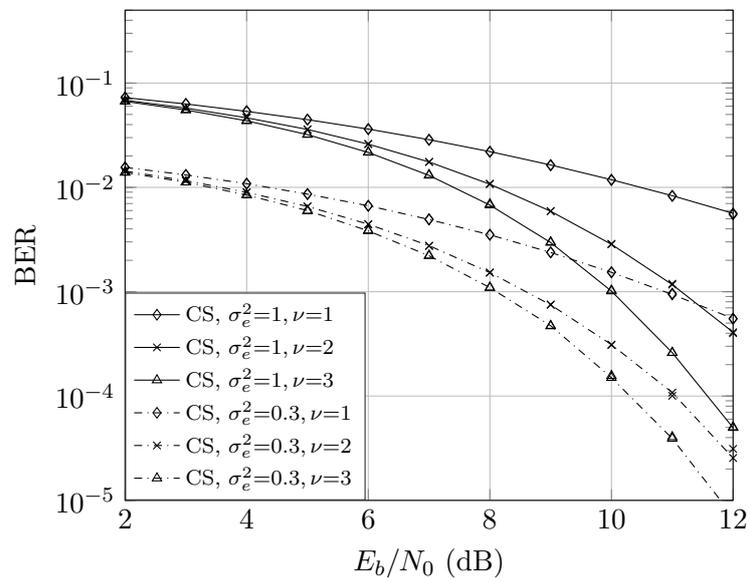


FIGURE 2.5 – Performances du récepteur *channel shortening* sur le canal EPR4.

Égaliseur *channel shortening* avec information *a priori* sous forme analytique

Sommaire

3.1	Expression analytique de l'égaliseur en présence de symboles <i>a priori</i>	44
3.1.1	Expression de l'égaliseur <i>channel shortening</i>	44
3.1.2	Expression de l'égaliseur optimal	50
3.2	<i>Channel shortening</i> et égalisation linéaire MMSE	52
3.2.1	Égaliseur minimisant l'erreur quadratique moyenne avec information <i>a priori</i>	52
3.2.2	Le <i>channel shortening</i> vu comme un concaténation d'égaliseurs	55
3.3	Évaluation des performances de l'égaliseur	57
3.4	Synthèse - Égalisation <i>channel shortening</i> et information <i>a priori</i>	60

Ce chapitre est une continuation des travaux de recherche sur le *channel shortening* détaillés dans le chapitre précédent. Nous décrivons dans cette partie la première contribution qui est détaillée dans ce manuscrit de thèse. En premier lieu, nous calculons les matrices *channel shortening* de façon analytique [98] en présence d'information *a priori* en considérant l'information mutuelle généralisée (2.15) comme critère d'optimisation. Cela permet d'éviter l'utilisation des méthodes d'optimisation numérique considérées dans [26], [29]. D'autre part, nous allons proposer un égaliseur BCJR prenant à son entrée des symboles *a priori* au lieu de probabilités. Nous montrerons que cette architecture d'égalisation est en réalité un cas particulier de l'égaliseur CS proposé dans ces travaux de thèse. Finalement, nous calculons un égaliseur MMSE sous une forme matricielle afin de montrer que l'égaliseur linéaire MMSE à réponse impulsionnelle finie est un cas particulier de l'égaliseur *channel shortening*. Les résultats de simulation permettent de confirmer la pertinence de la solution analytique par rapport aux méthodes d'optimisation numériques présentes dans la littérature.

3.1 Expression analytique de l'égaliseur en présence de symboles *a priori*

3.1.1 Expression de l'égaliseur *channel shortening*

Cette partie est consacrée au calcul analytique des matrices \mathbf{F} , \mathbf{B} et \mathbf{G}_r maximisant l'information mutuelle généralisée du système dans le cadre de l'égalisation *channel shortening*. Pour faire cela, nous reprenons la fonction information mutuelle généralisée (2.15)

$$I_G = \log(\det\{\mathbf{G}_r + \mathbf{I}\}) - \text{Tr}\{\mathbf{G}_r\} + 2\Re\left\{\text{Tr}\left\{\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{C}_1^H\right\}\right\} - \text{Tr}\left\{\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}\right)\mathbf{F}^H + \mathbf{B}\mathbf{C}_0\mathbf{B}^H - 2\Re\left\{\mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{C}_1\mathbf{B}^H\right\}\right)(\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1}\right\}. \quad (3.1)$$

Afin de compacter les développements, nous posons $\mathbf{R} = \mathbf{F}\left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}\right)\mathbf{F}^H + \mathbf{B}\mathbf{C}_0\mathbf{B}^H - 2\Re\left\{\mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{C}_1\mathbf{B}^H\right\}$. Nous calculons d'abord \mathbf{F}_{cs} en fonction de \mathbf{B} et \mathbf{G}_r à partir de (3.1) en posant $\nabla_{\mathbf{F}_{cs}} I_G = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{F}_{cs}} I_G = \mathbf{0} &\iff \nabla_{\mathbf{F}_{cs}} 2\Re\left\{\text{Tr}\left\{\mathbf{F}_{cs}\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{C}_1^H\right\}\right\} = \nabla_{\mathbf{F}_{cs}} \text{Tr}\left\{\mathbf{R}(\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1}\right\} \\ &\iff \nabla_{\mathbf{F}_{cs}} \text{Tr}\left\{2\Re\left\{\mathbf{F}_{cs}\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{C}_1^H\right\}\right\} = \text{Tr}\left\{\nabla_{\mathbf{F}_{cs}} \mathbf{R}(\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1}\right\} \\ &\iff \text{Tr}\left\{\nabla_{\mathbf{F}_{cs}} \mathbf{R}\left(\mathbf{F}_{cs}\mathbf{H} + \mathbf{H}^H\mathbf{F}_{cs}^H - \mathbf{B}\mathbf{C}_1^H - \mathbf{C}_1\mathbf{B}^H\right)\right\} = \text{Tr}\left\{\nabla_{\mathbf{F}_{cs}} \mathbf{R}(\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1}\right\} \\ &\iff \mathbf{H}(\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) = \left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}\right)\mathbf{F}_{cs}^H - (\mathbf{H}\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0)\mathbf{B}^H. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le traitement direct s'écrit

$$\mathbf{F}_{cs} = \left(\mathbf{B}\mathbf{C}_1^H + (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})\right)\mathbf{H}^H\left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}\right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Nous calculons ensuite \mathbf{B}_{cs} en fonction de \mathbf{F} et \mathbf{G}_r en posant $\nabla_{\mathbf{B}_{cs}} I_G = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{B}_{cs}} I_G = \mathbf{0} &\iff \frac{\partial}{\partial \mathbf{B}_{cs}} 2\Re\left\{\text{Tr}\left\{\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{B}_{cs}\mathbf{C}_1^H\right\}\right\} = \nabla_{\mathbf{B}_{cs}} \text{Tr}\left\{\mathbf{R}(\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1}\right\} \\ &\iff \nabla_{\mathbf{B}_{cs}} \text{Tr}\left\{2\Re\left\{\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{B}_{cs}\mathbf{C}_1^H\right\}\right\} = \text{Tr}\left\{\nabla_{\mathbf{B}_{cs}} \mathbf{R}(\mathbf{G}_r + \mathbf{I})^{-1}\right\} \\ &\iff -\mathbf{C}_1^H(\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) = \mathbf{C}_0\mathbf{B}_{cs}^H - \mathbf{C}_1^H\mathbf{H}^H\mathbf{F}^H. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le traitement retour s'écrit

$$\mathbf{B}_{cs} = (\mathbf{F}\mathbf{H} - (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}))\mathbf{C}_1\mathbf{C}_0^{-1}. \quad (3.5)$$

Nous injectons (3.5) dans (3.3) afin de calculer \mathbf{F}_{cs}

$$\mathbf{F}_{\text{cs}} = \left((\mathbf{F}_{\text{cs}} \mathbf{H} - (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H + (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \right) \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \quad (3.6)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{cs}} & \left(\mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \right) \\ & = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

En posant

$$\mathbf{\Gamma} = \sigma_n^2 \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right)^{-1}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{cs}} & = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \sigma_n^2 \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ & = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \sigma_n^2 \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\left(\mathbf{H} \sigma_n^2 \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right) \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ & = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H + \mathbf{I} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où ce dernier terme peut être re-exprimé en utilisant l'égalité de Sherman-Morrison-Woodbury [99, p. 50]

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{cs}} & = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H \left(\mathbf{I}^{-1} - \mathbf{I}^{-1} \mathbf{H} \left(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{I}^{-1} \right) \\ & = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \mathbf{\Gamma}^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}^H \mathbf{H} \left(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right)^{-1} \right) \mathbf{H}^H \\ & = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \mathbf{\Gamma}^{-1} \left(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{H}^H \mathbf{H} - \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \left(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^H \\ & = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{\Gamma} \right)^{-1} \mathbf{H}^H. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le traitement direct optimal peut finalement s'exprimer de façon compacte

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{cs}} = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) (\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{H}^H.} \quad (3.10)$$

Le traitement retour optimal est calculé en injectant (3.10) dans (3.5)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{cs}} &= \left((\mathbf{G}_r + \mathbf{I})(\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} - (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \right) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \\
&= (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \left((\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} - \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Le traitement retour optimal s'écrit de façon compacte

$$\boxed{\mathbf{B}_{\text{cs}} = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \left((\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1}.} \tag{3.12}$$

Les traitements linéaires de l'égaliseur sont ainsi obtenus en fonction de la matrice \mathbf{G}_r , de la matrice d'émission-réception \mathbf{G} et des matrices de corrélation et d'inter-corrélation des symboles. L'information mutuelle généralisée résultante I_{cs} est obtenue en injectant (3.10) et (3.12) dans (3.1). Afin de compacter le calcul de I_{cs} , nous ré-écrivons (3.1)

$$I_{\text{cs}} = \log(\det \{\mathbf{W}_0\}) - \text{Tr} \{\mathbf{W}_0 - \mathbf{I}\} + 2\Re \left\{ \text{Tr} \left\{ \mathbf{F}_{\text{cs}} \mathbf{H} - \mathbf{B}_{\text{cs}} \mathbf{C}_1^H \right\} \right\} - \text{Tr} \left\{ \mathbf{R} \mathbf{W}_0^{-1} \right\}$$

avec $\mathbf{W}_0 = \mathbf{G}_r + \mathbf{I}$. D'autre part et afin également de compacter les calculs, nous posons les variables intermédiaires $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}^H - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H$, $\mathbf{T} = \left(\Phi - \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \right)^{-1}$, $\mathbf{F}_0 = (\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{H}^H$ et $\mathbf{B}_0 = \left((\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1}$. Nous calculons d'abord le terme

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} \mathbf{W}_0^{-1} &= \left(\mathbf{F}_{\text{cs}} \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right) \mathbf{F}_{\text{cs}}^H + \mathbf{B}_{\text{cs}} \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{\text{cs}}^H - \mathbf{F}_{\text{cs}} \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_{\text{cs}}^H - \mathbf{B}_{\text{cs}} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \mathbf{F}_{\text{cs}}^H \right) \mathbf{W}_0^{-1} \\
&= \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{F}_0 \Phi \mathbf{F}_0^H + \mathbf{B}_0 \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_0^H - \mathbf{F}_0 \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_0^H - \mathbf{B}_0 \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H \right) \\
&= \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{F}_0 \Phi \mathbf{F}_0^H + (-\mathbf{C}_1 + \mathbf{F}_0 \mathbf{H} \mathbf{C}_1) \mathbf{C}_0^{-1} \left(-\mathbf{C}_1^H + \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H \right) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{F}_0 \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \left(-\mathbf{C}_1^H + \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H \right) - (\mathbf{C}_1 + \mathbf{F}_0 \mathbf{H} \mathbf{C}_1) \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H \right) \\
&= \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{F}_0 \Phi \mathbf{F}_0^H - \mathbf{F}_0 \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \\
&= \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{F}_0 \left(\Phi - \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \right) \mathbf{F}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \\
&= \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
2\text{Tr} \left\{ \Re \left\{ \mathbf{F}_{\text{cs}} \mathbf{H} - \mathbf{B}_{\text{cs}} \mathbf{C}_1^H \right\} \right\} &= \text{Tr} \left\{ \mathbf{F}_{\text{cs}} \mathbf{H} - \frac{1}{\sigma_s^2} \mathbf{B}_{\text{cs}} \mathbf{C}_1^H + \mathbf{H}^H \mathbf{F}_{\text{cs}}^H - \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_{\text{cs}}^H \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \mathbf{W}_0 \mathbf{F}_0 \mathbf{H} - \frac{1}{\sigma_s^2} \mathbf{W}_0 \mathbf{B}_0 \mathbf{C}_1^H + \mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H \mathbf{W}_0 - \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_0^H \mathbf{W}_0 \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{F}_0 \mathbf{H} - \mathbf{B}_0 \mathbf{C}_1^H \right) + \left(\mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H - \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_0^H \right) \mathbf{W}_0 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} \left\{ \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{F}_0 \mathbf{H} - (-\mathbf{C}_1 + \mathbf{F}_0 \mathbf{H} \mathbf{C}_1) \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \left(-\mathbf{C}_1^H + \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \mathbf{F}_0^H \right) \mathbf{W}_0 \right) \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{H} - (-\mathbf{C}_1 + \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{H} \mathbf{C}_1) \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\mathbf{H}^H \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \left(-\mathbf{C}_1^H + \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H \right) \right) \mathbf{W}_0 \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{H}_0 \mathbf{T} \left(\mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\mathbf{H}^H - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \right) \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \mathbf{W}_0 \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) + \left(\mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \mathbf{W}_0 \right\} \\
&= 2 \text{Tr} \left\{ \mathbf{W}_0 \left(\mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \right\}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

En regroupant les termes précédents, l'information mutuelle généralisée s'écrit

$$I_{\text{cs}} = \log (\det \{ \mathbf{G}_r + \mathbf{I} \}) + N + \text{Tr} \left\{ (\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \left(\mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H - \mathbf{I} \right) \right\}. \tag{3.15}$$

Nous pouvons à présent développer le terme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{H}_0^H + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H - \mathbf{I} = \\
&= \left(\mathbf{H}^H - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \right) \left(\Phi - \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \right)^{-1} \left(\mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \\
&\quad + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H - \mathbf{I} \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \mathbf{H}^H \right)^{-1} \mathbf{H} \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \\
&\quad + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H - \mathbf{I} \\
&= \sigma_n^2 \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H - \mathbf{I} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Ce terme peut être de nouveau développé en utilisant l'égalité de Woodbury

$$\begin{aligned}
&\sigma_n^2 \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^H + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H - \mathbf{I} \\
&= \sigma_n^2 \left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{\Gamma} \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H - \mathbf{I} \\
&= \left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{\Gamma} \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) - \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{C}_1^H \right) \\
&= \sigma_n^2 \left(\left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{\Gamma} \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} - \mathbf{I} \right) \mathbf{\Gamma}^{-1} \\
&= -\sigma_n^2 \left(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{\Gamma} \right)^{-1}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

En posant

$$\mathbf{A} = -\sigma_n^2 (\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1}. \quad (3.18)$$

l'information mutuelle généralisée résultante s'écrit de façon compacte

$$I_{cs} = \log (\det \{\mathbf{G}_r + \mathbf{I}\}) + N + \text{Tr} \{(\mathbf{G}_r + \mathbf{I}) \mathbf{A}\}. \quad (3.19)$$

Nous observons d'abord que cette fonction dépend de ν par le biais de la matrice \mathbf{G}_r , ce qui était attendu car ce paramètre a un impact sur la capacité du récepteur à interpréter fidèlement le canal. La matrice \mathbf{G} apparaît également dans cette expression, ce qui traduit l'impact de l'ISI sur les limites théoriques du système. Finalement, l'information mutuelle généralisée dépend des *a priori* de l'égaliseur par le biais des matrices \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_0 . Nous remarquons que l'information mutuelle généralisée résultante (3.19) a une forme semblable à celle qui a été obtenue dans le cas sans information *a priori* (2.15), la seule différence étant la définition de la matrice \mathbf{A} . Ce résultat est pratique car il nous permet d'exploiter les résultats de la littérature pour obtenir \mathbf{G}_{cs} . Pour calculer \mathbf{G}_{cs} de façon analytique, nous maximons (3.19) en faisant une décomposition de Cholesky du terme $\mathbf{G}_r + \mathbf{I}$ tel que détaillé dans le chapitre précédent.

Nous constatons en pratique que la matrice \mathbf{G}_{cs} optimale a une structure Toeplitz bande. Cela est dû notamment au fait que la fonction (2.15) considérée lors du processus l'optimisation dépend d'une matrice de canal ayant une structure Toeplitz bande par construction. Ce résultat est par ailleurs nécessaire car \mathbf{G}_{cs} doit pouvoir être décrite par une réponse impulsionnelle unique dont le nombre de coefficients et leurs valeurs définiront le treillis sur lequel repose l'algorithme BCJR. D'autre part, la structure de \mathbf{G}_{cs} ainsi que les relations (3.10) et (3.12) permettent de conclure que \mathbf{F}_{cs} et \mathbf{B}_{cs} sont également des matrices Toeplitz bande

$$\mathbf{F}_{cs} = \begin{bmatrix} f_0 & f_{-1} & \dots & f_{-Q} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ f_1 & f_0 & \dots & \dots & f_{-Q} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ f_Q & f_{Q-1} & \dots & \dots & \dots & f_{-Q} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & f_Q & f_{Q-1} & \dots & \dots & \dots & f_{-Q} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & f_Q & \dots & \dots & f_0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

et

$$\mathbf{B}_{\text{cs}} = \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & \dots & b_{-Q} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & \dots & \dots & b_{-Q} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_Q & b_{Q-1} & \dots & \dots & \dots & b_{-Q} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_Q & b_{Q-1} & \dots & \dots & \dots & b_{-Q} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_Q & \dots & \dots & b_0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

avec $2Q + 1$ la longueur des bandes. Par conséquent, ces matrices sont complètement décrites par les réponses impulsionnelles

$$\mathbf{f}_{\text{cs}} = [f_{-Q}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_Q], \quad (3.22)$$

$$\mathbf{b}_{\text{cs}} = [b_{-Q}, \dots, b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_Q]. \quad (3.23)$$

Les traitements linéaires de l'égaliseur *channel shortening* peuvent donc être implémentés de manière efficace à l'aide d'opérations de filtrage. Notons que \mathbf{B}_{cs} a pu être exprimé directement en fonction des matrices de corrélation \mathbf{G} et objectif \mathbf{G}_r . D'autre part, \mathbf{F}_{cs} peut être exprimé comme la concaténation de traitements \mathbf{H}^H et \mathbf{F}'_{cs} avec

$$\mathbf{F}'_{\text{cs}} = (\mathbf{G}_r + \mathbf{I})(\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1}. \quad (3.24)$$

Une implémentation basée sur l'observation après filtrage adapté et échantillonnage présenté dans le Chapitre 1 est donc possible et est illustrée dans la Figure 3.1.

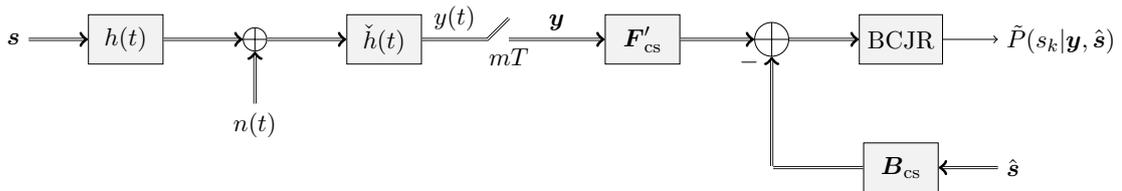


FIGURE 3.1 – Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec *channel shortening*.

Il est important de remarquer que les filtres de l'égaliseur *channel shortening* proposé dans ces travaux de thèse ont été obtenus avec une seule contrainte qui consiste à maximiser l'information mutuelle généralisée, pour une séquence de symboles *a priori* donnée en entrée de l'égaliseur. Ainsi, il faut noter que nous n'avons imposé à ce stade aucune contrainte sur \mathbf{b}_{cs} en dehors du critère d'optimisation choisi. Cela aura une conséquence majeure sur le fonctionnement de l'égaliseur par rapport à d'autres méthodes linéaires présentes dans la littérature. Par exemple, dans un égaliseur linéaire MMSE en présence de symboles *a priori*, les filtres \mathbf{f}_{mse} et \mathbf{b}_{mse} sont souvent choisis de façon à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre les séquences filtrées et transmises, tout en imposant la contrainte suivante [23], [100], [101]

$$\mathbf{b}_{\text{mse}} = [b_{-Q}, \dots, b_{-1}, 0, b_1, \dots, b_Q] \quad (3.25)$$

de sorte à ce qu'en sortie de l'égaliseur, l'échantillon à l'instant y_k soit indépendant du symbole *a priori* du même instant \hat{s}_k . Lorsque la forme matricielle de l'égaliseur est considérée, cette contrainte correspond à annuler la diagonale de \mathbf{B}_{mse} . Cette contrainte impose une suppression d'interférence du point de vue de l'égaliseur. Afin d'effectuer une analyse la plus générale possible de l'égaliseur *channel shortening*, nous supposons pour le moment qu'aucune contrainte n'est imposée sur \mathbf{B}_{cs} . Nous montrerons dans le Chapitre 4 que cette contrainte est intimement liée à la façon dont les symboles *a priori* sont estimés dans le cadre de la turbo égalisation, et qu'elle peut être évitée si ces symboles sont estimés en utilisant des méthodes appropriées.

3.1.2 Expression de l'égaliseur optimal

Dans le cadre de la turbo égalisation, il est souvent supposé que l'égaliseur BCJR dispose de probabilités *a priori* à son entrée. Ces valeurs peuvent être injectées directement dans la formule de Bayes, ce qui permet d'exploiter l'information *a priori* sans avoir un impact notable sur la complexité de l'égaliseur [28]. Ce schéma de réception est très répandu dans la littérature car, dans une vaste majorité des turbo égaliseurs étudiés, les probabilités symbole *a priori* sont directement calculées par le code correcteur d'erreurs dans le récepteur. Or, nous pouvons imaginer des schémas d'égalisation où l'information *a priori* prend d'autres formes autres que des probabilités. Nous avons supposé tout au long des parties précédentes que l'égaliseur disposait de symboles *a priori*. Nous donnons dans cette partie l'expression d'un égaliseur BCJR permettant un calcul exact des probabilités symbole *a posteriori* lorsque l'égaliseur dispose de symboles *a priori* à son entrée au lieu de probabilités.

En présence d'une séquence de symboles *a priori*, les probabilités *a posteriori* s'écrivent

$$P(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{p(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}|\mathbf{s})P(\mathbf{s})}{p(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}})}. \quad (3.26)$$

Nous supposons le modèle suivant pour les symboles estimés $\hat{\mathbf{s}}$ en entrée du récepteur *channel shortening*

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + \mathbf{e} \quad (3.27)$$

où $\mathbf{e} \sim \mathcal{CN}\{\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}\}$. Nous faisons l'hypothèse $\mathbb{E}\{\mathbf{n}\mathbf{e}^H\} = \mathbf{0}$ de sorte que

$$p(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}|\mathbf{s}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{s})p(\hat{\mathbf{s}}|\mathbf{s}) \quad (3.28)$$

La densité de probabilité conditionnelle des symboles estimés s'écrit

$$p(\hat{\mathbf{s}}|\mathbf{s}) = \frac{1}{(\pi\sigma_e)^N} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_e^2}\|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}\|^2\right) \quad (3.29)$$

Rappelons que la densité de probabilité conditionnelle de la séquence observée s'écrit (1.20)

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = K(\mathbf{x}) \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \left(2\Re\left\{\mathbf{s}^H \mathbf{H}^H \mathbf{x}\right\} - \mathbf{s}^H \mathbf{G} \mathbf{s}\right)\right). \quad (3.30)$$

Nous injectons (3.29) et (3.30) dans (3.28)

$$p(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}|\mathbf{s}) = K'(\mathbf{x}) \exp\left(\frac{1}{\sigma_n^2} \left(2\Re\left\{\mathbf{s}^H \left(\mathbf{H}^H \mathbf{x} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \hat{\mathbf{s}}\right)\right\} - \mathbf{s}^H \left(\mathbf{G} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{I}\right) \mathbf{s}\right)\right) \quad (3.31)$$

avec

$$K'(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi\sigma_e)^N} K(\mathbf{x}). \quad (3.32)$$

Un calcul exact de $P(s_k|\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}})$ peut être réalisé par l'algorithme BCJR en exploitant une factorisation de (3.31), tel que détaillé dans la Section 1.2.1. Le treillis de l'algorithme BCJR est construit à partir de la matrice

$$\mathbf{G}_r = \mathbf{G} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{I}. \quad (3.33)$$

Notons d'abord que cette matrice est Toeplitz bande. Elle est donc caractérisée par une réponse impulsionnelle \mathbf{g}_r . Nous constatons que seulement le module du coefficient central (g_{r_0}) de cette réponse varie avec la variance du bruit du canal et la variance du bruit d'estimation des symboles *a priori*. Lorsque le rapport entre ces deux variances est grand, g_{r_0} est prépondérant par rapport aux autres coefficients de la réponse, ce qui revient à considérer un canal pratiquement sans ISI. Cette variation n'a pas d'impact sur l'algorithme BCJR pour des constellations à module constant car le seul terme qui dépend de g_{r_0} dans (1.23) n'intervient pas dans le processus d'optimisation. Toutefois, ce phénomène a un impact sur le calcul des probabilités lorsque des constellations à module non-constant sont considérées. Notons également que, contrairement à l'égaliseur *channel shortening*, nous n'appliquons ici aucune contrainte sur la longueur des bandes de \mathbf{G}_r . Par conséquent, l'algorithme BCJR opère sans réduction de complexité, le nombre d'états considérés étant toujours M^L . D'autre part, la séquence en entrée du BCJR est donnée par

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}^H \mathbf{x} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \hat{\mathbf{s}}. \quad (3.34)$$

Le choix de distribution Gaussienne du bruit d'estimation a permis d'exprimer la séquence en entrée du BCJR comme une combinaison linéaire de la séquence observée filtrée et la séquence de symboles *a priori*. En particulier, l'égaliseur est composé d'un premier traitement adapté

à la matrice de canal $\mathbf{F} = \mathbf{H}^H$ auquel on soustrait l'information *a priori*

$$\mathbf{B} = -\frac{\sigma_n^2}{\sigma_e^2} \mathbf{I}. \quad (3.35)$$

Le récepteur est illustré dans la Figure 3.2. De même que nous l'avons fait dans la partie précédente, nous pouvons remarquer que le traitement linéaire n'effectue pas une suppression d'interférence. Il est par ailleurs impossible d'imposer cette contrainte sur une telle architecture d'égalisation car cela impliquerait supprimer complètement l'information *a priori* (rappelons que dans sa forme matricielle, cette contrainte revient à annuler la diagonale de \mathbf{B}). Ce résultat aura une conséquence importante sur le fonctionnement de l'égaliseur *channel shortening*, tel que détaillé dans le Chapitre 4.

