N° d'ordre : 70

Année 1991

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE

par

MICHEL MAHÉ

ANALYSE NON LINEAIRE GEOMETRIQUE DES COQUES PAR ELEMENTS FINIS ISOPARAMETRIQUES DEGENERES AVEC INTEGRATION EXPLICITE DANS L'EPAISSEUR

Soutenue le 14 juin 1991 devant la Commission d'Examen :

MM.	D.	BELLET	Président
	J.J.	BARRAU	Examinateurs
	J.L.	BATOZ	
	D.	GAY	
	S.	LAROZE	
Mme	J.	LOCATELLI	
MM.	R.	OHAYON	
	J.C.	SOURISSEAU	

à mes parents,

à mon frère,

Avant propos

Le travail de recherche qui fait l'objet de cette thèse a été mené au sein du service Méthodes et Recherche en calcul des structures du Bureau d'Etudes de la Division Avions d'AEROSPATIALE Toulouse, dans le cadre du Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.

Nous tenons à remercier chaleureusement Monsieur Didier BELLET, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, qui a suivi le déroulement de notre étude et dont la très grande compétence nous a guidé dans nos travaux de recherche. Nous le remercions d'avoir aimablement accepté de présider notre jury.

Nous remercions vivement Madame Jacqueline LOCATELLI, chef du service Méthodes et Recherche en calcul des structures et également directeur de thèse, pour nous avoir accueilli au Bureau d'Etude d'AEROSPATIALE et pour avoir suivi notre étude et examiné notre rapport. Nous tenons aussi à remercier Madame LOCATELLI pour nous avoir assuré, tant au plan humain qu'au plan scientifique, d'excellentes conditions de travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur Serge LAROZE, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, qui nous a accueilli au Département Structures de l'école et nous a donné de précieux conseils, notamment en calcul des coques et qui a accepté d'être membre du jury.

Nous exprimons nos sincères remerciements à Monsieur Roger OHAYON, Chef de la Division Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés à l'O.N.E.R.A. Châtillon, pour sa compétence et pour avoir très aimablement accepté d'examiner et de juger notre travail en qualité de rapporteur.

Nous remercions vivement Monsieur Jean-Jacques BARRAU, Professeur à l'Université Paul Sabatier, pour avoir très gentiment accepté d'être rapporteur et pour la qualité des remarques qu'il nous a faites et qui ont contribué à améliorer le rapport final.

Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur Jean-Louis BATOZ, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne et chef de la Division Modèles Numériques en Mécanique, qui nous a conseillé dans les développements et qui a fort aimablement accepté d'examiner notre travail.

Nous remercions Monsieur Jean-Claude SOURISSEAU, Ingénieur à AEROSPATIALE et Chef du Groupe Eléments Finis, qui a suivi notre travail et a contribué à l'implantation de la famille d'éléments finis développée dans le code de calcul ASELF.

Nous tenons à remercier toutes les personnes d'AEROSPATIALE qui ont suivi ce travail sur le plan théorique, ou qui ont contribué par leurs conseils ainsi que par la bonne ambiance de travail à la réalisation des développements informatiques. Nous remercions en particulier Messieurs Jean CHAIX, Casimir CZEKAJSKI, Alain SERVOZ et Stefanos VLACHOUTSIS.

Enfin nous voudrions exprimer notre reconnaissance à AEROSPATIALE qui nous a fourni une aide très importante sur le plan matériel, en particulier par la mise à disposition de moyens informatiques considérables : micro-ordinateurs Macintosh, stations de travail SUN, ordinateurs centraux CONTROL DATA / CYBER 994 et super-calculateurs CRAY XMP-14 ou CRAY XMP-116.

Résumé

Cette étude s'intéresse à l'analyse non linéaire géométrique statique des coques par éléments finis tridimensionnels dégénérés, avec intégration explicite dans l'épaisseur. Les formulations lagrangiennes totale et actualisée sont présentées.

L'élément fini développé est prévu pour modéliser des coques minces ou modérément épaisses et le matériau peut être isotrope ou composite orthotrope. Cet élément fini donne de bons résultats mais demande un temps de calcul élevé des opérateurs non-linéaires si l'intégration numérique dans l'épaisseur est utilisée pour les multicouches.

Pour cela le problème tridimensionnel du calcul des matrices de rigidité tangente et des efforts intérieurs est ici ramené à un problème bidimensionnel, l'intégration suivant l'épaisseur étant effectuée explicitement et non numériquement. Ceci nécessite d'écrire préalablement les développements limités des différents opérateurs en fonction de la variable épaisseur. L'intégration suivant les deux directions du plan tangent reste numérique et réduite, de manière à atténuer les problèmes de verrouillage dans le cas des coques minces.

Les applications numériques comparent cet élément à d'autres éléments de coques ou plaques ainsi qu'au même élément utilisant l'intégration numérique dans l'épaisseur de chaque couche. Les temps de calcul sont examinés dans le cas de l'analyse non-linéaire des structures composites multicouches.

Cet élément fini a été implanté dans le code de calcul de l'*Aérospatiale*, ASELF (AéroSpatiale ELéments Finis), et permet les calculs de type flambement critique et l'analyse non linéaire complète avec les techniques de pilotage en charge imposée, déplacement imposé, longueur d'arc imposée.

Abstract

The object of this study is the geometrical non linear static analysis using a three dimensional degenerated shell finite element, with explicit thickness integration. Total and updated lagrangian formulations are presented.

This element can be used to calculate thin or moderately thick shells and the material of the element can be isotropic or orthotropic. This element gives accurate results even for moderately thick composite panels, but requires an important non-linear generation time in the case of multilayered structures.

So the three-dimensional problem of tangent stiffness and internal forces computing is reduced to a bi-dimensional one, the thickness integration being obtained explicitly. So an expansion into power series of the thickness variable is performed for various matrices appearing in the formulation. The reduced numerical integration is performed in each direction of the middle-surface, so the locking phenomenon is considerably reduced for thin shells.

The numerical applications have been conducted in the case of isotropic and multilayered composite structures. The results have been compared with those given by other shell or plate finite elements and with those given by the same element using numerical thickness integration in each layer. Computational time is investigated to show the interest of explicit thickness integration in non linear analysis when using multilayered composite structures.

This finite element has been introduced in the *Aérospatiale* Finite Element code ASELF (AéroSpatiale ELéments Finis) for buckling and post-buckling analyse. Load / displacement curves are obtained by using different numerical strategies and control techniques such as load increment, displacement increment or arc length method.

Mots-clés

ELEMENT FINI

COQUE

COMPOSITE MULTICOUCHE

INTEGRATION EXPLICITE

ANALYSE NON LINEAIRE GEOMETRIQUE

FLAMBEMENT

FORMULATION LAGRANGIENNE TOTALE

FORMULATION LAGRANGIENNE ACTUALISEE

Key-words

FINITE ELEMENT

SHELL

MULTILAYER COMPOSITE

EXPLICIT INTEGRATION

GEOMETRICAL NON LINEAR ANALYSIS

BUCKLING

TOTAL LAGRANGIAN FORMULATION

UPDATED LAGRANGIAN FORMULATION

Table des matières

Avant propos 3
Résumé 5
Abstract 7
Mots-clés 9
Key-words 11
Table des matières 13
Liste des figures 19
Abréviations 21
Symboles mathématiques 23
Symboles utilisés 25

Introduction générale : Analyse non linéaire géométrique des coques . . . 33

1 Les éléments finis de coques 33
2 Analyse non linéaire géométrique statique 37
3 Objectifs de l'étude 41

PREMIERE PARTIE: THEORIE 43

Chapitre I La formulation de l'élément 45

I.1 Mise en place de l'élément de coque dégénéré 45

I.2.1 L'interpolation géométrique 52
I.2.1.1 Elément de coque à 16 noeuds 53
I.2.1.2 Elément de coque dégénéré à 8 noeuds 55
I.2.2 Ecriture matricielle 56
I.3 Définition du repère local en un point du plan moyen 58
I.4 La cinématique de l'élément 61
I.4.1 Définition du champ de déplacement 61
I.4.2 L'interpolation cinématique 62
I.4.3 Ecriture matricielle 65

Chapitre II Formulation variationnelle - Opérateurs non linéaires . . . 67

II.1 Mécanique des solides déformables - Généralités 67
II.1.1 Description cinématique 67
II.1.1.1 Tenseur gradient de transformation 69
II.1.1.2 Mesures de déformations 70
II.1.2 Description cinétique 74
II.2 Les lois de comportement 77
II.2.1 Le domaine non linéaire géométrique 77
II.2.2 Cas du solide élastique linéaire 77
II.3 Mise en place de la formulation incrémentale 82
II.3.1 Equations d'équilibre 82
II.3.2 Principe des travaux virtuels 84
II.3.2.1 Formulation eulérienne 84
II.3.2.2 Formulation lagrangienne 87
II.3.3 Formulation incrémentale. 89
II.3.4 Expression des termes de la matrice de rigidité tangente 91
II.3.4.1 Expression de la matrice de rigidité tangente en F.L.T. . . 91
II.3.4.2 Expression de la matrice de rigidité tangente en F.L.A. . . 96
II.3.5 Mise en place du vecteur des forces intérieures 99

Chapitre III Intégration explicite dans l'épaisseur 103

III.1 Ecriture explicite des différentes quantités 103

III.1.1 La géométrie 104

III.1.2 La cinématique 105

III.1.3 La matrice Jacobienne 106

III.1.3.1 Formulation générale 107

III.1.3.2 Approximation à l'ordre 2 112

III.1.3.3 Approximation au premier ordre 113

III.1.4 Les matrices d'interpolation des déformations 116

III.1.4.1 La matrice d'interpolation des déformations linéaires . . . 116

III.1.4.2 La matrice d'interpolation des déformations non linéaires . . 117

III.2 Intégration des caractéristiques élastiques dans l'épaisseur 119

III.2.1 Homogénéisation 119

III.2.2 Séparation des différentes sollicitations mécaniques 120

III.3 Intégration explicite de la matrice de rigidité tangente 121

III.3.1 La matrice de rigidité linéaire 121

II.3.2 La matrice de rigidité non linéaire 127

II.3.3 La matrice de rigidité géométrique 128

III.4 Intégration explicite de la matrice des efforts intérieurs 133

Chapitre IV Flambement linéaire - analyse non linéaire 135

IV.1 Théorie linéaire du flambement 135

IV.1.1 Critère de stabilité 135

IV.1.2 Charges critiques linéaires 136

IV.1.3 Limitations de la théorie linéaire 139

IV.2 Analyse non linéaire 140

IV.2.1 Formulation 140

IV.2.1.1 Equations d'équilibre de la structure 140

IV.2.1.4 Méthode de résolution 142
IV.2.2 Techniques de pilotage 143
IV.2.2.1 Pilotage par charge imposée 144
IV.2.2.2 Pilotage par composante de déplacement imposée. 147
IV.2.2.3 Pilotage par longueur d'arc imposée 150
IV.2.3 Algorithmes utilisés en F.L.T. et en F.L.A. 154

DEUXIEME PARTIE : APPLICATIONS NUMERIQUES 159

Chapitre V Analyse du type flambement critique 161
V.1 Structures isotropes 163
V.1.2 Modes de flambement d'une poutre en I en compression 163
V.2 Structures anisotropes 171
V.2.1 Flambement de poutres à profils minces stratifiées en compression . . 171
V.2.2 Flambement de panneaux cylindriques stratifiés en compression . . . 176

Chapitre VI Analyse non linéaire complète 183
VI.1 Structures isotropes 185
VI.1.1 Plaque chargée verticalement au centre 185
VI.1.2 Coque cylindrique sous charge concentrée 189
VI.1.2.1 Epaisseur h = 12,7 mm 191
VI.1.2.2 Epaisseur h = 6,35 mm 199
VI.1.3 Coque sphérique sous charge concentrée. 202
VI.1.4 Dôme sphérique encastré avec charge centrale. 207
VI.1.5 Poutre encastrée en flexion pure 211
VI.1.6 Poutre en compression avec charge perturbatrice. 215
VI.1.7 Plaque encastrée en porte-à-faux 218
VI.2 Structures anisotropes 223
VI.2.1 Toit cylindrique composite en compression axiale 223

TABLEAUX DE RESULTATS 231

ANNEXES. 251

Annexe A1 : Matrice des constantes élastiques du matériau 253
Annexe A2 : Changement de repère local / global 261
Annexe A3 : Matrice d'interpolation des déformations linéaires 265
Annexe A4 : Matrice d'interpolation des déformations non linéaires 271
Annexe A5 : Première variation du vecteur des déformations 275
Annexe A6 : Les fonctions de forme utilisées 279
Annexe A7 : Le programme de calcul 285

BIBLIOGRAPHIE 289

ABREVIATIONS 291
BIBLIOGRAPHIE, REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 293

Liste des figures

Figure I.1 : Elément hexaèdre isoparamétrique à 20 noeuds et 60 D.D.L.
Figure I.2 : Elément 3D à 16 noeuds et 48 D.D.L.
Figure I.3 : Elément 3D dégénéré à 8 noeuds et 40 D.D.L.
Figure I.4 : Passage des axes d'orthotropie aux axes locaux de l'élément.
Figure I.5 : Interpolation géométrique 16 / 8 noeuds.
Figure I.6 : Schématisation du vecteur normal à la surface moyenne.
Figure I.7 : Repère local en *M*.
Figure I.8 : Rotations en *i*.

Figure II.1 : Description de la déformation.
Figure II.2 : Définition du vecteur contrainte.
Figure II.3 : Définition du vecteur contraintes.
Figure II.4 : Composantes du tenseur $[\sigma]$.
Figure II.5 : Description des contraintes de Cauchy et P.K.2.

Figure III.1 : Coupure d'une coque multicouches

Figure IV.1 : Pilotage par facteur de charge imposé.
Figure IV.2 : Pilotage par composante de déplacement imposée.
Figure IV.3 : Pilotage par longueur d'arc imposée.

Figure V.1 : Modèle de la poutre en I.
Figure V.2 : Les 3 spécimens de poutres minces.
Figure V.3 : Conditions aux limites et chargement

Figure VI.1: Modèle quart de plaque encastrée.

Figure VI.2 : Structure coque cylindrique sous charge concentrée.

Figure VI.3 : Modèle 1/4 de coque cylindrique.

Figure VI.4 : Structure coque sphérique sous charge concentrée.

Figure VI.5 : Modèle 1/4 de coque sphérique.

Figure VI.6 : Modèle de coque sphérique encastrée sous charge concentrée.

Figure VI.7 : Maillage du quart de dôme dans le cas $n = 4$.

Figure VI.8 : Modèle de poutre encastrée sollicitée en flexion pure.

Figure VI.9 : Déformées successives de la poutre en flexion pure.

Figure VI.10 : Modèle de la poutre encastrée sollicitée en compression.

Figure VI.11 : Modèle de la plaque.

Figure VI.12 : Déformée de la plaque et définition des déplacements.

Figure VI.13 : Structure et chargement de la coque cylindrique multicouches.

Figure A1.1 : Changement de base entre repères locaux pour le cas orthotrope.

Figure A6.1: Espace paramétrique.

Figure A6.2 : Espace paramétrique élément quadrangle à 4 noeuds.

Figure A6.3 : Espace paramétrique élément quadrangle à 12 noeuds.

Figure A6.4 : Dégénérescence du quadrangle en triangle (élément linéaire).

Figure A6.5 : Dégénérescence du quadrangle en triangle (élément quadratique).

Abréviations

D.D.L.	Degré De Liberté
P.K.2	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce
F.L.T.	Formulation Lagrangienne Totale
F.L.A.	Formulation Lagrangienne Actualisée
H.P.P.	Hypothèse des Petites Perturbations
N.R.	Méthode de Newton-Raphson
N.R.M.	Méthode de Newton-Raphson modifiée
F.F.	Fonctions de Forme
s.m.	Surface moyenne
2D	Bidimensionnel
3D	Tridimensionnel
QS-RE	Elément de coque dégénéré Quadratique, Serendip, intégration Réduite Explicite
QS-RN	Elément de coque dégénéré Quadratique, Serendip, intégration Réduite Numérique
CPT4	Elément de plaque à 4 noeuds en formulation classique (Kirchhoff)
H1	Hypothèse des voiles minces
H2	Hypothèse d'énergie de déformation "normale" u_{33} négligeable
H3	Hypothèse de Mindlin
H4	Hypothèse des rotations modérées

Symboles mathématiques

$\{v\}$	Vecteur colonne $\vec{v}$
$<v>$	Vecteur ligne correspondant à $\vec{v}$ (ou vecteur colonne transposé $\{v\}^T$)
$[M]$	Matrice M
$[M]^T$	Matrice M transposée
$[M]^{-1}$	Matrice inverse de M
$\|s\|$	Valeur absolue du scalaire s
$\|M\|$	Déterminant de la matrice M (encore noté det[M])
$\|\|\vec{v}\|\|$	Norme du vecteur $\vec{v}$
$<u>\{v\}$	Produit scalaire de $\{u\}$ par $\{v\}$ (encore noté $\{u\}^T\{v\}$)
$<\{u\},\{v\}>$	Idem. produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ (encore noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$)
$\wedge$	Produit vectoriel
$s_{,x}$	$= \partial s/\partial x$: dérivée partielle du scalaire s par rapport à la variable x
$\approx$	A peu près égal à
δq	Première variation de la quantité q
$\delta^2 q$	Seconde variation de la quantité q
δ_{ij}	Symbole de Krönecker $\quad \delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$
Σ	Sommation
Π	Produit
$\int$	Intégrale sur V

Symboles utilisés

Chapitre I

h	Epaisseur de la coque en un point donné.
L	Longueur caractéristique de la coque.
R	$R = Min\ (\ \|R_1\|\ ,\ \|R_2\|\ )$
R_1, R_2	Rayons de courbure principaux de la coque.
$[S]$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de $2^{ème}$ espèce en repère global.
$[S']$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de $2^{ème}$ espèce en repère local.
$[\varepsilon]$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange en repère global.
$[\varepsilon']$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange en repère local.
$\{\varepsilon\}$	Vecteur colonne des déformations de Green-Lagrange en repère global.
$\{\varepsilon'\}$	Vecteur colonne des déformations de Green-Lagrange en repère local.
$\{d_{ni}\}$	Vecteur des déplacement nodaux au noeud i.
$\{d_n\}$	Vecteur des déplacement nodaux des n noeuds de l'élément considéré.
x, y, z	Coordonnées d'un point courant M en repère fixe (de référence) global.
x_i, y_i, z_i	Coordonnées du noeud i en repère fixe global.
ξ, η	Coordonnées intrinsèques sur la surface moyenne de l'élément.
$N_i(\xi,\eta)$	Fonction de forme de type Serendip relative au noeud i.
t	Coordonnée suivant l'épaisseur.
c	"Epaisseur" en variable t.
h_i	Epaisseur au noeud i.
$[\Phi]$	Matrice d'interpolation géométrique pour l'élément.

$\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3}$	Vecteurs de base du repère local élément au point M de la surface moyenne.
$\overrightarrow{V_{1i}},\overrightarrow{V_{2i}},\overrightarrow{V_{3i}}$	Vecteurs de base du repère local élément au noeud i.
$\{C\}$	Vecteur des coordonnées et des composantes de $\overrightarrow{V_3}$ pour les n noeuds.
$\{C_i\}$	Vecteur des coordonnées et des composantes de $\overrightarrow{V_3}$ au noeud i
$\overrightarrow{R}$	Vecteur position du point M.
u,v,w	Déplacements du point M de l'élément de coque en repère global structure.
u_i,v_i,w_i	Déplacements au noeud i de l'élément de coque en repère global structure.
α_i,β_i	Rotations au noeud i suivant les 2 directions du repère local tangent.
u',v',w'	Déplacements d'un point M de l'élément de coque en repère local élément.
u'_i,v'_i,w'_i	Déplacements au noeud i de l'élément de coque en repère local élément.
$[P]$	Matrice de passage du repère global au repère local.
$[A]$	Matrice d'interpolation cinématique pour l'élément.
$[A^i]$	Matrice d'interpolation cinématique pour le noeud i.

Chapitre II

Ω^0	Configuration de référence d'une structure.
Ω^i	Configuration déformée i d'une structure.
$[\varepsilon]$	Tenseur des déformations de Green - Lagrange.
$[e]$	Tenseur des déformations d'Euler - Almansi.
$[\varepsilon']$	Tenseur des déformations de Green - Lagrange en repère local.
$[T]$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 1.
$[S]$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2.
$[\sigma]$	Tenseur des contraintes de Cauchy.
$[S']$	Tenseur des contraintes de Piola - Kirchhoff 2 en repère local.
$\overrightarrow{u}$	Vecteur déplacement.
$[F]$	Tenseur gradient de transformation.
dV	Elément de volume : $dV = dx\,dy\,dz = \lvert J\rvert\, d\xi\, d\eta\, dt$.
dV^i	Elément de volume après déformation dans Ω^i.

C_{ijkl}	Loi de comportement du solide élastique linéaire.
W	Energie potentielle totale de la structure.
U	Energie de déformation de la structure.
u	Energie volumique de déformation.
u_e	Energie de déformation élémentaire.
A	Travail des efforts extérieurs à la structure.
$[k_T]$	Matrice tangente de l'élément considéré.
$[K_T]$	Matrice tangente de la structure complète.
$[K_{Ti}]$	Différentes matrices constituant $[K_T]$.
$[K_{T1}]$	$= [K] = [K_L] + [K_{NL}]$ Matrice de rigidité linéaire et non linéaire.
$[K_{T1}]_L$	$= [K_L]$ Matrice de rigidité linéaire classique.
$[K_{T1}]_{NL}$	$= [K_{NL}]$ Matrice de rigidité non linéaire.
$[K_{T2}]$	$= [K_\sigma]$ Matrice de rigidité géométrique.
$[K_{T3}]$	$= [K_\lambda]$ Matrice des forces externes.
$\{F_i\}$	Forces ponctuelles.
$\{f_s\}$	Forces de surface.
$\{f_v\}$	Forces de volume.
$\{f\}$	Forces sans distinction de type.
dS	Elément de surface.
∂V	Surface limite de l'élément.
V^0	Volume total non déformé d'un élément.
V^i	Volume total déformé d'un élément.
D	Domaine d'un élément.
I_i	Différentes intégrales constituant l'incrément de l'énergie pot. totale virt.
$[B_L]$	Matrice d'interpolation des déformations linéaires.
$[B_{NL}]$	Matrice d'interpolation des déformations non linéaires.
$[E]$	Matrice de comportement du matériau global en repère global.
$[E']$	Matrice de comportement du multicouche en repère local.
$[C_k]$	Matrice des caractéristiques élastiques d'une couche k (repère d'orthotropie)

$\{u_{,x}\}$	Dérivées des déplacements par rapport aux coordonnées globales.
$\{u_{,\xi}\}$	Dérivées des déplacements par rapport aux coordonnées intrinsèques.
$[L]$	Matrice d'interpolation de $\{u_{,\xi}\}$ en fonction de $\{d_n\}$
$[H]$	Matrice d'identification des composantes de $\{u_{,x}\}$
$[N]$	Matrice des fonctions de forme.
$[Q]$	Triple Jacobienne inverse.
$[F_i]$	Voir Annexe A4.
$[F_S]$	Triple tenseur des contraintes.
[0]	Matrice 3x3 à coefficients nuls.
$[F_u]$	Matrice reliant les efforts $\{f\}$ au déplacement $\{u\}$.
$\{F_{int}\}$	Forces intérieures nodales pour la structure.
$\{f_{int}\}$	Forces intérieures nodales par élément.
$[\psi]$	Matrice donnant les efforts intérieurs d'un élément.
$[\Psi]$	Matrice donnant les efforts intérieurs de la structure.

Chapitre III

$[\Phi_0]$	Matrice d'interpolation géométrique dans le plan tangent à la s.m..
$[\Phi_1]$	Matrice d'interpolation géométrique hors du plan tangent à la s.m..
$[A_0]$	Matrice d'interpolation cinématique dans le plan tangent à la s.m..
$[A_1]$	Matrice d'interpolation cinématique hors du plan tangent à la s.m..
$[J]$	Matrice Jacobienne définissant le passage des dérivées repère global / local.
$[J_0]$	Matrice Jacobienne définie sur la surface moyenne ($t = 0$).
$[J_1]$	Partie de la matrice Jacobienne variant dans l'épaisseur de la coque.
$[a]$	Premier tenseur fondamental
$[b]$	Deuxième tenseur fondamental
$[g]$	Tenseur métrique.
H, K	$\mu = 1 - 2 H t + K t^2$ avec $\lvert J\rvert = \mu \lvert J_0\rvert$
$[I_3]$	Matrice 3x3 identité.

N_c	Nombre de couches de l'empilement.
$[A_m]$	Matrice relative aux phénomènes de membrane.
$[A_s]$	Matrice relatives aux phénomènes de cisaillement.
$[A_{mf}]$	Matrice relative aux phénomènes de couplage entre membrane et flexion.
$[A_f]$	Matrice relative aux phénomènes de flexion.
$[L_0]$ $[L_1]$	Matrices d'interpolation de $\{u_{,\xi}\}$ en fonction de $\{d_n\}$ développées en séries.
$[T]$	Matrice de passage des déformations du repère local au repère global.
$[T_p]$	Matrice de changement de base des phénomènes de membrane.
$[T_{hp}]$	Matrice de changement de base des phénomènes de cisaillement.
$[T_{\alpha k}]$	Matrice de passage des déformations du repère d'orthotropie au repère local.
$[B_{L0}]$	Terme constant du développement en série (t) de $[B_L]$.
$[B_{L1}]$	Terme linéaire du développement en série (t) de $[B_L]$.
$[B_{L0p}]$	Matrice d'interpolation des déformations constantes de membrane.
$[B_{L0hp}]$	Matrice d'interpolation des déformations constantes de cisaillement.
$[B_{L1p}]$	Interpolation des déformations de membrane linéaires dans l'épaisseur .
$[B_{NLp}]$	Matrice d'interpolation des déformations non linéaires de membrane.
$[S_0]$	Tenseur des contraintes P.K.2 sur la surface moyenne.
$[S_1]$	Tenseur des contraintes (partie linéaire dans l'épaisseur).

Chapitre IV

$\{F_{ext}\}$	Forces extérieures nodales par élément.
$\{F_{ext\ g}\}$	Forces extérieures nodales pour la structure complète.
$\{R\}$	Vecteur résidu = $\{F_{ext}\}$ - $\{F_{int}\}$.
λ	Facteur de charge.
$\Delta\lambda_p$	Facteur de charge imposé au pas p.
$\{\delta d_p{}^i\}$	Correction du vecteur des déplacements nodaux au pas p itération i.
$\delta\lambda_p{}^i$	Correction du facteur de charge au pas p itération i.
Δd_p	Valeur de la composante de déplacement imposé au pas p.
ΔS_p	Valeur du paramètre de longueur d'arc imposé au pas p.

$[K_{Tp}{}^{i}]$	Matrice tangente au pas p itération i.
$\{R_p{}^{i}\}$	Vecteur résidu au pas p itération i.
α	Exposant dans les lois de correction.
ε	Valeur de la tolérance de négligeabilité.

Introduction générale

Analyse non linéaire géométrique des coques

1 Les éléments finis de coques

Les coques minces que l'on appele également voiles sont des structures minces courbées qui interviennent couramment comme composants dans les constructions aéronautiques. Ce sont par exemple les différentes parties constituant le fuselage des avions que celles-ci soient en alliage d'aluminium ou bien en structure type composite ou sandwich (nid d'abeille). Les coques peuvent aussi être des composants de structures de génie civil, par exemple pour des toitures, dômes, réservoirs...

Depuis un peu plus de 25 ans de nombreux travaux de recherche ont visé à améliorer la qualité de description des éléments finis de coques afin de réaliser des calculs structuraux fiables, aspect fondamental surtout pour des applications dans le domaine de l'aéronautique où la précision des résultats est cruciale à l'égard de la sécurité mais aussi pour des raisons de poids minimal. De nombreux développements ont aussi visé à rendre aisément utilisables ces éléments bien souvent trop complexes à mettre en oeuvre et à utiliser.

Schématiquement et sans rentrer dans le détail des éléments permettant le traitement de problèmes particuliers (éléments axisymétriques ou non, éléments surbaissés ou non, éléments plats, éléments cylindriques, sphériques...) on peut dire qu'à l'origine les premiers éléments finis modélisant les coques s'appuyaient sur une formulation basée sur des considérations de géométrie des surfaces et ont été présentés principalement dans les travaux de SANDERS (1963), KOITER (1966), MARLOWE et FLÜGGE (1968) et bien d'autres encores. Tous ces travaux sont basés sur l'hypothèse de Love-Kirchhoff où toute normale à la surface moyenne avant déformation reste normale à la surface moyenne après déformation. Cette formulation géométrique aboutit à la définition des déformations et des contraintes dans la coque d'où le nom souvent dédié à ces éléments dans la littérature anglaise : "Stress Resultant Elements".

Ensuite une autre voie a été explorée et consiste à partir d'éléments finis pour lesquels la formulation de base est celle des éléments isoparamétriques de volume (hexaèdres), que l'on reformule en tenant compte du fait que dans le cas des coques une des dimensions (l'épaisseur) est bien plus faible que les autres surtout pour les coques minces ou très minces. De plus la schématisation (variables nodales) peut être ramenée uniquement dans le plan moyen. On parle alors d'éléments dégénérés et le principe de la dégénérescence a été présenté pour la première fois par AHMAD, ZIENKIEWICZ et IRONS en 1970 dans une étude sur l'analyse linéaire statique des coques par éléments quadratiques dégénérés à 8 noeuds.

