N° d'ordre : 46

Année 1990

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

SPECIALITE : MECANIQUE DES FLUIDES

par

Jean-Philippe BRAZIER

ETUDE ASYMPTOTIQUE DES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE EN FORMULATION DEFICITAIRE

Soutenue le 25 juin 1990 devant la Commission d'Examen :

MM.	**J.P. GUIRAUD**	**Président**
	B. AUPOIX **S. CANDEL** **J. COUSTEIX** **P. PERRIER**	**Examinateurs**

"Il est vrai qu'on ne peut trouver la pierre philosophale,
mais il est bon qu'on la cherche;
en la cherchant, on trouve de fort beaux secrets
qu'on ne cherchait pas.

Bernard Le Bovier de FONTENELLE

Je remercie Monsieur J.P. Guiraud, professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), de m'avoir fait part de ses remarques concernant mon travail et d'avoir accepté de présider le jury.

Je remercie Monsieur S. Candel, professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures, et Monsieur J. Piquet, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, qui ont assumé consciencieusement la lourde tâche de rapporteur.

Je remercie Monsieur J. Cousteix, chef du département d'Aérothermodynamique du CERT, qui m'a accueilli dans son équipe et qui m'a activement soutenu et encouragé pendant trois ans.

Je remercie Monsieur P. Perrier, chef du département d'Aérodynamique Théorique de Dassault Aviation, et Monsieur H. Viviand, de la société Principia, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur B. Aupoix, ingénieur du DERAT, pour l'attention permanente qu'il m'a manifestée et pour les nombreuses discussions, parfois animées mais toujours fructueuses, que nous avons eues.

Je remercie l'équipe du Groupe de Prestations Informatiques du CERT pour son assistance patiente et efficace.

Je remercie enfin tout le personnel du DERAT, stagiaires, ingénieurs, techniciens et secrétaires, pour l'aide amicale qu'ils m'ont apportée à des titres divers.

Table des Matières

Introduction 3

I ECOULEMENTS INCOMPRESSIBLES 5

1 THEORIE DE VAN DYKE 7
- 1.1 Notion de développement asymptotique 7
  - 1.1.1 Exemple de problème de petite perturbation 7
  - 1.1.2 Développements asymptotiques 8
  - 1.1.3 Solution externe 8
  - 1.1.4 Solution interne 9
  - 1.1.5 Raccordement 10
- 1.2 Application aux équations de Navier-Stokes 12
  - 1.2.1 Développements asymptotiques 12
  - 1.2.2 Equations externes et internes 15
  - 1.2.3 Raccordement 16
  - 1.2.4 Discussion 19

2 FORMULATION DEFICITAIRE 23
- 2.1 Principe 23
- 2.2 Développement externe 24
- 2.3 Développement interne 25
- 2.4 Conditions de raccord 27
- 2.5 Discussion 29

3 SOLUTIONS AUTO-SEMBLABLES SUR PLAQUE PLANE 33
- 3.1 Cas étudié 33
- 3.2 Solution de Murray 33
  - 3.2.1 Couche limite d'ordre 1 34
  - 3.2.2 Fluide parfait d'ordre 2 35
  - 3.2.3 Couche limite d'ordre 2 38
- 3.3 Solution déficitaire 39

4 SOLUTIONS NUMERIQUES SUR PLAQUE PLANE 45

II ECOULEMENTS COMPRESSIBLES 51

5 THEORIE DE VAN DYKE 53
5.1 Equations de Navier-Stokes 53
5.2 Développements 56
5.3 Equations externes et internes 57
5.3.1 zone externe, ordre 1 : 57
5.3.2 zone externe, ordre 2 : 58
5.3.3 zone interne, ordre 1 : 58
5.3.4 zone interne, ordre 2 : 59
5.4 Conditions de raccordement 59
5.5 Discussion 61

6 FORMULATION DEFICITAIRE 63
6.1 Décomposition 63
6.2 Développements 64
6.3 Raccordement 65
6.4 Equations déficitaires 66
6.5 Discussion 69

7 SOLUTIONS AUTO-SEMBLABLES SUR PLAQUE PLANE 73
7.1 Cas étudié 73
7.2 Solution de Van Dyke 74
7.3 Solution déficitaire 76
7.4 Comparaison des deux approches 78

8 APPLICATION A UN CORPS EMOUSSE HYPERSONIQUE 81
8.1 Etude bibliographique 81
8.2 Cas étudiés 82
8.3 Calcul du point d'arrêt 83
8.4 Résultats 85

Conclusion 87

Bibliographie 89

Liste des figures 93

Introduction

Les véhicules aérospatiaux destinés à rentrer dans l'atmosphère à des vitesses hypersoniques possèdent généralement un nez et des bords d'attaque arrondis, en avant desquels se situent des ondes de choc détachées. En effet, un grand rayon de courbure permet de diminuer le flux thermique local au voisinage du point d'arrêt. Il abaisse également le flux thermique global sur l'ensemble du corps en augmentant la traînée de pression plutôt que la traînée de frottement, pour une valeur donnée de la traînée totale. La présence d'une onde de choc courbe entraîne l'existence d'un gradient d'entropie dans la couche de choc, c'est à dire dans la zone comprise entre l'onde de choc et la paroi. Ce gradient d'entropie équivaut à un rotationnel non nul pour le vecteur vitesse local de l'écoulement.

Il est important de connaître avec précision le flux de chaleur pariétal afin de pouvoir dimensionner correctement la protection thermique du véhicule. En effet, le poids de cette dernière a des répercussions sur les performances globales du système. L'analyse des trajectoires de rentrée actuellement utilisées montre que le flux thermique est maximal en un point assez élevé de la trajectoire où le nombre de Reynolds est relativement petit du fait de la faible densité de l'air à cette altitude. La couche limite reste laminaire sur tout le véhicule et occupe une partie relativement importante de la couche de choc.

La détermination précise des conditions à la paroi et notamment du frottement et du flux thermique nécessite de prendre en compte l'effet du gradient d'entropie sur la couche limite. La résolution des équations complètes de Navier-Stokes dans toute la couche de choc est assez complexe, surtout si l'on fait intervenir les phénomènes chimiques de dissociation de l'air. Une autre possibilité réside dans l'utilisation des équations de Navier-Stokes parabolisées. Toutefois, cette méthode supprime le caractère elliptique des équations et se heurte par conséquent à des difficultés fondamentales dans les zones où l'écoulement est subsonique, ce qui est le cas au voisinage du point d'arrêt.

La théorie classique de couche limite établie par Prandtl ne permet pas de faire intervenir le rotationnel de l'écoulement externe. Van Dyke [32] a étendu cette approche en proposant la théorie de couche limite du deuxième ordre, basée sur l'utilisation de développements asymptotiques raccordés. Cette théorie permet de prendre en compte plusieurs effets, y compris le rotationnel de l'écoulement externe.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse a consisté à étudier les possibilités et les limites de la théorie de Van Dyke, puis à proposer une nouvelle approche restant dans le cadre des théories de couche limite dites "à couplage

faible". L'étude s'est limitée à des écoulements laminaires bidimensionnels. Dans un premier temps, les deux approches ont été comparées pour des écoulements incompressibles sur plaque plane; puis, dans un deuxième temps, on a considéré des écoulements hypersoniques sur des corps de révolution.

I

ECOULEMENTS INCOMPRESSIBLES

Chapitre 1

THEORIE DE VAN DYKE

1.1 Notion de développement asymptotique

1.1.1 Exemple de problème de petite perturbation

La méthode des développements asymptotiques raccordés est une technique permettant de construire des solutions approchées pour des problèmes de petites perturbations. Avant de l'utiliser pour traiter des équations de mécanique des fluides, examinons le cas simple d'une équation différentielle du deuxième ordre. Cet exemple est directement tiré du cours de M. Darrozès [7]. D'autres exemples voisins sont traités dans les ouvrages de Nayfeh [25] et Van Dyke [33].

Soit l'équation

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0 \qquad y(0) = \alpha \qquad y(1) = \beta \tag{1.1}$$

où ε est un paramètre réel arbitrairement petit et y une fonction de x définie sur $[0,1]$. Ce problème aux limites admet une solution analytique : cherchons y sous la forme

$$y = e^{sx}$$

Il vient :

$$\varepsilon s^2 + s + 1 = 0$$

soit :

$$s_1 = -\frac{1}{2\varepsilon} - \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}} \sim -\frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{si } \varepsilon \ll 1$$

$$s_2 = -\frac{1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}} \sim -1$$

La solution générale est de la forme :

$$y = \lambda e^{s_1 x} + \mu e^{s_2 x}$$

Dans le cas où x est très grand devant ε, le deuxième terme est prépondérant :

$$x \gg \varepsilon \Longrightarrow e^{-x/\varepsilon} \ll e^{-x} \Longrightarrow y \simeq \mu e^{-x}$$

Si au contraire x est de l'ordre de ε, on a :

$$x \sim \varepsilon \Longrightarrow e^{-x} \sim 1 \Longrightarrow y \simeq \lambda e^{-x/\varepsilon} + \mu$$

On obtient donc deux approximations de la solution valables dans deux domaines différents.

1.1.2 Développements asymptotiques

Un développement asymptotique de y s'écrit sous la forme :

$$y(x;\varepsilon) = \delta_0(\varepsilon)y_0(x) + \delta_1(\varepsilon)y_1(x) + \cdots \tag{1.2}$$

avec $\delta_1 = o(\delta_0)$. Les fonctions δ_i sont appelées fonctions de jauge.

La variable indépendante x est rapportée à ε en introduisant la nouvelle variable :

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon^\nu}$$

L'équation (1.1) devient :

$$\varepsilon^{1-2\nu}y''(\xi) + \varepsilon^{-\nu}y'(\xi) + y(\xi) = 0 \tag{1.3}$$

Le principe appelé "principe de moindre dégénérescence" stipule que, lors des simplifications successives, le plus grand nombre possible de termes doit être conservé. Dans notre cas, en ne retenant dans l'équation (1.3) que les termes de même ordre de grandeur, deux possibilités se présentent :

- ou bien on suppose que les deuxième et troisième termes sont du même ordre, ce qui impose que $\nu = 0$ et que le premier terme soit négligé car d'ordre ε,
- ou bien on retient les deux premiers termes en posant $\nu = 1$ et on néglige le troisième.

On vérifiera aisément que pour toute autre valeur de ν, un seul terme subsiste, ce qui est contraire au principe de moindre dégénérescence.

1.1.3 Solution externe

Examinons tout d'abord le cas où $\nu = 0$. On a alors $\xi = x$. En reportant le développement (1.2) dans l'équation (1.3), il vient :

$$\varepsilon\delta_0 y_0'' + \varepsilon\delta_1 y_1'' + \delta_0 y_0' + \delta_1 y_1' + \delta_0 y_0 + \delta_1 y_1 = 0$$

Sachant que $\delta_1 = o(\delta_0)$, on peut trier les termes suivant leur ordre de grandeur. En ne retenant que les termes prépondérants, on obtient :

$$\delta_0 y_0' + \delta_0 y_0 = 0$$

soit

$$y_0' + y_0 = 0 \tag{1.4}$$

Les termes d'ordre immédiatement supérieur donnent :

$$\varepsilon\delta_0 y_0'' + \delta_1 y_1' + \delta_1 y_1 = 0$$

Le principe de moindre dégénérescence conduit à adopter une jauge $\delta_1 = \varepsilon\delta_0$, soit :

$$y_0'' + y_1' + y_1 = 0 \tag{1.5}$$

Aucune condition ne s'applique à la jauge δ_0 et on pose donc arbitrairement $\delta_0 = 1$.

La solution des équations (1.4) et (1.5) est :

$$\begin{cases} y_0 = k_1 e^{-x} \\ y_1 = (-k_1 x + k_2)e^{-x} \end{cases}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, les équations (1.4) et (1.5) sont du premier ordre et n'admettent qu'une seule condition à choisir parmi les deux de l'équation de départ (1.1). Puisque nous sommes dans le domaine $x \sim 1$, il paraît naturel de retenir la condition en $x = 1$, soit :

$$y(1) = y_0(1) + \varepsilon y_1(1) = \beta$$

Donc :

$$y_0(1) = \beta \qquad y_1(1) = 0$$

d'où :

$$k_1 = \beta e \qquad k_2 = \beta e$$

$$y_0 = \beta e^{1-x} \qquad y_1 = \beta(1-x)e^{1-x}$$

Sauf exception, l'autre condition en $x = 0$ ne pourra pas être satisfaite et ce développement ne sera pas valable au voisinage de $x = 0$. On l'appelle pour cela "solution externe".

1.1.4 Solution interne

Le voisinage de l'origine est précisément la zone concernée par le choix $\nu = 1$ puisque l'on a alors :

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon} \sim 1 \Longrightarrow x \sim \varepsilon$$

Avec le développement

$$y = \delta_0 \bar{y}_0(\xi) + \delta_1 \bar{y}_1(\xi) + \cdots$$

l'équation (1.3) devient :

$$\frac{1}{\varepsilon}(\delta_0 \bar{y}_0'' + \delta_1 \bar{y}_1'') + \frac{1}{\varepsilon}(\delta_0 \bar{y}_0' + \delta_1 \bar{y}_1') + \delta_0 \bar{y}_0 + \delta_1 \bar{y}_1 = 0$$

En ne retenant que les termes d'ordre $1/\varepsilon$, il vient :

$$\frac{1}{\varepsilon}\delta_0 \bar{y}_0'' + \frac{1}{\varepsilon}\delta_0 \bar{y}_0' = 0$$

soit :

$$\bar{y}_0'' + \bar{y}_0' = 0 \tag{1.6}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on pourra choisir $\delta_0 = 1$. Au deuxième ordre, on a :

$$\frac{1}{\varepsilon}\delta_1\bar{y}_1'' + \frac{1}{\varepsilon}\delta_1\bar{y}_1' + \delta_0\bar{y}_0 = 0$$

soit, en prenant $\delta_1 = \varepsilon\delta_0$:

$$\bar{y}_1'' + \bar{y}_1' + \bar{y}_0 = 0 \tag{1.7}$$

Puisque l'on se trouve au voisinage de zéro, on retiendra la condition en ce point :

$$y(0) = \bar{y}_0(0) + \varepsilon\bar{y}_1(0) = \alpha$$

soit :

$$\bar{y}_0(0) = \alpha \qquad \bar{y}_1(0) = 0 \tag{1.8}$$

La solution du problème interne $\{(1.6),\ (1.7),\ (1.8)\}$ est :

$$\begin{cases} \bar{y}_0 = \alpha + c_1(e^{-\xi} - 1) \\ \bar{y}_1 = -\alpha\xi + c_1\xi(e^{-\xi} + 1) + c_2(e^{-\xi} - 1) \end{cases}$$

Les conditions manquantes pour déterminer les constantes c_1 et c_2 de la solution interne vont être établies par raccordement avec la solution externe.

1.1.5 Raccordement

Le principe de raccordement (Van Dyke [33]) exprime que "la représentation interne de la solution externe doit être égale à la représentation externe de la solution interne". Dans l'exemple traité, la solution externe

$$y^e = \beta e^{1-x} + \varepsilon\beta(1-x)e^{1-x}$$

devient, en fonction de la variable interne $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$:

$$y^e = \beta e^{1-\varepsilon\xi} + \varepsilon\beta(1-\varepsilon\xi)e^{1-\varepsilon\xi}$$

En développant pour ε petit, il vient :

$$(y^e)^i = \beta e + \varepsilon\beta e(1-\xi) + o(\varepsilon) \tag{1.9}$$

De même, la solution interne :

$$y^i = \alpha + c_1(e^{-\xi} - 1) + \varepsilon\left[c_1\xi(e^{-\xi} + 1) - \alpha\xi + c_2(e^{-\xi} - 1)\right]$$

exprimée en fonction de la variable externe $x = \varepsilon\xi$:

$$y^i = \alpha + c_1(e^{-x/\varepsilon} - 1) + \varepsilon\left[c_1\frac{x}{\varepsilon}(e^{-x/\varepsilon} + 1) - \alpha\frac{x}{\varepsilon} + c_2(e^{-x/\varepsilon} - 1)\right]$$

et développée pour ε tendant vers zéro avec x fixé, devient :

$$(y^i)^e = (\alpha - c_1)(1-x) - \varepsilon c_2 + \cdots \tag{1.10}$$

Cette dernière expression est ensuite égalée au développement (1.9) :

$$\begin{aligned}(\alpha - c_1)(1-x) - \varepsilon c_2 &= \beta e + \varepsilon \beta e \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= \beta e(1-x) + \varepsilon \beta e\end{aligned}$$

En développant et en séparant les termes de même ordre en ε, on obtient :

$$\begin{cases} \beta e = \alpha - c_1 \\ \beta e = -c_2 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} c_1 = \alpha - \beta e \\ c_2 = -\beta e \end{cases}$$

L'existence d'un raccord correct entre les deux développements justifie *a posteriori* le choix des fonctions de jauge et de la variable interne. Le choix d'une autre échelle que ε pour la zone interne aurait conduit à deux développements ne présentant pas de zone de validité commune et ne pouvant donc pas se raccorder, ou bien à des développements raccordés mais ne couvrant pas la totalité du domaine $[0,1]$ (Nayfeh [25]).

La figure 1.1 récapitule ce qui vient d'être dit en montrant la solution interne et la solution externe comparées à la solution exacte, dans le cas où $\varepsilon =$ 0,1, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Les solutions d'ordre 2 sont beaucoup plus proches de la solution exacte que les solutions d'ordre 1.

Une solution composite unique valable sur tout le domaine peut être constituée à partir des deux développements en ajoutant la solution interne à la solution externe et en soustrayant la partie commune :

$$\begin{aligned} y^c &= y^e + y^i - (y^i)^e \\ &= y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \bar{y}_0(\xi) + \varepsilon \bar{y}_1(\xi) - y_0(0) - \varepsilon\Big(y_1(0) + \xi y_0'(0)\Big) \end{aligned}$$

soit pour l'exemple choisi :

$$y^c = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)(1+x)e^{-x/\varepsilon} + \varepsilon\beta\Big[(1-x)e^{1-x} - e^{1-x/\varepsilon}\Big]$$

La figure 1.2 montre la solution composite comparée à la solution exacte. L'approximation composite est relativement précise. Cependant, des problèmes surgissent lorsqu'on s'intéresse aux dérivées. En effet, la dérivée de la solution composite

$$(y^c)' = y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \frac{1}{\varepsilon}\bar{y}_0'(\xi) + \bar{y}_1'(\xi) - y_0'(0)$$

n'est pas strictement égale à la fonction composite formée avec les dérivées des deux développements d'ordre 2 :

$$(y')^c = \frac{1}{\varepsilon}\bar{y}_0' + \Big[\bar{y}_1' + y_0' - y_0'(0)\Big]$$

C'est pourquoi cette formule au maniement plus délicat est peu utilisée en pratique.

1.2 Application aux équations de Navier-Stokes

1.2.1 Développements asymptotiques

Considérons un écoulement laminaire bidimensionnel stationnaire de fluide visqueux incompressible sur une paroi plane. Les symboles étoilés désignent les variables physiques ayant une unité. Les symboles sans étoiles représentent les grandeurs sans dimension. Les coordonnées x^* et y^* sont respectivement mesurées parallèlement et perpendiculairement à la paroi. L'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes :

- équation de continuité :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

- équation de quantité de mouvement selon Ox :

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

- équation de quantité de mouvement selon Oy :

$$\rho^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu^* \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

La masse volumique ρ^* et le coefficient de viscosité μ^* sont supposés constants.

Les variables sont rendues sans dimension en les rapportant à des grandeurs de référence :

- longueur de référence L^*
- vitesse de référence U_0^*

Les nouvelles variables sont :

$$x = \frac{x^*}{L^*} \qquad y = \frac{y^*}{L^*}$$

$$u = \frac{u^*}{U_0^*} \qquad v = \frac{v^*}{U_0^*} \qquad p = \frac{p^*}{\rho^* U_0^{*2}}$$

Introduites dans les équations de Navier-Stokes, elles donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \tag{1.11}$$

On a posé :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho^* U_0^* L^*}{\mu^*}$$

Re représente le nombre de Reynolds caractérisant le problème. Les études asymptotiques seront menées pour Re tendant vers l'infini. Le petit paramètre utilisé sera donc fonction du coefficient 1/Re qui figure dans les équations.

La condition d'adhérence à la paroi

$$u(x,0) = v(x,0) = 0$$

entraîne la présence d'une couche limite au voisinage de $y = 0$. On introduit donc une nouvelle variable normale pour la région interne :

$$\bar{y} = \frac{y}{\varepsilon}$$

Conformément à l'usage, les développements externes seront notés en lettres majuscules tandis que les minuscules seront réservées aux développements internes. Le développement externe de u s'écrit :

$$u = U_1(x,y) + \delta U_2(x,y) + \cdots$$

tandis que le développement interne est :

$$u = u_1(x,\bar{y}) + \delta u_2(x,\bar{y}) + \cdots$$

La pression se développe de la même manière :

$$p = P_1(x,y) + \delta P_2(x,y) + \cdots \quad \text{dans la zone externe}$$

$$p = p_1(x,\bar{y}) + \delta p_2(x,\bar{y}) + \cdots \quad \text{dans la zone interne}$$

Pour la vitesse normale, il faut tenir compte dans la zone interne de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial \bar{y}} = 0$$

Pour éviter que cette dernière ne dégénère, il faut poser :

$$v = \varepsilon\Big(\bar{v}_1(x,\bar{y}) + \delta \bar{v}_2(x,\bar{y}) + \cdots\Big)$$

Dans la zone externe, on conserve le développement :

$$v = V_1(x,y) + \delta V_2(x,y) + \cdots$$

Reportons maintenant ces développements dans les équations de Navier-Stokes adimensionnées. Celles-ci deviennent dans la zone externe :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial U_2}{\partial x} + \dfrac{\partial V_1}{\partial y} + \delta\dfrac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \\[2ex] (U_1 + \delta U_2)\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial U_2}{\partial x}\right) + (V_1 + \delta V_2)\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial y} + \delta\dfrac{\partial U_2}{\partial y}\right) \\ \qquad = -\dfrac{\partial P_1}{\partial x} - \delta\dfrac{\partial P_2}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \delta\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \delta\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right) \\[2ex] (U_1 + \delta U_2)\left(\dfrac{\partial V_1}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial V_2}{\partial x}\right) + (V_1 + \delta V_2)\left(\dfrac{\partial V_1}{\partial y} + \delta\dfrac{\partial V_2}{\partial y}\right) \\ \qquad = -\dfrac{\partial P_1}{\partial y} - \delta\dfrac{\partial P_2}{\partial y} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \delta\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \delta\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

et dans la zone interne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \varepsilon\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} + \varepsilon\dfrac{1}{\varepsilon}\delta\dfrac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{y}} = 0 \\[2ex] (u_1 + \delta u_2)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \varepsilon(\bar{v}_1 + \delta\bar{v}_2)\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} + \delta\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}\right) \\ \qquad = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} - \delta\dfrac{\partial p_2}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \delta\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{y}^2} + \dfrac{\delta}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial \bar{y}^2}\right) \\[2ex] (u_1 + \delta u_2)\varepsilon\left(\dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} + \delta\dfrac{\partial \bar{v}_2}{\partial x}\right) + \varepsilon(\bar{v}_1 + \delta\bar{v}_2)\varepsilon\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\delta}{\varepsilon}\dfrac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{y}}\right) \\ \qquad = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial p_1}{\partial \bar{y}} - \dfrac{\delta}{\varepsilon}\dfrac{\partial p_2}{\partial \bar{y}} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x^2} + \delta\dfrac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \bar{y}^2} + \dfrac{\delta}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial \bar{y}^2}\right) \end{cases}$$

En examinant l'équation interne de quantité de mouvement selon Ox, on remarque que le terme visqueux le plus important est affecté du coefficient

$$\frac{1}{\mathrm{Re}\,\varepsilon^2}$$

Pour conserver l'équation la moins dégénérée possible, il faut que ce terme soit d'ordre 1; on est donc conduit à poser :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

La fonction de jauge δ est déterminée en appliquant le principe de raccordement. Le développement externe de u

$$u = U_1(x, y) + \delta U_2(x, y) + \cdots$$

s'écrit en coordonnées internes :

$$u = U_1(x, \varepsilon\bar{y}) + \delta U_2(x, \varepsilon\bar{y}) + \cdots$$

On développe les fonctions U_1 et U_2 en série de Taylor pour ε tendant vers zéro :

$$u = U_1(x,0) + \varepsilon\bar{y}\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0) + \delta U_2(x,0) + \delta\varepsilon\bar{y}\frac{\partial U_2}{\partial y}(x,0) + \cdots$$

Ce développement doit être identifié terme à terme avec le développement interne pour $\bar{y}$ tendant vers l'infini :

$$u_1(x,\bar{y}) + \delta u_2(x,\bar{y}) \underset{\bar{y}\to\infty}{\sim} U_1(x,0) + \varepsilon\bar{y}\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0) + \delta U_2(x,0) + \delta\varepsilon\bar{y}\frac{\partial U_2}{\partial y}(x,0)$$

Conformément au principe de moindre dégénérescence, le meilleur raccord est obtenu en prenant $\delta = \varepsilon$. Les termes du développement externe sont en effet mieux regroupés que si l'on prend par exemple $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

1.2.2 Equations externes et internes

Dans la zone externe, en sélectionnant les termes d'ordre 1, on retrouve les équations d'Euler pour un fluide non visqueux :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \\ U_1\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + V_1\dfrac{\partial U_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial P_1}{\partial x} \\ U_1\dfrac{\partial V_1}{\partial x} + V_1\dfrac{\partial V_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial P_1}{\partial y} \end{cases} \tag{1.12}$$

Les termes d'ordre 2 redonnent le même système sous forme d'équation aux petites perturbations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + \dfrac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \\ U_2\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + U_1\dfrac{\partial U_2}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial U_1}{\partial y} + V_1\dfrac{\partial U_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial P_2}{\partial x} \\ U_2\dfrac{\partial V_1}{\partial x} + U_1\dfrac{\partial V_2}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial V_1}{\partial y} + V_1\dfrac{\partial V_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial P_2}{\partial y} \end{cases} \tag{1.13}$$

Dans la zone interne, on obtient au premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} = 0 \\ u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \bar{v}_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{y}^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p_1}{\partial \bar{y}} \end{cases} \tag{1.14}$$

Au deuxième ordre, on obtient les mêmes équations mais écrites pour de petites perturbations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{y}} = 0 \\ u_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \bar{v}_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{y}} = -\dfrac{\partial p_2}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial \bar{y}^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p_2}{\partial \bar{y}} \end{cases} \tag{1.15}$$

On peut réécrire les équations internes en coordonnées externes en posant :

$$v_1(x,y) = \varepsilon \bar{v}_1(x,\bar{y}) \qquad v_2(x,y) = \varepsilon \bar{v}_2(x,\bar{y})$$

On retrouve au premier ordre les équations de Prandtl :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \\ u_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p_1}{\partial y} \end{cases}$$

et au deuxième ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \\ u_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial p_2}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p_2}{\partial y} \end{cases}$$

On remarque que à l'ordre 1 comme à l'ordre 2, la pression est constante dans la couche limite suivant la normale à la paroi. Ce ne serait plus vrai au deuxième ordre sur une paroi courbe (Van Dyke [32]).

1.2.3 Raccordement

Appliquons maintenant le principe de raccordement (Van Dyke [30]). Le développement externe de u

$$u = U_1(x,y) + \varepsilon U_2(x,y) + \cdots$$

s'écrit en coordonnées internes :

$$u = U_1(x,\varepsilon\bar{y}) + \varepsilon U_2(x,\varepsilon\bar{y}) + \cdots$$

On développe les fonctions U_1 et U_2 en série de Taylor pour ε petit :

$$u = U_1(x,0) + \varepsilon\bar{y}\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0) + \varepsilon U_2(x,0) + \cdots$$

Ce développement interne de la solution externe doit être égal à la limite externe de la solution interne :

$$u_1(x,\bar{y}) + \varepsilon u_2(x,\bar{y}) \underset{\bar{y}\to\infty}{\sim} U_1(x,0) + \varepsilon\left(U_2(x,0) + \bar{y}\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0)\right)$$

En identifiant terme à terme, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1(x,\bar{y}) \underset{\bar{y}\to\infty}{\sim} U_1(x,0) \\ u_2(x,\bar{y}) \underset{\bar{y}\to\infty}{\sim} U_2(x,0) + \bar{y}\dfrac{\partial U_1}{\partial y}(x,0) \end{array}\right. \tag{1.16}$$

Le même raisonnement appliqué à p fournit :

$$\left\{\begin{array}{l} p_1(x,\bar{y}) \underset{\bar{y}\to\infty}{\sim} P_1(x,0) \\ p_2(x,\bar{y}) \underset{\bar{y}\to\infty}{\sim} P_2(x,0) + \bar{y}\dfrac{\partial P_1}{\partial y}(x,0) \end{array}\right. \tag{1.17}$$

Le cas de v est légèrement différent :

$$\varepsilon\bar{v}_1(x,\bar{y}) + \varepsilon^2\bar{v}_2(x,\bar{y}) \underset{\bar{y}\to\infty}{\sim} V_1(x,0) + \varepsilon\left(V_2(x,0) + \bar{y}\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,0)\right)$$

d'où :

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = V_1(x,0) \\ \bar{v}_1(x,\bar{y}) \underset{\bar{y}\to\infty}{\sim} V_2(x,0) + \bar{y}\dfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,0) \end{array}\right.$$

ou encore :

$$\left\{\begin{array}{l} V_1(x,0) = 0 \\ V_2(x,0) = \lim\limits_{\bar{y}\to\infty}\left[\bar{v}_1(x,\bar{y}) - \bar{y}\dfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,0)\right] \end{array}\right.$$

Les conditions aux limites se répartissent comme suit :

- fluide parfait au premier ordre :
  - à l'infini : conditions imposées
  - à la paroi : $V_1 = 0$ (glissement)
- couche limite au premier ordre :
  - à la paroi : $u_1 = v_1 = 0$ (adhérence)
  - $\lim\limits_{\bar{y}\to\infty} u_1(x,\bar{y}) = U_1(x,0)$
  - $\lim\limits_{\bar{y}\to\infty} p_1(x,\bar{y}) = P_1(x,0)$

- fluide parfait au second ordre :
  - à l'infini : nullité des perturbations
  - à la paroi : $V_2(x,0) = \lim_{\bar{y}\to\infty} \left[\bar{v}_1(x,\bar{y}) - \bar{y}\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,0)\right]$
- couche limite au second ordre :
  - à la paroi : $u_2 = v_2 = 0$
  - $\lim_{\bar{y}\to\infty} u_2(x,\bar{y}) = U_2(x,0) + \bar{y}\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0)$
  - $\lim_{\bar{y}\to\infty} p_2(x,\bar{y}) = P_2(x,0) + \bar{y}\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,0)$

Puisque V_1 est nulle à la paroi, la troisième équation de (1.12) entraîne que

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,0) = 0$$

Sachant que dans la couche limite

$$\frac{\partial p_1}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial p_2}{\partial \bar{y}} = 0$$

les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} p_1(x) = P_1(x,0) \\ p_2(x) = P_2(x,0) \end{cases}$$

Les figures 1.3 et 1.4 résument les caractéristiques des raccords obtenus à l'ordre 1 et à l'ordre 2 pour la vitesse tangentielle u. A l'ordre 1, l'asymptote est une droite verticale :

$$u(y) = U_1(x,0)$$

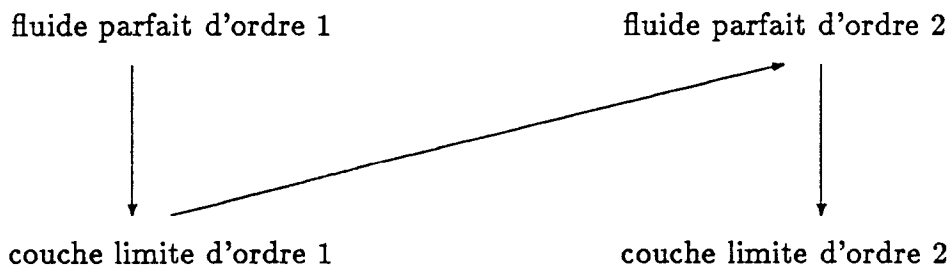
tandis qu'à l'ordre 2 c'est une droite oblique :

$$u(y) = U_1(x,0) + \varepsilon U_2(x,0) + y\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0)$$

On notera que le raccord asymptotique à l'ordre 1 ou 2 diffère du raccord au sens intuitif du terme par le fait qu'il n'assure pas de jonction réelle entre les deux solutions. La qualité de l'approximation globale dépendra donc de l'écart plus ou moins grand entre la solution externe et l'asymptote dans l'épaisseur de la couche limite. Un profil de vitesse quasiment rectiligne pour le fluide parfait au voisinage de la paroi permettra un excellent raccord à l'ordre 2 alors qu'un profil courbe le rendra impossible. Il faut de plus garder présent à l'esprit le fait que l'approximation asymptotique est d'autant plus précise que le nombre de Reynolds est grand, ce qui recouvre l'intuition physique que le raccord est d'autant mieux ajusté que la couche limite est fine.

1.2.4 Discussion

Compte tenu des conditions aux limites, le calcul de l'écoulement externe d'ordre 1 est indépendant des autres. Sa résolution conditionne la couche limite du premier ordre. Le calcul du fluide parfait d'ordre 2 nécessite la connaissance préalable du fluide parfait d'ordre 1 et de la couche limite d'ordre 1. De même, la couche limite d'ordre 2 suppose connus les écoulements externes d'ordre 1 et 2, ainsi que l'écoulement interne d'ordre 1. Les calculs doivent donc être enchaînés comme suit :



Il serait théoriquement possible de poursuivre le développement, mais à partir de l'ordre 3 des termes visqueux commencent à apparaître dans les équations externes qui deviennent de ce fait presque aussi complexes que les équations de Navier-Stokes. En pratique, on s'arrête donc à l'ordre 2.

L'effet de la couche limite d'ordre 1 sur le fluide parfait d'ordre 2 se traduit par la vitesse de transpiration à la paroi $V_2(x,0)$ imposée à ce dernier. Cette vitesse de transpiration peut être reliée à l'épaisseur de déplacement δ_1 définie par :

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u_1(x, y/\varepsilon)}{U_1(x,0)}\right) dy$$

en intégrant l'équation de continuité : (voir par exemple Cousteix [6])

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\bar{v}_1(x,\bar{y}) = -\int_0^{\bar{y}} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,\bar{Y})d\bar{Y}$$

Or, quand $\bar{y}$ tend vers l'infini, on a :

$$\bar{v}_1(x,\bar{y}) \sim V_2(x,0) + \bar{y}\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,0)$$

Donc :

$$V_2(x,0) + \bar{y}\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,0) \sim -\int_0^{\bar{y}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{u_1}{U_1(x,0)} - 1\right)U_1(x,0)\right) + \frac{\partial U_1}{\partial x}(x,0)\right] d\bar{Y}$$

$$V_2(x,0) - \bar{y}\frac{\partial U_1}{\partial x}(x,0) \sim \int_0^{\bar{y}} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{u_1}{U_1(x,0)}\right)U_1(x,0)\right] d\bar{Y} - \bar{y}\frac{\partial U_1}{\partial x}(x,0)$$

En effectuant le changement de variable :

$$y = \varepsilon \bar{y} \qquad d\bar{Y} = \frac{1}{\varepsilon} dY$$

il vient :

$$V_2(x,0) \sim \frac{d}{dx}\left[U_1(x,0)\int_0^{\varepsilon\bar{y}}\left(1 - \frac{u_1}{U_1(x,0)}\right)\frac{dY}{\varepsilon}\right]$$

Finalement, quand $\bar{y}$ tend vers l'infini :

$$\varepsilon V_2(x,0) = \frac{d}{dx}\left[\delta_1 U_1(x,0)\right]$$

L'effet de la couche limite d'ordre 1 sur le fluide parfait d'ordre 2 représente donc l'effet de déplacement.

La condition de raccord pour u_2 à l'extérieur de la couche limite fait intervenir le terme $\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0)$ qui, vu que $V_1(x,0) = 0$, représente la valeur à la paroi du rotationnel de l'écoulement externe du premier ordre :

$$\omega = \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x}$$

De même, en écrivant les équations d'ordre 2 pour l'énergie, on verrait apparaître le gradient normal de température à la paroi dans le fluide externe d'ordre 1.

En traitant le cas d'une paroi courbe (Van Dyke [30] et [32]) il faudrait faire intervenir la métrique du système de coordonnées curvilignes. Les équations de couche limite à l'ordre 1 seraient alors inchangées, mais les équations d'ordre 2 comprendraient des termes où figurent les rayons de courbure transversal et longitudinal de la paroi.

En résumé, les effets supplémentaires apparaissant au deuxième ordre sont : (Van Dyke [32])

- courbure longitudinale
- courbure transversale
- déplacement
- rotationnel de l'écoulement externe
- gradient de température externe.

On a vu que les conditions de raccord ne considéraient au deuxième ordre que la valeur à la paroi des grandeurs caractéristiques du fluide parfait et de leurs dérivées normales. La théorie de Van Dyke limitée au deuxième ordre ne permet donc pas de calculer des couches limites épaisses à l'intérieur desquelles l'écoulement externe est susceptible de varier non linéairement de façon importante. Dans de tels cas, le raccordement entre la couche limite et l'écoulement non visqueux serait peu satisfaisant.

D'un point de vue pratique, il est intéressant de noter que le fluide parfait d'ordre 2 vérifie les mêmes équations qu'à l'ordre 1 : en effet, on constate que les variables reconstituées $U_1 + \varepsilon U_2$, $V_1 + \varepsilon V_2$, $P_1 + \varepsilon P_2$ vérifient les équations d'Euler à des termes d'ordre ε^2 près. Il est donc possible de réutiliser le même programme de résolution à condition de remplacer la condition de glissement à la paroi par la vitesse de transpiration. On obtient alors des grandeurs combinées :

$$\tilde{U}_2 = U_1 + \varepsilon U_2 + O(\varepsilon^2)$$

Toutefois, les variables d'ordre 2 obtenues par des formules du type :

$$U_2 = \frac{\tilde{U}_2 - U_1}{\varepsilon}$$

dépendront de ε, ce qui ne serait pas le cas en résolvant directement l'équation aux perturbations (1.13). Les mêmes remarques s'appliquent aux équations de couche limite dans le cas où la courbure de la paroi est négligée. Dans le cas contraire, les équations de couche limite d'ordre 2 ne sont plus égales aux équations d'ordre 1 écrites pour de petites perturbations car elles comprennent des termes liés à la courbure qui n'apparaissent pas au premier ordre.

Chapitre 2

FORMULATION DEFICITAIRE

2.1 Principe

Le but de la méthode développée ici est de construire une théorie de couche limite modifiée qui permette un raccord correct à tous les ordres entre la couche limite et l'écoulement externe quelle que soit l'allure de ce dernier, tout en conservant les avantages essentiels apportés par les techniques de perturbations, à savoir le découplage des calculs visqueux et non visqueux, et la possibilité d'utiliser des méthodes de marche pour la résolution dans la zone interne.

En effet, bien que cette étude soit d'abord exposée dans le cas d'un écoulement incompressible, elle est destinée à être utilisée pour des écoulements compressibles hypersoniques sur des corps émoussés. On sait que dans ce cas, la présence d'une onde de choc détachée courbe entraîne l'existence de gradients d'entropie et donc d'un rotationnel non nul dans la couche de choc (voir par exemple Bonnet, Luneau [5]). On a pour le fluide parfait :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \frac{U_\infty \cos\theta}{R}\frac{(1-\sigma)^2}{\sigma}$$

et l'équation de Crocco :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \wedge \vec{V} = T.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,S$$

où R est le rayon de courbure du choc, θ l'angle du choc avec l'écoulement en amont et σ le rapport des masses volumiques avant et après le choc. Sur l'arrière du corps, l'onde de choc devient quasiment rectiligne et le saut d'entropie est constant. Le gradient d'entropie reste donc confiné dans la zone où les lignes de courant ont traversé l'onde de choc dans la région du nez, là où la courbure est forte (fig. 2.1). La présence du rotationnel ne se fait donc sentir que jusqu'à une certaine hauteur au-dessus de la paroi. Comme on l'a vu, la théorie classique de couche limite ne peut pas en tenir compte puisque elle ne fait intervenir que la valeur du rotationnel à la paroi lorsqu'on se limite au second ordre. D'autre part, l'effet de déplacement est souvent faible dans les écoulements hypersoniques sur une paroi froide et on peut espérer qu'il se révèle négligeable, ce qui éviterait d'avoir à calculer l'écoulement de fluide parfait perturbé.

Revenons maintenant à l'écoulement incompressible. Au lieu d'utiliser les grandeurs réelles de la couche limite, on peut travailler sur la différence entre celles-ci et les variables correspondantes de l'écoulement externe (fig. 2.2). Ces variables dites "déficitaires" ont été utilisées par Le Balleur [17] et East [10] dans des algorithmes de couplage avec des méthodes intégrales, mais sans faire appel aux techniques asymptotiques. En notant avec l'indice E les variables externes et avec l'indice D les variables déficitaires, on pose :

$$\begin{cases} u = u_E + u_D \\ v = v_E - v_E(x,0) + v_D \\ p = p_E + p_D \end{cases}$$

Le terme $v_E(x,0)$ a été ajouté par rapport à la décomposition utilisée par Le Balleur, car il permet de conserver la même condition $v_D = 0$ à la paroi, qu'il y ait ou non une vitesse de transpiration pour le fluide parfait. On va maintenant construire deux développements asymptotiques : un pour les variables externes, qui constituera une solution approchée loin de la paroi, et un autre pour les variables déficitaires, valable dans la couche limite.

Comme dans la théorie de Van Dyke, l'application du principe de moindre dégénérescence aux équations de Navier-Stokes suggère l'utilisation des coordonnées cartésiennes (x, y) dans la zone externe et d'une coordonnée normale dilatée $\bar{y} = y/\varepsilon$ dans la zone interne, avec le petit paramètre $\varepsilon = 1/\sqrt{\mathrm{Re}}$, Re étant le nombre de Reynolds associé au problème (voir 1.2.1). Il faut bien noter que les appellations "interne" et "externe" ne désignent que des systèmes de coordonnées et des zones de validité puisque, du fait du recouvrement des développements, les domaines de définition sont identiques. En effet, l'écoulement externe non visqueux est défini jusqu'à la paroi et la couche limite jusqu'à l'infini. La courbure de la paroi est encore négligée.

2.2 Développement externe

Le développement externe est semblable à celui de Van Dyke est s'écrit :

$$\begin{cases} u_E = U_1(x,y) + \varepsilon U_2(x,y) + \cdots \\ v_E = V_1(x,y) + \varepsilon V_2(x,y) + \cdots \\ p_E = P_1(x,y) + \varepsilon P_2(x,y) + \cdots \end{cases}$$

Par définition, dans la zone externe, les variables déficitaires sont nulles :

$$\begin{cases} u = u_E \\ v = v_E \\ p = p_E \end{cases}$$

En reportant ces développements dans les équations de Navier-Stokes et en égalant les termes de même ordre en ε, on retrouve les mêmes équations que dans la théorie de Van Dyke, à savoir au premier ordre les équations d'Euler (1.12) et au second ordre les équations d'Euler linéarisées pour de petites perturbations (1.13).

Avant de passer au développement interne, il est utile d'étudier l'ordre de grandeur des différentes variables externes au voisinage de la paroi. En règle générale, les variables externes sont supposées d'ordre 1 par rapport à ε, ainsi que leurs dérivées par rapport aux coordonnées externes x et y. La seule exception concerne les coefficients V_1 et V_2 de la vitesse normale. Leur développement au voisinage de la paroi s'écrit :

$$V_1(x,y) = V_1(x,0) + y\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,0) + \cdots$$

$$V_2(x,y) = V_2(x,0) + y\frac{\partial V_2}{\partial y}(x,0) + \cdots$$

Soit en coordonnées internes :

$$V_1(x,y) - V_1(x,0) = \varepsilon\left(\bar{y}\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,0) + O(\varepsilon)\right)$$

$$V_2(x,y) - V_2(x,0) = \varepsilon\left(\bar{y}\frac{\partial V_2}{\partial y}(x,0) + O(\varepsilon)\right)$$

Au voisinage de la paroi, ces termes sont d'ordre ε et on pose :

$$V_1(x,y) - V_1(x,0) = \varepsilon\tilde{V}_1(x,y)$$

$$V_2(x,y) - V_2(x,0) = \varepsilon\tilde{V}_2(x,y)$$

Il en est de même de leurs dérivées par rapport à x.