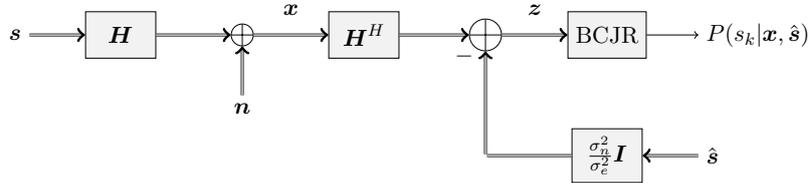


FIGURE 3.2 – Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur BCJR en présence de symboles *a priori*.

Nous avons proposé dans cette partie un égaliseur basé sur l'algorithme BCJR et permettant un calcul exact des probabilités symbole *a posteriori* lorsque l'entrée de l'égaliseur est composée de symboles au lieu de probabilités. Dans la suite du manuscrit, cette architecture d'égalisation sera appelée BCJR *a priori* symbole (BCJR-APS). En dehors de son utilisation dans des schémas de réception disposant naturellement de ce type d'information, cet égaliseur constitue un cas particulier de l'égaliseur *channel shortening* proposé dans ces travaux de thèse, comme montré plus tard dans ce chapitre.

3.2 Channel shortening et égalisation linéaire MMSE

3.2.1 Égaliseur minimisant l'erreur quadratique moyenne avec information *a priori*

L'égalisation linéaire selon le critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne en présence d'information *a priori* a été explorée et détaillée dans la littérature [102]. Les premiers travaux proposant des filtres à longueur finie [24], [100], [101] ont été étendus au cas à réponse impulsionnelle infinie [23]. L'objectif de cette partie est de calculer les filtres MMSE sous une forme matricielle afin de montrer que l'égaliseur linéaire MMSE à réponse impulsionnelle finie est un cas particulier de l'égaliseur *channel shortening* présentée dans la partie précédente. Nous faisons cela en posant

$$z = \mathbf{F}x - \mathbf{B}\hat{s} \quad (3.36)$$

où les traitements \mathbf{F} et \mathbf{B} sont de minimiser l'erreur quadratique moyenne entre la séquence en sortie et la séquence transmise. Pour le calcul des matrices MMSE, nous considérons la fonction d'erreur

$$\varphi = z - s = (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})s - \mathbf{B}\hat{s} + \mathbf{F}\mathbf{n}. \quad (3.37)$$

Nous posons

$$(\mathbf{F}_{\text{mse}}, \mathbf{B}_{\text{mse}}) = \underset{\mathbf{F}, \mathbf{B}}{\operatorname{argmin}} \Psi(\mathbf{F}, \mathbf{B}) \quad (3.38)$$

où $\Psi(\mathbf{F}, \mathbf{B}) = \operatorname{Tr} \left\{ \mathbf{E} \left\{ \varphi \varphi^H \right\} \right\}$. Il est possible de calculer \mathbf{B}_{mse} en posant $\nabla_{\mathbf{B}_{\text{mse}}} \Psi = \mathbf{0}$

$$\mathbf{B}_{\text{mse}} = (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I}) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1}. \quad (3.39)$$

\mathbf{F}_{mse} est calculé en posant $\nabla_{\mathbf{F}_{\text{mse}}} \Psi = \mathbf{0}$

$$\mathbf{F}_{\text{mse}} = (\mathbf{B}\mathbf{C}_1^H + \mathbf{I}) \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1}. \quad (3.40)$$

Nous introduisons (3.39) dans (3.40)

$$\mathbf{F}_{\text{mse}} = (\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{H}^H, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{B}_{\text{mse}} = \left((\mathbf{G} + \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{G} - \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_0^{-1}. \quad (3.42)$$

\mathbf{F}_{mse} et \mathbf{B}_{mse} étant des matrices Toeplitz bande, elles peuvent être décrites par une réponse impulsionnelle unique permettant une implémentation efficace à l'aide d'opérations de filtrage.

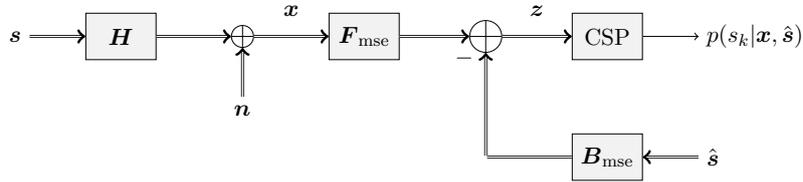


FIGURE 3.3 – Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur MMSE en présence de symboles *a priori*.

Rappelons que l'égaliseur est a été défini comme une structure permettant de calculer des probabilités symbole *a posteriori*. Afin de construire l'égaliseur MMSE, la sortie des filtres MMSE définis précédemment doit être convertie en probabilités avec un convertisseur symboles-probabilités (CSP). Pour faire cela, nous supposons que les symboles en sortie de

l'étape linéaire peuvent se décomposer en un terme utile plus un terme de bruit plus interférence résiduelle tel que détaillé dans la Section 1.3.3. Dans le cas qui nous concerne, la seule différence repose sur le fait que le traitement linéaire est également composé d'un terme \mathbf{B} . Cela se fait en posant

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} &= \mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{s} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}} + \mathbf{F}\mathbf{n} - \mathbf{s} + \mathbf{s} \\
&= \mathbf{s} + (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})\mathbf{s} - (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})\hat{\mathbf{s}} + \mathbf{F}\mathbf{n} \\
&= \mathbf{s} + (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) + \mathbf{F}\mathbf{n} \\
&= \mathbf{s} + \boldsymbol{\nu}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

où $\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) + \mathbf{F}\mathbf{n}$ est le terme de bruit plus interférence en sortie des traitements linéaires. Si l'on considère toujours le modèle (3.27) pour les symboles *a priori* en entrée de l'égaliseur, alors ce terme est centré

$$\mathbb{E}\{\boldsymbol{\nu}\} = (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})\mathbb{E}\{(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})\} + \mathbf{F}\mathbb{E}\{\mathbf{n}\} = \mathbf{0}. \tag{3.44}$$

La variance des échantillons de bruit plus interférence en sortie de l'égaliseur est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\boldsymbol{\nu}^H\boldsymbol{\nu}\} &= \text{Tr}\left\{\mathbb{E}\{\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu}^H\}\right\} \\
&= \text{Tr}\left\{\mathbb{E}\left\{\left((\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) + \mathbf{F}\mathbf{n}\right)\left(\left(\mathbf{H}^H\mathbf{F}^H - \mathbf{I}\right)\left(\mathbf{s}^H - \hat{\mathbf{s}}^H\right) + \mathbf{n}^H\mathbf{F}^H\right)\right\}\right\} \\
&= \text{Tr}\left\{\mathbb{E}\left\{\left((\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{F}\mathbf{n}\right)\left(\left(\mathbf{H}^H\mathbf{F}^H - \mathbf{I}\right)\boldsymbol{\epsilon}^H + \mathbf{n}^H\mathbf{F}^H\right)\right\}\right\}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

où $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})$. En développant davantage cette expression

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\left((\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{F}\mathbf{n}\right)\left(\left(\mathbf{H}^H\mathbf{F}^H - \mathbf{I}\right)\boldsymbol{\epsilon}^H + \mathbf{n}^H\mathbf{F}^H\right)\right\} \\
&= (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})\mathbb{E}\{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^H\}\left(\mathbf{H}^H\mathbf{F}^H - \mathbf{I}\right) + \mathbf{F}\mathbb{E}\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\}\mathbf{F}^H
\end{aligned}$$

où nous supposons $\mathbb{E}\{\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{n}^H\} = \mathbf{0}$. Nous posons également $\mathbb{E}\{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^H\} = \sigma_\epsilon^2\mathbf{I}$ et $\mathbb{E}\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} = \sigma_n^2\mathbf{I}$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sigma_\epsilon^2(\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{I})\left(\mathbf{H}^H\mathbf{F}^H - \mathbf{I}\right) + \sigma_n^2\mathbf{F}\mathbf{F}^H \\
&= \sigma_\epsilon^2\left(\mathbf{F}\mathbf{H}\mathbf{H}^H\mathbf{F}^H - \mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{H}^H\mathbf{F}^H + \mathbf{I} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\epsilon^2}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\right) \\
&= \sigma_\epsilon^2\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_\epsilon^2}\mathbf{I}\right)\mathbf{F}^H - \mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{H}^H\mathbf{F}^H + \mathbf{I}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sigma_\epsilon^2 (\mathbf{H}^H \mathbf{F}^H - \mathbf{F} \mathbf{H} - \mathbf{H}^H \mathbf{F}^H + \mathbf{I}). \quad (3.46)$$

La variance du terme de bruit plus interférence en sortie de l'égaliseur s'écrit finalement

$$\sigma_\nu^2 = \sigma_\epsilon^2 \text{Tr} \{ \mathbf{I} - \mathbf{F}_{\text{mse}} \mathbf{H} \} = \sigma_\epsilon^2 (N - \text{Tr} \{ \mathbf{F}_{\text{mse}} \mathbf{H} \}). \quad (3.47)$$

Les valeurs $P(s_k | \mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}})$ sont calculées en injectant σ_ν^2 dans (1.43). Le schéma de l'émetteur-récepteur avec égalisation MMSE est illustré dans la Figure 3.3.

3.2.2 Le *channel shortening* vu comme un concaténation d'égaliseurs

Nous constatons que les traitements linéaires de l'égaliseur MMSE (3.41),(3.42) et ceux de l'égaliseur CS (3.10), (3.12) ont des expressions très similaires. L'égaliseur *channel shortening* peut en effet être exprimé comme la concaténation des traitements linéaires MMSE et d'un traitement linéaire correcteur $\mathbf{G}_{\text{cs}} + \mathbf{I}$

$$\mathbf{F}_{\text{cs}} = (\mathbf{G}_{\text{cs}} + \mathbf{I}) \mathbf{F}_{\text{mse}} \quad \mathbf{B}_{\text{cs}} = (\mathbf{G}_{\text{cs}} + \mathbf{I}) \mathbf{B}_{\text{mse}}$$

suivis d'un égaliseur BCJR, tel que montré dans la figure 3.4. Ce résultat étend des travaux précédents sur le *channel shortening* qui avaient déjà montré une dépendance entre l'égaliseur MMSE et l'égaliseur CS dans le cas particulier $\mathbf{B}_{\text{cs}} = \mathbf{0}$ [25].

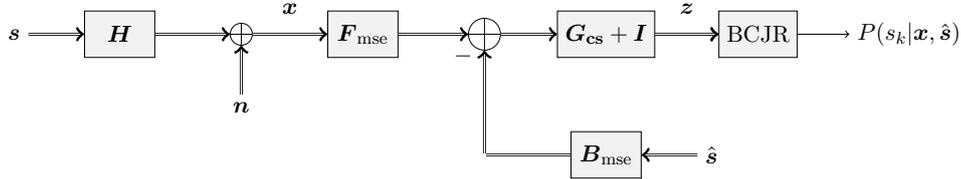


FIGURE 3.4 – Schéma bloc de l'émetteur-récepteur avec égaliseur *channel shortening* exprimé comme la concaténation d'un filtre MMSE, un filtre correcteur et un égaliseur BCJR de complexité réduite.

Si nous fixons $\nu = 0$, alors $\mathbf{G}_{\text{cs}} = \mathbf{I}$, ce qui revient à considérer un système sans ISI du point de vue de l'égaliseur BCJR. Dans ce scénario, l'algorithme BCJR ne s'applique pas et l'égaliseur *channel shortening* est équivalent à l'égaliseur MMSE décrit précédemment

$$\mathbf{F}_{\text{cs}} = 2\mathbf{F}_{\text{mse}} \quad \mathbf{B}_{\text{cs}} = 2\mathbf{B}_{\text{mse}}. \quad (3.48)$$

Le bloc BCJR de la Figure 3.4 est alors remplacé par le convertisseur symboles-probabilités défini dans la section précédente. Si de plus, le récepteur ne dispose pas d'information *a priori* sous forme de symboles estimés, alors $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$. Dans ce cas, la matrice $\mathbf{B}_{\text{cs}} = \mathbf{0}$ n'est pas applicable et le récepteur CS devient l'égaliseur linéaire MMSE classique [96].

D'autre part, si nous imposons $\nu = L$ sur l'égaliseur *channel shortening* tout en considérant

un retour différent de zéro, la matrice *shortening* qui maximise I_G est obtenue en posant $\nabla_{\mathbf{G}_{cs}} I_G = \mathbf{0}$

$$\mathbf{G}_{cs} = -\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I} = \frac{1}{\sigma_n^2} (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \mathbf{\Gamma}) - \mathbf{I}. \quad (3.49)$$

et l'information mutuelle généralisée résultante est donnée par

$$I_G = -\log(\det\{-\mathbf{A}\}). \quad (3.50)$$

Nous faisons l'hypothèse classique [24] que les matrices de corrélation sont diagonales $\mathbf{C}_1 = c_1 \mathbf{I}$ et $\mathbf{C}_0 = c_0 \mathbf{I}$ de sorte que $\mathbf{\Gamma} = \gamma \mathbf{I}$ où $\gamma = \sigma_n^2 (1 - |c_1|^2 / c_0)^{-1}$. En considérant le modèle (3.27), les coefficients de corrélation deviennent $c_1 = 1$, $c_0 = 1 + \sigma_e^2$. On obtient

$$\mathbf{G}_{cs} = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{H}^H \mathbf{H} + \frac{1}{\sigma_e^2} \mathbf{I} \quad (3.51)$$

Nous obtenons le traitement direct en injectant (3.51) dans (3.10)

$$\mathbf{F}_{cs} = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{H}^H. \quad (3.52)$$

Cela correspond à effectuer un traitement adapté à la matrice d'émission, pondéré par la variance du bruit. Le traitement retour est obtenu en injectant (3.52) dans (3.12)

$$\mathbf{B}_{cs} = -\frac{1}{\sigma_e^2} \mathbf{I}. \quad (3.53)$$

Rappelons que la variance du bruit a été injectée dans \mathbf{F} , \mathbf{B} et \mathbf{G}_r lors du calcul de l'information mutuelle généralisée afin de compacter les notations dans la Section 2.2. Ainsi, il faut multiplier les expressions (3.52), (3.51) et (3.53) par σ_n^2 afin de les rendre homogènes aux résultats obtenus en début de ce chapitre. L'égaliseur *channel shortening* est donc, dans le cas $\nu = L$, identique au récepteur décrit dans la Section 3.1.2 et permet un calcul exact des probabilités *a posteriori* en exploitant l'information *a priori* dans l'étape linéaire du récepteur. Si de plus, nous imposons $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$ sur cette configuration, nous obtenons l'égaliseur BCJR classique sans information *a priori*.

Finalement, si nous imposons $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$ sur l'égaliseur de référence sans imposer des contraintes sur ν , nous obtenons l'égaliseur *channel shortening* sans retour présenté dans la Section 2.3.1. Si de plus nous imposons $\nu = 0$ sur cette solution, nous retrouvons l'égaliseur MMSE sans retour. En revanche, si nous imposons $\nu = L$, la matrice *shortening* qui maximise l'information mutuelle généralisée est donnée par

$$\mathbf{G}_{cs} = \mathbf{H}^H \mathbf{H}. \quad (3.54)$$

L'étape linéaire devient la matrice adaptée

$$\mathbf{F}_{cs} = \mathbf{H}^H \quad (3.55)$$

et est suivie par l'algorithme BCJR classique. Ces différentes configurations du récepteur *channel shortening* sont illustrées dans la Figure 3.5.

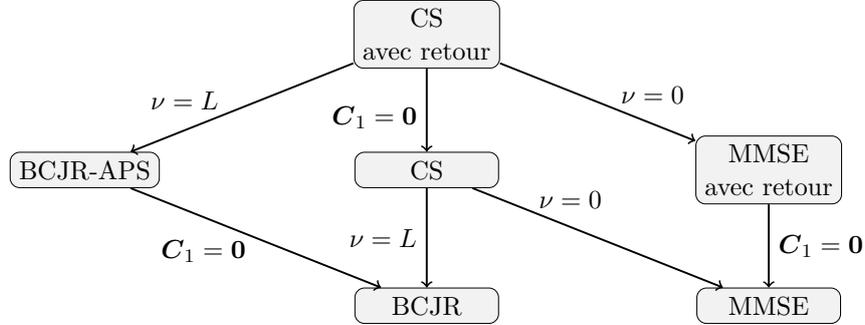


FIGURE 3.5 – Diagramme illustrant les différents cas particuliers du récepteur *channel shortening* avec retour souple.

3.3 Évaluation des performances de l'égaliseur

Nous considérons dans ces simulations le modèle non-codé de la Figure 2.2. Nous considérons une constellation *binary phase-shift keying* (BPSK). Dans ces simulations, nous considérons des matrices de corrélation diagonales. Les performances du récepteur ont été évaluées en considérant un modèle à AWGN pour les symboles *a priori* tel que décrit dans la Section 3.1.2

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + \mathbf{e} \quad (3.56)$$

avec $\mathbf{e} \sim \mathcal{CN}\{\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}\}$. Dans un récepteur itératif [103], l'information *a priori* varie à chaque itération par le biais du paramètre σ_e^2 et les matrices \mathbf{F}_{cs} , \mathbf{B}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} sont recalculées à partir de l'expression analytique obtenue dans la Section 3.1.1.

Les Tableaux 3.1 et 3.2 montrent, pour les canaux FTN05 et EPR4 respectivement, l'erreur quadratique entre les filtres calculés analytiquement et ces mêmes filtres obtenus avec la méthode du gradient projeté en fonction de la mémoire de la réponse du BCJR, ν et $\sigma_n^2 = 0, 25$. Nous définissons l'erreur $SE = (2Q + 1)^{-1} \|\mathbf{f}_{cs} - \mathbf{f}_{cs}^i\|^2$ où l'indexe $(\cdot)^i$ indique que la méthode itérative a été utilisée et $Q = 30$ est la longueur du filtre. Ces résultats permettent de confirmer que \mathbf{F}_{cs} , \mathbf{B}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} obtenus par une méthode numérique convergent vers la solution obtenue analytiquement après convergence de l'algorithme.

Afin de mieux illustrer la réduction de complexité que l'on obtient en utilisant la méthode analytique, notons que nous considérons des matrices Toeplitz bande de taille $N \times N$ et nous supposons toujours $\mathbf{C}_1 = c_1 \mathbf{I}$ et $\mathbf{C}_0 = c_0 \mathbf{I}$. Le calcul analytique des matrices a une complexité en $O(N^2)$. D'autre part, la méthode du gradient projeté, utilisée pour valider la

$\nu = 2$			
γ	\mathbf{g}_r	\mathbf{f}_{cs}	\mathbf{b}_{cs}
0,4	2,4010e-11	7,5415e-13	1,3371e-14
0,6	6,1921e-10	1,6632e-11	7,5043e-13
0,8	8,2156e-09	1,8897e-10	2,3287e-11
1,0	7,3629e-08	1,4467e-09	3,6879e-10
1,2	8,3457e-07	7,3411e-08	5,3546e-8
$\nu = 3$			
0,4	8,3677e-13	5,2158e-14	2,2835e-14
0,6	7,5206e-11	2,8444e-12	1,3632e-13
0,8	1,4176e-09	4,5883e-11	5,5247e-12
1,0	1,5980e-08	4,4223e-10	1,1005e-10
1,2	4.8733e-07	8.1768e-09	3.6923e-09

Tableau 3.1 – Erreur quadratique entre les filtres obtenus analytiquement et les filtres obtenus avec la méthode du gradient projeté sur le canal FTN05.

solution analytique, a une complexité en $O(\psi \cdot N^2)$ avec ψ le nombre d'itérations effectuées par l'algorithme afin d'atteindre une erreur quadratique d'au moins 10^{-7} . Outre la réduction de complexité, la méthode analytique permet d'éviter des problèmes de convergence ou de stabilité rencontrés lorsque des méthodes d'optimisation numérique sont utilisées.

Le taux d'erreur binaire en sortie de l'égaliseur *channel shortening* en fonction de E_b/N_0 est illustré dans la Figure 3.6 pour le canal FTN à accélération $\tau = 0,5$ en fonction de l'information *a priori* disponible. Dans cette première figure, les lignes correspondent à la solution analytique. Les marques correspondent à la méthode numérique après convergence. Nous constatons qu'une erreur quadratique d'au maximum 10^{-7} entre les filtres obtenus de façon analytique et les filtres obtenus numériquement permet d'assurer un écart négligeable du point de vue des performances BER du système. Sur cette même figure, nous pouvons également observer que le comportement de l'égaliseur lorsque l'information *a priori* évolue est celui espéré, c'est-à-dire, le BER augmente avec la variance du bruit d'estimation.

Dans la Figure 3.7 sont montrées les performances de l'égaliseur en fonction du paramètre ν , lequel détermine la complexité calculatoire de l'égaliseur BCJR. Ainsi, nous observons que pour ce canal FTN, une valeur de $\nu = 0$, ce qui correspond au cas particulier d'égalisation MMSE, provoque une dégradation non négligeable des performances de l'égaliseur. D'autre part, nous observons une convergence rapide du point de vue du BER lorsque ce paramètre est supérieur à $\nu = 3$, ce qui correspond à implémenter un algorithme BCJR à seulement 8 états. Rappelons que sur ce canal particulier qui a une longueur $L = 8$, l'algorithme BCJR classique aurait calculé 128 états. Ces résultats permettent ainsi de confirmer l'intérêt du *channel shortening* sur ce canal FTN.

Nous pouvons réaliser cette même analyse sur d'autres canaux FTN afin de mieux inter-

$\nu = 2$			
γ	\mathbf{g}_r	\mathbf{f}_{cs}	\mathbf{b}_{cs}
0,4	5,3453e-09	7,5415e-10	1,3371e-11
0,6	3,6743e-09	1,6632e-09	7,5043e-10
0,8	7,9765e-08	1,8897e-08	2,3287e-09
1,0	1,3708e-07	1,4467e-08	3,6879e-09
1,2	0,3964e-07	8,3007e-07	4,7152e-08
$\nu = 3$			
0,4	9,2656e-11	6,3613e-11	1,6323e-11
0,6	5,9862e-10	7,3452e-10	3,8637e-10
0,8	1,7352e-09	2,2488e-09	4,7355e-09
1,0	3,7265e-08	5,6624e-09	5,5631e-08
1,2	6,5363e-07	8,7634e-08	7,1273e-08

Tableau 3.2 – Erreur quadratique entre les filtres obtenus analytiquement et les filtres obtenus avec la méthode du gradient projeté sur le canal EPR4.

prêter le comportement de l'égaliseur *channel shortening* lorsque l'interférence entre symboles est moins importante. Ainsi, nous observons dans la Figure 3.8 que la convergence de l'égaliseur en fonction du paramètre ν est obtenue bien avant lorsqu'une accélération de $\tau = 0,7$ est considérée. Concrètement, nous observons une dégradation très faible entre les performances avec $\nu = 4$ et $\nu = 2$, ce dernier cas impliquant un algorithme BCJR à seulement 4 états sur les voies en phase et en quadrature. Ce comportement s'accroît lorsque τ augmente davantage. Nous observons dans la Figure 3.9 que les canaux FTN à faible interférence entre symboles ne parviennent pas à profiter des avantages du *channel shortening*, car l'égaliseur minimisant l'erreur quadratique moyenne parvient à contrer cette interférence sans nécessité d'avoir recours à l'algorithme BCJR.