Dès le départ l'intérêt de ces éléments est apparu important puisqu'ils ne nécessitent moins de considérations liées à la géométrie (complexe) des surfaces courbes pour être mis en oeuvre, le concept isoparamétrique ayant une définition mathématique nécessitant simplement une continuité C^0 des fonctions mises en oeuvre. Par contre il est apparu que ces éléments étaient, sans amélioration de leur formulation, parfois plus coûteux en terme de nombre de degrés de liberté nécessaires à la modélisation d'une structure donnée, comparativement aux éléments du premier type.

Le concept d'éléments dégénérés a permit d'améliorer ce point et a depuis été repris dans plusieurs études dont nous avons donné une liste non exhaustive dans le tableau de la page suivante et nous pouvons rappeler ici les études principales qui ont suivi. ZIENKIEWICZ et NAYAK (1971) ont proposé pour cet élément une formulation permettant l'analyse non linéaire géométrique des coques. ZIENKIEWICZ, TAYLOR et TOO (1971) se sont intéressés au problème des coques minces pour lesquelles l'élément dégénéré ne donnait pas de bons résultats quand l'épaisseur diminuait (problème de verouillage propre au choix des fonctions de forme de type Serendip pour ce type d'éléments) et proposèrent une intégration réduite. On y trouve également la première étude sur l'intégration explicite dans l'épaisseur de la matrice de rigidité et des quantités qui varient suivant cette direction pour les coques.

Vinrent ensuite les études de CHOI et SCHNOBRICH (1975) dans lesquelles il est présenté un élément dégénéré non conforme qui présente l'intérêt d'une formulation modifiée qui lui assure une convergence plus rapide donc permettant un maillage plus grossier avec moins de degrés de liberté (D.D.L.) mais en contrepartie il peut être mis en défaut sur certaines applications, d'où une certaine prudence quant-à son utilisation.

OÑATE, HINTON et GLOVER (1978) s'intéressent à l'étude comparative des différentes intégrations numériques possibles en présentant l'intégration sélective pour cette élément et en comparant ses performances par rapport aux intégrations uniformes et réduites.

PARISCH (1979) présente le même élément avec fonctions de forme de type Lagrange présentant l'intérêt de supprimer quasiment les problèmes de verrouillages et de pouvoir conserver l'intégration classique.

D'autres articles présentés dans le tableau s'intéressent encore aux choix des fonctions d'interpolation et de l'intégration numérique optimale dont ceux de CELIA et GRAY (1984) puis BATHE et DVORKIN (1986).

Un autre sujet de recherche a été l'étude des problèmes posés par la représentation correcte des phénomènes de cisaillement transverse nécessaire à la modélisation correcte des stratifiés composites et des coques en matériau type sandwich. Les études de Mac NEAL (1978) et de VLACHOUTSIS (1987) ont permis de mieux prendre en compte ce phénomène en définissant des coefficients de cisaillement variables.

VLACHOUTSIS (1987) s'est également intéressé en détail au problème de l'intégration explicite des quantités variant dans l'épaisseur de l'élément (jacobien, matrices d'interpolation...) pour permettre l'écriture explicite de la matrice de rigidité dans le cadre de l'analyse linéaire.

LASHET, JEUSETTE et BECKERS (1989) se sont également intéressés à l'étude de l'intégration explicite, avec quelques différences au niveau du choix de l'ordre de l'approximation retenue. Les éléments correspondants sont intégrés dans le code de calcul des structures SAMCEF.

Dans cette étude le choix s'est porté sur l'élément de coque dégénéré vu sa plus grande simplicité de mise en oeuvre sur le plan mathématique qui permet d'aborder de manière relativement simple l'analyse non linéaire géométrique. De plus le choix s'est porté sur des fonctions de forme de type Serendip vu leur plus grande facilité de mise en oeuvre dans un contexte industriel (les éléments de type Lagrange ayant un noeud central présentent souvent plus d'inconvénients que d'avantages lors de l'intégration dans un code de calcul industriel). Par contre il y a nécessité d'utiliser l'intégration réduite avec ces fonctions de forme et ce pour permettre la modélisation des structures minces, ceci présentant en plus l'intérêt de diminuer les calculs nécessaires pour chaque élément. De plus l'élément est formulé en variables nodales mixtes (déplacements et rotations) et permet de faire chuter le nombre de D.D.L. par élément de 48 à 40 ce qui est un avantage non négligeable en termes de dimension mémoire utile et temps de calcul pour l'étude de grosses structures industrielles.

Historique des travaux sur la formulation de l'élément.

Auteur	Etude	Année
AHMAD S., IRONS B.M. ZIENKIEWICZ O.C.	Elément 3-D dégénéré Serendip Isoparamétrique 8 noeuds linéaire statique	1970
ZIENKIEWICZ O.C., NAYAK G.C.	Idem. Analyse non linéaire	1971
ZIENKIEWICZ O.C. TAYLOR R.L., TOO J.M.	Intégration réduite Intégration explicite	1971
PAWSEY S.F., CLOUGH R.W.	Intégration réduite sélective	1971
CHOI C.K., SCHNOBRICH W.C.	Elément dégénéré isoparam. non conforme	1975
ONATE E., HINTON E., GLOVER N.	Intégrations uniformes, réduites, sélectives	1978
PARISCH H.	Elément 3-D dégénéré Lagrange 9 noeuds Intégration sélective	1979
PANDA S., NATARAJAN R.	Coques composites multicouches, Intégration numérique par couche	1981
CHAO W.C., REDDY J.N.	Coques multicouches Utilisation de l'intégration explicite	1984
CELIA M.A., GRAY W.G.	Elément quadratique, transformation isoparamétrique améliorée	1984
BATHE K.J., DVORKIN E.N.	Interpolation mixte	1986
CELIA M.A., GRAY W.G.	Elément cubique de Lagrange	1986
VLACHOUTSIS S.	Elément dégénéré, intégration explicite, Composite, sandwich, cisaillement corrigé	1987

2 Analyse non linéaire géométrique statique

Dans la plupart des problèmes de mécanique des structures le comportement des structures étudiées devient non linéaire lorsque l'on augmente le chargement extérieur de manière à entraîner des grands déplacements et / ou de grandes rotations et / ou de grandes déformations certains problèmes étant "plus rapidement" non linéaires que d'autres. On parle alors de non linéarité celle ci pouvant être d'origine mécanique (plasticité, visco-plasticité, etc...) ou bien d'origine purement géométrique (changements significatifs de cette dernière par rapport à sa configuration de référence).

Dans cette étude nous allons nous intéresser uniquement à ce deuxième aspect c'est-à-dire aux non linéarités d'ordre géométrique, la théorie associée nécessitant par rapport à la théorie linéaire classique des assertions supplémentaires:

1- On ne confond plus la configuration de repos de la structure (état de référence) avec ses différentes configurations déformées.

2- On prend en compte dans la formulation des relations déplacements / déformations des termes quadratiques en plus des termes linéaires habituels, donc on obtient des relations non linéaires

Ces deux aspects ont pour effet de modifier la rigidité globale de la structure au cours de sa déformation alors qu'en analyse linéaire la rigidité globale de la structure n'est pas liée à l'état de déformation.

On constate en effet que certaines structures voient leur limite de résistance apparaître dans le domaine non-linéaire (souvent par affaissement, cloquage, flambement) c'est-à-dire en dehors du domaine linéaire géométrique où l'hypothèse des petites perturbations est vérifiée. Ce domaine est bien souvent le seul à être utilisé dans les logiciels de calcul des structures ce qui est d'ailleurs souvent suffisant. Mais les résultats peuvent être très écartés de la réalité en utilisant des codes de calcul linéaires si on étudie des structures pour lesquelles on a de fortes non linéarités géométriques.

C'est souvent le cas des structures dont certaines dimensions sont très inférieures aux autres, dans ce cas des déformations modérées entraînent des changements significatifs de la géométrie de la structure. Dans cette catégorie on trouve les poutres élancées, les plaques minces et bien entendu les coques minces qui nous intéressent dans cette étude.

Remarque: Comme annoncé au début de cette étude, l'analyse non linéaire géométrique n'est pas à confondre avec les analyses non linéaires du type plasticité, visco-plasticité, etc... Ces études font appel à des lois de comportement non linéaires ou dépendant du temps, alors qu'ici les lois de comportement restent linéaires, c'est à dire que l'on reste dans le domaine élastique linéaire des matériaux utilisés. En effet ceux ci étant du type métallique

De nombreuses études relativement récentes ont visé à étudier le comportement des structures mettant en oeuvre des coques minces élastiques dans le domaine non linéaire géométrique principalement par la méthode des éléments finis et ceci dans le but de faire 2 types d'analyses:

1- Détermination des charges critiques de flambement et des modes de flambement de structures données.

2- Etude complète du comportement de ces structures dans le domaine non linéaire géométrique (pré-flambement et post-flambement) avec tracé des courbes chargement / déplacement.

Pour faire une analyse non linéaire géométrique il est nécessaire de prévoir les charges critiques d'une structure ainsi que ce qui advient si on continue à augmenter le chargement, cette analyse étant appelée post-flambement. Les outils mis en place dans le cadre des calculs linéaires ne suffisent plus et il est nécessaire pour utiliser la théorie non linéaire de faire appel à de nouveaux outils dans les codes de calcul par éléments finis:

- Prise en compte de déformations complétées par des termes quadratiques.
- Mise en place des différentes matrices conduisant à la matrice tangente élémentaire.
- Calcul des efforts intérieurs à la structure ("réponse de la structure").
- Algorithmes de recherche de valeurs propres et vecteurs propres.
- Algorithmes et stratégies de résolution des problèmes non linéaires.

(Techniques de pilotage des courbes charge / déplacement, méthodes de résolution).

Parmi les travaux les plus importants réalisés ces 20 dernières années sur l'analyse en flambement et post-flambement par éléments finis (dans le cadre de l'étude des coques ou non), on peut citer ceux qui se trouvent sur les pages suivantes.

Historique des travaux sur l'analyse non linéaire géométrique

Auteur	Etude	Année
NAVARATNA D.R., PIAN T.H.H.	Coques de révolution Calcul des charges critiques Eléments courbes 8 D.D.L	1968
BREBBIA C., CONNOR J.	Formulation non linéaire complète Méthode de Newton-Raphson	1969
GALLAGHER R.H.	Analyse non linéaire de plaques et coques	1969
DHATT G.S.	Instabilités des coques minces surbaissées Elément triangulaire courbé à 27 D.D.L.	1970
PIAN T.H., TONG P.	Fonctionnelle de Reissner Comportement pré-flambement seul	1970
DHATT G.S.	Analyse non linéaire des coques minces surbaissées. Elément à 27 D.D.L. Courbes charge / déplacement complètes	1971
YAGMAI S., POPOV E.P.	Théorie générale incrémentale Analyse élastique et plastique Eléments axisymétriques à 8 D.D.L.	1971
DAWE D.J.	Eléments courbes pour l'analyse des coques Analyse non linéaire incrémentale	1971
ZIENKIEWICZ O.C., NAYAK G.C.	Elément 3D dégénéré Serendip 8 noeuds Analyse non linéaire sphères / Cylindres	1971
PIAN T.H., TONG P.	Idem. post-flambement Analyse incrémentale	1972
KIKUCHI F., OHYA H., ANDO Y.	Eléments hybrides à 15 D.D.L. axisym.	1973

Auteur	Etude	Année
BATOZ J.L.	Analyse non linéaire complète des coques semi-profondes. Elément à 27 D.D.L.	1975
RAMM E.	Elément non dégénéré non linéaire	1975
BATHE K.J.	Elément isoparamétrique non dégénéré Analyse non linéaire complète	1975 1976
BATOZ J.L.	Elément de coque à 27 D.D.L. composite Prise en compte du cisaillement Analyse non linéaire complète	1977
HUGUES T.J.R., LIU W.K.	Analyse non linéaire complète Intégration réduite sélective	1981
FEZANS G.	Analyse non linéaire Elément isoparamétrique dégénéré Intégration complète et réduite	1981
GEOFFROY P., BATOZ J.L.	Elément de coque à 27 D.D.L. Cisaillement, formulation améliorée Rotations de la normale	1983
SNELL M.B., MORLEY N.T.	Analyse non linéaire Elément de coque à 36 D.D.L. Intégration numérique réduite Multicouche composite et sandwich	1985
JUN S.M., HONG C.S.	Analyse non linéaire Elément isoparamétrique dégénéré Multicouche composite et sandwich	1987

3 Objectifs de l'étude

L'analyse linéaire critique (flambement d'Euler) et non linéaire complète (Post-Flambage) d'une structure tri-dimensionnelle à l'aide d'éléments finis de coque 3D dégénéré et multicouches (stratifiés, sandwichs) nécessite des maillages en général assez fins pour caractériser correctement les phénomènes rencontrés dans ces problèmes où les modifications de la configuration initiale sont importantes. De plus le nombre de degrés de liberté par élément reste assez élevé malgré l'utilisation d'éléments dégénérés et la suppression d'un D.D.L. par paire de noeuds que nous présentons au chapitre I.

Ceci implique fatalement des temps de calculs élevés dans le cas des structures concrètes et l'utilisation obligatoire d'ordinateurs puissants ou sinon la restriction à des structures simples c'est-à-dire bien souvent non représentatives du problème industriel réel.

Pour pallier à ce problème il faut s'appliquer à réduire le temps de calcul nécessaire en analyse non linéaire et qui est pénalisant pour celle ci au regard de l'analyse linéaire. Les phases de calculs qui demandent le plus de temps en analyse non linéaire sont les suivantes :

1- le calcul des matrices de rigidité (linéaire, tangente, ...) et du vecteur des efforts intérieurs.

2- la résolution itérative du système d'équations non linéaires mis en place.

Notre étude porte principalement sur l'amélioration du premier point en faisant appel à la technique d'intégration explicite de ces matrices de rigidité et vecteurs des efforts intérieurs dans l'épaisseur, ce qui implique une écriture explicite (sous forme de séries entières fonctions de la coordonnée géométrique dans l'épaisseur) des différents opérateurs intervenant dans leur formulation ainsi qu'une homogénéisation des caractéristiques élastiques des multicouches dans l'épaisseur avec ici la prise en compte des phénomènes de cisaillement transverse et du couplage membrane/flexion.

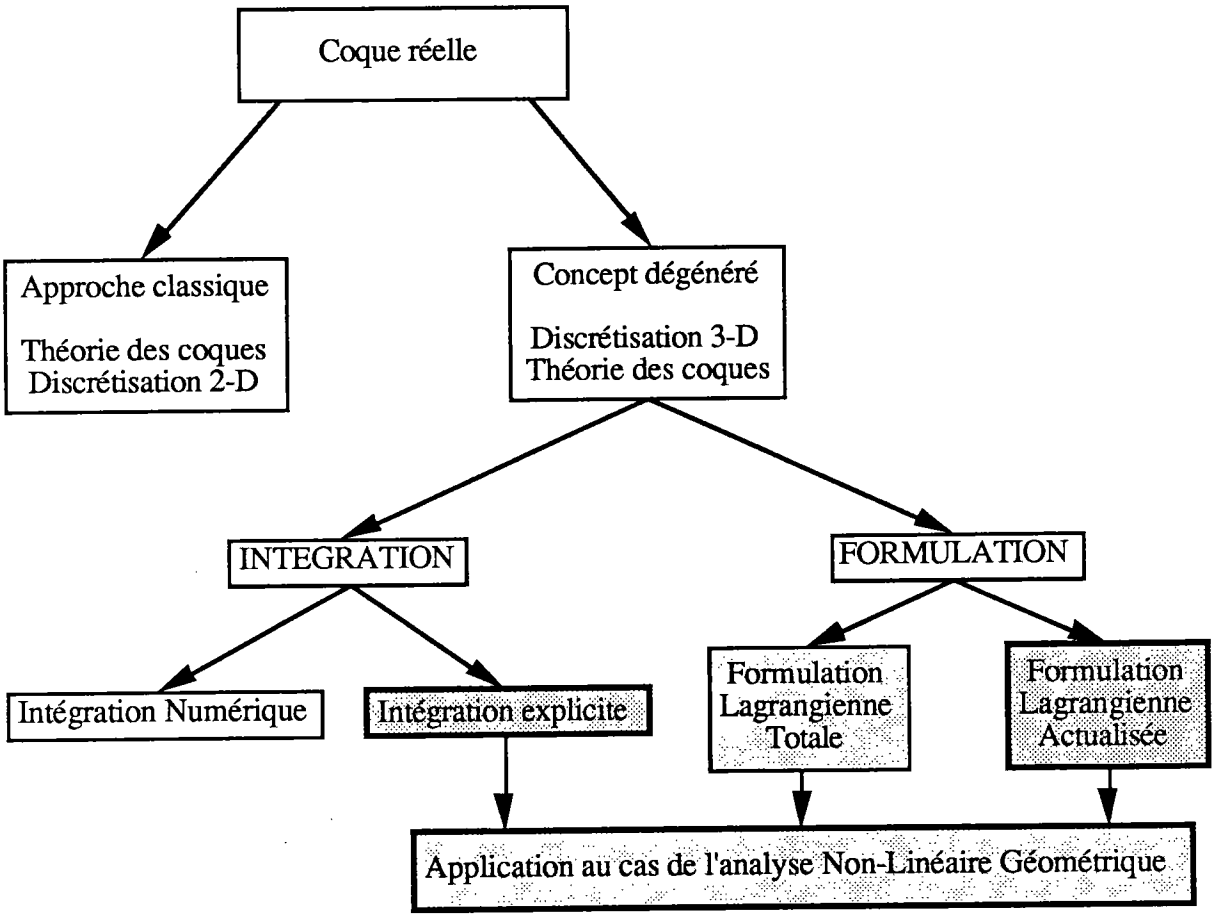
En ce qui concerne le second point, les différentes techniques de résolution des problèmes non linéaires sont présentées, en particulier les plus utilisées aujourd'hui et leurs utilisations possibles en ce qui concerne le pilotage des courbes charge/déplacement sur des problèmes industriels concrets d'analyse en post-flambement.

Un autre problème qui est étudié dans cette étude, concerne la limitation au domaine des rotations modérées. En effet dans le cas des éléments de coque dégénérés qui sont basés sur la théorie assujettie (du fait des variables nodales mixtes du type rotation), nous somme obligés d'effectuer une linéarisation dans la formulation, celle-ci restant valide pour des rotations modérées ($< 20°$ environ). L'extension au domaine des grandes rotations est envisagée ici par l'utilisation de la formulation lagrangienne actualisée (F.L.A.) au lieu de la formulation lagrangienne totale (F.L.T.) limitée aux rotations modérées. En effet, de cette manière, la limitation précédente porte alors sur les rotations incrémentales en F.L.A. au lieu des rotations

charge, permet de vérifier cette condition et donc d'obtenir une précision finale bien meilleure dans le cas de grandes rotations.

En F.L.A. on décompose donc un problème présentant de grandes rotations en une succession de problèmes incrémentaux, avec rotations modérées, et chaque élément fini subit à chaque incrément une déformation de corps rigide suivie d'une petite déformation locale. Les rotations n'ayant pas le caractère additif des vecteurs, on ne peut les cumuler comme on le fait de manière erronnée en F.L.T., et on résoud ce problème en actualisant la géométrie dès que l'on a convergé sur l'incrément courant, l'état obtenu étant un état d'équilibre.

Pour terminer cette introduction, nous précisons sous la forme d'un graphe synthétique les axes de développement les plus notables concernant l'analyse des coques, ainsi que les contributions de cette étude dans le cadre de l'analyse non-linéaire géométrique (en grisé).



PREMIERE PARTIE

THEORIE

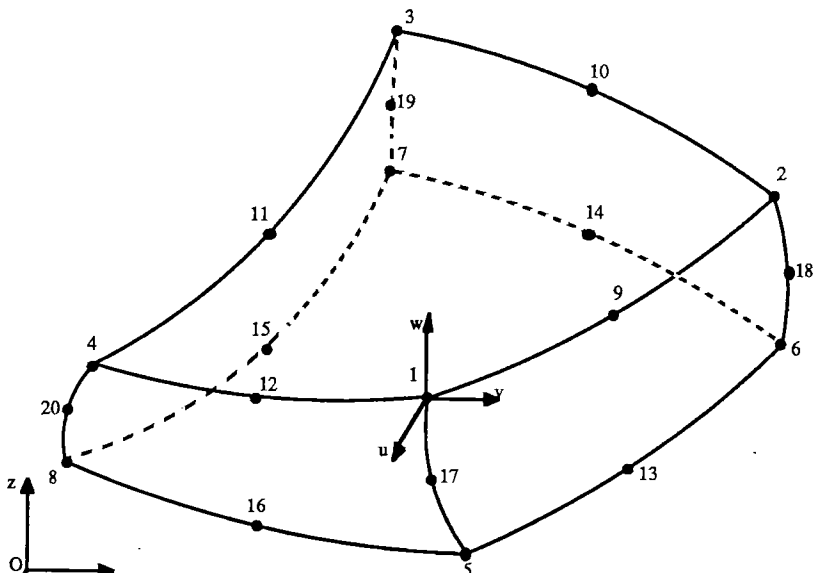
Chapitre I

La formulation de l'élément

I.1 Mise en place de l'élément de coque dégénéré

Pour formuler l'élément de coque dégénéré nous aurons besoin de plusieurs articles parmi ceux présentés en introduction. Tout d'abord ceux traitant des éléments de coques formulés sur des bases géométriques avec les articles importants de SANDERS J.L. (1963), NAGHDI P.M. (1963), KOITER W.T. (1966), MARLOWE M.B. et FLÜGGE W. (1968), BATOZ J.L. (1977) puis ceux traitant des éléments de coque isoparamétriques, avec les articles de AHMAD S. et *al.* (1970), ZIENKIEWICZ O.C. et *al.* (1971), CHOI C.K. et *al.* (1975), BATHE K.J. (1976), VLACHOUTSIS S. (1987), GIRARD R. et OHAYON R. (1987).

A la base, nous partons d'un élément de type hexaèdre isoparamétrique à fonctions de forme de type Serendip quadratiques [cf. ZIENKIEWICZ O.C. (1979) pp. 107-110] à 20 noeuds (cf. Figure I.1) possédant 3 noeuds par côté (1 à chaque sommet plus 1 au milieu de chaque coté) obtenu par extension des principes de calcul du quadrilatère isoparamétrique quadratique à 8 noeuds en dimension 2 [cf. IMBERT J.F. (1984) pp. 215].



La formulation présentée ici, dans le cas des fonctions de forme quadratiques, est généralisable à des fonctions de forme de degré différent (cf. Remarques).

En chaque noeud i, il y a 3 variables nodales, qui sont les déplacements suivant les 3 directions du repère fixe global (x,y,z) de la structure : $<u_i,v_i,w_i>$. Le nombre total de degrés de liberté de cet élément est donc égal à 60.

Pour la formulation de notre élément de coque dégénéré, nous allons simplement appliquer successivement les différentes hypothèses relatives à la formulation des coques dites minces.

Hypothèse N° 1 : Hypothèse des voiles minces. (H1)

Les coques considérées dans cette étude sont dites minces [SANDERS J.L. (1963)], [KOITER W.T. (1966)], l'énoncé de cette hypothèse étant :

En tout point P de la coque l'épaisseur h est petite devant les autres dimensions de la coque et en particulier son rayon de courbure minimum (R) et une dimension longitudinale caractéristique (L) :

$$\frac{h}{R} << 1 \quad et \quad \frac{h}{L} << 1 \tag{I.1}$$

où

$$R = \text{Min} \left(|R_1| , |R_2| \right) \tag{I.2}$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux de la surface moyenne de la coque [NAGHDI P.M. (1963) p. 17].

Valeur maximale du rapport épaisseur / rayon de courbure

Comme valeur maximum du rapport h/R on fixera la valeur suivante qui est la valeur en général retenue par les différents auteurs pour caractériser les coques dites "minces" :

$$\frac{h}{R} < \frac{1}{20} \tag{I.3}$$

BATOZ J.L. (1977) propose la valeur maximale de 1/20 et une valeur dite "courante" égale à 1/100 qu'il estime être une limite réaliste pour la plus grande majorité des cas de calcul.

MARLOWE M.B. et FLÜGGE W. (1968) retiennent la même valeur de 1/20 pour les coques minces ainsi que la valeur de 1/100 pour les coques dites "très minces".

Valeur maximale du rapport épaisseur / longueur

La valeur maximale en général retenue pour le rapport h/L dans les différentes études traitant des plaques et des coques composites est la suivante :

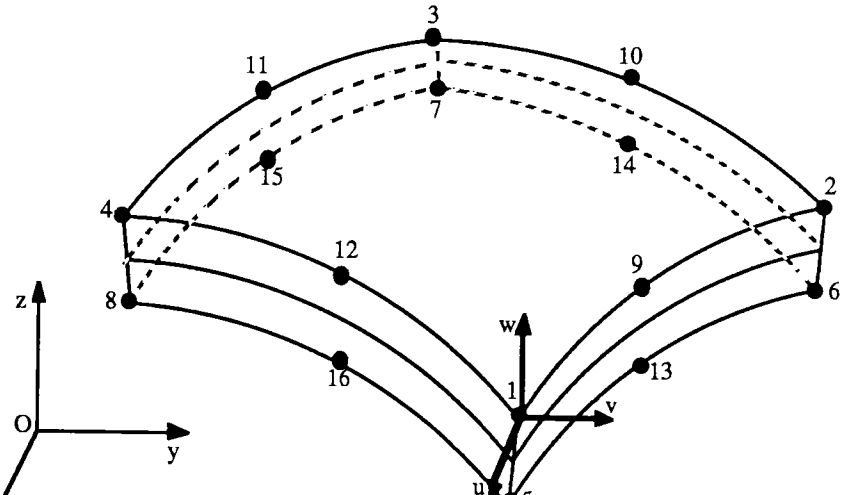
Cette valeur permet non seulement de pouvoir encore parler de plaques et coques au sens de leur hypothèses géométriques usuelles [KOITER W.T. (1966)] mais aussi pour que l'approximation du cisaillement transverse moyen dans l'épaisseur reste un modèle correct même dans le cadre des matériaux composites pour lesquels ce cisaillement est important [GEIER B., ROHWER K. (1989) pp. 403-427]. Ces auteurs montrent que l'erreur commise sur les déplacements peut, si cette condition n'est pas respectée, dépasser 5% pour de nombreux exemples de structures testées. Il est à noter que cette valeur ne correspond plus au domaine des coques minces, mais déjà à celui des coques modérément épaisses, ce qui est un gage de précision correcte lorsque l'on sortira légèrement du domaine des coques minces, qui est le seul prévu dans le cadre des hypothèses initiales de cette étude.

Au delà de cette valeur limite quand $h/L > 1/10$, on ne peut plus utiliser les hypothèses classiques des plaques et coques, et il devient nécessaire d'utiliser un modèle tri-dimensionnel en particulier pour représenter correctement les phénomènes de cisaillement transverse ainsi que la contrainte normale S'_{zz} qui est négligée dans le cas des coques (cf. Hypothèse H2).

Dans ces conditions, on peut supposer, vue l'épaisseur faible par rapport aux autres dimensions, une variation pratiquement linéaire des déplacements selon l'épaisseur de l'élément, ce qui permet de remplacer les fonctions de forme quadratiques pour l'interpolation dans l'épaisseur par des fonctions de forme linéaires [cf. AHMAD S., ZIENKIEWICZ O.C., IRONS B.M. (1970) pp. 419-451]. Ceci permet de supprimer 4 noeuds intermédiaires et conduit à la définition d'un élément 3D à 16 noeuds et 48 degrés de liberté (cf. Figure I.2), l'interpolation sur la surface moyenne de l'élément restant quadratique [GIRARD R., OHAYON R. (1987)].

Cette simplification a un autre avantage puisque l'on supprime les noeuds proches les uns des autres dans l'épaisseur, par rapport aux autres noeuds qui sont plus éloignés. On a ainsi un meilleur conditionnement des matrices de rigidité, et donc du système à résoudre car ceci aurait une influence néfaste sur la précision des résultats [IMBERT J.F. (1984) p.249].

Nous avons donc à ce stade une description géométrique de l'élément ne faisant intervenir que les coordonnées des noeuds sur ses 2 faces : inférieure et supérieure (cf. Figure I.2).



Hypothèse N° 2 : On néglige l'énergie de déformation due à : $u_{zz} = S'_{zz}\,\varepsilon'_{zz}$ (H2).

On part en fait de l'hypothèse concernant les contraintes de Cauchy normales dans la théorie des coques minces [cf. WHITNEY J., PAGANO J. (1970)] et on l'étend aux contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce (P.K.2) du fait de l'équivalence (II.48-49) :

La contrainte normale suivant l'épaisseur de la coque est négligeable en moyenne quadratique suivant l'épaisseur devant les 2 autres contraintes normales dans le plan tangent de la coque.

$$\sigma_{\text{local } zz} << \sigma_{\text{local } xx} \;\; et \;\; \sigma_{\text{local } zz} << \sigma_{\text{local } yy} \tag{I.5}$$

ou encore :

$$S'_{zz} << S'_{xx} \;\; et \;\; S'_{zz} << S'_{yy} \tag{I.6}$$

En appelant $[\sigma_{\text{local}}]$ le tenseur des contraintes de Cauchy en repère local et $[S']$ le tenseur des contraintes P.K.2 exprimé en repère local (cf. paragraphe II.1.2).

On peut donc négliger dans l'énergie de déformation les termes dépendant de S'_{zz} :

$$S'_{zz}\,\varepsilon'_{zz} \approx 0 \tag{I.7}$$

Remarque : L'indice $'$ signale des quantités exprimées dans le repère local tangent de la coque (cf. Figure I.4), la direction z' étant celle de la normale à la coque en un point courant M donné (vecteur directeur $\overrightarrow{V_3}$).

L'hypothèse H2 permet de ne pas prendre en compte de degré de liberté relatif à l'allongement/raccourcissement d'une fibre suivant $\overrightarrow{V_3}$ ce qui nous oblige à définir des variables en repère local (cf. Chap. I.3).