Comme on envisage des cas où le développement de Taylor à l'ordre 2 ne décrit pas correctement l'évolution du fluide parfait au voisinage de la paroi, on s'abstiendra de l'utiliser et on écrira simplement pour les autres variables des relations du type :

$$\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial U_1}{\partial y}(x,\varepsilon\bar{y})$$

2.3 Développement interne

Le développement des variables déficitaires s'écrit :

$$\begin{cases} u_D = u_1(x,\bar{y}) + \varepsilon u_2(x,\bar{y}) + \cdots \\ v_D = \varepsilon\bar{v}_1(x,\bar{y}) + \varepsilon^2\bar{v}_2(x,\bar{y}) + \cdots \\ p_D = p_1(x,\bar{y}) + \varepsilon p_2(x,\bar{y}) + \cdots \end{cases}$$

Les coefficients sont supposés d'ordre 1 ainsi que leurs dérivées par rapport à x et $\bar{y}$. En introduisant ces développements dans les équations de Navier-Stokes (1.11), celles-ci deviennent :

- continuité :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}} + \varepsilon\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{y}} = 0$$

- quantité de mouvement sur x :

$$(U_1+\varepsilon U_2+u_1+\varepsilon u_2)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial U_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)$$
$$+\Big(V_1+\varepsilon V_2-V_1(x,0)-\varepsilon V_2(x,0)+\varepsilon\bar{v}_1+\varepsilon^2\bar{v}_2\Big)\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}+\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}\right)$$
$$=-\frac{\partial P_1}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial P_2}{\partial x}-\frac{\partial p_1}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial p_2}{\partial x}$$
$$+\varepsilon^2\left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{y}^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \bar{y}^2}\right]$$

- quantité de mouvement sur y :

$$(U_1+\varepsilon U_2+u_1+\varepsilon u_2)\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial x}(x,0)-\varepsilon\frac{\partial V_2}{\partial x}(x,0)+\varepsilon\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x}\right)$$
$$+\Big(V_1+\varepsilon V_2-V_1(x,0)-\varepsilon V_2(x,0)+\varepsilon\bar{v}_1+\varepsilon^2\bar{v}_2\Big)\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}}+\varepsilon\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{y}}\right)$$
$$=-\frac{\partial P_1}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial P_2}{\partial y}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_1}{\partial \bar{y}}-\frac{\partial p_2}{\partial \bar{y}}+\varepsilon^2\left[\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}(x,0)-\varepsilon\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}(x,0)\right.$$
$$\left.+\varepsilon\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \bar{y}^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial \bar{y}^2}\right]$$

En développant, en soustrayant les équations externes d'ordre 1 et 2 et en négligeant les termes en ε^2, il reste :

- continuité :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}}+\varepsilon\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{y}}\right)=0$$

- quantité de mouvement sur x :

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+U_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_1\frac{\partial U_1}{\partial x}+\varepsilon\left(u_2\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+U_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+U_2\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_1\frac{\partial U_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)$$
$$+\bar{v}_1\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}-V_1(x,0)\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{V_1-V_1(x,0)}{\varepsilon}\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}+\Big(V_2-V_2(x,0)\Big)\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}+\Big(V_1-V_1(x,0)\Big)\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}$$
$$+\varepsilon\left(\bar{v}_1\frac{\partial U_1}{\partial y}+\bar{v}_1\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}+\bar{v}_2\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}-V_2(x,0)\frac{\partial U_1}{\partial y}-V_1(x,0)\frac{\partial U_2}{\partial y}+\Big(V_2-V_2(x,0)\Big)\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}\right)$$
$$=-\frac{\partial p_1}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial p_2}{\partial x}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{y}^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial \bar{y}^2}$$

- quantité de mouvement sur y :

$$u_1\frac{\partial}{\partial x}\Big(V_1-V_1(x,0)\Big)+\Big(V_1-V_1(x,0)\Big)\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}}-U_1\frac{\partial V_1}{\partial x}(x,0)-V_1(x,0)\frac{\partial V_1}{\partial y}$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_1}{\partial \bar{y}}-\frac{\partial p_2}{\partial \bar{y}}$$

Puis, en introduisant $\tilde{V}_1$ et $\tilde{V}_2$ et en séparant les termes d'ordre 1 et 2, on obtient :

- ordre 1 :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{y}}=0 \\[2ex]
(U_1+u_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+u_1\dfrac{\partial U_1}{\partial x}+(\tilde{V}_1+\bar{v}_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}-V_1(x,0)\dfrac{\partial U_1}{\partial y}=-\dfrac{\partial p_1}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial \bar{y}^2} \\[2ex]
0=-\dfrac{\partial p_1}{\partial \bar{y}}
\end{array}\right.$$

- ordre 2 :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+\dfrac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{y}}=0 \\[2ex]
(U_2+u_2)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+(U_1+u_1)\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+u_1\dfrac{\partial U_2}{\partial x}+u_2\dfrac{\partial U_1}{\partial x} \\
+\bar{v}_1\dfrac{\partial U_1}{\partial y}+(\tilde{V}_1+\bar{v}_1)\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}+(\tilde{V}_2+\bar{v}_2)\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}-V_2(x,0)\dfrac{\partial U_1}{\partial y}-V_1(x,0)\dfrac{\partial U_2}{\partial y} \\
\hfill =-\dfrac{\partial p_2}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial \bar{y}^2} \\[2ex]
-U_1\dfrac{\partial V_1}{\partial x}(x,0)-V_1(x,0)\dfrac{\partial V_1}{\partial y}=-\dfrac{\partial p_2}{\partial \bar{y}}
\end{array}\right.$$

2.4 Conditions de raccord

Comme pour la théorie de Van Dyke, les conditions de raccord entre les deux zones fournissent les conditions aux limites manquantes pour les deux problèmes. A l'extérieur de la couche limite, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}
u \longrightarrow u_E \\
v \longrightarrow v_E \\
p \longrightarrow p_E
\end{array}\right.$$

ce qui se traduit pour les variables déficitaires par :

$$\left\{\begin{array}{lll}
u_D=u_1+\varepsilon u_2 & \longrightarrow 0 \\[1ex]
v_D=\varepsilon\bar{v}_1+\varepsilon^2\bar{v}_2 & \longrightarrow v_E(x,0)=V_1(x,0)+\varepsilon V_2(x,0) \\[1ex]
p_D=p_1+\varepsilon p_2 & \longrightarrow 0
\end{array}\right.$$

En identifiant les termes de même ordre en ε, il vient au premier ordre :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\bar{y}\to\infty} u_1 = 0 & V_1(x,0) = 0 \\ \lim\limits_{\bar{y}\to\infty} p_1 = 0 & \end{cases}$$

et au deuxième ordre :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\bar{y}\to\infty} u_2 = 0 & V_2(x,0) = \lim\limits_{\bar{y}\to\infty} \bar{v}_1(x,\bar{y}) \\ \lim\limits_{\bar{y}\to\infty} p_2 = 0 & \end{cases}$$

A la paroi, on a :

$$u = U_1 + u_1 + \varepsilon(U_2 + u_2) = 0$$

$$v = \varepsilon\bar{v}_1 + \varepsilon^2\bar{v}_2 = 0$$

soit :

$$u_1(x,0) = -U_1(x,0)$$

$$u_2(x,0) = -U_2(x,0)$$

$$\bar{v}_1(x,0) = \bar{v}_2(x,0) = 0$$

La condition $V_1(x,0) = 0$ transforme l'équation déficitaire de quantité de mouvement d'ordre 2 en :

$$\frac{\partial p_2}{\partial \bar{y}} = 0$$

Compte tenu des conditions de raccord, il vient :

$$p_1(x,\bar{y}) = p_2(x,\bar{y}) = 0$$

En l'absence d'effets de courbure, la pression déficitaire est nulle à l'ordre 1 comme à l'ordre 2. La pression dans la couche limite est donc partout égale à la pression locale du fluide parfait et non plus à sa valeur à la paroi comme dans la théorie de Van Dyke. En revanche, on retrouve un effet de déplacement du même type par le biais d'une vitesse de transpiration appliquée au fluide parfait d'ordre 2.

On peut réécrire les équations internes dans le système de coordonnées externes en posant :

$$v_1(x,y) = \varepsilon\bar{v}_1(x,\bar{y}) \qquad v_2(x,y) = \varepsilon\bar{v}_2(x,\bar{y})$$

soit :

$$v = v_1(x,y) + \varepsilon v_2(x,y)$$

On obtient au premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \\ \\ (U_1 + u_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + (V_1 + v_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ \\ p_1 = 0 \end{cases}$$

et au second ordre :

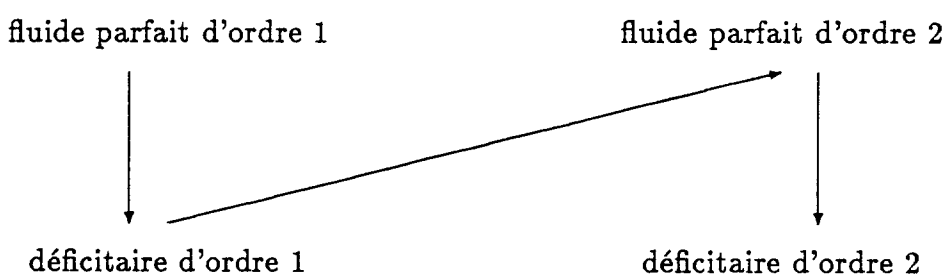
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \\ \\ (U_2 + u_2)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + (U_1 + u_1)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + u_1\dfrac{\partial U_2}{\partial x} + u_2\dfrac{\partial U_1}{\partial x} \\ +(V_1 + v_1)\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar{y}} + \Big(V_2 - V_2(x,0) + v_2\Big)\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} + \Big(\dfrac{v_1}{\varepsilon} - V_2(x,0)\Big)\dfrac{\partial U_1}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \\ \\ p_2 = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites se répartissent ainsi :

- fluide parfait au premier ordre :
  - à l'infini : conditions imposées
  - à la paroi : $V_1 = 0$
- couche limite au premier ordre :
  - à la paroi : $u_1 = -U_1 \qquad v_1 = 0$
  - à l'extérieur : $u_1 = 0$
- fluide parfait au deuxième ordre :
  - à l'infini : nullité des perturbations
  - $V_2(x,0) = \dfrac{1}{\varepsilon}\lim\limits_{y\to\infty} v_1(x,y)$
- couche limite au deuxième ordre :
  - à la paroi : $u_2 = -U_2 \qquad v_2 = 0$
  - à l'extérieur : $u_2 = 0$

2.5 Discussion

Comme pour la théorie classique, les différents systèmes d'équations peuvent être résolus séparément à condition de respecter l'ordre suivant :



Les équations externes sont exactement les mêmes que dans la théorie de Van Dyke. Les équations internes peuvent encore être résolues par des méthodes de marche peu coûteuses. Cependant, les conditions aux limites issues du raccordement à l'extérieur de la couche limite assurent dans tous les cas un raccord correct entre les profils de la couche limite et ceux de l'écoulement non visqueux, même à l'ordre 1 ou 2.

Pour comparer les équations obtenues par les deux théories, il est intéressant de recombiner les équations externes et déficitaires de même ordre. A l'ordre 1, on obtient pour les grandeurs réelles

$$\begin{cases} u = U_1 + u_1 \\ v = V_1 + \varepsilon \bar{v}_1 \\ p = P_1 + p_1 \end{cases}$$

les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + V_1\dfrac{\partial U_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ p = P_1(x,y) \end{cases}$$

Soit, en remplaçant V_1 par $v - \varepsilon\bar{v}_1$ et u_1 par $u - U_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon v_1\dfrac{\partial U_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \\ p = P_1(x,y) \end{cases}$$

Ces équations sont cohérentes avec les équations de Prandtl puisqu'elles ne diffèrent que par des termes d'ordre supérieur. On notera que les équations déficitaires ne contiennent pas le terme

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}$$

correspondant à la tension visqueuse dans l'écoulement externe. La solution obtenue ne sera donc valable que dans les cas où ces effets visqueux sont effectivement faibles.

A l'ordre 2, en posant :

$$\begin{cases} u = U_1 + \varepsilon U_2 + u_1 + \varepsilon u_2 \\ v = V_1 + \varepsilon V_2 - \varepsilon V_2(x,0) + \varepsilon\bar{v}_1 + \varepsilon^2\bar{v}_2 \\ p = P_1 + \varepsilon P_2 + p_1 + \varepsilon p_2 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^2(U_2 + u_2)\dfrac{\partial}{\partial x}(U_2 + u_2) \\ \qquad + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon^2\Big(V_2 - V_2(x,0) + \varepsilon v_2\Big)\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(U_2 + u_2\Big) \\ \qquad - \varepsilon^2\left(\bar{v}_2\dfrac{\partial U_1}{\partial y} + \bar{v}_1\dfrac{\partial U_2}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(u_1 + \varepsilon u_2) \\ \\ p = P_1(x,y) + \varepsilon P_2(x,y) \end{cases}$$

Là encore, ces équations ne diffèrent de celles de Van Dyke que par des termes d'ordre ε^2. En résumé, on peut dire que la solution déficitaire d'ordre n est égale à la solution de Van Dyke du même ordre plus des termes d'ordre $n+1$. Ceci est un exemple de non unicité des développements asymptotiques.

Il faut aussi souligner que l'effet de déplacement sera en général différent d'une méthode à l'autre car les vitesses de transpiration peuvent différer par des termes d'ordre ε :

$$V_T(\text{déficitaire}) = V_T(\text{Van Dyke}) + O(\varepsilon)$$

En somme, la formulation déficitaire des équations de couche limite permet d'obtenir une solution conservant les principaux avantages de la théorie classique mais offrant une meilleure approximation de l'écoulement, notamment au niveau du raccord avec l'écoulement externe. Cet avantage est surtout intéressant pour les développements d'ordre peu élevé utilisés en pratique.

Chapitre 3

SOLUTIONS AUTO-SEMBLABLES SUR PLAQUE PLANE

3.1 Cas étudié

Un des premiers exemples traités par la théorie du deuxième ordre est le cas de la plaque plane soumise à un écoulement incident parallèle et uniformément cisaillé, sans gradient de pression (fig. 3.1). Il a été étudié par Li une première fois de façon erronée [18], puis de façon correcte [19]. Il a ensuite donné lieu à de vives discussions auxquelles ont notamment pris part Glauert [14], Murray [24], Van Dyke [30] et [32], et Toomre et Rott [29]. Son intérêt réside dans l'existence de solutions auto-semblables au premier ordre et au second ordre et surtout dans la possibilité de calculer l'écoulement externe d'ordre 2 analytiquement. Des extensions ont été développées dans des cas avec gradient de pression (Werle et Davis [37]), mais sans calcul explicite du fluide parfait d'ordre 2.

Dans le cas qui nous intéresse, en l'absence de viscosité, le profil imposé à l'infini en amont de la plaque se maintient tout au long de celle-ci. La solution des équations d'Euler d'ordre 1 est donc :

$$\begin{cases} U_1 = 1 + \omega y \\ V_1 = 0 \\ P_1 \text{ constante} \end{cases}$$

3.2 Solution de Murray

Murray [24] a donné le premier une solution en accord avec la théorie de Van Dyke du deuxième ordre, quoique obtenue de façon différente. La procédure adoptée ici est strictement conforme à l'approche de Van Dyke.

3.2.1 Couche limite d'ordre 1

Les équations de couche limite d'ordre 1 s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \\ u_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p_1}{\partial y} \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{array}{ll} y = 0 : & u_1 = v_1 = 0 \\ y \to \infty : & u_1 \to U_1(x,0) \\ & p_1 \to P_1(x,0) \end{array}$$

On obtient d'emblée :

$$p_1 = P_1 = \text{ constante}$$

Introduisons maintenant la variable de similitude

$$\eta = y\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}$$

et cherchons s'il existe une solution de la forme

$$u_1 = \frac{df}{d\eta} = f'(\eta)$$

Les dérivées se transforment selon :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{x}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} f''(\eta) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{Re}}{x} f'''(\eta)$$

L'équation de continuité permet de calculer v_1 :

$$v_1 = -\frac{1}{2\sqrt{x\,\mathrm{Re}}}(f - \eta f')$$

L'équation de quantité de mouvement devient alors :

$$ff'' + 2f''' = 0$$

$$\begin{array}{ll} \eta = 0 : & f = f' = 0 \\ \eta \to \infty : & f' = 1 \end{array}$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Blasius. Elle s'intègre numériquement et la solution est tabulée dans de nombreux ouvrages (par exemple Cousteix [6]). On obtient pour la vitesse normale à l'extérieur de la couche limite :

$$\lim_{y\to\infty} v_1 = \lim_{y\to\infty} \left[\frac{-1}{2\sqrt{x\ \mathrm{Re}}}(f - \eta f')\right] = \frac{\beta}{2\sqrt{x\ \mathrm{Re}}}$$

avec $\beta = 1,7208$.

3.2.2 Fluide parfait d'ordre 2

La deuxième étape consiste à calculer l'écoulement externe d'ordre 2 perturbé par la couche limite. Il vérifie les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + \dfrac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \\ U_2\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + U_1\dfrac{\partial U_2}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial U_1}{\partial y} + V_1\dfrac{\partial U_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial P_2}{\partial x} \\ U_2\dfrac{\partial V_1}{\partial x} + U_1\dfrac{\partial V_2}{\partial x} + V_2\dfrac{\partial V_1}{\partial y} + V_1\dfrac{\partial V_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial P_2}{\partial y} \end{cases}$$

En éliminant la pression entre les deux équations de quantité de mouvement, il vient :

$$U_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x}\right) + V_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = 0$$

Cette équation exprime que le rotationnel de la perturbation se conserve le long des lignes de courant de l'écoulement de base. Comme la perturbation s'annule à l'infini en amont de la plaque, ce rotationnel est uniformément nul :

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0$$

L'équation de continuité permet d'introduire la fonction de courant Ψ telle que :

$$U_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad V_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Ψ vérifie alors l'équation de Laplace :

$$\Delta\Psi = 0$$

Utilisons maintenant les coordonnées polaires [1] :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

et cherchons Ψ sous la forme :

$$\Psi = \Psi_1(r).\Psi_2(\theta)$$

L'équation de Laplace devient :

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\Psi_1\frac{d^2\Psi_2}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\Psi_2\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi_1}{dr}\right) = 0$$

Les variables se séparent :

$$\frac{1}{\Psi_2}\frac{d^2\Psi_2}{d\theta^2} = -r\frac{1}{\Psi_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Psi_1}{dr}\right) = -A^2$$

où A est une constante. Finalement, on obtient les solutions :

$$\begin{cases} \Psi_1 = c\,r^A + d\,r^{-A} \\ \Psi_2 = a\cos A\theta + b\sin A\theta \end{cases}$$

Les composantes de la perturbation de vitesse sont :

$$\begin{cases} U_2 = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial\Psi}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta} \\ V_2 = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial\Psi}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\theta} \end{cases}$$

Les constantes sont déterminées par les conditions aux limites :

- $x > 0,\ y = 0$: (sur la plaque)

$$V_2(x,0) = \lim_{y\to\infty}\frac{v_1}{\varepsilon} = \frac{\beta}{2\sqrt{x}}$$

soit en $\theta = 0$:

$$V_2(x,0) = -a\left(cA\,r^{A-1} - dA\,r^{-A-1}\right) = \frac{\beta}{2\sqrt{r}}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{1}{2},\ d = 0,\ \beta = -ac$$

[1] Un calcul en notation complexe donne plus rapidement le même résultat

- $x < 0,\ y = 0$:

$$V_2(x,0) = 0$$

soit en $\theta = \pi$:

$$V_2(x,0) = b\left(-\frac{\beta}{2a}\frac{1}{\sqrt{r}}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow b = 0$$

La solution finale est donc :

$$\begin{aligned}
\Psi &= -\beta\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} \\
U_2 &= -\frac{\beta}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \\
V_2 &= \frac{\beta}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

d'où :

$$P_2 = \frac{\beta}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} - \beta\omega\sqrt{r}\cos^3\frac{\theta}{2}$$

On remarquera que U_2 et V_2 tendent bien vers zéro quand r tend vers l'infini, mais que ce n'est pas le cas pour Ψ. La perturbation de pression P_2 comprend un terme proportionnel au cisaillement ω et un terme indépendant de ce dernier, qui s'annule à la paroi ($\theta = 0$). Puisque la perturbation est irrotationnelle, il existe aussi une fonction potentielle :

$$\Phi = \beta\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$$

On notera enfin que U_2 est nulle au niveau de la plaque : par conséquent, il n'y aura pas d'effet de déplacement pour la composante longitudinale de la vitesse dans la couche limite. Le gradient de pression à la paroi vaut :

$$-\frac{\partial P_2}{\partial x}(x,0) = V_2(x,0)\frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0) = \frac{\beta}{2\sqrt{x}}\omega$$

Ce gradient de pression a vu son existence contestée mais s'avère bien réel. Il représente l'interaction entre l'effet de déplacement $V_2(x,0)$ et l'effet de rotationnel $\dfrac{\partial U_1}{\partial y}$.

Si l'on raisonne en termes d'épaisseur de déplacement et non plus de vitesse de transpiration, le fluide parfait d'ordre 2 correspond à l'écoulement sur une parabole de demi-épaisseur :

$$\delta_1 = \beta\sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}$$

3.2.3 Couche limite d'ordre 2

Il reste enfin à calculer la couche limite d'ordre 2 en résolvant les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \\ u_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial p_2}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \\ p_2 = P_2(x, 0) \end{cases}$$

assorties des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} y = 0 : &\qquad u_2 = v_2 = 0 \\ y \to \infty : &\qquad u_2 \to U_2(x,0) + \frac{y}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial y}(x,0) = \omega y \sqrt{\mathrm{Re}} \end{aligned}$$

Cherchons u_2 sous la forme :

$$u_2 = \omega \sqrt{x} g'(\eta)$$

Il vient :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\omega}{2\sqrt{x}}(g' - \eta g'') \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \omega \sqrt{\mathrm{Re}}\, g''$$

$$v_2 = -\frac{\omega}{\sqrt{\mathrm{Re}}}(g - \frac{\eta}{2} g') \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\omega\ \mathrm{Re}}{\sqrt{x}}\, g'''$$

La fonction g vérifie l'équation différentielle :

$$2g''' + fg'' - f'g' + 2f''g = -\beta \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \eta = 0 : &\qquad g = g' = 0 \\ \eta \to \infty : &\qquad g' = \eta \end{aligned}$$

Après intégration numérique, on trouve pour la vitesse à l'extérieur de la couche limite :

$$\lim_{y \to \infty} v_2 = -7,1883 \frac{\omega}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

La vitesse globale dans la couche limite vaut :

$$u = u_1 + \varepsilon u_2 = f'(\eta) + \omega \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}} g'(\eta)$$

Le nombre sans dimension

$$\xi = \omega \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}$$

représente le rapport du cisaillement dans le fluide parfait au cisaillement moyen dans la couche limite. La solution d'ordre 2 sera d'autant plus valable que ξ sera petit. Le coefficient de frottement vaut :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{x\ \mathrm{Re}}} \left[f''(0) + \xi g''(0) \right]$$

soit :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0,332}{\sqrt{x\,\mathrm{Re}}} + 3,1260\frac{\omega}{\mathrm{Re}}$$

La contribution de l'écoulement externe au frottement est :

$$\frac{C_{fE}}{2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\omega$$

On constate que l'augmentation du frottement à la paroi est supérieure à trois fois le cisaillement du fluide parfait. Tous les termes de la couche limite d'ordre 2 sont proportionnels à ω. On retrouve le fait que la solution de Blasius est exacte à l'ordre 2 en l'absence de rotationnel dans l'écoulement externe (résultat obtenu par Goldstein, cité par Van Dyke [33]).

La figure 3.2 montre les solutions internes et externes d'ordre 1 et 2. On constate que dans ce cas l'effet du déplacement sur la vitesse longitudinale est extrêmement faible sur l'ensemble du domaine. Les solutions externes d'ordre 1 et 2 sont pratiquement confondues. On a également fait figurer la solution composite du premier ordre dont l'expression est :

$$u^c = f' + \omega y = f' + \xi\eta$$

Bien que ce dernier se raccorde correctement à l'extérieur de la couche limite, il reste encore assez éloigné du profil d'ordre 2. En particulier, le coefficient de frottement est trop faible :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0,332}{\sqrt{x\,\mathrm{Re}}} + \frac{\omega}{\mathrm{Re}}$$

3.3 Solution déficitaire

La solution pour l'écoulement externe d'ordre 1 est bien sûr la même que précédemment :

$$\begin{cases} U_1 = 1 + \omega y \\ V_1 = 0 \\ P_1 \text{ constante} \end{cases}$$

Les équations internes du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \\ (U_1 + u_1)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \end{cases}$$

avec comme conditions aux limites :

$$\begin{array}{lll} y = 0 \ : & u_1 = -U_1 & v_1 = 0 \\ y \to \infty : & u_1 \to 0 & \end{array}$$

Introduisons les variables de similitude :

$$\begin{cases} \xi = \omega\sqrt{\dfrac{x}{\mathrm{Re}}} & \xi \ll 1 \\ \eta = y\sqrt{\dfrac{\mathrm{Re}}{x}} \end{cases}$$

et cherchons u_1 sous la forme :

$$U_1 + u_1 = f_0'(\eta) + \xi f_1'(\eta) + o(\xi)$$

Comme on s'intéresse seulement aux solutions d'ordre 2, les termes en ξ^2 et au delà seront négligés. L'équation de continuité fournit :

$$v_1 = -\frac{1}{2\sqrt{x\,\mathrm{Re}}}\Big[f_0 + 2\xi f_1 - \eta(f_0' + \xi f_1')\Big]$$

En dérivant u_1, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{1}{2x}\Big[\eta(f_0'' + \xi f_1'') - \xi f_1'\Big] \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}(f_0'' + \xi f_1'' - \xi) \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= \frac{\mathrm{Re}}{x}(f_0''' + \xi f_1''') \end{aligned}$$

En reportant ces expressions dans l'équation de quantité de mouvement et en séparant les termes d'ordre 1 et ξ, on obtient :

$$f_0 f_0'' + 2f_0''' = 0 \tag{3.2}$$

$$2f_1''' + f_0 f_1'' - f_0' f_1' + 2f_0'' f_1 = f_0 - \eta f_0' \tag{3.3}$$

$$\eta = 0 \quad : \qquad f_0' = f_0 = 0 \qquad f_1' = f_1 = 0$$

$$\eta \to \infty : \qquad f_0' = 1 \qquad f_1' = \eta$$

La première équation n'est autre que l'équation de Blasius. Le terme principal de la solution déficitaire est donc égal à la solution de Van Dyke d'ordre 1 et les deux solutions sont confondues en l'absence de rotationnel ($\xi = 0$). La deuxième équation ressemble fort à l'équation de Van Dyke d'ordre 2 (3.1) avec comme deuxième membre $f_0 - \eta f_0'$ au lieu de $-\beta$. Si l'on se souvient que

$$\beta = -\lim_{\eta\to\infty}\Big(f(\eta) - \eta f'(\eta)\Big) = \lim_{\eta\to\infty} 2v_1\sqrt{x\mathrm{Re}}$$

ceci veut dire qu'on a remplacé la vitesse de transpiration $v(x,\infty)$ par la vitesse locale $v(x,\eta)$. La figure 3.3 montre la comparaison entre la fonction g de Van Dyke et la fonction f_1' déficitaire. Le terme $\xi f_1'$ du développement déficitaire du premier ordre représente une partie des termes d'ordre 2 du développement de Van Dyke.

La solution déficitaire d'ordre 1 est égale à la solution de Van Dyke d'ordre 1 plus une partie des termes d'ordre 2.

On obtient pour la vitesse de transpiration :

$$\begin{aligned} V_2(x,0) &= \lim_{y\to\infty} \frac{-1}{2\sqrt{x}}\left[f_0 - \eta f_0' + \xi(2f_1 - \eta f_1')\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\beta - \xi\gamma) \end{aligned}$$

avec $\beta = 1,7208$ et $\gamma = 7,4692$. La solution de Van Dyke d'ordre 2 donne la même expression mais avec $\gamma = 14,3767$. Là encore, la solution déficitaire reprend la vitesse de transpiration de la solution de Blasius et y ajoute un terme supplémentaire qui représente une partie des termes d'ordre 2.

En ce qui concerne le fluide parfait d'ordre 2, le premier terme de la vitesse de transpiration correspond à la solution calculée précédemment avec la théorie de Van Dyke. Le second terme donne une perturbation en ξ^2 dans le fluide parfait, qui sera négligée ici. On se bornera donc à calculer le premier terme de la solution déficitaire d'ordre 2. La solution d'ordre 2 strict ainsi obtenue, quoique incomplète puisque privée des termes en ξ^2, pourra cependant être utilement comparée à la solution de Van Dyke.

Les équations pour la couche limite d'ordre 2 sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \\[2ex] (U_2 + u_2)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + (U_1 + u_1)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + u_1\dfrac{\partial U_2}{\partial x} + u_2\dfrac{\partial U_1}{\partial x} \\ +(V_1 + v_1)\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \Big(V_2 - V_2(x,0) + v_2\Big)\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \left(\dfrac{v_1}{\varepsilon} - V_1(x,0)\right)\dfrac{\partial U_1}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \end{cases}$$

On reprend pour U_2 et V_2 les valeurs obtenues au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{\beta}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \\ V_2 &= \frac{\beta}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Pour une couche limite mince, assez loin du bord d'attaque, on a :

$$r \simeq x \qquad \theta \simeq \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Donc :

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{\beta}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \simeq -\frac{\beta}{2\sqrt{x}}\frac{y}{2x} = -\frac{\beta\eta\xi}{4\omega x\sqrt{x}} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} &= \frac{\beta}{4\sqrt{r}}\sin\frac{3\theta}{2} \simeq \frac{\beta}{4\sqrt{x}}\frac{3y}{2x} = \frac{3\beta\eta\xi}{8\omega x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$V_2 - V_2(x,0) = \frac{\beta}{2\sqrt{r}}\left(\cos\frac{\theta}{2} - 1\right) \simeq \frac{\beta}{2\sqrt{x}}\frac{-y^2}{8x^2} = -\frac{\beta\eta^2\xi}{16x^2\omega\sqrt{\mathrm{Re}}}$$

On cherche u_2 sous la forme :

$$u_2 = \omega\sqrt{x}g_1'(\eta)$$

Soit :

$$v_2 = -\frac{\omega}{2\sqrt{\mathrm{Re}}}(2g_1 - \eta g_1')$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\omega}{2\sqrt{x}}(g_1' - \eta g_1'')$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \omega\sqrt{\mathrm{Re}}\, g_1''$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\omega\ \mathrm{Re}}{\sqrt{x}}\, g_1'''$$

En reportant dans l'équation de quantité de mouvement et en supprimant les termes en ξ et ξ^2, il reste :

$$2g_1''' + f_0 g_1'' - f_0' g_1' + 2f_0'' g_1 = -f_0 + \eta f_0' - \beta \tag{3.4}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{array}{ll} \eta = 0 : & g_1' = g_1 = 0 \\ \eta \to \infty : & g_1' = 0 \end{array}$$

En additionnant l'équation (3.4) et l'équation (3.3), on retrouve exactement l'équation (3.1) de Van Dyke pour la fonction $g = f_1 + g_1$. La solution déficitaire d'ordre 2

$$u = f_0 + \xi(f_1 + g_1) + O(\xi^2)$$

comprend donc tous les termes d'ordre 2 de la solution de Van Dyke et y ajoute certains termes d'ordre 3 (termes en ξ^2). Une partie des termes d'ordre 2 est apportée dès le premier ordre par la fonction f_1, le reste venant au deuxième ordre par la fonction g_1. Des tentatives pour calculer les termes en ξ^2 par des procédés analogues à ceux utilisés au deuxième ordre n'ont pas abouti. On doit pour obtenir une solution déficitaire d'ordre 2 complète résoudre numériquement les équations externes et internes d'ordre 2. Ce sera fait sur un cas voisin au chapitre suivant.

Le coefficient de frottement donné par la solution déficitaire d'ordre 1 est :

$$\begin{aligned} \frac{C_f}{2} &= \frac{1}{\sqrt{x\ \mathrm{Re}}}\left(f_0''(0) + \xi f_1''(0)\right) \\ &= \frac{0,332}{\sqrt{x\ \mathrm{Re}}} + 1,702\frac{\omega}{\mathrm{Re}} \end{aligned}$$

A l'ordre 2, il vaut :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0,332}{\sqrt{x\ \mathrm{Re}}} + 3,126\frac{\omega}{\mathrm{Re}} + O(\mathrm{Re}^{-3/2})$$

Le coefficient de frottement déficitaire inclut dès l'ordre 1 près de la moitié des effets de cisaillement qui n'apparaissent qu'à l'ordre 2 dans la théorie de Van Dyke.

La figure 3.4 montre le profil de vitesse longitudinale fourni par l'approche déficitaire à l'ordre 1, comparé aux profils issus de la théorie de Van Dyke. Si l'on prend comme référence le profil d'ordre 2 de Van Dyke, le profil déficitaire d'ordre 1 présente un net avantage sur le profil de Blasius et même sur le profil composite. La figure 3.5 montre les profils de vitesse normale correspondants. On notera la différence non négligeable entre les vitesses normales à l'extérieur de la couche limite dans les deux solutions d'ordre 1. Enfin, la figure 3.6 montre les coefficients de frottement en fonction de la variable $\xi = \omega\sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}$. Sur toutes ces figures, la solution déficitaire d'ordre 1 apparaît comme intermédiaire entre la solution de Blasius et la solution de Van Dyke du deuxième ordre.

Chapitre 4

SOLUTIONS NUMERIQUES SUR PLAQUE PLANE

Les solutions auto-semblables sur une plaque plane ne permettent pas de traiter des cas où le cisaillement dans l'écoulement externe varie suivant la normale à la paroi. Ces configurations ont été étudiées grâce à des solutions numériques obtenues par des techniques de différences finies. Les solutions obtenues par la théorie de Van Dyke et par la formulation déficitaire à l'ordre 1 et à l'ordre 2 ont été comparées à des solutions numériques des équations de Navier-Stokes, prises comme référence.

On considère une plaque plane soumise à un écoulement incident parallèle à cisaillement variable selon y (fig. 4.1) et sans gradient de pression. Pour simplifier les problèmes de conditions aux limites aux frontières extérieures, on impose une vitesse normale nulle en $y = H$. La hauteur H sera prise suffisamment grande devant l'épaisseur de la couche limite pour ne pas perturber le développement de cette dernière. Cependant, les résultats obtenus montrent que le confinement du domaine a un effet non négligeable sur l'écoulement externe d'ordre 2. Ceci explique en particulier les différences constatées entre ces solutions numériques et les solutions auto-semblables du chapitre précédent dans le cas d'un cisaillement constant.

En l'absence de viscosité, le profil imposé en amont de la plaque va se conserver tout au long de celle-ci. La solution des équations d'Euler au premier ordre est donc :

$$\begin{cases} U_1 = \varphi(y) \\ V_1 = 0 \\ P_1 \text{ constante} \end{cases}$$

Les deux théories de couche limite du premier ordre fournissent les vitesses de transpiration à appliquer au fluide parfait du deuxième ordre. Celui-ci vérifie les

équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + \dfrac{\partial V_2}{\partial y} = 0 \\ U_2 \dfrac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \dfrac{\partial U_2}{\partial x} + V_2 \dfrac{\partial U_1}{\partial y} + V_1 \dfrac{\partial U_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial P_2}{\partial x} \\ U_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial x} + U_1 \dfrac{\partial V_2}{\partial x} + V_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial y} + V_1 \dfrac{\partial V_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial P_2}{\partial y} \end{cases}$$

Introduisons les rotationnels :

$$\omega_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x} = \varphi'(y)$$

$$\omega_2 = \frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} = \Delta \Psi$$

où Ψ est la fonction de courant telle que :

$$U_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad V_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

L'équation de continuité est automatiquement satisfaite. En éliminant la pression entre les deux équations de quantité de mouvement, on obtient l'équation de transport du rotationnel au deuxième ordre :

$$U_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + V_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + V_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0$$

Compte tenu de l'écoulement du premier ordre, il vient :

$$\varphi(y) \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \varphi''(y) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

En intégrant selon x :

$$\omega_2 = \frac{\varphi''}{\varphi} \Psi$$

Finalement, Ψ vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta \Psi = \frac{\varphi''}{\varphi} \Psi$$

Cette équation est résolue numériquement en utilisant un schéma implicite à directions alternées. On peut ensuite calculer les couches limites d'ordre 2, toujours par différences finies.

Les solutions de référence ont été obtenues grâce à un programme développé par Gendre [13]. Les équations de Navier-Stokes sont résolues pour un écoulement incompressible en utilisant une technique de volumes finis (Patankar [27]). On résout sur chaque verticale et on itère par un balayage selon x jusqu'à convergence.

La vitesse de référence est la vitesse de l'écoulement incident au niveau de la paroi. La longueur de plaque sur laquelle on effectue le calcul est prise comme longueur unité. Le nombre de Reynolds rapporté à cette longueur vaut 10^6. L'épaisseur de couche limite à l'extrémité de la plaque est d'après la solution de Blasius :

$$\delta \simeq \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \simeq 5.10^{-3}$$

La hauteur du domaine de calcul est fixée à 0,26 soit environ 50 fois l'épaisseur de couche limite. On supposera que les perturbations dues aux singularités de bord d'attaque ont le temps de s'amortir. Le profil externe d'ordre 2 représenté sur les figures est celui de l'approche déficitaire.

De nombreux écoulements ont été étudiés. Le premier est le profil uniformément cisaillé :

$$U_1 = 1 + 60\,y$$

qui se rapproche des solutions auto-semblables obtenues au chapitre précédent. La figure 4.2 montre les profils de vitesse externe et interne obtenus au premier et au second ordre, ainsi que la solution des équations de Navier-Stokes complètes. Dans les deux cas, le profil déficitaire est nettement plus proche du profil de référence que le profil de Van Dyke du même ordre. La différence est surtout appréciable au premier ordre. On remarquera en comparant les figures 3.2 et 4.2 que l'effet de déplacement n'est pas rigoureusement nul à la paroi comme prévu par les solutions auto-semblables. Cet écart est dû à la limitation vers le haut du domaine de calcul. La figure 4.3 montre les profils de vitesse normale correspondants. Là encore, la formulation déficitaire est plus précise. Cet avantage se retrouve sur les coefficients de frottement représentés sur la figure 4.4. De manière générale, la correction apportée par la solution de Van Dyke d'ordre 2 est trop forte. On notera que les termes d'ordre 3 qui séparent les solutions de Van Dyke et déficitaire au deuxième ordre peuvent devenir non négligeables quand le coefficient de cisaillement ω est suffisamment grand.

Le deuxième cas utilise un profil en ligne brisée où le cisaillement est constant jusqu'à une certaine hauteur, puis nul au-delà :

$$\begin{cases} U_1 = 1 + 60\,y & y \leqslant 0,005 \\ U_1 = 1,3 & y \geqslant 0,005 \end{cases}$$

La figure 4.5 montre les profils de vitesse d'ordre 1 et 2. Contrairement au cas précédent, l'effet de déplacement est non nul dans la zone cisaillée et nul au-dessus, avec une ligne de glissement entre les deux, due au changement brutal de pente qui entraîne une valeur localement infinie pour φ''. Si l'on augmente la hauteur limite du cisaillement, le déplacement diminue et on tend assez vite vers la solution du cas précédent avec un cisaillement infini. Ce cas illustre bien le couplage existant entre l'effet de rotationnel et l'effet de déplacement, puisque une variation du cisaillement dans l'écoulement externe d'ordre 1 se traduit par une perturbation non nulle à la paroi pour le fluide parfait d'ordre 2. Le profil déficitaire d'ordre 1 a l'avantage de bien se raccorder à l'écoulement externe. Il indique une augmentation trop

importante du frottement par rapport à la solution de Blasius, qui sera corrigée au second ordre par l'effet de déplacement. Les deux calculs d'ordre 2 sont en très bon accord avec la solution de référence près de la paroi, mais aucun des deux ne traite correctement la ligne de glissement qui est "gommée" par le fluide visqueux réel. Il faudrait traiter cette zone comme une deuxième couche limite. La figure 4.6 montre le coefficient de frottement surestimé par la solution déficitaire du premier ordre et confirme le bon accord des deux solutions du deuxième ordre.

Le cas suivant est du même type mais avec un cisaillement négatif près de la paroi et nul plus haut. Il est bien sûr impossible de traiter un cas avec un cisaillement négatif illimité puisqu'alors la vitesse s'annulerait et changerait de sens. La décroissance du cisaillement est continue afin d'éviter la ligne de glissement due à la rupture de pente :

$$\begin{cases} U_1 = 125\,y^2 - 20\,y + 1 & y \leqslant 0,08 \\ U_1 = 0,2 & y \geqslant 0,08 \end{cases}$$

La figure 4.7 montre l'excellent accord des deux solutions d'ordre 2, qui se retrouve sur les coefficients de frottement de la figure 4.8. Comme dans le cas précédent, l'effet de déplacement est assez important. L'avantage sur le raccord est sensible pour le profil déficitaire du premier ordre, qui prévoit cependant une correction trop importante pour le frottement. La solution de Van Dyke d'ordre 2 donne de bons résultats car le cisaillement externe est presque constant dans l'épaisseur de la couche limite.

Le quatrième cas a trait à un profil dont le cisaillement diminue continûment de la paroi vers l'extérieur :

$$U_1 = 0{,}85 + \sqrt{0{,}0225 + 18\,y}$$

Ce profil se rapproche de ceux que l'on peut rencontrer dans la couche de choc d'un corps hypersonique de révolution et qui seront présentés en deuxième partie. La méthode déficitaire donne d'assez bons résultats avec des profils se raccordant bien à l'écoulement externe malgré le caractère non linéaire de celui-ci, et ce dès le premier ordre comme on peut le voir sur la figure 4.9. L'effet de déplacement est encore assez marqué au voisinage de la paroi. Curieusement, bien que le profil déficitaire d'ordre 2 soit très proche de la solution de référence, son coefficient de frottement est moins précis que celui du profil déficitaire d'ordre 1 (fig. 4.10).

Le profil du cinquième cas est constitué d'une branche d'hyperbole avec un cisaillement nul à la paroi qui croît de façon continue jusqu'à la valeur 60 atteinte asymptotiquement :

$$U_1 = \sqrt{1 + 3600\,y^2}$$

La figure 4.11 montre un important effet de déplacement. L'avantage de l'approche déficitaire est ici substantiel car même à l'ordre 2, le profil de Van Dyke ne fait pas intervenir de cisaillement et se raccorde à une droite verticale, alors que les profils déficitaires suivent bien la courbure des profils externes, tant au premier ordre qu'au second. La correction à apporter au coefficient de frottement est surtout due à l'effet de déplacement car le cisaillement de l'écoulement externe reste très

faible dans l'épaisseur de la couche limite. Ceci explique que les écarts soient presque insignifiants entre les deux approches (fig. 4.12).

Enfin, le dernier cas est le plus complexe puisqu'il utilise un profil sinusoïdal :

$$\begin{cases} U_1 = 1 + \dfrac{1}{2}\sin^2(50\pi y) & y \leqslant 0,01 \\ U_1 = 1,5 & y \geqslant 0,01 \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent, le cisaillement est nul à la paroi. Le profil de Van Dyke d'ordre 2 est ainsi quasiment identique (fig. 4.13) au profil de Blasius, d'autant plus que le déplacement s'annule lui aussi à la paroi, bien qu'il soit relativement fort un peu plus haut. Le profil déficitaire, lui, va toujours se raccorder à l'écoulement externe à l'ordre 1 comme à l'ordre 2. Globalement, le profil déficitaire d'ordre 2 n'est pas très éloigné du profil de référence, mais la prévision des coefficients de frottement est mauvaise (fig. 4.14). Ce cas illustre la limite des théories de couche limite qui ne peuvent plus prétendre représenter correctement l'écoulement à partir du moment où l'écoulement externe est suffisamment tourmenté pour que les effets visqueux en son sein ne puissent plus être négligés.

En résumé, les résultats obtenus montrent le bon comportement général des solutions asymptotiques dans des cas raisonnables. Les solutions d'ordre 2 permettent déjà un traitement correct. A ordre égal, les profils déficitaires offrent toujours un meilleur aspect grâce au raccord avec la solution externe même si celle-ci est non linéaire au voisinage de la paroi. L' avantage est surtout important au premier ordre où le profil déficitaire s'adapte bien mieux aux formes rencontrées que la solution de Blasius qui reste immuable, tout ceci, rappelons-le, pour un coût équivalent.

II

ECOULEMENTS COMPRESSIBLES

Chapitre 5

THEORIE DE VAN DYKE

5.1 Equations de Navier-Stokes

On considère un écoulement stationnaire de fluide compressible sur un corps de révolution à incidence nulle. Le fluide est assimilé à un gaz idéal, c'est-à-dire qu'il obéit à la loi des gaz parfaits

$$p = \rho r T$$

et les chaleurs massiques à pression constante et à volume constant et par conséquent leur rapport $\gamma = C_p/C_v$ sont des constantes.

On utilise le système de coordonnées curvilignes lié au corps, où ξ est l'abscisse curviligne mesurée le long du corps et η est la distance mesurée sur la normale à la paroi (fig. 5.1). Ce système peut donner lieu à des ambiguïtés lorsque la paroi est concave, car les normales se croisent. Aussi, seuls seront considérés des cas où la paroi est convexe, ou bien des cas où la paroi est concave mais avec un rayon de courbure très supérieur à l'épaisseur de couche limite. Dans les autres cas, on pourrait refaire l'étude dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales, en introduisant dans les équations les coefficients de métrique adéquats.