Il est intéressant d'évaluer les performances de l'égaliseur sur d'autres types de canaux à interférence entre symboles, en particulier ceux utilisés dans les travaux précédents sur le *channel shortening*. Les performances sur le canal EPR4 [25] sont montrées dans la Figure 3.10. Contrairement aux canaux FTN, les performances BER de l'égaliseur *channel shortening* ont une dépendance assez linéaire avec ν . Cela est dû au fait que tous les coefficients de ce canal ont la même amplitude. Les performances de l'égaliseur sur ce même canal en fonction de ν et σ_e^2 sont illustrées dans la Figure 3.10. Nous observons dans cette figure que, lorsque σ_e^2 diminue, ce qui correspond à une estimation plus fiable des symboles *a priori*, les performances de l'égaliseur sont légèrement moins sensibles à une variation de ν . Ainsi, nous constatons, par exemple pour un BER = 10^{-3} , un écart de 0,6 dB entre les configurations $\nu = 1$ et $\nu = 3$ lorsque $\sigma_e^2 = 0,15$ alors que cet écart est de 1,5 dB lorsque $\sigma_e^2 = 0,3$. Ce phénomène est constaté également pour les canaux FTN étudiés précédemment.

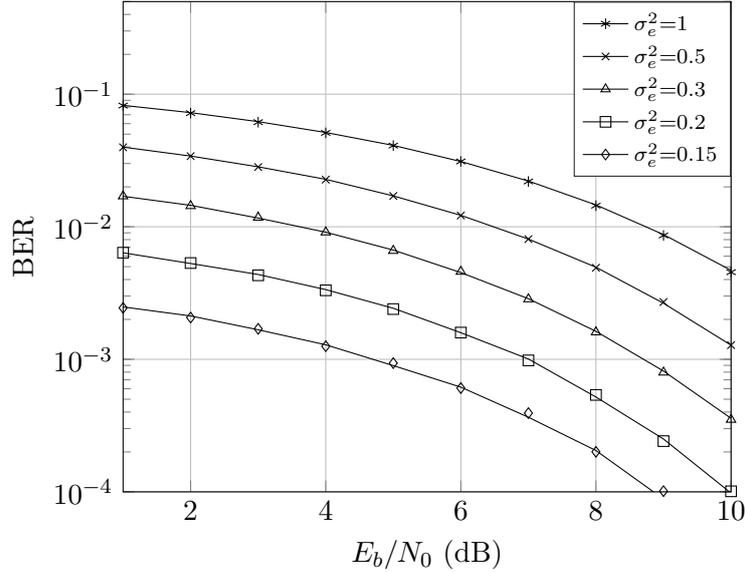


FIGURE 3.6 – Performances du récepteur *channel shortening* pour $\nu = 2$ sur le canal FTN05.

3.4 Synthèse - Égalisation *channel shortening* et information *a priori*

L'égalisation *channel shortening* permet de limiter la complexité du récepteur dans le cadre des transmissions avec ISI et offre un bon compromis entre complexité et performance, en particulier pour les canaux de type FTN tel que montré dans ce chapitre. Dans ce chapitre, nous avons calculé analytiquement les filtres du récepteur CS en fonction des différents paramètres du système, supposés connus du récepteur. L'approche analytique a l'avantage d'éviter les problèmes de convergence ou d'instabilité numérique que l'on peut rencontrer lorsque des méthodes d'optimisation numériques sont utilisées. D'autre part, cette solution est d'autant plus pertinente que des récepteurs itératifs sont en pratique utilisés de sorte que les filtres doivent être ré-calculés plusieurs fois pour une même séquence de symboles en réception.

Nous avons montré par ailleurs dans ce chapitre que le récepteur *channel shortening* sous forme analytique généralise l'égalisation selon le critère de minimisation de l'erreur quadratique moyenne. L'égaliseur peut être exprimé comme la concaténation d'un filtre MMSE, un filtre correcteur qui dépend de la matrice *shortening* et d'un égaliseur BCJR permettant un calcul approximatif des probabilités *a posteriori*. Nous avons également montré que le récepteur *channel shortening* converge, dans le cas $\nu = L$, vers l'égaliseur BCJR-APS dans lequel les symboles *a priori* sont exploités pour calculer des probabilités *a posteriori* exactes.

Notre but étant d'utiliser l'égaliseur *channel shortening* dans le cadre de la turbo égalisation, il reste à définir un estimateur permettant de convertir les LLR fournis par le décodeur correcteur d'erreurs en symboles que l'on puisse utiliser en entrée du traitement retour de l'égaliseur. L'objectif est notamment d'étudier un estimateur permettant d'effectuer l'égalisation sans appliquer des contraintes sur le traitement retour, ce qui dégrade la performance

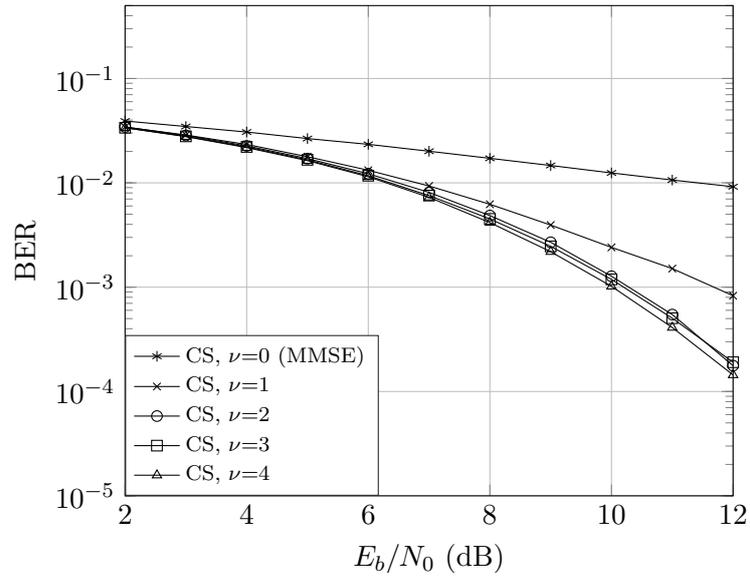


FIGURE 3.7 – Performances du récepteur *channel shortening* avec $\sigma_e^2 = 0,5$ sur le canal FTN05.

du récepteur tel que montré dans la section précédente. L'étude de cet estimateur fait l'objet du chapitre suivant.

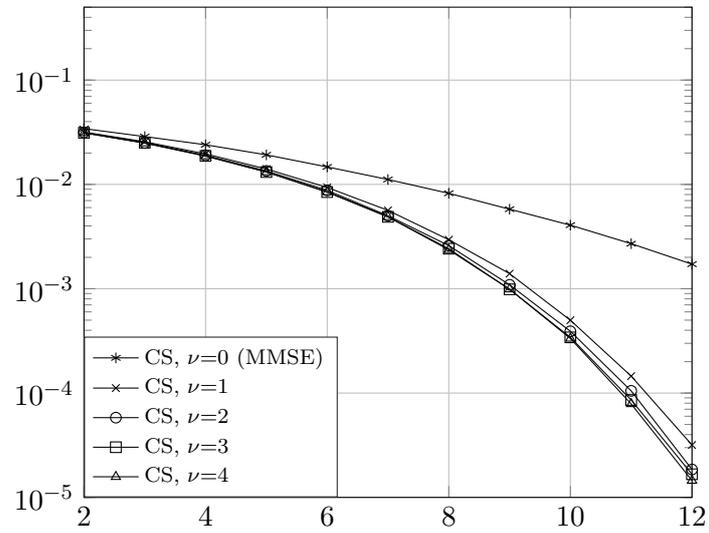


FIGURE 3.8 – Performances du récepteur *channel shortening* avec $\sigma_e^2 = 0,5$ sur le canal FTN07.

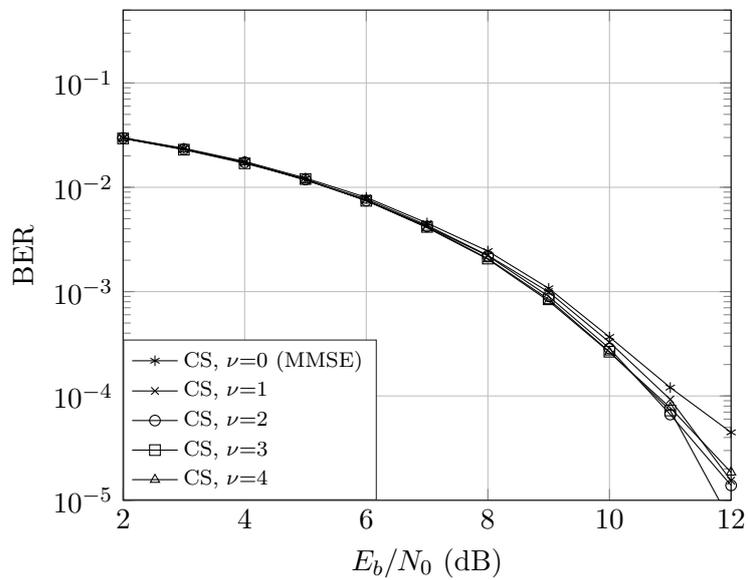


FIGURE 3.9 – Performances du récepteur *channel shortening* avec $\sigma_e^2 = 0,5$ sur le canal FTN09.

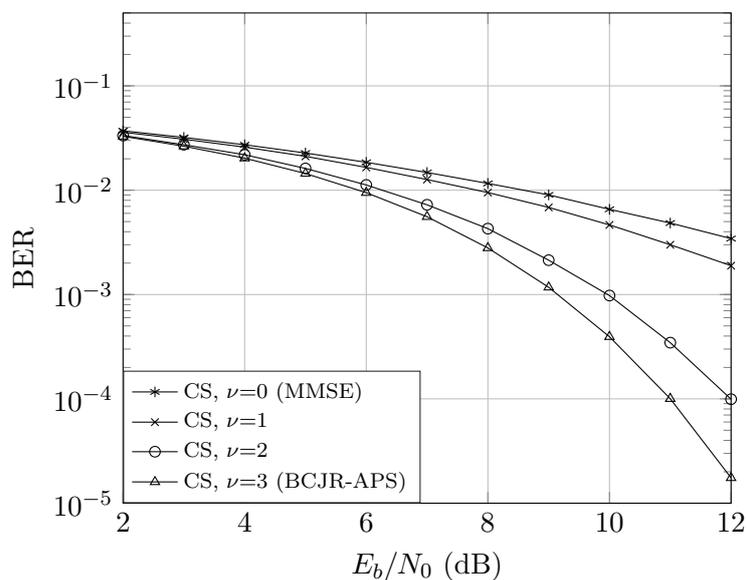


FIGURE 3.10 – Performances du récepteur *channel shortening* avec $\sigma_e^2 = 0,5$ sur le canal EPR4.

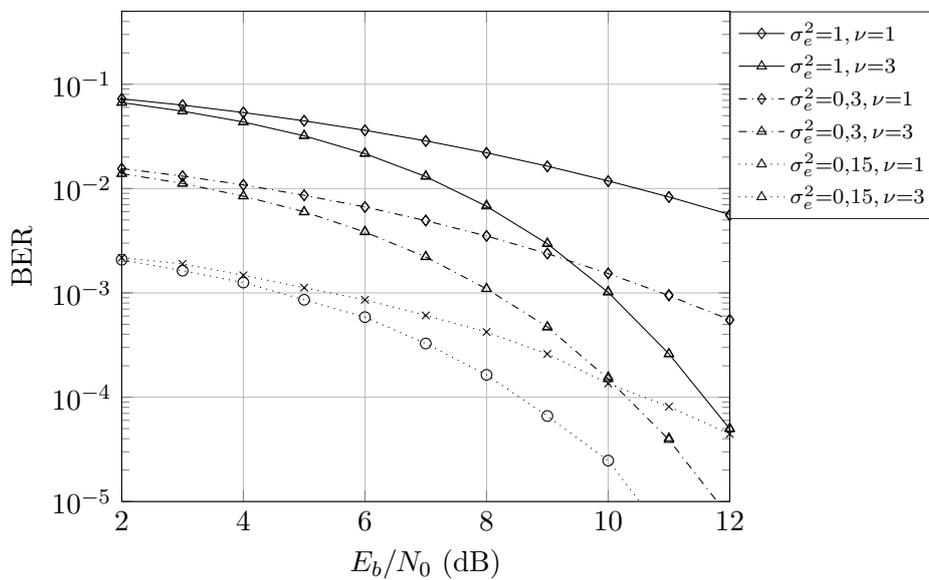


FIGURE 3.11 – Performances du récepteur *channel shortening* sur le canal EPR4.

Estimation des symboles *a priori* en entrée de l'égaliseur *channel shortening*

Sommaire

4.1	Structure du récepteur et problème d'estimation	65
4.2	Estimation des symboles <i>a priori</i> à partir des probabilités	67
4.2.1	Estimateur symbole espérance conditionnelle (EC)	67
4.2.2	Estimateur symbole <i>minimum variance unbiased</i> (MVU)	67
4.2.3	Comparaison des estimateurs EC et MVU	69
4.3	Évaluation des performances dans le cadre de l'égalisation <i>channel shortening</i>	71
4.3.1	Performances de l'égaliseur <i>channel shortening</i>	71
4.3.2	Performances de l'égaliseur BCJR-APS	73
4.4	Synthèse - Vers un turbo égaliseur rapprochant les limites théoriques	76

Nous avons étudié dans le chapitre précédent un égaliseur *channel shortening* permettant un calcul approximatif des probabilités *a posteriori* dans le cadre des transmissions avec ISI et en particulier des systèmes FTN. L'égaliseur prend à son entrée des symboles *a priori* qui sont exploités dans l'étape linéaire (2.4) en combinaison avec la séquence reçue et filtrée. Nous avons démontré dans la Section 3.1.2 que ce modèle linéaire généralise une densité de probabilité conditionnelle dans le cas où les symboles en entrée de l'égaliseur suivent un modèle à bruit additif blanc Gaussien (3.27).

4.1 Structure du récepteur et problème d'estimation

Afin d'atteindre les taux d'information du systèmes FTN, nous considérons maintenant le système de transmission avec codage correcteur d'erreurs de la Figure 1.9. En réception, nous considérons le turbo égaliseur de la Figure 4.1. Nous pouvons identifier dans cette figure l'égaliseur *channel shortening*, composé d'une étape linéaire caractérisée par les matrices \mathbf{F}_{cs} et \mathbf{B}_{cs} et d'une étape non-linéaire, l'algorithme BCJR, permettant un calcul approximatif des probabilités *a posteriori* des symboles émis. Afin de permettre un échange entre le décodeur

et l'égaliseur, les LLR en sortie du premier doivent être convertis en symboles en utilisant un convertisseur LLR-symbole. Nous avons donc besoin de définir un critère d'estimation des symboles *a priori* qui respecte les hypothèses effectués lors du calcul de l'égaliseur *channel shortening* analytique.

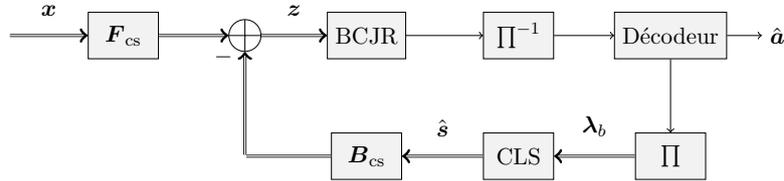


FIGURE 4.1 – Schéma bloc de l'émetteur-récepteur *channel shortening* avec codage correcteur d'erreurs.

Une analyse bibliographique sur l'estimation des symboles dans le cadre de la turbo égalisation permet de constater que toujours la même méthode d'estimation est utilisée lorsque des techniques d'égalisation linéaires sont considérées. En particulier, les travaux portant sur l'égalisation linéaire MMSE emploient un estimateur symbole selon le critère de l'espérance conditionnelle (EC) [23], [100], [101]. L'égaliseur linéaire MMSE nécessite un *prior* sur la moyenne et la covariance des symboles. D'autre part, les travaux les plus récents portant sur l'égalisation *channel shortening* ont constaté des problèmes de convergence lorsque les matrices \mathbf{F}_{cs} et \mathbf{B}_{cs} sont obtenues numériquement en utilisant la méthode du gradient et que l'estimateur EC est utilisé pour obtenir des symboles *a priori* à partir des probabilités issues du décodeur [29]. Or, l'estimateur symbole n'a pas été identifié comme étant la source des instabilités même si celui-ci n'est *a priori* plus justifié pour cette nouvelle structure d'égalisation. À la place, les travaux de la littérature ont proposé de limiter les problèmes d'instabilité en appliquant des contraintes supplémentaires sur \mathbf{B}_{cs} , ce qui entraîne une dégradation des performances de l'égaliseur.

Afin de résoudre les problèmes liés à l'estimation symbole selon le critère de l'EC dans un contexte *channel shortening*, nous proposons dans ce chapitre d'estimer les symboles à partir des probabilités en utilisant un estimateur *minimum variance unbiased* (MVU). Il faut tout d'abord noter que l'estimateur proposé dans cette partie est limité aux alphabets binaires réels symétriques. Cette contrainte peut sembler préjudiciable car elle restreint le périmètre d'action du turbo égaliseur. Or, rappelons que l'estimateur symbole s'inscrit dans une architecture de turbo égalisation basée sur l'utilisation d'un algorithme BCJR dont la complexité calculatoire augmente de façon exponentielle avec le nombre de bit par symbole. Cette contrainte est donc en phase avec les hypothèses de départ de ces travaux de thèse car le turbo égaliseur *channel shortening* est restreint aux constellations de petite taille. L'estimateur symbole classique selon le critère de l'espérance conditionnelle ainsi que l'estimateur symbole proposé dans cette thèse sont détaillés dans la partie suivante.

4.2 Estimation des symboles *a priori* à partir des probabilités

4.2.1 Estimateur symbole espérance conditionnelle (EC)

Dans le cadre de la turbo égalisation de canaux à ISI, le critère de l'espérance conditionnelle (EC) a été largement utilisé pour estimer les symboles *a priori* en entrée de l'égaliseur à partir des probabilités fournies par le décodeur [23], [24], [100], [101]. La sortie de l'estimateur dans le cadre des alphabets binaires symétriques s'écrit

$$\hat{s}_k = E\{s_k | \lambda_{b_k}\} = \tanh\left(\frac{\lambda_{b_k}}{2}\right). \quad (4.1)$$

En considérant cet estimateur, le coefficient de corrélation $c_0 = E\{\hat{s}_k^2\}$ défini dans le Chapitre 2 est calculé en estimant empiriquement la variance des symboles en sortie de l'estimateur. Le coefficient d'inter corrélation c_1 est souvent calculé en exploitant le théorème de l'espérance totale [23]

$$c_1 = E\{s_k \hat{s}_k\} = E_{\lambda_{b_k}} \left\{ E_{s_k \hat{s}_k | \lambda_{b_k}} \{s_k \hat{s}_k | \lambda_{b_k}\} \right\} \quad (4.2)$$

où par construction de l'estimateur, la valeur $\hat{s}_k = E\{s_k | \lambda_{b_k}\}$ peut être extraite de l'opérateur espérance

$$E_{\lambda_{b_k}} \left\{ E_{s_k \hat{s}_k | \lambda_{b_k}} \{s_k \hat{s}_k | \lambda_{b_k}\} \right\} = E_{\lambda_{b_k}} \left\{ \underbrace{E_{s_k | \lambda_{b_k}} \{s_k | \lambda_{b_k}\}}_{\hat{s}_k} \hat{s}_k \right\} = c_0. \quad (4.3)$$

4.2.2 Estimateur symbole *minimum variance unbiased* (MVU)

Afin d'obtenir une solution analytique et compacte de l'estimateur MVU pour des alphabets binaires symétriques réels, nous faisons l'hypothèse que les LLR sont issus d'une observation composée du symbole d'intérêt plus un bruit additif blanc Gaussien

$$y_k = s_k + e_k \quad (4.4)$$

avec $e_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ de sorte que

$$\lambda_{b_k} = \ln\left(\frac{P(s_k = 1 | y_k)}{P(s_k = -1 | y_k)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(y_k-1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma_e^2}(y_k+1)^2}}\right) \quad (4.5)$$

Finalement, les LLR s'écrivent de façon compacte

$$\lambda_{b_k} = \frac{2}{\sigma_e^2}(s_k + e_k) \quad (4.6)$$

Le modèle (4.6) peut sembler abusif notamment lorsque l'information *a priori* provient d'un code correcteur d'erreurs à comportement non-linéaire. Or, il été constaté que ce modèle est représentatif vis-à-vis de l'information extrinsèque en provenance du code correcteur d'erreurs, en particulier lorsque des codes convolutifs sont utilisés [90]. Nous allons observer dans le chapitre suivant que ce modèle est également applicable à l'information extrinsèque obtenue en sortie d'un code LDPC et permet donc avoir de très bons résultats de performance BER.

L'estimateur MVU pour le modèle (4.4) est bien connu dans la littérature [104, p. 95]

$$\hat{s}_k = \frac{\sigma_e^2}{2} \lambda_{b_k} \quad (4.7)$$

et a une dépendance linéaire avec les LLR. Afin de déterminer de manière unique la valeur des symboles estimés, il reste à trouver un moyen d'estimer σ_e^2 . Pour faire cela, nous posons

$$\mathbb{E} \left\{ \lambda_{b_k}^2 \right\} = \frac{4}{(\sigma_e^2)^2} (1 + \sigma_e^2) \quad (4.8)$$

Le terme $\mathbb{E} \left\{ \lambda_{b_k}^2 \right\}$ peut être obtenu empiriquement en estimant la puissance moyenne des LLR. Cela est possible en supposant que la variable aléatoire λ_{b_k} respecte la propriété d'ergodicité de sorte que la moyenne statistique peut être remplacée par une moyenne temporelle. Le terme σ_e^2 est alors obtenu en résolvant l'équation de deuxième degré (4.8). Celle-ci a comme solution

$$\sigma_e^2 = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + \mathbb{E} \left\{ \lambda_{b_k}^2 \right\}}}{\mathbb{E} \left\{ \lambda_{b_k}^2 \right\}} \quad (4.9)$$

où nous retenons la solution positive car elle permet de garder la cohérence de signe dans (4.7). L'estimateur MVU peut être facilement étendu aux alphabets QPSK construits à partir de deux modulations 2-PAM. Ainsi, les symboles estimés, complexes, sont construits en prenant

$$\hat{s}_k = \frac{\sigma_e^2}{2} (\lambda_{b_k} + j\lambda_{b_{k+1}}) \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.10)$$

En considérant l'estimateur MVU, les coefficients de corrélation définis dans le Chapitre 2 prennent les valeurs

$$c_0 = \mathbb{E} \left\{ |\hat{s}_k|^2 \right\} = 1 + \sigma_e^2, \quad (4.11)$$

$$c_1 = \mathbb{E} \left\{ s_k \hat{s}_k \right\} = 1. \quad (4.12)$$

La variance de l'erreur de l'estimateur MVU est σ_e^2 .

4.2.3 Comparaison des estimateurs EC et MVU

Les relations d'entrée-sortie des estimateurs MVU et EC pour des alphabets binaires symétriques réels avec $s_k \in \{+1, -1\}$ sont illustrées dans la Figure 4.2. Il faut remarquer que contrairement à l'estimateur EC, la relation d'entrée-sortie de l'estimateur MVU dépend de la variance du bruit d'estimation. Nous pouvons également apprécier dans cette figure que l'estimateur EC est biaisé car il est borné entre ± 1 .

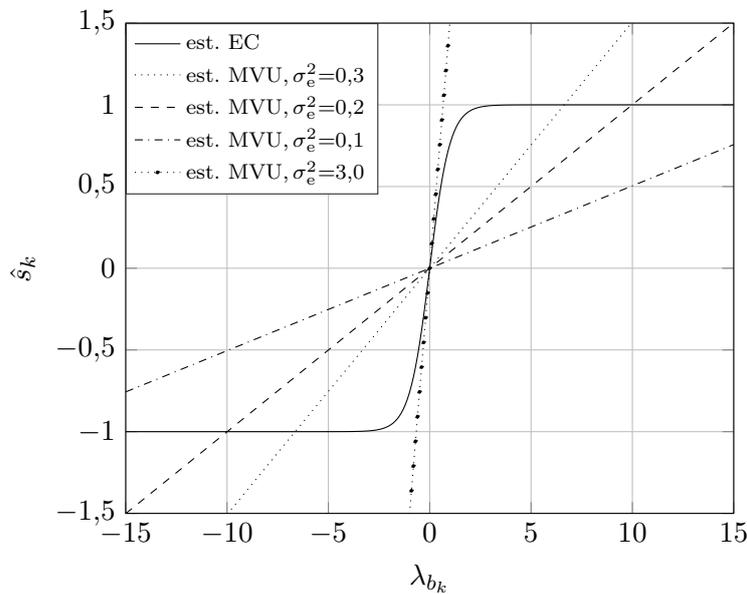


FIGURE 4.2 – Illustration des relations d'entrée-sortie des estimateurs EC et MVU en fonction de la variance du bruit d'estimation.