Ces nouvelles variables nodales apparaissent de manière évidente puisque l'on va substituer à 2 noeuds se correspondant sur les faces inférieures et supérieures et englobant donc 2 x 3 = 6 variables nodales, 1 seul noeud devant donc avoir 6 – 1 = 5 variables nodales.

On substitue aux variables nodales $<u_i,v_i,w_i>_{inf}$ et $<u_i,v_i,w_i>_{sup}$ de l'élément précédent les nouvelles variables nodales uniquement définies en des noeuds situés dans le plan moyen, ces variables ne sont plus seulement du type déplacement : on a en plus des 3 déplacements exprimés en repère global structure les 2 rotations (α_i,β_i) suivant les 2 directions du plan tangent local $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ ce qui nous assure bien de ne pas prendre en compte de déplacements suivant $\overrightarrow{V_3}$. Ceci est présenté en détail par AHMAD S. et *al.* dans l'étude de l'élément de coque dégénéré (1970).

On définit un élément de coque à 8 noeuds qui est 2D (bidimensionnel) du fait que toute la schématisation de l'élément se fait maintenant sur la surface moyenne de la coque (cf. Figure I.3), mais on parle aussi parfois d'élément "3D dégénéré type coque" car la formulation de départ est tridimensionelle et c'est grâce à l'adjonction des hypothèses des coques que l'on aboutit à un modèle bidimensionel.

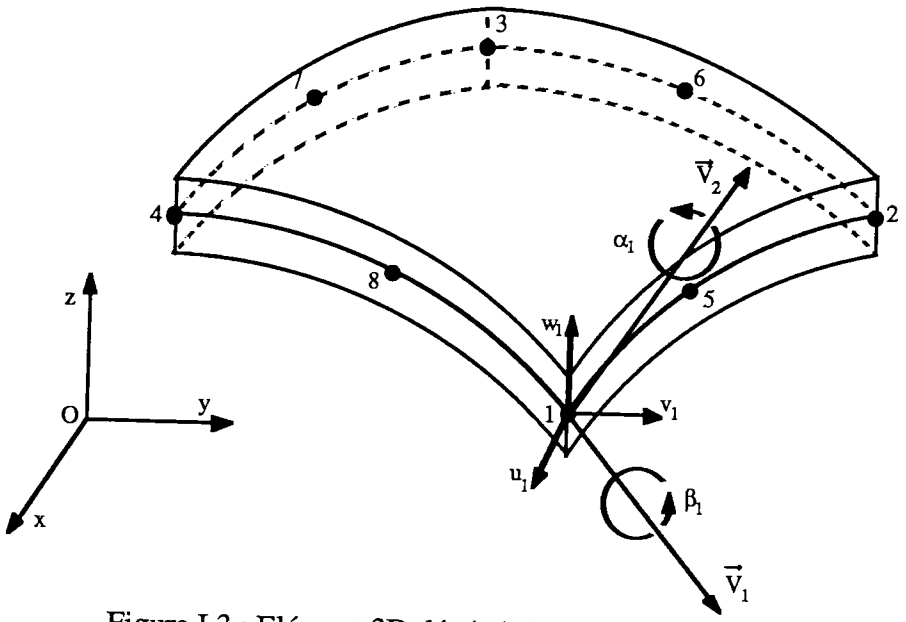


Figure I.3 : Elément 3D dégénéré à 8 noeuds et 40 D.D.L.

La description de la déformation de la coque implique donc la connaissance en chaque noeud i des quantités cinématiques suivantes qui sont au nombre de 3 déplacements et 2 rotations définis sur la surface moyenne de la coque :

- 1. Les déplacements u_i,v_i,w_i en repère global x,y,z ($\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$).
- 2. Les rotations α_i,β_i en repère local x',y',z' ($\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$).

Le vecteur des déplacements nodaux au noeud i est donc égal à :

$$\{d_n\}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \qquad \text{(I.8)}$$

Dans le cas de l'élément de coque quadratique dégénéré à 8 noeuds retenu dans cette étude, on aura au total 40 degrés de liberté (5x8) au lieu des 48 (6x8) nécessaires en formulation déplacement sur les 2 surfaces extrêmes.

Remarques :

1– Dans le cas général, l'élément de coque développé n'a pas nécessairement 8 noeuds comme il a été retenu par simple commodité dans les développements précédents. l'élément peut avoir n noeuds :

– $n = 4$ fonctions de forme linéaires dans le plan de l'élément.
1 noeud à chaque coin de l'élément.

– $n = 8$ fonctions de forme quadratiques dans le plan de l'élément.
1 noeud à chaque coin de l'élément + 1 noeud intermédiaire.

– $n = 12$ fonctions de forme cubiques dans le plan de l'élément.
1 noeud à chaque coin de l'élément + 2 noeuds intermédiaires.

Dans tous ces cas, l'interpolation dans l'épaisseur reste linéaire.

Le nombre de degrés de liberté de l'élément ainsi défini est égal à $5n$, et par la suite, nous traiterons le cas général de l'élément à n noeuds sans poser $n = 8$, bien que ce soit l'interpolation quadratique qui ai été retenue dans ces développements et au niveau des applications numériques.

Divers auteurs dont Mac NEAL R.H. (1978), CELIA M.A.et GRAY W.G. (1984) se sont intéressés au choix de n, et les conclusions que l'on peut faire sont que les fonctions de forme de type Serendip linéaires (n=4) sont quasiment inutilisées et donnent des résultats souvent médiocres en nécessitant un maillage fin alors que les fonctions de forme cubiques (n=12) améliorent légèrement la précision par rapport au cas quadratique mais donnent un nombre de degrés de liberté qui est tout de suite plus élevé, ce qui globalement s'avère pénalisant. Ceci justifie le choix par défaut des fonctions de forme quadratiques (n=8) [AHMAD S. et al. (1970)] et [FEZANS G. (1981)].

Les fonctions de forme utilisées sur les quadrangles sont du type Serendip [ZIENKIEWICZ O.C. (1979) pp. 107-110] et on se reportera à l'Annexe A6 pour leur expression.

2– Il est aussi possible de traiter, avec cette famille d'éléments, le cas des éléments triangles de type tridimensionnel dégénéré simplement par dégénérescence de l'élément quadrangle en triangle et en prenant les valeurs suivantes de n ainsi que les fonctions de forme adaptées aux triangles [VEUBEKE B.F. (1965)], [ARGYRIS J.H. (1968)].

– $n = 3$ fonctions de forme linéaires dans le plan de l'élément.

– $n = 6$ fonctions de forme quadratiques dans le plan de l'élément.

– $n = 10$ fonctions de forme cubiques dans le plan de l'élément.

Pour l'expression des fonctions de forme utilisées sur les triangles on se reportera à l'annexe A6.

Sur la figure I.4 nous présentons les différents repères définis au niveau de l'élément et qui seront utilisés dans la suite de cette étude :

– Repère global structure : $x,y,z\ (\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k}\ )$

– Repère local au point M : $x',y',z'\ (\overrightarrow{V_1}\ ,\overrightarrow{V_2}\ ,\overrightarrow{V_3}\ )$

– Repère d'orthotropie de la couche k : $(\overrightarrow{e_{1k}}\ ,\overrightarrow{e_{2k}}\ ,\overrightarrow{e_{3k}}\ )$

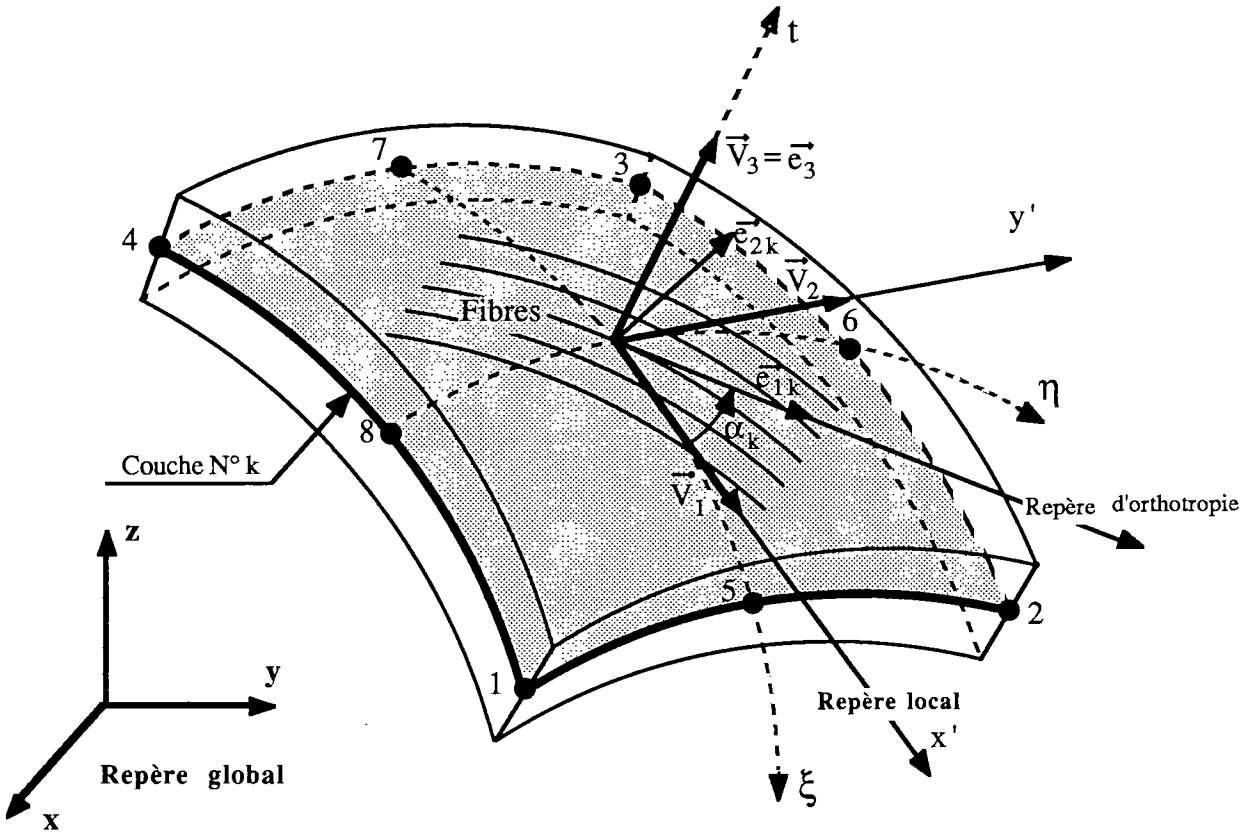


Figure I.4 : Passage des axes d'orthotropie aux axes locaux de l'élément.

I.2 La géométrie de l'élément

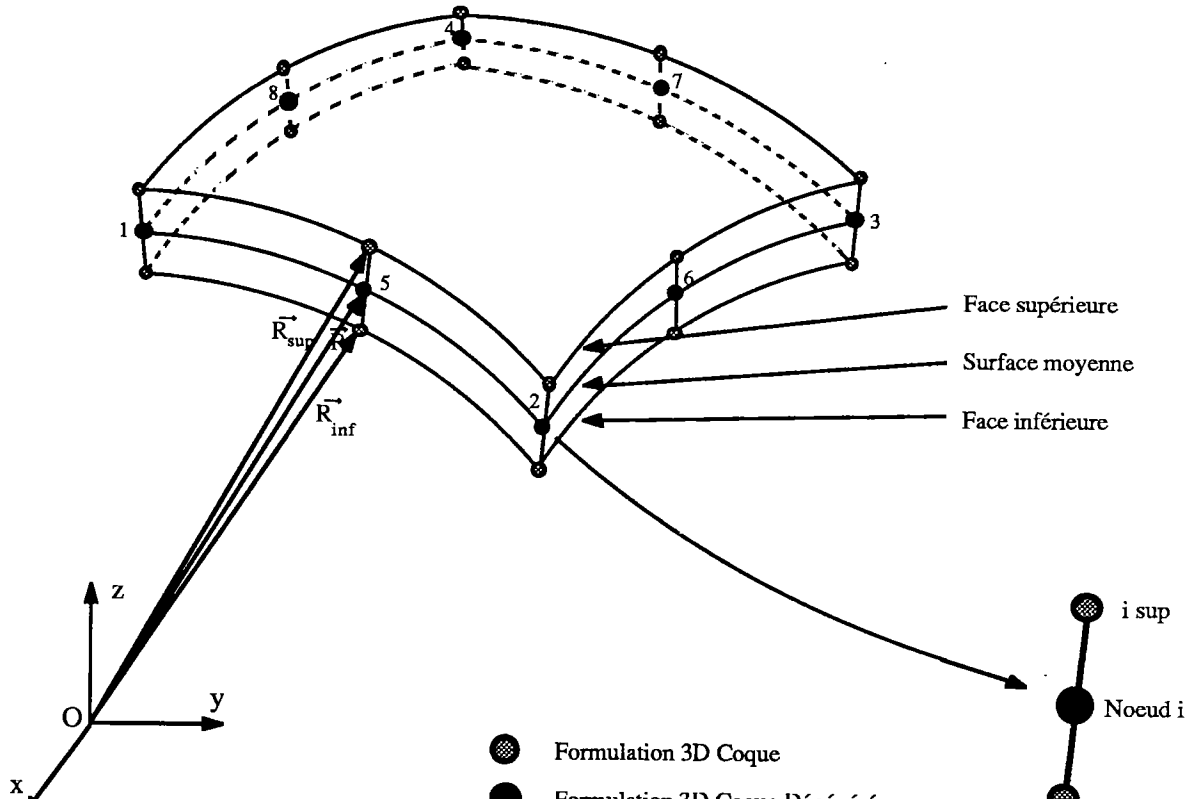
I.2.1 L'interpolation géométrique

On définit la géométrie de l'élément par l'intermédiaire des coordonnées du vecteur position d'un point courant M exprimé dans le repère global $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ces coordonnées sont définies dans la configuration de référence, qui peut être la configuration de repos de la structure (notée Ω^0 au chapitre II) ou toute autre configuration déformée (Ω^1) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{R} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{I.9}$$

Dans les développements du chapitre I, nous ne ferons pas apparaître les indices relatifs à la configuration de référence qui sont mis en place au chapitre II, et ce, de manière à ne pas compliquer les développements. L'influence de la configuration de référence est en effet ici sans conséquence sur les résultats.

Nous devons définir l'écriture de l'interpolation géométrique nous permettant de passer des coordonnées en repère global d'un point courant relatif à la schématisation de l'élément 3D à 16 noeuds (Figure I.2) aux coordonnées en repère global d'un point courant relatif à la schématisation de l'élément 3D dégénéré (Figure I.3) de coordonnées intrinsèques (ξ,η,t).



Remarque : Nous nous intéressons principalement dans cette étude au cas de l'élément de coque à 8 noeuds sur la face supérieure et 8 noeuds sur la face inférieure c'est à dire 8 noeuds dans le plan moyen en formulation dégénérée (fonctions de forme quadratiques $n = 8$) mais cette formulation générale peut tout aussi bien s'appliquer comme nous l'avons vu à des éléments à 4 noeuds dans le plan moyen (fonctions de forme linéaires $n = 4$) et à 12 noeuds dans le plan moyen (fonctions de forme cubiques $n = 12$) ainsi qu'aux éléments triangles correspondants.

I.2.1.1 Elément de coque à 16 noeuds

L'interpolation retenue sur notre élément est isoparamétrique. Cette interpolation est de l'ordre des fonctions de forme $N_i(\xi,\eta)$ dans le plan moyen de la coque (elle peut être linéaire, quadratique ou cubique) et linéaire au travers de l'épaisseur comme nous l'avons formulé. Elle peut être définie en utilisant l'interpolation de AHMAD S. et al. (1970) modifiée avec (I.16) sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{c} \right) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{sup} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{c} \right) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{inf} \qquad \text{(I.10)}$$

Il y a n noeuds indicés i de coordonnées $<x_i,y_i,z_i>$ et les indices *sup* et *inf* signifient que les noeuds considérés appartiennent à la face supérieure ou inférieure.

Les fonctions de forme sont à 2 variables (ξ,η), ce sont les 2 coordonnées curvilignes réduites de la surface moyenne ou surface de référence de l'élément (cf. Figure I.7), elles sont notées : $N_i(\xi,\eta)$.

Ces fonctions de forme sont du type Serendip pour les quadrangles, quadratiques dans le cas de l'élément à 8 noeuds dans le plan moyen (cf. annexe A6).

Elles sont définies pour les valeurs de ξ et η suivantes :

$$-1 \leq \xi \leq +1 \qquad \text{(I.11.a)}$$

$$-1 \leq \eta \leq +1 \qquad \text{(I.11.b)}$$

De plus elles vérifient : $$N_i(\xi_j,\eta_j) = \delta_{ij} \qquad \text{(I.12)}$$

Où δ_{ij} est le symbole de Krönecker.

C'est-à-dire que la fonction de forme relative au noeud i est égale à 1 en ce noeud et s'annule aux autres noeuds.

t est la variable dans l'épaisseur de l'élément avec les limites des 2 faces (*inf* et *sup*) :

$$-\frac{c}{2} \leq t \leq +\frac{c}{2} \tag{I.13}$$

La constante c est homogène à une longueur et voisine de l'épaisseur de la coque (elle lui est égale dans le cas d'une épaisseur constante). Elle est définie par [cf. VLACHOUTSIS S. (1987) p. 54] :

$$c = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi_0,\eta_0)\, h_i \tag{I.14}$$

Où le point (ξ_0,η_0) appartient à la surface de référence et est donné, par exemple on impose ($\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$) et l'épaisseur de la coque au noeud i est égale à h_i [cf. AHMAD S. et al. (1970)].

Si l'épaisseur est constante on écrit alors :

$$c = h \tag{I.15}$$

On peut comme pour ξ et η normaliser t à 1, cette formulation étant retenue dans les études de AHMAD S. et *al.* (1970) et JUN C.S., HONG S.M. (1987). On utilise la variable :

$$\zeta = \frac{2t}{c} \tag{I.16}$$

On vérifie bien que la définition de l'interpolation géométrique nous donne des fonctions de forme linéaires aux travers de l'épaisseur de l'élément définies par :

$$\frac{1}{2} + \frac{t}{c} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} - \frac{t}{c} \tag{I.17.a-b}$$

Ces fonctions de forme sont donc linéaires en t et ont pour expression :

$$\frac{1+\zeta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\zeta}{2} \tag{I.18.a-b}$$

I.2.1.2 Elément de coque dégénéré à 8 noeuds

On part de l'expression de l'interpolation géométrique relative à l'élément de coque à 16 noeuds et on ramène les différentes quantités sur la surface moyenne de manière à faire l'analogie avec l'élément dégénéré à 8 noeuds.

L'interpolation géométrique peut s'écrire en utilisant (I.10) :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\,\frac{1}{2}\left[\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{sup} + \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{inf}\right] + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\,\frac{t}{c}\left[\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{sup} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{inf}\right] \qquad \text{(I.19)}$$

L'expression précédente peut alors se simplifier car on remarque que :

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{s.m.} = \frac{1}{2}\left[\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{sup} + \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{inf}\right] \qquad \text{(I.20)}$$

L'indice *s.m.* signifie que l'on se place sur la surface moyenne. Par la suite, cet indice sera omis pour simplifier l'écriture de toutes les quantités définies dans le plan moyen.

L'autre opération se simplifie en étudiant le schéma suivant où apparaissent les noeuds supérieurs et inférieurs de la schématisation de départ, et le noeud correspondant dans le plan moyen :

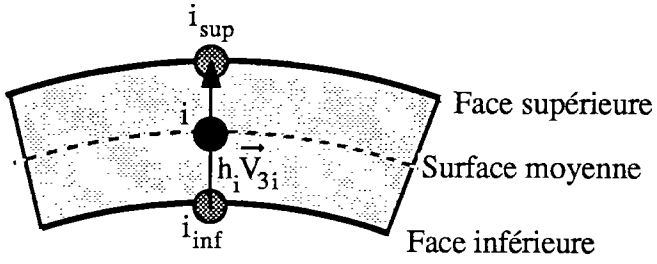


Figure I.6 : Schématisation du vecteur normal à la surface moyenne.

Nous avons l'écriture suivante :

$$h_i\,\overrightarrow{V_{3i}} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{sup} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{inf} \qquad \text{(I.21)}$$

En appelant $\overrightarrow{V_{3i}}$ le vecteur normal à la surface moyenne au noeud i :

$$\overrightarrow{V_{3i}} = \frac{\dfrac{\partial \overrightarrow{R_{0i}}}{\partial \xi} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{R_{0i}}}{\partial \eta}}{\left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{R_{0i}}}{\partial \xi} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{R_{0i}}}{\partial \eta} \right\|} = \overrightarrow{V_{1i}} \wedge \overrightarrow{V_{2i}} \tag{I.22}$$

$\overrightarrow{R_{0i}}$ est le vecteur position du noeud i en repère global (I.9).

Finalement, on peut écrire l'interpolation géométrique sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\ t \left(\frac{h_i}{c}\right) \begin{Bmatrix} V_{3xi} \\ V_{3yi} \\ V_{3zi} \end{Bmatrix} \tag{I.23}$$

le vecteur normal à la surface moyenne au noeud i s'écrivant dans le repère global :

$$\overrightarrow{V_{3i}} = \begin{Bmatrix} V_{3xi} \\ V_{3yi} \\ V_{3zi} \end{Bmatrix} \tag{I.24}$$

Remarque : La schématisation précédente nécessitait la donnée des coordonnées des noeuds des faces supérieures et inférieures, alors qu'en formulation dégénérée il est nécessaire de donner les coordonnées des n noeuds du plan moyen ainsi que les vecteurs épaisseur $h_i \overrightarrow{V_{3i}}$ en chaque noeud. En pratique l'utilisateur devra rentrer les coordonnées des n noeuds et les épaisseurs en ces noeuds h_i, le vecteur normal $\overrightarrow{V_{3i}}$ étant calculé, comme nous le verrons par la suite.

I.2.2 Ecriture matricielle

La définition de l'interpolation géométrique (I.23) peut se faire sous forme purement matricielle en écrivant :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\Phi]\ \{C\} \tag{I.25}$$

Où $[\Phi]$ est la matrice d'interpolation géométrique obtenue par juxtaposition en ligne des matrices $[\Phi^i]$:

Chacune des matrices $[\Phi^i]$ dépend des n fonctions de forme et de la variable dans l'épaisseur t. Elles sont obtenues par identification avec l'expression (I.23) :

$$[\Phi^i] = N_i(\xi,\eta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t\left(\frac{h_i}{c}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t\left(\frac{h_i}{c}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t\left(\frac{h_i}{c}\right) \end{bmatrix} \tag{I.27}$$

Le vecteur colonne $\{C\}$ définissant la géométrie de l'élément étant égal à :

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \{C_1\} \\ \{C_2\} \\ . \\ . \\ \{C_n\} \end{Bmatrix}_{(6n\text{x}1)} \qquad \text{et} \qquad \{C_i\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ V_{3xi} \\ V_{3yi} \\ V_{3zi} \end{Bmatrix} \tag{I.28}$$

Il est important de remarquer à ce niveau que comme nous l'avons vu précédemment les données géométriques rentrées par l'utilisateur lors de la création de la structure sont les coordonnées des noeuds (x_i,y_i,z_i) et les épaisseurs nodales (h_i) , les composantes du vecteur $\overrightarrow{V_{3i}}$ du repère local étant calculées par l'intermédiaire des relations (I.30-32)et (I.33) établies au paragraphe I.3.

I.3 Définition du repère local en un point du plan moyen

En chaque point $M(\xi,\eta,0)$ de la surface moyenne de l'élément (t = 0) on trouve l'interpolation géométrique (I.23) qui s'écrit sous la forme simplifiée :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \tag{I.29}$$

On définit donc en ce point $M(\xi,\eta,0)$ ou encore $M(x,y,z)$ de la surface moyenne les vecteurs unitaires tangents $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ à cette surface suivant les lignes des coordonnées intrinsèques curvilignes ξ et η.

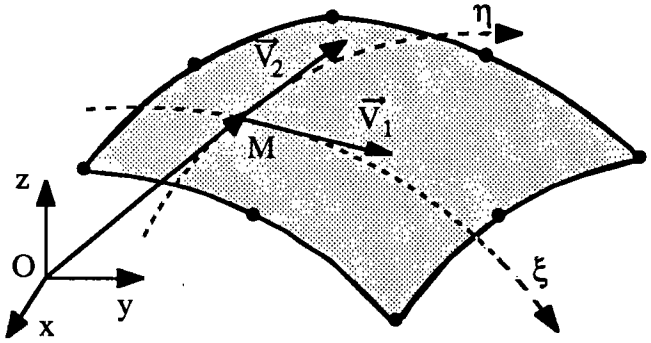


Figure I.7 : Repère local en *M*.

Les vecteurs définissant le repère local du plan tangent à la surface moyenne de la coque sont définis comme les dérivées du vecteur position par rapport à ξ et η que l'on norme à 1 :

$$\overrightarrow{V_1} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{\partial R_0}}{\partial \xi}}{\left|\left|\dfrac{\overrightarrow{\partial R_0}}{\partial \xi}\right|\right|} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{||\overrightarrow{v_1}||} \qquad \overrightarrow{V_2} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{\partial R_0}}{\partial \eta}}{\left|\left|\dfrac{\overrightarrow{\partial R_0}}{\partial \eta}\right|\right|} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{||\overrightarrow{v_2}||} \tag{I.30.a-b}$$

En définissant le vecteur $\overrightarrow{R_0}$: $\overrightarrow{R_0} = \overrightarrow{OM} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ (I.31)

Avec l'écriture de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ avant normalisation en utilisant la relation (I.29) pour t = 0.

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{\overrightarrow{\partial R_0}}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} x_{,\xi} \\ y_{,\xi} \\ z_{,\xi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_{i,\xi}(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \tag{I.32.a}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{\overrightarrow{\partial R_0}}{\partial \eta} = \begin{Bmatrix} x_{,\eta} \\ y_{,\eta} \\ z_{,\eta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_{i,\eta}(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \tag{I.32.b}$$

La définition du 3ème vecteur du repère local est alors facile. Il correspond au vecteur normal à la surface moyenne définie précédemment et il complète le trièdre :

$$\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} \tag{I.33}$$

Les composantes en repère global des 3 vecteurs de base du repère local en un noeud i sont notées :

$$\overrightarrow{V_{ki}} = \begin{Bmatrix} V_{kxi} \\ V_{kyi} \\ V_{kzi} \end{Bmatrix} \qquad k = 1, 2, 3 \tag{I.34}$$

Remarques :

1– Dans un but de simplification au niveau du code de calcul, on définira une direction auxiliaire $\overrightarrow{D}$ qui nous arrange telle que sa projection sur le plan $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ nous définisse une direction correspondant à un nouveau vecteur $\overrightarrow{V'_1}$ qui servira à construire un nouveau repère $(\overrightarrow{V'_1}, \overrightarrow{V'_2}, \overrightarrow{V'_3})$ pour lequel $\overrightarrow{V'_3} = \overrightarrow{V_3}$.

On pourra par exemple choisir le vecteur $\overrightarrow{D}$ tel qu'il soit confondu avec la direction des fibres de la première couche d'un stratifié composite ou par exemple confondu avec la génératrice dans le cas d'une structure cylindrique ou encore, confondu avec une direction cartésienne (x ou autre) de manière à "ordonner" les différents repères locaux.

Le vecteur $\overrightarrow{V'_3} = \overrightarrow{V_3}$ est obtenu par la technique précédente, après quoi, on peut calculer $\overrightarrow{v'_2}$ sous réserve bien entendu d'avoir donné un vecteur $\overrightarrow{D}$ qui ne soit pas parallèle à $\overrightarrow{V_3}$:

$$\overrightarrow{v'_2} = \overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{D} \tag{I.35}$$

Puis on le normalise :

$$\overrightarrow{V'_2} = \frac{\overrightarrow{v'_2}}{\|\overrightarrow{v'_2}\|} \tag{I.36}$$

Enfin on définit $\overrightarrow{V'_1}$ pour compléter le trièdre :

$$\overrightarrow{V'_1} = \overrightarrow{V'_2} \wedge \overrightarrow{V'_3} \tag{I.37}$$

Néanmoins, dans tous les développements de cette étude, on oubliera ce fait et on considérera que l'on se place en repère local élément c'est à dire $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ pour ne pas compliquer inutilement ces développements, la formulation n'en étant pas affectée.

2– Il est également possible de formuler différemment le vecteur normal à la surface moyenne $\overrightarrow{V_3}$ au point $M(\xi,\eta)$ en l'exprimant sous forme d'interpolation des vecteurs normaux à la surface moyenne $\overrightarrow{V_{3i}}$ aux noeuds i [COOK R.D. (1981)] :

$$\overrightarrow{V_3} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\ \overrightarrow{V_{3i}} \tag{I.38}$$

Cette formulation apporte il est vrai une plus grande simplicité dans les calculs à effectuer en supprimant les opérations (I.30) et (I.32-33) mais elle présente l'inconvénient d'être géométriquement inexacte dans la mesure où le vecteur $\overrightarrow{V_3}$ ainsi défini n'est a priori pas normal à la surface moyenne de la coque. Il existe donc une différence entre les 2 vecteurs $\overrightarrow{V_3}$ définis comme l'a montré COOK, la méthode "exacte" présentée ici étant plus satisfaisante.

I.4 La cinématique de l'élément

I.4.1 Définition du champ de déplacements

Hypothèse N° 3 : Hypothèse de Mindlin. (H3)

Cette hypothèse est encore appelée hypothèse de Love-Kirchhoff Généralisée.