Comme pour les écoulements incompressibles, toutes les grandeurs sont rendues sans dimension. Les variables avec dimension sont repérées par un astérisque. Les grandeurs de référence sont :

U^*_∞ vitesse de l'écoulement incident

R^*_0 longueur caractéristique, par exemple le rayon de courbure du nez s'il s'agit d'un corps émoussé

ρ^*_∞ masse volumique dans l'écoulement incident

$T^*_0 = U^{*2}_\infty/C_p$ température de référence

$\mu^*_0 = \mu^*(T^*_0)$ viscosité de référence

A partir de celles-ci, on définit les nouvelles variables :

- pression : $p = \dfrac{p^*}{\rho^*_\infty U^{*2}_\infty}$

- masse volumique : $\rho = \dfrac{\rho^*}{\rho^*_\infty}$
- vitesse tangentielle : $u = \dfrac{u^*}{U^*_\infty}$
- vitesse normale : $v = \dfrac{v^*}{U^*_\infty}$
- abscisse curviligne : $\xi = \dfrac{\xi^*}{R^*_0}$
- ordonnée : $\eta = \dfrac{\eta^*}{R^*_0}$
- température : $T = \dfrac{T^*}{T^*_0}$
- viscosité : $\mu = \dfrac{\mu^*}{\mu^*_0}$
- enthalpie : $h = \dfrac{h^*}{U^{*2}_\infty}$

Ces variables ont été choisies de telle sorte qu'elles demeurent bornées dans la région du point d'arrêt lorsque le nombre de Mach tend vers l'infini (Van Dyke [31]). Pour un gaz idéal, on a alors :

$$h = T$$

Van Dyke [32] rappelle que les équations de Navier-Stokes sont déjà des approximations des équations de Boltzmann. Cependant, il semble que la différence n'apparaisse qu'au troisième ordre du développement asymptotique. On peut donc utiliser les équations de Navier-Stokes à condition de limiter le développement à l'ordre 2.

Les équations de départ seront écrites en tenant compte de l'hypothèse de Stokes :

$$3\lambda' + 2\mu = 0$$

Toutefois, Van Dyke [31] montre que le second coefficient de viscosité λ' n'apparaît qu'au troisième ordre et que cette hypothèse est donc inutile si l'on se limite au deuxième ordre.

En utilisant les variables adimensionnées, les équations de Navier-Stokes pour un écoulement axisymétrique deviennent : (d'après [3])
- continuité :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(h_3 \rho u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(h_1 h_3 \rho v) = 0$$

- quantité de mouvement sur ξ :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial (h_1 u)}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu}{\mathrm{Re}} h_1 h_3 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + h_1^2 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{h_1}\right)\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{2}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\frac{2v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{2}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{v}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \eta} - \frac{u}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi}\right)\right]$$
$$+\frac{2\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi}\left[\frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \frac{v}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \eta} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi}\right]$$

- quantité de mouvement sur η :

$$\rho u \frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial v}{\partial \eta} - \rho u^2 \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \eta}$$
$$+\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu}{\mathrm{Re}} h_3 \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \xi} + h_1 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{h_1}\right)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{2}{3}\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(2\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \eta}\right)\right]$$
$$+\frac{2\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \eta}\left[\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{u}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi} - \frac{v}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \eta}\right] + \frac{2\mu}{\mathrm{Re}}\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \eta}\left[\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \eta}\right]$$

- énergie :

$$\rho u \frac{1}{h_1}\frac{\partial h}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{u}{h_1}\frac{\partial p}{\partial \xi} + v\frac{\partial p}{\partial \eta}$$
$$+\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\frac{h_3}{h_1}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right] + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}} h_1 h_3 \frac{\partial T}{\partial \eta}\right]$$
$$+\frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left[2\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \eta}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi} + \frac{v}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \eta}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \xi} + h_1\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{h_1}\right)\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{u}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi} + \frac{v}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{v}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \eta}\right)^2\right]$$

- équation d'état :

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\rho T$$

- célérité du son :

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{(\gamma - 1)T}$$

Dans ces équations apparaissent les paramètres suivants :

- nombre de Prandtl : $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu^* C_p^*}{\lambda^*}$

- nombre de Reynolds : $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_\infty^* U_\infty^* R_0^*}{\mu_0^*}$

- coefficients de métrique :

$$h_1 = 1 + \frac{\eta}{R} = 1 + \kappa\eta \qquad h_3 = r + \eta\cos\alpha$$

où $R(\xi)$ est le rayon de courbure longitudinale de la paroi et $r(\xi)$ son rayon de courbure transversale ; $\alpha(\xi)$ est l'angle que fait la tangente à la paroi avec l'axe de révolution (fig. 5.1).

Les conditions aux limites sont :

- à l'infini :

$$u = 1 \qquad v = 0 \qquad \rho = 1 \qquad p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2}$$

- à la paroi :

$$u = 0 \qquad v = 0 \qquad T = T_p$$

où T_p représente la température de la paroi. Au lieu d'imposer la température de la paroi, on peut aussi bien imposer le flux, ou encore une relation entre le flux et la température.

Les effets de glissement ou de saut de température qui peuvent se produire à la paroi dans les gaz raréfiés ne seront pas pris en compte dans le cadre de cette étude. Van Dyke montre qu'ils interviennent au second ordre dans la couche limite.

5.2 Développements

En suivant la même démarche que pour les écoulements incompressibles, Van Dyke [31] choisit le petit paramètre :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} = \sqrt{\frac{\mu(T_0)}{\mu(T_\infty)}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}}$$

en vertu du principe de moindre dégénérescence. Dans la zone interne, on utilise une coordonnée normale dilatée :

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\varepsilon}$$

On développe ensuite les variables en série suivant les puissances de ε. Dans la zone externe, on a :

$$\begin{aligned}
u(\xi,\eta) &= U_1(\xi,\eta) + \varepsilon U_2(\xi,\eta) + \cdots \\
v(\xi,\eta) &= V_1(\xi,\eta) + \varepsilon V_2(\xi,\eta) + \cdots \\
p(\xi,\eta) &= P_1(\xi,\eta) + \varepsilon P_2(\xi,\eta) + \cdots \\
\rho(\xi,\eta) &= R_1(\xi,\eta) + \varepsilon R_2(\xi,\eta) + \cdots \\
T(\xi,\eta) &= T_1(\xi,\eta) + \varepsilon T_2(\xi,\eta) + \cdots
\end{aligned}$$

Tous les coefficients sont supposés d'ordre 1 ainsi que leurs dérivées par rapport à ξ et η.

Dans la zone interne, on a :

$$\begin{aligned}
u(\xi,\eta) &= u_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon u_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots \\
v(\xi,\eta) &= \varepsilon \bar{v}_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon^2 \bar{v}_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots \\
p(\xi,\eta) &= p_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon p_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots \\
\rho(\xi,\eta) &= \rho_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon \rho_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots \\
T(\xi,\eta) &= t_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon t_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots
\end{aligned}$$

La loi de viscosité peut, elle aussi, être développée :

$$\begin{aligned}
\mu(T) &= \mu(t_1 + \varepsilon t_2) \\
&= \mu(t_1) + \varepsilon t_2 \frac{d\mu}{dT}(t_1) + \cdots \\
&= \mu_1 + \varepsilon \mu_2 + \cdots
\end{aligned}$$

Les coefficients sont supposés d'ordre 1 ainsi que leurs dérivées par rapport à ξ et $\bar{\eta}$.

5.3 Equations externes et internes

En reportant ces développements dans les équations de Navier-Stokes et en triant les termes suivant leur puissance en ε, Van Dyke obtient les équations suivantes :

5.3.1 zone externe, ordre 1 :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial \xi}\Big[(r+\eta\cos\alpha)R_1U_1\Big] + \dfrac{\partial}{\partial \eta}\Big[(1+\kappa\eta)(r+\eta\cos\alpha)R_1V_1\Big] = 0 \\[2ex]
R_1U_1\dfrac{1}{1+\kappa\eta}\dfrac{\partial U_1}{\partial \xi} + R_1V_1\dfrac{\partial U_1}{\partial \eta} + \dfrac{\kappa}{1+\kappa\eta}R_1U_1V_1 = -\dfrac{1}{1+\kappa\eta}\dfrac{\partial P_1}{\partial \xi} \\[2ex]
R_1U_1\dfrac{1}{1+\kappa\eta}\dfrac{\partial V_1}{\partial \xi} + R_1V_1\dfrac{\partial V_1}{\partial \eta} - \dfrac{\kappa}{1+\kappa\eta}R_1U_1^2 = -\dfrac{\partial P_1}{\partial \eta} \\[2ex]
R_1U_1\dfrac{1}{1+\kappa\eta}\dfrac{\partial T_1}{\partial \xi} + R_1V_1\dfrac{\partial T_1}{\partial \eta} = U_1\dfrac{1}{1+\kappa\eta}\dfrac{\partial P_1}{\partial \xi} + V_1\dfrac{\partial P_1}{\partial \eta} \\[2ex]
P_1 = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}R_1T_1
\end{cases}$$

On reconnaît les équations d'Euler pour un fluide non visqueux. A partir de celles-ci, il est possible de montrer que l'entropie et l'enthalpie totale se conservent le long des lignes de courant en l'absence de discontinuités.

5.3.2 zone externe, ordre 2 :

- continuité :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[(r+\eta\cos\alpha)(R_1U_2+R_2U_1)\Big]+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big[(1+\kappa\eta)(r+\eta\cos\alpha)(R_1V_2+R_2V_1)\Big]=0$$

- quantité de mouvement selon ξ :

$$(R_1U_2+R_2U_1)\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial U_1}{\partial\xi}+R_1U_1\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial U_2}{\partial\xi}+(R_1V_2+R_2V_1)\frac{\partial U_1}{\partial\eta}+R_1V_1\frac{\partial U_2}{\partial\eta}$$
$$+\frac{\kappa}{1+\kappa\eta}\Big[(R_1V_2+R_2V_1)U_1+R_1V_1U_2\Big]=-\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial P_2}{\partial\xi}$$

- quantité de mouvement selon η :

$$(R_1U_2+R_2U_1)\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial V_1}{\partial\xi}+R_1U_1\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial V_2}{\partial\xi}+(R_1V_2+R_2V_1)\frac{\partial V_1}{\partial\eta}+R_1V_1\frac{\partial V_2}{\partial\eta}$$
$$-\frac{\kappa}{1+\kappa\eta}(R_2U_1^2+2R_1U_1U_2)=-\frac{\partial P_2}{\partial\eta}$$

- énergie :

$$(R_1U_2+R_2U_1)\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial T_1}{\partial\xi}+R_1U_1\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial T_2}{\partial\xi}+(R_1V_2+R_2V_1)\frac{\partial T_1}{\partial\eta}+R_1V_1\frac{\partial T_2}{\partial\eta}$$
$$=U_1\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial P_2}{\partial\xi}+U_2\frac{1}{1+\kappa\eta}\frac{\partial P_1}{\partial\xi}+V_1\frac{\partial P_2}{\partial\eta}+V_2\frac{\partial P_1}{\partial\eta}$$

- état :

$$P_2=\frac{\gamma-1}{\gamma}(R_1T_2+R_2T_1)$$

Les équations d'ordre 2 décrivent le comportement de petites perturbations de l'écoulement du premier ordre. Elles ne contiennent toujours pas de termes de viscosité, ceux-ci étant d'ordre 3.

5.3.3 zone interne, ordre 1 :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\xi}(r\rho_1u_1)+\dfrac{\partial}{\partial\bar\eta}(r\rho_1\bar v_1)=0\\[2ex] \rho_1u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\xi}+\rho_1\bar v_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\bar\eta}=-\dfrac{\partial p_1}{\partial\xi}+\dfrac{\partial}{\partial\bar\eta}\left(\mu_1\dfrac{\partial u_1}{\partial\bar\eta}\right)\\[2ex] 0=-\dfrac{\partial p_1}{\partial\bar\eta}\\[2ex] \rho_1u_1\dfrac{\partial t_1}{\partial\xi}+\rho_1\bar v_1\dfrac{\partial t_1}{\partial\bar\eta}=u_1\dfrac{\partial p_1}{\partial\xi}+\bar v_1\dfrac{\partial p_1}{\partial\bar\eta}+\dfrac{\partial}{\partial\bar\eta}\left(\dfrac{\mu_1}{\mathrm{Pr}}\dfrac{\partial t_1}{\partial\bar\eta}\right)+\mu_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial\bar\eta}\right)^2\\[2ex] p_1=\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\rho_1t_1\end{cases}$$

Ce sont les équations habituelles de couche limite de Prandtl.

5.3.4 zone interne, ordre 2 :

- continuité :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\Big[r(\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1) + \bar{\eta}\cos\alpha\rho_1 u_1\Big]$$
$$+\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}\Big[r(\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1) + \bar{\eta}(\cos\alpha + \kappa r)\rho_1 \bar{v}_1\Big] = 0$$

- quantité de mouvement sur ξ :

$$(\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1)\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \rho_1 u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + (\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1)\frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}} + \rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\eta}}$$
$$= -\frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \kappa\bar{\eta}\frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}\left(\mu_1 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{\eta}} + \mu_2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}}\right)$$
$$+\rho_1 u_1 \kappa\left(\bar{\eta}\frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \bar{v}_1\right) - \kappa\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}\big(\mu_1 u_1\big) + \mu_1\left(\frac{\cos\alpha}{r} + 2\kappa\right)\frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}}$$

- quantité de mouvement sur η :

$$\frac{\partial p_2}{\partial \bar{\eta}} = \kappa\rho_1 u_1^2$$

- énergie :

$$(\rho_1 u_2 + \rho_2 u_1)\frac{\partial t_1}{\partial \xi} + \rho_1 u_1 \frac{\partial t_2}{\partial \xi} + (\rho_1 \bar{v}_2 + \rho_2 \bar{v}_1)\frac{\partial t_1}{\partial \bar{\eta}} + \rho_1 \bar{v}_1 \frac{\partial t_2}{\partial \bar{\eta}}$$
$$= u_1\frac{\partial p_2}{\partial \xi} + u_2\frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \bar{v}_1\frac{\partial p_2}{\partial \bar{\eta}} + \bar{v}_2\frac{\partial p_1}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}\left[\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial t_2}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\mu_2}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial t_1}{\partial \bar{\eta}}\right]$$
$$+\mu_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}}\right)^2 + 2\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}}\frac{\partial u_2}{\partial \bar{\eta}} + \kappa\bar{\eta}u_1\left(\rho_1\frac{\partial t_1}{\partial \xi} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi}\right)$$
$$+\frac{\cos\alpha + \kappa r}{r}\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial t_1}{\partial \bar{\eta}} - 2\kappa\mu_1 u_1\frac{\partial u_1}{\partial \bar{\eta}}$$

- état :

$$p_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma}(\rho_1 t_2 + \rho_2 t_1)$$

Ces équations renferment la forme de petites perturbations des équations du premier ordre, mais aussi des termes supplémentaires liés aux courbures longitudinale et transversale. On notera en particulier la présence d'un gradient normal de pression dû à la courbure longitudinale de la paroi.

5.4 Conditions de raccordement

En appliquant le principe de raccordement énoncé en première partie, on obtient les conditions suivantes :

- ordre 1 :

$$\bar{\eta} \to \infty : \quad \begin{cases} u_1(\xi,\bar{\eta}) & \to & U_1(\xi,0) \\ 0 & = & V_1(\xi,0) \\ p_1(\xi,\bar{\eta}) & \to & P_1(\xi,0) \\ \rho_1(\xi,\bar{\eta}) & \to & R_1(\xi,0) \\ t_1(\xi,\bar{\eta}) & \to & T_1(\xi,0) \end{cases}$$

- ordre 2 :

$$\bar{\eta} \to \infty : \quad \begin{cases} u_2(\xi,\bar{\eta}) \sim U_2(\xi,0) + \bar{\eta}\,\dfrac{\partial U_1}{\partial \eta}(\xi,0) \\ \bar{v}_1(\xi,\bar{\eta}) \sim V_2(\xi,0) + \bar{\eta}\,\dfrac{\partial V_1}{\partial \eta}(\xi,0) \\ p_2(\xi,\bar{\eta}) \sim P_2(\xi,0) + \bar{\eta}\,\dfrac{\partial P_1}{\partial \eta}(\xi,0) \\ \rho_2(\xi,\bar{\eta}) \sim R_2(\xi,0) + \bar{\eta}\,\dfrac{\partial R_1}{\partial \eta}(\xi,0) \\ t_2(\xi,\bar{\eta}) \sim T_2(\xi,0) + \bar{\eta}\,\dfrac{\partial T_1}{\partial \eta}(\xi,0) \end{cases}$$

Les conditions sur ρ et T se déduisent l'une de l'autre par l'équation d'état. Les conditions aux limites imposent :

- à l'infini :

$$U_1 = 1 \qquad U_2 = 0 \qquad V_1 = 0 \qquad V_2 = 0$$

$$R_1 = 1 \qquad R_2 = 0 \qquad P_1 = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \qquad P_2 = 0$$

- à la paroi : (si l'on néglige les sauts de vitesse et de température)

$$u_1 = u_2 = 0 \qquad v_1 = v_2 = 0$$

$$t_1 = T_P \qquad t_2 = 0$$

Compte tenu de l'équation :

$$\frac{\partial p_1}{\partial \bar{\eta}} = 0$$

on a comme en incompressible $p_1(\xi,\eta) = P_1(\xi,0)$. La condition à la paroi pour l'écoulement externe d'ordre 2 s'écrit :

$$V_2(\xi,0) = \lim_{\bar{\eta}\to\infty} \left[\bar{v}_1(\xi,\bar{\eta}) - \bar{\eta}\frac{\partial V_1}{\partial \eta}(\xi,0) \right]$$

5.5 Discussion

La structure des équations de Van Dyke est très proche de celle des équations obtenues en première partie pour des fluides incompressibles sur paroi plane. La plus grande complexité rencontrée ici est due d'une part à la compressibilité et d'autre part aux effets de courbure. Ces derniers existent bien sûr pour les écoulements incompressibles mais n'ont pas été traités dans la première partie de cette étude. Le raccordement entre le fluide parfait externe et l'extérieur de la couche limite s'opère exactement dans les mêmes conditions que pour les fluides incompressibles (fig. 1.3). Si l'on se limite à l'ordre 2, le raccord ne sera effectif que si toutes les grandeurs du fluide parfait varient linéairement dans l'épaisseur de la couche limite.

L'enchaînement des calculs se déroule comme en incompressible, en alternant les calculs du fluide parfait et de la couche limite. Le couplage se fait toujours par la vitesse de transpiration issue de la couche limite d'ordre 1 et appliquée au fluide parfait d'ordre 2.

Van Dyke montre en utilisant l'équation de Crocco :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,H_i - T.\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,S$$

où H_i est l'enthalpie totale et S l'entropie, que le rotationnel et le gradient de température peuvent être exprimés en fonction du gradient d'enthalpie totale et du gradient d'entropie. Sachant que ces deux grandeurs se conservent le long des lignes de courant de l'écoulement externe, leurs gradients sont perpendiculaires à ces dernières. Van Dyke identifie donc sept effets du second ordre pour la couche limite compressible :

- courbure longitudinale
- courbure transversale
- déplacement
- gradient d'entropie
- gradient d'enthalpie totale
- saut de température à la paroi
- glissement à la paroi

Du fait de la linéarité des équations du second ordre, il est possible de décomposer le problème en plusieurs sous-problèmes correspondant chacun à un effet particulier. Van Dyke précise toutefois que certains termes des équations associent étroitement le gradient d'entropie et le gradient d'enthalpie d'arrêt à l'effet de déplacement. La séparation de ces effets est donc arbitraire et n'a que peu d'intérêt en pratique.

Chapitre 6

FORMULATION DEFICITAIRE

6.1 Décomposition

Il convient de prime abord de déterminer le mode de scission entre variables externes et déficitaires. La première décomposition qui se présente à l'esprit est de scinder simplement chacune des variables :

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_E + \rho_D \\
u &= u_E + u_D \\
v &= v_E + v_D - v_E(\xi, 0) \\
p &= p_E + p_D \\
T &= T_E + T_D
\end{aligned}$$

et de développer ensuite chacun des deux termes. Comme on le verra par la suite, cette décomposition a l'inconvénient de donner une forme non conservative à l'équation de continuité, de telle sorte qu'il n'est plus possible de définir une fonction de courant pour chaque terme du développement asymptotique. La fonction de courant réelle de l'écoulement, définie à partir de l'équation de continuité, ne peut donc pas être développée comme les autres variables.

Pour éviter cela, une autre décomposition a été étudié :

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_E + \rho_D \\
\rho u &= (\rho u)_E + (\rho u)_D \\
\rho v &= (\rho v)_E + (\rho v)_D - (\rho v)_E(\xi, 0) \\
p &= p_E + p_D \\
\rho T &= (\rho T)_E + (\rho T)_D
\end{aligned}$$

En procédant ainsi, l'équation de continuité conserve sa forme habituelle, tant pour les variables externes que pour les variables déficitaires. Malheureusement,

les difficultés surgissent lorsqu'on s'intérese aux termes du type :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \varphi = u,\, v,\, h$$

qui doivent être évalués sous la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\rho\varphi}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial \xi} - \frac{\rho\varphi}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}$$

Les équations de quantité de mouvement et d'énergie prennent alors une forme extrêmement compliquée et les développements sont rendus difficiles par la présence de quotients. Aussi, seule la première décomposition a été utilisée dans les applications, au bénéfice de la simplicité et parce qu'elle permet une comparaison directe avec la théorie de Van Dyke.

6.2 Développements

Après avoir scindé chaque variable selon le schéma :

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_E + \rho_D \\
u &= u_E + u_D \\
v &= v_E + v_D - v_E(\xi, 0) \\
p &= p_E + p_D \\
T &= T_E + T_D
\end{aligned}$$

chaque partie est développée suivant les puissances du petit paramètre ε défini par Van Dyke. Dans la zone externe, les développements sont strictement identiques aux siens :

$$\begin{aligned}
u_E(\xi,\eta) &= U_1(\xi,\eta) + \varepsilon U_2(\xi,\eta) + \cdots \\
v_E(\xi,\eta) &= V_1(\xi,\eta) + \varepsilon V_2(\xi,\eta) + \cdots \\
p_E(\xi,\eta) &= P_1(\xi,\eta) + \varepsilon P_2(\xi,\eta) + \cdots \\
\rho_E(\xi,\eta) &= R_1(\xi,\eta) + \varepsilon R_2(\xi,\eta) + \cdots \\
T_E(\xi,\eta) &= T_1(\xi,\eta) + \varepsilon T_2(\xi,\eta) + \cdots
\end{aligned}$$

Pour les variables déficitaires, on fait de nouveau appel à la variable dilatée $\bar{\eta} = \eta/\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
u_D(\xi,\eta) &= u_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon u_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots \\
v_D(\xi,\eta) &= \varepsilon \bar{v}_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon^2 \bar{v}_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots \\
p_D(\xi,\eta) &= p_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon p_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots \\
\rho_D(\xi,\eta) &= \rho_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon \rho_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots \\
T_D(\xi,\eta) &= t_1(\xi,\bar{\eta}) + \varepsilon t_2(\xi,\bar{\eta}) + \cdots
\end{aligned}$$

La viscosité est développée selon Van Dyke :

$$\begin{aligned}\mu &= \mu(T_1 + t_1) + \varepsilon(T_2 + t_2)\frac{d\mu}{dT}(T_1 + t_1) + \cdots \\ &= \mu_1 + \varepsilon\mu_2\end{aligned}$$

Les coefficients externes et internes sont supposés d'ordre 1, ainsi que leurs dérivées par rapport aux variables correspondantes. Près de la paroi, on posera comme en incompressible :

$$V_1(\xi,\eta) - V_1(\xi,0) = \varepsilon\tilde{V}_1(\xi,\eta)$$

$$V_2(\xi,\eta) - V_2(\xi,0) = \varepsilon\tilde{V}_2(\xi,\eta)$$

6.3 Raccordement

Le processus de raccordement est très proche de celui appliqué en incompressible. A l'extérieur de la couche limite on a :

$$\begin{aligned}u &\to u_E \\ v &\to v_E \\ \rho &\to \rho_E \\ p &\to p_E \\ T &\to T_E\end{aligned}$$

ce qui implique pour les variables déficitaires :

$$\begin{aligned}u_D &\to 0 \\ v_D &\to v_E(\xi,0) \\ \rho_D &\to 0 \\ p_D &\to 0 \\ T_D &\to 0\end{aligned}$$

et pour les développements :

$$\begin{aligned}u_1 &+ \varepsilon u_2 &&\to 0 \\ \varepsilon\bar{v}_1 &+ \varepsilon^2\bar{v}_2 &&\to V_1(\xi,0) + \varepsilon V_2(\xi,0) \\ p_1 &+ \varepsilon p_2 &&\to 0 \\ t_1 &+ \varepsilon t_2 &&\to 0 \\ \rho_1 &+ \varepsilon\rho_2 &&\to 0\end{aligned}$$

Les deux dernières conditions ne sont pas indépendantes car elles sont reliées par l'équation d'état. On a donc au premier ordre :

$$\lim_{\bar{\eta}\to\infty} u_1 = 0 \qquad V_1(\xi,0) = 0$$
$$\lim_{\bar{\eta}\to\infty} p_1 = 0$$
$$\lim_{\bar{\eta}\to\infty} t_1 = 0$$
$$\lim_{\bar{\eta}\to\infty} \rho_1 = 0$$

et au deuxième ordre :

$$\lim_{\bar{\eta}\to\infty} u_2 = 0 \qquad V_2(\xi,0) = \lim_{\bar{\eta}\to\infty} \bar{v}_1(\xi,\bar{\eta})$$
$$\lim_{\bar{\eta}\to\infty} p_2 = 0$$
$$\lim_{\bar{\eta}\to\infty} t_2 = 0$$
$$\lim_{\bar{\eta}\to\infty} \rho_2 = 0$$

Ces conditions sont semblables à celles obtenues en première partie pour les écoulements incompressibles. Le couplage entre la couche limite d'ordre 1 et le fluide parfait d'ordre 2 se fait de nouveau par la vitesse de transpiration.

A la paroi, on a :

$$\begin{aligned} u &= U_1 + u_1 + \varepsilon(U_2 + u_2) &= 0 \\ v &= \varepsilon\bar{v}_1 + \varepsilon^2\bar{v}_2 &= 0 \\ T &= T_1 + t_1 + \varepsilon(T_2 + t_2) &= T_p \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} u_1(\xi,0) &= -U_1(\xi,0) \\ u_2(\xi,0) &= -U_2(\xi,0) \\ v_1(\xi,0) &= v_2(\xi,0) = 0 \\ t_1(\xi,0) &= T_p - T_1(\xi,0) \\ t_2(\xi,0) &= -T_2(\xi,0) \end{aligned}$$

On dispose ainsi de toutes les conditions aux limites nécessaires pour résoudre les équations externes et déficitaires d'ordre 1 et 2.

6.4 Equations déficitaires

Les équations déficitaires sont obtenues comme pour les écoulements incompressibles de la première partie. Compte tenu de leur complexité accrue, nous avons eu recours au logiciel de calcul symbolique MACSYMA.

Dans la zone externe, on a par définition :

$$\begin{aligned} u &= u_E \\ v &= v_E \\ \rho &= \rho_E \\ p &= p_E \\ T &= T_E \end{aligned}$$

En reportant les développements de ces grandeurs dans les équations de Navier-Stokes, on obtient à l'ordre 1 comme à l'ordre 2 exactement les mêmes équations que celles de Van Dyke, à savoir les équations d'Euler déjà décrites au chapitre 5.

Dans la zone interne, on reporte les développements dans les équations de Navier-Stokes, on soustrait de ces dernières les équations externes d'ordre 1 et 2, et seulement ensuite on trie les termes restants suivant leur puissance de ε. On repasse ensuite en variables externes (ξ, η) et on pose :

$$v_1(\xi,\eta) = \varepsilon \bar{v}_1(\xi,\bar{\eta}) \qquad v_2(\xi,\eta) = \varepsilon \bar{v}_2(\xi,\bar{\eta})$$

On obtient au premier ordre les équations suivantes :
- continuité :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\Big[r\rho_1 U_1 + r(R_1+\rho_1)u_1\Big] + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big[r\rho_1(V_1+v_1)\Big] + rR_1\frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0$$

- quantité de mouvement sur ξ :

$$\begin{aligned} (R_1+\rho_1)(U_1+u_1)\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \Big[\rho_1 U_1 + (R_1+\rho_1)u_1\Big]\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + (R_1+\rho_1)(V_1+v_1)\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \\ = -\frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right) \end{aligned}$$

- quantité de mouvement sur η :

$$0 = -\frac{\partial p_1}{\partial \eta}$$

- énergie :

$$\begin{aligned} (R_1+\rho_1)(U_1+u_1)\frac{\partial t_1}{\partial \xi} + \Big[\rho_1 U_1 + (R_1+\rho_1)u_1\Big]\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + (R_1+\rho_1)(V_1+v_1)\frac{\partial t_1}{\partial \eta} \\ = u_1\frac{\partial P_1}{\partial \xi} + (U_1+u_1)\frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\frac{\partial t_1}{\partial \eta}\right) + \frac{\mu_1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right)^2 \end{aligned}$$

- état :

$$p_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma}\Big[\rho_1 T_1 + (R_1+\rho_1)t_1\Big]$$

On remarque que comme dans la théorie de Van Dyke, la courbure de la paroi n'apparaît au premier ordre que par l'intermédiaire du rayon de courbure transversal dans l'équation de continuité. Sachant qu'à l'extérieur de la couche limite la pression déficitaire p_1 tend vers zéro, l'équation de quantité de mouvement selon η implique que p_1 est identiquement nulle. Au premier ordre, la pression dans la couche limite est donc partout égale à la pression locale du fluide parfait.
On a à l'ordre 2 :
- continuité :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[r(\rho_1U_2+\rho_2U_1)+r(R_1+\rho_1)u_2+r(R_2+\rho_2)u_1\Big]\\
&+\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\cos\alpha\Big(\rho_1U_1+(R_1+\rho_1)u_1\Big)\Big]\\
&+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big[r\rho_1\Big(V_2-V_2(\xi,0)+v_2\Big)+r\rho_2(V_1+v_1)\Big]+r\left(R_2\frac{\partial v_1}{\partial\eta}+R_1\frac{\partial v_2}{\partial\eta}\right)\\
&+r\left(v_1\sqrt{\mathrm{Re}}-V_2(\xi,0)\right)\frac{\partial R_1}{\partial\eta}+R_1\frac{\partial}{\partial\eta}\Big[\eta(\cos\alpha+\kappa r)\Big(v_1\sqrt{\mathrm{Re}}-V_2(\xi,0)\Big)\Big]\\
&+\frac{\partial}{\partial\eta}\Big[\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,(\cos\alpha+\kappa r)\rho_1(V_1+v_1)\Big]=0
\end{aligned}$$

- quantité de mouvement sur ξ :

$$\begin{aligned}
&\Big[(R_1+\rho_1)(U_2+u_2)+(R_2+\rho_2)(U_1+u_1)\Big]\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+(R_1+\rho_1)(U_1+u_1)\frac{\partial u_2}{\partial\xi}\\
&+\Big[\rho_1U_2+\rho_2U_1+(R_1+\rho_1)u_2+(R_2+\rho_2)u_1\Big]\frac{\partial U_1}{\partial\xi}+\Big[\rho_1U_1+(R_1+\rho_1)u_1\Big]\frac{\partial U_2}{\partial\xi}\\
&+\Big[R_1\Big(v_1\sqrt{\mathrm{Re}}-V_2(\xi,0)\Big)+\rho_1\sqrt{\mathrm{Re}}\,(V_1+v_1)\Big]\left(\frac{\partial U_1}{\partial\eta}+\kappa U_1\right)\\
&+(R_1+\rho_1)(V_1+v_1)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u_2+\kappa\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,u_1\right)\\
&+\Big[(R_1+\rho_1)\Big(V_2-V_2(\xi,0)+v_2\Big)+(R_2+\rho_2)(V_1+v_1)\Big]\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\\
&\qquad=-\frac{\partial p_2}{\partial\xi}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu_1\frac{\partial u_2}{\partial\eta}+\mu_2\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\kappa\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right]\\
&\qquad\quad+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\mu_1\cos\alpha}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\eta}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial\mu_1}{\partial\eta}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\eta}-\kappa(U_1+u_1)\right)
\end{aligned}$$

- quantité de mouvement sur η :

$$\frac{\partial p_2}{\partial\eta}=\kappa\sqrt{\mathrm{Re}}\Big[(R_1+\rho_1)(U_1+u_1)^2-R_1U_1^2\Big]$$

- énergie :

$$\Big[(R_1+\rho_1)(U_2+u_2)+(R_2+\rho_2)(U_1+u_1)-\kappa\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,(R_1+\rho_1)(U_1+u_1)\Big]\frac{\partial t_1}{\partial\xi}$$

$$+\Big[\rho_1U_2+\rho_2U_1+(R_1+\rho_1)u_2+(R_2+\rho_2)u_1-\kappa\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,\big(\rho_1U_1+(R_1+\rho_1)u_1\big)\Big]\frac{\partial T_1}{\partial\xi}$$

$$+(R_1+\rho_1)(U_1+u_1)\frac{\partial t_2}{\partial\xi}+\Big[\rho_1U_1+(R_1+\rho_1)u_1\Big]\frac{\partial T_2}{\partial\xi}$$

$$+\Big[(R_1+\rho_1)(V_2-V_2(\xi,0)+v_2)+(R_2+\rho_2)(V_1+v_1)\Big]\frac{\partial t_1}{\partial\eta}+(R_1+\rho_1)(V_1+v_1)\frac{\partial t_2}{\partial\eta}$$

$$+\Big[R_1\left(v_1\sqrt{\mathrm{Re}}-V_2(\xi,0)\right)+\rho_1(V_1+v_1)\sqrt{\mathrm{Re}}\Big]\frac{\partial T_1}{\partial\eta}$$

$$=u_1\frac{\partial P_2}{\partial\xi}+(u_2-\eta\kappa\sqrt{\mathrm{Re}}\,u_1)\,\frac{\partial P_1}{\partial\xi}+(U_1+u_1)\frac{\partial p_2}{\partial\xi}$$

$$+\left(v_1\sqrt{\mathrm{Re}}-V_2(\xi,0)\right)\frac{\partial P_1}{\partial\eta}+(V_1+v_1)\frac{\partial p_2}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr}\ \mathrm{Re}}\frac{\partial t_2}{\partial\eta}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\mu_2}{\mathrm{Pr}\ \mathrm{Re}}\frac{\partial t_1}{\partial\eta}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr}\ \sqrt{\mathrm{Re}}}\right]\frac{\partial T_1}{\partial\eta}+\frac{(\cos\alpha+\kappa r)\mu_1}{r\ \mathrm{Pr}\ \sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial t_1}{\partial\eta}$$

$$+\frac{\mu_2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)^2+\frac{2\mu_1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\frac{\partial u_2}{\partial\eta}+\frac{2\mu_1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial U_1}{\partial\eta}\frac{\partial u_1}{\partial\eta}-\frac{2\kappa\mu_1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}(U_1+u_1)\frac{\partial u_1}{\partial\eta}$$

- état :

$$p_2=\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big[\rho_1T_2+\rho_2T_1+(R_1+\rho_1)t_2+(R_2+\rho_2)t_1\Big]$$

Si la courbure de la paroi est nulle, ces équations se ramènent à la forme de petites perturbations des équations d'ordre 1. En dépit de leur longueur, elles sont linéaires et composées de termes du même type que ceux des équations de Van Dyke.

6.5 Discussion

La structure et les propriétés des équations obtenues en formulation déficitaire sont très proches de celles des équations étudiées dans la première partie pour les écoulements incompressibles. Comme pour la théorie de Van Dyke, la compressibilité et la courbure de la paroi augmentent la complexité des équations sans vraiment en changer le caractère. On peut donc espérer retrouver sur les solutions déficitaires pour des problèmes d'écoulements compressibles les avantages déjà constatés pour les écoulements incompressibles, avec en particulier un raccord assuré dès le premier ordre entre la couche limite et l'écoulement externe.

Dans le cas général, il est malaisé de recombiner les équations externes et internes de même ordre, car les coefficients de métrique apparaissent intégralement dans les équations externes alors que dans les équations internes ne figure au

premier ordre que le rayon de courbure transversal et seulement dans l'équation de continuité.

Sur une paroi plane, il est possible de recombiner facilement les équations externes et internes de même ordre. On obtient au premier ordre :
- continuité :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = v_D \frac{\partial \rho_E}{\partial \eta}$$

- quantité de mouvement sur ξ :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \eta} - (\rho v - \rho_E v_E) \frac{\partial u_E}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu \frac{\partial u_D}{\partial \eta} \right]$$

- énergie :

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial \xi} + \rho v \frac{\partial T}{\partial \eta} - (\rho v - \rho_E v_E) \frac{\partial T_E}{\partial \eta} = u \frac{\partial p}{\partial \xi} + v_E \frac{\partial p}{\partial \eta}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\mu}{\mathrm{Pr}\ \mathrm{Re}} \frac{\partial T_D}{\partial \eta} \right] + \frac{\mu}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial u_D}{\partial \eta} \right)^2$$

- état :

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T$$

Là encore, ces équations ne diffèrent de celles de Van Dyke que par des termes d'ordre supérieur. La principale nouveauté est que l'un de ces termes apparaît dans l'équation de continuité, ce qui n'était pas le cas en incompressible. Sa présence interdit en particulier de définir une fonction de courant pour l'écoulement d'ordre 1. Comme en écoulement incompressible, les termes de viscosité ne font intervenir que les grandeurs déficitaires. Cela suppose donc que les effets visqueux dans l'écoulement externe soient réellement négligeables.

Donnons enfin les équations d'ordre 2 pour un écoulement incompressible sur paroi courbe :
- continuité :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[r(U_2 + u_2) + \eta \sqrt{\mathrm{Re}} \cos \alpha (U_1 + u_1) \right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r \left(V_2 - V_2(\xi, 0) + v_2 \right) \right] + r \frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta (\cos \alpha + \kappa r) \left(v_1 \sqrt{\mathrm{Re}} - V_2(\xi, 0) \right) \right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta \sqrt{\mathrm{Re}} (\cos \alpha + \kappa r)(V_1 + v_1) \right] = 0$$

- quantité de mouvement sur ξ :

$$
\begin{aligned}
&(U_2+u_2)\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi}+\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)+(U_1+u_1)\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi}+\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right)\\
&+\left[\left(v_1\sqrt{\mathrm{Re}}-V_2(\xi,0)\right)+\sqrt{\mathrm{Re}}\,(V_1+v_1)\right]\left(\frac{\partial U_1}{\partial \eta}+\kappa U_1\right)\\
&+(V_1+v_1)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u_2+\kappa\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,u_1\right)+\left(V_2-V_2(\xi,0)+v_2\right)\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\\
&=-\frac{\partial p_2}{\partial \xi}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu_1\frac{\partial u_2}{\partial \eta}+\mu_2\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\kappa\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right]\\
&\qquad+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\mu_1\cos\alpha}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \eta}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial \mu_1}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \eta}-\kappa(U_1+u_1)\right)
\end{aligned}
$$

- quantité de mouvement sur η :

$$
\frac{\partial p_2}{\partial \eta}=\kappa\sqrt{\mathrm{Re}}\left[(U_1+u_1)^2-U_1^2\right]
$$

- énergie :

$$
\begin{aligned}
&\left[(U_2+u_2)-\kappa\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,(U_1+u_1)\right]\frac{\partial t_1}{\partial \xi}+\left[U_2+u_2-\kappa\eta\sqrt{\mathrm{Re}}\,(U_1+u_1)\right]\frac{\partial T_1}{\partial \xi}\\
&+(U_1+u_1)\frac{\partial t_2}{\partial \xi}+(U_1+u_1)\frac{\partial T_2}{\partial \xi}+(V_2-V_2(\xi,0)+v_2)\frac{\partial t_1}{\partial \eta}+(V_1+v_1)\frac{\partial t_2}{\partial \eta}\\
&+\left[v_1\sqrt{\mathrm{Re}}-V_2(\xi,0)+(V_1+v_1)\sqrt{\mathrm{Re}}\right]\frac{\partial T_1}{\partial \eta}\\
&\qquad=u_1\frac{\partial P_2}{\partial \xi}+\left(u_2-\eta\kappa\sqrt{\mathrm{Re}}\,u_1\right)\frac{\partial P_1}{\partial \xi}+(U_1+u_1)\frac{\partial p_2}{\partial \xi}\\
&+\left(v_1\sqrt{\mathrm{Re}}-V_2(\xi,0)\right)\frac{\partial P_1}{\partial \eta}+(V_1+v_1)\frac{\partial p_2}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\frac{\partial t_2}{\partial \eta}\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_2}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\frac{\partial t_1}{\partial \eta}\right]\\
&\qquad+\frac{\mu_1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_1}{\mathrm{Pr}\sqrt{\mathrm{Re}}}\right]\frac{\partial T_1}{\partial \eta}+\frac{(\cos\alpha+\kappa r)\mu_1}{r\,\mathrm{Pr}\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial t_1}{\partial \eta}\\
&\qquad+\frac{\mu_2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right)^2+\frac{2\mu_1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\frac{\partial u_2}{\partial \eta}+\frac{2\mu_1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial U_1}{\partial \eta}\frac{\partial u_1}{\partial \eta}-\frac{2\kappa\mu_1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}(U_1+u_1)\frac{\partial u_1}{\partial \eta}
\end{aligned}
$$

On notera aussi que la courbure longitudinale de la paroi intervient indirectement par le gradient normal de pression du fluide parfait qui est repris par la couche limite déficitaire.

Chapitre 7

SOLUTIONS AUTO-SEMBLABLES SUR PLAQUE PLANE

7.1 Cas étudié

On considère une plaque plane soumise à un écoulement incident parallèle, isobare, isotherme et uniformément cisaillé. Le fluide est assimilé à un gaz idéal. Il est avantageux dans ce cas de rapporter la température et la viscosité à leur valeur à l'infini :

$$T = \frac{T^*}{T^*_\infty} \qquad \mu = \frac{\mu^*}{\mu^*(T^*_\infty)}$$

On a alors les relations :

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{T}{(\gamma-1)M_0^2} \qquad M_0 = U_0^*\sqrt{\frac{\rho^*_\infty}{\gamma p^*_\infty}}$$

En l'absence de viscosité, les profils imposés en amont de la plaque vont se conserver tout au long de celle-ci. La solution externe du premier ordre est donc :

$$u_E = 1 + \omega y \qquad \rho_E = 1$$

$$v_E = 0 \qquad T_E = 1$$

$$p_E = \frac{1}{\gamma M_0^2} \qquad h_E = \frac{1}{(\gamma-1)M_0^2}$$

M_0 est le nombre de Mach au niveau de la paroi. La température de paroi est constante et égale à T_P. Le nombre de Prandtl est supposé constant et égal à 0,7. L'écoulement externe présente donc un gradient normal d'enthalpie d'arrêt mais pas de gradient d'entropie.

7.2 Solution de Van Dyke

De nombreux ouvrages (par exemple Cousteix [6]) donnent une solution autosemblable pour la couche limite compressible sur une plaque plane sans gradient de pression. Les équations internes d'ordre 1 sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \rho u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho v \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mu}{\mathrm{Re}}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \rho u \dfrac{\partial h}{\partial x} + \rho v \dfrac{\partial h}{\partial y} = u\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\mu}{\mathrm{Pr}\ \mathrm{Re}}\dfrac{\partial h}{\partial y}\right] + \dfrac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ p = \dfrac{1}{\gamma M_0^2}\rho T = p_E = \text{cte} \end{cases}$$

L'équation de continuité permet d'introduire la fonction de courant Ψ telle que :

$$\rho u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \rho v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

On effectue ensuite un changement de variable en posant :

$$\eta = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{x}}}\int_0^y \rho(x,Y)dY$$

et on cherche u sous la forme :

$$u = \frac{df}{d\eta} = f'(\eta)$$

Or, on a :

$$\rho u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \rho\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{x}}}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}$$

d'où :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}u = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}f'(\eta)$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}f(\eta)$$

On en tire :

$$\rho v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{\mathrm{Re}\ x}}f(\eta) - \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}f'(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f''(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \rho\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}f''(\eta)$$

En reportant dans l'équation de quantité de mouvement, il vient :

$$2\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\rho\mu f''\right] + ff'' = 0$$

Si l'on suppose en outre que $\rho\mu$ est constant, on obtient :

$$ff'' + 2Cf''' = 0$$

$$C = \rho\mu = \rho_E\mu(T_E) = 1$$

Cette hypothèse, quoique peu réaliste, est utilisée de façon classique (voir par exemple Cousteix [6]) dans ce cas, car elle permet de simplifier les équations.

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \qquad & u = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0 \\ & v = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \\ \eta \to \infty : \qquad & u \to 1 \Longrightarrow f' \to 1 \end{aligned}$$

Cette équation est identique à l'équation de Blasius obtenue pour les écoulements incompressibles.