Il est important de rappeler que l'estimateur MVU calculé précédemment est construit sur la base du modèle (4.6). Il est donc difficile d'effectuer une comparaison équitable entre cet estimateur et celui de l'espérance conditionnelle car ce dernier n'a pas été obtenu sur la base de (4.6). Or, le modèle linéaire pour les LLR en sortie du décodeur est soutenu par des résultats de la littérature tel qu'expliqué précédemment, ainsi que par une analyse empirique réalisée lors de ces travaux de thèse. L'estimateur EC est donc souvent utilisé dans des configurations où cette hypothèse est remplie. Les deux estimateurs sont évalués dans ce qui suit sur la base du modèle linéaire des LLR. La Figure 4.3 montre une comparaison des variances conditionnelles $\sigma_{\hat{s}_k/s_k}^2 = E\{\hat{s}_k^2|s_k\} - E^2\{\hat{s}_k|s_k\}$ des estimateurs EC et MVU. Nous constatons que la variance de l'estimateur selon le critère de l'EC est moins importante, ce qui confirme le compromis variance/biais des estimateurs. La Figure 4.4 montre une comparaison de l'erreur quadratique moyenne (MSE) entre les symboles estimés et les symboles émis pour les deux estimateurs. Comme prévu, l'estimateur EC parvient à avoir une MSE plus basse que l'estimateur MVU même s'il est biaisé. En comparant les courbes de l'estimateur EC des

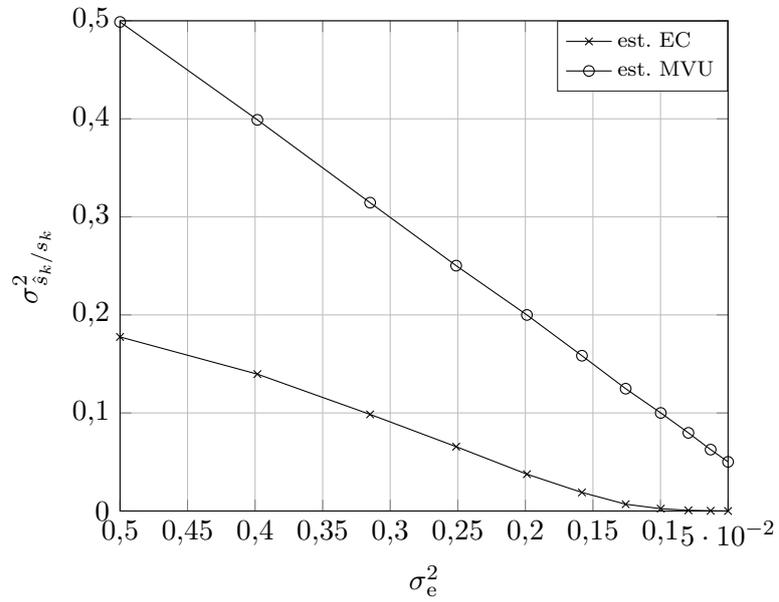


FIGURE 4.3 – Comparaison des variances des estimateurs EC et MVU.

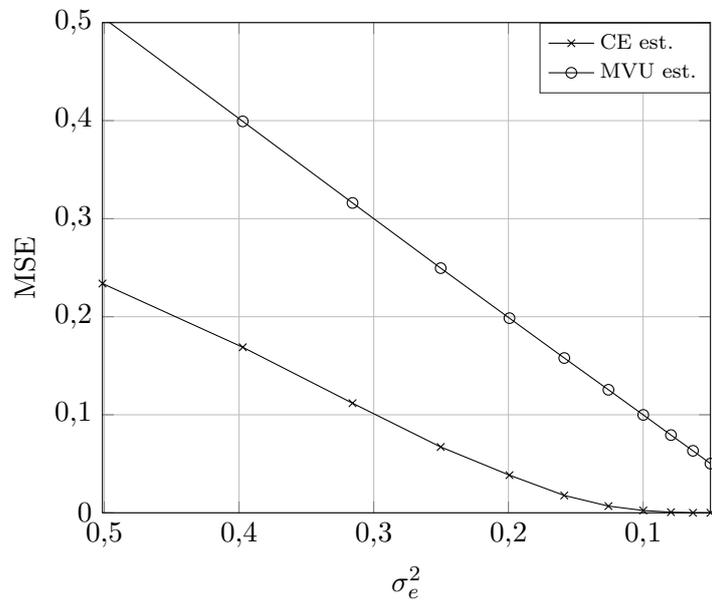


FIGURE 4.4 – Comparaison des erreurs quadratiques moyennes des estimateurs EC et MVU.

Figures 4.3 et 4.4, nous constatons que le biais augmente avec σ_e^2 . Cela peut être également apprécié dans la Figure 4.2 car la fonction tangente hyperbolique se rapproche de la vraie valeur des symboles émis lorsque la variance du bruit d'estimation diminue.

4.3 Évaluation des performances dans le cadre de l'égalisation *channel shortening*

4.3.1 Performances de l'égaliseur *channel shortening*

Nous évaluons dans cette partie les performances de l'estimateur dans le cadre de l'égalisation *channel shortening* étudiée dans le chapitre précédent.

Nous observons dans la Figure 4.5 l'évolution de γ en fonction de la variance du bruit d'estimation pour les estimateurs MVU et EC. Rappelons que cette variable matérialise la dépendance des matrices \mathbf{F}_{cs} , \mathbf{B}_{cs} et \mathbf{G}_{cs} avec l'information *a priori* par le biais des coefficients de corrélation et d'inter-corrélation

$$\mathbf{F}_{cs} = (\mathbf{G}_{cs} + \mathbf{I}) (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H,$$

$$\mathbf{B}_{cs} = (\mathbf{G}_{cs} + \mathbf{I}) \left((\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{H} - \mathbf{I} \right) \frac{c_1}{c_0}$$

avec

$$\gamma = \sigma_n^2 \left(1 - \frac{c_1^2}{c_0} \right)^{-1}.$$

Nous constatons que ce coefficient prend rapidement des valeurs importantes lorsque la variance du bruit de l'estimateur EC diminue. Cela est dû au fait que c_0 tend vers 1 très rapidement à cause de la dynamique de cet estimateur, observée précédemment. Ce phénomène peut également entraîner des problèmes d'instabilité numérique dans le cadre de la turbo égalisation lors des itérations finales du récepteur comportant un σ_e^2 très faible.

Nous comparons dans la Figure 4.6 les performances de l'égaliseur *channel shortening* avec $\nu = 2$ (4 états du BCJR) et en utilisant les estimateurs MVU ou EC respectivement. Nous observons une dégradation des performances de l'égaliseur lorsque l'estimateur EC est utilisé, au fur et à mesure que la qualité de l'information *a priori* augmente. Pour des valeurs de variance du bruit d'estimation faibles, l'égaliseur ne parvient plus à exploiter l'information *a priori* obtenue avec cet estimateur. En revanche, le BER de l'égaliseur utilisant l'estimateur MVU diminue avec la variance du bruit d'estimation.

Il a été constaté qu'il est possible de limiter ce phénomène en imposant des contraintes supplémentaires sur la matrice \mathbf{B}_{cs} . En particulier, il a été observé qu'il est possible de

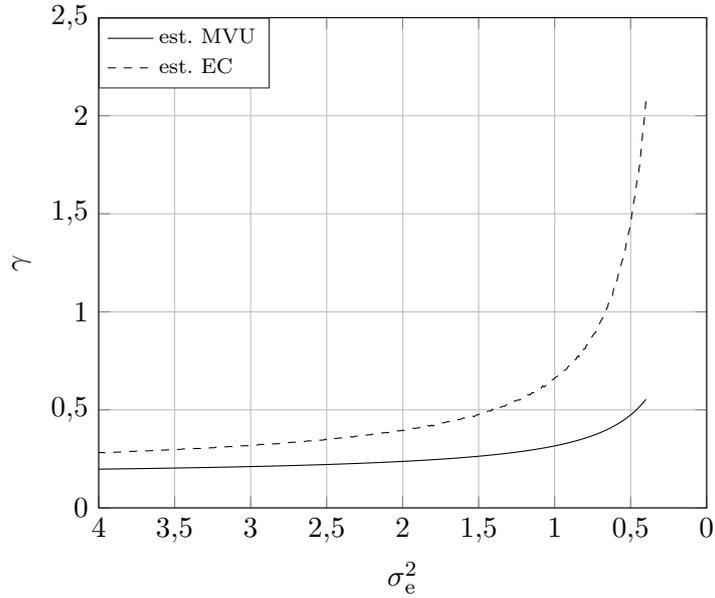


FIGURE 4.5 – Évolution du coefficient γ en fonction du bruit d'estimation pour les estimateurs MVU et EC sur le canal FTN05 avec $\nu = 2$, $E_b/N_0 = 5$ dB.

corriger les problèmes d'instabilité qu'entraîne l'estimateur EC en forçant une suppression d'interférence dans la boucle de retour [29]. Cela se fait en imposant

$$\mathbf{B}_{cs} = \begin{bmatrix} 0 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,N} \\ b_{2,1} & 0 & \cdots & b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N,1} & b_{N,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

ce qui revient à considérer, pour l'égalisation du symbole à l'instant k , l'information *a priori* disponible pour les symboles adjacents, en excluant l'information *a priori* disponible sur ce même symbole. Il faut remarquer que la contrainte (4.13) rend difficile un calcul analytique de \mathbf{F} , \mathbf{B} et \mathbf{G} . La méthode avec contrainte proposée dans [29] impose donc l'utilisation des méthodes d'optimisation numérique décrites dans le chapitre 2, en particulier la méthode du gradient projeté ou des variantes plus performantes. Nous comparons dans la Figure 4.7 les performances de l'égaliseur *channel shortening* avec estimateur MVU et les performances avec estimateur EC en appliquant la contrainte (4.13). Nous observons que les problèmes d'instabilité numérique disparaissent en utilisant cette contrainte supplémentaire sur \mathbf{B} . Toutefois, une dégradation de performance conséquente est obtenue par rapport à la méthode avec estimation MVU proposée ici. L'égaliseur avec contrainte sur \mathbf{B}_{cs} semble avoir une borne de performance lorsque σ_e^2 diminue. Pour mieux comprendre ce phénomène, il est intéressant d'étudier l'évolution de \mathbf{B}_{cs} en fonction de l'information *a priori*. Dans la Figure 4.8 est montrée l'évolution des coefficients du filtre en fonction de γ . Cette figure permet d'illustrer la raison pour laquelle les performances de l'égaliseur se dégradent considérablement en appliquant la contrainte 4.13 sur la matrice \mathbf{B}_{cs} . Cela s'explique par le fait que pour l'égalisation du symbole

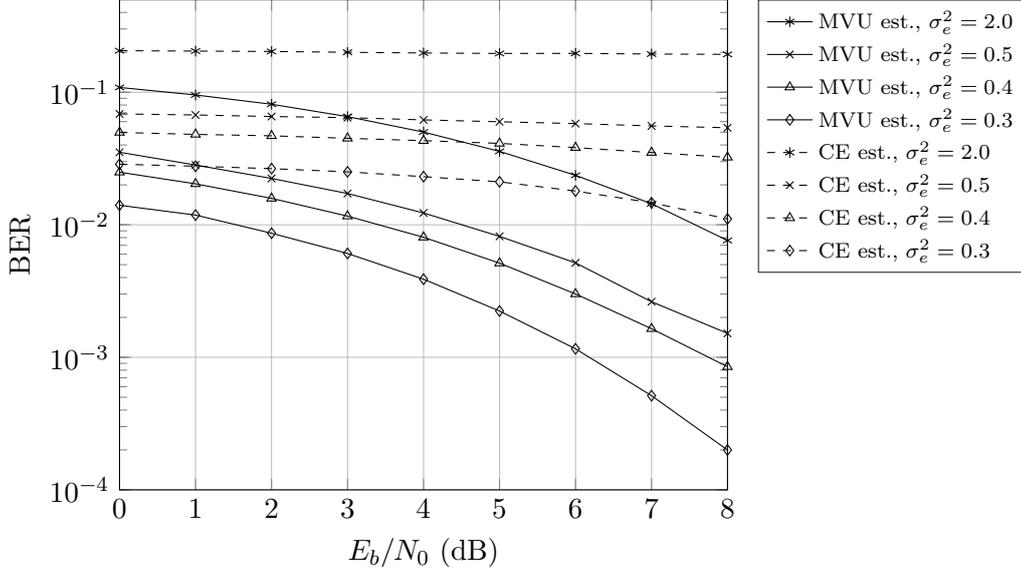


FIGURE 4.6 – Évaluation des performances de l'égaliseur *channel shortening* analytique avec estimateurs MVU et EC en fonction de la variance du bruit d'estimation sur le canal FTN05 avec $\nu = 2$.

à l'instant k l'information *a priori* utile est majoritairement contenue dans le symbole *a priori* k , les symboles adjacents ayant très peu d'information, et ce d'autant plus que γ est grand. Ce phénomène est également observé lorsque l'on fixe γ et que l'on fait varier ν . Nous montrons dans la Figure 4.9 l'évolution des coefficients du filtre en fonction de ce paramètre. Lorsque $\nu = 0$, correspondant au cas particulier MMSE, rien n'indique que le coefficient central du filtre soit prépondérant par rapport aux autres. Or, en augmentant ν , ce coefficient devient rapidement prépondérant par rapport aux autres. Pour l'égalisation d'un symbole à l'instant k , pratiquement seulement l'information *a priori* correspondant au symbole \hat{s}_k est considérée par l'égaliseur. Dans le cas limite $\nu = L$, la matrice \mathbf{B}_{cs} est proportionnelle à l'identité. Dans cette configuration, la valeur des coefficients de la diagonale de \mathbf{B}_{cs} est σ_n^2/σ_e^2 , ce qui correspond à la valeur calculée dans la Section 3.1.2 dans le cadre de l'égaliseur BCJR-APS.

4.3.2 Performances de l'égaliseur BCJR-APS

Dans le cadre du *channel shortening* au sens strict, c'est-à-dire, lorsque $0 < \nu < L$, il a été montré dans les travaux précédents que la configuration où les symboles *a priori* sont traités via la matrice \mathbf{B}_{cs} est plus performante que celle illustrée dans la Figure 1.10 où les probabilités *a priori* sont directement injectées dans l'égaliseur BCJR [26]. Nous souhaitons nous focaliser à présent sur le cas $\nu = L$ de l'égaliseur qui correspond à effectuer l'égalisation BCJR-APS présentée dans la section 3.1.2. L'objectif de cette partie est de vérifier s'il existe une différence de performance entre le BCJR-APS avec estimation MVU des symboles *a priori* et le BCJR classique avec retour probabilité. Pour faire cela, nous considérons le modèle (4.6).

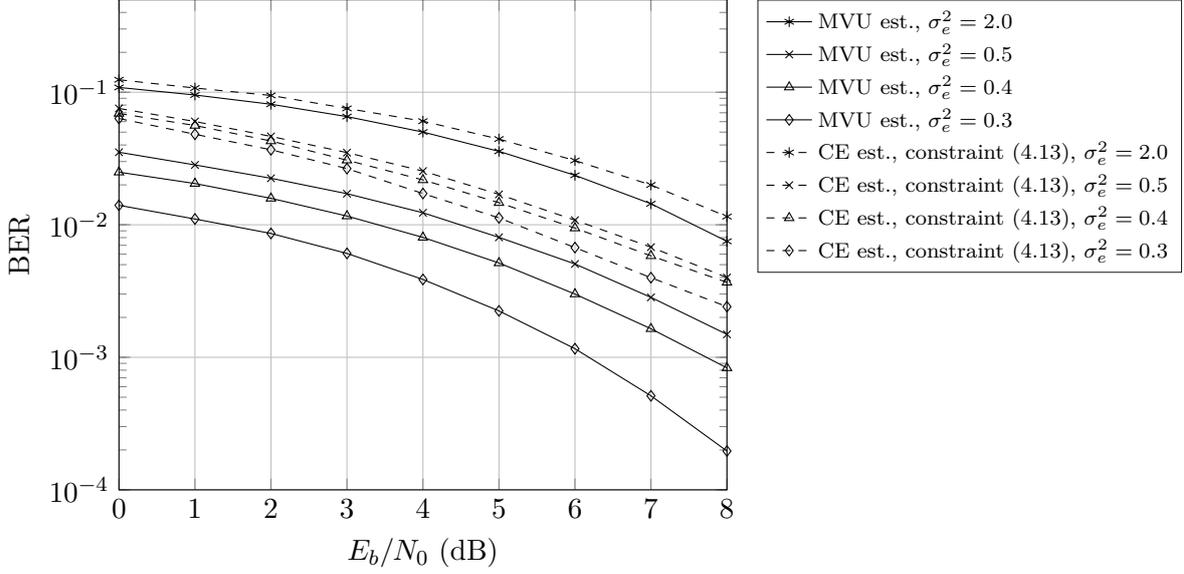


FIGURE 4.7 – Évaluation des performances de l'égaliseur *channel shortening* analytique avec estimateur MVU et de l'égaliseur obtenu numériquement avec contrainte et estimateur EC en fonction de la variance du bruit d'estimation sur le canal FTN05 avec $\nu = 2$.

Les performances des deux égaliseurs sont montrées dans la Figure 4.10 en fonction de l'information *a priori*. Les performances BER sont les mêmes pour ces deux architectures d'égalisation. L'utilisation conjointe de l'égaliseur BCJR-APS et de l'estimateur symbole MVU constitue une architecture d'égalisation équivalente au BCJR classique avec retour probabilités du point de vue des performances lorsqu'un modèle AWGN est considéré pour les LLR en sortie du décodeur correcteur d'erreurs.

Nous comparons dans la Figure 4.11 les performances de ce même récepteur lorsque l'estimateur symbole EC est utilisé. En dehors du cas d'une variance σ_e^2 importante, équivalente à effectuer l'égalisation sans information *a priori*, nous constatons que les performances de l'égaliseur en utilisant l'estimateur EC sont d'autant plus dégradées que la variance du bruit d'estimation σ_e^2 diminue. Concrètement, une dégradation entre 1 dB et 2 dB par rapport au récepteur employant l'estimateur MVU est observée dans la plage de E_b/N_0 considéré pour $\sigma_e^2 = 0,5$. En diminuant davantage σ_e^2 , nous constatons que les performances se dégradent considérablement, à tel point que le BER ne diminue plus avec E_b/N_0 .

Nous montrons dans la Figure 4.12 l'histogramme des symboles en sortie des estimateurs MVU et EC en fonction de la variance du bruit d'estimation pour un alphabet binaire. Puisque l'estimateur MVU est linéaire et que les LLR sont supposés suivant une distribution Gaussienne, la sortie de l'estimateur suit également une distribution Gaussienne. Cette estimateur respecte donc l'hypothèse permettant d'exprimer (3.31). D'autre part, nous observons dans cette figure que l'estimateur EC a un comportement très différent. Rappelons que dans le cas d'un alphabet binaire, la relation qui relie les LLR et les symboles estimés est une tangente hyperbolique. Avec peu d'information *a priori*, les LLR ont une amplitude faible et cette fonction peut être approchée par son argument. Le comportement linéaire de cette fonction pour

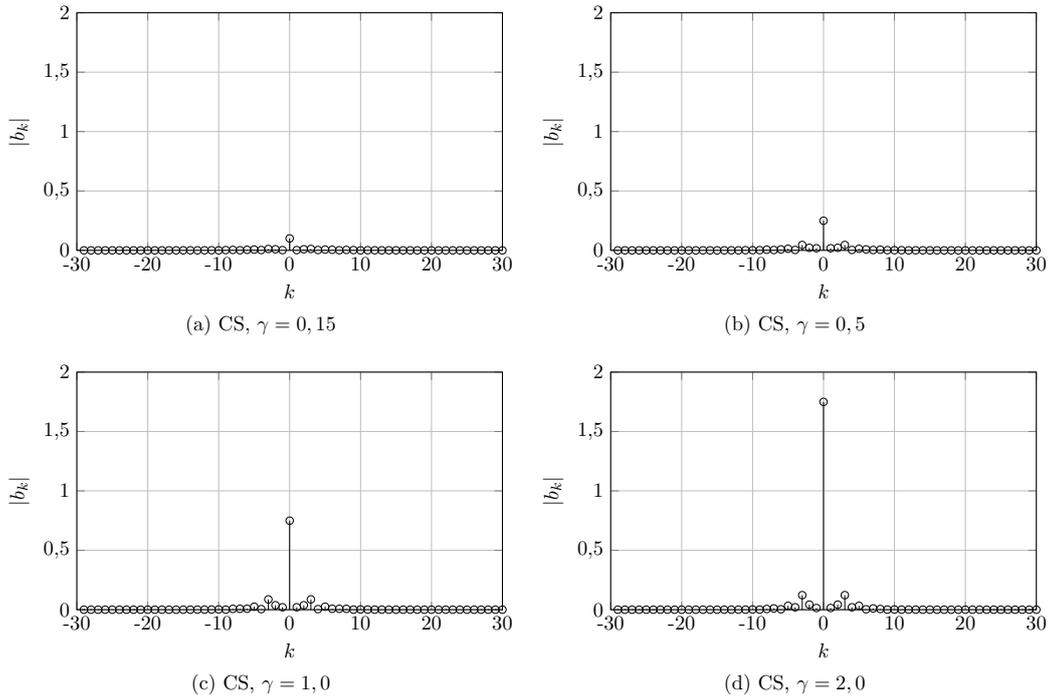


FIGURE 4.8 – Coefficients de \mathbf{b}_{cs} avec $\nu = 2$ en fonction de γ sur le canal FTN05.

des variances de bruit importantes entraine une sortie d'estimateur suivant une distribution quasiment Gaussienne. Or, lorsque la variance du bruit d'estimation diminue, la différence de comportement se fait rapidement visible. On apprécie également dans cette figure le fait que le biais de l'estimateur EC est différent de zéro. Nous constatons que dès que la variance du bruit d'estimation diminue, la sortie de l'estimateur EC tend très rapidement vers sa valeur finale, et que celui-ci a une très faible variance. Cela semble contradictoire avec la notion d'égalisation avec information *a priori* souple car cet estimateur a une dynamique presque nulle lorsque la variance du bruit d'estimation σ_e^2 est faible. Nous avons par ailleurs constaté que lorsque des codes très performantes sont utilisées, comme par exemple les codes LDPC, la sortie de cet estimateur prend directement des valeurs proches de ± 1 dès les premières itérations. La boucle de retour du turbo égaliseur a une absence de souplesse qui met en doute la pertinence de l'estimateur EC dans ces scénarios.

Au vue de ces résultats de simulation, nous pouvons conclure que le schéma d'égalisation BCJR classique dont l'information *a priori* est composé de probabilités et l'architecture d'égalisation BCJR-APS avec estimateur symbole MVU sont équivalentes du point de vue des performances pour des alphabets binaires symétriques réels ou quaternaires, à condition que le modèle de distribution Gaussienne des LLR en sortie du décodeur soit respectée.

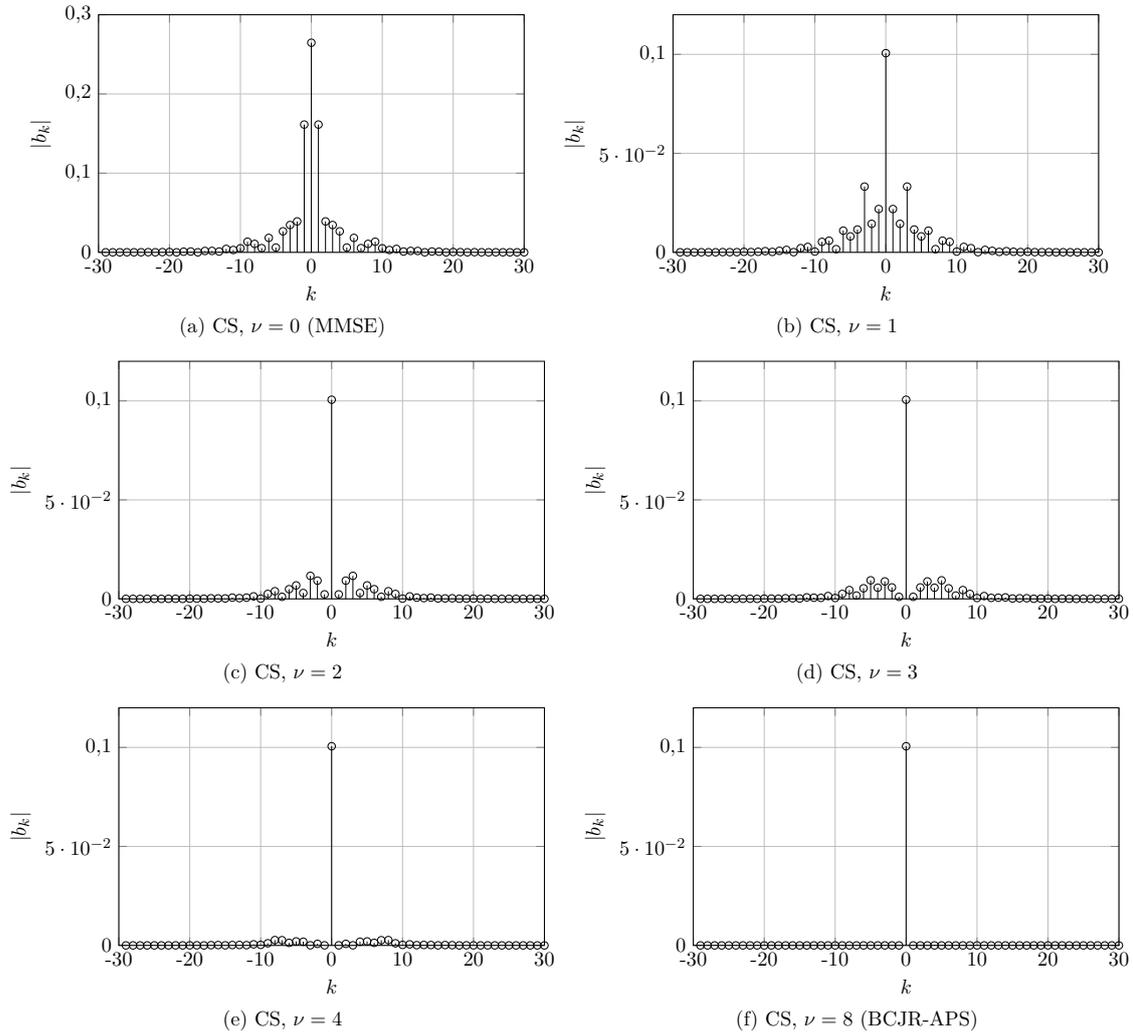


FIGURE 4.9 – Coefficients de \mathbf{b}_{cs} avec $\gamma = 0, 15$ en fonction de ν sur le canal FTN05.