De manière générale le déplacement d'un point P appartenant à une droite normale à la surface moyenne de la coque (fibre normale) se décompose en 3 termes :

Translation + Rotation + Déformation pure

L'hypothèse de Mindlin [MINDLIN R.D. (1951)] consiste à dire que le terme de déformation pure est très petit par rapport aux 2 autres et que une fibre normale à la surface moyenne ne reste pas nécessairement normale à celle ci au cours de la déformation, cette hypothèse se trouvant en général sous la forme :

Toute droite (ou fibre) normale à la surface moyenne de la coque reste droite après déformation, mais ne reste pas forcément normale à la surface moyenne, de plus la longueur d'une fibre varie peu au cours de la déformation.

Cette hypothèse, appliquée initialement au cas des plaques, est étendue au cas des coques [cf. MINDLIN R.D. (1951) pp. 31-38].

Remarque : L'hypothèse de Love-Kirchhoff est elle plus restrictive puisqu'elle impose à la normale à la surface moyenne avant déformation de rester normale à la surface moyenne déformée. On montre que cette hypothèse cinématique revient à ne pas prendre en compte le cisaillement transverse dans la coque et à poser : $\gamma'_{xz} = \gamma'_{yz} = 0$ alors qu'avec l'hypothèse de Mindlin notre élément de coque prend bien en compte ce phénomène, les déformations de cisaillement transverse (γ'_{xz}, γ'_{yz}) étant constantes dans l'épaisseur et les contraintes de cisaillement transverse (τ'_{xz}, τ'_{yz}) constantes par couche dans le cas d'un multicouche. L'hypothèse de Mindlin est aussi parfois appelée hypothèse de Mindlin-Reissner du fait des travaux similaires des deux auteurs [cf. REISSNER E. (1945) pp. 69-77].

I.4.2 L'interpolation cinématique

Ces développements, envisagés dans le cadre de la formulation lagrangienne totale, sont néanmoins particularisés à la formulation lagrangienne actualisée si cela est nécessaire.

Etant donné le fait que nous avons retenu une formulation isoparamétrique, le champ de déplacements est défini de la même façon que la géométrie (I.23) en partant de la formulation relative à l'élément non dégénéré, les fonctions de forme étant inchangées.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{c} \right) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{sup} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{c} \right) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{inf} \qquad \text{(I.40)}$$

En regroupant les termes indépendants de la variable dans l'épaisseur t on obtient :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \frac{t}{c} \left(\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{sup} - \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{inf} \right) \qquad \text{(I.41)}$$

Le vecteur $<u_i,v_i,w_i>$ correspondant au déplacement du noeud i de la surface moyenne de l'élément.

Il n'est pas possible de donner directement l'expression de la différence des déplacements des noeuds inférieurs et supérieurs se correspondant en repère global. Par contre en repère local on peut en étudiant la figure suivante donner l'expression de ce terme dans le cadre des rotations modérées.

Hypothèse N° 4 : Hypothèse des rotations modérées. (H4)

Cette hypothèse est encore appelée hypothèse des rotations modérément petites :

Les rotations nodales α_i et β_i (i = 1, n) autour des vecteurs tangents au plan moyen ($\overrightarrow{V_{1i}}$ et $\overrightarrow{V_{2i}}$) restent modérées au cours de la déformation de la structure.

Les rotations modérées sont des rotations dont les carrés sont négligeables devant 1 [MARLOWE M.B., FLÜGGE W. (1968) pp. 67-68] :

$$\frac{\alpha_i^2}{2} << 1 \quad \text{et} \quad \frac{\beta_i^2}{2} << 1 \qquad \text{(I.42.a-b)}$$

Ceci est correct dans le cadre de la formulation lagrangienne totale mais dans le cadre de la formulation lagrangienne actualisée (cf. Chapitre II), il convient de considérer cette hypothèse

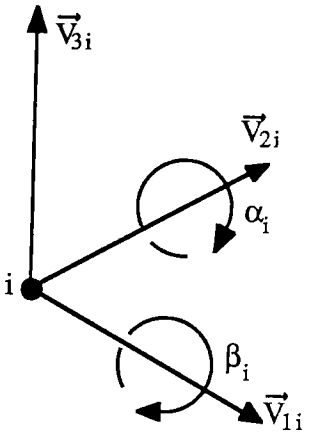


Figure I.8 : Rotations en *i*.

Les rotations autour des 2 vecteurs de base du plan tangent local au noeud *i* sont donc considérées comme suffisamment petites de manière à conserver l'expression linéarisée au premier ordre des fonctions trigonométriques suivantes :

$$\cos \alpha_i \approx 1 \qquad \sin \alpha_i \approx \alpha_i$$
$$\cos \beta_i \approx 1 \qquad \sin \beta_i \approx \beta_i \qquad \text{(I.43.a-b)}$$

Remarque : Si on limite le domaine des rotations modérées (ou modérément petites) à un angle de rotation maximum α_i ou β_i égal à 20 degrés, on commet au plus une erreur de 6% sur la valeur du cosinus et de 2% sur celle du sinus. C'est ce domaine qui est retenu par de nombreux auteurs comme représentatif des rotations modérées : MARLOWE M.B. et FLÜGGE W. (1968) pp. 67-68, WEMPNER G. (1969) pp. 122-125, BATOZ J.L. (1977) p. 55.

Dans le cadre de cette hypothèse on obtient l'expression des déplacements en repère local :

$$\begin{aligned} u'_{i_{sup}} - u'_{i_{inf}} &= h_i \sin \alpha_i \approx h_i \alpha_i \\ v'_{i_{sup}} - v'_{i_{inf}} &= -h_i \sin \beta_i \approx -h_i \beta_i \\ w'_{i_{sup}} - w'_{i_{inf}} &\approx 0 \text{ (Hypothèse de Mindlin : H3)} \end{aligned} \qquad \text{(I.44.a-b-c)}$$

Sous forme vectorielle on peut donc écrire ceci sous la forme [AHMAD S. et al. (1970)] :

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \end{Bmatrix}_{sup} - \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \end{Bmatrix}_{inf} = h_i \, \Delta\overrightarrow{V_{3i}} \approx \begin{Bmatrix} h_i \alpha_i \\ -h_i \beta_i \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(I.45)}$$

Il est nécessaire de passer ces déplacements en repère global en multipliant à gauche les vecteurs déplacements par la matrice de passage entre repère local et global [*P*] :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \end{Bmatrix} \qquad \text{(I.46)}$$

L'expression de la matrice de passage du repère global au repère local étant :

$$[P] = \begin{bmatrix} V_{1xi} & V_{2xi} & V_{3xi} \\ V_{1yi} & V_{2yi} & V_{3yi} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.47)}$$

Finalement on obtient l'expression de la partie des déplacements variant dans l'épaisseur et fonctions des rotations nodales α_i et β_i :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{\alpha_i,\beta_i} \approx \begin{bmatrix} V_{1xi} & -V_{2xi} \\ V_{1yi} & -V_{2yi} \\ V_{1zi} & -V_{2zi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \left(\frac{t}{c}\right) h_i \tag{I.48}$$

L'utilisation des hypothèses précédentes ainsi que la forme de la relation (I.45) nous donnent l'expression des déplacements dus aux rotations nodales α_i et β_i :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{\alpha_i,\beta_i} = \left(\frac{t}{c}\right) h_i \, \Delta\overrightarrow{V_{3i}} \tag{I.49}$$

Avec l'expression du vecteur $\Delta\overrightarrow{V_{3i}}$ en utilisant (I.48) :

$$\Delta\overrightarrow{V_{3i}} \approx \overrightarrow{V_{1i}}\,\alpha_i - \overrightarrow{V_{2i}}\,\beta_i = \left[\overrightarrow{V_{1i}}\,, -\overrightarrow{V_{2i}}\right] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \tag{I.50}$$

Les vecteurs de base du repère local étant rangés en colonnes :

$$\overrightarrow{V_{1i}} = \begin{Bmatrix} V_{1xi} \\ V_{1yi} \\ V_{1zi} \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{V_{2i}} = \begin{Bmatrix} V_{2xi} \\ V_{2yi} \\ V_{2zi} \end{Bmatrix}$$

Dans le cadre de la formulation lagrangienne actualisée (cf. Paragraphe II.3.2.2) il conviendra, comme vu en (I.42), de considérer cette relation dans le cas d'incréments des rotations nodales $(\alpha_i)^2{}_1$ et $(\beta_i)^2{}_1$ entre les configurations Ω^1 et Ω^2, nous transformant $(\overrightarrow{V_{3i}})^1$ en $(\overrightarrow{V_{3i}})^2$. La définition de la variation du vecteur normal est alors :

$$\Delta\overrightarrow{V_{3i}} = (\overrightarrow{V_{3i}})^2{}_1 = (\overrightarrow{V_{3i}})^2 - (\overrightarrow{V_{3i}})^1 \tag{I.51.a}$$

avec

$$(\overrightarrow{V_{3i}})^2 - (\overrightarrow{V_{3i}})^1 \approx (\overrightarrow{V_{1i}})^1\,(\alpha_i)^2{}_1 - (\overrightarrow{V_{2i}})^1\,(\beta_i)^2{}_1 = \left[(\overrightarrow{V_{1i}})^1\,, -(\overrightarrow{V_{2i}})^1\right] \begin{Bmatrix} (\alpha_i)^2{}_1 \\ (\beta_i)^2{}_1 \end{Bmatrix} \tag{I.51.b}$$

On peut donc donner l'expression finale retenue pour la suite de cette étude pour le déplacement d'un point courant de la coque de coordonnées (ξ,η,t), pour les deux formulations.

En formulation lagrangienne totale :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\ t \left(\frac{h_i}{c}\right) \left[\overrightarrow{V_{1i}}\ , -\overrightarrow{V_{2i}}\right] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \qquad \text{(I.52.a)}$$

En formulation lagrangienne actualisée :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_1^2 = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_1^2 + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\ t \left(\frac{h_i}{c}\right) \left[(\overrightarrow{V_{1i}})^1\ , -(\overrightarrow{V_{2i}})^1\right] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}_1^2 \qquad \text{(I.52.b)}$$

où les notations de la forme ${}^2_1$ désignent à nouveau l'incrément de la quantité considérée entre les configurations Ω^1 et Ω^2.

I.4.3 Ecriture matricielle

Comme nous l'avons fait pour la géométrie, la cinématique (I.52.a) peut aussi s'écrire sous forme matricielle, en se limitant au cas de la formulation lagrangienne totale, l'extension à la formulation lagrangienne actualisée étant facile au regard de (I.52.b) :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [A]\ \{d_n\} \qquad \text{(I.53)}$$

La matrice d'interpolation des déplacements étant égale à :

$$[A] = [A^1\ , A^2\ , A^3\ , \ldots\ , A^n] \qquad \text{(I.54)}$$

Chacune des matrices $[A^i]$ s'écrit après identification avec (I.48) et (I.52) :

$$[A^i] = N_i(\xi,\eta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t\left(\frac{h_i}{c}\right)V_{1xi} & -t\left(\frac{h_i}{c}\right)V_{2xi} \\ 0 & 1 & 0 & t\left(\frac{h_i}{c}\right)V_{1yi} & -t\left(\frac{h_i}{c}\right)V_{2yi} \\ 0 & 0 & 1 & t\left(\frac{h_i}{c}\right)V_{1zi} & -t\left(\frac{h_i}{c}\right)V_{2zi} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.55)}$$

Le vecteur colonne des déplacements nodaux d'un élément s'écrivant (cf. I.8) :

$$\{d_n\} = \begin{Bmatrix} \{d_{n_1}\} \\ \{d_{n_2}\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{d_{n_n}\} \end{Bmatrix}_{(5n\text{x}1)} \quad \text{et} \quad \{d_{n_i}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \qquad \text{(I.56.a-b)}$$

Concrètement cette définition du champ de déplacement relative à l'élément de coque dégénéré va nous permettre par dérivation de la matrice $[A]$ par rapport à (ξ,η,t) de définir la matrice $[L]$ (cf. A3.7-8) nous donnant les dérivées des déplacements en repère global (u,v,w) par rapport aux coordonnées locales (ξ,η,t). Ensuite on obtiendra (cf. annexe A3) l'expression des déformations en repère global (x,y,z) en utilisant les relations (A3.4), (A3.11) et (A3.15).

Chapitre II

Formulation variationnelle Opérateurs non linéaires

II.1 Mécanique des solides déformables - Généralités

Ce paragraphe a pour but d'introduire les équations générales de la mécanique des milieux continus sans en faire une application directe à la théorie des coques.

Les résultats mis en place ici nous seront ensuite utiles lors de la mise en équation incrémentale du problème non linéaire (cf. paragraphe II.3).

Ces relations sont tirées de travaux existants parmi lesquels nous citerons MALVERN L.E. (1969), FREY F. (1978), BATHE K.J. (1982), BARBE J. (1983) et BATOZ J.L. & DHATT G. (1986). Principalement nous utiliserons les résultats des travaux de BATHE K.J. et FREY F. en ce qui concerne la théorie générale tridimensionnelle dite des corps massifs.

Nous commencerons par présenter les éléments cinématiques utiles à la définition des mesures de déformations utilisées et ensuite nous présenterons les contraintes utilisées. Ensuite dans les paragraphes suivants nous présenterons les lois de comportement utilisées puis la formulation variationnelle utilisée.

Les notations choisies sont issues de celles utilisées par BATHE K.J (1982) et FAFARD M., BATOZ J.L. & DHATT G. (1990). Nous les avons parfois modifiées afin de les adapter au contexte de cette étude.

II.1.1 Description cinématique

Nous référerons chaque configuration d'équilibre d'un solide ou d'une structure Ω à l'instant t_i avec la notation Ω^i. La configuration de référence connue et dans laquelle on supposera qu'aucune force s'applique sur le solide est définie à l'instant t_0 et sera notée Ω^0. Dans cette configuration les coordonnées des différents points sont connues et le solide peut néanmoins être déjà déformé et soumis à des contraintes dont la distribution est connue.

Après sollicitation par des forces extérieures, la structure prend la configuration d'équilibre Ω^1 à l'instant t_1, et nous pouvons également considérer une configuration Ω^2 à l'instant t_2 pour laquelle l'équilibre est recherché (cf. Figure II.1).

Nous définirons par $\vec{R}^j_i$ le vecteur position du point M dans la configuration définie à l'instant t_j en prenant comme référence la configuration à l'instant t_i.

De la même manière nous définirons par $\vec{u}^j_i$ le déplacement du point M entre la configuration Ω^i et la configuration Ω^j.

Lorsque nous référerons à la configuration Ω^0 nous écrirons donc :

$$\vec{R}^i = \vec{R}^i\,(\vec{R}^0, t_i) = \vec{R}^0 + \vec{u}^i_0 \qquad \text{(II.1)}$$

Les quantités $\vec{R}^0$ et $\vec{R}^i$ pour lesquelles l'indice inférieur a été omis ne sont en effet dépendantes d'aucune configuration, il reste ensuite à faire choix du repère dans lequel on choisira d'exprimer ces vecteurs.

Plus généralement pour une configuration Ω définie à l'instant t nous écrirons le vecteur position $\vec{R}$ du point M sous la forme simplifiée suivante, où l'indice correspondant à la configuration de description est omis :

$$\vec{R} = \vec{R}\,(\vec{R}^0, t) = \vec{R}^0 + \vec{u}_0 \qquad \text{(II.2)}$$

L'instant t pouvant être quelconque, ou assimilé à t_1 ou t_2.

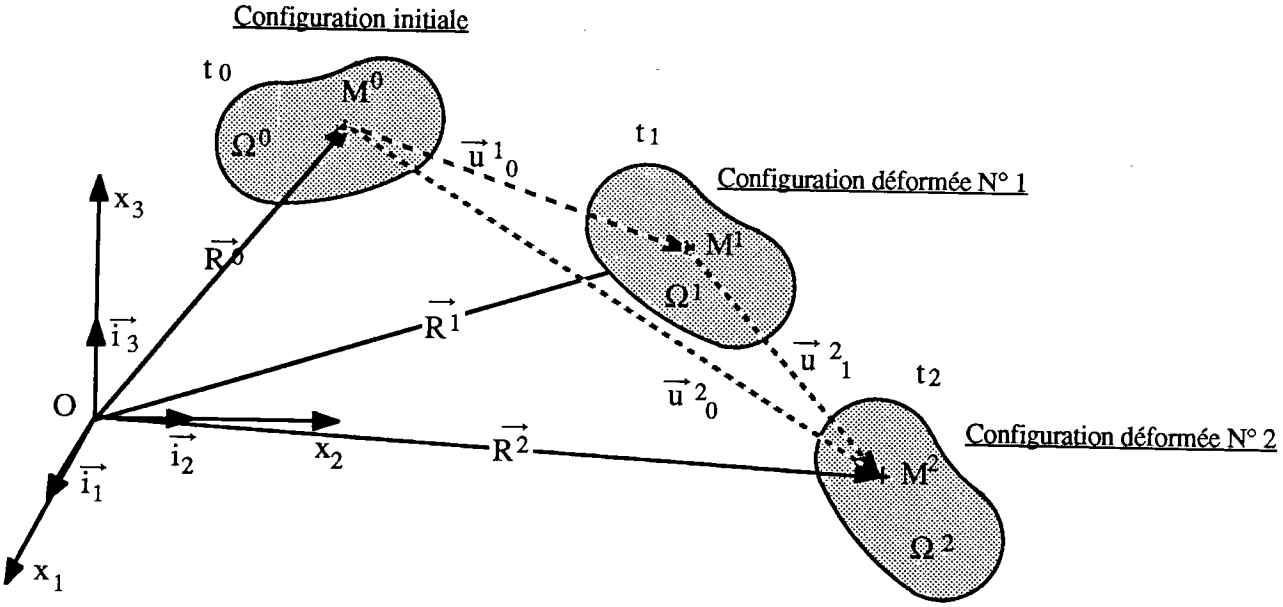


Figure II.1 : Description de la déformation.

On écrira pour les configurations Ω^0, Ω^1 et Ω^2 :

$$\vec{u}^1{}_0 = \vec{R}^1 - \vec{R}^0 \tag{II.3.a}$$

$$\vec{u}^2{}_0 = \vec{R}^2 - \vec{R}^0 \tag{II.3.b}$$

$$\vec{u}^2{}_1 = \vec{R}^2 - \vec{R}^1 \tag{II.3.c}$$

On en déduit également par combinaison :

$$\vec{u}^2{}_1 = \vec{u}^2{}_0 - \vec{u}^1{}_0 \tag{II.4}$$

Nous noterons également par la suite $Q^{j\text{-}i}{}_k$ l'accroissement de la quantité Q entre les configurations Ω^i et Ω^j relativement à la configuration Ω^k.

Remarque : Les quantités eulériennes décrites ne font référence qu'à un seul indice, celui de la configuration de description (indice haut), alors que les quantités lagrangiennes doivent nécessairement faire apparaître en plus l'indice relatif à la configuration de référence (indice bas).

II.1.1.1 Tenseur gradient de transformation

Un élément différentiel de longueur $d\vec{R}^0$ dans la configuration Ω^0 est transformé au cours de la déformation en $d\vec{R}$ dans la configuration Ω. On a la relation suivante entre ces éléments [cf. MALVERN L.E. (1969)] :

$$d\vec{R} = [F]_0 \, d\vec{R}^0 \tag{II.5}$$

$[F]_0$ est appelé tenseur gradient de transformation entre les configurations Ω^0 et Ω. On le notera aussi :

$$[F]_0 = \left[\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{R}^0} \right]_0 \tag{II.6}$$

Le tenseur gradient de transformation entre les configurations Ω^0 et Ω s'écrit par conséquent sous forme développée [cf. MALVERN L.E. (1969)] :

$$[F]_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x^0} & \frac{\partial x_0}{\partial y^0} & \frac{\partial x_0}{\partial z^0} \\ \frac{\partial y_0}{\partial x^0} & \frac{\partial y_0}{\partial y^0} & \frac{\partial y_0}{\partial z^0} \\ \frac{\partial z_0}{\partial x^0} & \frac{\partial z_0}{\partial y^0} & \frac{\partial z_0}{\partial z^0} \end{bmatrix} \tag{II.7}$$

En utilisant la relation (II.2) on obtient la nouvelle expression de $[F]_0$ en fonction des déplacements :

$$[F]_0 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_0}{\partial x^0} & \frac{\partial u_0}{\partial y^0} & \frac{\partial u_0}{\partial z^0} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x^0} & 1 + \frac{\partial v_0}{\partial y^0} & \frac{\partial v_0}{\partial z^0} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x^0} & \frac{\partial w_0}{\partial y^0} & 1 + \frac{\partial w_0}{\partial z^0} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.8)}$$

avec la notation classique : $\vec{u}_0 = < u_0 \ v_0 \ w_0 >$

On montre [cf. BATHE K.J. (1982)] la relation suivante entre tenseurs de transformation :

$$[F]^2_0 = [F]^2_1 \, [F]^1_0 \qquad \text{(II.9)}$$

L'élément de volume dV^0 défini sur la configuration Ω^0 se transforme au cours de la déformation et devient à l'instant t [cf. BATHE K.J. (1982)] :

$$dV = \det([F]_0) \, dV^0 \qquad \text{(II.10)}$$

De même pour la normale $\vec{n}^0$ à la surface dS^0 définie sur la configuration Ω^0, on a la relation suivante dans la configuration Ω (formule de Nanson) :

$$\vec{n} \, dS = \det([F]_0) \, ([F]_0^T)^{-1} \vec{n}^0 \, dS^0 \qquad \text{(II.11)}$$

II.1.1.2 Mesures de déformation

Nous référerons dans ce paragraphe la majorité de nos quantités à la configuration Ω^0, sans pour autant que cela soit limitatif, toute autre configuration pouvant servir également de référence (Ω^1 par exemple).

Les quantités seront toujours exprimées dans la configuration Ω à l'instant t.

Le théorème de décomposition polaire [MALVERN L.E. (1969)], [BATHE K.J. (1982] permet d'exprimer le tenseur gradient de transformation $[F]_0$ comme la composition d'un tenseur de rotation pure $[R]_0$ et d'un tenseur d'élongation pure $[U]_0$, ce résultat étant la conséquence de la description de la déformation :

$$[F]_0 = [R]_0 \, [U]_0 \qquad \text{(II.12.a)}$$

avec la propriété évidente pour tout tenseur de rotation (tenseur orthogonal) :

$$[R]^T [R] = [I] \qquad \text{(II.12.b)}$$

Ceci implique notamment l'égalité :

$$[F]_0^T [F]_0 = [U]_0^T [U]_0 \qquad \text{(II.13.a)}$$

Le tenseur $[U]_0^T [U]_0$ étant encore appelé tenseur de déformation de Cauchy à droite.

La relation (II.5) combinée avec (II.13.a) donne le produit scalaire suivant :

$$d\vec{R} \,.\, d\vec{R} = d\vec{R}^0 ([U]_0^T [U]_0)\, d\vec{R}^0 \qquad \text{(II.13.b)}$$

Nous définissons l'allongement δ du segment de longueur infinitésimale M^0N^0, transformé en MN, comme étant (cf. Figure II.2) :

$$\delta = \frac{ds - ds^0}{ds^0} = \frac{ds}{ds^0} - 1 \qquad \text{(II.14.a)}$$

en posant :

$$ds^0 = \|d\vec{R}^0\| \text{ et } ds = \|d\vec{R}\| \qquad \text{(II.14.b)}$$

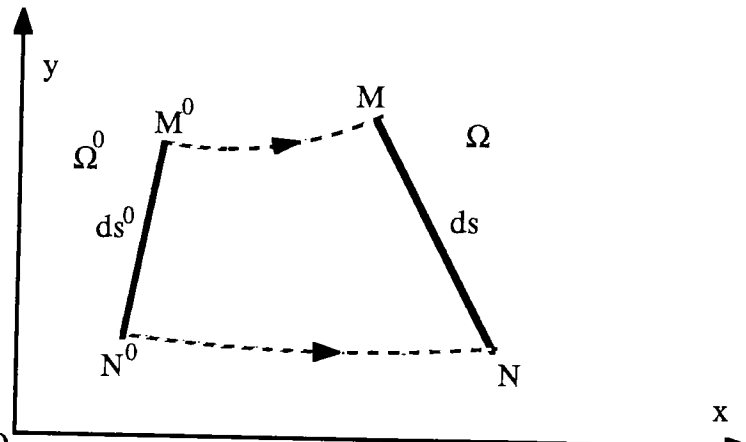
En considérant $d\vec{R}^0$ comme étant l'un des 3 vecteurs de base, donc tel que $\|d\vec{R}^0\| = 1$, nous pouvons écrire l'équation (II.13.b) sous la forme des 3 équations suivantes définissant les 3 allongements δ_i suivant les 3 directions du repère associé :

$$(1 + \delta_i)^2 = ([U]_0^T [U]_0)_{ii} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(II.14.c)}$$

On souhaite disposer de tenseurs de déformation tels que chaque composante diagonale soit, au premier ordre, l'allongement δ_i dans la direction i correspondante. Tout tenseur de la forme suivante convient :

$$\frac{1}{2n} \left(([U]_0^T [U]_0)^n - [I] \right) \qquad \text{(II.14.d)}$$

On peut alors définir une mesure de déformation par rapport à la configuration Ω^0, cette définition éliminant tout mouvement de corps rigide du fait qu'elle fait intervenir uniquement le tenseur d'élongation pure $[U]_0$ sans utiliser $[R]_0$ [cf. FREY F. (1978)].



Tenseur de déformation de Green-Lagrange

On définit le tenseur de déformation de Green - Lagrange comme le premier des tenseurs définis en (II.14.d), en posant donc $n = 1$. On écrit :

$$[\varepsilon]_0 = \frac{1}{2}\left([U]_0{}^T\,[U]_0 - [I]\right) \tag{II.15.a}$$

soit encore, en utilisant le tenseur gradient de transformation entre Ω^0 et Ω (II.12), et les propriétés du tenseur de rotation pure $[R]_0$ écrites en (II.13) :

$$[\varepsilon]_0 = \frac{1}{2}\left([F]_0{}^T\,[F]_0 - [I]\right) \tag{II.15.b}$$

En utilisant (II.2) et (II.8), nous pouvons définir $[\varepsilon]_0$ en fonction du déplacement $\vec{u}_0$:

$$[\varepsilon]_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{R}^0}\right) + \left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{R}^0}\right)^T + \left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{R}^0}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{R}^0}\right)\right] \tag{II.15.c}$$

Les déformations de Green-Lagrange peuvent donc prendre la forme vectorielle suivante, si on utilise l'expression du tenseur gradient de transformation en fonction des déplacements (II.8) :

$$\{\varepsilon\}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x^0} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y^0} \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial z^0} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y^0} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x^0} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial z^0} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y^0} \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x^0} + \dfrac{\partial u_0}{\partial z^0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x^0}\right)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y^0}\right)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial z^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial z^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial z^0}\right)^2\right] \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial x^0}\dfrac{\partial u_0}{\partial y^0} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x^0}\dfrac{\partial v_0}{\partial y^0} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x^0}\dfrac{\partial w_0}{\partial y^0} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y^0}\dfrac{\partial u_0}{\partial z^0} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y^0}\dfrac{\partial v_0}{\partial z^0} + \dfrac{\partial w_0}{\partial y^0}\dfrac{\partial w_0}{\partial z^0} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial z^0}\dfrac{\partial u_0}{\partial x^0} + \dfrac{\partial v_0}{\partial z^0}\dfrac{\partial v_0}{\partial x^0} + \dfrac{\partial w_0}{\partial z^0}\dfrac{\partial w_0}{\partial x^0} \end{Bmatrix} \tag{II.16}$$

en ayant adopté ici les notations suivantes :

$$\vec{R}^0 = < x^0 \;\; y^0 \;\; z^0 > \tag{II.17}$$

$$\vec{u}_0 = < u_0 \;\; v_0 \;\; w_0 > \tag{II.18}$$

On montre aussi [cf. FAFARD M. et *al.* (1990)], que l'on peut écrire entre les configurations Ω^0, Ω^1 et Ω^2 :

Tenseur de déformation d'Euler-Almansi

On définit le tenseur de déformation d'Euler-Almansi comme la mesure des déformations relativement à la configuration déformée.

Cette définition peut être traduite en prenant comme configuration de référence la configuration déformée Ω, et en décrivant la transformation qui permet de passer de cette configuration à la configuration Ω^0, c'est-à-dire la transformation inverse de la transformation définie au paragraphe II.1.1.1.

En utilisant la relation (II.15.c) définissant le tenseur de Green-Lagrange $[\varepsilon]_0$ nous pouvons définir le tenseur de Green-Lagrange $[\varepsilon']$ relatif à la transformation inverse (indice ') en notant que le déplacement a simplement changé de signe ($\vec{u}' = -\vec{u}_0$) :

$$[\varepsilon'] = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{R}}\right) + \left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{R}}\right)^T - \left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{R}}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \vec{R}}\right)\right] \qquad \text{(II.20)}$$

Le tenseur d'Euler-Almansi n'est autre que [cf. BARBE J. (1983) p. 25] :

$$[e] = -[\varepsilon'] \qquad \text{(II.21.a)}$$

On le définit donc aussi par la relation suivante :

$$[e] = \frac{1}{2}\left([I] - [F']^T [F']\right) \qquad \text{(II.21.b)}$$

le tenseur gradient de transformation associé au passage de Ω vers Ω^0 étant défini par :

$$[F'] = [F]^{-1} = \left[\frac{\partial \vec{R}^0}{\partial \vec{R}}\right] \qquad \text{(II.21.c)}$$

Il est possible de montrer la relation suivante entre la première variation du tenseur des déformations de Green-Lagrange et la première variation du tenseur des déformations d'Euler-Almansi [cf. BATHE K.J. (1982) p. 333] :

$$[\delta\varepsilon]_0 = [F]_0^T [\delta e] [F]_0 \qquad \text{(II.22)}$$

II.1.2 Description cinétique

On considère dans cette partie, le solide étudié à un instant t donné dans lequel les différentes quantités seront exprimées, sans qu'on le précise systématiquement comme dans le paragraphe précédent. L'instant de référence reste quant-à lui t_0.