Cherchons maintenant l'enthalpie sous la forme :

$$\frac{h}{h_E} = \frac{T}{T_E} = g'(\eta)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= h_E\, g''(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \rho h_E\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}\, g''(\eta) \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation d'énergie, il vient :

$$\frac{2}{\mathrm{Pr}}g''' + fg'' + \frac{2f''^2}{h_E} = 0$$

Les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \qquad & T = T_P \Longrightarrow g'(0) = T_P/T_E \\ \eta \to \infty : \qquad & T \to T_E \Longrightarrow g' \to 1 \end{aligned}$$

Aucune condition ne s'applique à la valeur de g à la paroi et on prend arbitrairement :

$$g(0) = 0$$

L'équation d'état entraîne :

$$\rho = \rho_E\frac{T_E}{T} = \frac{1}{g'}$$

On peut alors repasser à la variable physique y en écrivant :

$$y = \int_0^y dY = \int_0^\eta \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta = \int_0^\eta \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}d\eta$$

d'où

$$y = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}} \int_0^\eta g' d\eta = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}\, g(\eta)$$

Le coefficient de frottement et le flux de chaleur valent respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{C_f}{2} &= \frac{\mu}{\mathrm{Re}} \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P &&= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\, x}} f''(0) \\ \Phi &= -\frac{\mu}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}} \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_P &&= -\frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\, x}} g''(0) \end{aligned}$$

La vitesse composite du premier ordre est :

$$u^c = f'(\eta) + \omega y = f'(\eta) + \xi g(\eta)$$

avec

$$\xi = \omega \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}$$

La température composite est égale à la température interne. Le coefficient de frottement de la solution composite d'ordre 1 vaut :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\, x}} \big(f''(0) + \xi g'(0) \big)$$

Le flux est le même que celui de la solution simple.

7.3 Solution déficitaire

Les équations internes du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[(1+\rho_D)u_D + \rho_D(1+\omega y)\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[(1+\rho_D)v_D\Big] = 0 \\ (1+\rho_D)(1+\omega y + u_D)\dfrac{\partial u_D}{\partial x} + (1+\rho_D)v_D \dfrac{\partial u_D}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mu}{\mathrm{Re}} \dfrac{\partial u_D}{\partial y}\right) \\ (1+\rho_D)(1+\omega y + u_D)\dfrac{\partial h_D}{\partial x} + (1+\rho_D)v_D \dfrac{\partial h_D}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\mu}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}} \dfrac{\partial h_D}{\partial y}\right] + \dfrac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial u_D}{\partial y}\right)^2 \\ \rho_D T_E + (1+\rho_D)T_D = 0 \end{cases}$$

Comme la masse volumique est constante dans l'écoulement externe, l'équation de continuité a retrouvé sa forme conservative. Il est donc possible d'utiliser la fonction de courant Ψ :

$$\begin{aligned} (1+\rho_D)(1+\omega y + u_D) &= \rho u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ (1+\rho_D)v_D &= \rho v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}$$

On effectue ensuite le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi = \omega\sqrt{\dfrac{x}{\mathrm{Re}}} & \xi \ll 1 \\ \eta = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Re}}{\mathrm{x}}}\displaystyle\int_0^y \rho(x,Y)dY \end{cases}$$

On obtient immédiatement :

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\xi}{2x} \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \rho\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}$$

Un calcul moins évident fournit :

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\rho}{2x}\int_0^\eta \left[\frac{1}{\rho} + \xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] d\eta$$

On cherche Ψ et h sous la forme :

$$\Psi = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}\big(f_0(\eta) + \xi f_1(\eta)\big)$$

$$\frac{h}{h_E} = \frac{T}{T_E} = 1 + \frac{h_D}{h_E} = g_0'(\eta) + \xi g_1'(\eta)$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{1+\rho_D} = \frac{T}{T_E} = g_0' + \xi g_1'$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\rho}{2x}(g_0 + 2\xi g_1)$$

$$u = 1 + \omega y + u_D = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = f_0' + \xi f_1'$$

$$\frac{\partial u_D}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad = \frac{\xi}{2x}f_1' - (f_0'' + \xi f_1'')\frac{\rho}{2x}(g_0 + 2\xi g_1)$$

$$\frac{\partial u_D}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - \omega = \rho\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}(f_0'' + \xi f_1'') - \xi\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}$$

$$\frac{\partial h_D}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \qquad = h_E\frac{\xi}{2x}g_1' - h_E(g_0'' + \xi g_1'')\frac{\rho}{2x}(g_0 + 2\xi g_1)$$

$$\frac{\partial h_D}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} \qquad = \rho\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{x}}(g_0'' + \xi g_1'')$$

En reportant dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie et en triant les termes suivant leur puissance de ξ, on obtient avec les termes d'ordre 1 :

$$2f_0''' + f_0 f_0'' = 0$$

$$\frac{2}{\mathrm{Pr}}g_0''' + f_0 g_0'' + \frac{2}{h_E}f_0''^2 = 0$$

et avec les termes d'ordre ξ :

$$2f_1''' + f_0 f_1'' - f_0' f_1' + 2f_0'' f_1 = 2g_0'' - f_0' g_0 + f_0 g_0'$$

$$\frac{2}{\mathrm{Pr}} g_1''' + f_0 g_1'' - f_0' g_1' = -2f_1 g_0'' + \frac{4}{h_E} f_0''(g_0' - f_1'')$$

en tenant compte de l'hypothèse $\rho\mu = 1$. Les termes en ξ^2 sont négligés, puisque les développements s'arrêtent à l'ordre ξ.

On a par ailleurs :

$$y = \sqrt{\frac{x}{\mathrm{Re}}}(g_0 + \xi g_1)$$

en prenant $g_0(0) = 0$ et $g_1(0) = 0$ comme précédemment. Cela donne à l'extérieur de la couche limite :

$$u_E = 1 + \omega y = 1 + \xi g_0 + \xi^2 g_1$$

$$u \to u_E \Longrightarrow \begin{cases} f_0' \to 1 \\ f_1' \to g_0 \end{cases}$$

$$T \to T_E \Longrightarrow \begin{cases} g_0' \to 1 \\ g_1' \to 0 \end{cases}$$

A la paroi, on a :

$$u = v = 0 \Longrightarrow \begin{cases} f_0' = f_0 = 0 \\ f_1' = f_1 = 0 \end{cases}$$

$$T = T_P \Longrightarrow \begin{cases} g_0' = T_P/T_E \\ g_1' = 0 \end{cases}$$

La vitesse normale v vaut :

$$v = \frac{1}{2\sqrt{x\,\mathrm{Re}}}\left[f_0' g_0 - f_0 g_0' + \xi(2f_0' g_1 + g_0 f_1' - 2f_1 g_0' - f_0 g_1')\right]$$

Le coefficient de frottement et le flux de chaleur valent respectivement :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{1}{\sqrt{x\,\mathrm{Re}}}\left[f_0''(0) + \xi f_1''(0)\right]$$

$$\Phi = -\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{1}{\sqrt{x\,\mathrm{Re}}}\left[g_0''(0) + \xi g_1''(0)\right]$$

7.4 Comparaison des deux approches

Les résultats obtenus sont analogues à ceux de l'étude effectuée pour l'écoulement incompressible correspondant. Tout d'abord, on constate que le premier terme de la solution déficitaire est strictement identique à la solution obtenue en suivant l'approche classique. Le second terme de la solution déficitaire correspond à une partie des termes d'ordre 2. Contrairement au cas de l'écoulement incompressible,

on ne dispose pas ici de la solution exacte à l'ordre 2. Il n'est donc pas possible d'estimer la proportion de termes d'ordre 2 contenus dans la solution déficitaire d'ordre 1. Celle-ci présente toutefois l'avantage d'offrir un raccord réel à l'extérieur de la couche limite pour toutes les variables.

Les systèmes d'équations différentielles obtenus avec les deux approches ont été résolus pour diverses valeurs des paramètres M_0 et T_P. Pour $M_0 = 0,1$ et $T_P/T_E = 1$, on retrouve la valeur obtenue pour le coefficient de frottement de l'écoulement incompressible. La figure 7.1 montre les profils de vitesse relatifs au cas $M_0 = 0,85$ et $T_P/T_E = 0,2$. Les profils de vitesse normale, d'enthalpie et de masse volumique correspondants sont visibles sur les figures 7.2, 7.3 et 7.4.

Les profils de vitesse longitudinale offrent le même aspect général que ceux obtenus au chapitre 3 pour l'écoulement incompressible. Le profil composite d'ordre 1 est ici très proche du profil déficitaire. La différence est très faible entre les deux approches sur les profils de température et de masse volumique, car il n'y a pas ici de gradient de température dans le fluide parfait. Il aurait été intéressant de traiter un cas avec un tel gradient, mais il semble difficile de trouver des solutions auto-semblables.

Les figures 7.5 à 7.8 montrent les profils correspondant au cas $M_0 = 0,85$ et $T_P/T_E = 1,5$. La différence entre les deux approches est un peu plus marquée car la couche limite est plus épaisse. L'écart entre le profil composite et le profil déficitaire est un peu plus marqué. La figure 7.9 montre les coefficients de frottement obtenus à Mach 0,85 pour différentes valeurs de la température de paroi. La correction apportée par la solution déficitaire est plus grande quand la paroi est chaude. Ceci peut être expliqué par l'augmentation de l'épaisseur de couche limite. La variation de vitesse de l'écoulement externe est alors plus importante entre la paroi et le bord de la couche limite.

Les figures 7.10 et 7.11 montrent les flux de chaleur pariétaux correspondants. L'effet de cisaillement est relativement faible. La différence entre les deux approches aurait été plus sensible en présence d'un gradient de température dans l'écoulement externe. On constate cependant qu'un cisaillement positif provoque une augmentation du flux en valeur absolue.

Chapitre 8

APPLICATION A UN CORPS EMOUSSE HYPERSONIQUE

8.1 Etude bibliographique

Plusieurs auteurs ont appliqué la théorie de couche limite du second ordre au problème du corps émoussé hypersonique. Van Dyke [31] et Maslen [21] sont parmi les premiers à avoir étudié de façon générale les équations et les conditions de raccord. Tous deux les appliquent ensuite au point d'arrêt et calculent la contribution de chacun des effets du second ordre sur le frottement pariétal et le flux de chaleur. Davis et Flügge-Lotz [8], puis Fannelöp et Flügge-Lotz [11] poursuivent les calculs de Van Dyke sur le point d'arrêt axisymétrique et plan en étudiant systématiquement l'influence de la température de paroi et de la loi de viscosité. Les premiers calculs le long du corps sont ensuite effectués par Davis et Flügge-Lotz [9] pour des corps de révolution, et par Fannelöp et Flügge-Lotz [12]pour des corps plans. Ils utilisent les équations de couche limite de Van Dyke [31] et calculent de façon approchée l'effet de déplacement du fluide parfait en l'assimilant à l'écoulement sur le même corps légèrement dilaté et décalé, suivant la méthode proposée par Maslen [21].

Adams [1] résout les équations du deuxième ordre sur des paraboloïdes et des hyperboloïdes de révolution jusqu'à une grande distance du point d'arrêt (vingt fois le rayon du nez). Il obtient la distribution de pression sur le corps d'après la loi de Newton modifiée. Il calcule la perturbation du fluide parfait en appliquant la loi de Newton au corps augmenté de l'épaisseur de déplacement de la couche limite du premier ordre, et en extrapolant le résultat au corps initial. Il peut ainsi tracer des diagrammes représentant la contribution individuelle de chacun des effets du second ordre au frottement pariétal et au flux de chaleur, tout au long du corps. Mais, alors que sur le paraboloïde l'incrément d'ordre 2 reste raisonnablement faible, il augmente démesurément sur l'hyperboloïde, à mesure que l'on s'éloigne du nez. Marchand, Lewis, et Davis [20] publient des résultats comparables pour des cônes émoussés à nez sphérique. Ils disposent en outre de résultats expérimentaux. Dans ses travaux ultérieurs [22,2], Adams abandonne la théorie de couche limite du second ordre, au profit d'une couche limite classique raccordée au fluide parfait

à une hauteur finie au-dessus de la paroi. Cette méthode est moins rigoureuse que les techniques asymptotiques, mais ses résultats concordent mieux avec les calculs de couche de choc visqueuse. Son principal inconvénient réside dans le choix de l'épaisseur de couche limite, qui fixe le point où s'effectue le raccord. Monnoyer [23] a développé une méthode du même type avec des équations d'ordre 2 directement couplées au fluide parfait par un raccord situé à la limite externe de la couche limite. Ce système est actuellement appliqué à des corps hypersoniques tridimensionnels.

Signalons enfin les travaux de Papenfuss [26] sur le point d'arrêt tridimensionnel, toujours basés sur les équations de Van Dyke, et ceux de Vasantha et Nath [34] sur l'écoulement instationnaire au voisinage d'un point d'arrêt bidimensionnel.

8.2 Cas étudiés

Nous considérerons ici un hyperboloïde de révolution, évoluant à incidence nulle dans un gaz idéal. Van Dyke [31] a montré que le gradient d'entropie engendré par l'onde de choc courbe s'annule à la paroi dans le cas d'un corps plan, mais reste non nul pour un corps axisymétrique. Dans le cas de l'hyperboloïde, l'onde de choc devient presque rectiligne à mesure que la paroi se rapproche de son asymptote. Le gradient d'entropie reste donc confiné dans la zone correspondant aux lignes de courant qui ont traversé l'onde de choc dans la région du nez, où celle-ci est fortement courbée. L'importance relative de cette zone décroît à mesure que la couche de choc s'épaissit, lorsque l'on s'éloigne vers l'arrière du corps. La couche limite, en s'épaississant, va progressivement englober la couche de gradient d'entropie. Ce phénomène sera plus ou moins rapide suivant la valeur du nombre de Reynolds.

Nous avons comparé les résultats fournis par la théorie classique de couche limite du premier ordre à ceux de la formulation déficitaire du même ordre. Le calcul de l'écoulement de fluide parfait d'ordre 1 a été effectué à l'aide du programme CHOC5B écrit par J.P. Veuillot (ONERA-OA) ne traitant que les corps de révolution [35]. Le maillage de départ a été obtenu grâce au mailleur ORTHO2D [15] de O. Jacquotte (ONERA-OA). Pour la couche limite de Prandtl, nous avons utilisé le programme CLIC développé au CERT-DERAT par B. Aupoix et D. Arnal [4]. Enfin, les solutions des équations de Navier-Stokes utilisées comme références nous ont été communiquées par A. Lafon [16] du DERAT. Dans tous les cas, le fluide est assimilé à un gaz idéal dont la viscosité est donnée par la loi de Sutherland. L'indice polytropique γ vaut 1,4. Le nombre de Prandtl est supposé constant et égal à 0,725. La température de la paroi est fixée à 1500 K. Les autres données numériques sont extraites de la trajectoire de rentrée de la navette spatiale américaine lors de son deuxième vol. Elles sont énumérées dans le tableau ci-dessous établi d'après la référence [28]. Les résultats présentés sont tous adimensionnés conformément au chapitre 5.

Trajectoire de rentrée - Vol STS 2			
Mach M_∞	26,6	23,4	15,7
temps (s)	250	650	1000
altitude (km)	85,74	71,29	60,56
rayon de nez R_0 (m)	1,322	1,253	1,368
demi-angle des asymptotes (°)	41,7	40,2	42,75
pression p_∞ (Pa)	0,3634	4,0165	19,0140
température T_∞ (K)	199	205	253
vitesse U_∞ (m/s)	7530	6730	4990
masse volumique ρ_∞ (kg/m^3)	$6{,}3487.10^{-6}$	$6{,}7979.10^{-5}$	$2{,}6351.10^{-4}$
température de référence T_0 (K)	56321	44900	24945
nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_\infty U_\infty R_0}{\mu(T_0)}$	183,55	1865,6	7869,45
petit paramètre $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/2}$	0,074	0,023	0,011
nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_\infty = \dfrac{\rho_\infty U_\infty R_0}{\mu_\infty}$	4792	42374	111740

8.3 Calcul du point d'arrêt

Les équations de couche limite dégénèrent au point d'arrêt. Il faut donc utiliser une procédure spéciale en ce point. Le calcul peut ensuite se poursuivre en avançant le long du corps. Le programme CLIC fait appel aux solutions auto-semblables pour le calcul du point d'arrêt. Pour le calcul déficitaire, nous avons utilisé comme Van Dyke [31] des développements en séries de Blasius, suivant les puissances entières de l'abscisse curviligne.

Les équations d'ordre 1 sont :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\Big[r\rho_D u_E + r(\rho_E+\rho_D)u_D\Big] + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big[r\rho_D(v_E+v_D)\Big] + r\rho_E\frac{\partial v_D}{\partial \eta} = 0$$

$$(\rho_E+\rho_D)(u_E+u_D)\frac{\partial u_D}{\partial \xi} + \Big[\rho_D u_E + (\rho_E+\rho_D)u_D\Big]\frac{\partial u_E}{\partial \xi} + (\rho_E+\rho_D)(v_E+v_D)\frac{\partial u_D}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu\frac{\partial u_D}{\partial \eta}\right)$$

$$(\rho_E+\rho_D)(u_E+u_D)\frac{\partial T_D}{\partial \xi} + \Big[\rho_D u_E + (\rho_E+\rho_D)u_D\Big]\frac{\partial T_E}{\partial \xi} + (\rho_E+\rho_D)(v_E+v_D)\frac{\partial T_D}{\partial \eta} = u_D\frac{\partial P_E}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\frac{\partial T_D}{\partial \eta}\right) + \frac{\mu}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_D}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\rho_D T_E + (\rho_E+\rho_D)T_D = 0$$

On cherche les variables déficitaires sous la forme :

$$\begin{aligned} u_D &= \xi f_1(\eta) + O(\xi^3) \\ v_D &= \quad f_2(\eta) + O(\xi^2) \\ \rho_D &= \quad f_3(\eta) + O(\xi^2) \\ T_D &= \quad f_4(\eta) + O(\xi^2) \end{aligned}$$

En effet, d'après la symétrie de révolution, les grandeurs au voisinage du point d'arrêt sont des fonctions paires de l'abscisse curviligne ξ et se développent suivant les puissances paires de ξ, sauf la vitesse longitudinale qui est une fonction impaire et se développe suivant les puissances impaires de ξ. Comme seul le point d'arrêt proprement dit nous intéresse ici, nous ne retiendrons que le premier terme de chaque développement. Les grandeurs du fluide parfait se développent de la même manière :

$$\begin{aligned} u_D &= \xi F_1(\eta) + O(\xi^3) \\ v_D &= \quad F_2(\eta) + O(\xi^2) \\ \rho_D &= \quad F_3(\eta) + O(\xi^2) \\ T_D &= \quad F_4(\eta) + O(\xi^2) \\ r &= \qquad \xi + O(\xi^3) \end{aligned}$$

Les fonctions F_1, F_2, F_3 et F_4 sont évaluées d'après la solution non visqueuse. En reportant ces développements dans les équations de couche limite, on obtient un système différentiel pour les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 :
- continuité :

$$(F_3 + f_3)f_2' + f_3'f_2 + (f_3F_2)' + 2(F_3 + f_3)f_1 + 2f_3F_1 = 0$$

- quantité de mouvement :

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d}{d\eta}\left[\mu f_1'\right] = (F_3 + f_3)(F_2 + f_2)f_1' + (F_3 + f_3)(2F_1 + f_1)f_1 + f_3F_1^2$$

- énergie :

$$(F_3 + f_3)(F_2 + f_2)f_4' = \frac{1}{\mathrm{Pr}\ \mathrm{Re}}\frac{d}{d\eta}\left[\mu f_4'\right]$$

- état :

$$F_3f_4 + f_3(F_4 + f_4) = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{array}{llll} \eta = 0 : & f_1 = -F_1 & f_2 = 0 & f_4 = T_P - F_4 \\ \eta \to \infty : & f_1 = 0 & f_4 = 0 & \end{array}$$

Ce système est résolu aisément par différences finies. Les figures 8.1 à 8.4 montrent les profils obtenus à Mach 23,4 au point d'arrêt par les deux systèmes de couche

limite du premier ordre. On remarque que le profil de vitesse longitudinale du fluide parfait s'écarte assez rapidement de sa valeur à la paroi et que la différence est non négligeable à l'extérieur de la couche limite. En revanche, la température et la masse volumique du fluide parfait sont presque constantes selon la normale à la paroi. La figure 8.3 laisse prévoir pour la couche limite déficitaire un flux de chaleur légèrement supérieur à celui de la couche limite classique.

8.4 Résultats

Une fois obtenue la solution de départ au point d'arrêt, les équations de couche limite sont résolues en avançant pas à pas le long du corps. Plusieurs cas ont été traités. Le premier point se situe vers le milieu de la trajectoire de rentrée, là où les flux thermiques sont les plus élevés. La navette est alors à 71 km d'altitude et le nombre de Mach est de 23,4. Le petit paramètre ε vaut 0,023. Toutes les courbes sont tracées en variables adimensionnées. Pour des raisons de clarté, on n'a pas représenté tous les points de la solution de référence obtenue en résolvant les équations de Navier-Stokes pour une couche mince.

Les figures 8.5 à 8.8 montrent les profils normaux des principales variables, à l'abscisse $\xi = 4$. De façon générale, les profils déficitaires du premier ordre sont en bon accord avec les profils de référence. La figure 8.5 révèle une différence importante entre le profil déficitaire et le profil classique de vitesse longitudinale. De plus, la pente à la paroi du profil non visqueux est relativement importante et décroît de façon non négligeable jusqu'à la frontière de la couche limite. De même, on constate sur la figure 8.7 l'existence d'un gradient normal de température à la paroi assez marqué dans le fluide parfait. L'effet est beaucoup plus faible sur la masse volumique (fig. 8.8) et les profils sont par conséquent beaucoup plus proches. Il importe de noter que les profils de référence rejoignent presque exactement les profils non visqueux à l'extérieur de la couche limite. Cela signifie que la perturbation du fluide parfait causée par l'effet de déplacement de la couche limite est très faible et qu'il n'est peut-être pas utile d'en tenir compte. Ceci contribue probablement au succès de la solution déficitaire dès le premier ordre.

Les figures 8.9 et 8.10 montrent les profils de vitesse et de température à l'abscisse $\xi = 9,5$. A mesure que la couche limite s'épaissit, elle s'étend sur une portion de plus en plus grande de la zone cisaillée, et les gradients normaux de vitesse et de température à l'extérieur de la couche limite diminuent. La différence est de plus en plus grande entre les profils déficitaires et ceux de la couche limite classique, mais les premiers restent en assez bon accord avec les solutions de référence.

On peut voir sur les figures 8.11 et 8.12 le frottement à la paroi prédit par les trois approches. La différence est importante entre les deux théories de couche limite, et augmente à mesure que l'on s'éloigne du point d'arrêt. La formulation déficitaire donne une meilleure prévision, mais sous-estime encore légèrement le frottement. On a représenté sur les figures 8.13 et 8.14 le flux thermique pariétal correspondant. Les différences sont insignifiantes au voisinage du nez, mais aug-

mentent vers l'arrière du corps. La solution déficitaire reste légèrement inférieure à la solution de référence. Les écarts sont cependant moindres que sur la contrainte pariétale.

Le deuxième cas traité correspond à un point moins élevé de la trajectoire. La navette vole à Mach 15,7 à une altitude de 60 km. Le petit paramètre ε ne vaut plus que 0,011. La couche limite sera donc moins épaisse par rapport à la couche de choc. Les figures 8.15 et 8.16 montrent les profils de vitesse et de température. On remarque en effet que les profils non visqueux sont presque rectilignes. Les gradients pariétaux demeurent toutefois non négligeables. Ceci explique l'écart encore relativement important, quoique plus faible que dans le cas précédent, entre les valeurs du frottement tracées sur la figure 8.17. En revanche, les différences sont beaucoup plus faibles sur les flux thermiques, comme on peut le voir sur la figure 8.18.

Le troisième et dernier cas présenté ici se situe au contraire en début de rentrée atmosphérique. L'altitude est de 86 km et le nombre de Mach vaut 26,6. Le petit paramètre ε vaut 0,074. La couche limite est alors très épaisse et envahit plus de la moitié de la couche de choc. La figure 8.19 montre que très vite la couche cisaillée dans l'écoulement non visqueux se trouve englobée dans la couche limite. Il en est de même pour la zone de gradient de température, représentée sur la figure 8.20. Ceci peut peut-être expliquer les résultats d'Adams [1] avec la couche limite du second ordre de Van Dyke. En effet, celle-ci utilise la valeur à la paroi du cisaillement dans le fluide parfait. Mais quand ce cisaillement décroît très vite dans l'épaisseur de la couche limite, il est vraisemblable que la couche limite du second ordre donne une valeur beaucoup trop élevée pour le frottement pariétal. Compte tenu de ce qui précède, on ne s'étonnera pas du grand écart visible sur la figure 8.21 entre les valeurs fournies par les deux théories de couche limite. L'écart sur les flux (fig. 8.22) reste modéré, quoique plus marqué que dans les cas précédents.

En résumé, ces quelques exemples montrent que la formulation déficitaire du premier ordre appliquée à un hyperboloïde hypersonique permet d'améliorer sensiblement les résultats de la couche limite classique, pour un coût équivalent. L'avantage est surtout appréciable quand la couche limite est épaisse, c'est à dire en début de rentrée atmosphérique. Même si la solution déficitaire ne recoupe pas exactement la solution directe des équations de Navier-Stokes, elle en constitue néanmoins une bonne approximation, obtenue plus facilement et à moindre coût. Elle devrait en particulier se révéler utile pour les étude paramétriques où l'on calcule plusieurs couches limites avec le même champ de fluide parfait. Aucun essai n'a été tenté avec les théories du deuxième ordre, classique ou déficitaire. Il est cependant probable que pour un coût de l'ordre du double l'amélioration obtenue serait faible.

Conclusion

A partir des équations de Navier-Stokes, l'emploi simultané de la formulation déficitaire et des techniques asymptotiques permet d'obtenir un nouveau système d'équations pour la couche limite. La démarche suivie est tout à fait comparable à celle qui a conduit Van Dyke à énoncer sa théorie de couche limite du deuxième ordre. La couche limite déficitaire reste cohérente avec la couche limite classique dont elle conserve les spécificités. En premier lieu, les équations de couche limite sont découplées de celles régissant l'écoulement externe. En respectant l'ordre établi, il est donc possible de résoudre les deux problèmes séparément. De plus, la structure parabolique des équations de couche limite autorise l'emploi pour les résoudre de méthodes de marche très rapides.

Mais la formulation déficitaire offre quelques avantages supplémentaires intéressants. Tout d'abord, elle assure un raccord sans heurt entre la couche limite et l'écoulement externe, quelle que soit l'allure de ce dernier, et ceci dès le premier ordre. On dispose donc d'une solution continue dans l'ensemble du domaine occupé par le fluide. Nous avons aussi montré qu'à un ordre donné, la formulation déficitaire inclut déjà certains termes qui n'interviennent qu'à un ordre supérieur dans la théorie de Van Dyke, ce qui améliore quelque peu les prévisions. Les divers cas étudiés, tant pour les fluides incompressibles que pour les fluides compressibles, montrent que sans pouvoir prétendre fournir directement la solution des équations de Navier-Stokes, la formulation déficitaire est souvent plus précise que la couche limite classique.

Cependant, la couche limite ne représente que les effets visqueux dûs à la présence de la paroi et ne tient pas compte de ceux qui peuvent exister pour d'autres raisons au sein de l'écoulement externe. Ceci est vrai pour la formulation déficitaire comme pour la théorie classique. De plus, comme avec cette dernière, la procédure hiérarchisée issue des techniques de petites perturbations reste limitée aux cas de couplage faible, dont sont exclus tous les cas d'interaction visqueuse forte. En cas de décollement de la couche limite, on doit utiliser un autre système de couplage. On pourrait étudier un processus analogue à ceux utilisés avec la théorie classique de couche limite, mais basé sur les équations déficitaires.

Le fort degré de parenté entre la couche limite classique et la couche limite déficitaire devrait autoriser l'emploi de la seconde partout où l'on peut utiliser la première, sans inconvénient majeur. Toutefois, il est bien évident que l'on n'en tirera pas toujours un bénéfice. Cette étude s'est limitée aux écoulements laminaires bidimensionnels, mais l'extension aux écoulements tridimensionnels paraît envisageable. Les équations à traiter sont certes plus complexes, mais ne de-

vraient pas révéler de difficultés fondamentales insurmontables. De même, on pourrait développer des équations déficitaires intégrant des modèles de turbulence. En ce qui concerne l'application à l'origine de cette étude, à savoir les corps émoussés hypersoniques, il semble indispensable d'introduire un modèle de gaz réel représentant les effets de dissociation chimique.

D'autres applications peuvent encore être traitées. En régime supersonique, l'existence d'un gradient longitudinal de pression s'accompagne souvent d'une variation de pression perpendiculairement à la paroi. La couche limite déficitaire peut en tenir compte partiellement dès le premier ordre. En ce qui concerne les dispositifs hypersustentateurs, on se trouve confronté à la fois à un écoulement externe complexe et à des parois fortement courbées. Là aussi l'emploi de la formulation déficitaire pourrait s'avérer fructueux, ainsi que dans tous les cas où une couche limite se développe sous l'influence d'un objet situé en amont. De façon générale, la formulation déficitaire devrait pouvoir être utilisée avec profit dans les cas de couches limites épaisses où l'écoulement non visqueux ne peut plus être réduit à sa seule valeur à la paroi, comme c'est le cas dans la couche limite de Prandtl.

Bibliographie

[1] **Adams J.C.**
Higher-order boundary-layer effects on analytic bodies of revolution
Arnold Engineering Development Center
Rapport AEDC-TR-68-57 (1968)

[2] **Adams J.C., Martindale W.R., Mayne A.W., Marchand E.O.**
Real gas scale effects on hypersonic laminar boundary-layer parameters including effects of entropy-layer swallowing
Arnold Engineering Development Center
Rapport AEDC-TR-75-2 (1975)

[3] **Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H.**
Computational fluid mechanics and heat transfer
Mc Graw-Hill (1984)

[4] **Aupoix B., Arnal D.**
CLIC : calcul des couches limites compressibles
Rapport technique OA 23/5005 AYD (1988)

[5] **Bonnet A., Luneau J.**
Théories de la dynamique des fluides
Cours ENSAE (1989)

[6] **Cousteix J.**
Aérodynamique en fluide visqueux
Cours ENSAE (1987)

[7] **Darrozès J.S.**
Techniques asymptotiques de modélisation en vue de la simulation
Cours du DEA de Mécanique des fluides
Université Pierre et Marie Curie (1987)

[8] **Davis R.T., Flügge-Lotz I.**
The laminar compressible boundary-layer in the stagnation-point region of an axisymmetric blunt body including the second-order effect of vorticity interaction
International Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 7 p. 341-370 (1964)

[9] **Davis R.T., Flügge-Lotz I.**
Laminar compressible flow past axisymmetric blunt bodies
Journal of Fluid Mechanics Vol. 20 Part 4 p. 593-623 (1964)

[10] **East L.F.**
A representation of second-order boundary layer effects in the momentum integral equation and in viscous-inviscid interactions
RAE Technical Report 81002 (1981)

[11] **Fannelöp T.K., Flügge-Lotz I.**
Two-dimensional hypersonic stagnation flow at low Reynolds numbers
Z. Flugwiss. Vol. 13 n° 8 p. 282-296 (1965)

[12] **Fannelöp T.K., Flügge-Lotz I.**
Viscous hypersonic flow over simple blunt bodies; comparison of a second-order theory with experimental results
Journal de Mécanique Vol. 5 n° 1 p. 69-100 (1966)

[13] **Gendre P.**
Calcul d'écoulements turbulents décollés par résolution des équations de Navier-Stokes
Thèse ENSAE (1989)

[14] **Glauert M.B.**
The boundary layer in simple shear flow past a flat plate
Journal of the Aeronautical Sciences - Reader's forum
vol. 24 p. 848-849 (1957)

[15] **Jacquotte O.P., Cabello J.**
A variational method for the optimization and adaptation of grids in CFD
Second International Conference on Numerical Grid Generation in CFD
Miami Beach USA (5-12 Décembre 1988)

[16] **Lafon A.**
Calcul d'écoulements visqueux hypersoniques
Rapport technique DERAT n° 32/5005.22 (1990)

[17] **Le Balleur J.C.**
Calcul des écoulements à forte interaction visqueuse au moyen de méthodes de couplage
AGARD - CP 291 ou ONERA - TP n° 1980-121 (1980)

[18] **Li T.Y.**
Simple shear flow past a flat plate in an incompressible fluid of small viscosity
Journal of the Aeronautical Sciences - Reader's forum
vol. 22 n° 9 p. 651-652 (1955)

[19] **Li T.Y.**
Effects of free-stream vorticity on the behaviour of a viscous boundary layer
Journal of the Aeronautical Sciences - Reader's forum
vol. 23 n° 12 p. 1128-1129 (1956)

[20] **Marchand E.O., Lewis C.H., Davis R.T.**
Second-order boundary-layer effects on a slender blunt cone at hypersonic conditions
AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting
AIAA Paper n° 68-54 (1968)

[21] **Maslen S.H.**
Second-order effects in laminar boundary layers
AIAA Journal Vol. 1 n° 1 p. 33-40 (1963)

[22] **Mayne A.W., Adams J.C.**
Streamline swallowing by laminar boundary layers in hypersonic flow
Arnold Engineering Development Center
Rapport AEDC-TR-71-32 (1971)

[23] **Monnoyer F., Mundt Ch., Pfitzner M.**
Calculation of the hypersonic viscous flow past reentry vehicles with an Euler-boundary layer coupling method
28th Aerospace Sciences Meeting
AIAA Paper n° 90-0417 (1990)

[24] **Murray J.D.**
The boundary layer on a flat plate in a stream with uniform shear
Journal of Fluid Mechanics vol. 11 p. 309-316 (1961)

[25] **Nayfeh A.H.**
Introduction to perturbation techniques
John Wiley & Sons (1981)

[26] **Papenfuss H.D**
The second-order boundary-layer effects for the compressible three-dimensional stagnation-point flow
Journal de Mécanique Vol. 16 n° 5 p. 705-732 (1977)

[27] **Patankar S.V.**
Numerical heat transfer and fluid flow
Mc Graw-Hill (1980)

[28] **Shinn J.L., Moss J.N., Simmonds A.L.**
Viscous shock layer heating analysis for the shuttle windward plane with surface finite catalytic recombinations rates
AIAA Paper n° 82-0842 (1982)

[29] **Toomre A., Rott N.**
On the pressure induced by the boundary layer on a flat plate in shear flow
Journal of Fluid Mechanics vol. 19 p. 1-10 (1964)

[30] **Van Dyke M.**
Higher approximations in boundary layer theory
Part 1 : General analysis
Journal of Fluid Mechanics vol. 14 p. 161-177 (1962)
Part 2 : Application to leading edges
Journal of Fluid Mechanics vol. 14 p. 481-495 (1962)

[31] **Van Dyke M.**
Second-order compressible boundary-layer theory with application to blunt bodies in hypersonic flow
Hypersonic Flow Research Vol. 7 p. 37-76 (1962)
F.R. Riddell Editor
Academic Press

[32] **Van Dyke M.**
Higher-Order boundary-layer theory
Annual Review of Fluid Mechanics (1969)

[33] **Van Dyke M.**
Perturbation methods in fluid mechanics
Parabolic Press (1975)

[34] **Vasantha R., Nath G.**
Semi-similar solutions of the insteady compressible second-order boundary-layer flow at the stagnation point
International Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 32 n° 3 p. 435-444 (1989)

[35] **Veuillot J.P.**
Rapport ONERA n° ?

[36] **Viviand H.**
Application des méthodes asymptotiques à l'étude des couches visqueuses libres
La Recherche Aérospatiale n° 131 p. 17-21 (1969)

[37] **Werle M.J., Davis R.T.**
Self-similar solutions to the second-order incompressible boundary-layer equations
Journal of Fluid Mechanics vol. 40 part 2 p. 343-360 (1970)

Liste des figures

fig. 1.1 : exemple de solution asymptotique

fig. 1.2 : solutions composites

fig. 1.3 : théorie de Van Dyke : raccord d'ordre 1

fig. 1.4 : théorie de Van Dyke : raccord d'ordre 2

fig. 2.1 : couche de gradient d'entropie

fig. 2.2 : vitesse déficitaire

fig. 3.1 : cisaillement uniforme sur une plaque plane

fig. 3.2 : profils de vitesse de Blasius et Murray

fig. 3.3 : fonctions f_1' et g

fig. 3.4 : profils de vitesse de Van Dyke et déficitaires

fig. 3.5 : profils de vitesse normale de Van Dyke et déficitaires

fig. 3.6 : coefficients de frottement de Van Dyke et déficitaires

fig. 4.1 : cisaillement variable sur une plaque plane

fig. 4.2 : profils de vitesse, cisaillement constant, $\omega = 60$

fig. 4.3 : profils de vitesse normale

fig. 4.4 : coefficients de frottement

fig. 4.5 : profils de vitesse, cisaillement limité

fig. 4.6 : coefficients de frottement

fig. 4.7 : profils de vitesse, cisaillement négatif

fig. 4.8 : coefficients de frottement

fig. 4.9 : profils de vitesse, cisaillement décroissant

fig. 4.10 : coefficients de frottement

fig. 4.11 : profils de vitesse, cisaillement croissant

fig. 4.12 : coefficients de frottement

fig. 4.13 : profils de vitesse, cisaillement sinusoïdal

fig. 4.14 : coefficients de frottement

fig. 5.1 : coordonnées curvilignes

fig. 7.1 : profils de vitesse, Mach 0,85, $T_P/T_E = 0,2$

fig. 7.2 : profils de vitesse normale

fig. 7.3 : profils d'enthalpie

fig. 7.4 : profils de masse volumique

fig. 7.5 : profils de vitesse, Mach 0,85, $T_P/T_E = 1,5$

fig. 7.6 : profils de vitesse normale

fig. 7.7 : profils d'enthalpie

fig. 7.8 : profils de masse volumique

fig. 7.9 : frottement pariétal, Mach 0,85, $T_P/T_E = 0{,}2;\ 1;\ 1{,}5$

fig. 7.10 : flux thermique, Mach 0,85, $T_P/T_E = 0{,}2$

fig. 7.11 : flux thermique, Mach 0,85, $T_P/T_E = 1{,}5$

fig. 8.1 : profils de vitesse, point d'arrêt, Mach 23,4

fig. 8.2 : profils de vitesse normale

fig. 8.3 : profils de température

fig. 8.4 : profils de masse volumique

fig. 8.5 : profils de vitesse, $\xi = 4$, Mach 23,4

fig. 8.6 : profils de vitesse normale

fig. 8.7 : profils de température

fig. 8.8 : profils de masse volumique

fig. 8.9 : profils de vitesse, $\xi = 9,5$, Mach 23,4

fig. **8.10** : profils de température

fig. **8.11** : frottement pariétal, $0 < \xi < 4$, Mach 23,4

fig. **8.12** : frottement pariétal, $0 < \xi < 21$

fig. **8.13** : flux thermique, $0 < \xi < 4$

fig. **8.14** : flux thermique, $0 < \xi < 21$

fig. **8.15** : profils de vitesse, $\xi = 4$, Mach 15,7

fig. **8.16** : profils de température

fig. **8.17** : frottement pariétal, $0 < \xi < 5$, Mach 15,7

fig. **8.18** : flux thermique, $0 < \xi < 5$

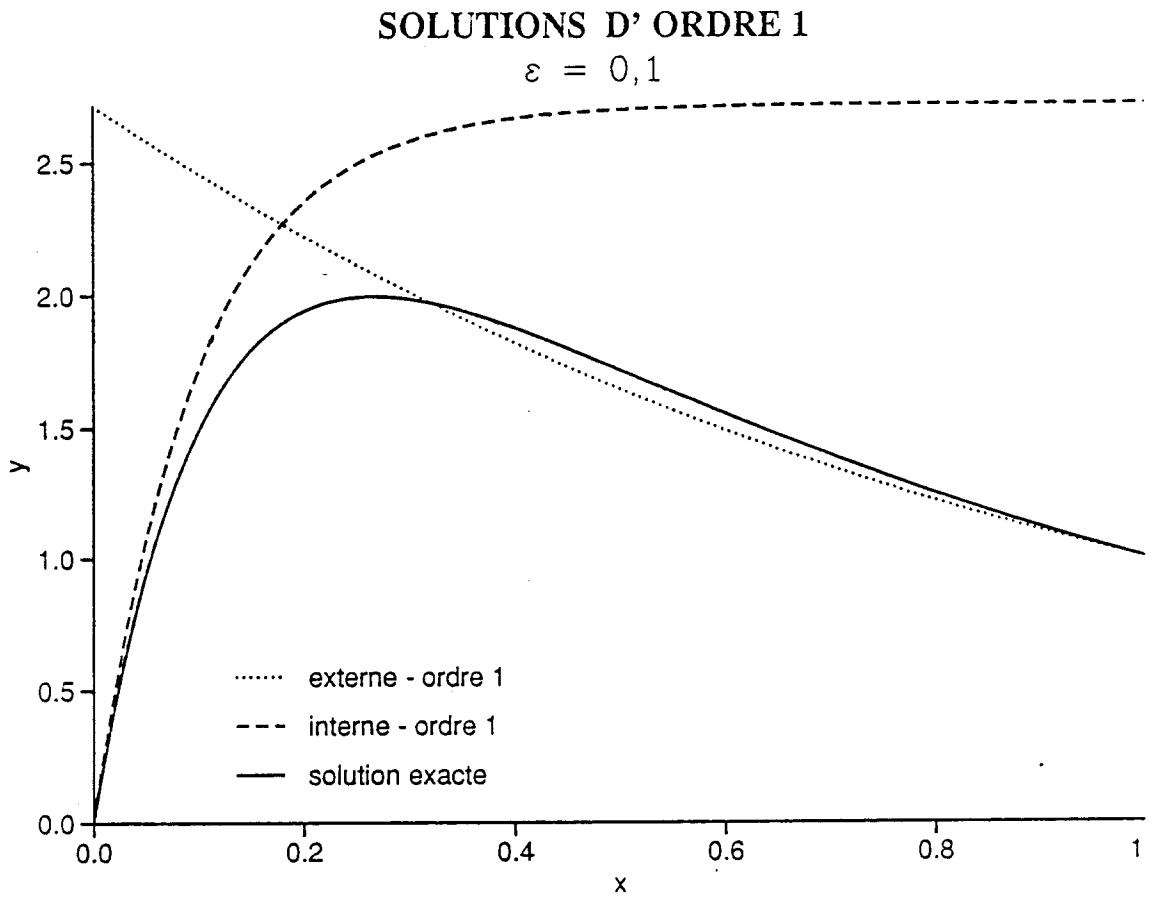
fig. **8.19** : profils de vitesse, $\xi = 4$, Mach 26,6

fig. **8.20** : profils de température

fig. **8.21** : frottement pariétal, $0 < \xi < 5$, Mach 26,6

fig. **8.22** : flux thermique, $0 < \xi < 5$

fig. 1.1


SOLUTIONS D' ORDRE 1
ε = 0,1
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
externe - ordre 1
interne - ordre 1
solution exacte