4.4 Synthèse - Vers un turbo égaliseur rapprochant les limites théoriques

Dans ce chapitre, nous avons proposé un estimateur symbole *minimum variance unbiased* en supposant que les LLR en sortie du décodeur correcteur d'erreurs ne sont pas corrélés et ont une distribution Gaussienne. Ce modèle pour l'information *a priori* est par ailleurs cohérent avec le modèle considéré dans le Chapitre 3 pour évaluer les performances de l'égaliseur *channel shortening* sous forme analytique.

En premier lieu, nous avons montré que l'estimateur linéaire MVU est *minimum variance unbiased*. Il est donc l'estimateur à variance minimale parmi l'ensemble des estimateurs symbole non-biaisés. Une comparaison avec l'estimateur EC a permis de montrer que la variance de ce dernier est moins importante, ce qui ne contredit pas le résultat précédent car l'estima-

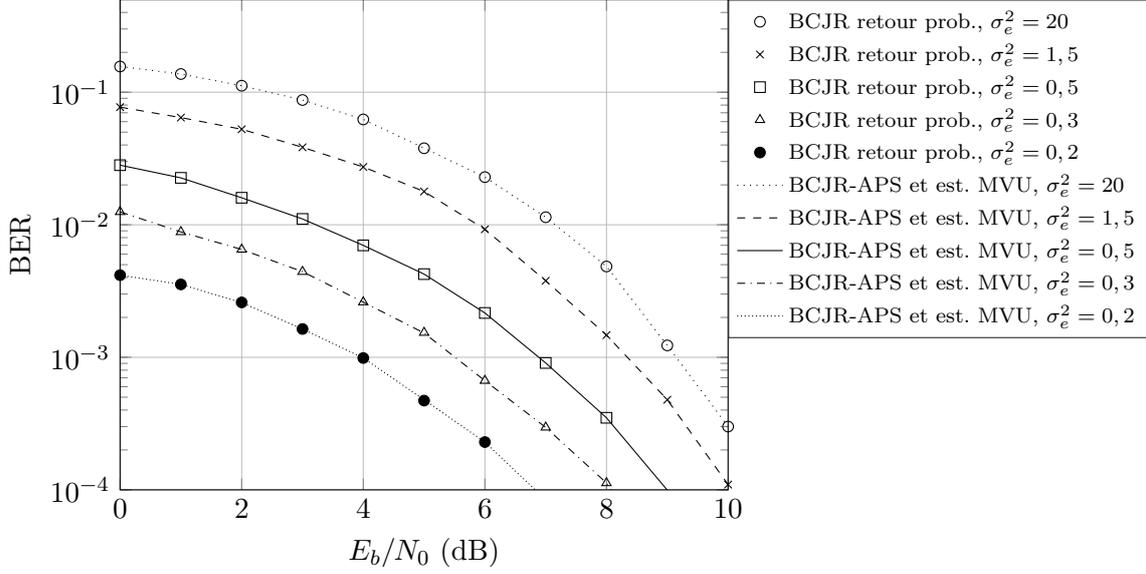


FIGURE 4.10 – Comparaison des performances de l'égaliseur BCJR-APS avec estimateur symbole MVU et l'égaliseur BCJR classique avec retour probabilités *a priori* en fonction de la variance du bruit d'estimation pour le canal FTN05.

teur EC est biaisé.

La deuxième partie de ce chapitre nous a permis d'évaluer les performances du récepteur BCJR-APS présenté dans la Section 3.1.2 du chapitre précédent. Dans cette partie, nous avons montré qu'en présence d'information *a priori* sous forme de symboles estimés, il est possible de calculer des probabilités symbole *a posteriori* de manière exacte en exploitant cette information dans l'étape linéaire précédant l'algorithme BCJR. Dans ce chapitre, nous avons montré par simulation que lorsque les symboles *a priori* sont obtenus avec l'estimateur MVU et que cette information respecte un modèle à bruit AWGN, l'égaliseur BCJR-APS est équivalent à l'architecture d'égalisation BCJR classique avec retour probabilités. D'autre part, une dégradation très importante des performances est obtenue en utilisant l'égaliseur BCJR-APS lorsque les symboles *a priori* sont obtenus en utilisant l'estimateur EC. Cette dégradation est d'autant plus importante que la variance du bruit de l'estimateur est grande, ou de façon équivalente, lorsque le nombre d'itérations du turbo égaliseur augmente.

Nous avons ensuite évalué les performances de l'égaliseur *channel shortening* en utilisant l'estimateur MVU et nous l'avons comparé aux méthodes de la littérature qui emploient l'estimateur symbole EC. La méthode analytique avec estimateur MVU proposée dans ces travaux de thèse est plus performante que les méthodes proposées dans la littérature car celles-ci ont besoin d'appliquer des contraintes supplémentaires sur la matrice de retour. Ces contraintes entraînent une dégradation conséquente des performances de l'égaliseur. D'autre part, elles imposent un calcul numérique des filtres *channel shortening*, ce qui entraîne une augmentation de la complexité du récepteur et la possible apparition des instabilités dans le calcul des filtres.

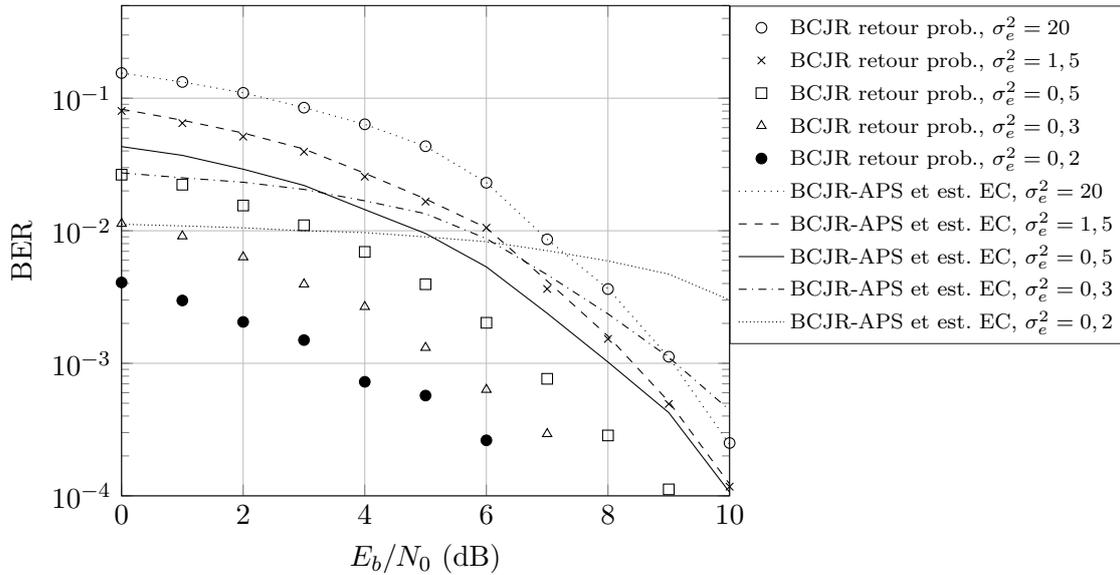


FIGURE 4.11 – Comparaison des performances de l'égaliseur BCJR-APS avec estimateur symbole EC et l'égaliseur BCJR classique avec retour probabilités *a priori* en fonction de la variance du bruit d'estimation pour le canal FTN05.

Une fois les performances de l'égaliseur *channel shortening* évaluées, et la pertinence de l'égaliseur analytique avec estimateur MVU confirmée, nous nous intéressons à la conception du turbo égaliseur complet incluant le codage correcteur d'erreurs. Le but de cette dernière partie est d'obtenir un système complet performant permettant d'approcher les taux d'information du FTN étudiés en début de ce manuscrit. Ainsi, l'optimisation du code LDPC est proposée dans le chapitre final de ce document.

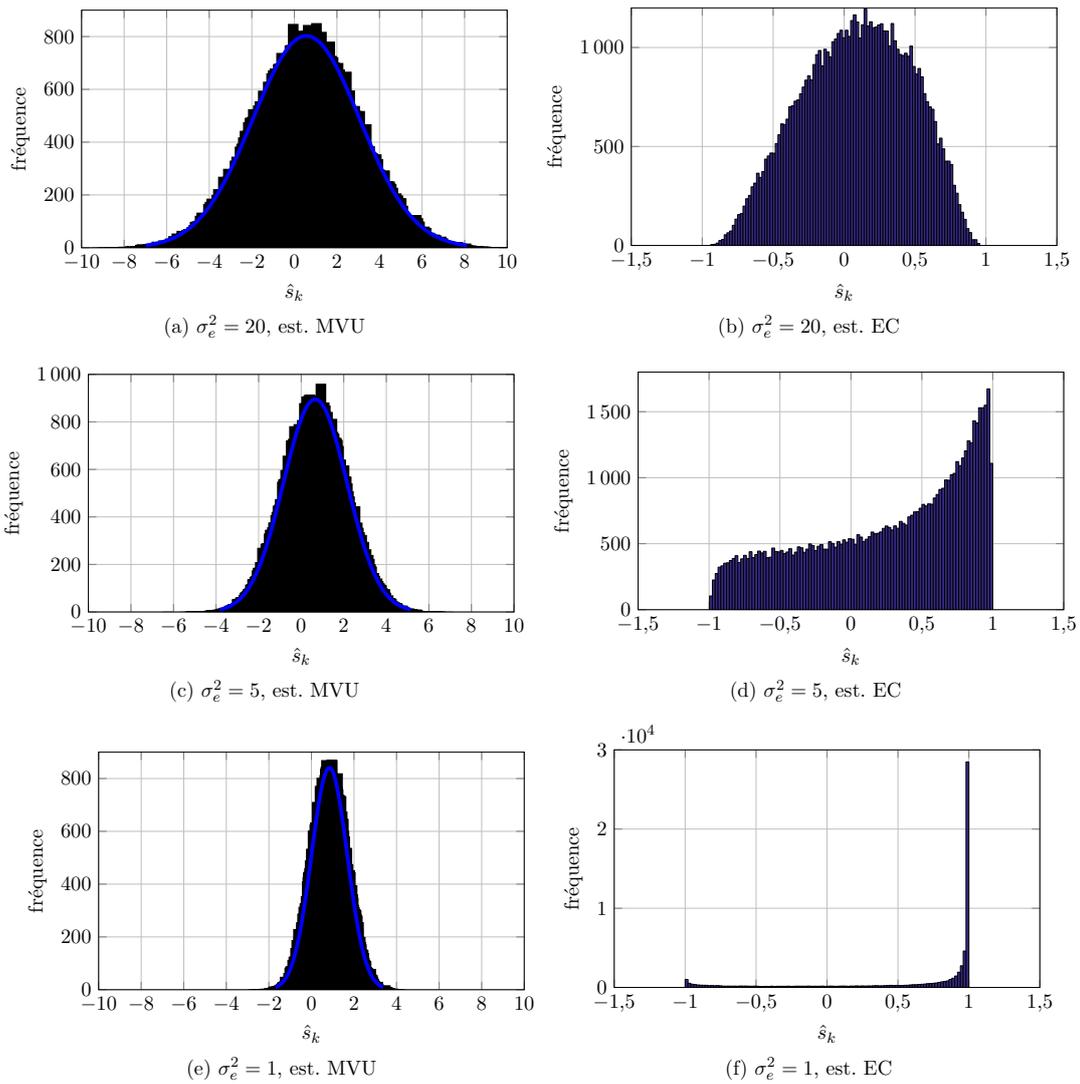


FIGURE 4.12 – Histogramme des symboles en sortie de l’estimateur en fonction de la variance du bruit d’estimation, alphabet 2-PAM.

Performances du récepteur *channel shortening* avec codage correcteur d'erreurs

Sommaire

5.1 Performances du système de transmission complet sur canal AWGN	82
5.1.1 Scénario et paramètres de simulation	82
5.1.2 Performances du système avec codage correcteur d'erreurs	82
5.2 Évaluation des performances du système en considérant une synchronisation imparfaite du récepteur	88
5.2.1 Performances en présence d'erreurs d'échantillonnage	88
5.3 Synthèse - Système de réception complet avec turbo égalisation	92

L'objectif de ce dernier chapitre, à visée applicative, est d'évaluer un système de transmission *faster-than*-Nyquist complet en ajoutant le dernier grand composant utilisé dans le cadre de la turbo égalisation : le codage correcteur d'erreurs. Comme expliqué en introduction de ce manuscrit, le codage correcteur d'erreurs et son exploitation conjointe avec l'égaliseur de canal sont nécessaires afin d'approcher les taux d'information du système avec une complexité raisonnable. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'évaluation des performances du système de transmission *faster-than*-Nyquist avec codage correcteur d'erreurs. En prenant comme référence le code LDPC-IRA du standard de diffusion par satellite DVB-S2, nous nous apercevons qu'une optimisation de la matrice de parité du code est nécessaire afin d'approcher les taux d'information dans le cadre des transmissions FTN. Ainsi, nous allons proposer des matrices de parité permettant une telle amélioration. L'objectif de cette partie est donc de montrer la pertinence du FTN lorsque le code correcteur d'erreurs est adapté aux méthodes d'égalisation utilisées.

Dans une deuxième partie de ce chapitre, nous souhaitons évaluer les performances du système dans un contexte plus réaliste. Ainsi, nous considérons une erreur de synchronisation sous la forme de décalage temporel dans l'étape d'échantillonnage. Le but est de comparer la robustesse du système FTN face à ce type d'erreur de synchronisation par rapport aux systèmes classiques transmettant à la cadence de Nyquist.

5.1 Performances du système de transmission complet sur canal AWGN

5.1.1 Scénario et paramètres de simulation

Les éléments suivants sont communs à tous les systèmes FTN dont nous évaluons les performances dans cette partie :

- alphabet de modulation QPSK ;
- égaliseur *channel shortening* sous forme analytique présenté dans le Chapitre 3. Les filtres maximisant l'information mutuelle généralisée sont obtenus à chaque itération du turbo égaliseur à l'aide des expressions données dans (3.10) et (3.12) ;
- estimateur MVU présenté dans le Chapitre 4. Les symboles sont estimés à chaque itération du turbo égaliseur à l'aide de la relation donnée dans (4.10).
- code correcteur d'erreurs de type LDPC-IRA jusqu'à 6 itérations internes par itération globale. La taille des blocs est fixée à $P = 64800$;

Dans le contexte de simulation décrit précédemment, nous allons évaluer l'impact sur les performances des paramètres ou éléments suivants :

- nous considérons les canaux FTN05, FTN07 et FTN09 décrits précédemment correspondant à des accélérations $\tau = 0,5$, $\tau = 0,7$ et $\tau = 0,9$ respectivement en utilisant des mises en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$. Les densités associées à ces systèmes sont $\rho = 1,67$, $\rho = 1,19$ et $\rho = 0,93$ respectivement. Le canal FTN05-bis correspondant à une accélération $\tau = 0,5$ et un roll-off $\alpha = 0,05$ ($\rho = 1,9$) est également considéré ;
- le nombre d'itérations globales du turbo égaliseur (nombre d'échanges entre l'égaliseur et le décodeur) peut varier entre 2 et 8 ;
- le paramètre ν , ayant un impact sur la complexité calculatoire de l'égaliseur, peut varier entre 2 et 4 ;
- Les rendements de codage $R = \{1/2, 3/5, 2/3, 3/4\}$ sont considérés.

5.1.2 Performances du système avec codage correcteur d'erreurs

Nous montrons dans la Figure 5.1 les performances du système de transmission FTN05. Nous considérons dans un premier temps les codes LDPC-IRA du standard DVB-S2 décrits dans le chapitre 1, nous prenons pour ces simulations quatre rendements de code différents. Les résultats ont été obtenus pour un *frame error rate* (FER) cible de 10^{-3} . Notons que cette valeur a été choisie afin d'alléger la charge calculatoire des simulations même si un FER cible de 10^{-5} aurait été plus représentatif des valeurs visées actuellement par les standards de diffusion par satellite. La ligne pointillée représente les taux d'information du système FTN, tel que calculé en début de ce manuscrit. Les résultats de performance sont représentés par des points sur la courbe. Nous associons à chaque point FTN une étiquette indiquant l'accélération et le rendement de codage considérés. Ces premiers résultats de performance

permettent de constater un écart de 1,35 dB et 1,2 dB pour des rendements $2/3$ et $3/4$ respectivement entre le système FTN proposé et les taux d'information de ce même système. De façon générale, l'écart de performance semble augmenter en même temps que le rendement de codage diminue. Nous constatons que le système avec un rendement de $3/5$ est très éloigné des taux d'information du système, à tel point qu'il atteint le FER visé pour des valeurs de E_b/N_0 plus élevées que le système avec rendement $2/3$. On peut conjecturer que cela est dû au fait que la matrice de parité du code utilisé dans ces simulations n'est pas adaptée à une transmission à interférence et particulièrement à celle introduite par le système FTN05 considéré dans ces simulations.

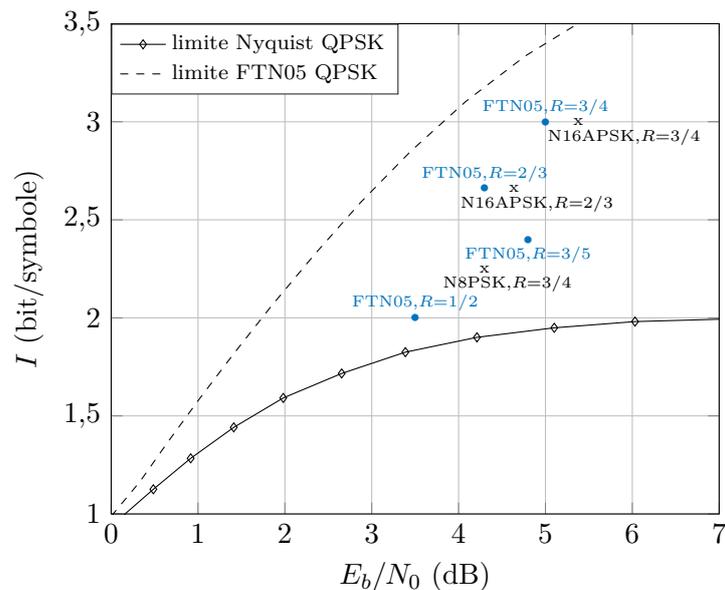


FIGURE 5.1 – Comparaison des taux d'information théoriques du système FTN05 et les taux atteignables en considérant un FER cible de 10^{-3} , en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2 et avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie). 8 itérations globales.

Ce phénomène a déjà été constaté dans beaucoup d'autres travaux de recherche. Dans la littérature, l'optimisation de la matrice de parité du code LDPC par des méthodes semi-analytiques basées sur les courbes EXIT ont été étudiées [30], [33]. Les auteurs dans [31] évaluent une modification des méthodes appelées *density evolution* permettant l'optimisation de la matrice de parité du code en présence d'ISI. On peut finalement citer [32] qui propose une optimisation empirique pour la matrice de parité du code IRA permettant une amélioration significative des performances dans le cadre des transmissions FTN. On constate en général que la matrice de parité du standard DVB-S2 n'est pas adaptée aux transmissions à interférence entre symboles puisqu'elle a des connexions de degré trop élevé. Les résultats de simulation montrent qu'il faut donc réduire cette valeur afin de diminuer le seuil de convergence du turbo égaliseur. Dans ces travaux de thèse, nous avons retenu la méthode empirique utilisée dans [32] pour optimiser la matrice de parité du code LDPC. Cette méthode consiste à générer des valeurs de *degree distribution* par un tirage aléatoire et à retenir celles qui permettent de minimiser le seuil de convergence du turbo égaliseur. Ce seuil peut être calculé en traçant des courbes EXIT ou en réalisant des simulations de BER. Pour les matrices de grande

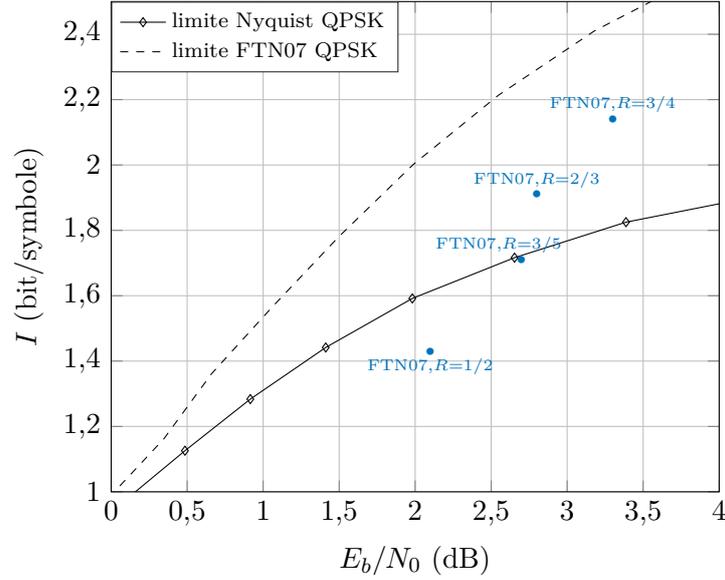


FIGURE 5.2 – Comparaison des taux d’information théoriques du système FTN07 et les taux atteignables en considérant un FER cible de 10^{-3} , en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2 et avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie). 8 itérations globales.

taille considérées ici, la performance du code (à algorithme de décodage fixé) est déterminée par le *degree distribution* tel qu’expliqué dans la Section 1.3.1. Ainsi, la matrice de parité est obtenue finalement par un simple tirage aléatoire déterminant la position des entrées non nulles de la matrice.

Le résultat de cette optimisation est illustré dans le Tableau 5.1. Nous montrons dans la Figure 5.4 des résultats de simulation du système FTN avec *channel shortening* en utilisant les matrices spécifiés dans ces travaux précédents. Nous constatons qu’une amélioration significative des performances est obtenue lorsque la matrice de parité du code correcteur d’erreurs est adaptée au canal comportant l’interférence. Le système avec ce nouveau code se situe maintenant approximativement à 0,6 dB des limites théoriques, tous rendements confondus. Nous pouvons également comparer ces résultats à ceux obtenus en considérant un système de transmission à la cadence de Nyquist. Concrètement, nous constatons que le système FTN présenté est 0,8 dB plus performant que le système de Nyquist à même efficacité spectrale avec constellation 16APSK et rendement 3/4 utilisé dans le standard DVB-S2. Le système est de 1 dB plus performant que le système de Nyquist lorsque le rendement de codage 2/3 est considéré. Notons que lorsque des valeurs de FER très faibles sont visées, des phénomènes tels que l’apparition d’un palier de probabilité d’erreur binaire sont à prendre en compte. Afin d’accroître la représentativité des résultats présentés ici pour un FER cible de 10^{-3} , l’absence de palier a été vérifié dans les ces premières simulations.

D’autre part, le nombre d’itérations effectués au niveau du turbo égaliseur aura un impact direct sur la complexité de décodage du récepteur ainsi que sur le débit effectif de la transmission car nous rappelons que le turbo égaliseur présenté ici n’est pas parallélisable. Le délai de décodage est donc proportionnel au nombre d’itérations choisi. Pour cette raison,

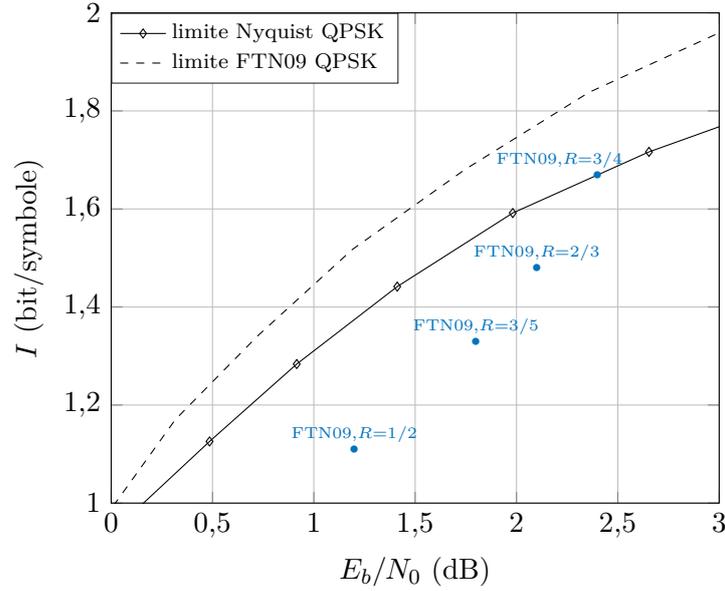


FIGURE 5.3 – Comparaison des taux d’information théoriques du système FTN09 et les taux atteignables en considérant un FER cible de 10^{-3} , en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2 et avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie). 8 itérations globales.