En un point M (cf. Figure II.3) on définit le vecteur contrainte $\vec{t}\,(\vec{n})$ par la relation à la limite suivante [cf. MALVERN L.E. (1969)] :

$$\vec{t}\,(\vec{n}) = \lim_{dS \to 0} \frac{d\vec{f}}{dS} \tag{II.23}$$

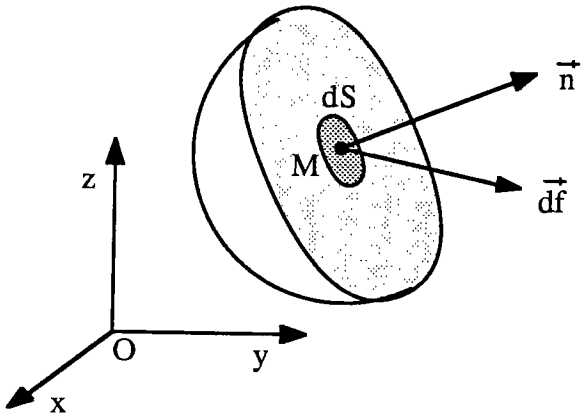


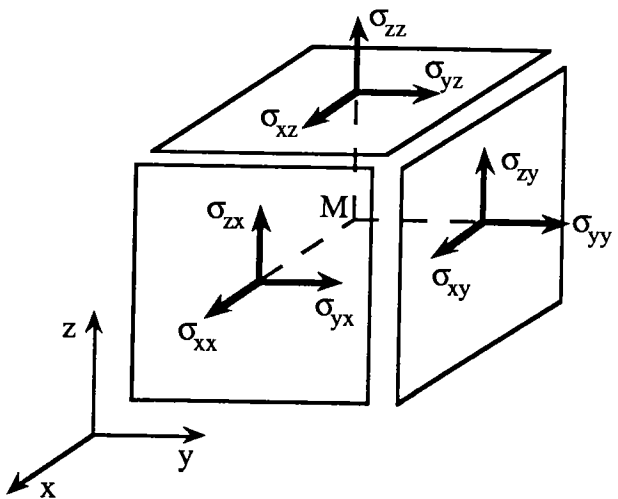
Figure II.3 : Définition du vecteur contraintes.

Tenseur de contrainte de Cauchy

Le tenseur de contrainte de Cauchy $[\sigma]$ au point M est défini par la relation suivante [cf. MALVERN L.E. (1969)] :

$$\vec{t}\,(\vec{n}) = [\sigma]^T \vec{n} \tag{II.24}$$

Les composantes cartésiennes de $[\sigma]$ sont représentées positivement sur la figure II.4 et décrivent l'état de contraintes au point M.



L'expression de $[\sigma]$ est :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{II.25}$$

Dans le cas général où il n'y a pas de moments répartis sur le solide étudié, les équations d'équilibre usuelles conduisent, en termes de moments, à la symétrie du tenseur de contrainte de Cauchy. On a donc :

$$[\sigma]^T = [\sigma] \tag{II.26}$$

A la limite, quand dS tend vers zéro, et pour une configuration Ω définie à l'instant t, la force élémentaire s'appliquant sur cette surface est par conséquent égale à :

$$\vec{df} = [\sigma]\, \vec{n}\, dS \tag{II.27}$$

Tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de première espèce

En utilisant l'équation (II.11) on transforme la relation (II.27) en :

$$\vec{df} = \det([F]_0)\, [\sigma]\, ([F]_0{}^T)^{-1}\, \vec{n}^0\, dS^0 \tag{II.28}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\vec{df} = [T]_0\, \vec{n}^0\, dS^0 \tag{II.29}$$

en posant :

$$[T]_0 = \det([F]_0)\, [\sigma]\, ([F]_0{}^T)^{-1} \tag{II.30}$$

Le tenseur $[T]_0$ est non symétrique et est appelé tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de première espèce pour la configuration Ω définie à l'instant t relativement à la configuration de référence Ω^0. Nous le noterons également "P.K.1" [cf. FREY F. (1978)].

Tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce

Nous définissons la force fictive $\vec{df}^{\,0}$ agissant sur la surface dS^0 à l'aide de la transformation suivante :

$$\vec{df}^{\,0} = ([F]_0)^{-1}\, \vec{df} \tag{II.31}$$

Nous avons alors la définition suivante du tenseur de contrainte $[S]_0$, dit de Piola-Kirchhoff de seconde espèce et noté "P.K.2" :

Ensuite nous pouvons définir l'expression du tenseur de contrainte P.K.2 en fonction du tenseur de contrainte P.K.1 puis en fonction du tenseur de contrainte de Cauchy à l'aide des équations (II.29) et (II.30).

Nous avons d'abord la relation entre $[S]_0$ et $[T]_0$:

$$[S]_0 = ([F]_0)^{-1}\,[T]_0 \tag{II.33}$$

ensuite la relation entre $[S]_0$ et $[\sigma]$:

$$[S]_0 = \det([F]_0)\,([F]_0)^{-1}\,[\sigma]\,([F]_0{}^T)^{-1} \tag{II.34}$$

Nous pouvons aussi définir l'incrément du tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce entre les configurations Ω^2 et Ω^1 définies respectivement aux instants t_2 et t_1, à l'aide de la notation suivante [cf. FAFARD M. et *al.* (1990)] :

$$[S]^{2\text{-}1}{}_0 = [S]^2{}_0 - [S]^1{}_0 \tag{II.35}$$

Lorsque l'on confond la configuration de description et la configuration de référence, nous avons identité entre le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce et le tenseur de contrainte de Cauchy [cf. FAFARD M. et *al.* (1990) p.593], ce qui se traduit par exemple en se plaçant dans la configuration Ω^1 par l'égalité :

$$[S]^1{}_1 = [\sigma]^1 \tag{II.36}$$

Si nous prenons la configuration de référence comme étant Ω^1 au lieu de Ω^0 la relation (II.35) devient donc :

$$[S]^2{}_1 = [\sigma]^1 + [S]^{2\text{-}1}{}_1 \tag{II.37}$$

Tenseur de contrainte de Kirchhoff

Nous pouvons également définir le tenseur de contrainte de Kirchhoff [cf. FREY F. (1978)] comme étant :

$$[\tau] = \det([F]_0)\,[\sigma] \tag{II.38}$$

soit encore :

$$[\tau] = [F]_0\,[S]_0\,[F]_0{}^T \tag{II.39}$$

II.2 Les lois de comportement

II.2.1 Le domaine non linéaire géométrique

Cette étude est appliquée au domaine non linéaire géométrique, les non-linéarités apparaissant au niveau des relations déplacements / déformations et aussi du fait que l'on ne confond pas l'état de référence et l'état déformé contrairement au cadre des hypothèses H.P.P. (cf. Introduction).

La théorie non linéaire développée au chapitre II est tout à fait générale et peut être utilisée dans le cadre des grands déplacements, grandes rotations, grandes déformations sous réserve que l'on puisse écrire une loi de comportement objective du matériau. (Ceci est faux au niveau de l'élément avec les hypothèses restrictives du chapitre I)

Par contre il n'est pas question de non linéarité constitutive des matériaux, les lois de comportement que nous allons utiliser sont celles des solides élastiques linéaires (voir Introduction.2), le domaine de validité étant celui des petites déformations élastiques.

Il est donc a priori nécessaire de contrôler après calcul qu'on reste bien dans le cadre de ces hypothèses bien que ce modèle soit bien adapté à l'étude des solides dits élancés (grands déplacements et grandes rotations avec de petites déformations) ce qui est le cas des coques minces que modélise notre élément.

II.2.2 Cas du solide élastique linéaire

On peut récapituler ici les résultats essentiels relatifs à ces hypothèses en faisant référence à la méthode de Cauchy [cf. LOVE A.E. (1944)].

Solide élastique :

On montre que le tenseur de contrainte P.K.2 exprimé par rapport à la configuration de référence Ω^0 , $[S]_0$, est fonction du tenseur gradient de transformation $[F]_0$:

$$[S]_0 = \Phi ([F]_0) \tag{II.40}$$

On en déduit ensuite d'après (II.15) que le tenseur de contrainte P.K.2, $[S]_0$ peut également s'écrire sous une forme où il ne dépend que du tenseur des déformations de Green-Lagrange $[\varepsilon]_0$:

$$[S]_0 = \Gamma ([\varepsilon]_0) \tag{II.41}$$

Linéarité :

On montre [NOVOZHILOV V.V. (1953)] que l'on peut, dans le cadre des petites déformations élastiques, généraliser la loi de Hooke appliquée au corps isotropes en une loi linéaire générale reliant les 9 composantes (6 en tenant compte des symétries) des tenseurs $[S]_0$ et $[\varepsilon]_0$. Cette loi prend la forme suivante en faisant intervenir le tenseur d'élasticité $[C]$ et en se plaçant dans le cas où les contraintes et les déformations initiales sont nulles :

$$S_{0kl} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{0kl} \tag{II.42}$$

Remarque : Cette écriture de la loi de comportement dans le cas général d'un solide élastique linéaire fait intervenir les tenseurs des déformations et de contrainte référant à la configuration de référence et fait donc uniquement appel à la formulation Lagrangienne.

On écrira aussi la loi de comportement sous la forme matricielle :

$$\{S\}_0 = [C]\ \{\varepsilon\}_0 \tag{II.43}$$

Relation entre tenseurs des contraintes de Cauchy et P.K.2 en petites déformations :

Avec l'hypothèse des petites déformations élastiques retenue dans cette étude, ainsi que l'hypothèse des rotations nodales modérées, nous allons pouvoir effectuer des simplifications et approximations en ce qui concerne les relations mises en place au II.1.1 et II.1.2.

Afin de ne pas restreindre la généralité de ce qui suit nous allons décrire la configuration Ω^2 en faisant référence à la configuration Ω^1 ce qui correspond à un pas de chargement sur lequel, comme nous l'avons mentionné en introduction, le mouvement d'un élément fini se décompose en un mouvement de corps rigide suivi d'une petite déformation locale de l'élément.

Dans ce cas [cf. BATOZ J.L., GUO Y.Q. et POL P. (1988)] le tenseur d'élongation pure $[U]$ est voisin de la matrice identité et on a donc :

$$[U]^2{}_1 \approx [I] \tag{II.44}$$

Remarque : Le cas d'étude décrit ici relève de la F.L.A. (description de Ω^2 en faisant référence à Ω^1) mais le raisonnement reste aussi valable en F.L.T. où on a la même limitation sur "l'écart" entre la configuration de description Ω^2 et la configuration de référence qui devient alorsΩ^0. En effet la limitation provient du seuil égal à 20° que l'on ne doit pas dépasser pour les rotations nodales totales en F.L.T. ($\alpha^2{}_0$, $\beta^2{}_0$) ou pour les rotations nodales incrémentales en F.L.A. ($\alpha^2{}_1$, $\beta^2{}_1$).

Le théorème de décomposition polaire donne donc :

La déformation s'apparente donc à un mouvement de corps rigide, le tenseur gradient de transformation $[F]^2_1$ étant voisin du tenseur de rotation $[R]^2_1$.

On peut donc alors écrire également dans le cas général des petites déformation élastiques :

$$\det([F]^2_1) \approx 1 \tag{II.46}$$

En reportant (II.45) et (II.46) dans (II.34) on obtient la relation suivante :

$$[S]^2_1 = [R]^2_1{}^T [\sigma]^2 [R]^2_1 \tag{II.47}$$

La partie de droite de cette égalité nous donnant simplement le tenseur de contrainte de Cauchy défini dans la configuration Ω^2 et de plus dans un repère correspondant à la configuration Ω^2 (repère corotationnel dit encore actualisé).

On obtient donc le résultat fondamental suivant :

$$[S]^2_1 = [\sigma_{\text{local dans } \Omega^2}]^2 \tag{II.48}$$

Le tenseur de contrainte P.K.2 $[S]^2_1$ mesuré dans Ω^2 relativement à Ω^1 est égal au tenseur de contrainte de Cauchy $[\sigma_{\text{local}}]^2$ mesuré dans Ω^2 et exprimé dans le repère corotationnel.

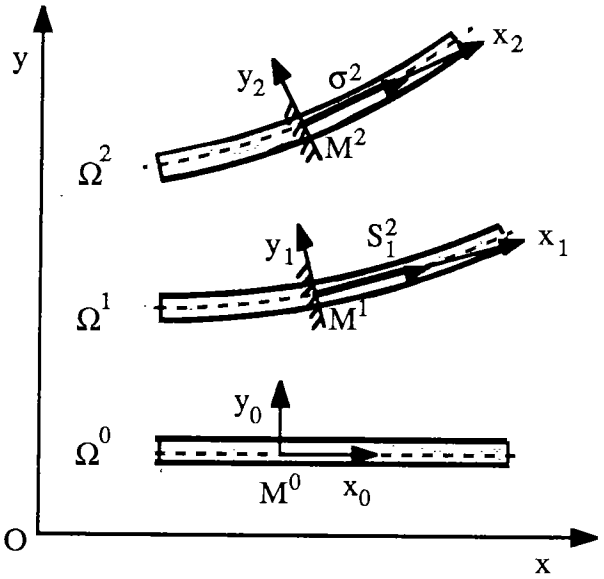


Figure II.5 : Description des contraintes de Cauchy et P.K.2.

Remarque : Cette démonstration quoi-que limitée dans notre étude au cadre du domaine des petites déformations élastiques, est généralisable au domaine des petites déformations élasto-plastiques qui sont observables dans le cas des plaques et coques minces ou modérément épaisses [cf. FAFARD M. (1990) p. 592].

Cas du matériau orthotrope :

L'égalité (II.48) en relation avec l'hypothèse H2 (cf. Chapitre I éq. I.5), permet d'écrire la même relation que pour les contraintes de Cauchy locales en ce qui concerne les contraintes P.K.2, dans les repères et les configurations adéquats précisés ci-dessus. On peut en effet négliger la contrainte normale à la surface moyenne de la coque (S'_{zz}) devant les deux autres contraintes normales (S'_{xx} et S'_{yy}) :

$$S'_{zz} << S'_{xx} \quad \text{et} \quad S'_{zz} << S'_{yy} \tag{II.49}$$

En conséquence il est possible de simplifier, comme pour le vecteur contrainte de Cauchy, le vecteur contrainte P.K.2 $\{S\}^2{}_1$ en supprimant la composante ${S_{zz}}^2{}_1$.

La forme générale de $[C]$ dans le cas d'un matériau orthotrope fait référence aux résultats mis en place au niveau du chapitre I en ce qui concerne les déformations, et aux résultats montrés en annexe A1. En se plaçant dans un repère particulier dit repère d'orthotropie défini par les directions remarquables du matériau (direction des fibres = 1) et en tenant compte du fait que $S'_{zz} \approx 0$, on écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \tag{II.50}$$

De cette manière on fait apparaître les caractéristiques usuelles du matériau :

- Modules d'Young : E_1, E_2, E_3
- Coefficients de poisson : $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{31}, \nu_{13}$
- Modules de Coulomb : G_{12}, G_{23}, G_{31}

Pour le détail des coefficients élastiques C_{ijkl} dans les différents cas de matériaux considérés (orthotropie, isotropie...) on se reportera à l'annexe A1.

Le coefficient de correction du cisaillement $k_s = 5/6$ sera ensuite intégré dans une loi de comportement modifiée, et ce pour corriger le fait que l'on considère dans la théorie de Mindlin [MINDLIN R.D. (1951)] un cisaillement transverse constant dans l'épaisseur de la couche, alors que la variation est sensiblement parabolique par morceaux.

Pour corriger ceci, on définit le coefficient de correction du cisaillement transverse k_s, qui donne une énergie de cisaillement transverse sur le modèle (distribution constante) approximativement égale à celle qui existe en réalité (distribution parabolique).

Remarque : REISSNER E. et MINDLIN R.D. dans leurs théories respectives des plaques définissent chacun un coefficient de cisaillement :

[MINDLIN R.D. (1951) pp. 31-38] $k_s = \frac{\pi^2}{12} \approx 0{,}822$ (II.51.a)

[REISSNER E. (1945) pp. 69-77] $k_s = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$ (II.51.b)

La valeur qui a été retenue par le plus grand nombre d'auteurs est celle de REISSNER E. qui semble-t-il donne les meilleurs résultats dans la majorité des cas.

C'est donc également la valeur de $k_s = 5/6$ qui a été implantée dans le code de calcul ASELF et utilisée au niveau des applications numériques.

II.3 Mise en place de la formulation incrémentale

Il est nécessaire d'effectuer la mise en place des formulations incrémentales relatives à la formulation lagrangienne totale (F.L.T.) et à la formulation lagrangienne actualisée (F.L.A.) afin de donner les expressions des quantités que l'on devra ensuite utiliser lors de la résolution du problème non linéaire associé. Il s'agit en particulier de la matrice de rigidité tangente et du vecteur des efforts intérieurs.

Pour obtenir ces formulations incrémentales, il est nécessaire de traduire la formulation variationnelle relative au principe des travaux virtuels. Pour ce faire nous partirons des équations d'équilibre relative à la configuration déformée Ω.

II.3.1 Equations d'équilibre

La formulation du problème choisie est du type "déplacement" et on va donc raisonner en termes de déplacements virtuels nodaux, de déplacements virtuels et de déformations virtuelles (tenseur ou vecteur déformation).

Nous noterons ces quantités respectivement $\{\delta d_n\}^1{}_0$, $\{\delta u\}^1{}_0$ et $\{\delta \varepsilon\}^1{}_0$ dans le cas où nous les exprimons dans la configuration Ω^1 relativement à la configuration Ω^0.

On considère un déplacement virtuel nodal des noeuds d'un élément $\{\delta d_n\}^1{}_0$ (ou $\{\delta d\}^1{}_0$ pour les noeuds de la structure) qui va nous donner un champ de déplacements virtuels $\{\delta u\}$ en tout point de l'élément considéré, ce dernier étant relié à $\{\delta d_n\}^1{}_0$ par l'intermédiaire de la matrice des fonctions de forme $[A]^0$.

En effet on a la relation (cf. I.53) entre les configurations Ω^0 et Ω^1 :

$$\{u\}^1{}_0 = [A]^0 \{d_n\}^1{}_0 \tag{II.52}$$

La matrice des fonctions de forme $[A]$ dépend des coordonnées intrinsèques sur l'élément (ξ,η) et de la coordonnée dans l'épaisseur de la coque (t) ainsi que des composantes des vecteurs de base du repère local en chaque noeud i $(V_{1xi},V_{1yi},V_{1zi},V_{2xi},\ldots\ldots,V_{3zi})$ exprimées sur la configuration de référence qui est fixe et est ici Ω^0. Cette matrice ne dépend donc pas de l'état de déformation de la structure c'est-à-dire du vecteur des déplacements nodaux $\{d_n\}^1{}_0$.

On a donc la possibilité de différentier l'expression de $\{u\}^1{}_0$, ce qui nous donne :

$$\{\delta u\}^1{}_0 = [A]^0 \{\delta d_n\}^1{}_0 \tag{II.53}$$

Ce champ de déplacement virtuel $\{\delta u\}^1{}_0$ implique un état de déformations virtuelles $\{\delta \varepsilon\}^1{}_0$ dans l'élément considéré.

Traduction de l'équilibre

Les équations d'équilibre locales appliquées à un domaine élémentaire du solide étudié dans sa configuration déformée Ω à l'instant t et relativement à cette même configuration nous donnent les équations suivantes en variables eulériennes :

$$\sigma_{ij,j} + f_{v\,i} = 0 \tag{II.54.a}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{II.54.b}$$

Cette dernière propriété a déjà été utilisée lors de la mise en place du tenseur de contrainte de Cauchy $[\sigma]$ (cf. II.26).

Il convient d'y ajouter les conditions aux limites en contraintes et déplacement qui peuvent prendre la forme suivante sur Ω :

$$\sigma_{ij}\, n_j = f_{s\,i} \tag{II.55.a}$$

$$u_i = u_{s\,i} \tag{II.55.b}$$

Les vecteurs $\{f_s\}$ et $\{f_v\}$ représentent respectivement les forces de surface et les forces de volume qui s'appliquent sur le solide étudié à l'instant t, et $\{n\}$ est le vecteur normal à la surface déformée Ω.

$\{u_s\}$ est le vecteur des déplacements imposés en chacun des points où on a une condition de ce type.

Toujours sur cette même configuration on peut réécrire les équations (II.54.a) et (II.55.a) sous la forme suivante :

$$(\text{div}\,[\sigma])^T + \{f_v\} = \{0\} \tag{II.56}$$

$$[\sigma]\,\{n\} = \{f_s\} \tag{II.57}$$

en définissant l'opérateur divergence de la manière suivante :

$$\text{div} = < \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} > \tag{II.58}$$

La traduction de l'équilibre sur la configuration de référence Ω^0, nécessite d'utiliser les relations entre les efforts volumiques et surfaciques définis sur Ω^0 et Ω. Ces relations sont déduites des équations (II.10) et (II.11) :

$$\{f_v\}^0 = \det([F]_0)\,\{f_v\} \quad \text{et} \quad \{f_s\}^0 = \frac{dS}{dS^0}\,\{f_s\} \tag{II.59.a-b}$$

L'opérateur divergence relatif à Ω^0 est défini par :

$$\text{div}_0 = < \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial y^0}, \frac{\partial}{\partial z^0} > \tag{II.60.a}$$

Et nous avons au regard de l'expression (II.58) la relation suivante entre les opérateurs div

En utilisant l'équation (II.34) reliant $[\sigma]$ et $[S]_0$ ainsi que (II.59.b), nous pouvons écrire les équations d'équilibre sur le solide déformé dans sa configuration Ω, par rapport à la configuration de référence Ω^0 [cf. BATHE K.J. (1982)] :

$$(\mathrm{div}_0\,([S]_0\,[F]_0{}^T))^T + \{f_v\}^0 = \{0\} \qquad \text{(II.61)}$$

Nous avons également les conditions aux limites en contraintes suivantes dans la configuration Ω par rapport à la configuration de référence Ω^0 en utilisant le tenseur de contraintes P.K.1 :

$$[T]\,\{n\}^0 = \{f_s\}^0 \qquad \text{(II.61)}$$

II.3.2 Principe des travaux virtuels

II.3.2.1 Formulation eulérienne

Nous allons mettre en place ici la formulation variationnelle associée aux équations (II.56) et (II.59) relativement aux configurations Ω et Ω^0.

Pour ce faire nous utilisons la méthode des résidus pondérés avec une formulation de type Galerkin en déplacement.

La première variation de l'énergie potentielle totale de la structure peut s'écrire comme la différence de la première variation de l'énergie de déformation (ou encore travail virtuel des forces intérieures) et de la première variation du travail des forces extérieures appliquées à la structure (ou travail virtuel des forces extérieures).

Cette relation s'écrit de la manière suivante :

$$\delta W = \delta U - \delta A \qquad \text{(II.63)}$$

Où l'on a : δW = Première variation de l'énergie potentielle totale de la structure.

δU = Première variation de l'énergie de déformation de la structure.

δA = Première variation du travail des efforts extérieurs à la structure.

Première variation de l'énergie de déformation

La première variation de l'énergie de déformation notée δu_e (pour un volume déformé dV) se mesure "physiquement" dans la configuration déformée et est égale, par définition, à la trace du produit des composantes du tenseur de contrainte de Cauchy $[\sigma]$ et du tenseur des déformations virtuelles d'Euler-Almansi noté $[\delta e]$:

$$\delta u_e = \text{trace}\,([\delta e]^T\,[\sigma])\,dV = \{\delta e\}^T\,\{\sigma\}\,dV \tag{II.64}$$

Pour la structure complète après sommation sur les différents éléments la constituant on obtient l'expression de δU :

$$\delta U = \sum_{el} \int_V \{\delta e\}^T \{\sigma\}\,dV \tag{II.65}$$

Première variation du travail des efforts extérieurs

L'expression de la première variation du travail des efforts extérieurs appliqués sur la configuration déformée Ω se met sous la forme suivante avec les trois types de chargements extérieurs :

$$\delta A = \sum_{el} \int_V \{\delta u\}^T \{f_v\}\,dV + \sum_{el} \int_{\partial V} \{\delta u\}^T \{f_s\}\,dS + \sum_{el} \sum_{i} \{\delta u\}^T \{F_i\} \tag{II.66}$$

Les efforts extérieurs étant rangés en 3 catégories :

$\{f_v\}$ vecteur des forces volumiques (forces à distance).

$\{f_s\}$ vecteur des forces surfaciques (forces de contact ou pression).

$\{F_i\}$ vecteur des forces ponctuelles (forces concentrées).

Et en utilisant les notations suivantes pour les domaines d'intégration :

V = volume total d'un élément.

∂V= surface limite de l'élément.

Les indices i correspondent aux points matériels où sont appliquées les forces ponctuelles.

Première variation de l'énergie potentielle totale

En utilisant les équations (II.65) et (II.66) nous obtenons l'expression suivante de l'énergie potentielle totale de la structure, mesurée sur la configuration déformée Ω :

$$\delta W = \sum \int \{\delta e\}^T \{\sigma\}\,dV - \sum \int \{\delta u\}^T \{f_v\}\,dV - \sum \int \{\delta u\}^T \{f_s\}\,dS - \sum \sum \{\delta u\}^T \{F_i\} \tag{II.67}$$

Afin de simplifier l'expression précédente on peut poser :

$$\sum_{el}\int_{V}\{\delta u\}^T\{f_v\}\,dV+\sum_{el}\int_{\partial V}\{\delta u\}^T\{f_s\}\,dS+\sum_{el}\sum_{i}\{\delta u\}^T\{F_i\}=\sum_{el}\int_{D}\{\delta u\}^T\{f\}\,dD \qquad \text{(II.68)}$$

Cette intégrale englobant dans sa formulation les différents types de chargement appliqués à la structure (*dD* : élément de volume, surface, ...).

L'expression de δW devient :

$$\delta W=\sum_{el}\int_{V}\{\delta e\}^T\{\sigma\}\,dV-\sum_{el}\int_{D}\{\delta u\}^T\{f\}\,dD \qquad \text{(II.69)}$$

On rappelle que l'on a :

$$\{\delta u\}^T=<\delta u>=<\delta u\ ,\ \delta v\ ,\ \delta w> \qquad \text{(II.70)}$$

L'équation (II.69) est qualifiée de formulation eulérienne du fait que les seules variables indépendantes sont le vecteur position $\vec{R}(t)$ et le temps t. Cette description est très utilisée en mécanique des fluides où on fixe une région de l'espace dans laquelle on étudie des phénomènes dépendants du temps. Dans le cas de la mécanique des solides, on cherche à connaître principalement les déplacements des points d'un solide, ce qui explique que cette formulation ait assez peu d'intérêt dans ce cadre.

C'est pour cette raison que nous allons nous intéresser ici uniquement à la formulation lagrangienne (sous deux formes) qui elle fait appel aux variables $\vec{R}(t_0)$ et t.

Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels stipule que dans la configuration d'équilibre réelle de la structure son énergie potentielle totale est minimale [cf. WASHIZU K. (1968)-(1970)].

Parmi tous les déplacements cinématiquement admissibles, les déplacements réels rendent W extrémale.

Le principe du minimum implique [LAGRANGE J.L. (1853)][COURANT R. (1953)] :

$$\forall\ \{\delta d\}\quad \delta W=0 \qquad \text{(II.72)}$$

II.3.2.2 Formulation lagrangienne

Afin de pouvoir exprimer la formulation variationnelle relativement à une configuration de référence choisie (Ω^0 ou Ω^1) il est nécessaire d'utiliser les équations mises en place au paragraphe II.1 nous permettant de transformer les quantités exprimées relativement à la configuration Ω afin de les exprimer relativement à la configuration Ω^0. Le passage en variables de Lagrange nécessite également d'effectuer cette transformation sur les tenseurs de déformation et de contrainte.

Si nous utilisons les relations (II.22) et (II.34) qui relient les quantités eulériennes de déformation et de contrainte ($\{e\}$, $\{\sigma\}$) aux quantités lagrangiennes correspondantes ($\{\varepsilon\}_0$, $\{S\}_0$) nous pouvons calculer le produit $\{S\}_0^T \{\delta\varepsilon\}_0 \, dV^0$:

$$\{S\}_0^T \{\delta\varepsilon\}_0 \, dV^0 = \det([F]_0) \text{ trace } \left(([F]_0)^{-1} [\sigma] ([F]_0^T)^{-1} [F]_0^T [\delta e] [F]_0\right) dV^0 \quad \text{(II.73)}$$

cette expression se simplifie en utilisant l'équation (II.10) pour donner :

$$\{S\}_0^T \{\delta\varepsilon\}_0 \, dV^0 = \text{trace } \left([F]_0^{-1} [\sigma] [\delta e] [F]_0\right) dV \quad \text{(II.74)}$$

Théorème : Soit $[X]$ une matrice carrée et $[F]$ une matrice carrée inversible, alors les valeurs propres de $[X]$ et $[F]^{-1}$ $[X]$ $[F]$ sont les mêmes et on a : $\text{tr}([X]) = \text{tr}([F]^{-1} [X] [F])$.