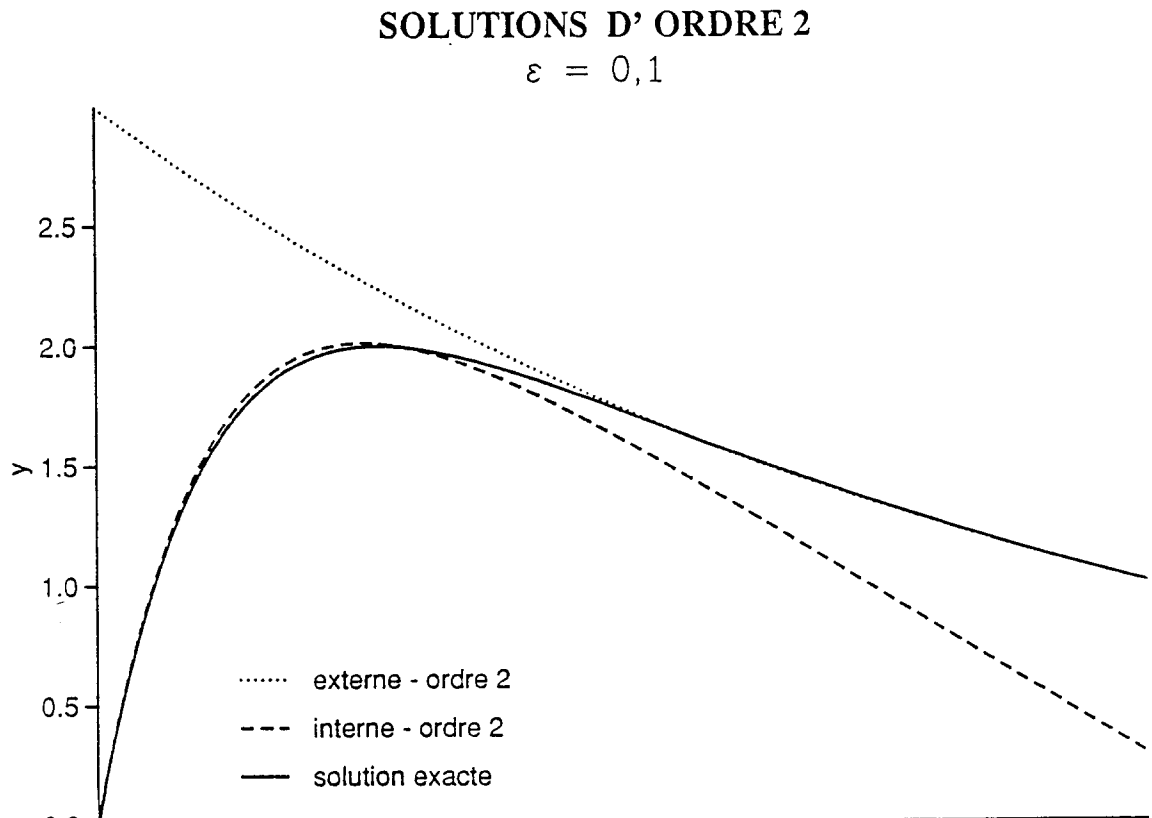
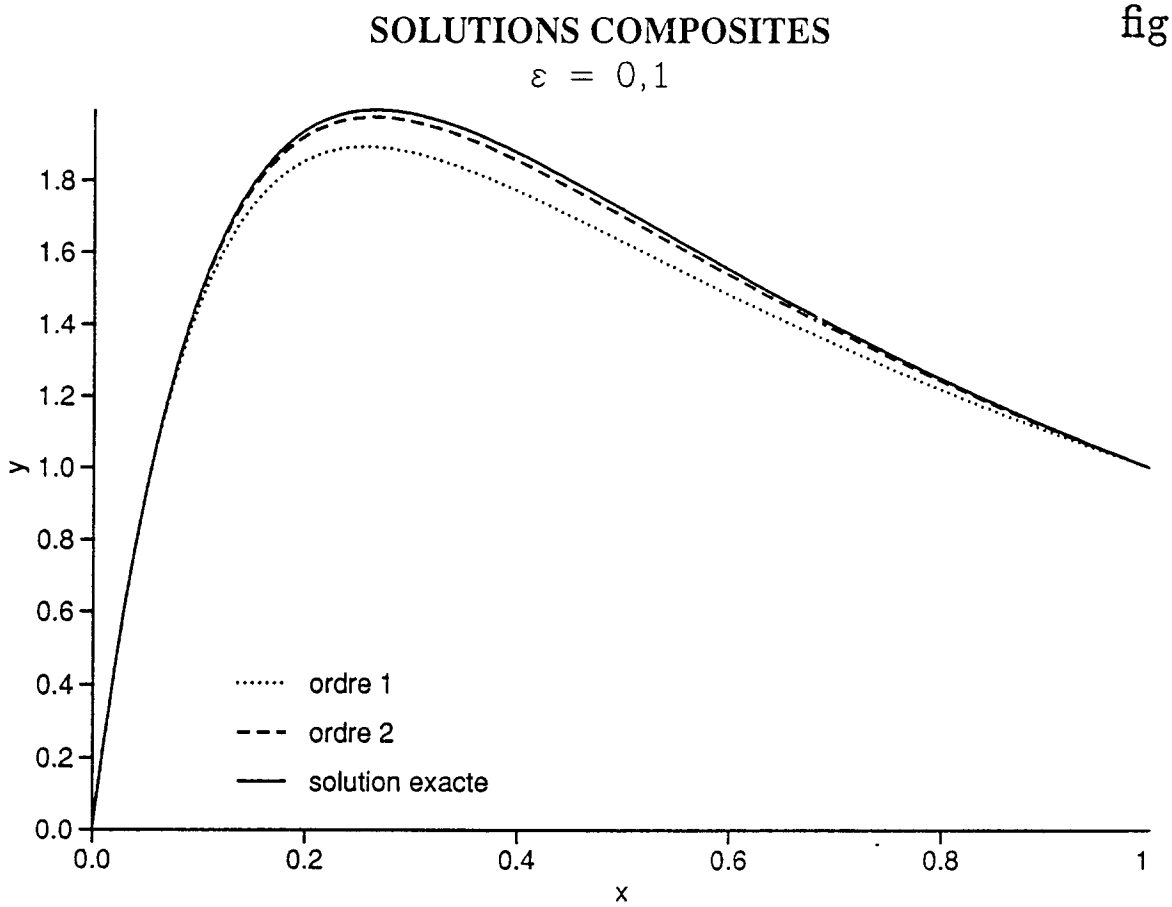

SOLUTIONS D' ORDRE 2
ε = 0,1
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
y
externe - ordre 2
interne - ordre 2
solution exacte

fig. 1.2



CONDITIONS DE RACCORD

Ordre 1 :

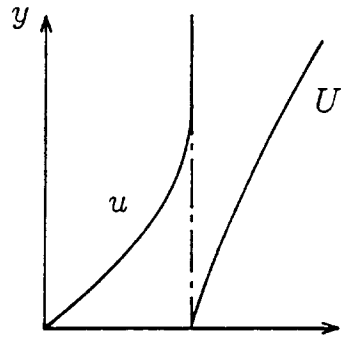


fig. 1.3

Ordre 2 :

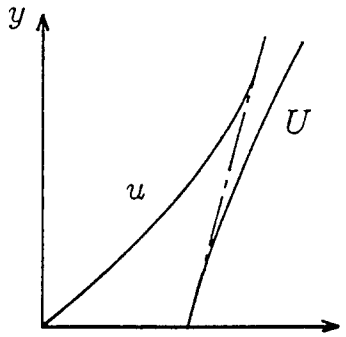
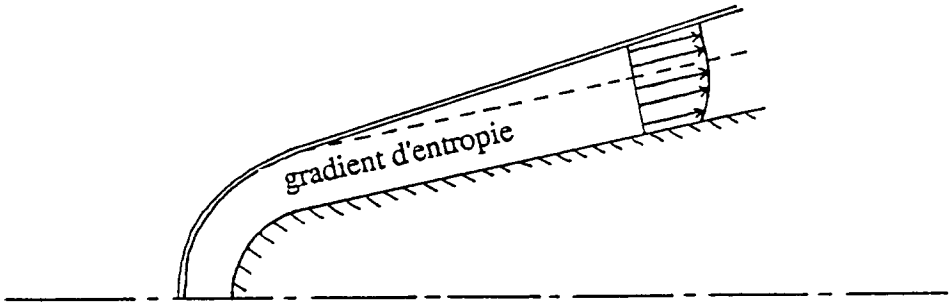


fig. 1.4

ZONE A GRADIENT D' ENTROPIE

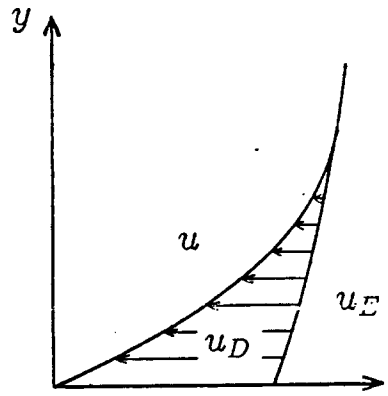
(écoulement non visqueux)

fig. 2.1



APPROCHE DEFICITAIRE

fig. 2.2



$$u = u_E + u_D \qquad \lim_{y \to \infty} u_D = 0$$

u_E : vitesse du fluide parfait

u_D : vitesse déficitaire

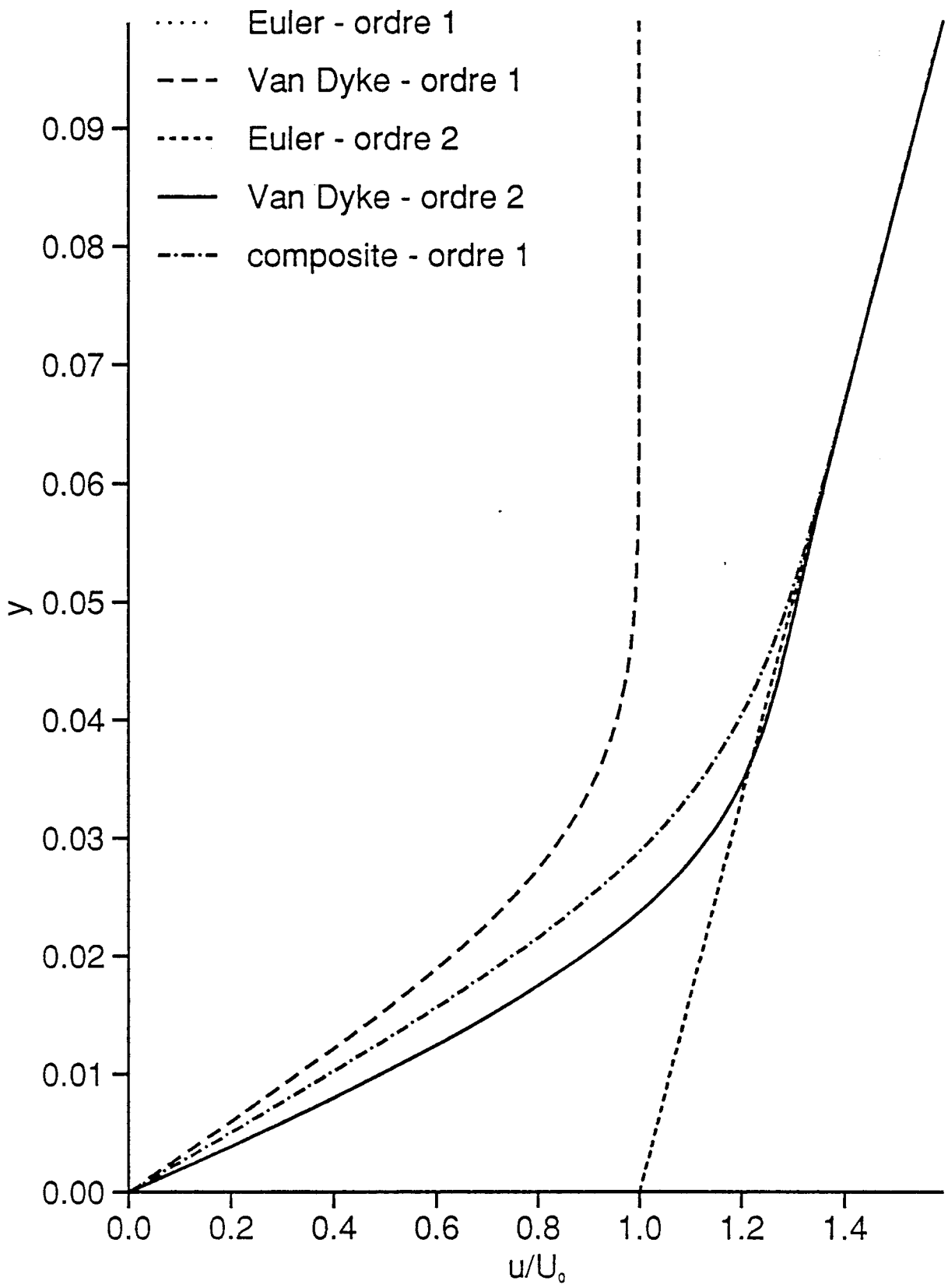
fig. 3.1

cisaillement uniforme sur une plaque plane

PROFIL DE VITESSE

fig. 3.2

similitude incompressible $\xi = 0{,}06$



COMPARAISON MURRAY - DEFICITAIRE

similitude incompressible

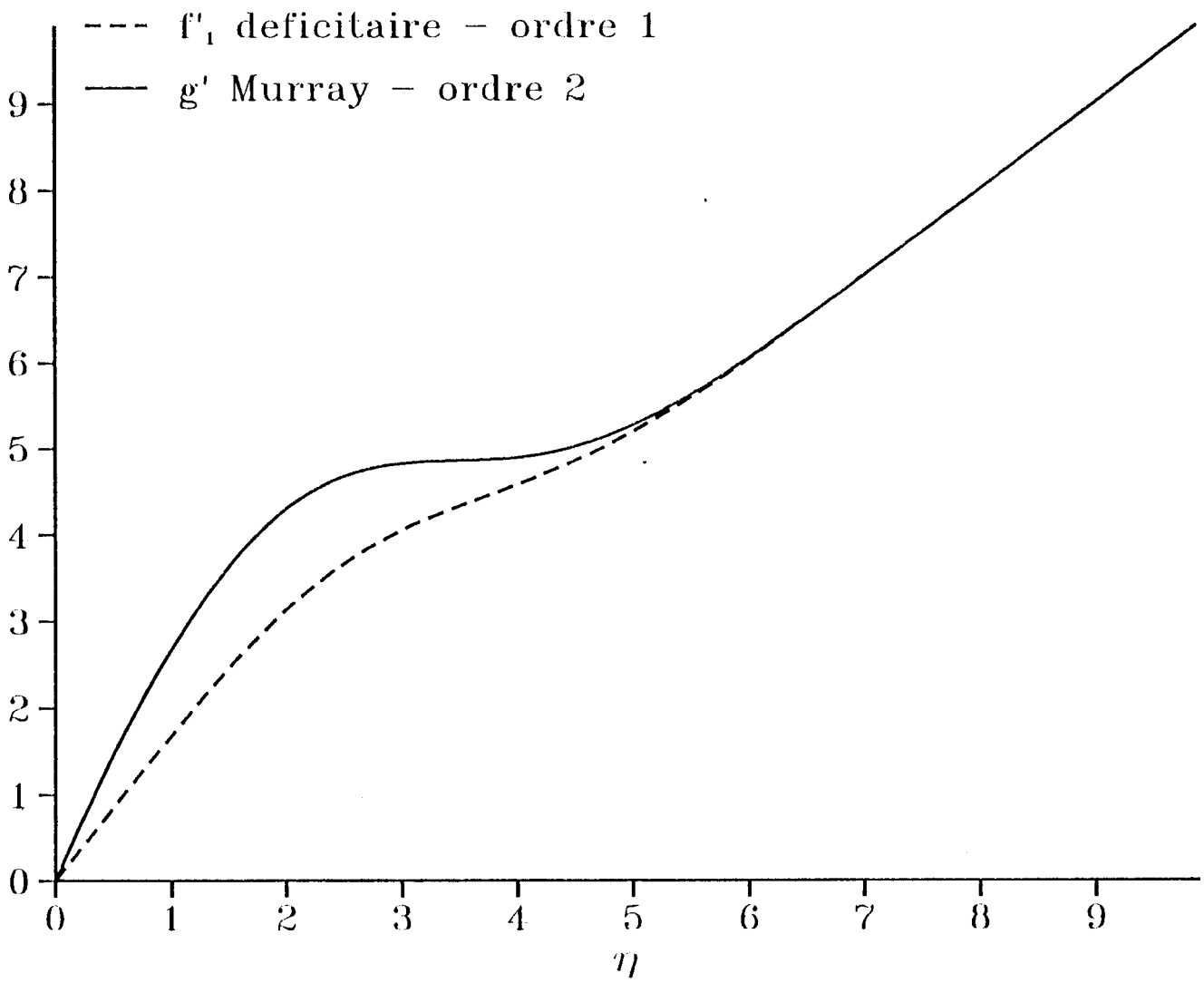


fig. 3.3

PROFIL DE VITESSE

similitude incompressible $\xi = 0{,}06$

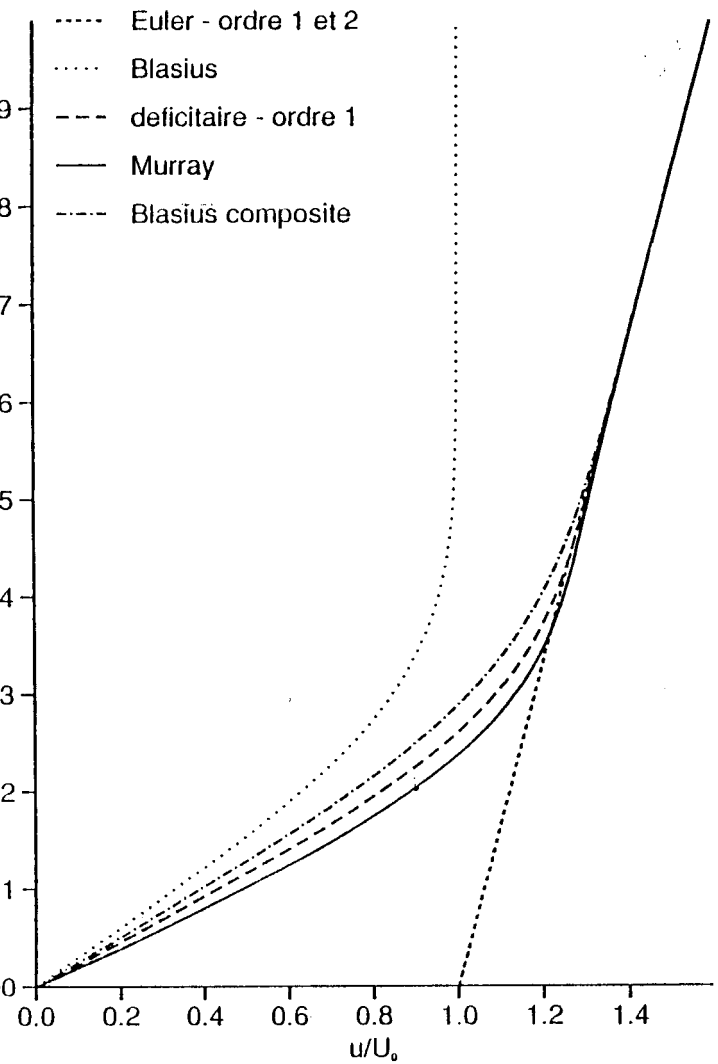


fig. 3.4

PROFIL DE VITESSE NORMALE

similitude incompressible $\xi = 0{,}06$

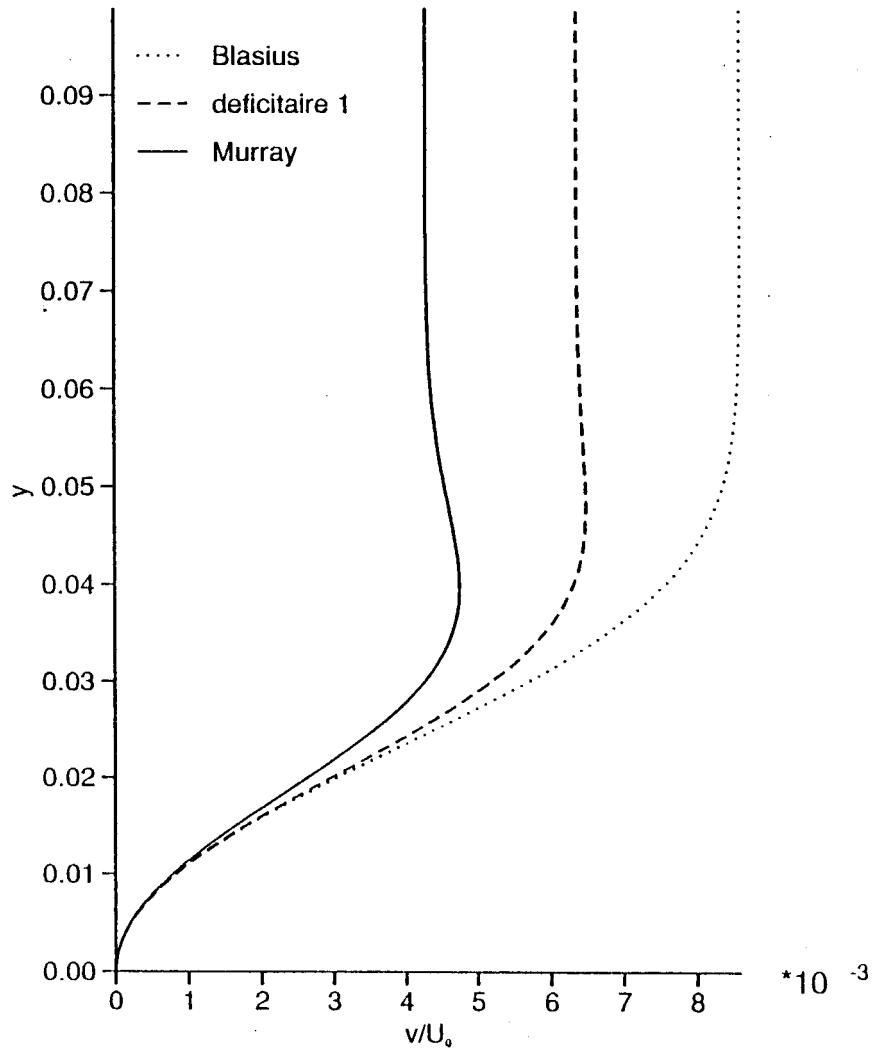


fig. 3.5

fig. 3.6

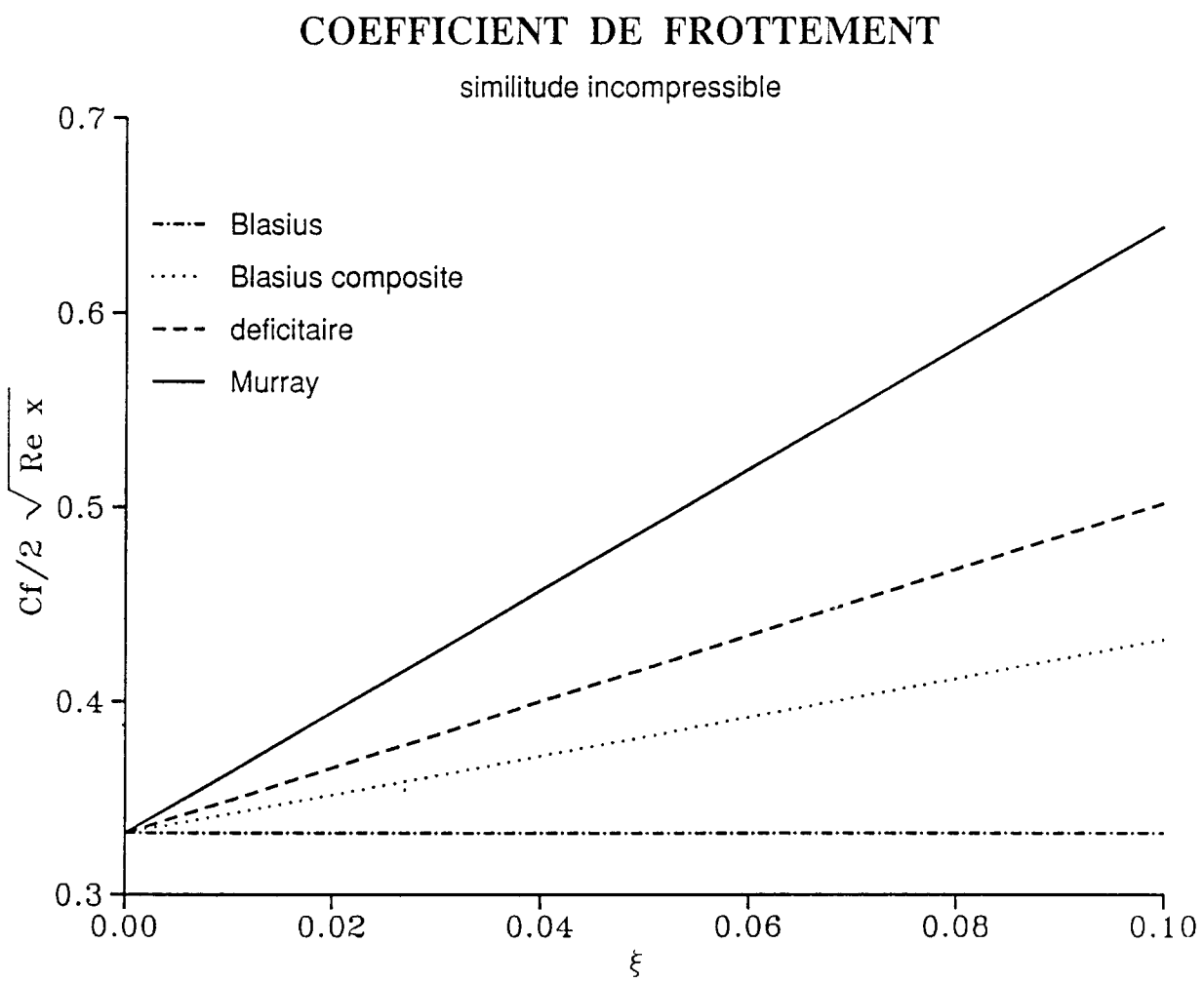
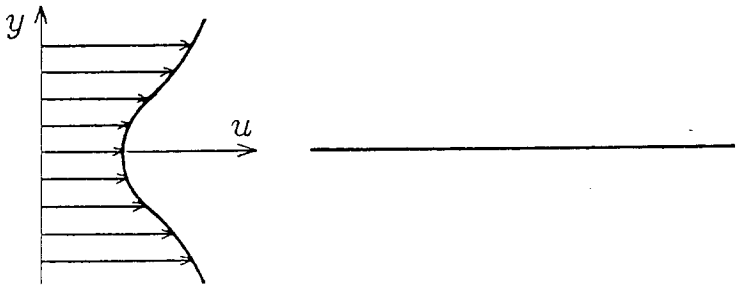


fig. 4.1

cisaillement variable sur une plaque plane



PROFILS DE VITESSE

cisaillement constant omega = 60 x = 0.9

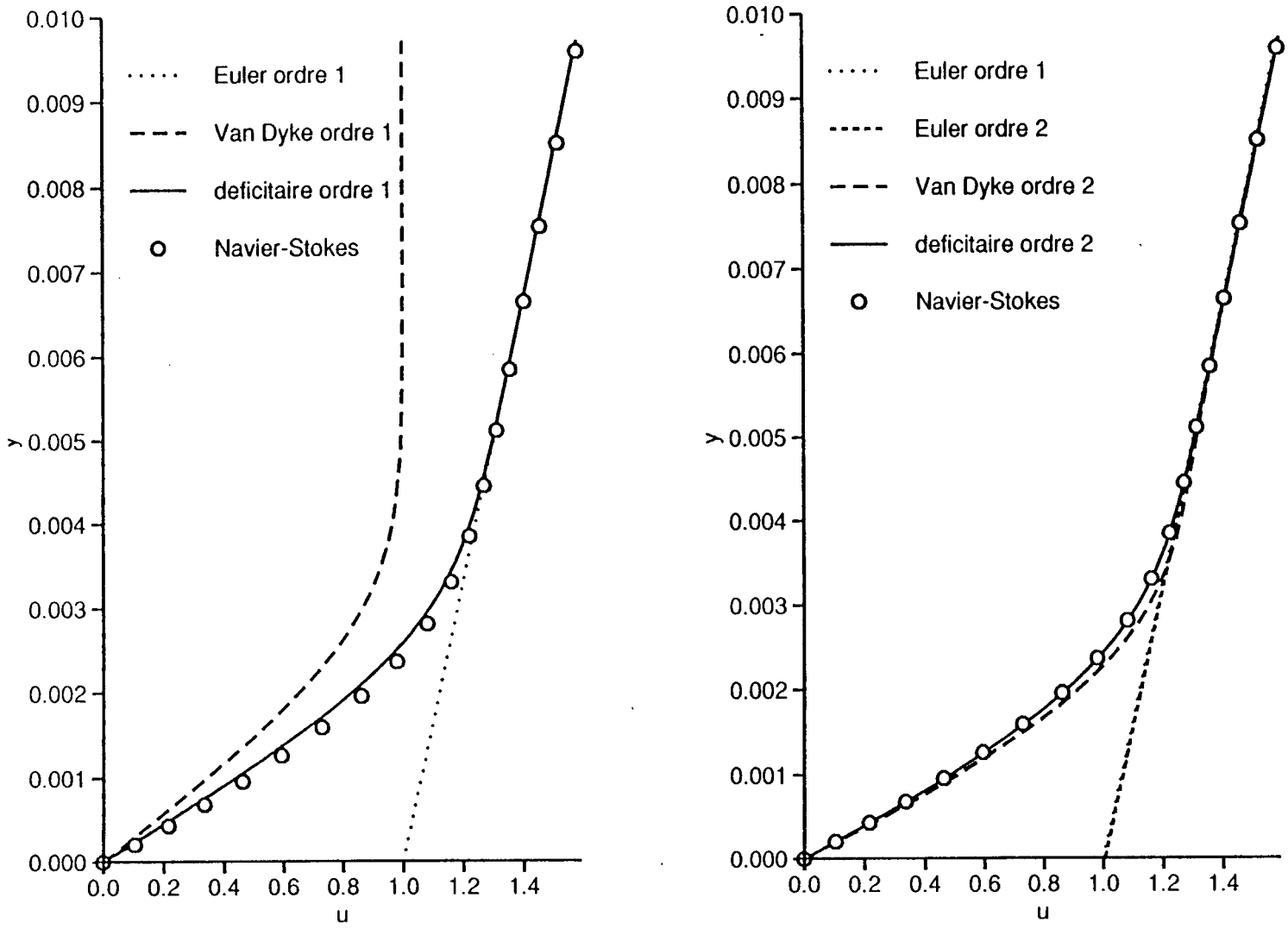
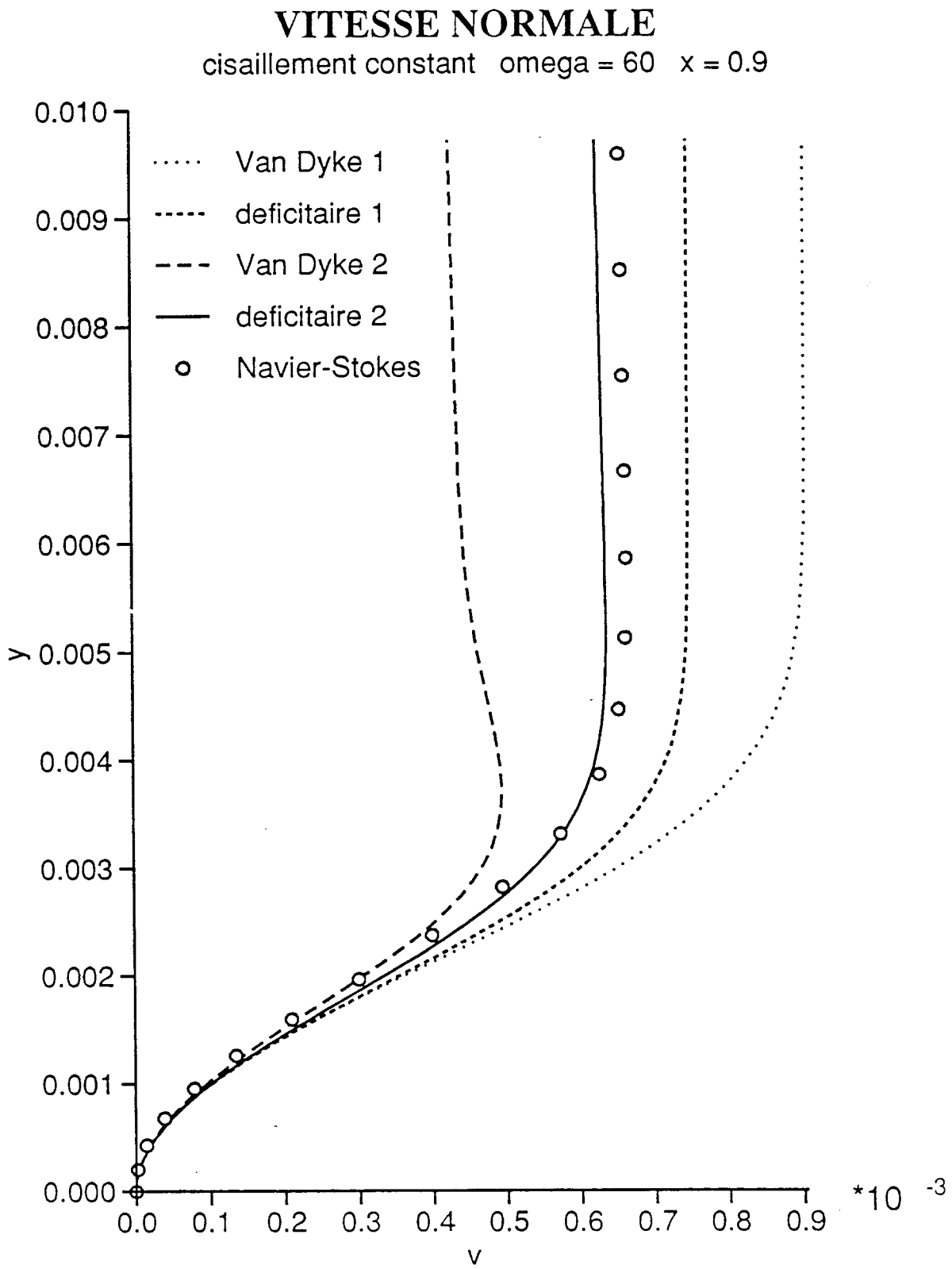


fig. 4.2

fig. 4.3


VITESSE NORMALE
cisaillement constant omega = 60 x = 0.9
Van Dyke 1
deficitaire 1
Van Dyke 2
deficitaire 2
Navier-Stokes
y
0.010
0.009
0.008
0.007
0.006
0.005
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
v
*10 -3

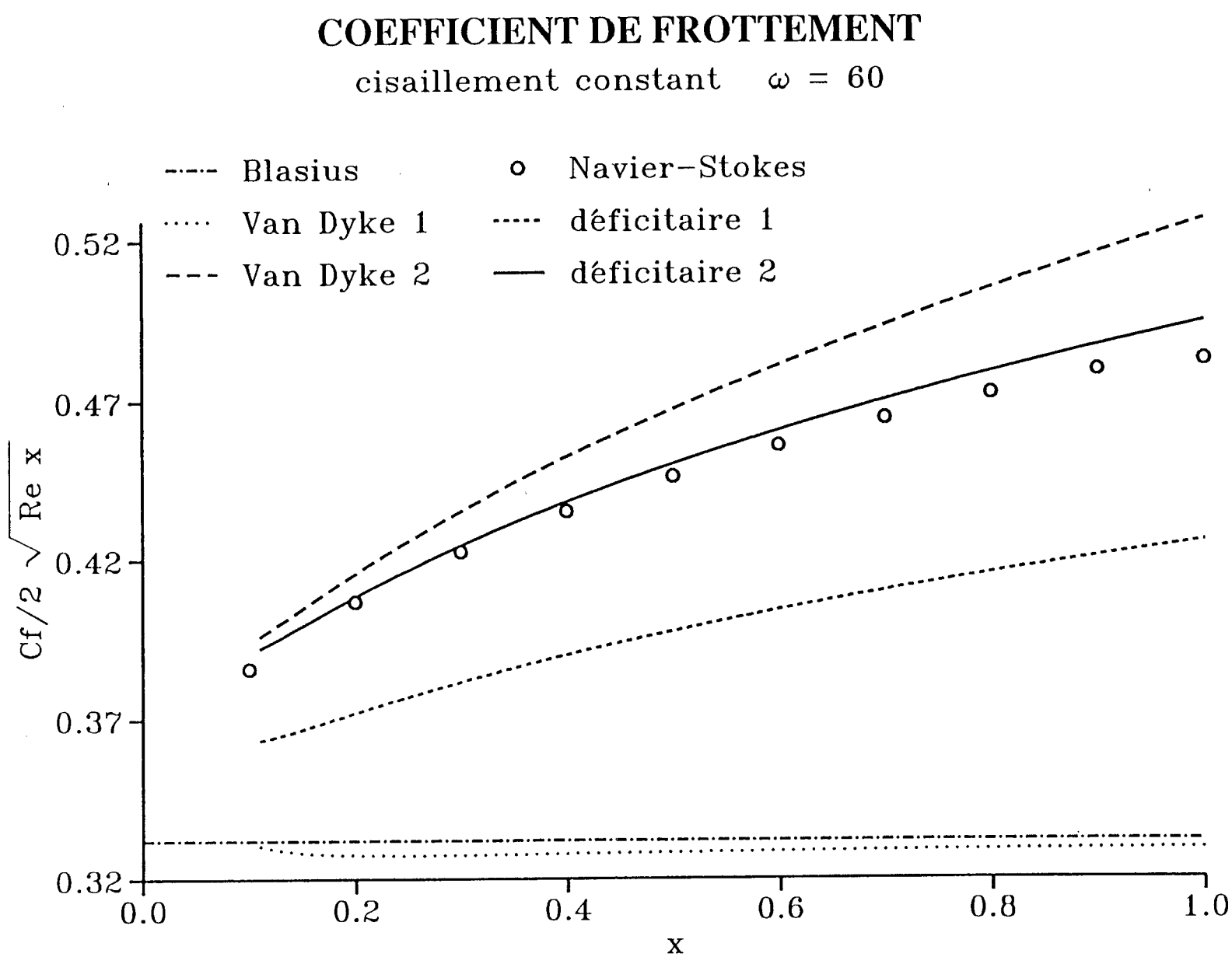

COEFFICIENT DE FROTTEMENT
cisaillement constant ω = 60
Blasius
Van Dyke 1
Van Dyke 2
Navier-Stokes
déficitaire 1
déficitaire 2
0.52
0.47
0.42
0.37
0.32
Cf/2 √Re x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x

fig. 4.4

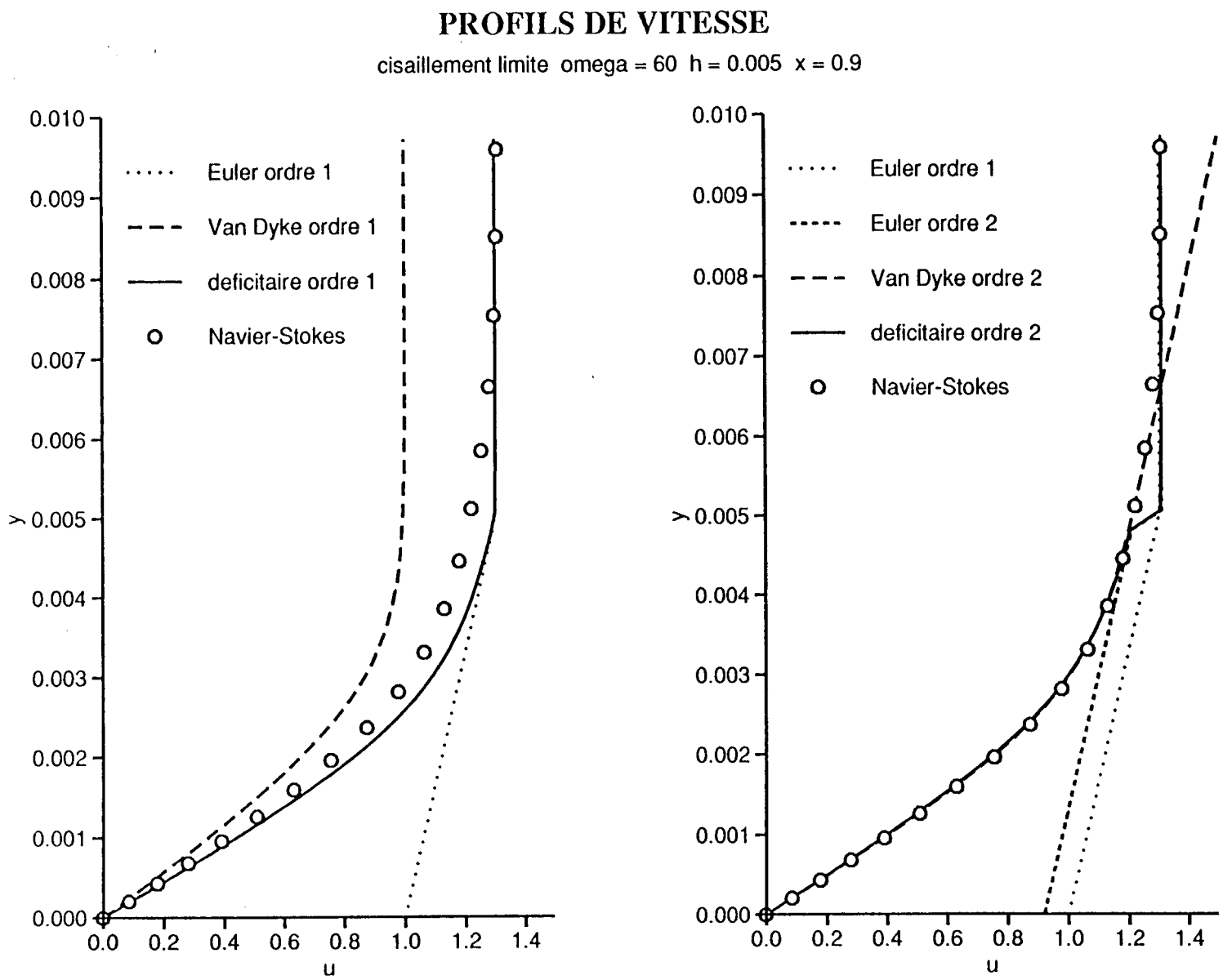

PROFILS DE VITESSE
cisaillement limite omega = 60 h = 0.005 x = 0.9
Euler ordre 1
Van Dyke ordre 1
deficitaire ordre 1
Navier-Stokes
Euler ordre 1
Euler ordre 2
Van Dyke ordre 2
deficitaire ordre 2
Navier-Stokes
y
u
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
0.006
0.007
0.008
0.009
0.010
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4