R	ρ_{45}	ρ_{31}	ρ_3	ρ_2	ρ_1
3/5	2527		36353	25919	1
2/3		1944	12960	49895	1
3/4		2673	4860	57266	1

Tableau 5.1 – *Bit degree distributions* optimisés pour transmission FTN avec channel shortening et $\alpha = 0, 2$.

nous souhaitons évaluer l’impact du nombre d’itérations sur la performance du système de manière à pouvoir optimiser ce paramètre d’un point de vue performance et complexité. Nous montrons dans la Figure 5.5 les performances du système FTN pour trois rendements de codage différents. Pour un même rendement (et par conséquent même efficacité spectrale), nous considérons 2, 4, 6 et 8 itérations du turbo égaliseur. Compte tenu de la dépendance constatée entre la performance du turbo égaliseur et le nombre d’itérations utilisé, il ne semble pas judicieux de choisir un nombre d’itérations supérieur à 8. Une perte de seulement 0,05 – 0,1 dB est obtenue en réduisant le nombre d’itérations à 6, et de 0,2 en réduisant le nombre d’échanges total entre l’égaliseur et le décodeur à 4. Notons que dans ces travaux de thèse le séquençement entre l’égaliseur et le décodeur, c’est-à-dire, le nombre d’itérations internes effectuées par le décodeur LDPC à chaque itération globale du turbo égaliseur, n’a pas été proprement optimisé. Toutefois, un compromis entre performance et complexité a été trouvé. Ainsi, nous avons constaté qu’un nombre élevé d’itérations LDPC n’est pas pertinent car cela entraîne des valeurs souples souvent erronées de la part du décodeur, en particulier lors des premières itérations où la séquence reçue contient beaucoup d’ISI. D’autre part, un nombre important d’itérations globales est nécessaire afin d’approcher les taux d’information, en par-

ticulier lorsque le nombre d'itérations internes du LDPC est bas. Cela implique que l'égaliseur channel shortening est utilisé un nombre important de fois. Ce dernier étant le facteur limitant concernant la complexité calculatoire du récepteur, le nombre d'itérations LDPC a été incrémenté afin de pouvoir réduire le nombre d'itérations globales du turbo égaliseur tout en restant proches des limites théoriques du système.

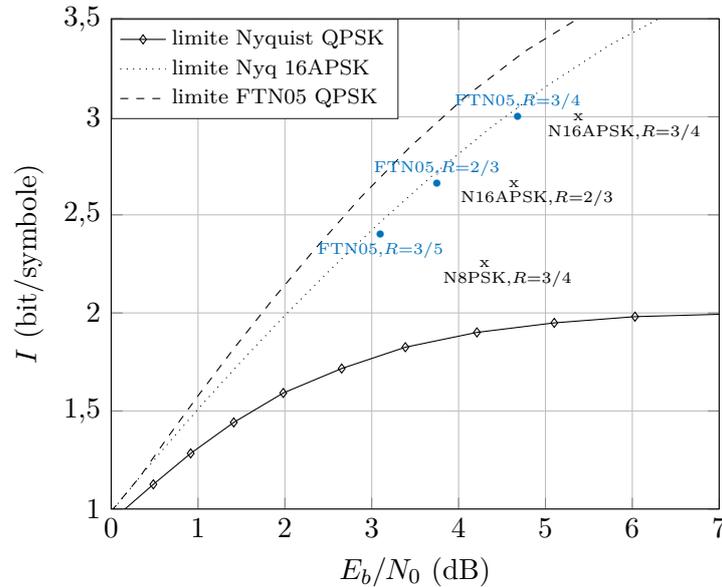


FIGURE 5.4 – Comparaison des taux d'information du système FTM05 en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie), 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2.

Nous souhaitons à présent évaluer l'impact de ν sur les performances du système. Rappelons que le choix de la longueur de contrainte du BCJR a un impact conséquent sur la complexité calculatoire du récepteur du fait de la dépendance exponentielle entre cette valeur et le nombre d'états utilisé lors du calcul des probabilités *a posteriori* approximatives. Nous montrons dans la Figure 5.6 les performances pour trois rendements de codage différents et pour différentes complexités du BCJR $\nu = \{2, 3, 4\}$. De même que pour le nombre d'itérations du turbo égaliseur, nous constatons que l'impact de ν sur les performances du système a un comportement logarithmique. Ce résultat est en phase avec ce qui a été montré dans les Chapitres 1, 2 et 4 de ce manuscrit. En effet, nous avons déjà constaté la pertinence du *channel shortening* dans ces précédents chapitres du fait de l'utilisation de filtres en SRRC dont l'énergie de la réponse impulsionnelle décroît rapidement avec le temps. En ce qui concerne les performances du système avec codage correcteur d'erreurs, nous constatons seulement une dégradation de 0,1 dB lorsque nous réduisons le nombre d'états du BCJR de 16 à 8, et une dégradation totale de 0,2 – 0,5 dB lorsque le nombre d'états est porté à seulement 4. De dernier scénario est toujours plus favorable qu'une transmission à la cadence de Nyquist en utilisant un alphabet de type 16APSK et rendements $R = \{3/4, 2/3\}$, pour lesquelles la dégradation obtenue est de 0,4 dB et 0,5 dB respectivement.

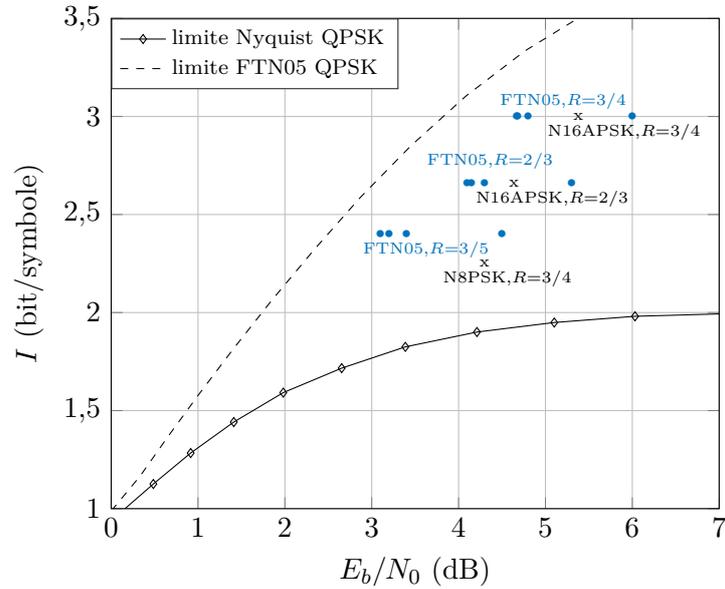


FIGURE 5.5 – Comparaison des taux d’information théoriques du système FTN05 et les taux atteignables en considérant un FER cible de 10^{-3} et en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie). Évaluation de l’impact du nombre d’itérations globales (2, 4, 6 et 8 de droite à gauche).

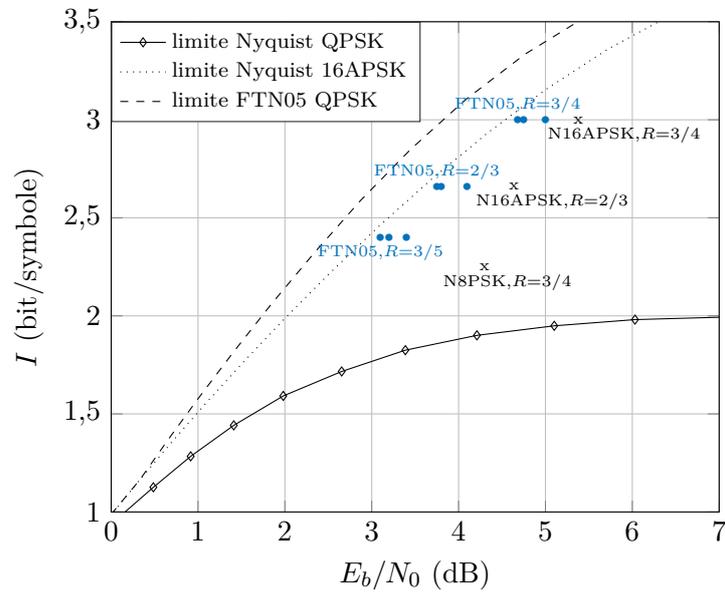


FIGURE 5.6 – Comparaison des taux d’information du système FTN05 en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2. Évaluation de l’impact de la taille du treillis de l’égaliseur BCJR ($\nu = \{2, 3, 4\}$ de droite à gauche).

R	ρ_{45}	ρ_{31}	ρ_3	ρ_2	ρ_1
3/5	1527		37353	25919	1
2/3	550	1344	12960	49895	1
3/4		3673	5860	55266	1

Tableau 5.2 – *Bit degree distributions* optimisés pour transmission FTN avec channel shortening et $\alpha = 0,05$.

Dans un système de Nyquist, une meilleure efficacité spectrale est obtenue notamment en augmentant la taille de l’alphabet de modulation, mais une deuxième possibilité consiste à diminuer l’excès de bande des filtres d’émission. Dans le cas particulier des filtres en SRRC utilisés dans cette thèse, cela se fait en diminuant le facteur de roll-off, α . Or, dans le cas d’une transmission FTN, une diminution du roll-off a un impact direct sur les performances (ou sur la complexité de décodage à performances égales) du système sur un canal AWGN car cette diminution génère une nouvelle réponse impulsionnelle discrète équivalente. Nous souhaitons évaluer l’impact que cette diminution a sur les performances du système tout en gardant une complexité de décodage raisonnable. Pour faire cela, un travail d’optimisation de la matrice de parité du code a été réalisé, même si des changements majeurs sur cette matrice n’ont pas été nécessaires dans le but d’obtenir des résultats satisfaisants pour des roll-offs plus faibles. Nous montrons dans la Figure 5.7 les résultats de performance du système FTN05-bis, construit avec une accélération $\tau = 0,5$ et en réduisant le roll-off à $\alpha = 0,05$. La matrice de parité utilisée est celle définie dans le Tableau 5.2. Le nombre d’états du BCJR est fixé à 16 ($\nu = 4$). Nous constatons dans cette figure une dégradation des performances par rapport aux résultats obtenus pour $\alpha = 0,2$. Cela est dû au fait que le nombre d’états du BCJR est maintenu alors que le système génère plus d’interférence à cause de la réduction du roll-off. Nous constatons encore une fois une diminution du nombre de connexions de degré élevé permet de réduire le seuil de convergence du turbo égaliseur. Or, le système permet d’obtenir seulement un gain de 0.3 dB par rapport au système de Nyquist pour les deux rendements de codage étudiés. Diminuer le roll-off a donc dégradé les performances du système avec égalisation *channel shortening*. Le nombre d’états du BCJR est dans ce cas vraisemblablement insuffisant pour approcher les taux d’information du système.

5.2 Évaluation des performances du système en considérant une synchronisation imparfaite du récepteur

5.2.1 Performances en présence d’erreurs d’échantillonnage

Au cours de ce manuscrit, nous avons supposé une synchronisation parfaite du récepteur concernant la fréquence, la phase et le rythme symbole. Nous avons également supposé une connaissance exacte du canal à ISI généré par une transmission au-delà de la cadence de Nyquist. Nous souhaitons évaluer dans cette partie tout d’abord la robustesse du récepteur en présence d’erreurs d’échantillonnage. Nous allons donc considérer que l’opération d’échan-

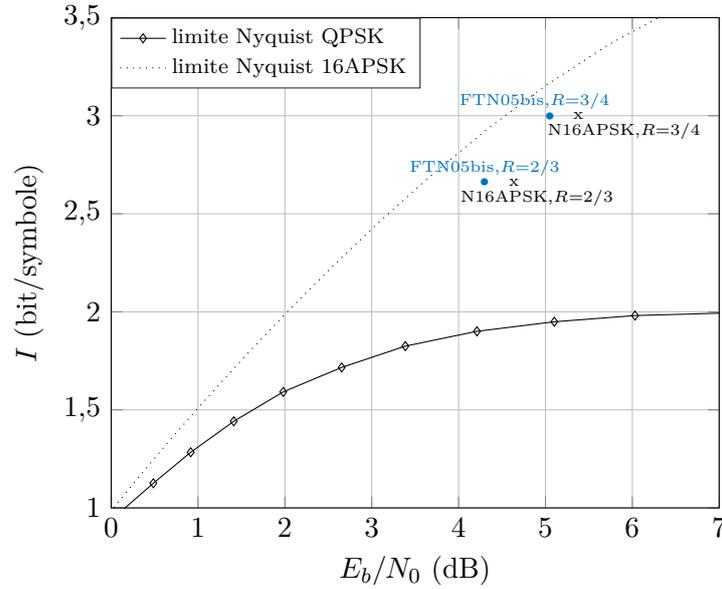


FIGURE 5.7 – Comparaison des taux d’information du système FTN05-bis construit avec $\alpha = 0,05$ en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie), 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2.

tillonnage s’effectue avec un décalage temporel pouvant supposer jusqu’à 10% de la période symbole. Pour cela, nous supposons le modèle de système avec sur échantillonnage de la Figure 5.8.

Nous montrons dans la Figure 5.9 les performances du système en présence d’une erreur fixe dans les instants d’échantillonnage de 5% et de 10% ainsi que pour un échantillonnage sans erreur. Nous constatons sur cette figure que le système FTN est beaucoup plus robuste à des erreurs d’échantillonnage que le système transmettant à la cadence de Nyquist. Nous observons une dégradation quasiment négligeable avec un rendement $R = 2/3$ lorsque l’erreur est de 5% et de seulement 0,1 dB lorsque l’erreur d’échantillonnage est portée à 10%. En contrepartie, le système avec même rendement transmettant à la cadence de Nyquist présente des dégradations de 0,3 dB et 1,6 dB pour ces deux erreurs d’échantillonnage, respectivement. Cette tendance est maintenue pour les deux autres rendements de codage, même si nous observons une dégradation plus importante des performances FTN avec un rendement $2/3$ (0,1 dB et 0,45 dB pour une erreur de 5% et de 10% respectivement). Dans tous les cas étudiés, le système FTN s’est montré significativement plus robuste à des erreurs de synchronisation que le système de Nyquist avec des alphabets de modulation 8PSK et 16APSK.

Nous souhaitons maintenant évaluer l’impact de ν sur la robustesse du récepteur *channel shortening* aux erreurs d’échantillonnage. Nous reproduisons dans la Figure 5.10 les simulations de la figure précédente en réduisant ν à 2 (BCJR à 4 états sur chaque voie). Hormis la dégradation relative de performance par rapport au cas $\nu = 4$, déjà observée dans des simulations précédentes, nous constatons qu’en présence d’erreurs d’échantillonnage les per-

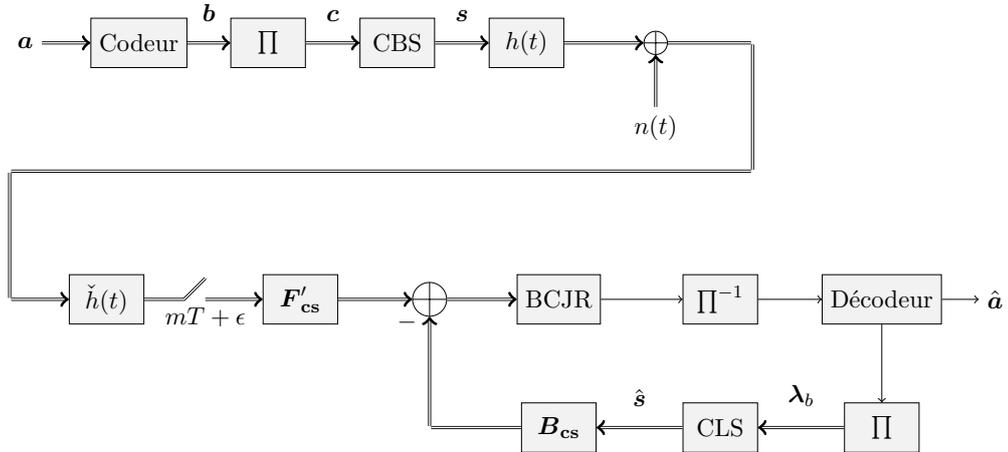


FIGURE 5.8 – Schéma bloc du système de communications complet sur canal AWGN.

formances sont dégradées d'approximativement les mêmes valeurs dans ce nouveau scénario de simulation à complexité réduite. Une réduction de la complexité du récepteur par le biais du nombre d'états de l'égaliseur *channel shortening* n'entraîne donc aucune préjudice du point de vue des dégradations en présence d'erreurs de synchronisation.

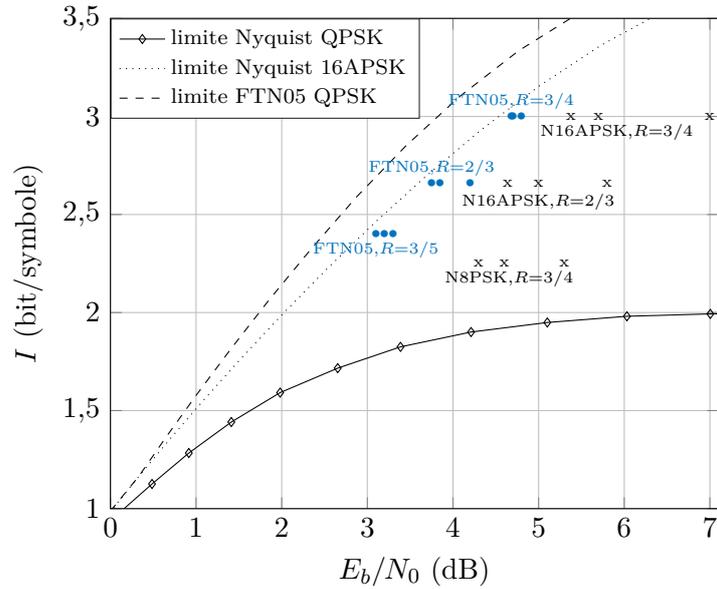


FIGURE 5.9 – Comparaison des taux d’information du système FTM05 en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 4$ (BCJR à 16 états sur chaque voie), 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2. Évaluation de l’impact d’une erreur fixe d’échantillonnage $\epsilon = \{0, 0,05T_s, 0, 1T_s\}$.

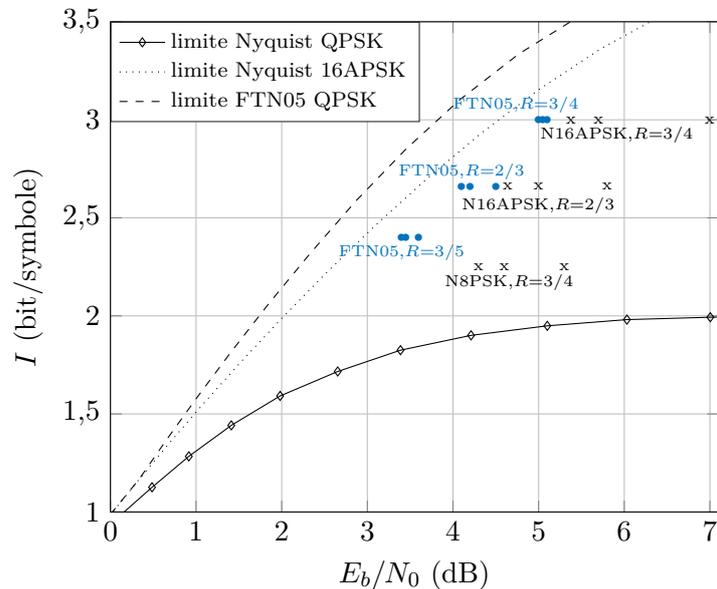


FIGURE 5.10 – Comparaison des taux d’information du système FTM05 en considérant un FER cible de 10^{-3} en utilisant la matrice de parité définie dans le Tableau 5.1 avec $\nu = 2$ (BCJR à 4 états sur chaque voie), 8 itérations globales et les taux du système de Nyquist en utilisant la matrice de parité du standard DVB-S2. Évaluation de l’impact d’une erreur fixe d’échantillonnage $\epsilon = \{0, 0,05T_s, 0, 1T_s\}$.

5.3 Synthèse - Système de réception complet avec turbo égalisation

Nous avons montré, dans ce chapitre à visée applicative, des résultats de performance du système FTN complet en considérant le récepteur *channel shortening* présenté dans les parties précédentes, dont l'égalisation est effectuée itérativement en utilisant un bloc de décodage correcteur d'erreurs. Concernant ce dernier élément, nous avons considéré des familles de code en bloc de type LDPC. Lors de cette dernière phase de l'étude, nous avons montré qu'il est possible d'obtenir un gain conséquent sur les performances du système en faisant un choix judicieux de la matrice de parité du code correcteur d'erreurs. Des techniques analytiques ou semi-analytiques permettant d'effectuer cette optimisation en fonction de paramètres principaux du système (accélération, roll-off) restent à étudier. Nous avons également étudié l'impact du nombre d'itérations globales et du nombre d'états du BCJR sur la performance du récepteur proposé. Les résultats de simulation montrent une dépendance de type logarithmique entre ces deux paramètres et la performance du récepteur. Le récepteur avec *channel shortening* présenté dans ces travaux de thèse offre de meilleures performances sur canal AWGN que les systèmes classiques à la cadence de Nyquist utilisant des alphabets de modulation de type 8PSK et 16APSK tout en gardant des valeurs de complexité raisonnables (alphabet de modulation QPSK, 4 itérations globales du turbo égaliseur et BCJR à 4 états sur les voies en phase et quadrature).

Dans une deuxième étape de ce chapitre, nous avons évalué la robustesse du système en considérant une synchronisation imparfaite du récepteur. Le système FTN avec turbo égalisation *channel shortening* s'est montré plus robuste à des erreurs d'échantillonnage que le système transmettant à la cadence de Nyquist.

Conclusion et perspectives

Mes travaux de thèse se sont focalisés sur la turbo égalisation de canaux à interférence entre symboles. Le travail décrit dans ce document est motivé par la grande complexité calculatoire des récepteurs minimisant la probabilité d'erreur binaire, dont le nombre d'opérations à effectuer augmente de façon exponentielle avec la longueur du canal et avec le nombre de bit par symbole. Nous nous sommes donc intéressés à l'étude de techniques sous optimales permettant une réduction de la complexité du récepteur. Une première étape de ces travaux de thèse nous a permis d'explorer les performances des techniques d'égalisation classiques sur des systèmes FTN monoporteuse aussi bien que multiporteuse. Ces premiers résultats ont montré l'importance d'étudier d'autres techniques permettant d'obtenir de bonnes performances tout en gardant une complexité raisonnable du point de vue du récepteur. À travers une analyse bibliographique du périmètre, nous avons identifié la technique dite *channel shortening* comme étant une alternative particulièrement adaptée aux canaux de type *faster-than-Nyquist* car elle permet d'obtenir un très bon compromis entre performance et complexité pour ces types de canaux à ISI si l'on se restreint à des petites constellations. Ainsi, nos contributions découlent des derniers travaux sur le *channel shortening* et visent à optimiser dans un premier temps les algorithmes employés en égalisation en considérant l'information mutuelle généralisée comme critère d'optimisation. Dans un deuxième temps, nous souhaitons étudier leurs performances dans le cadre de la turbo égalisation avec codage correcteur d'erreurs afin d'obtenir un récepteur complet approchant les limites théoriques du système de communications. Le schéma du récepteur avec turbo égalisation étudié lors de ces travaux de thèse est illustré dans la Figure 5.11.

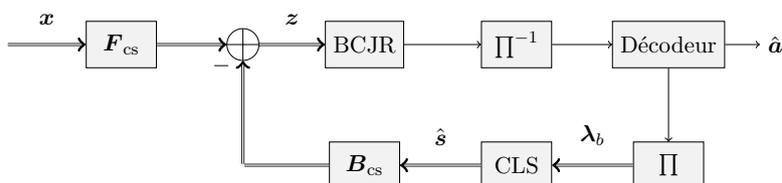


FIGURE 5.11 – Schéma bloc du récepteur *channel shortening* étudié.

Synthèse des résultats

Expression analytique du récepteur *channel shortening* en présence de symboles *a priori*

Dans la littérature récente, en présence de symboles *a priori*, les filtres *channel shortening* maximisant l'information mutuelle généralisée sont obtenus en utilisant des méthodes numériques. En particulier, des variantes de la méthode du gradient permettant une optimisation avec contrainte ont été utilisés. Dans ces travaux de thèse, nous avons proposé un calcul ana-

lytique pour l'ensemble de filtres de l'égaliseur *channel shortening*. Cette méthode permet une réduction conséquente de la complexité du turbo égaliseur car l'information *a priori* varie à chaque itération et les filtres doivent être recalculés en conséquence. Par rapport aux méthode d'optimisation numériques itératives, il est à noter que la solution analytique obtenue ne fait pas apparaître de problème de convergence ou de stabilité numérique.