On peut donc transformer l'équation (II.74) comme suit :

$$\{S\}_0^T \{\delta\varepsilon\}_0 \, dV^0 = \text{trace } \left([\sigma] [\delta e]\right) dV \quad \text{(II.75)}$$

soit encore en reprenant la première variation de l'énergie de déformation (cf. II.64) :

$$\delta u_e = \{\delta\varepsilon\}_0^T \{S\}_0 \, dV^0 = \{\delta e\}^T \{\sigma\} \, dV \quad \text{(II.76)}$$

Il y a donc équivalence énergétique entre les deux formulations (Eulérienne / Lagrangienne) et nous pourrons donc utiliser également l'expression suivante de l'énergie de déformation virtuelle définie en variables lagrangiennes après intégration sur le volume de chaque élément fini dans la configuration de référence et sommation sur les différents éléments constituant le solide étudié :

$$\delta U = \sum_{el} \int_V \{\delta e\}^T \{\sigma\} \, dV = \sum_{el} \int_{V^0} \{\delta\varepsilon\}_0^T \{S\}_0 \, dV^0 \quad \text{(II.77)}$$

On aboutit alors au résultat suivant en considérant que l'on décrit la configuration Ω à l'instant t en faisant référence à la configuration non déformée Ω^0, et en modifiant le terme correspondant à la première variation du travail des efforts extérieurs en accord avec (II.62) :

$$\delta W = \sum_{el} \int_{V^0} \{\delta\varepsilon\}_0^T \{S\}_0 \, dV^0 - \sum_{el} \int_{D^0} \{\delta u\}^T \{f\}^0 \, dD^0 = 0 \qquad \text{(II.78)}$$

en notant que pour la deuxième intégrale, qui englobe différents types de chargement, il y a plusieurs expressions de $\{f\}^0$ et dD^0 conformément à (II.68) :

$$\{f\}^0 = \{f_s\}^0 \quad \text{avec} \quad dD^0 = dS^0$$

$$\{f\}^0 = \{f_v\}^0 \quad \text{avec} \quad dD^0 = dV^0$$

avec en vertu des résultats de l'annexe A5 (A5.12) :

$$\{\delta\varepsilon\}_0 = ([B_L] + [B_{NL}]_0) \{\delta d_n\} \qquad \text{(II.79)}$$

Les matrices $[B_L]$ et $[B_{NL}]$ étant les matrices d'interpolation des déformations linéaires et non linéaires définies respectivement en annexe A3 (A3.17) et en annexe A4 (A4.12).

De la même manière, on peut exprimer le principe des travaux virtuels sur la configuration Ω relativement à la configuration Ω^1, cette configuration devenant alors la nouvelle configuration de référence bien que celle-ci soit déjà déformée. On obtient alors la forme intégrale suivante :

$$\delta W = \sum_{el} \int_{V^1} \{\delta\varepsilon\}_1^T \{S\}_1 \, dV^1 - \sum_{el} \int_{D^1} \{\delta u\}^T \{f\}^1 \, dD^1 = 0 \qquad \text{(II.80)}$$

avec à nouveau :

$$\{\delta\varepsilon\}_1 = ([B_L] + [B_{NL}]_1) \{\delta d_n\} \qquad \text{(II.81)}$$

L'équation (II.78) est appelée formulation lagrangienne totale (F.L.T.) et l'équation (II.80) est appelée formulation lagrangienne actualisée (F.L.A.). Au vu des équations (II.79) ou (II.81) par exemple, ces deux formulations sont non linéaires en fonctions des variables choisies, et nécessiteront par conséquent des méthodes de résolution des équations non linéaires, afin d'obtenir la solution du problème (cf. Chapitre IV).

La différence entre ces deux formulations, tient au fait que dans le premier cas on se réfère uniquement à la configuration initiale du solide étudié (Ω^0) ou configuration de repos (d'où le qualificatif de "totale"). Par contre dans le second cas on se réfère à une configuration intermédiaire (Ω^1), déjà déformée, cette configuration ayant été définie après actualisation de la géométrie initiale. Ceci implique que la géométrie initiale du solide définie par Ω^0 a été modifiée en Ω^1 en appliquant la transformation définie par :

II.3.3 Formulation incrémentale

Nous allons dans cette partie mettre en place les différents opérateurs nécessaires à la résolution numérique du problème non linéaire associé aux formulations intégrales mises en place en (II.78) et (II.80).

Il s'agit comme indiqué au chapitre IV, de la matrice tangente $[K_T]$ de la structure ainsi que du vecteur résidu des efforts $\{R\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\}$. Ceci nécessite la connaissance du vecteur des efforts intérieurs $\{F_{int}\}$, $\{F_{ext}\}$ étant connu (chargement appliqué).

Il est nécessaire afin d'évaluer la matrice tangente $[K_T]$, de considérer la forme incrémentale des formes intégrales mises en place en (II.78) et (II.80), ceci afin de pouvoir exprimer leur accroissement pour un incrément des déplacements.

Nous supposons que l'incrément de déplacement en un point M d'un élément fini entre les configurations Ω^1 et Ω^2 (supposées très proches) est $\{u\}^2{}_1$, qui est dû à un incrément des déplacements nodaux pour l'élément considéré, noté $\{d_n\}^2{}_1$. A cet incrément des déplacements nodaux $\{d_n\}^2{}_1$ correspond un incrément de la première variation de l'énergie potentielle totale $\delta W^{2\text{-}1}{}_0$ si on réfère à la configuration Ω^0. Cet incrément est défini par :

$$\delta W^{2\text{-}1}{}_0 = \delta W^2{}_0 - \delta W^1{}_0 \tag{II.83}$$

Considérons l'expression reliant la matrice de rigidité tangente $[K_T]$ à la deuxième variation de l'énergie potentielle totale de la structure mise en place au chapitre IV (cf. IV.27). Cette expression peut être modifiée en considérant un incrément de sa première variation, noté δW, égal à $W^{2\text{-}1}{}_0$ entre les configuration Ω^1 et Ω^2 qui sont supposées très proches. On a alors :

$$\delta W^{2\text{-}1}{}_0 = \{\delta d\}_0{}^T [K_T]^2{}_0 \{d\}^2{}_1 = \sum_{el} \{\delta d_n\}_0{}^T [k_T]^2{}_0 \{d_n\}^2{}_1 \tag{II.84}$$

Où $\{\delta d\}_0$ est un déplacement virtuel nodal des noeuds de la structure.

$\{\delta d_n\}_0$ est un déplacement virtuel nodal des noeuds d'un élément.

$[K_T]^2{}_0$ est la matrice tangente assemblée de la structure, dans la configuration Ω^2 relativement à la configuration Ω^0.

$[k_T]^2{}_0$ est la matrice tangente élémentaire.

Notons ici que la configuration Ω^1 est en équilibre, et que l'on souhaite après correction du vecteur des déplacements nodaux par $\{d\}^2{}_1$, que la configuration Ω^2 soit également en équilibre, ce qui implique d'après le principe des travaux virtuels :

$$\delta W^1{}_0 = \delta W^2{}_0 = 0 \tag{II.85}$$

Donc théoriquement on devrait trouver une solution telle que $\delta W^{2\text{-}1}{}_0 = 0$, mais il est pratiquement impossible de satisfaire cette condition vu le caractère non linéaire du problème et on n'obtiendra donc pas une configuration Ω^2 en équilibre. Il sera nécessaire d'itérer pour

Formulation lagrangienne totale

Dans le cas de la formulation lagrangienne totale référée à Ω^0 nous obtenons l'expression suivante de l'incrément de l'énergie potentielle totale :

$$\delta W^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} (\{\delta\varepsilon\}^2{}_0{}^T \{S\}^{2\text{-}1}{}_0 + \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0{}^T \{S\}^1{}_0)\, dV^0 - \sum_{el} \int_{D^0} \{\delta u\}^{2\,T} \{f\}^{2\text{-}1}{}_0\, dD^0 \quad \text{(II.86)}$$

en notant que $\{f\}^{2\text{-}1}{}_0$ est l'incrément du chargement extérieur.

Nous avons de plus les écritures suivantes :

$$\{\delta\varepsilon\}^2{}_0 = \{\delta\varepsilon\}^1{}_0 + \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0 \quad \text{(II.87)}$$

avec (cf. annexe A5) :

$$\{\delta\varepsilon\}^1{}_0 = \{\delta\varepsilon_L\}^1{}_0 + \{\delta\varepsilon_{NL}\}^1{}_0 = ([B_L]_0 + [B_{NL}]^1{}_0)\, \{\delta d_n\}_0 \quad \text{(II.88)}$$

en utilisant cette écriture également pour $\{\delta\varepsilon\}^2{}_0$ et en calculant $\{\delta\varepsilon\}^2{}_0 - \{\delta\varepsilon\}^1{}_0$ on obtient :

$$\{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0 = \{\delta\varepsilon_{NL}\}^{2\text{-}1}{}_0 = [B_{NL}]^{2\text{-}1}{}_0\, \{\delta d_n\}_0 \quad \text{(II.89)}$$

Formulation lagrangienne actualisée

Pour la formulation lagrangienne actualisée référée à Ω^1 nous obtenons l'expression suivante de l'incrément de l'énergie potentielle totale :

$$\delta W^{2\text{-}1}{}_1 = \sum_{el} \int_{V^1} (\{\delta\varepsilon\}^2{}_1{}^T \{S\}^{2\text{-}1}{}_1 + \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_1{}^T \{\sigma\}^1)\, dV^1 - \sum_{el} \int_{D^1} \{\delta u\}^{2\,T} \{f\}^{2\text{-}1}{}_1\, dD^1 \quad \text{(II.90)}$$

Notons que nous avons assimilé : $\{S\}^1{}_1 = \{\sigma\}^1$ (cf. II.36) et que $\{f\}^{2\text{-}1}{}_1$ est l'incrément du chargement extérieur dans ce cas.

Nous avons de plus les écritures suivantes :

$$\{\delta\varepsilon\}^2{}_1 = \{\delta\varepsilon\}^1{}_1 + \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_1 \quad \text{(II.91)}$$

avec (cf. annexe A5) :

$$\{\delta\varepsilon\}^1{}_1 = \{\delta\varepsilon_L\}^1{}_1 + \{\delta\varepsilon_{NL}\}^1{}_1 = [B_L]_1\, \{\delta d_n\}_1 \quad \text{(II.92)}$$

$[B_{NL}]^1{}_1 = [0]$ de manière évidente, car lorsque l'on confond la configuration de description et la configuration de référence, les déformations sont égales uniquement à leur partie linéaire.

On a également, pour la même raison que précédemment :

II.3.4 Expression des termes de la matrice de rigidité tangente

Maintenant que nous avons obtenu les formes variationnelles et les formulations incrémentales du type lagrangien total et lagrangien actualisé, le problème est de ramener l'expression de ${}^{2-1}\delta W_0$ ou de ${}^{2-1}\delta W_1$ sous la forme suivante (cf. II.84) qui fait apparaître la matrice de rigidité tangente élémentaire ${}^2[k_T]_x$:

$$ {}^{2-1}\delta W_x = \{\delta d\}_x^T {}^2[K_T]_x \{d\}^2_1 = \sum_{el} \{\delta d_n\}_x^T {}^2[k_T]_x \{d_n\}^2_1 \qquad \text{(II.94)} $$

L'indice x pouvant être égal à 0 ou 1 suivant que l'on réfère à la formulation lagrangienne totale ou bien à la formulation lagrangienne actualisée.

Pour réaliser cette opération il est nécessaire de considérer les différentes parties qui composent cette expression intégrale de ${}^{2-1}\delta W_x$, et de se servir des différentes relations mises en place dans la théorie des éléments finis. Celles-ci sont soit rappelées ici, soit présentées dans les annexes, en particulier en ce qui concerne les matrices d'interpolation des déformations linéaires et non linéaires (cf. annexe A3 et annexe A4) ainsi que l'expression de la première différentielle (ou variation) des déformations $\{\delta\varepsilon\}$ (cf. annexe A5).

Les notations seront dans ce paragraphe conformes à celles présentées au début de ce chapitre, à savoir que nous ferons apparaître les indices de configuration d'expression et de configuration de référence sur les quantités mises en place dans les annexes A3, A4 et A5.

Pour cette raison, nous allons examiner séparément la formulation lagrangienne totale et la formulation lagrangienne actualisée, appliquées à notre élément de coque dégénéré.

II.3.4.1 Expression de la matrice de rigidité tangente en F.L.T.

Afin de découper le problème de manière classique, nous allons considérer la décomposition suivante de l'incrément entre Ω^1 et Ω^2 de la première variation de l'énergie potentielle totale de la structure en référant à Ω^0 :

$$ {}^{2-1}\delta W_0 = ({}^{2-1}I_1)_0 + ({}^{2-1}I_2)_0 - ({}^{2-1}I_3)_0 \qquad \text{(II.95)} $$

Nous allons présenter la formulation matricielle qui permet de calculer les 2 expressions intégrales ${}^{2-1}(I_i)_0$ suivantes et les matrices de rigidité tangente élémentaires ${}^2[k_{Ti}]_0$ (i = 1,2) associées.

La troisième intégrale ${}^{2-1}(I_3)_0$ correspond à la variation de l'énergie potentielle virtuelle totale lorsque le chargement varie au cours de la déformation, ce qui n'est pas implanté dans le programme de calcul. Néanmoins il n'est pas plus difficile d'obtenir comme nous allons le faire pour les deux premières intégrales, une expression matricielle de cette quantité [cf. BATOZ

Nous avons pour les deux premières intégrales :

$$(I_1)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} \{\delta\varepsilon\}^2{}_0{}^T \{S\}^{2\text{-}1}{}_0 \, dV^0 \qquad (I_2)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0{}^T \{S\}^1{}_0 \, dV^0 \qquad \text{(II.96.a-b)}$$

Calcul de $(I_1)^{2\text{-}1}{}_0$: $$(I_1)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} \{\delta\varepsilon\}^2{}_0{}^T \{S\}^{2\text{-}1}{}_0 \, dV^0$$

On a vu que la loi de comportement correspondant aux matériaux élastiques retenus dans cette étude, est linéaire (cf. II.43) et nous écrirons dans le repère global lié à la structure initiale de référence Ω_0 :

$$\{S\}^{2\text{-}1}{}_0 = [E] \, \{\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0 \qquad \text{(II.97)}$$

Nota : la linéarité constitutive implique que la matrice $[E]$ ne dépend pas de $\{d_n\}^2{}_1$.

On peut donc écrire :

$$(I_1)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} \{\delta\varepsilon\}^2{}_0{}^T [\mathrm{E}] \, \{\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0 \, dV^0 \qquad \text{(II.98)}$$

L'expression de la première variation des déformations complètes est (cf. annexe A5) :

$$\{\delta\varepsilon\}^2{}_0 = ([B_L]_0 + [B_{NL}]^2{}_0) \, \{\delta d_n\}_0 \qquad \text{(II.99)}$$

Pour les expressions de $[B_L]_0$ et $[B_{NL}]^2{}_0$ on se reportera aux annexes A3 et A4.

De plus il est possible en utilisant les propriétés de forme quadratique de chacune des composantes de $\{\varepsilon_{NL}\}$ (cf. annexe A5) :

$$\{\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0 = ([B_L]_0 + [B_{NL}]^2{}_0) \, \{d_n\}^2{}_1 \qquad \text{(II.100)}$$

Ceci nous permet de calculer $(I_1)^{2\text{-}1}{}_0$:

$$(I_1)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} \{\delta d_n\}_0{}^T ([B_L]_0 + [B_{NL}]^2{}_0)^T [E] \, ([B_L]_0 + [B_{NL}]^2{}_0) \, \{d_n\}^2{}_1 \, dV^0 \qquad \text{(II.101)}$$

Par identification avec la définition de $[k_{T1}]$ (II.94) :

$$(I_1)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \{\delta d_n\}_0{}^T [k_{T1}]^2{}_0 \{d_n\}^2{}_1 \tag{II.102}$$

on peut sortir $\{\delta d_n\}_0$ et $\{d_n\}^2{}_1$ de l'intégrale $(I_1)^{2\text{-}1}{}_0$ et on en déduit donc l'expression de la première partie de la matrice de rigidité tangente :

$$[k_{T1}]^2{}_0 = \int_{V^0} ([B_L]_0 + [B_{NL}]^2{}_0)^T [E]\ ([B_L]_0 + [B_{NL}]^2{}_0)\ dV^0 \tag{II.103}$$

avec l'expression suivante (cf. annexe A5) de la ligne i de la matrice $[B_{NL}]^2{}_0$:

$$<B_{NL}>^2{}_0{}^i = <d_n>^2{}_0 [L]^0{}^T [Q]^0{}^T [F_i]\ [Q]^0\ [L]^0 \tag{II.104}$$

Ensuite on peut séparer cette matrice en 2 parties comme suit :

$$[k_{T1}]^2{}_0 = [k_{T1}]_{0\,L} + [k_{T1}]^2{}_{0\,NL} \tag{II.105}$$

La première matrice $[k_{T1}]_{0\,L}$ est simplement la matrice de rigidité linéaire classique utilisée dans le cas de calculs linéaires.

La deuxième matrice $[k_{T1}]^2{}_{0\,NL}$ est de manière évidente symétrique et modifie la matrice de rigidité linéaire en apportant des termes qui englobent les non-linéarités dues à la prise en compte des déformations supplémentaires quadratiques dans l'expression des déformations complètes.

$[k_{T1}]_{0\,L}$: Matrice de rigidité linéaire :

$$[k_{T1}]_{0L} = \int_{V^0} [B_L]_0{}^T [E]\ [B_L]_0\ dV^0 \tag{II.106}$$

$[k_{T1}]^2{}_{0\,NL}$: Matrice de rigidité non linéaire dite des déplacements initiaux :

$$[k_{T1}]^2{}_{0NL} = \int_{V^0} [B_{NL}]^2{}_0{}^T [E][B_L]_0 + [B_L]_0{}^T [E][B_{NL}]^2{}_0\ dV^0 + \int_{V^0} [B_{NL}]^2{}_0{}^T [E][B_{NL}]^2{}_0 dV^0 \tag{II.107}$$

Par la suite on la note simplement $[k]^2{}_0$.

Elle se décompose en : $[k]^2{}_0 = [k_L]_0 + [k_{NL}]^2{}_0$ (II.108)

Calcul de $(I_2)^{2\text{-}1}{}_0$: $$(I_2)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0{}^T \{S\}^1{}_0 dV^0$$

Dans cette expression on a un produit scalaire des 6 composantes de l'incrément de déformations virtuelles $\{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0$ et du vecteur contrainte P.K.2 $\{S\}^1{}_0$ ce qui peut donc se réécrire par transposition :

$$(I_2)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} \{S\}^1{}_0{}^T \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0 dV^0 \qquad \text{(II.109)}$$

On a montré que la $i^{ème}$ composante de $\{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0$ est égale à (cf. annexe A5) :

$$\{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_{0\,i} = <\delta d_n>^2{}_1 [L]^{0\,T} [Q]^{0\,T} [F_i]\, [Q]^0\, [L]^0\, \{\delta d_n\}_0 \qquad \text{(II.110)}$$

les matrices à termes constants $[F_i]$ étant définies en annexe A4 (cf. A4.7-8).

Il est alors possible de faire le produit scalaire des composantes de $\{S\}^1{}_0$ et de $\{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0$ pour former $(I_2)^{2\text{-}1}{}_0$.

Ce produit scalaire peut s'écrire :

$$(I_2)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \int_{V^0} \sum_{i=1}^{6} S^1{}_{0\,i}\, (\{d_n\}^2{}_1{}^T [L]^{0\,T} [Q]^{0\,T} [F_i]\, [Q]^0\, [L]^0\, \{\delta d_n\}_0)\, dV^0 \qquad \text{(II.111)}$$

En faisant la somme des 6 produits 2 à 2 des composantes de $\{S\}^1{}_0$ et de $\{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_0$.

Ensuite on peut écrire ceci sous la forme :

$$(I_2)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \{d_n\}^2{}_1{}^T \int_{V^0} \sum_{i=1}^{6} S^1{}_{0\,i}\, ([L]^{0\,T} [Q]^{0\,T} [F_i]\, [Q]^0\, [L]^0)\, dV^0\, \{\delta d_n\}_0 \qquad \text{(II.112)}$$

par identification avec la définition de $[k_{T2}]$ (II.94) :

$$(I_2)^{2\text{-}1}{}_0 = \sum_{el} \{\delta d_n\}_0{}^T [k_{T2}]^2{}_0 \{d_n\}^2{}_1 \qquad \text{(II.113)}$$

On obtient l'expression suivante de la deuxième partie de la matrice de rigidité tangente :

$$[k_{T2}]^2{}_0 = \int_{V^0} \sum_{i=1}^{6} S^1{}_{0\,i}\, [L]^{0\,T} [Q]^{0\,T} [F_i]\, [Q]^0\, [L]^0\, dV^0 \qquad \text{(II.114)}$$

Il est possible de regrouper dans une seule matrice $[F_S]^1{}_0$ la somme des 6 matrices $[F_i]$ (i = 1,6)multipliées par $S^{1}{}_{0\,i}$.

L'expression simplifiée de $[k_{T2}]^2{}_0$ devient :

$$[k_{T2}]^2{}_0 = \int_{V^0} [L]^{0\,T}[Q]^{0\,T}[F_S]^1{}_0\,[Q]^0\,[L]^0\,dV^0 \qquad \text{(II.115)}$$

La matrice $[F_S]^1{}_0$ étant égale à : $[F_S]^1{}_0 = \sum_{i=1}^{6} S^{1}{}_{0\,i}\ .\ [F_i]$ (II.116)

On peut donner une expression de $[F_S]^1{}_0$ simple plutôt que d'utiliser les matrices $[F_i]$ définies en annexe A4 (cf. A4.7). Par identification on trouve :

$$[F_S]^1{}_{0\,(9x9)} = \begin{bmatrix} [S]^1{}_0 & [0] & [0] \\ [0] & [S]^1{}_0 & [0] \\ [0] & [0] & [S]^1{}_0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.117)}$$

$[S]^1{}_0$ étant le tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff de seconde espèce (P.K.2) défini sur Ω^1 et relatif à Ω^0. [0] la matrice 3x3 à coefficients nuls.

Cette partie de la matrice de rigidité tangente est dite matrice de rigidité géométrique de la structure (ou de contraintes initiales). Elle est également symétrique vue la forme de $[F_S]^1{}_0$.

Remarque : On peut voir que $[k_{T2}]^2{}_0$ ne dépend que des configurations Ω^1 et Ω^0 en formulation lagrangienne totale car elle traduit le fait que les contraintes ne s'expriment pas dans les mêmes référentiels entre ces deux configurations. Elle permet ainsi lors des itérations (cf. Chapitre IV) de corriger la matrice de rigidité tangente $[k_T]^2{}_0$ en référant ainsi les contraintes à la configuration Ω^1 sans pour autant avoir réactualisé la géométrie entre Ω^1 et Ω^0, comme en formulation lagrangienne actualisée.

Par la suite on prendra la notation habituelle utilisée pour cette matrice : $[k_\sigma]^2{}_0$ ou $[k_\sigma]^1{}_0$ du fait de la remarque précédente.

Expression finale de la matrice de rigidité tangente

On peut maintenant donner l'expression de la matrice de rigidité tangente de la structure en fonction des matrices utilisées dans la formulation présentée dans cette étude :

$$[k_T]^2{}_0 = [k_{T1}]^2{}_0 + [k_{T2}]^2{}_0 \tag{II.118}$$

Où encore avec les notations usuelles explicitées :

$$[k_T]^2{}_0 = [k_L]_0 + [k_{NL}]^2{}_0 + [k_\sigma]^2{}_0 \tag{II.119}$$

La matrice tangente $[k_T]^2{}_0$ a donc l'expression suivante :

$$\begin{aligned}[k_T]^2{}_0 = & \int_{V^0} [B_L]_0{}^T [E][B_L]_0 \, dV^0 \\ & + \int_{V^0} [B_{NL}]^2{}_0{}^T [E][B_L]_0 + [B_L]_0{}^T [E][B_{NL}]^2{}_0 \, dV^0 + \int_{V^0} [B_{NL}]^2{}_0{}^T [E][B_{NL}]^2{}_0 \, dV^0 \\ & + \int_{V^0} [L]^0{}^T [Q]^0{}^T [F_S]^1{}_0 \, [Q]^0 \, [L]^0 \, dV^0\end{aligned} \tag{II.120}$$

II.3.4.2 Expression de la matrice de rigidité tangente en F.L.A.

Dans le cas de la formulation lagrangienne actualisée nous avons la décomposition suivante de l'incrément entre Ω^1 et Ω^2 de la première variation de l'énergie potentielle totale de la structure en référant à Ω^1 :

$$\delta W^{2\text{-}1}{}_1 = (I_1)^{2\text{-}1}{}_1 + (I_2)^{2\text{-}1}{}_1 \tag{II.121}$$

Contrairement au cas de la F.L.T., nous n'allons pas présenter la formulation matricielle complète qui permet de calculer les 2 expressions intégrales $(I_i)^{2\text{-}1}{}_1$ et les matrices de rigidité tangente élémentaires $[k_{Ti}]^2{}_1$ (i = 1, 2) associées. Nous allons nous servir des résultats mis en place en F.L.T. et les particulariser au cas de la F.L.A. en référant à Ω^1 au lieu de Ω^0.

Nous avons :

$$(I_1)^{2\text{-}1}{}_1 = \sum_{el} \int_{V^1} \{\delta\varepsilon\}^2{}_1{}^T \{S\}^{2\text{-}1}{}_1 dV^1 \qquad (I_2)^{2\text{-}1}{}_1 = \sum_{el} \int_{V^1} \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_1{}^T \{\sigma\}^1 dV^1 \qquad \text{(II.122.a-b)}$$

Calcul de $(I_1)^{2\text{-}1}{}_1$: $$(I_1)^{2\text{-}1}{}_1 = \sum_{el} \int_{V} \{\delta\varepsilon\}^2{}_1{}^T \{S\}^{2\text{-}1}{}_1 dV^1$$

On obtient en suivant la même démarche qu'en F.L.T. :

$$[k_{T1}]^2{}_1 = \int_V ([B_L]_1 + [B_{NL}]^2{}_1)^T [E]\ ([B_L]_1 + [B_{NL}]^2{}_1)\ dV^1 \qquad \text{(II.123)}$$

On peut à nouveau séparer cette matrice en une partie linéaire et une partie non linéaire :

$$[k_{T1}]^2{}_1 = [k_{T1}]_{1\,L} + [k_{T1}]^2{}_{1\,NL} \qquad \text{(II.124)}$$

$[k_{T1}]_{1\,L}$: Matrice de rigidité linéaire :

$$[k_{T1}]_{1L} = \int_V [B_L]_1{}^T [E]\ [B_L]_1\ dV^1 \qquad \text{(II.125)}$$

$[k_{T1}]^2{}_{1\,NL}$: Matrice de rigidité non linéaire dite des déplacements initiaux :

$$[k_{T1}]^2{}_{1\,NL} = \int_V [B_{NL}]^2{}_1{}^T [E][B_L]_1 + [B_L]_1{}^T [E][B_{NL}]^2{}_1\ dV^1 + \int_V [B_{NL}]^2{}_1{}^T [E][B_{NL}]^2{}_1\ dV^1 \qquad \text{(II.126)}$$

Par la suite on la note simplement $[k]^2{}_1$.

Elle se décompose en : $$[k]^2{}_1 = [k_L]_1 + [k_{NL}]^2{}_1 \qquad \text{(II.127)}$$

Calcul de $(I_2)^{2\text{-}1}{}_1$: $$(I_2)^{2\text{-}1}{}_1 = \sum_{el} \int_{V} \{\delta\varepsilon\}^{2\text{-}1}{}_1{}^T \{\sigma\}^1 dV^1 \qquad \text{(II.128)}$$

L'expression simplifiée de $[k_{T2}]^2{}_0$ est :

$$[k_{T2}]^2{}_1 = \int_V [L]^1{}^T [Q]^1{}^T [F_\sigma]^1 [Q]^1 [L]^1 \, dV^1 \tag{II.129}$$

La matrice $[F_\sigma]^1$ étant égale à : $[F_\sigma]^1 = \sum_{i=1}^{6} \sigma^1{}_i \, . \, [F_i]$ (II.130)

On peut donner l'expression de $[F_\sigma]^1$ suivante :

$$[F_\sigma]^1{}_{(9x9)} = \begin{bmatrix} [\sigma]^1 & [0] & [0] \\ [0] & [\sigma]^1 & [0] \\ [0] & [0] & [\sigma]^1 \end{bmatrix} \tag{II.131}$$

$[\sigma]^1$ étant le tenseur de contrainte de Cauchy défini sur Ω^1. [0] est la matrice 3x3 à coefficients nuls.

La matrice de rigidité géométrique ainsi définie est également symétrique vue la forme de $[F_\sigma]^1$.

Remarque : On peut voir que $[k_{T2}]^2{}_1$ ne dépend que de la configuration Ω^1 en F.L.A.

Par la suite on prendra la notation habituelle utilisée pour cette matrice : $[k_\sigma]^2{}_1$ ou $[k_\sigma]^1$ du fait de la remarque précédente.