fig. 4.5

COEFFICIENT DE FROTTEMENT

cisaillement limité $\omega = 60$ $h = 0{,}005$

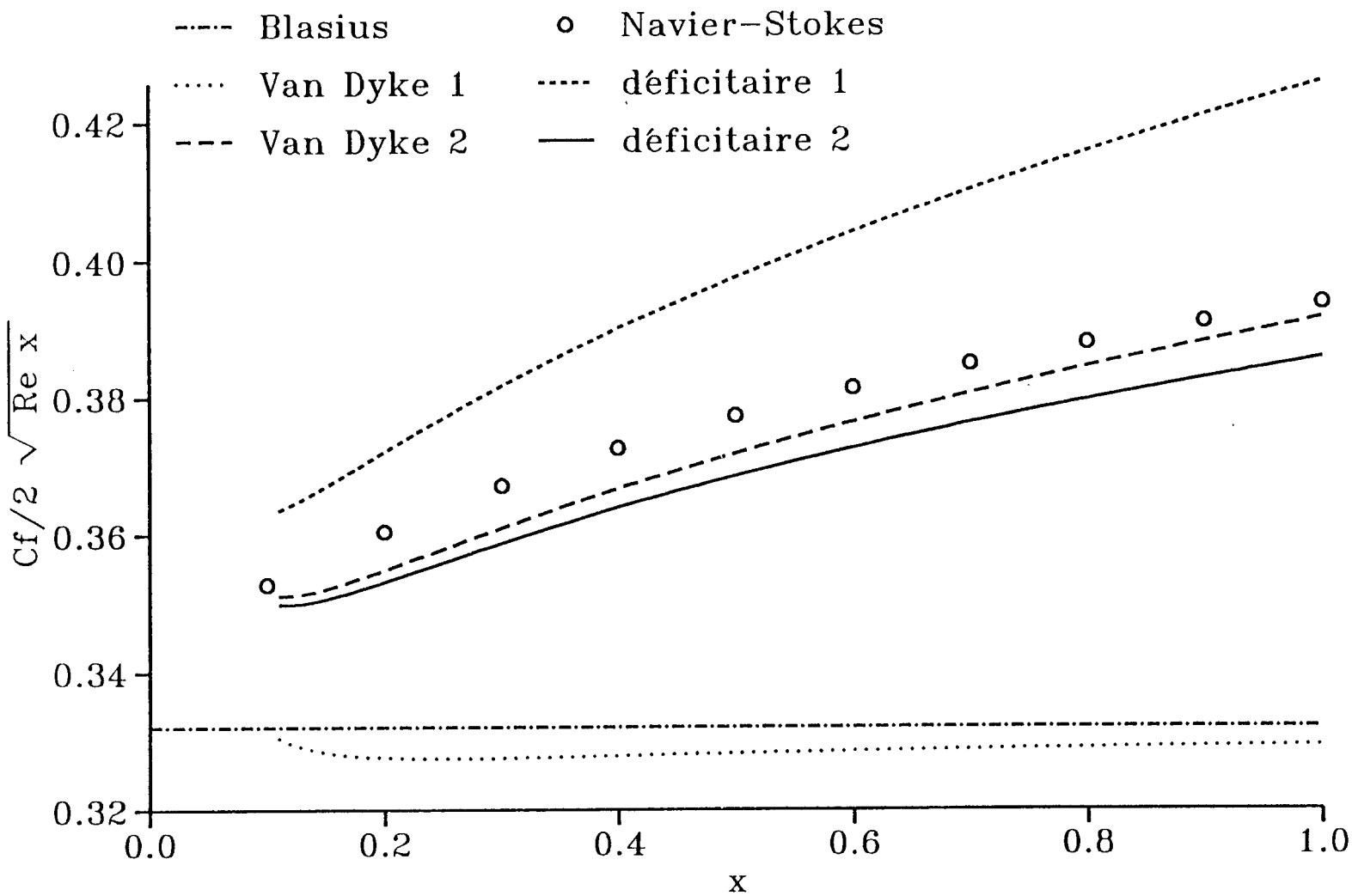


fig. 4.6

PROFILS DE VITESSE

cisaillement parabolique negatif x = 0.9

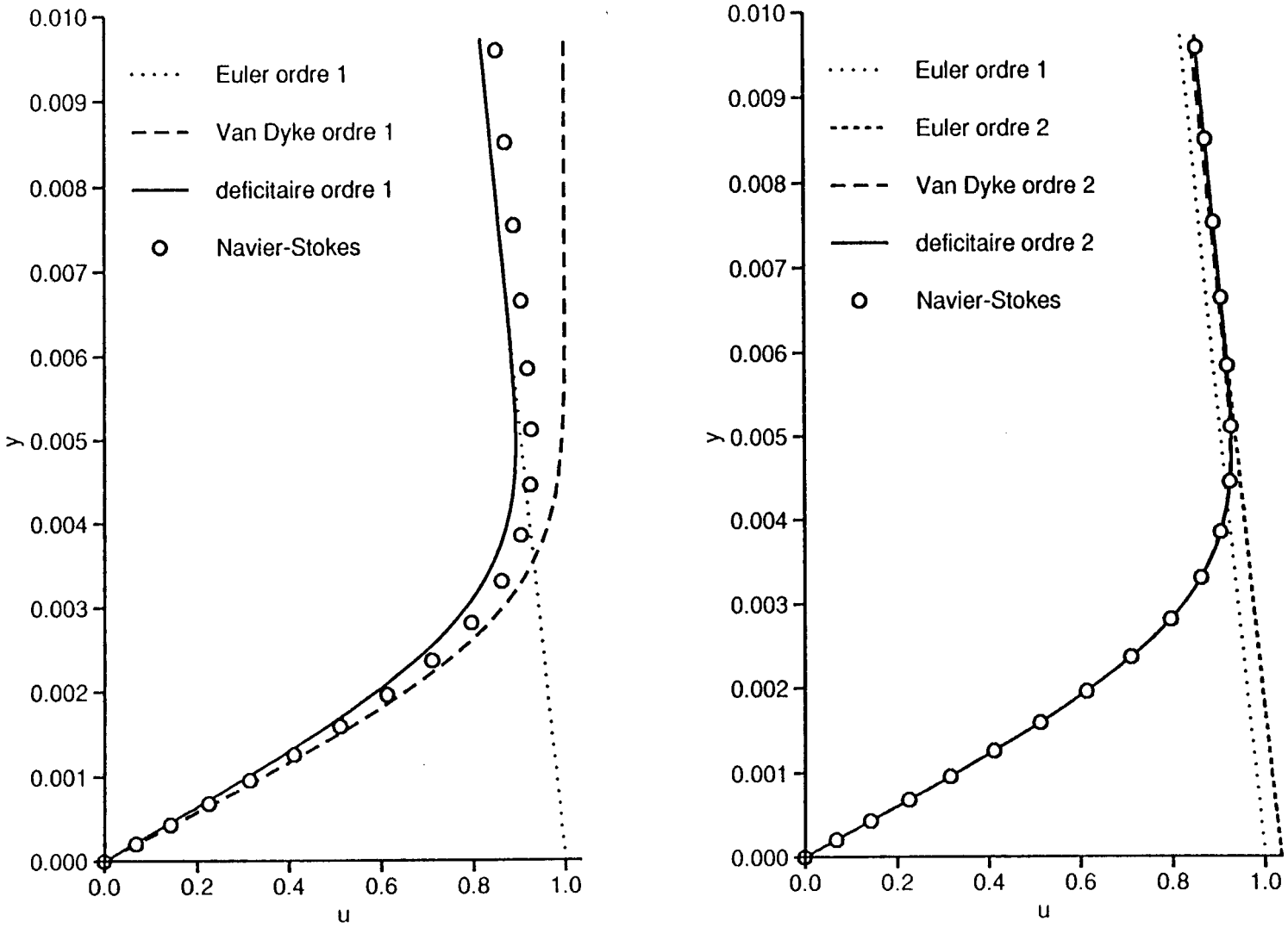


fig. 4.7

COEFFICIENT DE FROTTEMENT

cisaillement parabolique négatif

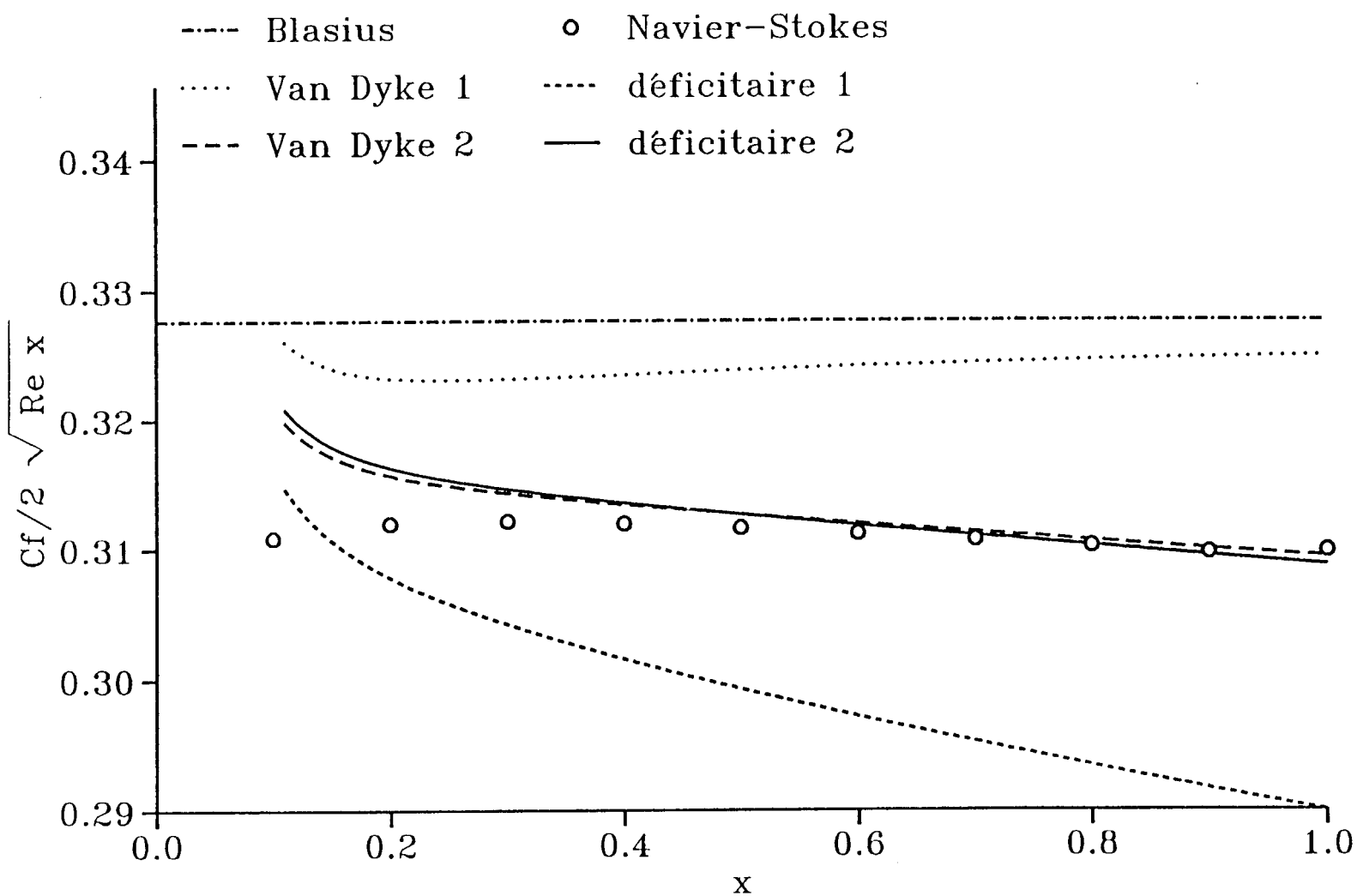
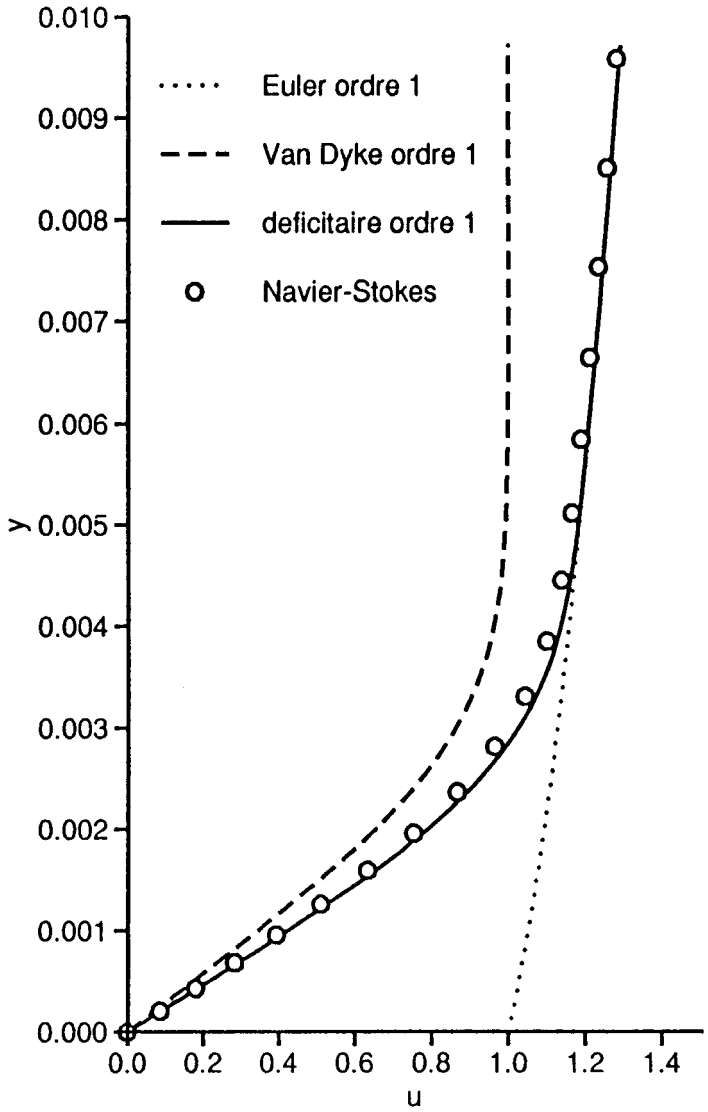


fig. 4.8

PROFILS DE VITESSE

profil parabolique x = 0.9



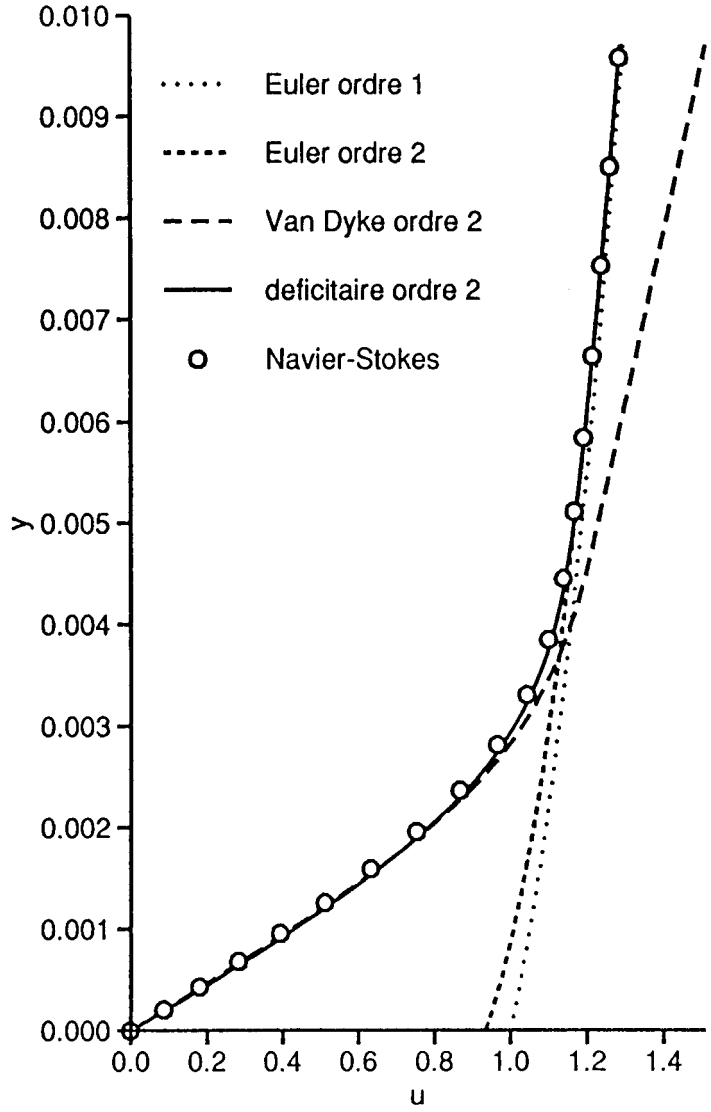


fig. 4.9

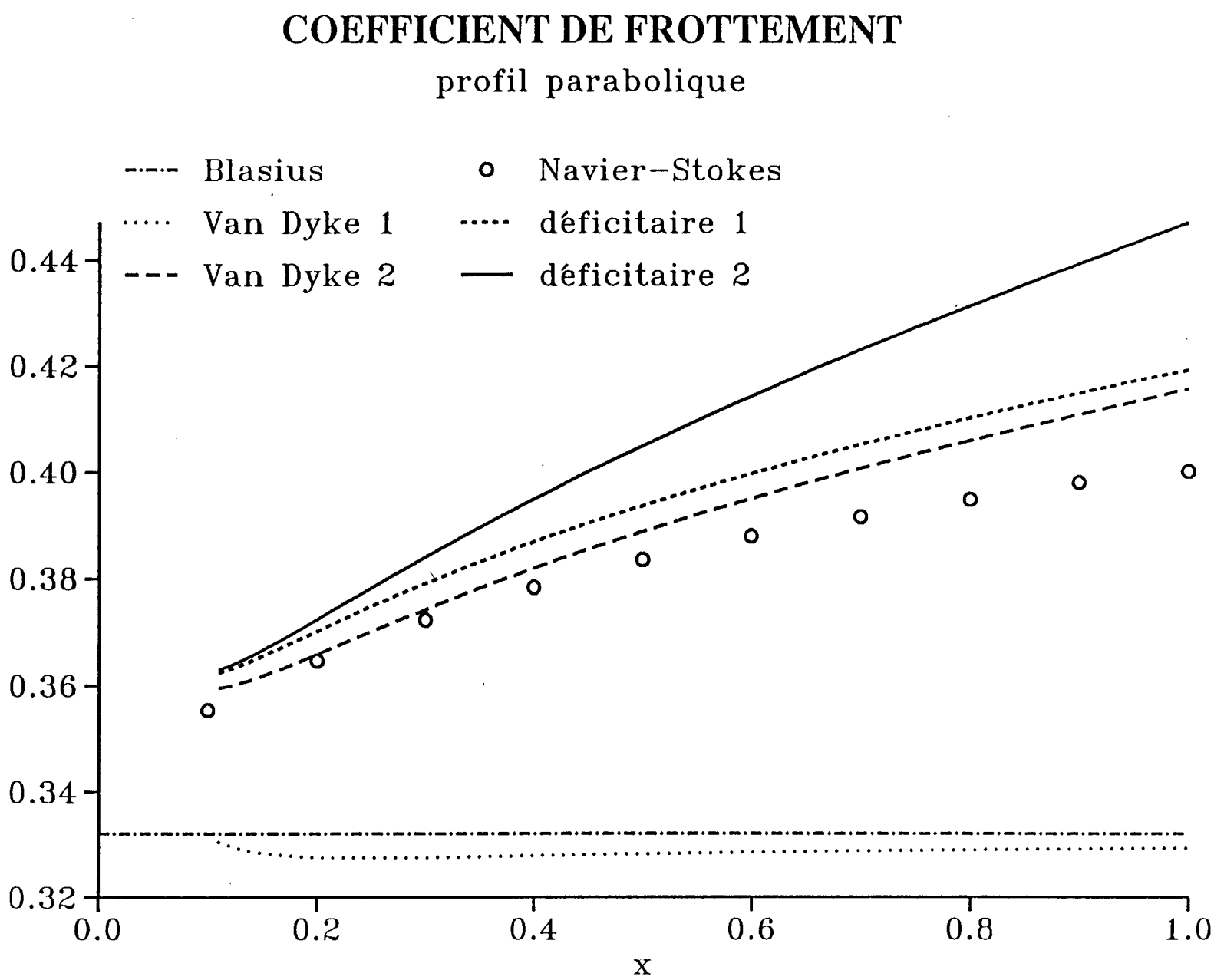

COEFFICIENT DE FROTTEMENT
profil parabolique
Blasius
Navier-Stokes
Van Dyke 1
déficitaire 1
Van Dyke 2
déficitaire 2
0.44
0.42
0.40
0.38
0.36
0.34
0.32
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x

fig. 4.10

PROFILS DE VITESSE

profil hyperbolique x = 0.9

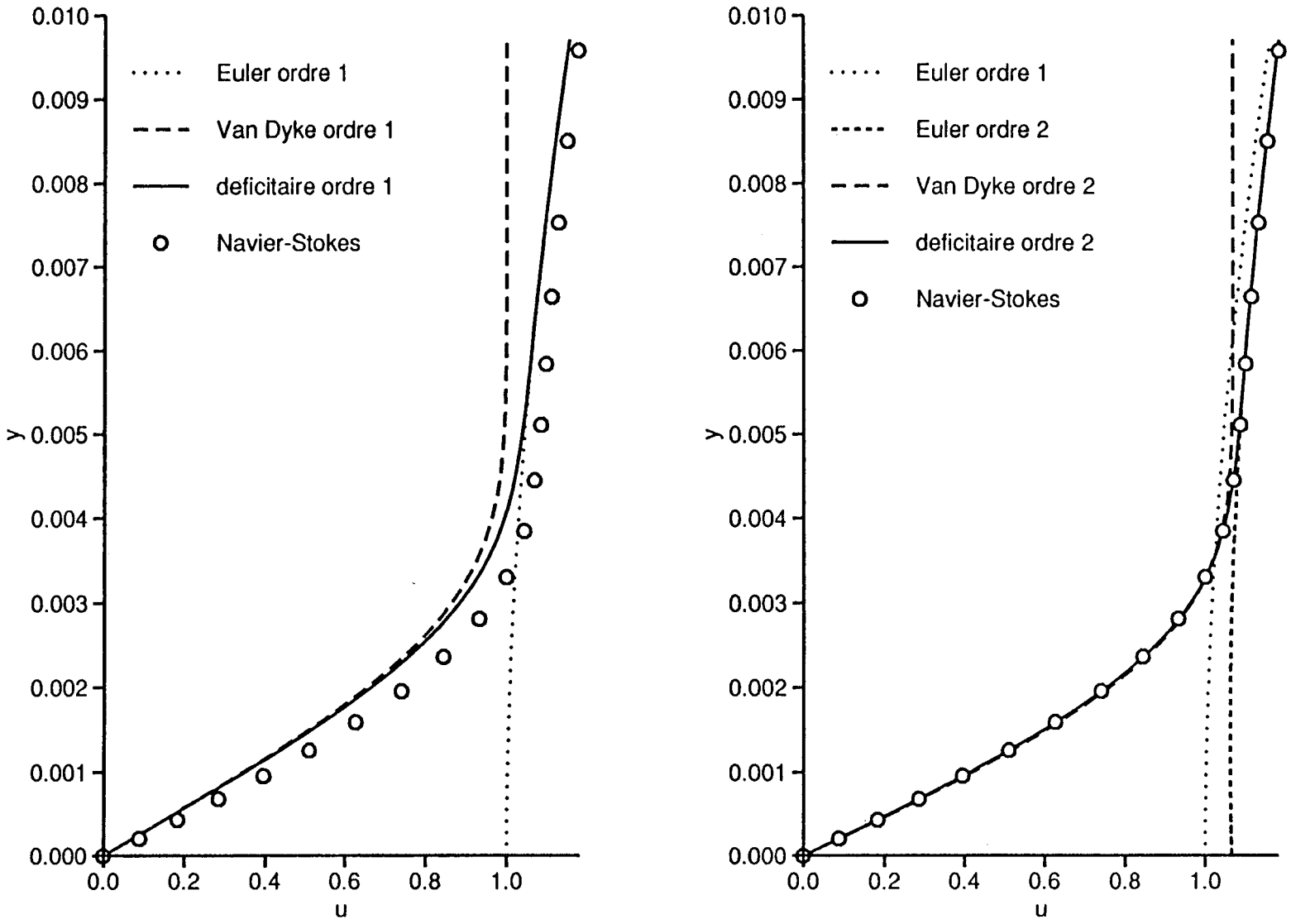


fig. 4.11

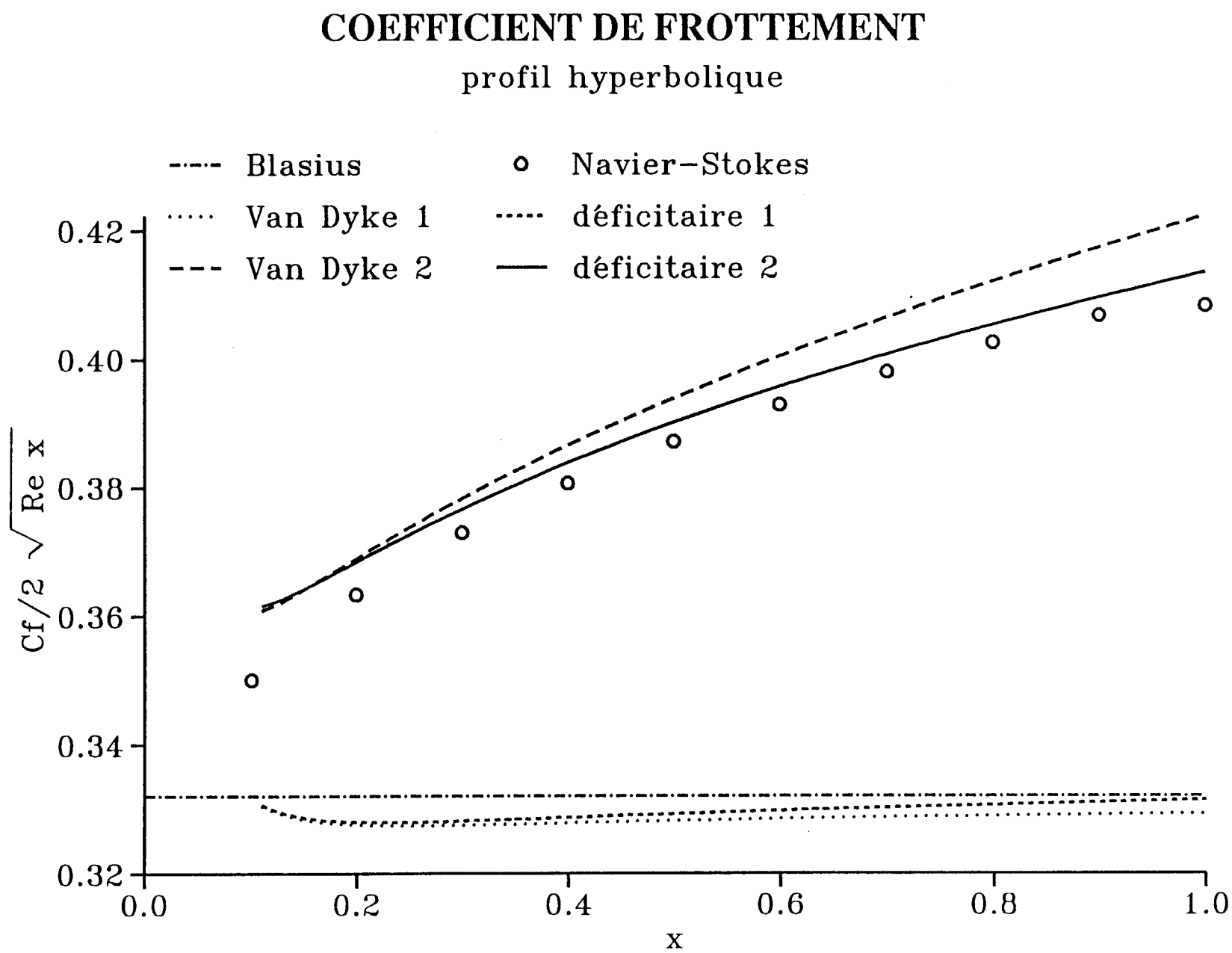

COEFFICIENT DE FROTTEMENT
profil hyperbolique
Blasius
Navier-Stokes
Van Dyke 1
déficitaire 1
Van Dyke 2
déficitaire 2
0.42
0.40
0.38
0.36
0.34
0.32
Cf/2 √Re x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x

fig. 4.12

PROFILS DE VITESSE

cisaillement sinusoidal x = 0.9

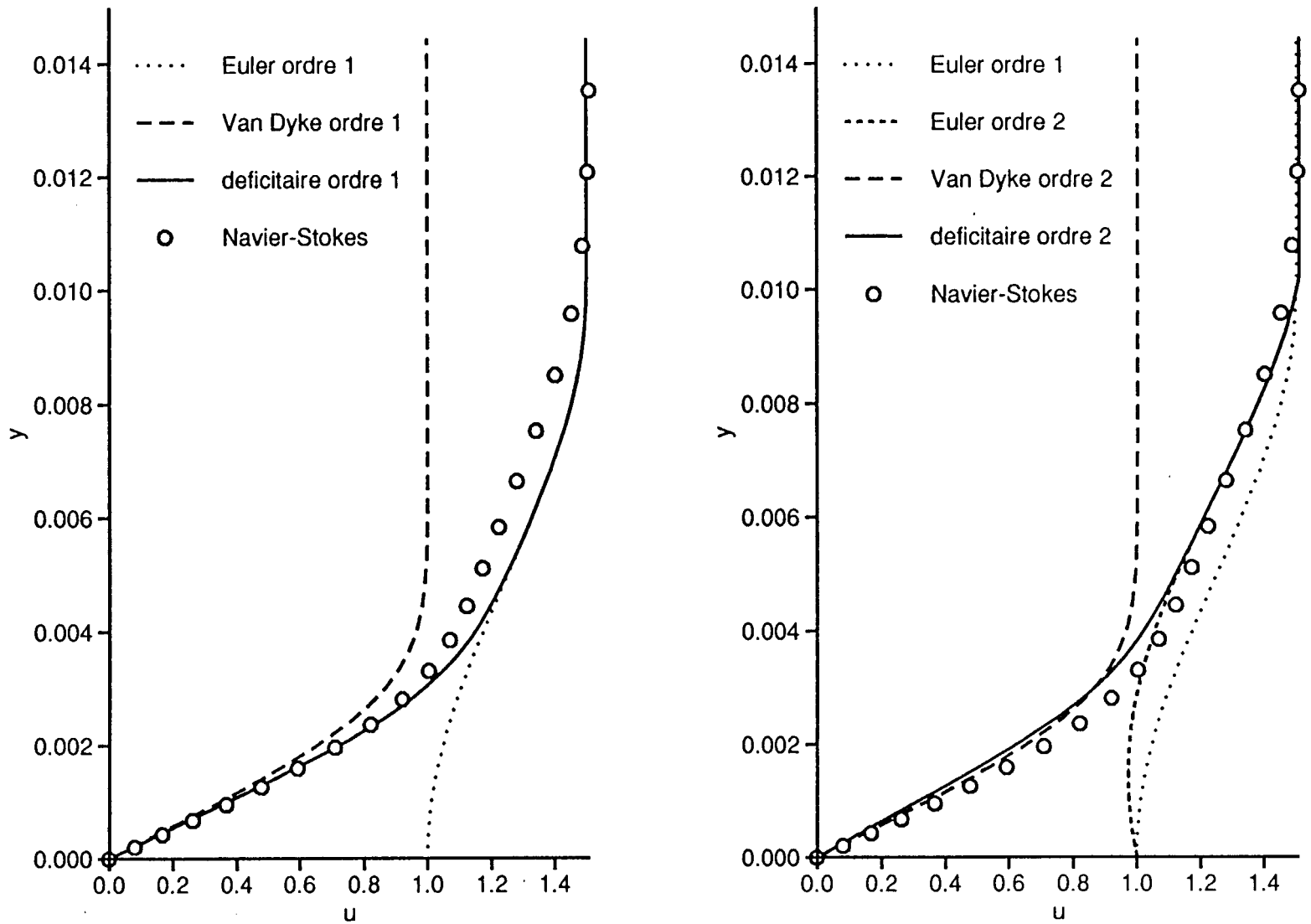


fig. 4.13

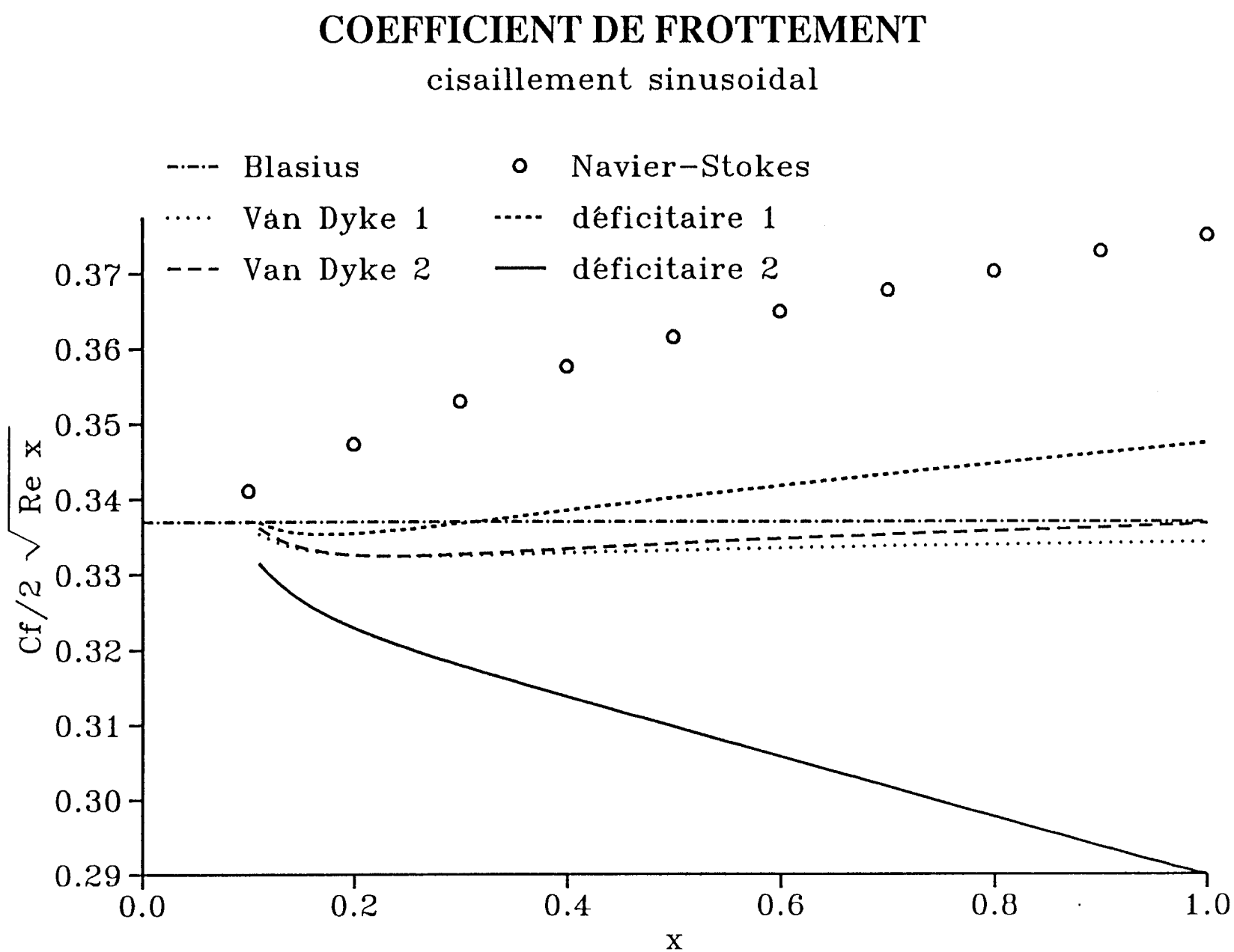

COEFFICIENT DE FROTTEMENT
cisaillement sinusoidal
Blasius
Van Dyke 1
Van Dyke 2
Navier-Stokes
déficitaire 1
déficitaire 2
0.37
0.36
0.35
0.34
0.33
0.32
0.31
0.30
0.29
Cf/2 √Re x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x

fig. 4.14

SYSTEME DE COORDONNEES CURVILIGNES

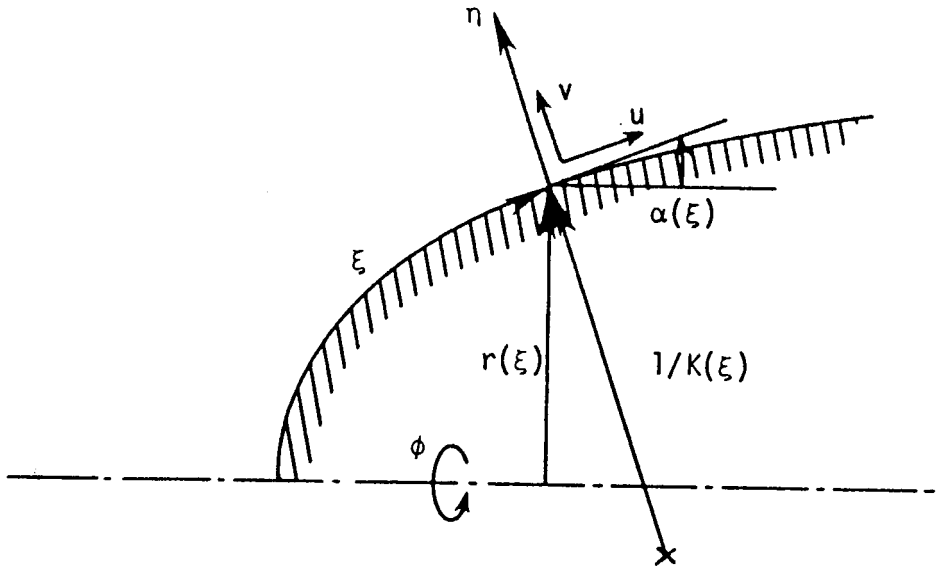


fig. 5.1

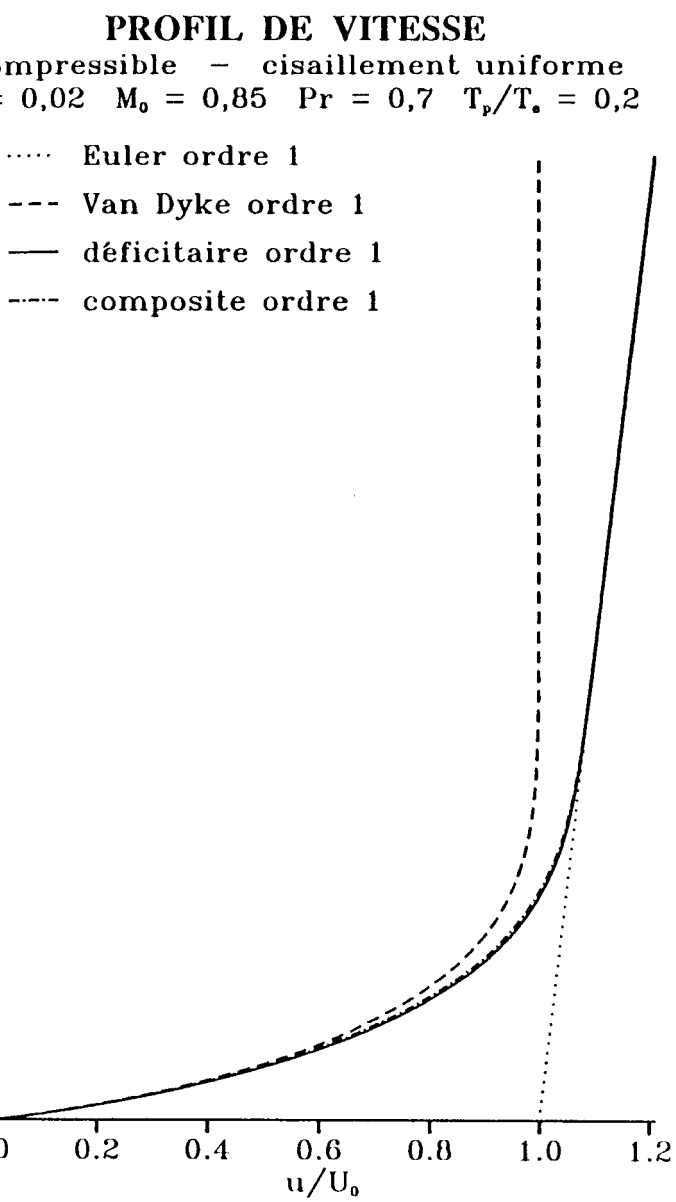

PROFIL DE VITESSE
mpressible – cisaillement uniforme
= 0,02 M₀ = 0,85 Pr = 0,7 Tₚ/T₀ = 0,2
Euler ordre 1
Van Dyke ordre 1
déficitaire ordre 1
composite ordre 1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
u/U₀

fig. 7.1

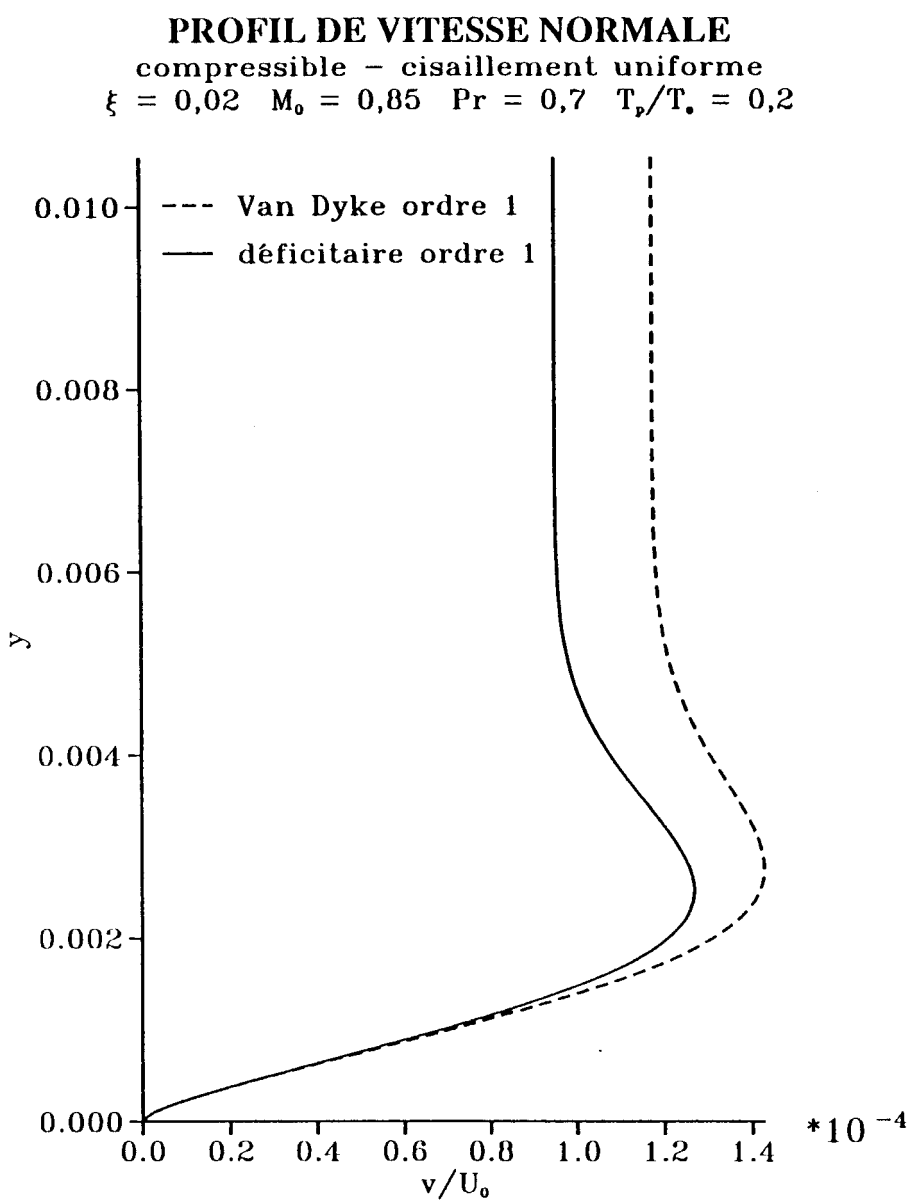

PROFIL DE VITESSE NORMALE
compressible – cisaillement uniforme
ξ = 0,02 M₀ = 0,85 Pr = 0,7 Tₚ/T₀ = 0,2
Van Dyke ordre 1
déficitaire ordre 1
y
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
*10⁻⁴
v/U₀

fig. 7.2

PROFIL D' ENTHALPIE

ompressible – cisaillement uniforme

0,02 M_0 = 0,85 Pr = 0,7 T_p/T_e = 0,2

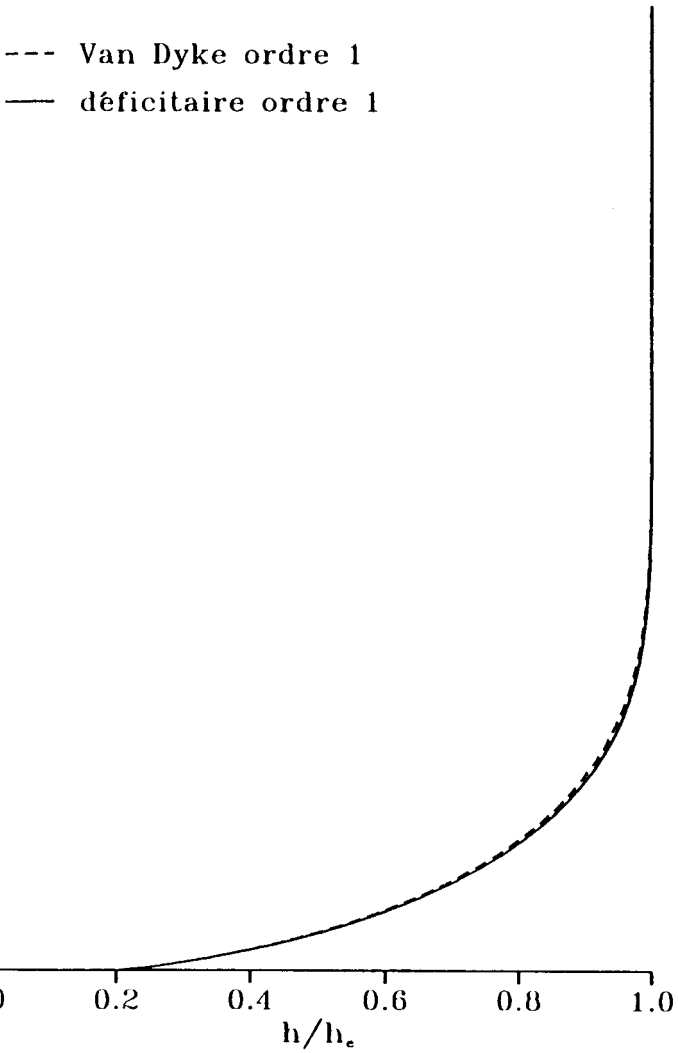


fig. 7.3

PROFIL DE MASSE VOLUMIQUE

compressible – cisaillement uniforme

ξ = 0,02 M_0 = 0,85 Pr = 0,7 T_p/T_e = 0,2

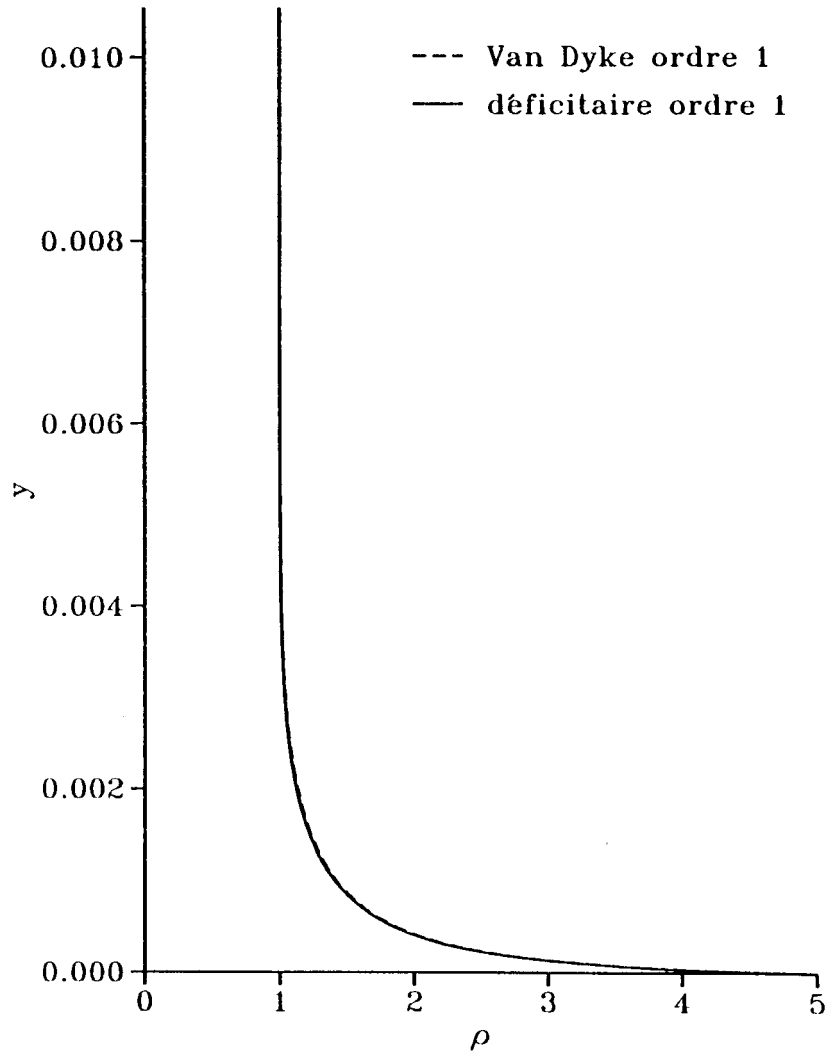


fig. 7.4

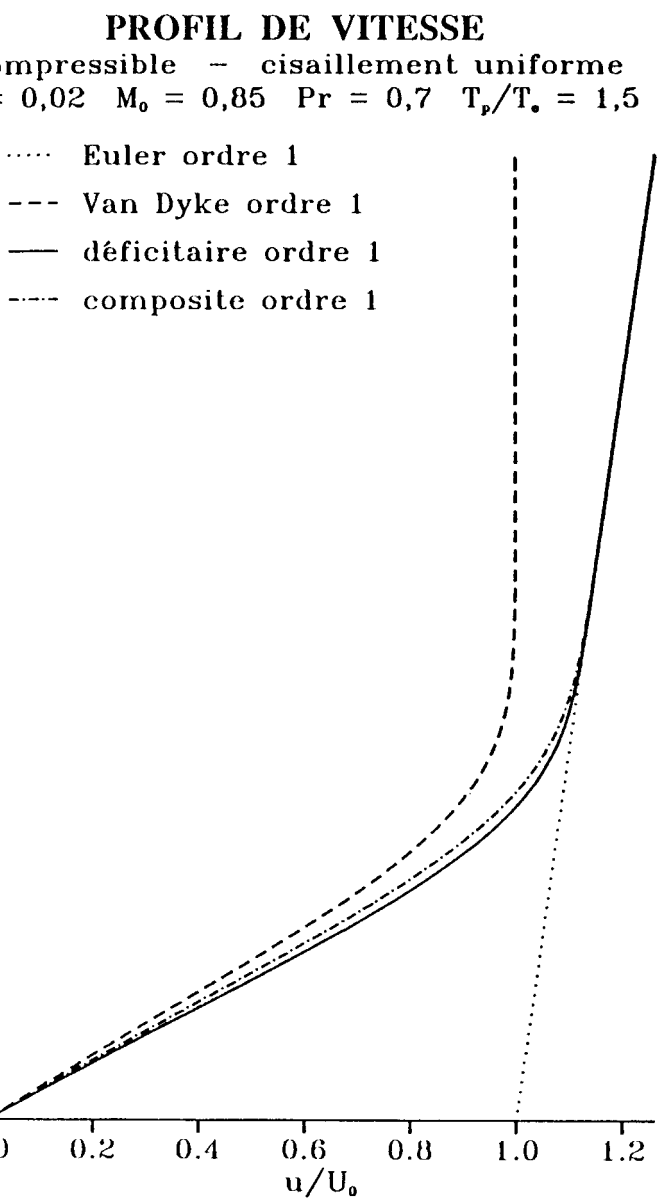

PROFIL DE VITESSE
mpressible – cisaillement uniforme
= 0,02 M₀ = 0,85 Pr = 0,7 Tₚ/T₀ = 1,5
Euler ordre 1
Van Dyke ordre 1
déficitaire ordre 1
composite ordre 1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2
u/U₀