D'autre part, nous avons proposé une architecture d'égalisation, appelé BCJR - *a priori* symbole (BCJR-APS), permettant un calcul exact des probabilités *a posteriori* dans le récepteur lorsque l'égaliseur dispose d'une information *a priori* sous forme de symboles au lieu de probabilités. Nous avons par ailleurs montré que l'égaliseur CS est une généralisation de l'égaliseur BCJR-APS, qui généralise à la fois l'égalisation BCJR classique sans information *a priori*.

Finalement, nous avons montré que l'égaliseur CS généralise l'égalisation linéaire MMSE à réponse impulsionnelle finie en présence d'information *a priori*. Ce résultat étend les travaux précédents sur le *channel shortening* qui avaient déjà montré une dépendance entre ces deux égaliseurs dans le cas particulier sans information *a priori*. Ces différentes configurations du récepteur *channel shortening* sont illustrées dans la Figure 5.12.

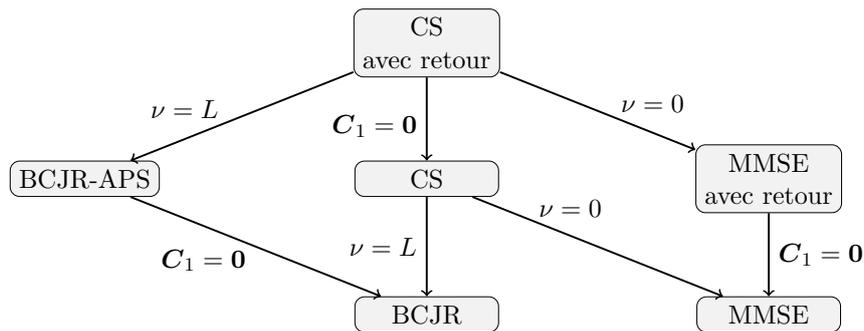


FIGURE 5.12 – Diagramme illustrant les différents cas particuliers du récepteur *channel shortening* proposé dans ces travaux de thèse.

Étude d'un estimateur symbole adapté au récepteur *channel shortening*

Dans la littérature sur la turbo égalisation linéaire de canaux à interférence entre symboles, les symboles *a priori* considérés en entrée de l'égaliseur sont calculés à partir des probabilités du décodeur en utilisant un estimateur minimisant l'erreur quadratique moyenne [23], [24], [100], [101]. Les travaux précédents sur le *channel shortening* dans un contexte turbo ont proposé l'utilisation de ce même estimateur afin d'obtenir les symboles *a priori* utilisés par l'égaliseur [29]. Or, il a été constaté que des contraintes supplémentaires devait être appliquées sur l'expression de l'un des traitements linéaires de l'égaliseur afin d'éviter des instabilités et d'obtenir des performances satisfaisantes. En particulier, les travaux précédents sur le *channel shortening* ont appliqué des transformations sur l'étape linéaire de l'égaliseur permettant d'effectuer une suppression d'interférence [29].

Nous avons montré lors de ces travaux de thèse qu'en considérant un modèle à bruit additif blanc Gaussien pour les LLR en sortie du décodeur, l'utilisation de l'estimateur non-biaisé à variance minimale (MVU) permet d'obtenir des performances satisfaisantes dans le cadre de l'architecture d'égalisation *channel shortening*. Concrètement, cet estimateur permet d'éviter les contraintes imposées par les travaux précédents afin de réaliser une suppression d'interférence [29] et rend possible l'utilisation de l'égaliseur *channel shortening* obtenu de façon analytique lors de ces travaux de thèse. Nous avons également montré qu'en présence de probabilités *a priori*, l'égaliseur BCJR-APS avec estimateur symbole MVU et l'égaliseur BCJR classique sont équivalents du point de vue des performances. Cette nouvelle architecture d'égaliseur permet donc un calcul exact des probabilités *a posteriori*.

Enfin, nous avons évalué les performances de l'égaliseur *channel shortening* en utilisant l'estimateur MVU. Nous avons constaté que cette approche offre de bien meilleures performances que les méthodes de la littérature qui reposent sur l'optimisation numérique avec contrainte du récepteur et sur l'utilisation de l'estimateur symbole classique minimisant l'erreur quadratique moyenne.

Évaluation de performances du turbo égaliseur *channel shortening* avec codage correcteur d'erreurs

Dans une dernière partie de ce manuscrit à visée applicative, nous avons montré des résultats de performance du système FTN complet en considérant le récepteur *channel shortening* présenté dans les parties précédentes, dont l'égalisation est effectuée itérativement en utilisant un bloc de décodage correcteur d'erreurs. Concernant ce dernier élément, nous avons considéré des familles de code en bloc de type LDPC-IRA. Lors de cette dernière phase de l'étude, nous avons montré qu'il est possible d'obtenir un gain conséquent sur les performances du système en modifiant la matrice de parité du code correcteur d'erreurs. L'optimisation du code correcteur d'erreurs a permis de situer le turbo égaliseur *channel shortening* à 0,6 dB des limites théoriques pour un facteur d'accélération $\tau = 0,5$ et un roll-off 0,2, pour différents rendements de codage. Nous avons également comparé les performances du système FTN et un système à la cadence de Nyquist avec alphabet 16APSK ayant la même efficacité spectrale. Nous avons constaté un gain 0,8 dB entre le système FTN avec *channel shortening* et le système de Nyquist pour un rendement de codage $R = 3/4$. L'écart est de 1 dB pour les systèmes avec un rendement de $R = 2/3$. Nous avons également observé qu'il existe une dépendance de type logarithmique entre le nombre d'itérations globales du turbo égaliseur et la performance du turbo égaliseur. Ainsi, une perte de seulement 0,05 – 0,1 dB est obtenue en réduisant le nombre d'itérations de 8 à 6, et de 0,2 en réduisant le nombre d'échanges total entre l'égaliseur et le décodeur à 4. Un comportement similaire est constaté concernant ν . Rappelons que le nombre d'états du BCJR augmente de façon exponentielle avec ce paramètre du récepteur *channel shortening*. Nous avons observé une dégradation de seulement 0,1 dB lorsque le nombre d'états du BCJR est réduit de 16 à 8, et une dégradation totale de 0,2 – 0,5 dB lorsque le nombre d'états est porté à seulement 4. De dernier scénario est toujours plus favorable qu'une transmission à la cadence de Nyquist en utilisant un alphabet de type 16APSK et rendements $R = \{3/4, 2/3\}$, pour lesquelles la dégradation obtenue est

de 0,4 dB et 0,5 dB respectivement. Le récepteur avec *channel shortening* présenté dans ces travaux de thèse offre donc de meilleures performances sur canal AWGN que les systèmes classiques à la cadence de Nyquist utilisant des alphabets de modulation de type 16APSK tout en gardant des valeurs de complexité raisonnables (alphabet de modulation QPSK, 4 itérations globales du turbo égaliseur et BCJR à 4 états sur les voies en phase et quadrature).

Une deuxième étape a consisté à évaluer la performance du système en considérant une synchronisation imparfaite du récepteur. Le système FTN avec turbo égalisation *channel shortening* s'est montré plus robuste à des erreurs d'échantillonnage que son homologue transmettant à la cadence de Nyquist. Ainsi, nous avons observé une dégradation quasiment négligeable pour le système FTN avec un rendement $R = 2/3$ lorsque l'erreur était de 5% du temps symbole par rapport au même système FTN avec échantillonnage parfait. L'erreur observé a été de seulement 0,1 dB lorsque l'erreur d'échantillonnage a été portée à 10%. En contrepartie, le système avec même rendement transmettant à la cadence de Nyquist a présenté des dégradations de 0,3 dB et 1,6 dB respectivement par rapport au scénario avec échantillonnage idéal. Nous avons constaté cette même tendance lorsque d'autres rendements de codage ont été considérés. Dans tous les cas étudiés, le système FTN s'est montré significativement plus robuste à des erreurs de synchronisation que le système de Nyquist utilisant des alphabets de modulation 8PSK et 16APSK.

Perspectives

Étude de nouveaux schémas de turbo égalisation

Les techniques d'égalisation comportant un algorithme de type BCJR sont contraintes à l'utilisation d'alphabets de modulation de petite taille car le nombre d'états de l'algorithme augmente de façon exponentielle avec le nombre de bit par symbole. Néanmoins, une perspective avérée pour ces travaux de thèse est l'étude d'un estimateur symbole pour des alphabets autres que BPSK et QPSK dans le cadre de l'égalisation *channel shortening* étudiée dans ces travaux de thèse.

Dans ces travaux de thèse et dans la littérature récente, l'égaliseur *channel shortening* comporte l'utilisation d'un algorithme BCJR avec un nombre d'états limité par un paramètre de dimensionnement du treillis. Or, cette approche garde la même classe de complexité que la méthode optimale car le nombre d'états augmente de façon exponentielle avec la mémoire prise en compte par l'algorithme. Toujours dans le cadre de l'égalisation *channel shortening*, l'algorithme BCJR pourrait être remplacé par d'autres méthodes ayant une dépendance linéaire entre le nombre d'opérations et la mémoire. Les méthodes étudiées dans [20], [64] ou des variations de ces méthodes pourraient être exploitées dans le cadre du *channel shortening*.

D'autre part, il serait intéressant d'évaluer les performances de l'égaliseur *channel shortening* proposé dans ces travaux de thèse sur des systèmes à mémoire autres que le FTN. Par exemple, le décodage optimal des modulations à phase continue (CPM) s'effectue sou-

vent en utilisant les algorithmes de Viterbi ou BCJR, dont la complexité augmente de façon exponentielle avec la mémoire du système. Des approches sous-optimales basées sur l'égaliseur *channel shortening* pourraient être étudiées. En présence de codage de canal, le turbo égaliseur complet proposé dans cette thèse pourrait être également envisagé.

Tout au long du dernier chapitre, nous avons considéré un codage de canal basé sur les codes LDPC-IRA. Ce choix a été fait car ces familles de codes permettent d'approcher les limites théoriques sur canal AWGN avec une complexité raisonnable, ce qui leur a permis d'être présents dans les derniers standards de communications. Or, d'autres familles de codes itératifs ayant montré de très bonnes performances, tels que les turbo codes [89], pourraient être envisagées. Les codes polaires [84], émergents dans ces dernières années, pourraient également être considérés afin de réduire la complexité calculatoire du récepteur.

Synchronisation des signaux FTN

Les travaux de thèse présentés dans ce document ont été focalisés sur l'étude de méthodes efficaces de décodage du message émis, en considérant une synchronisation parfaite du signal reçu (rythme symbole, phase et fréquence). Dans le cinquième chapitre, des erreurs d'échantillonnage ont été évaluées. Or, l'étape de synchronisation reste un sujet de recherche ouvert pour les signaux de type FTN. Des travaux connexes au sujet principal de la thèse ont déjà montré que, dans le cadre des transmissions FTN, le rythme symbole peut être estimé de manière aveugle en exploitant les propriétés de cyclostationnarité du signal reçu, à condition d'utiliser des statistiques d'ordres supérieurs [52]. Néanmoins, les algorithmes proposés ont une complexité calculatoire importante, et ce d'autant plus que la densité de la transmission augmente. D'autre part, un algorithme non-aidé par les données permettant la synchronisation temporelle des signaux FTN a été proposé dans [105] pour les modulations d'ordre supérieur. Dans le cadre des transmissions FTN sur fréquence porteuse, quelques premiers travaux de recherche ont proposé des algorithmes permettant d'estimer l'erreur de fréquence en réception [106]. D'autres techniques non-aidées par les données ainsi que des techniques aidées par les données pourraient être étudiées afin d'estimer les erreurs de synchronisation temporelle, en fréquence et phase des signaux FTN.

Modèle discret équivalent

A.1 Factorisation de G

La réponse impulsionnelle du système est obtenue après filtrage adapté et s'écrit

$$g(t) = (h * \check{h})(t). \quad (\text{A.1})$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre d'émission, considérée réelle, symétrique et à support fréquentiel $[-B/2; B/2]$ avec $B = (1 + \alpha)R_s$. Nous considérons par ailleurs que le filtres en émission et en réception sont SRRC. La réponse impulsionnelle discrète du système est obtenue en réalisant une opération d'échantillonnage à la période symbole

$$g_m \triangleq g(mT) = (h * \check{h})(mT). \quad (\text{A.2})$$

Nous considérons que $g(t)$ est une réponse symétrique dont l'énergie décroît avec le temps et nous retenons les $2L + 1$ coefficients les plus énergétiques $[g_{-L}, \dots, g_0, \dots, g_L]$ où nous supposons que L est une valeur paire. La matrice du système est construite à partir des échantillons précédents et a une structure Toeplitz bande de taille $N \times N$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & g_{-1} & \dots & g_{-L} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & \dots & g_{-L} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_L & g_{L-1} & \dots & \dots & \dots & g_{-L} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g_L & g_{L-1} & \dots & \dots & \dots & g_{-L} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & g_L & \dots & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Nous souhaitons obtenir la factorisation

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^H \mathbf{H} \quad (\text{A.4})$$

avec \mathbf{H} une matrice Toeplitz bande. En prévision que cette factorisation ne puisse pas être réalisée de manière exacte, nous posons

$$\mathbf{G}' = \mathbf{H}^H \mathbf{H} \quad (\text{A.5})$$

où \mathbf{G}' est la matrice résultante d'une factorisation approchée. L'existence de (A.4) est à étudier selon deux cas détaillés ci-dessous

Densité du système supérieure à 1

Si $\rho > 1$, ce qui est le cas dans la plupart des canaux FTN considérés lors de ces travaux de thèse, alors la factorisation (A.4) peut être réalisée directement à temps discret puisque l'impulsion est échantillonnée à une fréquence supérieure à la bande [55] :

$$g_m = (h * \check{h})(mT) = \sum_l h(lT)\check{h}((m-l)T). \quad (\text{A.6})$$

La matrice \mathbf{H} est construite à partir des échantillons $h(lT)$ et a une structure Toeplitz bande de taille $N \times N$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_{-1} & \dots & h_{-L/2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & \dots & \dots & h_{-L/2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L/2} & h_{L/2-1} & \dots & \dots & \dots & h_{-L/2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_{L/2} & h_{L/2-1} & \dots & \dots & \dots & h_{-L/2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & h_{L/2} & \dots & \dots & h_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

La factorisation (A.4) est exacte en utilisant cette méthode si L (et par conséquent N) sont suffisamment grands. La factorisation approchée de trois canaux FTN utilisés dans cette thèse avec $\rho > 1$ est illustrée dans les Figures A.1, A.2 et A.3 respectivement.

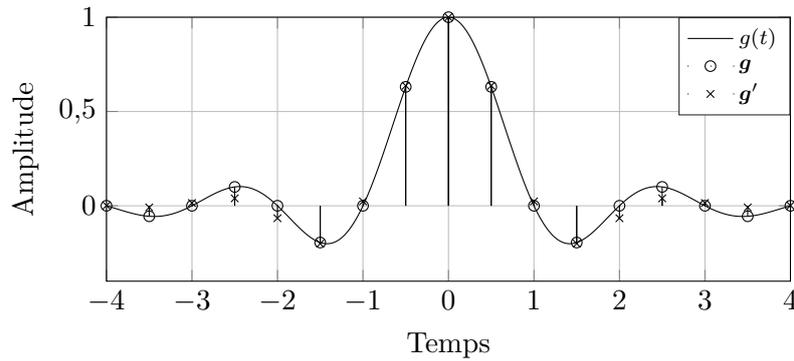


FIGURE A.1 – Factorisation de la réponse impulsionnelle discrète pour le canal FTN05, composé d’une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ où la notation ‘05’ indique une accélération $\tau = 0,5$ avec $\rho = 1,67$ et $L = 8$.

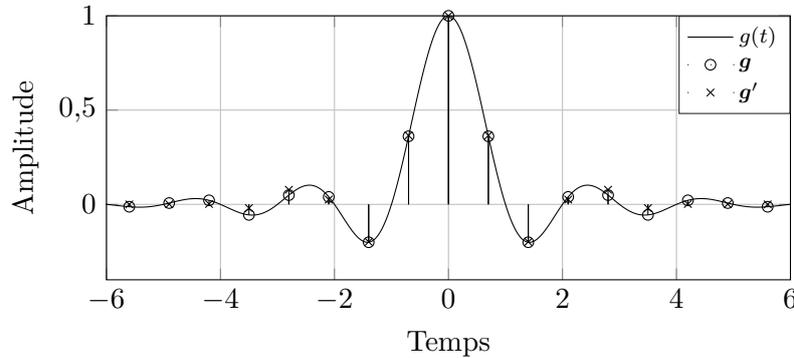


FIGURE A.2 – Factorisation de la réponse impulsionnelle discrète pour le canal FTN07, composé d’une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ et accélération $\tau = 0,7$ avec $\rho = 1,19$ et $L = 8$.

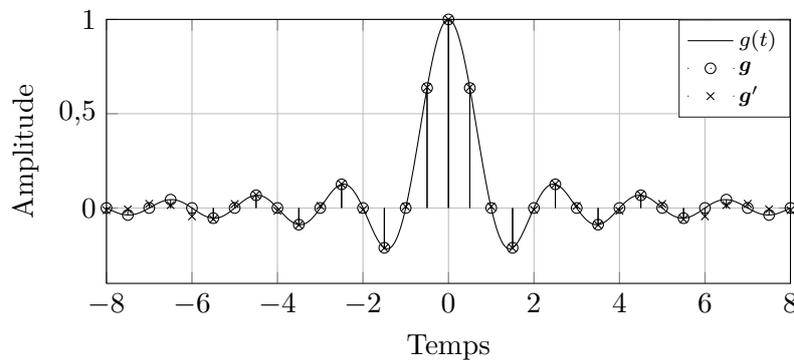


FIGURE A.3 – Factorisation de la réponse impulsionnelle discrète pour le canal FTN05-bis, composé d’une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,05$ et accélération $\tau = 0,5$ avec $\rho = 1,9$ et $L = 20$.

Densité du système inférieure ou égale à 1

Dans le scénario $\rho \leq 1$, le rythme d'échantillonnage est inférieur à la bande occupée par $g(t)$. Ainsi, il n'est pas possible de reconstruire $g(mT)$ à partir des échantillons $h(mT)$. En revanche, une factorisation spectrale peut être réalisée. Nous considérons la méthode détaillée dans [107] et résumée ci-dessous. Nous souhaitons calculer une factorisation de g'_m sous la forme

$$g_m = \sum_{l=-L/2}^{L/2} v(l)v(m-l) \quad (\text{A.8})$$

ou de façon équivalente

$$G(z) = \sum_{m=0}^{2L} g_m z^{-m} = V(z)V(1/z). \quad (\text{A.9})$$

Pour que la factorisation (A.8)-(A.9) existe, la séquence g_m doit respecter plusieurs conditions :

- Si z_0 est un zéro du polynôme (A.9), alors $1/z_0$ doit être également un zéro de ce polynôme.
- La transformée de Fourier $G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\}(f)$ ne peut pas prendre de valeurs négatives. Cette condition est également toujours respectée car $G(f) = |H(f)|^2$.
- Tous les zéros de $G(z)$ situés sur le cercle unité doivent avoir une multiplicité paire.

Ces conditions sont en pratique respectées lorsque $\rho < 1$. Dans ce cas, la factorisation peut être réalisée en calculant les zéros de $G(z)$ et en regroupant, par exemple, tous les zéros qui sont dans le cercle unité et la moitié des zéros qui sont sur le cercle unité dans $H(z)$ et en regroupant le reste des zéros dans $H(1/z)$. Cette construction permet d'avoir $H(z)$ à phase minimale et $H(1/z)$ à phase maximale. La factorisation spectrale d'un canal FTN utilisé dans cette thèse avec $\rho < 1$ est illustrée dans la Figure A.4.

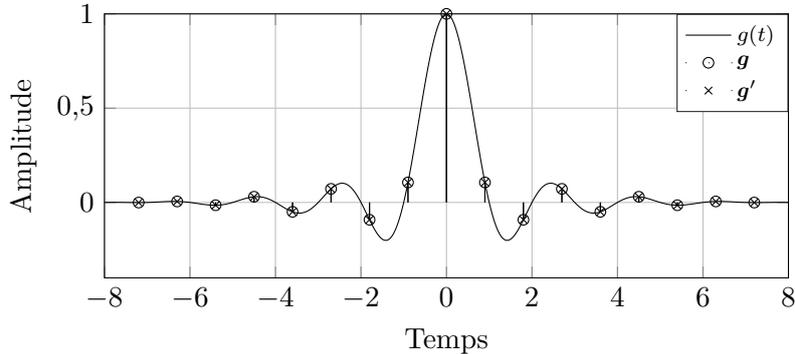


FIGURE A.4 – Factorisation de la réponse impulsionnelle discrète pour le canal FTN09, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ et accélération $\tau = 0,9$ avec $\rho = 0,93$ et $L = 8$.

A.2 Réponse impulsionnelle du canal discret équivalent

Au long du manuscrit, cinq canaux discrets différents seront considérés lors des simulations et sont définis ci-dessous

- canal EPR4 [25] avec $L = 3$

$$\mathbf{h} = [0, 5, 0, 5, -0, 5, -0, 5]^T. \quad (\text{A.10})$$

- système FTN05, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ où la notation '05' indique une accélération $\tau = 0,5$ avec $\rho = 1,67$ et $L = 8$

$$\mathbf{h} = [0,0331 \quad -0,1314 \quad -0,0374 \quad 0,4460 \quad 0,7501 \quad 0,4460 \quad -0,0374 \\ -0,1314 \quad 0,0331]^T. \quad (\text{A.11})$$

- système FTN05-bis, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,05$ et accélération $\tau = 0,5$ avec $\rho = 1,9$ et $L = 20$

$$\mathbf{h} = [-0,0091 \quad 0,0465 \quad 0,0093 \quad -0,0617 \quad -0,0095 \quad 0,0883 \quad 0,0096 \\ -0,1495 \quad -0,0097 \quad 0,4518 \quad 0,7201 \quad 0,4518 \quad -0,0097 \quad -0,1495 \\ 0,0096 \quad 0,0883 \quad -0,0095 \quad -0,0617 \quad 0,0093 \quad 0,0465 \quad -0,0091]^T. \quad (\text{A.12})$$

- système FTN07, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ et accélération $\tau = 0,7$ avec $\rho = 1,19$ et $L = 8$

$$\mathbf{h} = [0,0064 \quad 0,0662 \quad -0,1738 \quad 0,2730 \quad 0,8841 \quad 0,2730 \quad -0,1738 \\ 0,0662 \quad 0,0064]^T. \quad (\text{A.13})$$

- système FTN09, composé d'une mise en forme SRRC avec roll-off $\alpha = 0,2$ et accélération $\tau = 0,9$ avec $\rho = 0,93$ et $L = 8$

$$\mathbf{h} = [0,9758 \quad 0,1450 \quad -0,1187 \quad 0,0883 \quad -0,0587 \quad 0,0339 \quad -0,0161 \\ 0,0055 \quad -0,0007]^T. \quad (\text{A.14})$$

Bibliographie

- [1] J. E. MAZO, « Faster-than-Nyquist signaling », *Bell System Technical Journal*, t. 54, n° 8, p. 1451–1462, 1975 (cf. p. 1, 7, 11).
- [2] F. RUSEK et J. B. ANDERSON, « Constrained capacities for faster-than-Nyquist signaling », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 55, p. 764–775, 2009 (cf. p. 1, 7, 12–14).
- [3] G. CAIRE, G. TARICCO et E. BIGLIERI, « Bit-interleaved coded modulation », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 44, n° 3, p. 927–946, 1998 (cf. p. 1, 17).
- [4] J. A. LUCCIARDI, N. THOMAS, M. L. BOUCHERET, C. POUILLIAT et G. MESNAGER, « Trade-off between spectral efficiency increase and PAPR reduction when using FTN signaling : impact of non linearities », in *2016 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, 2016, p. 1–7 (cf. p. 1, 12).
- [5] A. H. AGHVAMI et I. D. ROBERTSON, « Power limitation and high-power amplifier nonlinearities in on-board satellite communications systems », *Electronics Communication Engineering Journal*, t. 5, n° 2, p. 65–70, 1993 (cf. p. 1, 13).
- [6] J. B. ANDERSON et A. PRLJA, « Turbo equalization and an m-bcjr algorithm for strongly narrowband intersymbol interference », in *2010 International Symposium On Information Theory Its Applications*, 2010, p. 261–266 (cf. p. 1, 12).
- [7] A. PRLJA et J. ANDERSON, « Reduced-complexity receivers for strongly narrowband intersymbol interference introduced by faster-than-Nyquist signaling », *Communications, IEEE Transactions on*, t. 60, n° 9, p. 2591–2601, 2012 (cf. p. 1, 12).
- [8] F. RUSEK et J. B. ANDERSON, « The two dimensional mazo limit », in *Proceedings. International Symposium on Information Theory, 2005. ISIT 2005.*, 2005, p. 970–974 (cf. p. 1, 12).
- [9] D. DASALUKUNTE, F. RUSEK et V. OWALL, « An iterative decoder for multicarrier faster-than-Nyquist signaling systems' », in *IEEE International Communication Conference*, 2010 (cf. p. 2, 12).
- [10] F. SCHAICH et T. WILD, « A reduced complexity receiver for multi-carrier faster-than-Nyquist signaling », in *Proc. IEEE GLOBECOM 2013 Workshop-Broadband Wireless Access*, 2013 (cf. p. 2, 12).
- [11] C. ZHU, B. CORCORAN, M. MORSHED, L. ZHUANG et A. J. LOWERY, « Faster-than-Nyquist DFT-S-OFDM using overlapping sub-bands and duobinary filtering », in *2015 Optical Fiber Communications Conference and Exhibition (OFC)*, 2015, p. 1–3 (cf. p. 2).
- [12] Y. ZHU, M. JIANG, Z. CHEN et F. ZHANG, « Terabit faster-than-Nyquist PDM 16-QAM WDM transmission with a net spectral efficiency of 7.96 b/s/hz », *Journal of Lightwave Technology*, t. 36, n° 14, p. 2912–2919, 2018 (cf. p. 2).