Expression finale de la matrice de rigidité tangente

On peut maintenant donner l'expression de la matrice de rigidité tangente de la structure en fonction des matrices utilisées dans la formulation présentée dans cette étude :

$$[k_T]^2{}_1 = [k_{T1}]^2{}_1 + [k_{T2}]^2{}_1 \tag{II.132}$$

Où encore avec les notations usuelles explicitées :

$$[k_T]^2{}_1 = [k_L]_1 + [k_{NL}]^2{}_1 + [k_\sigma]^2{}_1 \tag{II.133}$$

La matrice tangente $[k_T]^2{}_1$ a donc l'expression suivante :

$$[k_T]^2{}_1 = \int_V [B_L]_1{}^T [E]\,[B_L]_1\, dV^1 + \int_V [B_{NL}]^2{}_1{}^T [E]\,[B_L]_1 + [B_L]_1{}^T [E]\,[B_{NL}]^2{}_1\, dV^1 + \int_V [B_{NL}]^2{}_1{}^T [E]\,[B_{NL}]^2{}_1\, dV^1 + \int_V [L]^1{}^T [Q]^1{}^T [F_\sigma]^1\,[Q]^1\,[L]^1\, dV^1 \qquad \text{(II.134)}$$

II.3.5 Mise en place du vecteur des forces intérieures

Pour calculer les efforts intérieurs il est nécessaire de revenir à la définition de ceux ci. On part donc de l'expression de l'énergie de déformation volumique de la structure notée $u^2{}_x$ ou énergie volumique due aux efforts intérieurs à la structure en référant à la configuration Ω^x, avec $x = 0$ en F.L.T. et $x = 1$ en F.L.A. :

$$U^2{}_x = \sum_{el} \int_D u_e{}^2{}_x\, dV^x = \sum_{el} \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^2{}_x{}^T \{S\}^2{}_x\, dV^x \qquad \text{(II.135)}$$

Or par définition des efforts intérieurs [IMBERT J.F. (1984) p. 83] on a $\delta U^2{}_x$ qui se met sous la forme suivante :

$$\delta U^2{}_x = \{\delta d\}_x{}^T \{F_{int}\}^2{}_x = \sum_{el} \{\delta d_n\}_x{}^T \{f_{int}\}^2{}_x \qquad \text{(II.136)}$$

En différentiant l'expression de $U^2{}_x$ et en l'égalant à la partie de droite on écrit :

$$\delta U^2{}_x = \sum_{el} \int_V \{\delta\varepsilon\}^2{}_x{}^T \{S\}^2{}_x\, dV^x = \sum_{el} \{\delta d_n\}_x{}^T \{f_{int}\}^2{}_x \qquad \text{(II.137)}$$

En utilisant les résultats précédents (cf. annexe A5) pour $\{\delta\varepsilon\}^2{}_x$:

$$\{\delta\varepsilon\}^2{}_x = ([B_L]_x + [B_{NL}]^2{}_x)\, \{\delta d_n\}_x \qquad \text{(II.138)}$$

On peut donc réécrire ${\delta U^2}_x$ comme suit :

$$\begin{aligned} {\delta U}^2{}_x &= \sum_{el} \int_V \{\delta d_n\}_x^T ([B_L]_x + [B_{NL}]^2{}_x)^T \{S\}^2{}_x \, dV^x \\ &= \sum_{el} \{\delta d_n\}_x^T \int_V ([B_L]_x + [B_{NL}]^2{}_x)^T \{S\}^2{}_x \, dV^x \end{aligned} \tag{II.139}$$

Puis par identification avec l'expression ci dessus de ${\delta U^2}_x$:

$$\{f_{int}\}^2{}_x = \int_V ([B_L]_x + [B_{NL}]^2{}_x)^T \{S\}^2{}_x \, dV^x \tag{II.140}$$

Où $[B_L]_x$ et $[B_{NL}]^2{}_x$ sont les matrices d'interpolation des déformations linéaires et non linéaires relatives à notre élément de coque dégénéré (cf. annexe A3, annexe A4).

Pour aboutir à une expression finale ne faisant pas intervenir le vecteur colonne des contraintes mais celui des déplacements nodaux, on revient aux déformations puis aux déplacements nodaux en utilisant les relations précédentes.

On a en effet la relation (cf. II.43):

$$\{S\}^2{}_x = [E] \{\varepsilon\}^2{}_x = [E] ([B_L]_x + \frac{1}{2} [B_{NL}]^2{}_x) \{d_n\}_x \tag{II.141}$$

Ce qui nous donne pour $\{f_{int}\}^2{}_x$:

$$\{f_{int}\}^2{}_x = \int_V ([B_L]_x + [B_{NL}]^2{}_x)^T [E] ([B_L]_x + \frac{1}{2} [B_{NL}]^2{}_x) \{d_n\}_x \, dV^x \tag{II.142}$$

On écrit alors les efforts intérieurs sous la forme suivante :

$$\{f_{int}\}^2{}_x = [\psi]^2{}_x \{d_n\}_x \tag{II.143}$$

L'expression de la matrice $[\psi]^2{}_x$ étant :

$$[\psi]^2{}_x = \int_V ([B_L]_x + [B_{NL}]^2{}_x)^T [E] ([B_L]_x + \frac{1}{2} [B_{NL}]^2{}_x) \, dV^x \tag{II.144}$$

On remarque que contrairement à la matrice de rigidité tangente et aux autres matrices de rigidité définies précédemment, la matrice $[\psi]^2_x$ définissant les efforts internes n'est pas symétrique.

Chapitre III

Intégration explicite dans l'épaisseur

III.1 Ecriture explicite des différentes quantités

On entend par écriture explicite, un développement limité en série polynomiale des expressions précédentes intervenant dans le calcul des différents termes de la matrice de rigidité tangente, des efforts intérieurs, en fonction de la variable locale dans l'épaisseur de l'élément : t. On parle parfois à ce stade de pré-intégration [cf. LASHET G., JEUSETTE J.P., BECKERS P. (1989) pp. 257-260]. Néanmoins nous allons voir que ceci n'est pas suffisant car pour pouvoir ensuite réaliser l'intégration explicite dans l'épaisseur de l'élément, il est nécessaire d'avoir les caractéristiques homogénéisées des matériaux utilisés, en particulier pour les multicouches et sandwiches.

Pour l'écriture d'une quantité matricielle $[M(\xi,\eta,t)]$ on cherchera donc à donner le résultat sous la forme d'une approximation (justifiée) telle que, l'on ne conservera qu'un certain nombre de termes (au nombre de n+1) soit les n+1 matrices $[M_i(\xi,\eta)]$ $(i = 0, n)$ du développement en série de $[M(\xi,\eta,t)]$. La convergence des différentes séries étant supposée vérifiée par la suite, on écrira :

$$[M(\xi,\eta,t)] = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \, [M_i(\xi,\eta)] \approx \sum_{i=0}^{n} t^i \, [M_i(\xi,\eta)] \qquad \text{(III.1)}$$

Cette formulation comme on le verra dans la suite de cette étude est souvent pratique, en particulier pour l'intégration explicite des matrices de rigidité dans l'épaisseur de l'élément.

Pour des raisons de clareté, et afin de ne pas compliquer inutilement les développements qui suivent, nous omettrons les indices de configuration de description et de référence mis en place au chapitre II. Il convient donc, implicitement, de faire suivre les quantités lagrangiennes des indices ${}^{2}_{0}$ en F.L.T. ou ${}^{2}_{1}$ en F.L.A., alors que pour ce qui est des quantités eulériennes

III.1.1 La géométrie

L'écriture explicite de la géométrie est comme nous le verrons au paragraphe III.3 utile à la mise en place des éléments du Jacobien [J].

L'écriture matricielle (I.27) permet d'écrire le développement exact de la matrice d'interpolation géométrique [Φ] qui se limite à l'ordre 1 en t du fait de nos hypothèses de construction de l'élément de coque 3D dégénéré. On obtient donc :

$$[\Phi(\xi,\eta,t)] = \sum_{i=0}^{1} t^i \, [\Phi_i(\xi,\eta)] \qquad \text{(III.2)}$$

On écrit donc l'interpolation géométrique sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \{R(\xi,\eta,t)\} = [\Phi(\xi,\eta,t)]\,\{C\} = \left([\Phi_0(\xi,\eta)] + t\,[\Phi_1(\xi,\eta)]\right)\{C\} \qquad \text{(III.3)}$$

Le vecteur colonne définissant la géométrie de l'élément étant égal à :

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \{C_1\} \\ \{C_2\} \\ . \\ . \\ \{C_n\} \end{Bmatrix}_{(6n\text{x}1)} \qquad \text{et} \qquad \{C_i\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ V_{3xi} \\ V_{3yi} \\ V_{3zi} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.4.a-b)}$$

[Φ_0] et [Φ_1] sont des matrices indépendantes de t.

On construit les matrices [Φ_δ] ($\delta = 0,1$) par juxtaposition des n matrices [$\Phi_\delta{}^i$] (i=1, n) comme nous l'avons fait pour la matrice [Φ] :

$$[\Phi_\delta] = \left[[\Phi_\delta{}^1] \, , \, [\Phi_\delta{}^2] \, , \, [\Phi_\delta{}^3] \, , \, \ldots \, , \, [\Phi_\delta{}^n]\right] \qquad (\delta = 0,\, 1) \qquad \text{(III.5)}$$

La matrice [$\Phi_0{}^i$] étant définie de la manière suivante :

$$[\Phi_0{}^i] = N_i(\xi,\eta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.6)}$$

et pour la matrice [$\Phi_1{}^i$] :

$$[\Phi_1{}^i] = N_i(\xi,\eta) \frac{(h_i)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \end{bmatrix}$$

III.1.2 La cinématique

L'écriture explicite de la cinématique est utile à la mise en place des matrices d'interpolation des déformations linéaires et non linéaires au niveau de la définition de la matrice $[L]$ qui relie le vecteur des déplacements dérivés par rapport aux coordonnées intrinsèques $\{u_{,\xi}\}$, au vecteur des déplacements nodaux $\{d_n\}$.

L'écriture matricielle I.55 donne le développement exact de la matrice d'interpolation cinématique qui se limite à l'ordre 1 en t au sens de nos hypothèses de départ :

$$[A(\xi,\eta,t)] = \sum_{i=0}^{1} t^i \, [A_i(\xi,\eta)] \qquad \text{(III.8)}$$

On écrit l'interpolation cinématique sous la forme suivante comme pour l'interpolation géométrique :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \{u(\xi,\eta,t)\} = [A(\xi,\eta,t)] \, \{d_n\} = \left([A_0(\xi,\eta)] + t \, [A_1(\xi,\eta)] \right) \{d_n\} \qquad \text{(III.9)}$$

$[A_0]$ et $[A_1]$ étant des matrices indépendantes de t définies en (III.12) et (III.13).

Le vecteur colonne des déplacements nodaux étant égal à :

$$\{d_n\} = \begin{Bmatrix} \{d_{n_1}\} \\ \{d_{n_2}\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{d_{n_n}\} \end{Bmatrix}_{(5n \times 1)} \qquad \text{et} \qquad \{d_{n_i}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.10.a-b)}$$

On construit comme précédemment la matrice $[A_\delta]$ ($\delta = 0, 1$) par juxtaposition des n matrices $[A_\delta{}^i]$ ($i = 1, n$) :

$$[A_\delta] = \left[[A_\delta{}^1] \, , \, [A_\delta{}^2] \, , \, [A_\delta{}^3] \, , \, \ldots \, , \, [A_\delta{}^n] \right] \qquad (\delta = 0, 1) \qquad \text{(III.11)}$$

L'expression de la matrice $[A_0{}^i]$ étant égale à :

$$[A_0{}^i] = N_i(\xi,\eta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.12)}$$

Et celle de $[A_1{}^i]$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & V_{1xi} & -V_{2xi} \end{bmatrix}$$

III.1.3 La matrice jacobienne

La matrice Jacobienne est la matrice qui permet de définir le passage des dérivations en repère global (x,y,z) aux dérivations en repère local sur un élément (espace paramétrique ξ,η,t).

Pour les dérivations de la première composante du vecteur déplacement $\{u\}$ par rapport aux coordonnées des 2 repères on a :

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,t} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \end{Bmatrix} \tag{III.14}$$

On peut aussi écrire cette relation pour les 2 autres composantes de déplacement v et w.

L'expression de la matrice Jacobienne $[J]$ utilisée ici est donnée par les dérivées de x, y, z par rapport à ξ, η, t :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{III.15}$$

L'expression des différentes matrices de rigidité définies dans cette étude fait intervenir la matrice $[J]$ ou plus exactement $[J]^{-1}$ puisque l'on définit les relations entre les déformations à l'aide d'une matrice $[Q]$, construite avec la matrice Jacobienne inverse $[J]^{-1}$ (cf. annexe A3) :

$$\{u_{,x}\} = [Q]\ \{u_{,\xi}\} \tag{III.16}$$

La matrice $[Q]$ étant égale à (cf. A3.14) :

$$[Q] = \begin{bmatrix} [J]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [J]^{-1} & [0] \\ [0] & [0] & [J]^{-1} \end{bmatrix} \tag{III.17}$$

Mais on verra (III.107) que l'expression du Jacobien de la transformation de coordonnées (qui est égal au déterminant de $[J]$) intervient aussi dans l'expression des quantités à intégrer pour le calcul des matrices de rigidité élémentaires puisque :

$$dV = dx\,dy\,dz = |J|\,d\xi\,d\eta\,dt \tag{III.18}$$

Avec : $$|J| = det\,[J] \tag{III.19}$$

$[J]$ est une matrice fonction du point où l'on se place sur l'élément, c'est à dire des 3 variables ξ, η, t.

Notre but étant de réaliser l'intégration explicite dans l'épaisseur (c'est à dire en fonction de la variable t) des différentes matrices de rigidité, il est nécessaire de donner le développement en série en fonction de la variable t, des matrices $[J]$, $[J]^{-1}$, $[Q]$ et du Jacobien $|J|$.

III.1.3.1 Formulation générale

Nous avons montré (III.2) que l'interpolation géométrique sur l'élément est linéaire en fonction de la variable t, avec nos hypothèses constructives :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \left([\Phi_0(\xi,\eta)] + t\,[\Phi_1(\xi,\eta)] \right) \{c\} \qquad \text{(III.20)}$$

On montre en utilisant la relation (III.15) que $[J]$ est également linéaire en fonction de t, toujours au sens de nos hypothèses de construction de l'élément, ce qui nous permet d'écrire [cf. STANLEY G.M. (1985)] :

$$[J(\xi,\eta,t)] = \sum_{i=0}^{1} t^i\,[J_i(\xi,\eta)] \qquad \text{(III.21)}$$

Mais on prendra l'écriture suivante plus souvent utilisée, où l'on change le signe du second terme $[J_1]$ [cf. VLACHOUTSIS S. (1987)] :

$$[J(\xi,\eta,t)] = [J_0(\xi,\eta)] - t\,[J_1(\xi,\eta)] \qquad \text{(III.22)}$$

$[J_0]$: Matrice Jacobienne définie sur la surface moyenne ($t = 0$).

$[J_1]$: Matrice indépendante de t traduisant la variation de $[J]$ dans l'épaisseur de la coque.

Cette écriture de la matrice jacobienne pour l'élément de coque dégénéré a été proposée par divers auteurs qui se sont intéressés à la "pré-intégration" de certaines quantités mathématiques dans l'épaisseur de la coque [LASHET G., JEUSETTE J.P., BECKERS P. (1989)], [HAAS D.J., LEE S.W. (1987)].

D'autres auteurs ne retiennent qu'une formulation simplifiée dans laquelle ils considèrent dès le départ que la matrice jacobienne reste constante dans l'épaisseur, ce qui est correct comme nous le verrons dans le cas des plaques ou des coques pour lesquelles l'épaisseur reste quasi constante et faible devant le rayon de courbure [cf. CHAO W.C., REDDY J.N. (1984)], [cf. MOSER K., SCHMID A. (1989)].

Nous allons revenir dans ces développements à des relations et définitions de la géométrie

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\xi = X^1 \quad \eta = X^2 \quad t = X^3 \tag{III.23}$$

Nous pouvons écrire le vecteur position du point M comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{R}(X^1,X^2,X^3) = \overrightarrow{R_0}\,(X^1,X^2) + X^3\,\overrightarrow{a_3}(X^1,X^2) \tag{III.24}$$

Le vecteur $\overrightarrow{R_0}$ est le vecteur position du point correspondant sur la surface moyenne et $\overrightarrow{a_3}$ est le vecteur normal à la surface moyenne.

Nous notons qu'il y a équivalence entre la définition de la géométrie de l'élément fini telle que vue au chapitre I (I.23) et celle déduite de la relation (III.24) si nous avons :

$$\overrightarrow{R_0} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\,\overrightarrow{R_{0\,i}} \tag{III.25}$$

$$\overrightarrow{a_3} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\,\frac{h_i}{c}\,\overrightarrow{V_{3\,i}} \tag{III.26}$$

Avec $\overrightarrow{R_{0i}}$ le vecteur position du noeud i de la surface moyenne.

D'après la géométrie des surfaces nous pouvons définir les vecteurs $\overrightarrow{a_\alpha}$ de la base locale définissant la surface moyenne (en utilisant dans ces développements la convention usuelle adoptée en géométrie des surfaces en ce qui concerne la position des indices) :

$$\overrightarrow{a_\alpha} = \frac{\partial \overrightarrow{R_0}}{\partial X^\alpha} \qquad (\alpha = 1,2) \tag{III.27}$$

puis nous définissons le vecteur normal $\overrightarrow{a_3}$ par :

$$\overrightarrow{a_3} = \frac{\overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2}}{\left\| \overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2} \right\|} \tag{III.28}$$

Pour tous les points hors de la surface moyenne nous avons :

$$\overrightarrow{g_i} = \frac{\partial \overrightarrow{R}}{\partial X^i} \qquad (i = 1, 3) \tag{III.29}$$

donc :

$$\overrightarrow{g_3} = \overrightarrow{a_3} \tag{III.30}$$

On définit le tenseur fondamental $[a]$ de composantes $a_{\alpha\beta}$ par la relation :

avec :

$$a^{\alpha\lambda}\, a_{\lambda\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} \tag{III.32}$$

où $\delta^{\alpha}{}_{\beta}$ est le symbole de Krönecker.

On définit le deuxième tenseur fondamental $[b]$ de composantes $b_{\alpha\beta}$ par la relation :

$$b_{\alpha\beta} = -\overrightarrow{a_{3,\alpha}}.\overrightarrow{a_{\beta}} \tag{III.33}$$

avec :

$$b_{\alpha}{}^{\gamma} = a^{\gamma\lambda}\, b_{\lambda\alpha} \tag{III.34}$$

Nous utilisons la formule de WEINGARTEN :

$$\overrightarrow{a_{3,\alpha}} = -b_{\alpha}{}^{\gamma}\,\overrightarrow{a_{\gamma}} \tag{III.35}$$

Les termes $b_1{}^1$, $b_2{}^2$ représentent les courbures et $b_1{}^2$, $b_2{}^1$ les torsions de la surface moyenne [FLÜGGE W. (1972) pp. 136-137].

Nous définissons le tenseur métrique $[g]$:

$$g_{ij} = \overrightarrow{g_i}\cdot\overrightarrow{g_j} \tag{III.36}$$

$$\det [g_{ij}] = g \tag{III.37}$$

Nous écrivons en accord avec (III.27-37) :

$$\overrightarrow{g_{\alpha}} = \overrightarrow{a_{\alpha}} - X^3\, b_{\alpha}{}^{\beta}\,\overrightarrow{a_{\beta}} = (\delta_{\alpha}{}^{\beta} - X^3\, b_{\alpha}{}^{\beta})\,\overrightarrow{a_{\beta}} = \mu_{\alpha}{}^{\beta}\,\overrightarrow{a_{\beta}} \tag{III.38}$$

avec :

$$\mu_{\alpha}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta} - X^3\, b_{\alpha}{}^{\beta} \tag{III.39}$$

la matrice $[\mu]$ s'écrivant :

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_1{}^1 & \mu_1{}^2 \\ \mu_2{}^1 & \mu_2{}^2 \end{bmatrix} \tag{III.40}$$

et son déterminant :

$$\det [\mu_{\alpha}{}^{\beta}] = \mu \tag{III.41}$$

Il est possible de montrer que [NAGHDI P.M. (1963)] :

en notant les conditions suivantes :

$$g > 0 \qquad a > 0 \qquad \mu > 0 \tag{III.43.a-b-c}$$

Les valeurs propres du tenseur $[b]$ sont $1/R_1$ et $1/R_2$, R_1 et R_2 désignant les rayons de courbure principaux de la surface moyenne de la coque.

Par la suite nous utiliserons les grandeurs H et K définies par les relations :

$$H = \frac{1}{2} b_\alpha{}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{III.44}$$

$$K = det\ [b_\beta{}^\alpha] = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \tag{III.45}$$

où H est la courbure moyenne et K la courbure totale ou courbure de Gauss. Ces deux grandeurs sont des invariants du tenseur $[b]$.

On a montré (cf. III.21) que la matrice jacobienne est linéaire en t (ou X^3) ce qui s'écrit :

$$[J] = [J_0] - X^3\,[J_1] \tag{III.46}$$

En utilisant les relations (III.15), (III.29), (III.30) et (III.38) nous montrons que :

$$[J] = \begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1{}^1 & \mu_1{}^2 & 0 \\ \mu_2{}^1 & \mu_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix} = [M]\,[J_0] \tag{III.47}$$

en utilisant les notations suivantes en repère global (x,y,z) :

$$\overrightarrow{g_i} = \{g_i\} = \begin{Bmatrix} g_{ix} \\ g_{iy} \\ g_{iz} \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{a_i} = \{a_i\} = \begin{Bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{Bmatrix} \tag{III.48}$$

$[M]$ est la matrice (3x3) définie par la relation (III.47) et qui a pour déterminant :

$$\mu = \det [M] = \det [\mu_\alpha{}^\beta] \tag{III.49}$$

De plus nous adoptons les notations suivantes :

$$|J| = \det [J] \qquad |J_0| = \det [J_0] \tag{III.50}$$

La relation (III.47) implique :

$$[J]^{-1} = [J_0]^{-1}\,[M]^{-1} \tag{III.51}$$

Avec l'expression exacte de μ qui se limite au terme de degré 2 [NAGHDI P.M. (1963)] :

$$\mu = 1 - 2\,H\,X^3 + K\,(X^3)^2 \tag{III.53}$$

La matrice $[J_1]$ se met sous la forme :

$$[J_1] = \begin{bmatrix} b_1{}^1 & b_1{}^2 & 0 \\ b_2{}^1 & b_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{bmatrix} = [f]\,[J_0] \tag{III.54}$$

La matrice $[M]^{-1}$ s'écrit :

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} (\mu^{-1})_1{}^1 & (\mu^{-1})_1{}^2 & 0 \\ (\mu^{-1})_2{}^1 & (\mu^{-1})_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.55}$$

NAGHDI P.M. (1963) a montré que :

$$(\mu^{-1})_\alpha{}^\beta = \sum_{i=0}^{\infty} (X^3)^n\,(b^n)_\alpha{}^\beta \tag{III.56}$$

avec :

$$(b^0)_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \qquad (b^1)_\alpha{}^\beta = b_\alpha{}^\beta \qquad (b^n)_\alpha{}^\beta = b_\alpha{}^\lambda\,(b^{n-1})_\lambda{}^\beta = b_\lambda{}^\beta\,(b^{n-1})_\alpha{}^\lambda \tag{III.57}$$

On peut montrer que (cf. III.54) :

$$[f]^n = \begin{bmatrix} (b^n)_1{}^1 & (b^n)_1{}^2 & 0 \\ (b^n)_2{}^1 & (b^n)_2{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad n = 1, 2, \ldots, \infty \tag{III.58}$$

Appelons $[I_3]$ la matrice unité (3x3) :

$$[I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.59}$$

Nous montrons en utilisant (III.51) et (III.52) [cf. VLACHOUTSIS S. (1987)] :

$$[J]^{-1} = [J_0]^{-1} \left([I_3] + \sum_{n=1}^{\infty} (X^3)^n\,(\,[J_1]\,[J_0]^{-1})^n \right) \tag{III.60}$$

Toutes ces écritures sont encore valables pour des coordonnées X^1et X^2 quelconques et si nous utilisons les lignes de courbure comme lignes de coordonnées nous obtenons :

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{III.62}$$

Les équations (III.60) et (III.61) s'écrivent alors en reprenant la variable de départ $t = X^3$ (si $c \approx h$) :

$$[J(\xi,\eta,t)]^{-1} = [J_0(\xi,\eta)]^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{R_1}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{R_2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.63}$$

$$|J(\xi,\eta,t)| = \left[1 - t \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{t^2}{R_1.R_2}\right] |J_0(\xi,\eta)| \tag{III.64}$$

$R_1(\xi,\eta)$ et $R_2(\xi,\eta)$ désignent les rayons principaux de courbure de la surface moyenne de la coque, au point courant considéré de coordonnées (ξ,η).

On remarque que dans l'expression (III.63) on voit intervenir des séries de terme générique en t/R, la convergence est donc assurée si $|t| < R$ ce qui est toujours le cas pour les coques.

L'hypothèse des voiles (ou coques) minces va donc simplement permettre de ne garder qu'un nombre limité de termes dans ces séries du fait que dans ce cas t/R est faible (cf. paragraphe III.1.3.2), l'expression du jacobien étant quant-à-elle exacte au second degré.

Remarque : Pour d'autres détails sur ces calculs on peut se reporter aux travaux de VLACHOUTSIS S. (1987) pp. 65-72 où l'expression explicite de ces expressions est présentée dans son étude de l'élément de coque dégénéré en analyse linéaire.

III.1.3.2 Approximation à l'ordre 2

Cette approximation plus précise que celle que nous allons faire dans cette étude, a parfois été présentée dans la littérature, tout au moins pour certaines des quantités précédentes [cf. LASHET G., JEUSETTE J.P. et BECKERS P. (1989)].

Dans ce cas on retient :

$$|J(\xi,\eta,t)| \approx \left[1 - t \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] |J_0(\xi,\eta)| \qquad \text{(III.65.a)}$$

ainsi que :

$$[Q(\xi,\eta,t)] \approx [Q_0(\xi,\eta)] + t\,[Q_1(\xi,\eta)] \qquad \text{(III.65.b)}$$

qu'on identifiera à (III.17) et (III.63).

Néanmoins cette approximation reste peu utilisée car elle complique quelque peu la suite de la formulation (intégration explicite) alors que la formulation au premier ordre est déjà correcte pour modéliser les coques semi-profondes, ce que nous allons vérifier.

III.1.3.3 Approximation au premier ordre

Si on appelle R le plus petit des rayons de courbure :

$$R = \text{Min}\,(\,|R_1|\,,\,|R_2|\,) \qquad \text{(III.66.a)}$$

Si on définit : $$\varepsilon = \frac{h}{R} \qquad \text{(III.66.b)}$$

L'Hypothèse des voiles minces (H1) implique une limitation de ce rapport (cf. Chapitre I.1) que nous allons imposer au niveau des contrôles géométriques sur notre élément lors de l'entrée des données.

Comme valeur limite de ce rapport nous avons vu que la plupart des auteurs [BATOZ J.L. (1977)], [MARLOWE et FLÜGGE (1968)] proposent :

$$h < \frac{R}{20} \qquad \text{(III.67.a)}$$

Ce qui revient à imposer : $$\varepsilon < \frac{1}{20} \qquad \text{(III.67.b)}$$

Cette valeur maximale de ε est effectivement celle retenue dans le code de calcul ASELF et sera conservée dans toute la suite de cette étude en particulier au niveau des applications numériques.

En modifiant (I.13) on a : $$-1 \le \frac{2t}{c} \le +1 \qquad \text{(III.68)}$$

L'expression de c en fonction des différentes épaisseurs nodales h_i étant définie comme ci après [cf. ZIENKIEWICZ O.C. (1970)] :

$$\sum_{i=1}^{n}$$

Où le point (ξ_0,η_0) appartient à la surface de référence et est donné, par exemple (0,0).

Dans le cas général on a $h \approx c$ ($h = c$ si l'épaisseur est constante sur l'élément).

On aboutit donc à l'encadrement : $-\frac{h}{2} \leq t \leq +\frac{h}{2}$ (III.70)

On peut alors écrire : $\frac{|t|}{R} < \frac{\varepsilon}{2}$ (III.71.a)

Donc finalement on a : $\frac{|t|}{R} < \frac{1}{40}$ (III.71.b)

On constate donc au regard de l'écriture (III.63) que si on assimile la matrice Jacobienne inverse $[J]^{-1}$ à son expression au premier ordre en t on commet au plus avec les hypothèses précédentes ($h/R < 1/20$) une erreur de 2,5% sur ses différents termes et au plus une erreur de 5% pour son déterminant $|J|$, ce qui est acceptable comme l'a mis en évidence VLACHOUTSIS S. (1987) au sein d'une série de tests numériques pour lesquels il utilisait les mêmes expressions :

$$[J(\xi,\eta,t)]^{-1} \approx [J_0(\xi,\eta)]^{-1} \tag{III.72}$$

$$\mu\,(\xi,\eta,t) \approx 1 \tag{III.73}$$

On retiendra donc également l'approximation pour $|J|$ en partant de (III.52-53) :

$$|J(\xi,\eta,t)| = \sum_{i=0}^{2} t^i\, |J_i(\xi,\eta)| \approx |J_0(\xi,\eta)| \tag{III.74}$$

[HAAS D.J., LEE S.W. (1987) pp. 448-449]

On peut alors écrire également en utilisant les relations (III.72) et (A3.14) :

$$[Q(\xi,\eta,t)] = \sum_{i=0}^{\infty} t^i\, [Q_i(\xi,\eta)] \approx [Q_0(\xi,\eta)] \tag{III.75}$$

Dans ce cas on écrira aussi la relation suivante non justifiée ici (en effet même si les termes de $[J_0]^{-1}$ sont tous peu différents de ceux de $[J]^{-1}$ ceci n'implique pas qu'il en soit de même pour $[J_0]$ et $[J]$ la valeur de leurs déterminants jouant un rôle important). On se reportera à [CHAO W.C., REDDY J.N. (1984)] pour plus de détails.

$$[J(\xi,\eta,t)] \approx [J_0(\xi,\eta)] \tag{III.76}$$

Ce qui revient à dire que l'on prendra dans toute la suite de cette étude les expressions définies sur la surface moyenne des quantités précédentes (on les écrit pour $t = 0$).

Remarque : D'un point de vue théorique, il n'est pas [illegible]

(1986)]. Pour cette raison LASHET G., JEUSETTE J.P. et BECKERS P. (1989) proposent de conserver le développement à l'ordre au dessus, c'est à dire avec une expression linéaire en t qui elle satisfait bien à cette condition. Néanmoins HAAS D.J., LEE S.W. (1987) et VLACHOUTSIS S. (1987) préconisent eux la prise en compte du seul premier terme dans le cas des coques ou voiles minces comme nous le faisons ici. Il n'a d'ailleurs pas été constaté de problèmes particuliers au niveau des applications numériques dans cette étude et tout laisse supposer que cette approximation est suffisante, quoi-qu'il est vrai, non pleinement satisfaisante sur le plan théorique.