fig. 7.5

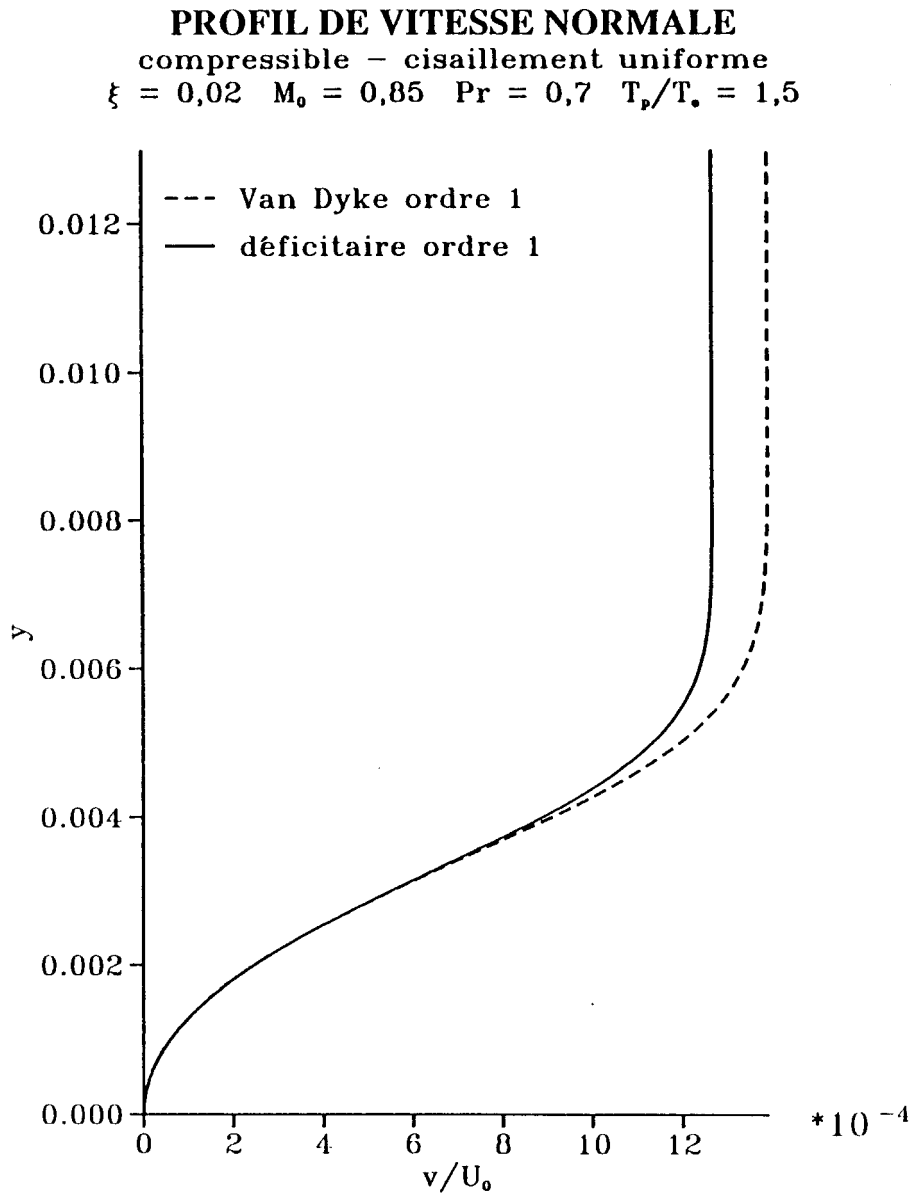

PROFIL DE VITESSE NORMALE
compressible – cisaillement uniforme
ξ = 0,02 M₀ = 0,85 Pr = 0,7 Tₚ/T₀ = 1,5
Van Dyke ordre 1
déficitaire ordre 1
y
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0 2 4 6 8 10 12
*10⁻⁴
v/U₀

fig. 7.6

PROFIL D' ENTHALPIE

ompressible – cisaillement uniforme

= 0,02 M_0 = 0,85 Pr = 0,7 T_p/T_e = 1,5

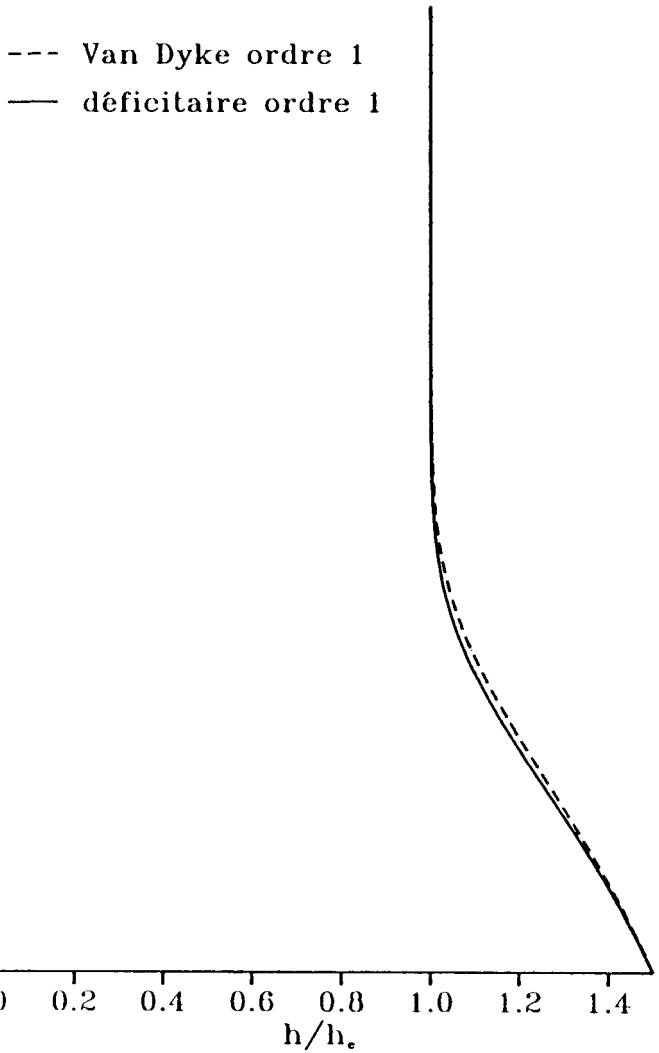


fig. 7.7

PROFIL DE MASSE VOLUMIQUE

compressible – cisaillement uniforme

ξ = 0,02 M_0 = 0,85 Pr = 0,7 T_p/T_e = 1,5

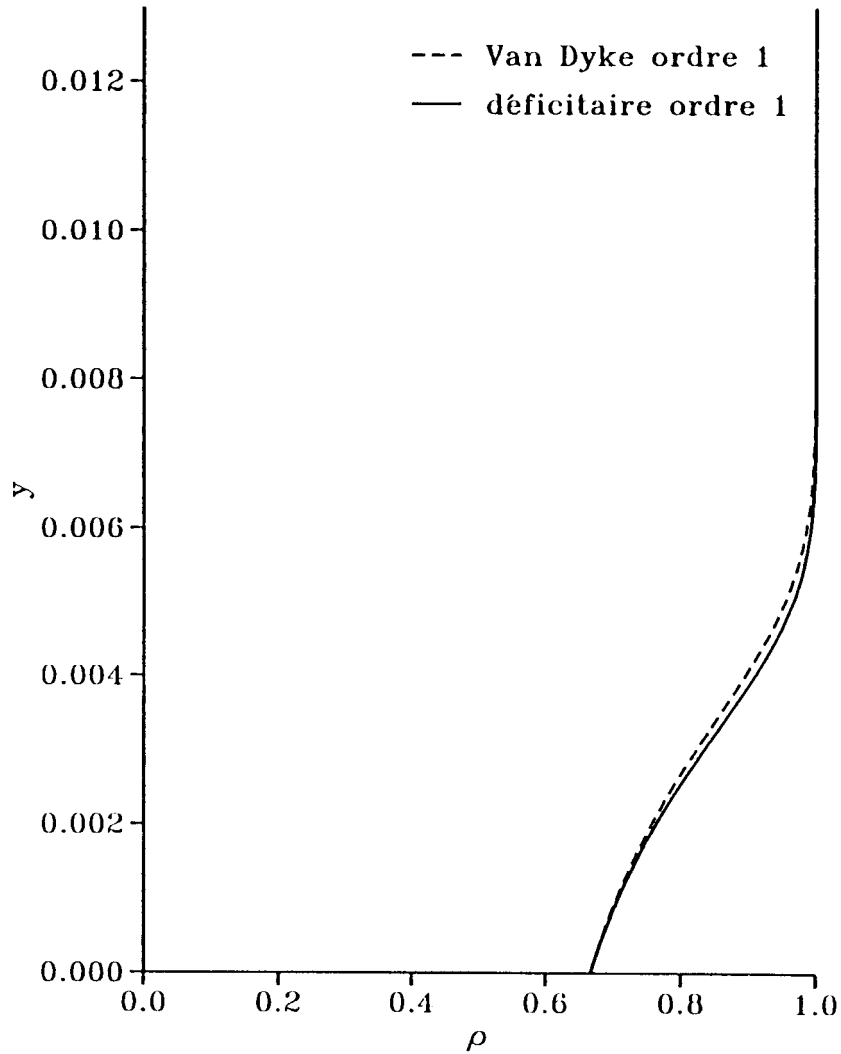


fig. 7.8

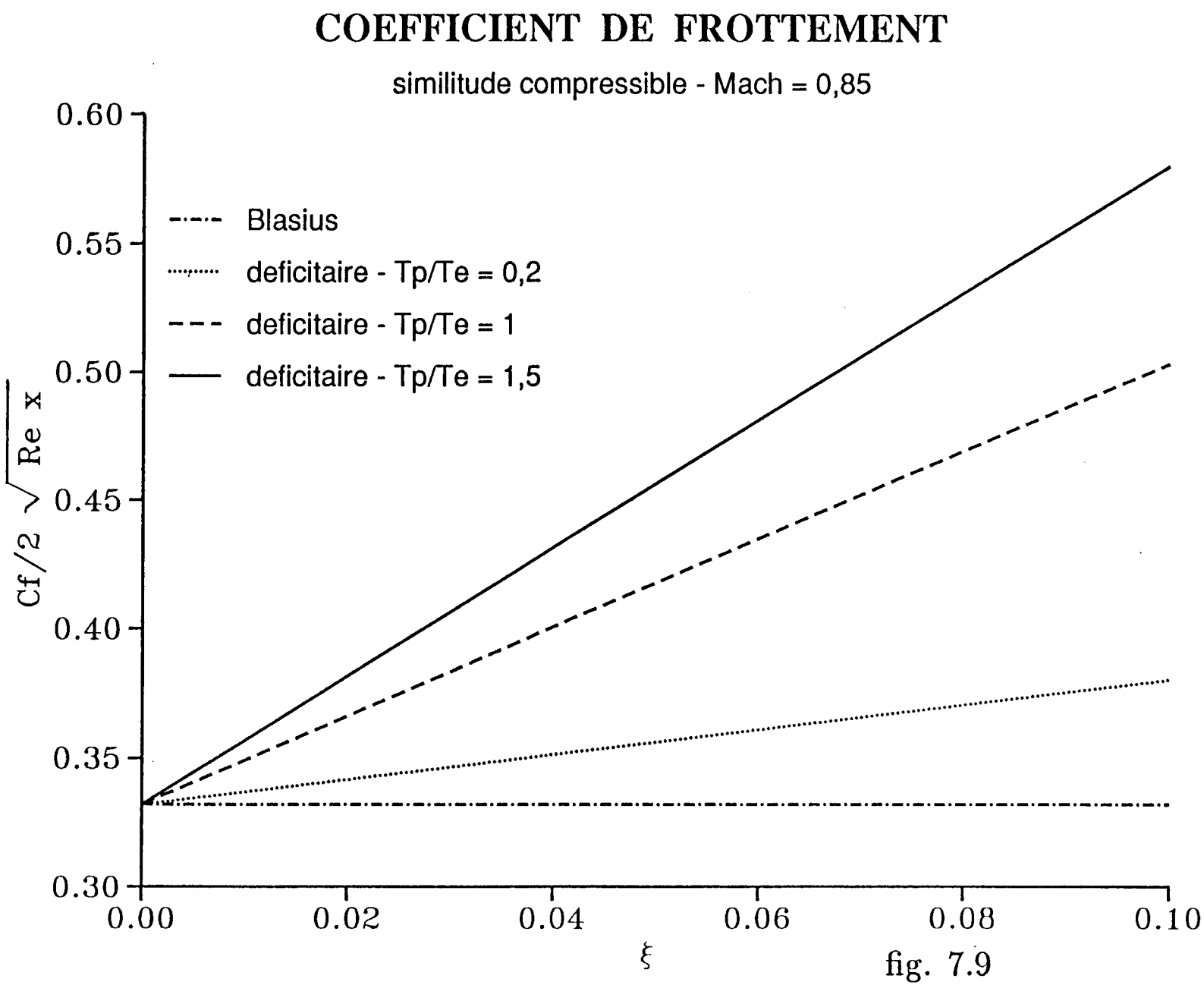

COEFFICIENT DE FROTTEMENT
similitude compressible - Mach = 0,85
Blasius
deficitaire - Tp/Te = 0,2
deficitaire - Tp/Te = 1
deficitaire - Tp/Te = 1,5
Cf/2 √Re x
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
ξ

fig. 7.9

fig. 7.10

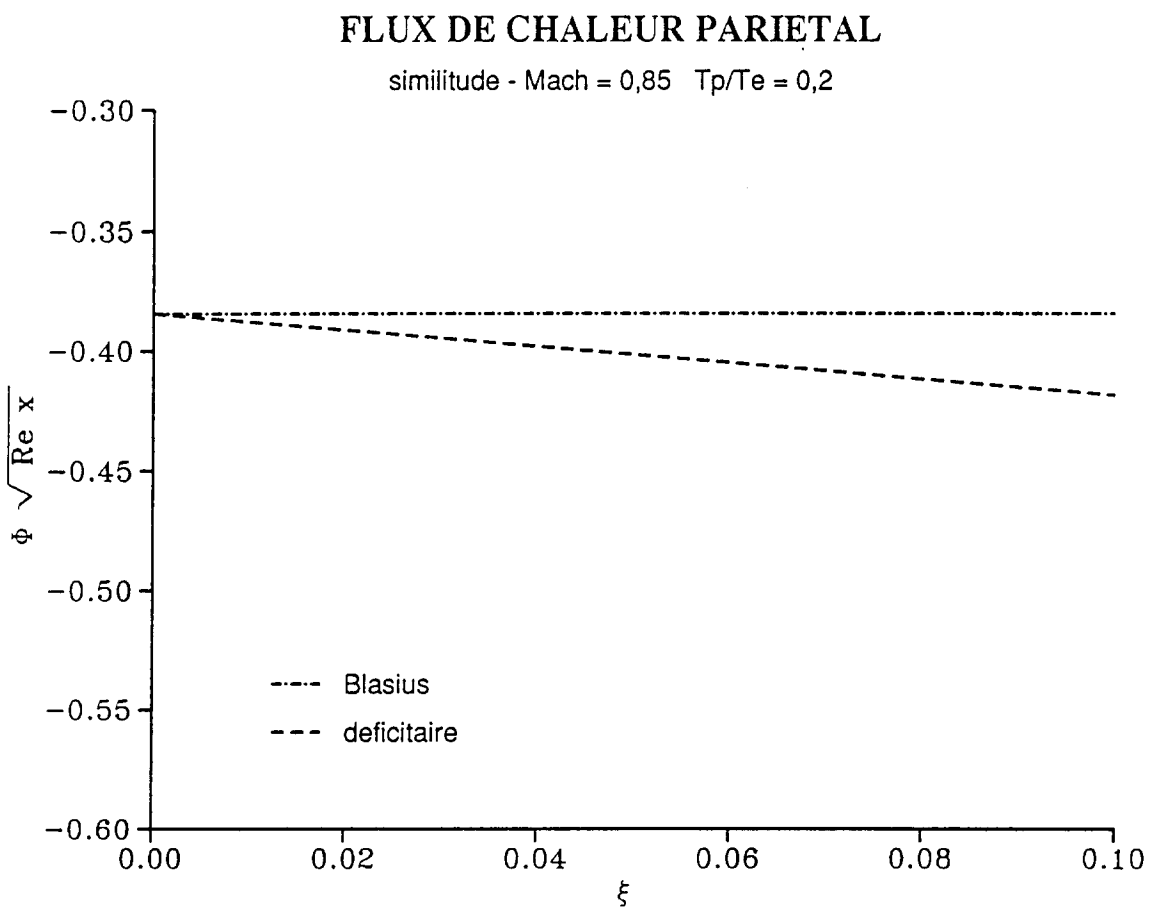
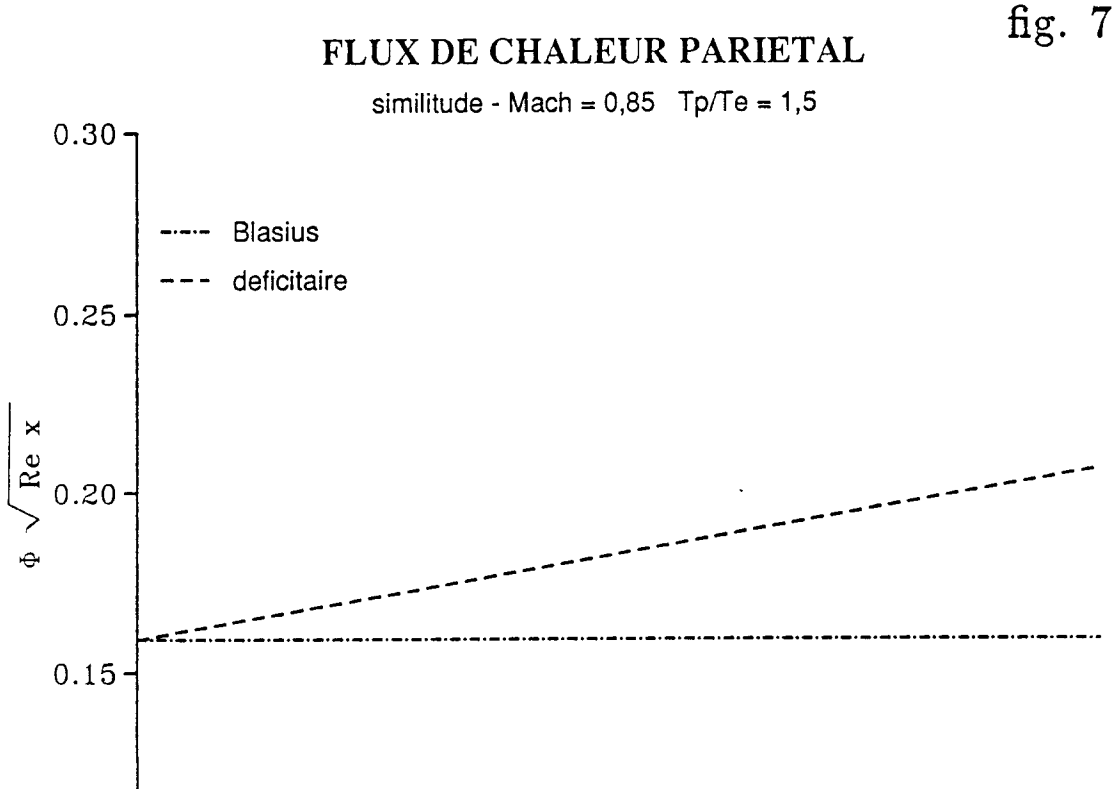


fig. 7.11



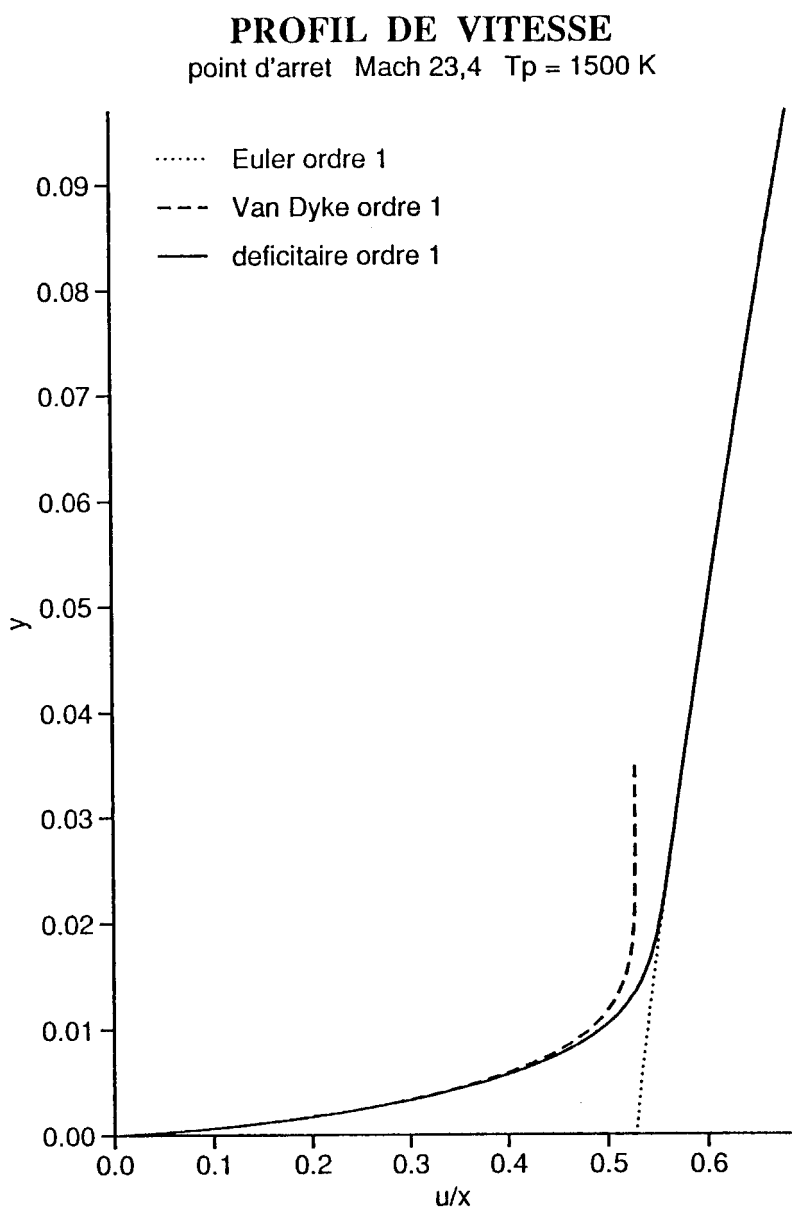

PROFIL DE VITESSE
point d'arret Mach 23,4 Tp = 1500 K
Euler ordre 1
Van Dyke ordre 1
deficitaire ordre 1
y
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
u/x

fig. 8.1

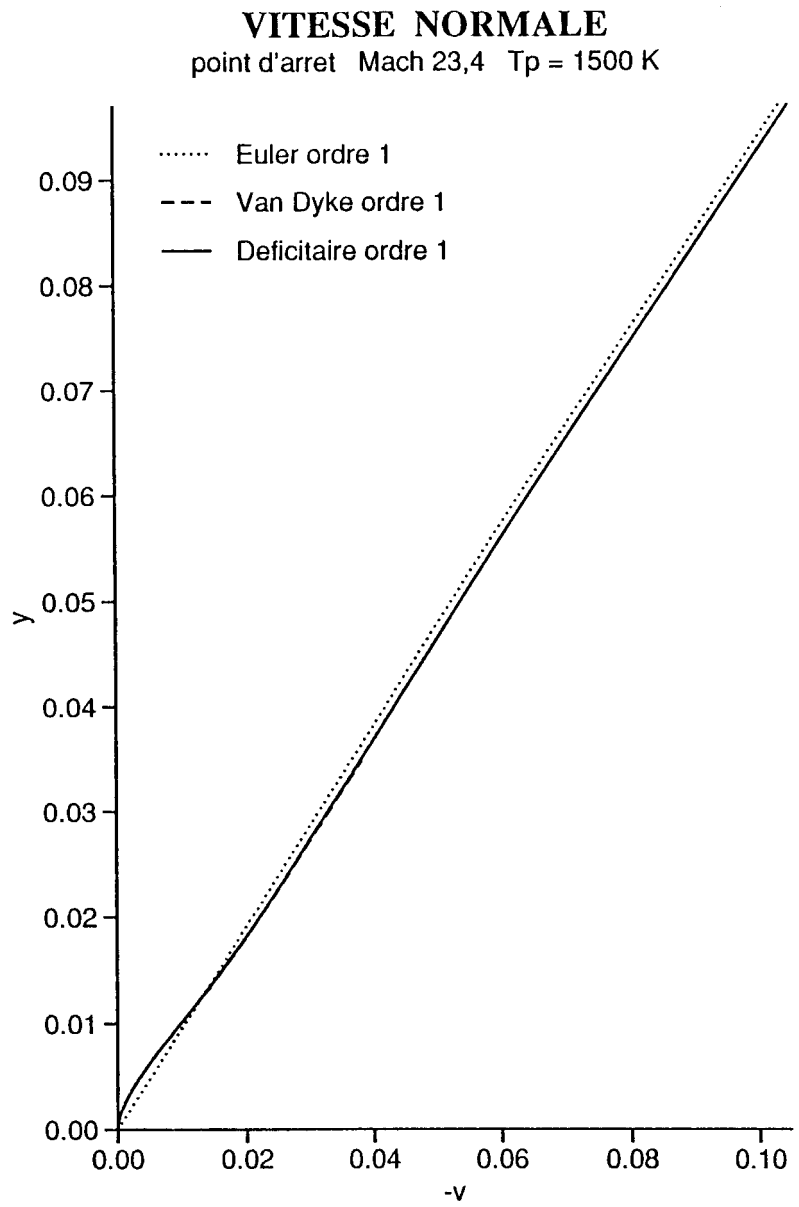

VITESSE NORMALE
point d'arret Mach 23,4 Tp = 1500 K
Euler ordre 1
Van Dyke ordre 1
Deficitaire ordre 1
y
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
-v

fig. 8.2

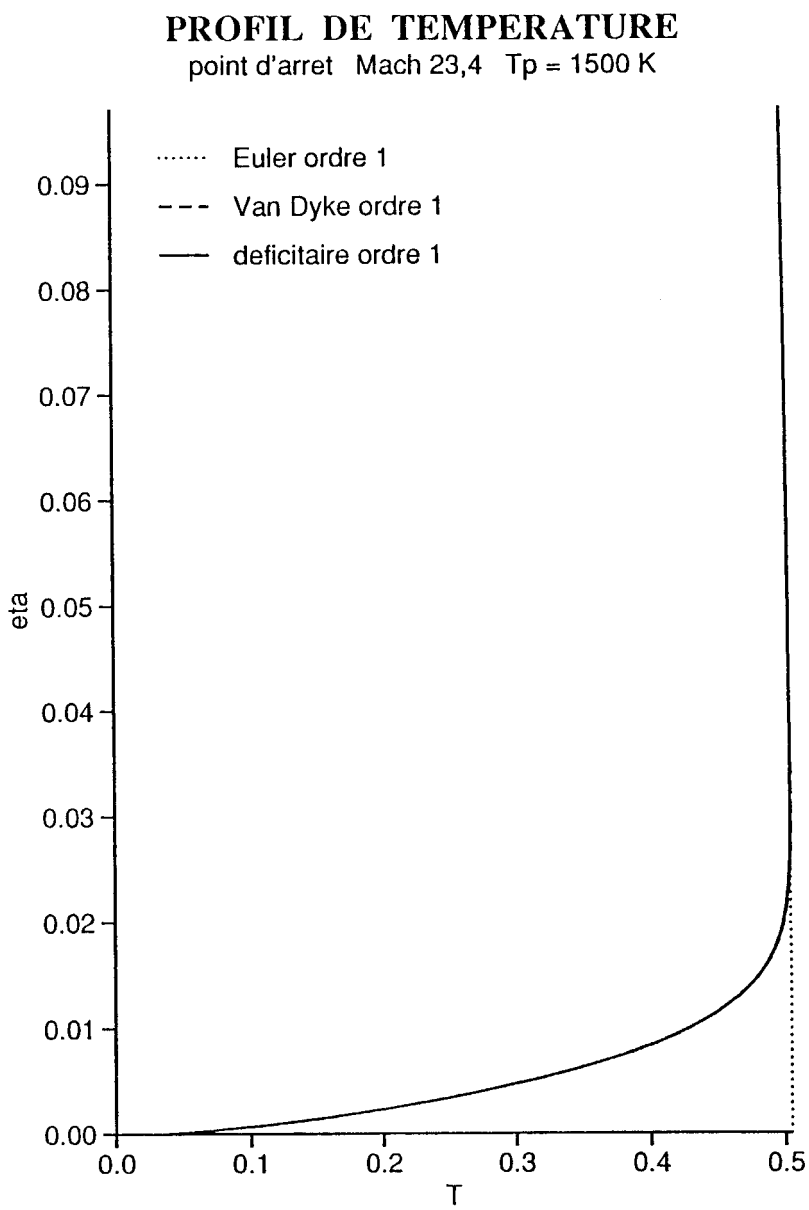

PROFIL DE TEMPERATURE
point d'arret Mach 23,4 Tp = 1500 K
Euler ordre 1
Van Dyke ordre 1
deficitaire ordre 1
eta
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
T

fig. 8.3

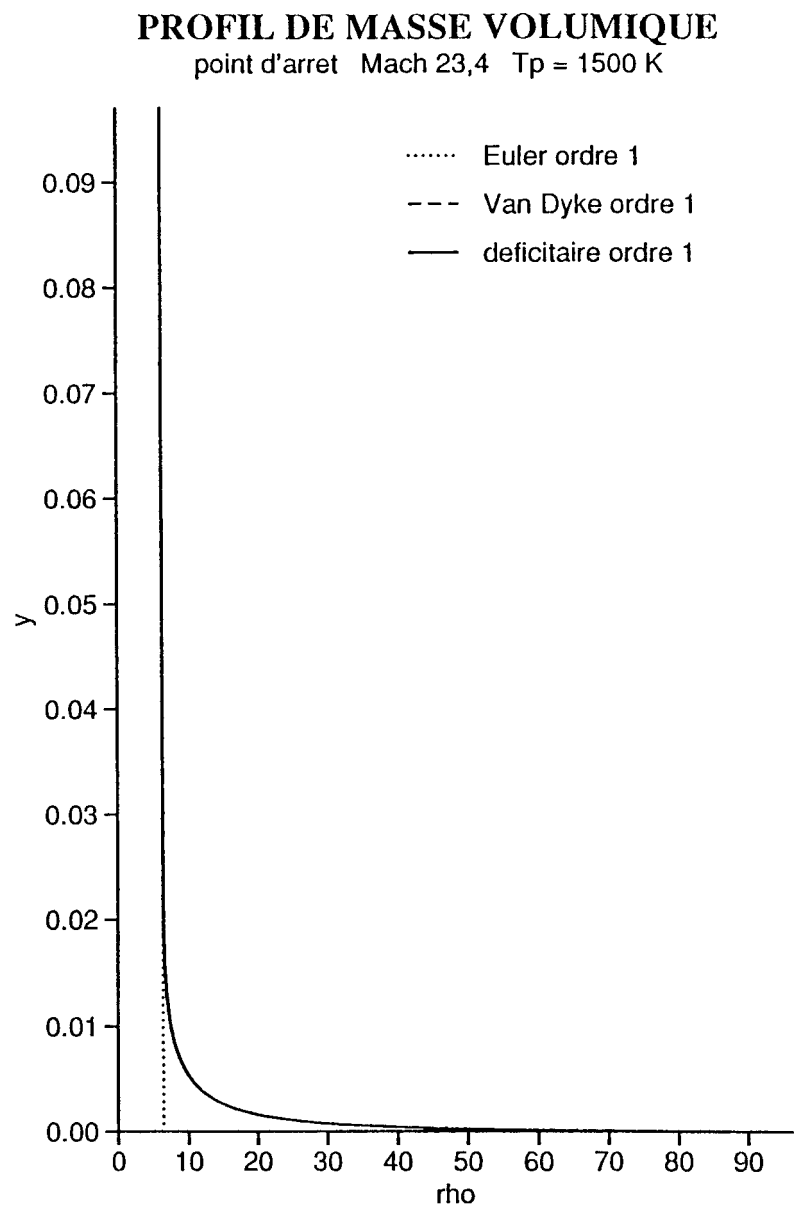

PROFIL DE MASSE VOLUMIQUE
point d'arret Mach 23,4 Tp = 1500 K
Euler ordre 1
Van Dyke ordre 1
deficitaire ordre 1
y
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
rho

fig. 8.4

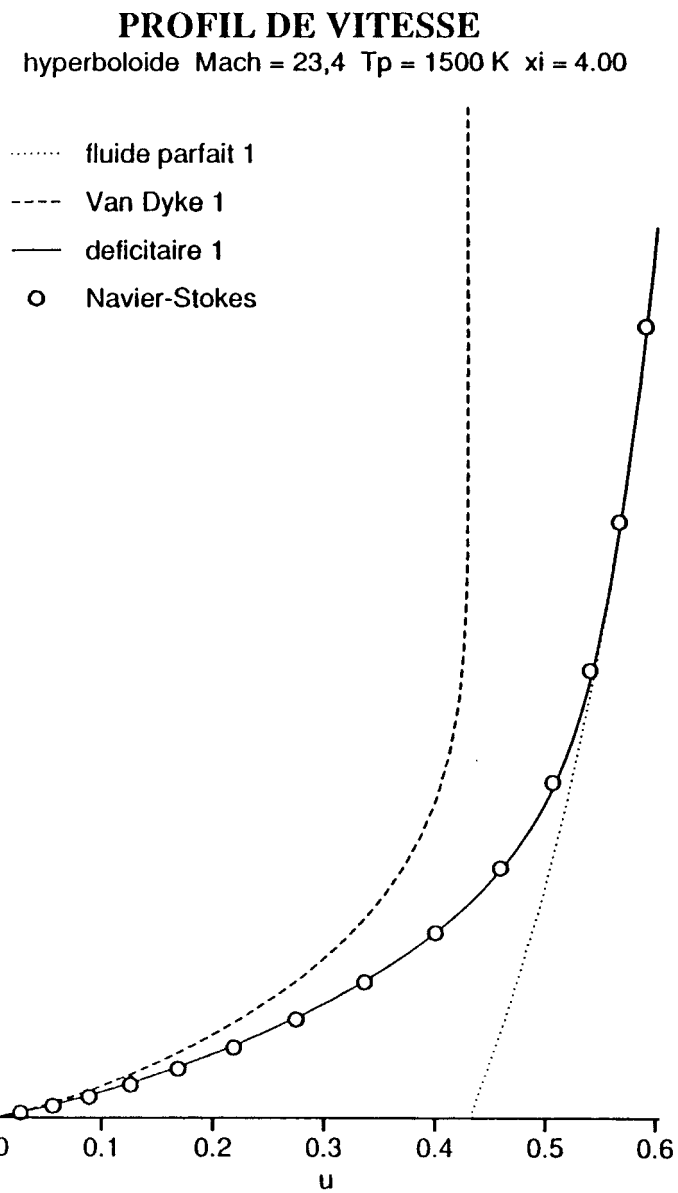

PROFIL DE VITESSE
hyperboloide Mach = 23,4 Tp = 1500 K xi = 4.00
fluide parfait 1
Van Dyke 1
deficitaire 1
Navier-Stokes
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
u

fig. 8.5

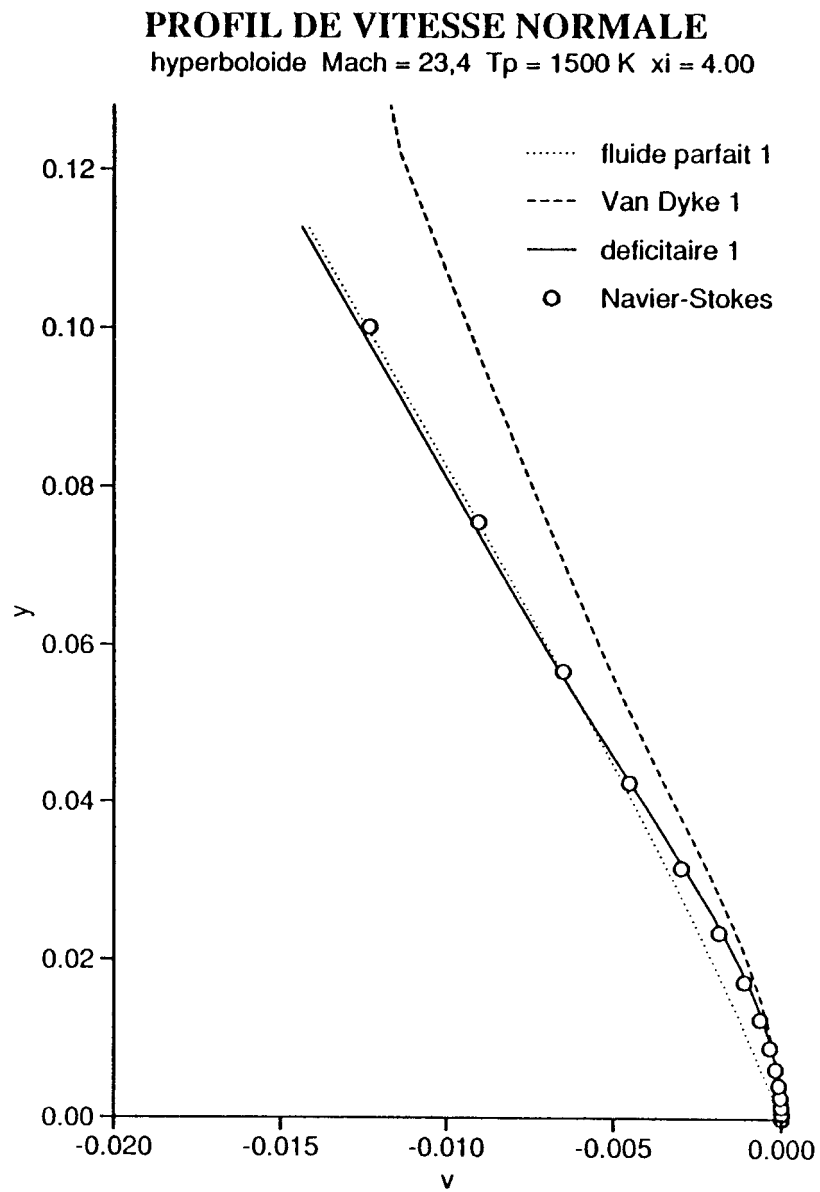

PROFIL DE VITESSE NORMALE
hyperboloide Mach = 23,4 Tp = 1500 K xi = 4.00
fluide parfait 1
Van Dyke 1
deficitaire 1
Navier-Stokes
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
y
-0.020
-0.015
-0.010
-0.005
0.000
v

fig. 8.6

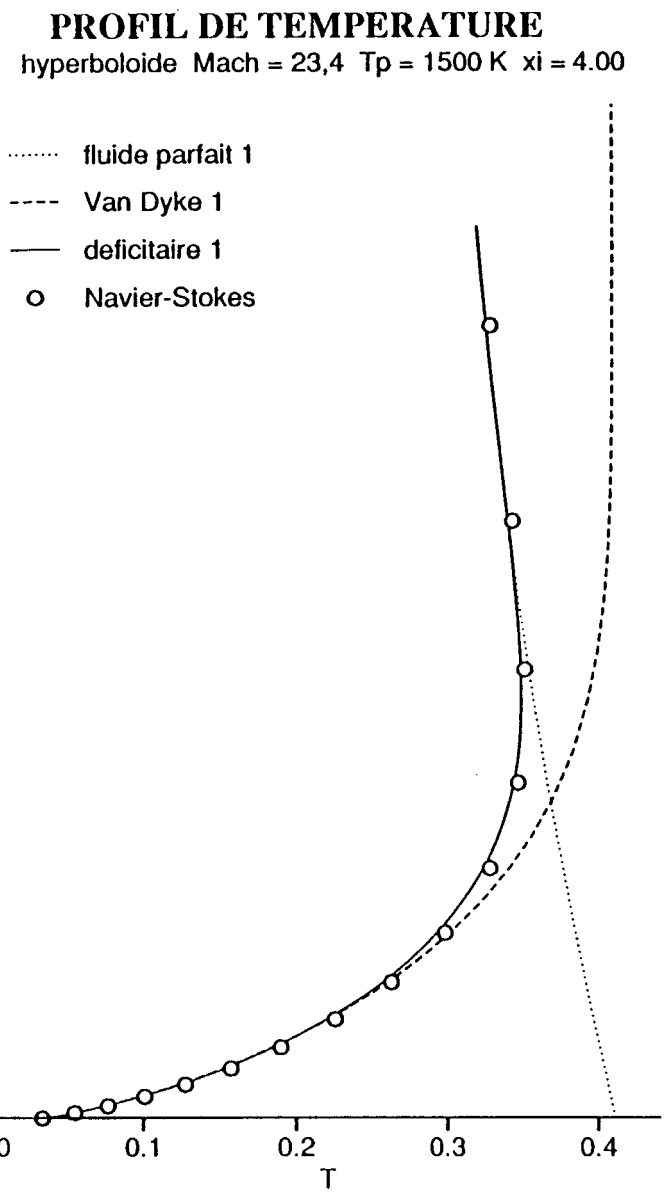

PROFIL DE TEMPERATURE
hyperboloide Mach = 23,4 Tp = 1500 K xi = 4.00
fluide parfait 1
Van Dyke 1
deficitaire 1
Navier-Stokes
0
0.1
0.2
0.3
0.4
T