- [13] B. BEIDAS, R. SESHADRI, M. EROZ et L. LEE, *System and method for pre-distortion and iterative compensation for nonlinear distortion in system employing FTN symbol transmission rates*, Hughes Network SYstems, Llc, US Patent 9,203,450, 2015 (cf. p. 2).
- [14] —, *Optimized receivers for faster than Nyquist (FTN) transmission rates in high spectral efficiency satellite systems*, Hughes Network Systems, Llc, US Patent 9,246,717, 2016 (cf. p. 2).
- [15] D. WAJECER et U. BEITLER, *High-performance faster-than-Nyquist (FTN) signaling schemes*, Novelsat Ltd, US Patent App. 13/060,060, 2011 (cf. p. 2).
- [16] J. ABDOLI et M. JIA, *System and method for faster-than-Nyquist transmission*, Huawei Technologies Co., Ltd, US Patent 9,571,232, 2017 (cf. p. 2).
- [17] A. GATTAMI et E. RINGH, *Pre-coding in a faster-than-Nyquist transmission system*, Telefonaktiebolaget Lm Ericsson, US Patent App. 15/101,047, 2016 (cf. p. 2).
- [18] G. COLAVOLPE et A. BARBIERI, « On MAP symbol detection for ISI channels using the Ungerboeck observation model », *IEEE Communications Letters*, t. 9, n° 8, p. 720–722, 2005 (cf. p. 2, 17, 18).
- [19] V. FRANZ et J. B. ANDERSON, « Concatenated decoding with a reduced-search BCJR algorithm », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, t. 16, n° 2, p. 186–195, 1998 (cf. p. 2, 19).
- [20] G. COLAVOLPE, D. FERTONANI et A. PIEMONTESE, « SISO detection over linear channels with linear complexity in the number of interferers », *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, t. 5, n° 8, p. 1475–1485, 2011 (cf. p. 2, 19, 96).
- [21] Y. QI et T. MINKA, « Expectation propagation for signal detection in flat-fading channels », in *IEEE International Symposium on Information Theory, 2003. Proceedings.*, 2003, p. 358–358 (cf. p. 2, 19).
- [22] C. LAOT et U. de RENNES, *Égalisation Autodidacte Et Turbo-égalisation : Application Aux Canaux Sélectifs en Fréquence*. Université de Rennes, 1997 (cf. p. 2).
- [23] C. LAOT, R. LE BIDAN et D. LEROUX, « Low-complexity MMSE turbo equalization : a possible solution for EDGE », *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, t. 4, n° 3, p. 965–974, 2005 (cf. p. 2, 28, 49, 52, 66, 67, 94).
- [24] M. TÜCHLER, A. C. SINGER et R. KOETTER, « Minimum mean squared error equalization using a priori information », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 50, n° 3, p. 673–683, 2002 (cf. p. 2, 27, 31, 52, 56, 67, 94).
- [25] F. RUSEK et A. PRLJA, « Optimal channel shortening for MIMO and ISI channels », *IEEE Transactions on Wireless Communications*, t. 11, p. 810–818, 2012 (cf. p. 2, 13, 20, 30–34, 36, 55, 59, 103).
- [26] F. RUSEK, N. AL-DHAHIR et A. GOMAA, « A rate-maximizing channel-shortening detector with soft feedback side information », in *2012 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, 2012, p. 2256–2261 (cf. p. 2, 13, 30–32, 37, 39, 43, 73).
- [27] A. PRLJA, « Reduced receivers for faster-than-Nyquist signaling and general linear channels », thèse de doct., Department of Electrical et Information Technology, Lund University, 2013 (cf. p. 2, 13, 20).

- [28] C. DOUILLARD, M. JÉZÉQUEL, C. BERROU, A. PICART, P. DIDIER et A. GLAVIEUX, « Iterative correction of intersymbol interference : turbo-equalization », *European Transactions on Telecommunications*, t. 6, n° 5, p. 507–511, 1995 (cf. p. 2, 8, 20, 26, 50).
- [29] S. HU et F. RUSEK, « On the design of channel shortening demodulators for iterative receivers in MIMO and ISI channels », *CoRR*, t. abs/1506.07331, 2015. arXiv : 1506.07331 (cf. p. 2, 31, 37, 43, 66, 72, 94, 95).
- [30] L. KONG, Y. L. GUAN, J. ZHENG, G. HAN, K. CAI et K. S. CHAN, « EXIT-chart-based LDPC code design for 2D ISI channels », *IEEE Transactions on Magnetics*, t. 49, n° 6, p. 2823–2826, 2013 (cf. p. 2, 25, 83).
- [31] N. VARNICA et A. KAVCIC, « Optimized low-density parity-check codes for partial response channels », *IEEE Communications Letters*, t. 7, n° 4, p. 168–170, 2003 (cf. p. 2, 25, 83).
- [32] N. PHAM, J. ANDERSON, F. RUSEK, J. FREIXE et A. BONNAUD, « Exploring faster-than-Nyquist for satellite direct broadcasting », *AIAA International Communications Satellite Systems Conference*, p. 16–26, 2013 (cf. p. 2, 83).
- [33] R. TAJAN, B. BENAMMAR, C. POUILLIAT et M. BOUCHERET, « On coding for faster-than-Nyquist signaling », in *2015 IEEE International Black Sea Conference on Communications and Networking (BlackSeaCom)*, 2015, p. 92–96 (cf. p. 2, 83).
- [34] G. FORNEY, « Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 18, n° 3, p. 363–378, 1972 (cf. p. 10, 11, 17).
- [35] G. UNGERBOECK, « Adaptive maximum-likelihood receiver for carrier-modulated data-transmission systems », *IEEE Transactions on Communications*, t. 22, n° 5, p. 624–636, 1974 (cf. p. 10, 18).
- [36] J. B. ANDERSON, F. RUSEK et V. ÖWALL, « Faster-than-Nyquist signaling », *Proceedings of the IEEE*, t. 101, n° 8, p. 1817–1830, 2013 (cf. p. 10).
- [37] H. NYQUIST, « Certain topics in telegraph transmission theory », *American Institute of Electrical Engineers, Transactions of the*, t. 47, n° 2, p. 617–644, 1928 (cf. p. 11).
- [38] G. FORNEY, « Lower bounds on error probability in the presence of large intersymbol interference », *IEEE Transactions on Communications*, t. 20, n° 1, p. 76–77, 1972 (cf. p. 11).
- [39] J. G. PROAKIS et M. SALEHI, *Communication Systems Engineering*, Second. Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, 2001 (cf. p. 12).
- [40] Q. CHEN et H. ZHANG, « Shaping filter design for faster-than-Nyquist signaling with second order polynomial function », in *2015 International Conference on Cyber-Enabled Distributed Computing and Knowledge Discovery*, 2015, p. 442–445 (cf. p. 12).
- [41] S. LI, Z. WU et H. CHE, « Faster-than-Nyquist system based on novel shaping waveforms », in *2016 Sixth International Conference on Instrumentation Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC)*, 2016, p. 461–464 (cf. p. 12).
- [42] A. D. LIVERIS et C. N. GEORGHADES, « Exploiting faster-than-Nyquist signaling », *IEEE Transactions on Communications*, p. 1502–1511, 2003 (cf. p. 12).

- [43] F. RUSEK et J. B. ANDERSON, « On information rates for faster-than-Nyquist signaling », in *IEEE Globecom 2006*, 2006, p. 1–5 (cf. p. 12).
- [44] A. ABELLÓ, D. ROQUE, J. M. FREIXE et S. MALLIER, « Performance evaluation of a faster-than-Nyquist system based on turbo equalization and LDPC codes », in *Wireless Innovation Forum Conference*, mar. 2016 (cf. p. 12).
- [45] —, « Faster-than-Nyquist signaling : on linear and non-linear reduced-complexity turbo equalization », *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, p. 1–10, 2017 (cf. p. 12).
- [46] A. ABELLO, D. ROQUE, C. SICLET et A. MARQUET, « On zero-forcing equalization for short-filtered multicarrier faster-than-Nyquist signaling », in *2016 50th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2016, p. 904–908 (cf. p. 12).
- [47] A. MARQUET, D. ROQUE, C. SICLET et P. SIOHAN, « FTN multicarrier transmission based on tight gabor frames », *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, t. 2017, n° 1, p. 97, 2017 (cf. p. 12).
- [48] A. BARBIERI, D. FERTONANI et G. COLAVOLPE, « Time-frequency packing for linear modulations : spectral efficiency and practical detection schemes », *IEEE Transactions on Communications*, t. 57, n° 10, p. 2951–2959, 2009 (cf. p. 12).
- [49] A. MODENINI, G. COLAVOLPE et N. ALAGHA, « How to significantly improve the spectral efficiency of linear modulations through time-frequency packing and advanced processing », in *2012 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, 2012, p. 3260–3264 (cf. p. 12).
- [50] A. PIEMONTESE, A. MODENINI, G. COLAVOLPE et N. S. ALAGHA, « Improving the spectral efficiency of nonlinear satellite systems through time-frequency packing and advanced receiver processing », *IEEE Transactions on Communications*, t. 61, n° 8, p. 3404–3412, 2013 (cf. p. 12).
- [51] C. SICLET, D. ROQUE, A. MARQUET et L. ROS, « Improving spectral efficiency while reducing PAPR using faster-than-Nyquist multicarrier signaling », in *Communication Technologies for Vehicles - 12th International Workshop, Toulouse, France, May 4-5, 2017, Proceedings*, 2017, p. 21–32 (cf. p. 12).
- [52] A. ABELLÓ, D. ROQUE et J. M. FREIXE, « Blind symbol rate estimation of faster-than-Nyquist signals based on higher-order statistics », in *Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks*, jan. 2018, p. 200–210 (cf. p. 13, 97).
- [53] ETSI, *ETSI : EN 302 307 Digital Video Broadcasting (DVB); Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for Broadcasting, Interactive services, News Gathering and other broadband satellite applications (DVB-S2)*, 2009 (cf. p. 13, 16, 24).
- [54] —, *ETSI : EN 302 307-2 Digital Video Broadcasting (DVB); Second generation framing structure, channel coding and modulation systems for Broadcasting, Interactive Services, News Gathering and other broadband satellite applications Part II : S2 - Extensions (DVB-S2X)*, 2014 (cf. p. 13, 24).

- [55] C. E. SHANNON, « Communication in the presence of noise », *Proceedings of the IEEE*, t. 86, n° 2, p. 447–457, 1948 (cf. p. 14, 100).
- [56] ———, « A mathematical theory of communication », *Bell Systems Technical Journal*, t. 27, p. 623–656, 1948 (cf. p. 14).
- [57] S. SHAMAI, L. H. OZAROW et A. D. WYNER, « Information rates for a discrete-time gaussian channel with intersymbol interference and stationary inputs », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 37, n° 6, p. 1527–1539, 1991 (cf. p. 14).
- [58] D. M. ARNOLD, H. A. LOELIGER, P. O. VONTOBEL, A. KAVCIC et W. ZENG, « Simulation-based computation of information rates for channels with memory », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 52, n° 8, p. 3498–3508, 2006 (cf. p. 14).
- [59] N. LAHBABI, H. LIN, C. A. NOUR, C. DOUILLARD et P. SIOHAN, « An enhanced coding strategy for FTN-OFDM/OQAM transceiver design », in *2017 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, 2017, p. 1–6 (cf. p. 16).
- [60] L. BAHL, J. COCKE, F. JELINEK et J. RAVIV, « Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (corresp.) », *IEEE Trans. Inf. Theor.*, t. 20, n° 2, p. 284–287, sept. 2006 (cf. p. 17, 19).
- [61] F. R. KSCHISCHANG, B. J. FREY et H. A. LOELIGER, « Factor graphs and the sum-product algorithm », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 47, n° 2, p. 498–519, 2001 (cf. p. 18).
- [62] C. M. VITHANAGE, C. ANDRIEU et R. J. PIECHOCKI, « Approximate inference in hidden Markov models using iterative active state selection », *IEEE Signal Processing Letters*, t. 13, n° 2, p. 65–68, 2006 (cf. p. 19).
- [63] P. ROBERTSON, E. VILLEBRUN et P. HOEHER, « A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in the log domain », in *Communications, 1995. ICC'95 Seattle, 'Gateway to Globalization', 1995 IEEE International Conference on*, IEEE, t. 2, 1995, p. 1009–1013 (cf. p. 19).
- [64] G. COLAVOLPE et G. GERMI, « On the application of factor graphs and the sum-product algorithm to ISI channels », *IEEE Transactions on Communications*, t. 53, n° 5, p. 818–825, 2005 (cf. p. 19, 96).
- [65] C. B. PAPADIAS et D. T. M. SLOCK, « Fractionally spaced equalization of linear poly-phase channels and related blind techniques based on multichannel linear prediction », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 47, n° 3, p. 641–654, 1999 (cf. p. 20).
- [66] B. LI, Q. WANG, G. LU, Y. CHANG et D. YANG, « Linear MMSE frequency domain equalization with colored noise », in *2007 IEEE 66th Vehicular Technology Conference*, 2007, p. 1152–1156 (cf. p. 20).
- [67] H. FUKUMOTO et K. HAYASHI, « Overlap frequency domain equalization for faster-than-Nyquist signaling », *CoRR*, t. abs/1509.00562, 2015. arXiv : 1509.00562 (cf. p. 20).
- [68] T. ISHIHARA et S. SUGIURA, « Frequency-domain equalization aided iterative detection of faster-than-Nyquist signaling with noise whitening », *CoRR*, t. abs/1604.03698, 2016. arXiv : 1604.03698 (cf. p. 20).

- [69] R. TAJAN, C. POUILLIAT et M. BOUCHERET, « Circular faster than Nyquist : transmitter and iterative receiver design », in *2016 9th International Symposium on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC)*, 2016, p. 241–245 (cf. p. 20).
- [70] D. D. FALCONER et F. R. MAGEE, « Adaptive channel memory truncation for maximum likelihood sequence estimation », *Bell System Technical Journal*, t. 52, n° 9, p. 1541–1562, 1973 (cf. p. 20, 30).
- [71] A. MODENINI, F. RUSEK et G. COLAVOLPE, « Optimal transmit filters for constrained complexity channel shortening detectors », in *2013 IEEE International Conference on Communications (ICC)*, 2013, p. 3095–3100 (cf. p. 20, 31).
- [72] —, « Adaptive rate-maximizing channel-shortening for ISI channels », *IEEE Communications Letters*, t. 19, n° 12, p. 2090–2093, 2015 (cf. p. 20, 31).
- [73] W. RYAN et S. LIN, *Channel Codes : Classical and Modern*. Cambridge University Press, 2009 (cf. p. 21).
- [74] R. G. GALLAGER, *Low-density parity-check codes*, 1963 (cf. p. 21).
- [75] R. TANNER, « A recursive approach to low complexity codes », *Information Theory, IEEE Transactions on*, t. 27, n° 5, p. 533–547, 1981 (cf. p. 21).
- [76] M. LUBY, M. MITZENMACHER, A. SHOKROLLAH et D. SPIELMAN, « Analysis of low density codes and improved designs using irregular graphs », in *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, sér. STOC '98, Dallas, Texas, USA : ACM, 1998, p. 249–258 (cf. p. 22).
- [77] D. J. C. MACKAY, « Good error-correcting codes based on very sparse matrices », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 45, n° 2, p. 399–431, 1999 (cf. p. 22).
- [78] T. J. RICHARDSON, M. A. SHOKROLLAHI et R. L. URBANKE, « Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 47, n° 2, p. 619–637, 2001 (cf. p. 22, 24).
- [79] T. J. RICHARDSON et R. L. URBANKE, « The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 47, n° 2, p. 599–618, 2001 (cf. p. 22).
- [80] MCELIECE, « Coding Theorems for "Turbo-Like" Codes », in *Proceedings of the 36th Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, Allerton House, USA, 1998, p. 201–210 (cf. p. 22).
- [81] M. YANG, W. E. RYAN et Y. LI, « Design of efficiently encodable moderate-length high-rate irregular LDPC codes », *IEEE Transactions on Communications*, t. 52, n° 4, p. 564–571, 2004 (cf. p. 24).
- [82] S. J. JOHNSON et S. R. WELLER, « Constructions for irregular repeat-accumulate codes », in *Proceedings. International Symposium on Information Theory, 2005. ISIT 2005.*, 2005, p. 179–183 (cf. p. 24).
- [83] T. RICHARDSON et S. KUDEKAR, « Design of low-density parity check codes for 5G new radio », *IEEE Communications Magazine*, t. 56, n° 3, p. 28–34, 2018 (cf. p. 24).

- [84] E. ARIKAN, « Channel polarization : a method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 55, n° 7, p. 3051–3073, 2009 (cf. p. 25, 97).
- [85] S. A. HASHEMI, C. CONDO, F. ERCAN et W. J. GROSS, « On the performance of polar codes for 5G eMBB control channel », in *2017 51st Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, 2017, p. 1764–1768 (cf. p. 25).
- [86] ETSI, *ETSI : EN 301 790 Digital Video Broadcasting (DVB) - interaction channel for satellite distribution systems*, 1999 (cf. p. 25).
- [87] —, *ETSI : TS 101 545-1 Digital Video Broadcasting (DVB) - second generation dvb interactive satellite system (dvb-rcs2) - part1 : overview and system level specification*, 2014 (cf. p. 25).
- [88] —, *ETSI : TS 136 212 v.8.3.0 lte ; evolved universal terrestrial radio access (E-UTRA) ; multiplexing and channel coding (3gpp ts 36.212 version 8.3.0 release 8)*, 2008 (cf. p. 25).
- [89] C. BERROU, A. GLAVIEUX et P. THITIMAJSHIMA, « Near Shannon limit error-correcting coding and decoding : turbo-codes. 1 », in *Communications, 1993. ICC '93 Geneva. Technical Program, Conference Record, IEEE International Conference on*, t. 2, 1993, 1064–1070 vol.2 (cf. p. 25, 26, 33, 97).
- [90] S. ten BRINK, « Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes. », *IEEE Transactions on Communications*, t. 49, n° 10, p. 1727–1737, 2001 (cf. p. 25, 68).
- [91] J. HAGENAUER, « The EXIT chart - introduction to extrinsic information transfer in iterative processing », in *Proc. 12th Europ. Signal Proc. Conf (EUSIPCO)*, 2004, p. 1541–1548 (cf. p. 25).
- [92] C. BERROU, *Codes et turbocodes*, 1^{re} éd., sér. Collection IRIS. Springer, 2007 (cf. p. 27).
- [93] G. COLAVOLPE, A. MODENINI et F. RUSEK, « Channel shortening for nonlinear satellite channels », *IEEE Communications Letters*, t. 16, n° 12, p. 1929–1932, 2012 (cf. p. 31).
- [94] S. HU, H. KRÖLL, Q. HUANG et F. RUSEK, « Optimal channel shortener design for reduced- state soft-output viterbi equalizer in single-carrier systems », *IEEE Transactions on Communications*, t. 65, n° 6, p. 2568–2582, 2017 (cf. p. 32).
- [95] K. B. PETERSEN et M. S. PEDERSEN, *The Matrix Cookbook*, Version 20121115, 2012 (cf. p. 35).
- [96] Y. JIANG, M. K. VARANASI et J. LI, « Performance analysis of ZF and MMSE equalizers for MIMO systems : an in-depth study of the high SNR regime », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 57, n° 4, p. 2008–2026, 2011 (cf. p. 35, 55).
- [97] J. ROSEN, « The gradient projection method for nonlinear programming. part I. linear constraints », *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, t. 8, n° 1, p. 181–217, 1960 (cf. p. 37).

- [98] A. ABELLÓ, J. M. FREIXE et D. ROQUE, « Closed-form expressions for channel shortening receivers using *a priori* information », *IEEE Communications Letters*, t. 22, n° 7, p. 1394–1397, 2018 (cf. p. 43).
- [99] G. H. GOLUB et C. F. V. LOAN, *Matrix computations*, 3rd ed, sér. Johns Hopkins studies in the mathematical sciences. Johns Hopkins University Press, 1996 (cf. p. 45).
- [100] A. GLAVIEUX, C. LAOT et J. LABAT, « Turbo equalization over a frequency selective channel », in *Proc. 1st Symp. Turbo Codes*, 1997, p. 96–102 (cf. p. 49, 52, 66, 67, 94).
- [101] C. LAOT, A. GLAVIEUX et J. LABAT, « Turbo equalization : adaptive equalization and channel decoding jointly optimized », *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, t. 19, n° 9, p. 1744–1752, 2001 (cf. p. 49, 52, 66, 67, 94).
- [102] M. TÜCHLER, R. KOETTER et A. SINGER, « Turbo equalization : principles and new results », *Communications, IEEE Transactions on*, t. 50, n° 5, p. 754–767, 2002 (cf. p. 52).
- [103] M. TÜCHLER et A. SINGER, « Turbo equalization : an overview », *Information Theory, IEEE Transactions on*, t. 57, n° 2, p. 920–952, 2011 (cf. p. 57).
- [104] S. M. KAY, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., 1993 (cf. p. 68).
- [105] X. LIANG, A. LIU, B. GAO et K. WANG, « Method of timing estimation for FTN signalling with high-order modulation », *Electronics Letters*, t. 52, n° 13, p. 1134–1136, 2016 (cf. p. 97).
- [106] X. LIANG, A. LIU, X. PAN et F. CHEN, « Method for carrier frequency-offset estimation of faster-than-Nyquist signalling », *Electronics Letters*, t. 51, n° 25, p. 2151–2153, 2015 (cf. p. 97).
- [107] I. SELESNICK, *Spectral factorization, polynomial root finding and the leja ordering*, Lecture Notes, 2012 (cf. p. 102).

Résumé — Le contexte de ces travaux de thèse est la transmission dite *faster-than-Nyquist* (FTN). Cette technique propose d’augmenter l’efficacité spectrale en augmentant le rythme de transmission au-delà de la bande occupée par le signal émis, indépendamment de la constellation choisie. Il a été montré que le FTN offre des taux d’information supérieurs à ceux des systèmes de Nyquist. Toutefois, le non respect du critère de Nyquist entraîne l’apparition d’interférence entre symboles et des techniques de réception appropriées doivent être utilisées. La technique de réception dite *channel shortening* consiste à filtrer la séquence reçue puis à calculer des probabilités symbole *a posteriori* approximatives à l’aide de l’algorithme BCJR en considérant une réponse de canal modifiée, de longueur réduite. Dans la littérature, en présence d’information a priori, les filtres du récepteur channel shortening sont optimisés sous critère de maximisation de l’information mutuelle généralisée (IMG) en utilisant des méthodes numériques. Nous proposons dans ces travaux de thèse une solution analytique pour l’ensemble des filtres channel shortening sous critère de maximisation de l’IMG lorsque le récepteur dispose d’information a priori. Nous démontrons ensuite que l’égaliseur au sens de la minimisation de l’erreur quadratique moyenne (MMSE) est un cas particulier de l’égaliseur channel shortening. Dans le cadre de la turbo égalisation, nous étudions ensuite un estimateur permettant d’obtenir l’information *a priori* à partir de l’information en sortie du décodeur correcteur d’erreurs. Finalement, nous évaluons les performances du système complet avec codage correcteur d’erreurs sur canal à bruit additif blanc Gaussien.

Mots clés : Turbo égalisation, *channel shortening*, estimation symbole, codes LDPC.

Abstract — In order to increase the spectral efficiency of digital communications systems, the faster-than-Nyquist (FTN) approach increases the symbol rate beyond the occupied bandwidth of the transmitted signal independently of the constellation type and size. It has been shown that information rates of FTN systems are greater than those of Nyquist systems. However, the non-compliance of the Nyquist criterion causes inter-symbol interference to appear and therefore appropriate reception techniques must be used. At reception, the channel shortening approach consists on a receiving filter followed by a BCJR algorithm computing approximate *a posteriori* symbol probabilities by considering a modified channel response of reduced length. In the literature, the channel shortening receiving filters are chosen to maximize the generalized mutual information (GMI). Such optimization is performed by using numerical optimization methods. In this PhD thesis, we propose a closed-form solution for all channel shortening filters considering the GMI maximization criterion. We show that the minimum mean square error (MMSE) equalizer is a particular case of the channel shortening approach. Within the frame of turbo equalization, we then study a suitable estimator allowing to obtain symbols *a priori* information from the information provided by the a decoder. Finally, we study the performance of the complete system with channel coding over an additive white Gaussian noise channel.

Keywords : Turbo equalization, channel shortening, symbol estimation, LDPC codes.