fig. 8.7

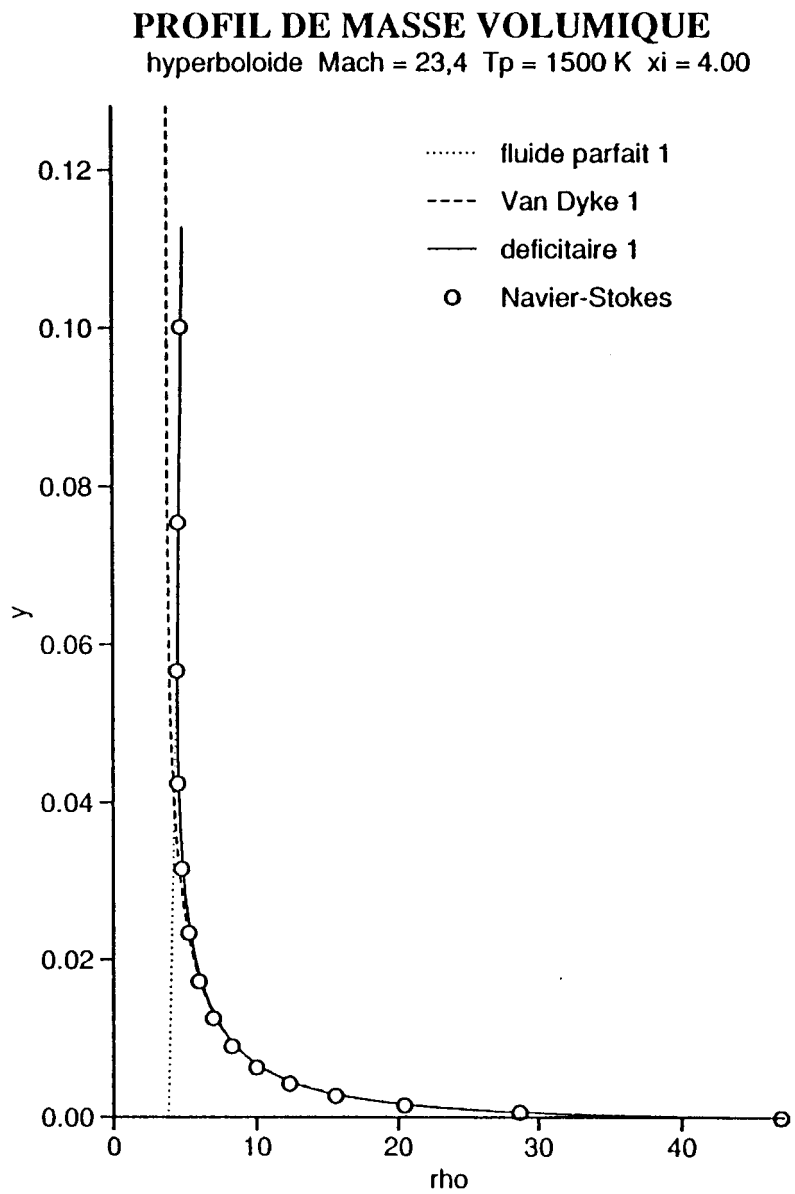

PROFIL DE MASSE VOLUMIQUE
hyperboloide Mach = 23,4 Tp = 1500 K xi = 4.00
fluide parfait 1
Van Dyke 1
deficitaire 1
Navier-Stokes
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
y
0
10
20
30
40
rho

fig. 8.8

PROFIL DE VITESSE

hyperboloide Mach = 23,4 Tp = 1500 K xi = 9.50

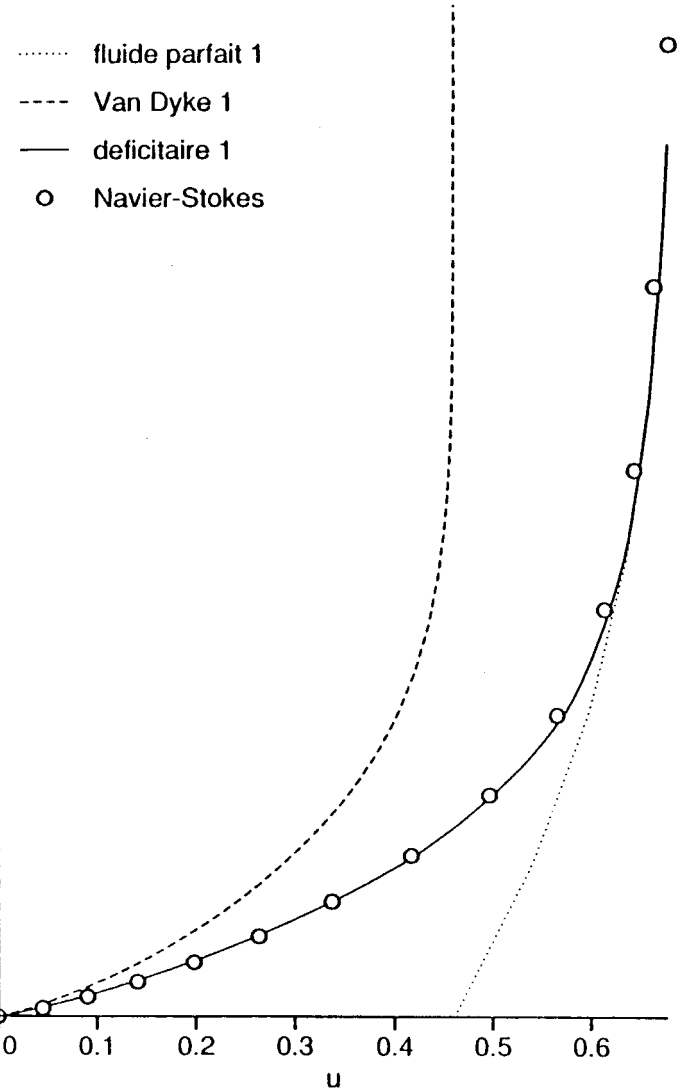


fig. 8.9

PROFIL DE TEMPERATURE

hyperboloide Mach = 23,4 Tp = 1500 K xi = 9.50

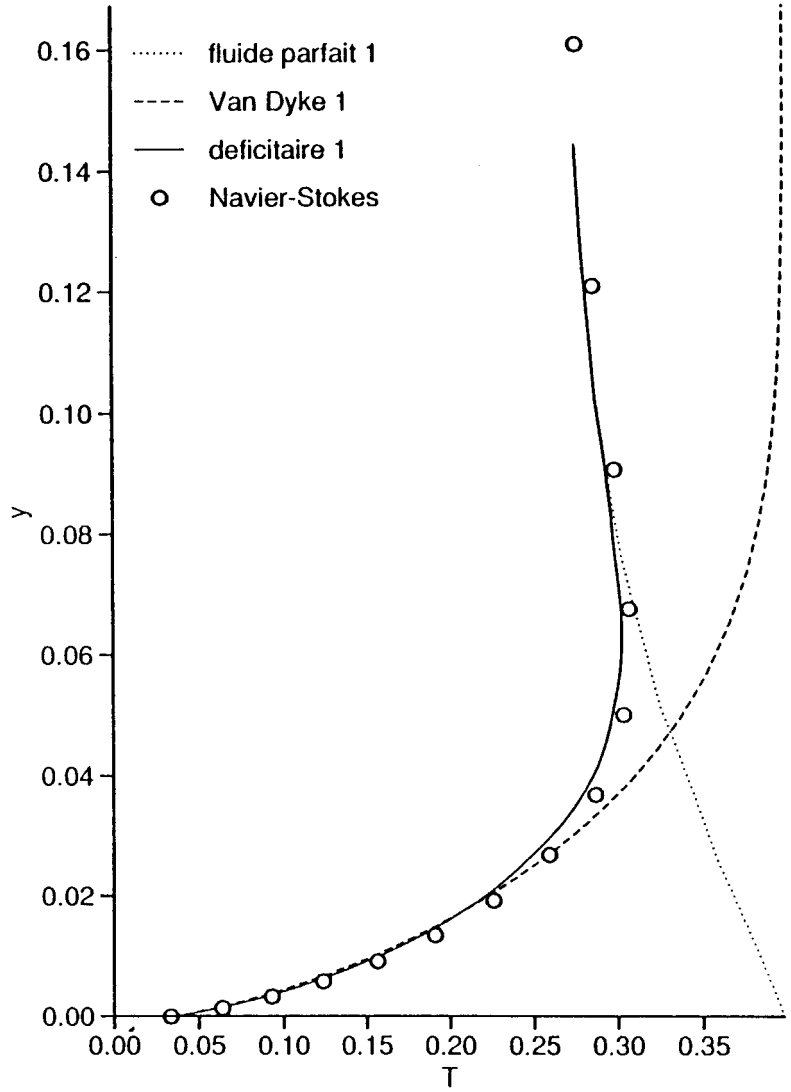


fig. 8.10

fig. 8.11

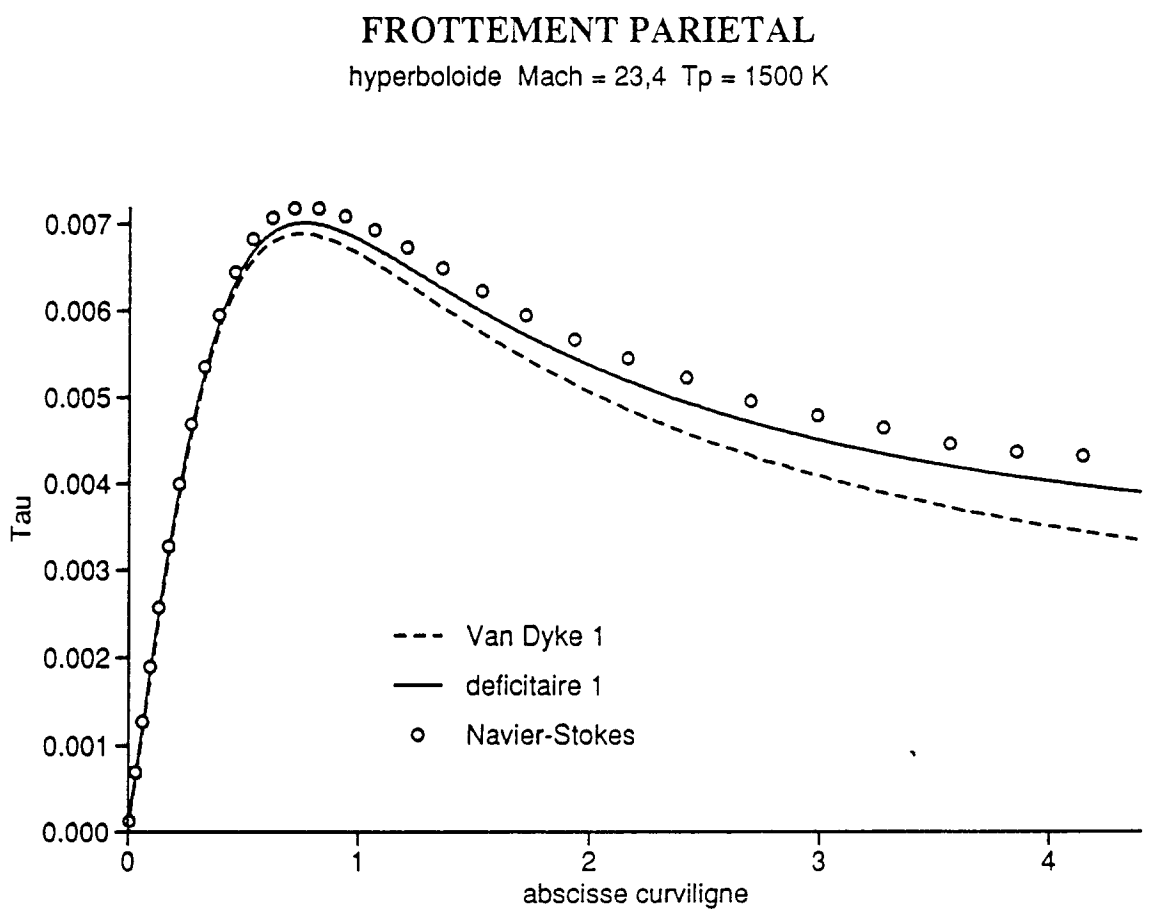


fig. 8.12

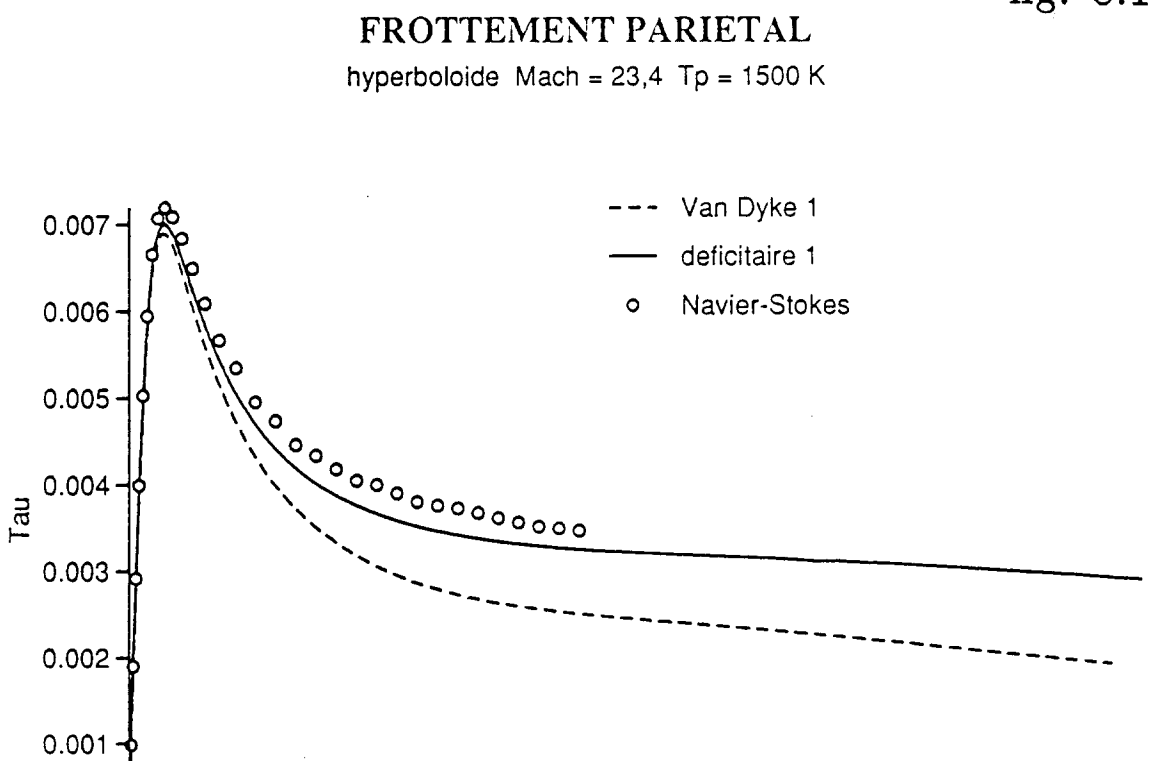


fig. 8.13

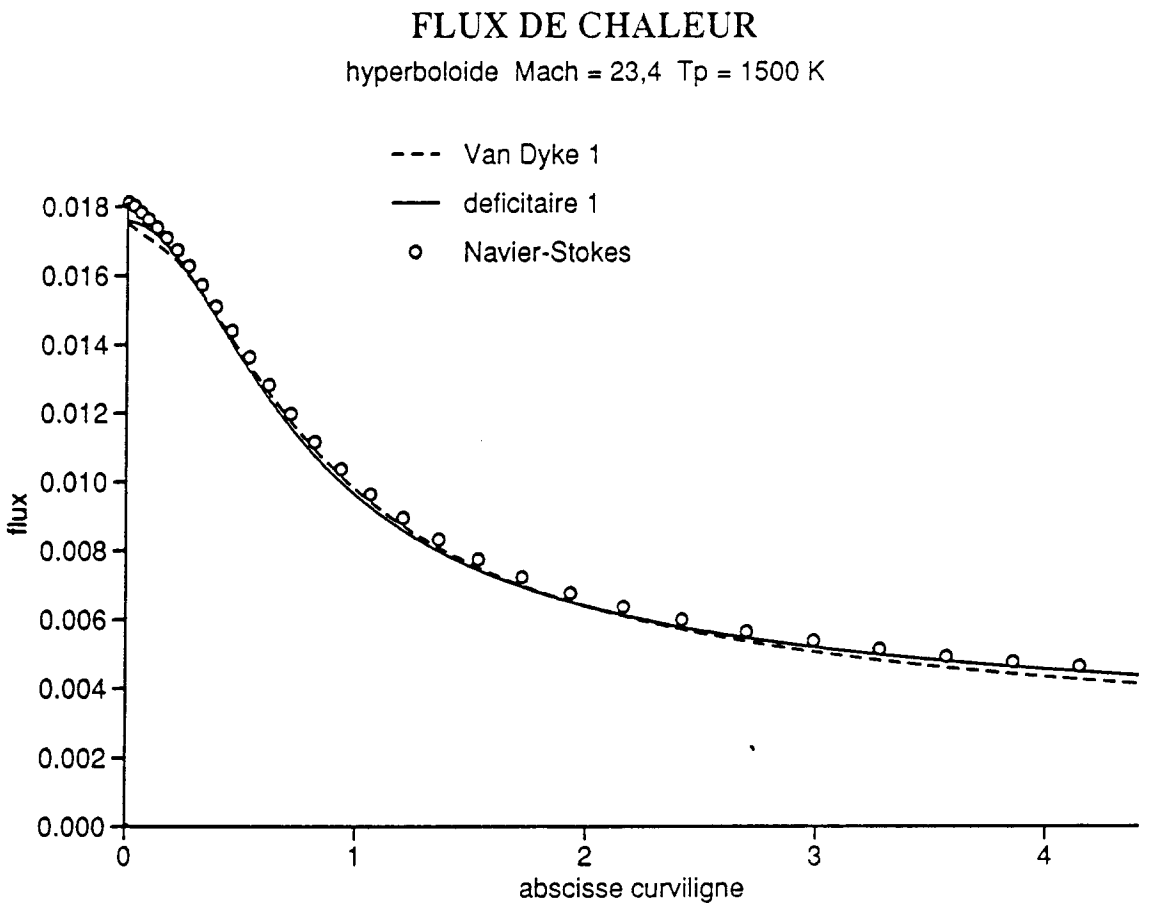
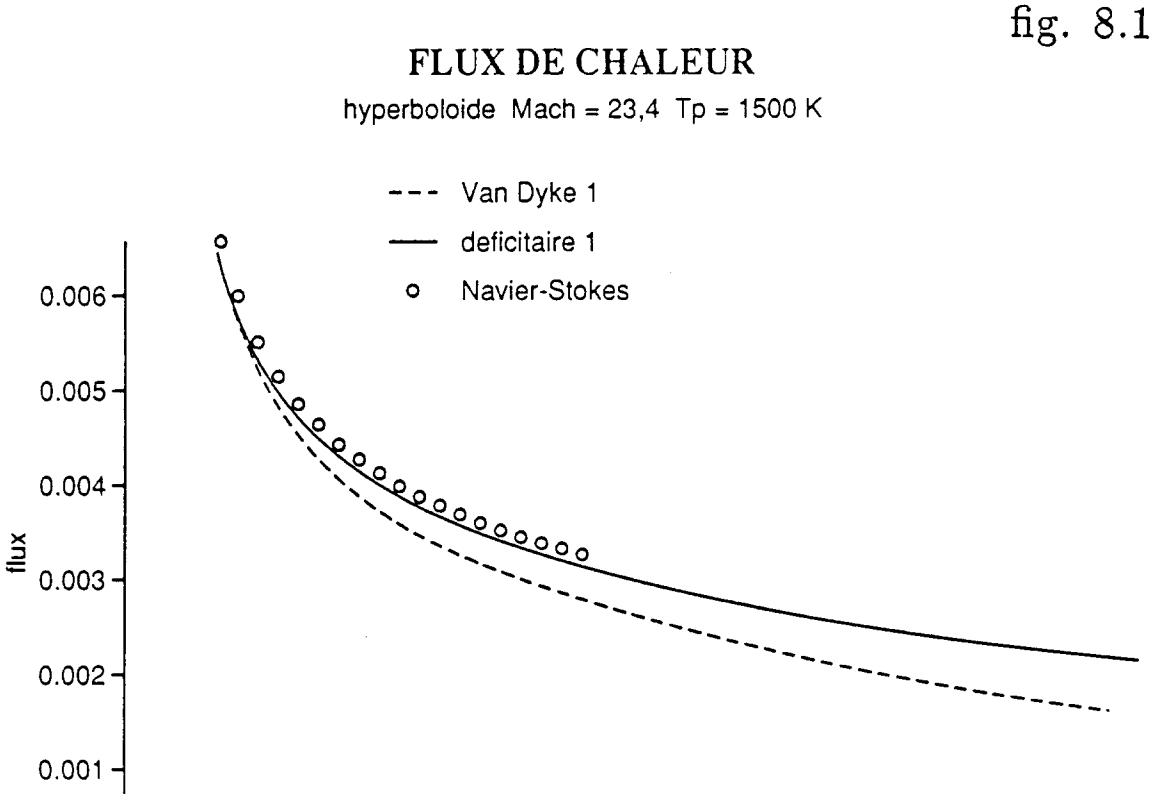


fig. 8.14



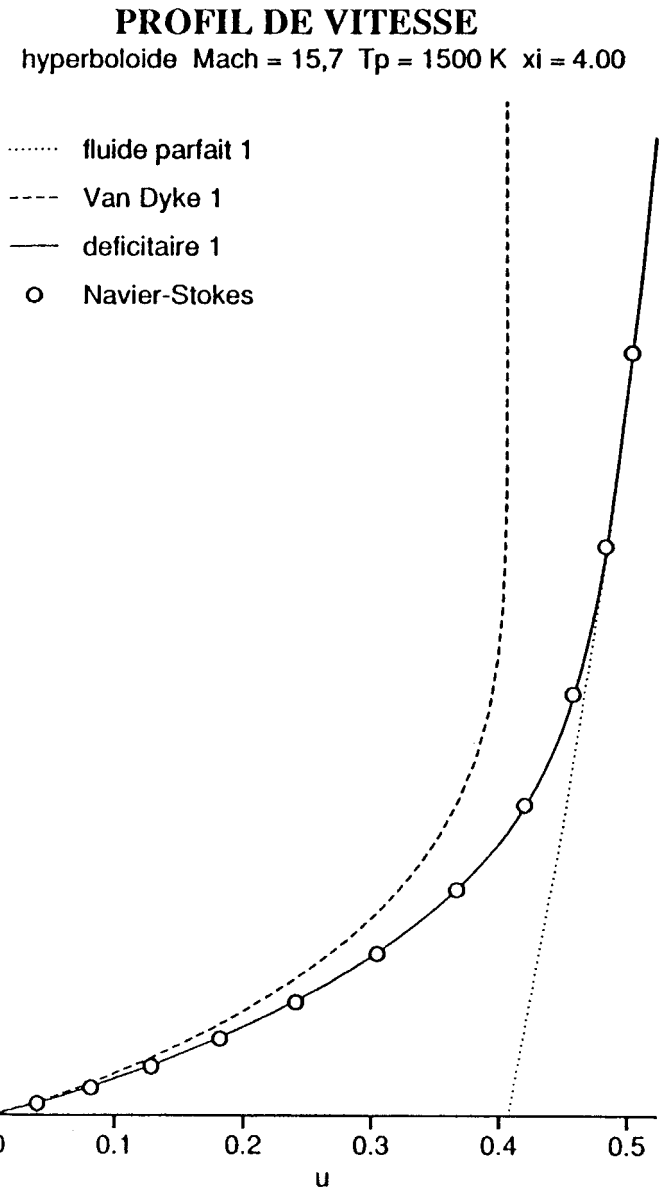


fig. 8.15

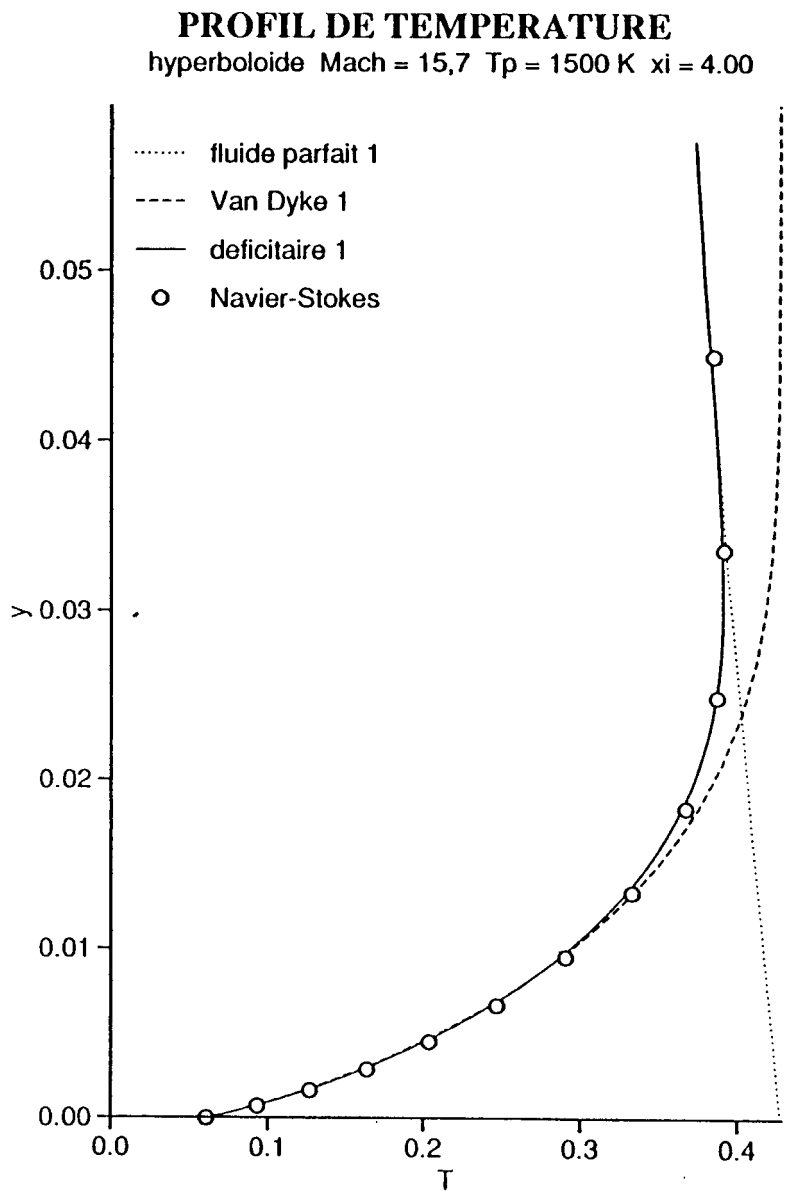


fig. 8.16

fig. 8.17

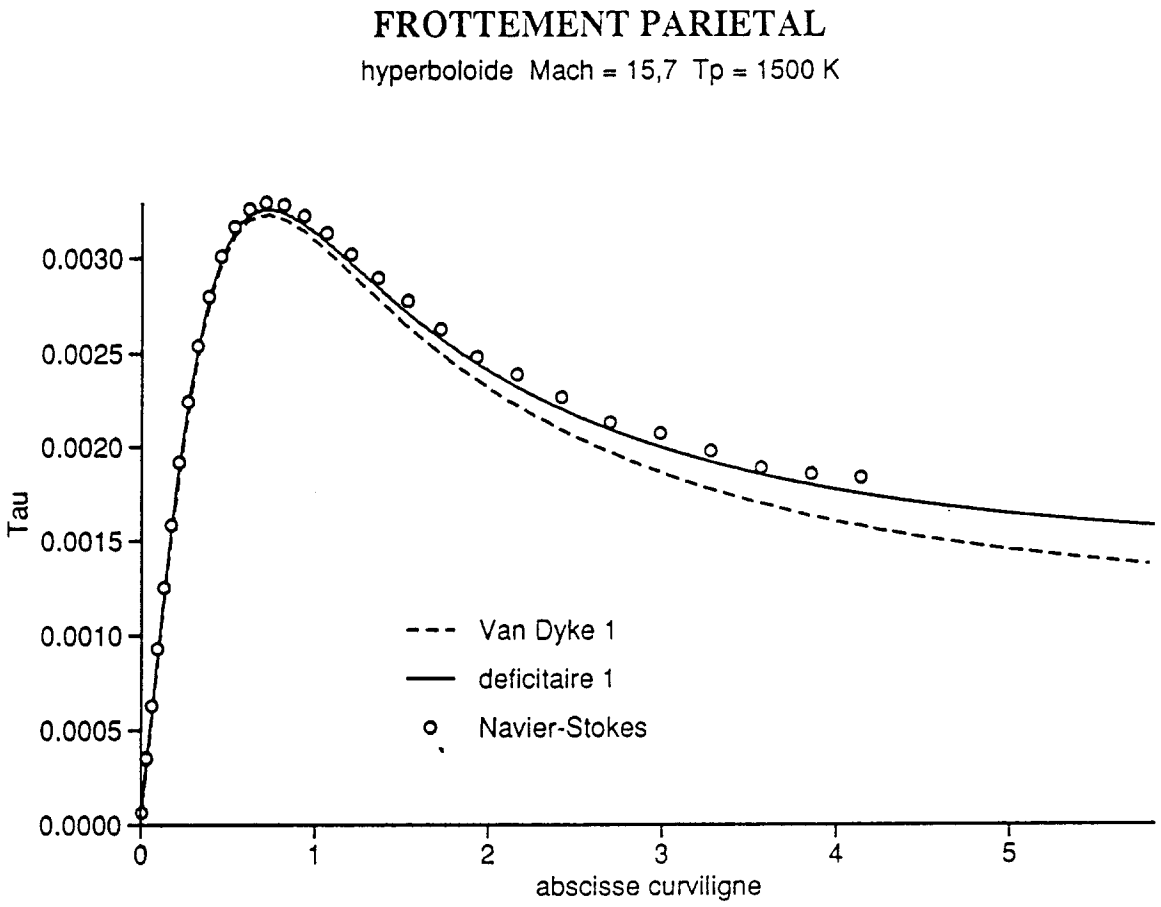
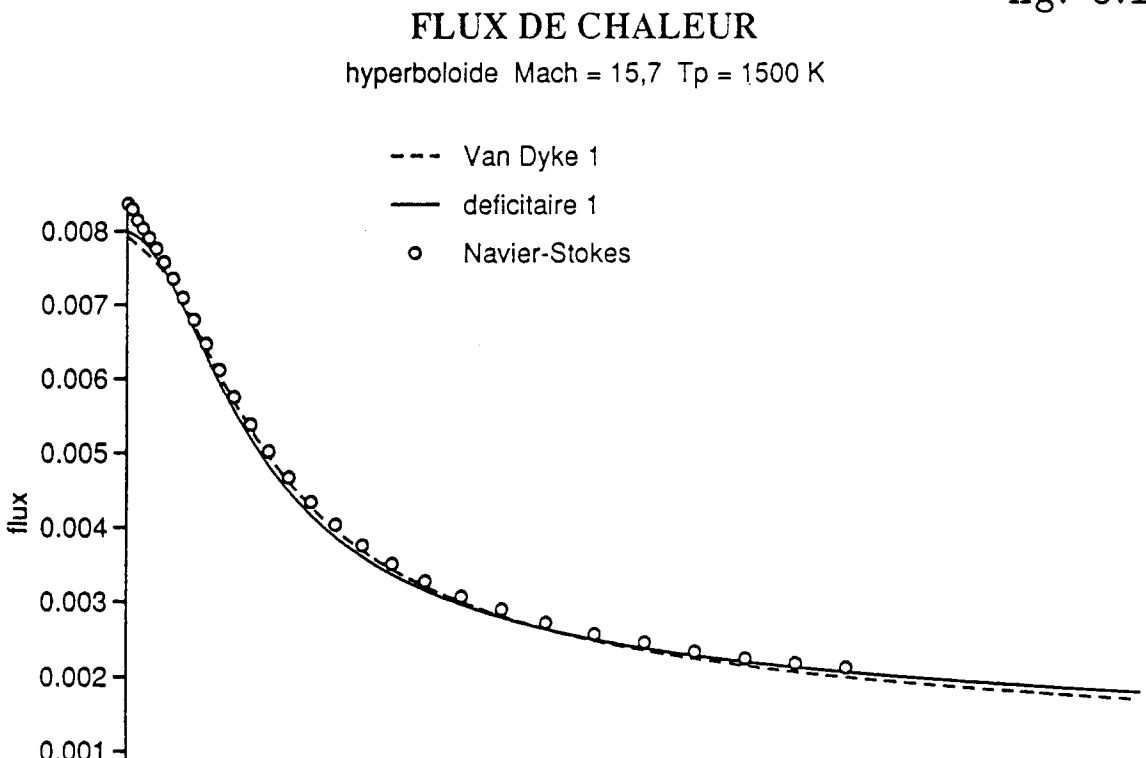


fig. 8.18



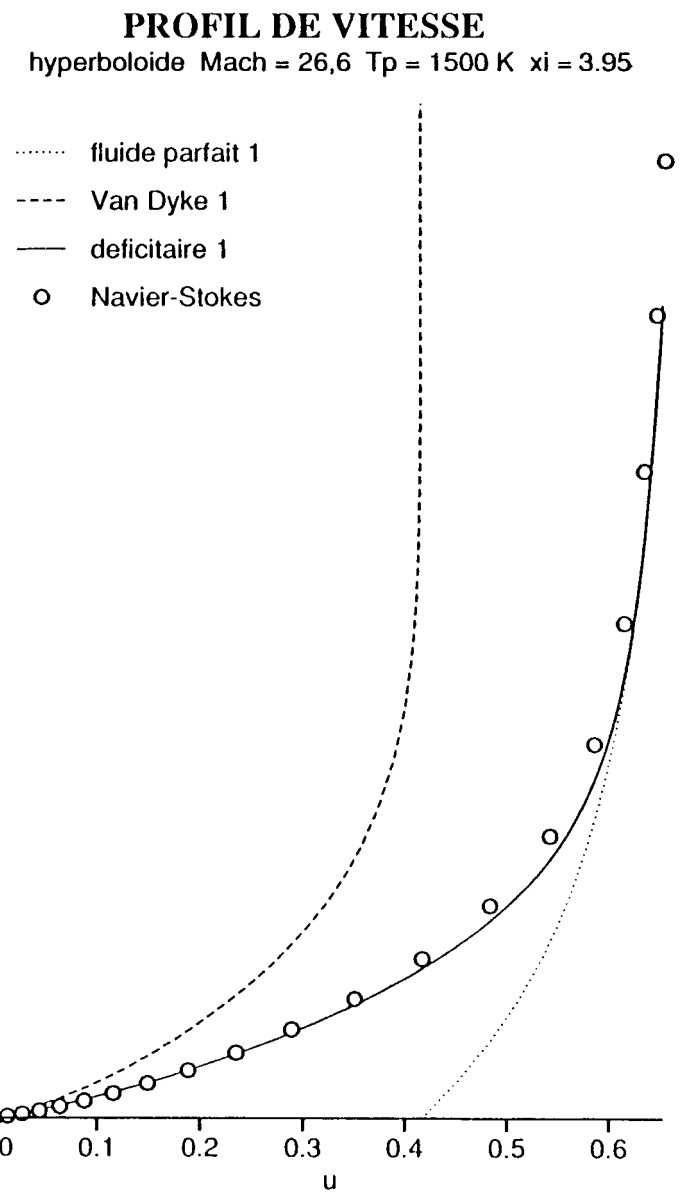


fig. 8.19

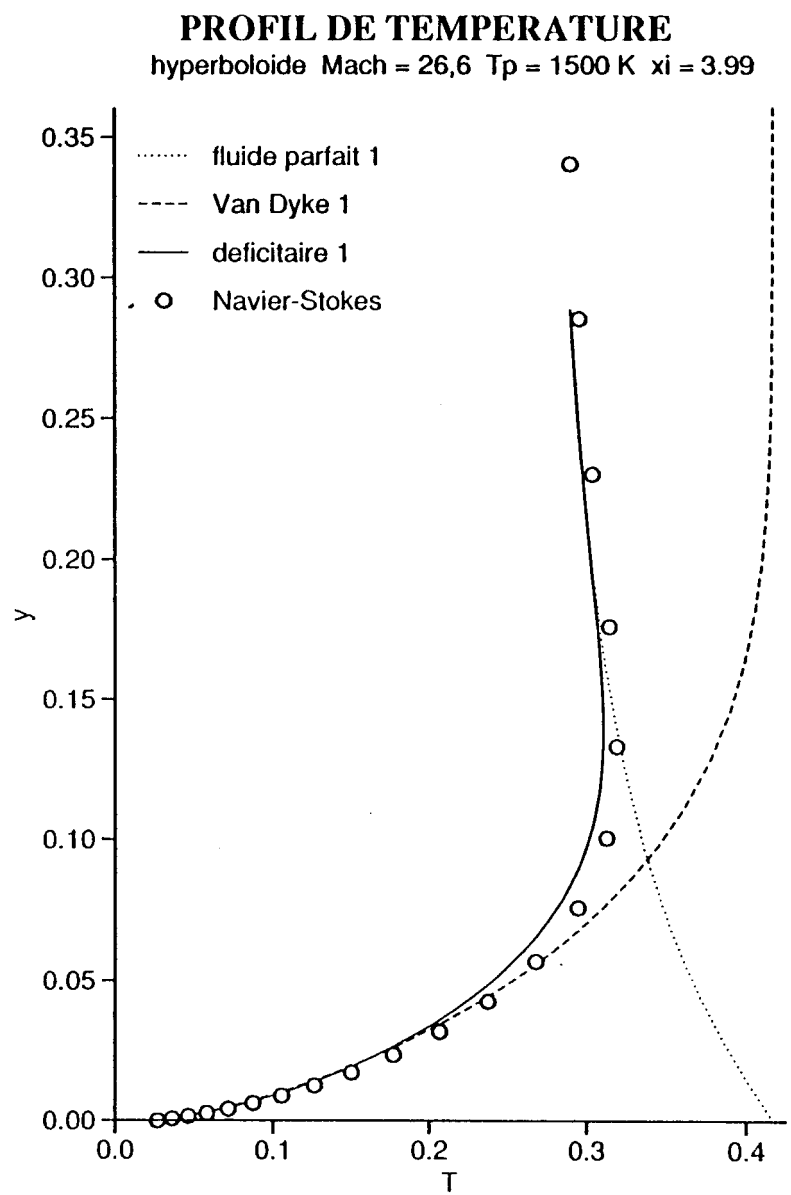


fig. 8.20

fig. 8.21

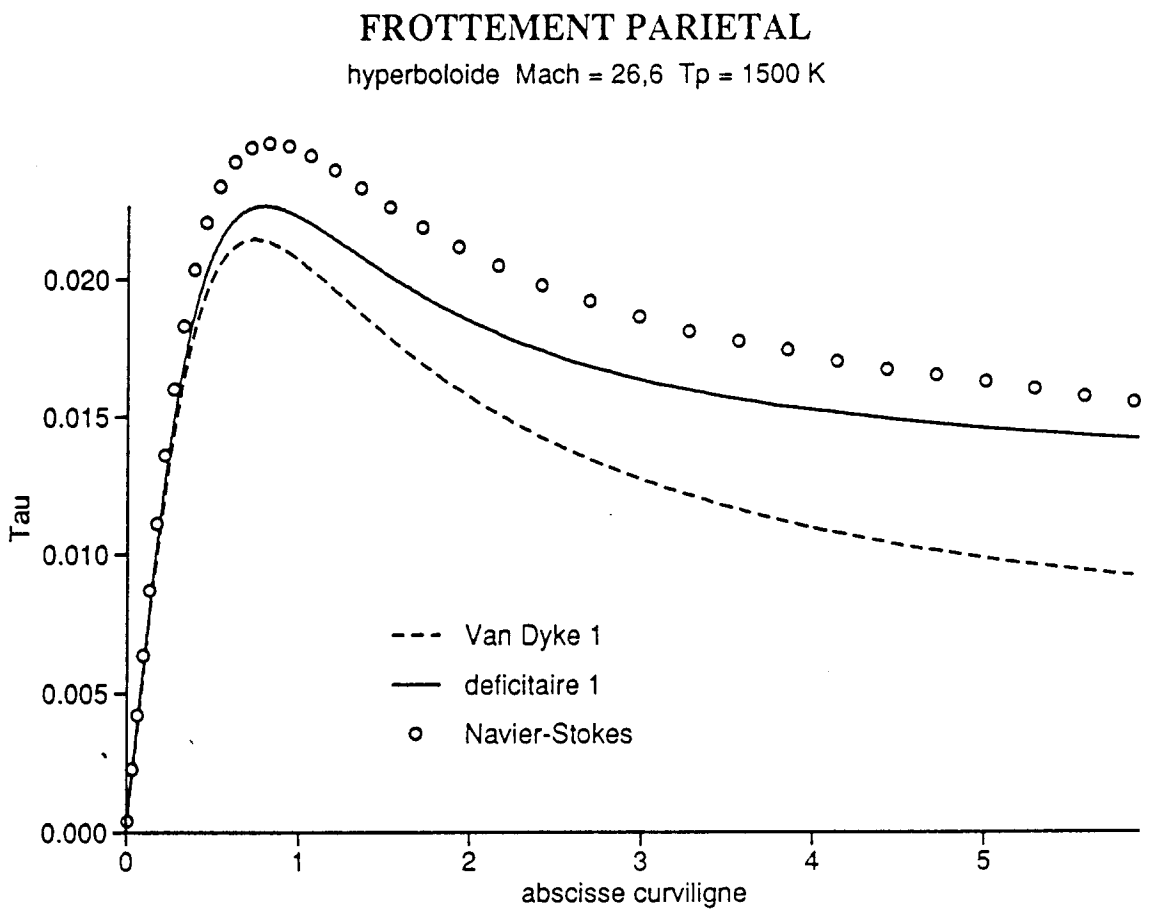
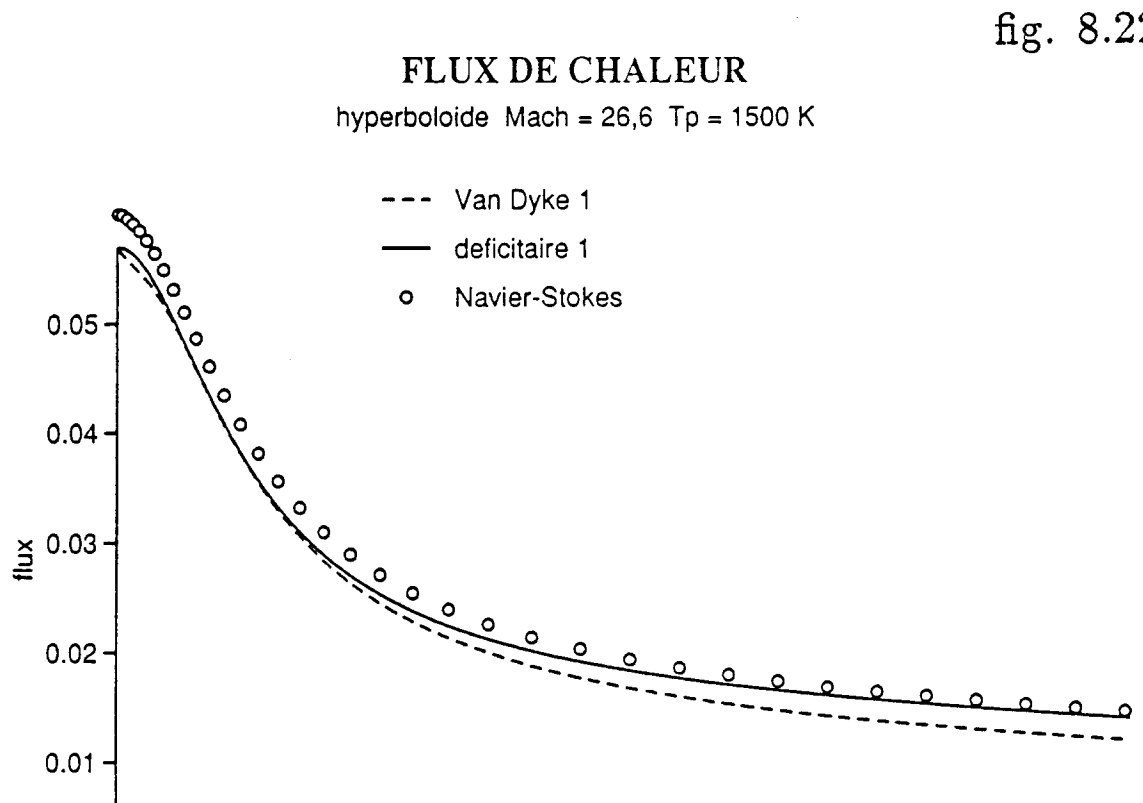



fig. 8.22