Calcul de $[J_0]$:

Il est nécessaire de partir de l'expression de l'interpolation géométrique (I.23) c'est à dire de $\langle x,y,z \rangle$ et de dériver ce vecteur par rapport à (ξ,η,t) afin de former la matrice Jacobienne définie en (III.15).

On a vu que l'interpolation géométrique pour notre élément s'écrivait :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)\, t \left(\frac{h_i}{c}\right) \begin{Bmatrix} V_{3xi} \\ V_{3yi} \\ V_{3zi} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.77)}$$

Partant de (III.15) on effectue les dérivations nécessaires pour définir $[J_0]$ en posant $t = 0$ après les calculs :

$$[J_0(\xi,\eta)] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i N_{i,\xi}(\xi,\eta) & \sum_{i=1}^{n} y_i N_{i,\xi}(\xi,\eta) & \sum_{i=1}^{n} z_i N_{i,\xi}(\xi,\eta) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i N_{i,\eta}(\xi,\eta) & \sum_{i=1}^{n} y_i N_{i,\eta}(\xi,\eta) & \sum_{i=1}^{n} z_i N_{i,\eta}(\xi,\eta) \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{c} V_{3xi} N_i(\xi,\eta) & \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{c} V_{3yi} N_i(\xi,\eta) & \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{c} V_{3zi} N_i(\xi,\eta) \end{bmatrix} \qquad \text{(III.78)}$$

Et ensuite on peut inverser cette matrice de manière numérique et définir $[J_0(\xi,\eta)]^{-1}$ et $[Q_0(\xi,\eta)]$:

$$[Q_0(\xi,\eta)] = [Q(\xi,\eta,t)]_{t=0} = \begin{bmatrix} [J_0]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [J_0]^{-1} & [0] \\ [0] & [0] & [J_0]^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.79)}$$

III.1.4 Les matrices d'interpolation des déformations

III.1.4.1 La matrice d'interpolation des déformations linéaires $[B_L]$

La forme de la matrice $[B_L]$ est mise en place en annexe 3 et on obtient (cf. A3.17) :

$$[B_L(\xi,\eta,t)] = [H]\,[Q(\xi,\eta,t)]\,[L(\xi,\eta,t)] \tag{III.80}$$

La matrice $[H]$ est la matrice à termes constants qui permet d'identifier les déformations en repère global en fonction des dérivées des déplacements dans ce même repère (cf. A3.16).

La matrice $[Q]$ a été explicitée précédemment en fonction de la matrice jacobienne (cf. III.17) ainsi qu'en annexe A3 (cf. A3.14). On a montré (III.75) qu'elle peut être remplacée dans le cadre de nos hypothèses par le premier terme (constant) de son développement en fonction de la variable dans l'épaisseur t :

$$[Q(\xi,\eta,t)] \approx [Q_0(\xi,\eta)] \tag{III.81}$$

La matrice $[L]$ relie les déplacements nodaux aux dérivées des déplacements en repère intrinsèque de l'élément et est linéaire en fonction de la variable t comme montré en (A3.9) :

$$[L(\xi,\eta,t)] = [L_0(\xi,\eta)] + t\,[L_1(\xi,\eta)] \tag{III.82}$$

Les expressions de $[L]$, $[L_0]$, $[L_1]$ utilisant les fonctions de forme de Serendip $N_i(\xi,\eta)$ [ZIENKIEWICZ O.C. (1979) pp. 107-110] sont données en annexe A3 (A3.7-8) et (A3.10).

Pour permettre l'intégration explicite suivant l'épaisseur des différentes matrices, on développe en série la matrice $[B_L]$ comme on l'a fait pour $[\Phi]$, $[A]$, $[J]$... On écrit donc la matrice $[B_L]$ sous la forme suivante [cf. HAAS D.J., LEE S.W. (1987)] :

$$[B_L(\xi,\eta,t)] = [B_{L0}(\xi,\eta)] + t\,[B_{L1}(\xi,\eta)] \tag{III.83}$$

On a donc 2 matrices indépendantes de t leurs expressions étant :

$$[B_{L0}(\xi,\eta)] = [H]\,[Q(\xi,\eta)]\,[L_0(\xi,\eta)] \tag{III.84.a}$$

$$[B_{L1}(\xi,\eta)] = [H]\,[Q(\xi,\eta)]\,[L_1(\xi,\eta)] \tag{III.84.b}$$

Remarque : Dans l'écriture (III.83) il est intéressant de voir s'il est possible comme pour le Jacobien, de ne garder que le premier terme du développement et de poser $[L] = [L_0]$. Il est possible de montrer dans un calcul qui n'est pas fait ici que l'erreur relative que l'on commettait alors sur les composantes du vecteur $\{u_{,\xi}\}$ dans le cadre des hypothèses de cette étude serait de l'ordre de grandeur du rapport entre l'épaisseur moyenne de la coque (h) et la longueur transversale minimale d'un élément de coque (L), c'est à dire h/L tel qu'on l'a défini en (I.4).

approximation se situerait aux environs de 20 %, ce qui est inadmissible et bien supérieur à l'erreur due à la non prise en compte du deuxième terme dans les développements du Jacobien. Pour cette raison on retiendra le développement en série avec deux termes, et non un seul pour la matrice $[L]$ ainsi que pour la matrice d'interpolation $[B_L]$.

III.1.4.2 La matrice d'interpolation des déformations non linéaires $[B_{NL}]$

Pour obtenir l'expression explicite de la matrice $[B_{NL}]$ la première solution est de considérer l'expression (A4.12) et d'utiliser les approximations écrites pour $[L]$ (III.82) et $[Q]$ (III.81).

En utilisant l'expression linéaire de $[L]$ en fonction de t et le fait que si $h/R < 1/20$ nous conservons le premier terme $[Q_0]$ du développement de $[Q]$ (III.75) nous obtenons pour chacune des 6 lignes $<B_{NL}{}^i>$ de $[B_{NL}]$:

$$<B_{NL}{}^i> = <d_n>\left([L_0] + t\,[L_1]\right)^T[Q_0]^T[F_i]\,[Q_0]\,\left([L_0] + t\,[L_1]\right) \quad (i=1,6) \qquad \text{(III.85)}$$

ce qui nous donne une expression quadratique en t pour $<B_{NL}{}^i>$ et de même pour $[B_{NL}]$ qui peut s'écrire :

$$[B_{NL}(\xi,\eta,t)] = [B_{NL0}(\xi,\eta)] + t\,[B_{NL1}(\xi,\eta)] + t^2\,[B_{NL2}(\xi,\eta)] \qquad \text{(III.86)}$$

L'utilisation de cette expression pour calculer $[k_{NL}]$ (cf. chapitre III.3.2) nous donnerait des termes d'ordre 4 ou 5 lors de l'intégration explicite des caractéristiques matériau (cf. (III.94) et (III.101)) mais nous allons voir qu'en revenant aux hypothèses des plaques et coques avec cisaillement transverse due à MINDLIN R.D. (1951) nous somme autorisés à considérer la partie non linéaire des déformations de Green-Lagrange comme contenue uniquement dans les termes de membrane ce qui nous simplifie l'expression de $[B_{NL}]$.

Les déformations de Green-Lagrange exprimées dans le repère local de la coque notées $\{\varepsilon'\}$ se décomposent en 2 parties : les déformations dans le plan $\{\varepsilon'_p\}$ et les déformations hors plan $\{\varepsilon'_{hp}\}$.

Elles s'écrivent sous la forme :

$$\{\varepsilon'_p\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon'_{hp}\} = \begin{Bmatrix} \gamma'_{yz} \\ \gamma'_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.87)}$$

De cette manière la théorie de Mindlin donnant une variation linéaire des déformations dans le plan en séparant le terme de membrane du terme de courbure s'écrit :

où :

$\{\varepsilon_m\}$ est le vecteur des déformations de membrane.

$\{\chi_f\}$ est le vecteur des courbures (flexion).

$\{\gamma_s\}$ est le vecteur des déformations de cisaillement transverse.

Nous remarquons que ces 3 vecteurs sont indépendants de la variable dans l'épaisseur t.

Les déformations non-linéaires ne varient pas, en première approximation, dans l'épaisseur de la coque comme cela a été montré par certains auteurs utilisant les éléments finis de coque basés sur la formulation géométrique [KOITER W.T. (1966)], [BATOZ J.L. (1977) pp. 56-57]. De plus les termes de cisaillement transverse sont purement linéaires.

Nous retiendrons la même approximation pour l'élément de coque dégénéré et donc les termes non linéaires du vecteur déformation de Green-Lagrange apparaissent uniquement dans la partie membrane $\{\varepsilon_m\}$ des déformations. Nous pouvons alors écrire :

$$\{\varepsilon_m(\xi,\eta)\} = \{\varepsilon_{Lm}(\xi,\eta)\} + \{\varepsilon_{NLm}(\xi,\eta)\} \tag{III.89.a}$$

$$\{\chi_f(\xi,\eta)\} = \{\chi_{Lf}(\xi,\eta)\} \tag{III.89.b}$$

$$\{\gamma_s(\xi,\eta)\} = \{\gamma_{Ls}(\xi,\eta)\} \tag{III.89.c}$$

où $\{\varepsilon_{Lm}\}$ est la partie linéaire de $\{\varepsilon_m\}$ et $\{\varepsilon_{NLm}\}$ la partie non linéaire.

Le vecteur des courbures $\{\chi_f\}$ ne contient donc pas de terme non linéaire et par conséquent les déformations non linéaires dans le plan ne dépendent finalement pas de t. On écrit :

$$\{\varepsilon'_{NLp}(\xi,\eta,t)\} = \{\varepsilon_{NLm}(\xi,\eta)\} = \{\varepsilon_{NL0m}(\xi,\eta)\} \tag{III.90.a}$$

$$\{\varepsilon'_{NLhp}\} = \{0\} \tag{III.90.b}$$

En accord avec nos précédentes notations nous pouvons écrire les déformations non linéaires en repère local comme uniquement égales au premier terme (constant) de leur développement :

$$\{\varepsilon'_{NL}(\xi,\eta,t)\} = \{\varepsilon'_{NL0}(\xi,\eta)\} \tag{III.91}$$

en revenant au système de coordonnées global (A2.7) nous obtenons le même résultat :

$$\{\varepsilon_{NL}(\xi,\eta,t)\} = \{\varepsilon_{NL0}(\xi,\eta)\} \tag{III.92}$$

en utilisant la relation (A4.1) nous montrons que $[B_{NL}]$ est également indépendante de t et sera écrite :

$$[B_{NL}(\xi,\eta,t)] = [B_{NL0}(\xi,\eta)] \tag{III.93}$$

III.2 Caractéristiques élastiques intégrées dans l'épaisseur

III.2.1 Homogénéisation

On définit ici les matrices relatives à l'intégration des caractéristiques élastiques au travers de l'épaisseur des couches qui nous donnent les caractéristiques homogénéisées de l'empilement considéré, celles-ci nous étant utiles pour l'intégration explicite des différents termes de rigidité. On part donc de la définition d'un stratifié, couche par couche.

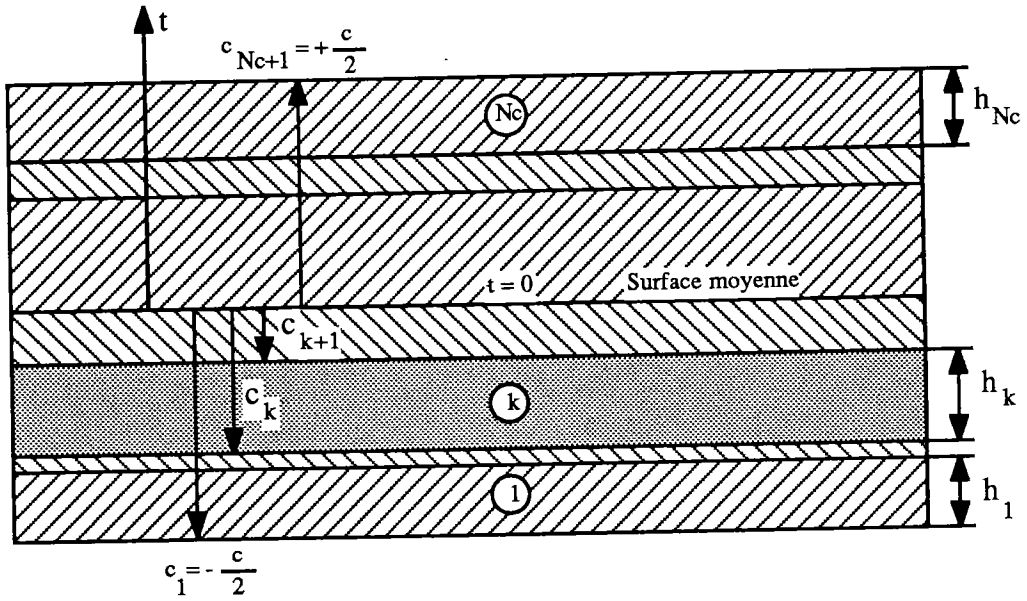


Figure III.1 : Coupure d'une coque multicouches

Le nombre de couches de cet empilement étant défini de la manière suivante :

$$\text{Nombre de couches} = N_{couches} = N_c \tag{III.94}$$

La matrice des caractéristiques élastiques $[E'_k]$ de chaque couche k de l'empilement matériau considéré (dans le repère local de l'élément défini par $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$) s'exprime en fonction des matrices des caractéristiques élastiques $[C_k]$ de chaque couche (dans le repère matériau défini par $\overrightarrow{e_{1_k}}$ et $\overrightarrow{e_{2_k}}$) en effectuant une rotation d'angle α_k autour de la normale $\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{e_3}$ (cf. figures I.4 et A1.1). Ceci peut s'écrire (cf. A1.23) :

$$[E'_k] = [T_{\alpha_k}]^T [C_k] [T_{\alpha_k}] \tag{III.95}$$

Les matrices des caractéristiques matériau intégrées dans l'épaisseur $[D_1]$, $[D_2]$, $[D_3]$ sont définies par :

$$[D_1] = \sum_{k=1}^{Nc} [E'_k] \, (c_{k+1} - c_k) \tag{III.96}$$

$$[D_2] = \sum_{k=1}^{Nc} \frac{1}{2} [E'_k] \, ({c_{k+1}}^2 - {c_k}^2) \tag{III.97}$$

$$[D_3] = \sum_{k=1}^{Nc} \frac{1}{3} [E'_k] \, ({c_{k+1}}^3 - {c_k}^3) \tag{III.98}$$

Dans le cas d'un matériau isotrope on obtient les matrices suivantes :

$-[D_1] = c\,[C]$ Membrane (III.99.a)

$-[D_2] = [0]$ Couplage Membrane / Flexion (III.99.b)

$-[D_3] = \frac{c^3}{12}\,[C]$ Flexion (III.99.c)

III.2.2 Séparation des différentes sollicitations mécaniques

Pour obtenir une expression plus agréable et un gain au niveau temps de calcul vus les nombreux zéros des matrices $[D_i]$, on les scinde en séparant les phénomènes de membrane (m) des phénomènes de cisaillement (s) et en faisant apparaître les phénomènes de couplage membrane/flexion (mf) et les phénomènes de flexion (f) [cf. MARLOWE M.B., FLUGGE W. (1968)].

Les 3 matrices peuvent alors s'écrire :

$$[D_1] = \begin{bmatrix} [A_m] & [0] \\ [0] & [A_s] \end{bmatrix} \qquad [D_2] = \begin{bmatrix} [A_{mf}] & [0] \\ [0] & [x] \end{bmatrix} \qquad [D_3] = \begin{bmatrix} [A_f] & [0] \\ [0] & [x'] \end{bmatrix}$$

(III.101)

Les sous-matrices ont les appellations suivantes :

- $[A_m]_{(3x3)}$ est relatives aux phénomènes de membrane.
- $[A_f]_{(3x3)}$ est relatives aux phénomènes de flexion.
- $[A_{mf}]_{(3x3)}$ est relatives aux phénomènes de couplage entre membrane et flexion.
- $[A_s]_{(2x2)}$ est relatives aux phénomènes de cisaillement.

III.3 Intégration explicite de la matrice de rigidité tangente

Pour réaliser l'intégration des différentes parties de la matrice de rigidité tangente mises en place dans le paragraphe précédent il est nécessaire de décomposer les différents éléments sous les intégrales en les écrivant sous forme de polynômes en t à coefficients matriciels que l'on va expliciter ici (t est la variable d'intégration dans le repère local ou position du point courant sur la normale à la surface de référence).

Nous allons voir d'abord sur l'exemple de la matrice de rigidité linéaire $[K_L]$ la méthode de réalisation de l'intégration explicite pour la matrice de rigidité tangente.

III.3.1 La matrice de rigidité linéaire

Nous avons montré précédemment (cf. II.106) que l'expression de $[k_L]$ est :

$$[k_L] = \int_V [B_L]^T [E]\, [B_L]\, dV \tag{III.102}$$

Ecriture explicite de l'interpolation

Nous avons vu (cf. III.83) que le développement de la matrice d'interpolation des déformations linéaires s'écrit :

$$[B_L(\xi,\eta,t)] = [B_{L0}(\xi,\eta)] + t\, [B_{L1}(\xi,\eta)] \tag{III.103}$$

Où $[B_{L0}]$ et $[B_{L1}]$ sont 2 matrices indépendantes de t :

$$[B_{L0}(\xi,\eta)] = [H]\, [Q_0(\xi,\eta)]\, [L_0(\xi,\eta)] \tag{III.104.a}$$

$$[B_{L1}(\xi,\eta)] = [H]\, [Q_0(\xi,\eta)]\, [L_1(\xi,\eta)] \tag{III.104.b}$$

Passage du repère global au repère local

Nous avons vu en annexe A2 la relation (A2.5) entre la matrice des caractéristiques matériau en repère global $[E]$ et en repère local ou intrinsèque de l'élément $[E']$:

$$[E] = [T]^T [E']\, [T] \tag{III.105}$$

La matrice $[E']$ étant fonction de la couche considérée (cf. III.) dans le cas des matériaux orthotropes multicouches (stratifiés) et type sandwich.

On a donc l'expression de la matrice de rigidité linéaire :

$$[k_L] = \int_V ([B_{L0}] + t\,[B_{L1}])^T [T]^T [E'] [T] ([B_{L0}] + t\,[B_{L1}])\, dV \qquad \text{(III.106)}$$

Expression de l'élément de volume

Il peut s'écrire sous la forme :

$$dV = dx\,dy\,dz = |J_0|\, d\xi\, d\eta\, dt \qquad \text{(III.107)}$$

Où $|J_0|$ est le déterminant du premier terme du développement en t de la matrice Jacobienne $[J]$, considérée comme constante au travers de l'épaisseur de l'élément (cf. III.76) et égale à son expression dans le plan moyen de l'élément de coque $[J_0]$ pour $t = 0$:

$$[J_0] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{array} \right]_{t=0} \qquad \text{(III.108)}$$

Ceci nous permet d'écrire la matrice de rigidité linéaire sous la forme suivante :

$$[k_L] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} ([B_{L0}] + t\,[B_{L1}])^T [T]^T [E'] [T] ([B_{L0}] + t\,[B_{L1}])\ |J_0|\, d\xi\, d\eta\, dt \qquad \text{(III.109)}$$

En développant l'expression de $[k_L]$ suivant les puissances de t on écrit :

$$[k_L] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} ([B_{L0}]^T [T]^T [E'] [T] [B_{L0}] + t\,[B_{L0}]^T [T]^T [E'] [T] [B_{L1}])\, |J_0|\, d\xi\, d\eta\, dt \qquad \text{(III.110)}$$

$$+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{c}^{\frac{c}{2}} (t\,[B_{L1}]^T [T]^T [E'] [T] [B_{L0}] + t^2\,[B_{L1}]^T [T]^T [E'] [T] [B_{L1}])\, |J_0|\, d\xi\, d\eta\, dt$$

On peut ensuite séparer l'intégration suivant l'épaisseur de l'intégration dans le plan moyen, la matrice $[E']$ étant aussi fonction de t du fait des caractéristiques variables des différentes couches matériau dans le repère local :

$$
\begin{aligned}
[k_L] = & \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [B_{L0}]^T[T]^T \left[\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} [E'] \, dt \right] [T]\,[B_{L0}] \, |J_0| \, d\xi \, d\eta \\
& + \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [B_{L0}]^T[T]^T \left[\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} t\,[E'] \, dt \right] [T]\,[B_{L1}] \, |J_0| \, d\xi \, d\eta \\
& + \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [B_{L1}]^T[T]^T \left[\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} t\,[E'] \, dt \right] [T]\,[B_{L0}] \, |J_0| \, d\xi \, d\eta \\
& + \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [B_{L1}]^T[T]^T \left[\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} t^2[E'] \, dt \right] [T]\,[B_{L1}] \, |J_0| \, d\xi \, d\eta
\end{aligned}
\qquad \text{(III.111)}
$$

L'expression de la matrice de rigidité linéaire se simplifie en utilisant les matrices $[D_i]$ définies au paragraphe III.2.2 (cf.III.101) pour donner :

$$
\begin{aligned}
[k_L] = & \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L0}]^T[T]^T[D_1]\,[T]\,[B_{L0}] \, |J_0| \, d\xi \, d\eta + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L0}]^T[T]^T[D_2]\,[T]\,[B_{L1}] \, |J_0| \, d\xi \, d\eta \\
& + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L1}]^T[T]^T[D_2]\,[T]\,[B_{L0}] \, |J_0| \, d\xi \, d\eta + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L1}]^T[T]^T[D_3]\,[T]\,[B_{L1}] \, |J_0| \, d\xi \, d\eta
\end{aligned}
$$

(III.112)

Ecriture des matrices $[T]\,[B_{Li}]$ $(i = 0, 1)$

Pour pouvoir séparer les différentes sous matrices dans l'intégration, il est nécessaire de séparer de la même manière les matrices d'interpolation des déformations constantes et linéaires dans l'épaisseur, en repère local, c'est à dire les matrices $[T]\,[B_{L0}]$ et $[T]\,[B_{L1}]$.

Tout d'abord la matrice de passage $[T]$ peut se séparer comme suit (cf. annexe A2) :

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_p] \\ [T_{hp}] \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [T_p]_{(3x6)} \quad \text{et} \quad [T_{hp}]_{(2x6)} \tag{III.113}$$

Les matrices $[T_p]$ et $[T_{hp}]$ étant les matrices de passage donnant les déformations dans le plan et hors plan (cisaillement transverse) en repère local en fonction des déformations dans le repère global de la structure :

$$\{\varepsilon'_p\} = [T_p]\ \{\varepsilon\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon'_{hp}\} = [T_{hp}]\ \{\varepsilon\} \tag{III.114.a-b}$$

Les expressions des déformations dans le plan et hors plan sont définies par les expressions :

$$\{\varepsilon'_p\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon'_{hp}\} = \begin{Bmatrix} \gamma'_{yz} \\ \gamma'_{zx} \end{Bmatrix} \quad \text{et les déformations en repère global :} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Les expressions de $[T_p]$ et $[T_{hp}]$ étant (cf. annexe A2) :

$$[T_p] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_2l_2 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & n_1l_2 + n_2l_1 \end{bmatrix} \tag{III.115}$$

$$[T_{hp}] = \begin{bmatrix} 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & l_3m_1 + l_1m_3 & m_3n_1 + m_1n_3 & n_3l_1 + n_1l_3 \end{bmatrix} \tag{III.116}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_1} &= l_1\overrightarrow{i} + m_1\overrightarrow{j} + n_1\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{V_2} &= l_2\overrightarrow{i} + m_2\overrightarrow{j} + n_2\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{V_3} &= l_3\overrightarrow{i} + m_3\overrightarrow{j} + n_3\overrightarrow{k} \end{aligned} \tag{III.117.a-b-c}$$

On peut donc séparer les produits comme suit :

$$[T]\ [B_{L0}] = \begin{bmatrix} [B_{L0p}] \\ [B_{L0hp}] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T]\ [B_{L1}] = \begin{bmatrix} [B_{L1p}] \\ [B_{L1hp}] \end{bmatrix} \tag{III.118.a-b}$$

Il est rappelé que : $[B_L(\xi,\eta,t)] = [B_{L0}(\xi,\eta)] + t\ [B_{L1}(\xi,\eta)]$ (III.119)

Hypothèse de Mindlin :

On a vu que cette hypothèse (H3) (cf. chapitre I.4.1) servant à la construction de l'élément stipule que les déformations transversales (de cisaillement) ne varient pas dans l'épaisseur de l'élément c'est à dire en fonction de la variable t. Ceci implique que la matrice $[B_{Lhp}]$ ne dépende pas de t et ceci nous donne les relations suivantes :

$$\{\varepsilon_{hp}\} = [B_{L0hp}]\ \{d_n\} \tag{III.120}$$

Avec : $$[B_{L1hp}] = [0] \tag{III.121}$$

L'expression (III.118.b) de $[T]\ [B_{L1}]$ se simplifie pour donner :

$$[T]\ [B_{L1}] = \begin{bmatrix} [B_{L1p}] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{III.122}$$

Les sous-matrices apparaissant dans les expressions (III.118.a-b) sont :

$$[B_{L0p}] = [T_p]\ [B_{L0}] \quad [B_{L0hp}] = [T_{hp}]\ [B_{L0}] \quad [B_{L1p}] = [T_p]\ [B_{L1}] \tag{III.123}$$

Avec les tailles suivantes : $[B_{L0p}]_{(3x5n)}$ $[B_{L0hp}]_{(2x5n)}$ $[B_{L1p}]_{(3x5n)}$

L'expression de la matrice de rigidité linéaire en utilisant ces résultats devient donc :

$$\begin{aligned}[k_L] = &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L0p}]^T[A_m]\ [B_{L0p}]\ |J_0|\ d\xi\ d\eta + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L0hp}]^T[A_s]\ [B_{L0hp}]\ |J_0|\ d\xi\ d\eta \\ &+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} ([B_{L0p}]^T[A_{mf}]\ [B_{L1p}] + [B_{L1p}]^T[A_{mf}]\ [B_{L0p}])\ |J_0|\ d\xi\ d\eta \\ &+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L1p}]^T[A_f]\ [B_{L1p}]\ |J_0|\ d\xi\ d\eta\end{aligned} \tag{III.124}$$

Remarque : L'intégration numérique en coordonnées intrinsèques sur la surface moyenne de l'élément est une intégration réduite afin de limiter les problèmes de verrouillage qui apparaissent lorsque l'on diminue l'épaisseur des éléments par rapport à leur longueur : pour fixer des limites raisonnables, on est limité pour quelques % d'erreur sur les déplacements à $h/L < 1/100$ à peine en intégration normale, et à $h/L < 1/1\ 000$ au moins en intégration réduite (parfois 1/ 10 000 voir d'avantage) [cf. FEZANS G. (1981)].

On fait donc appel à une intégration réduite à (2x2) points de Gauss sur la surface moyenne au lieu de (3x3) points si on réalise une intégration complète [cf. ZIENKIEWICZ O.C.

Ces problèmes de verrouillage sur l'élément de coque 3D dégénéré dans le domaine des structures dites minces et très minces ont été étudiés dans le cadre de l'analyse linéaire par les auteurs suivants :

– ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., TOO J.M. (1971) : Etude détaillée sur l'intégration numérique dans le cas général des plaques et coques.

– FEZANS G. : Etude de l'élément de coque 3D dégénéré pour l'analyse linéaire avec comparaison des résultats en intégration numérique complète et réduite.

On peut aussi citer les études suivantes où les auteurs s'intéressent à l'élément de coque 3D dégénéré en analyse linéaire en utilisant les techniques de l'intégration numérique complète, numérique réduite et explicite dans l'épaisseur :

– BATHE K.J., DVORKIN E.N. (1986).

– VLACHOUTSIS S. (1987).

III.3.2 La matrice de rigidité non linéaire.

Le même travail a été effectué pour la partie non linéaire de $[k_T]$ notée $[k_{NL}]$ et le calcul, relativement long, n'est pas présenté ici.

La méthode de mise en place est similaire et on suit la même démarche, avec cette fois ci la matrice $[B_{NL}]$ d'interpolation des déformations non linéaires.

On peut rappeler ici, que l'on a déjà montré l'approximation suivante pour l'interpolation des déformations non linéaires (cf. III.93) :

$$[B_{NL}(\xi,\eta,t)] = [B_{NL0}(\xi,\eta)] \tag{III.125}$$

Par la suite dans les calculs et résultats on utilisera la notation $[B_{NL}]$ à la place de $[B_{NL0}]$.

On peut donc donner directement l'expression des sous-matrices que l'on définit dans le produit $[T][B_{NL}]$, comme lors du calcul de la matrice de rigidité linéaire :

$$[T]\,[B_{NL}] = \begin{bmatrix} [B_{NLp}] \\ [B_{NLhp}] \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \quad [B_{NLp}]_{(3x5n)} \quad \text{et} \quad [B_{NLhp}]_{(2x5n)} \tag{III.126}$$

Nous avons démontré (III.90.b) que les déformations non linéaires hors plan sont nulles :

$$\{\varepsilon'_{NLhp}\} = [B_{NLhp}]\,\{d_n\} = \{0\} \tag{III.127}$$

Par conséquent :

$$[B_{NLhp}] = [0] \tag{III.128}$$

Donc on écrit :

$$[T]\,[B_{NL}] = \begin{bmatrix} [B_{NLp}] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{III.129}$$

L'expression trouvée (II.83) pour la matrice de rigidité tangente $[k_{NL}]$ est :

$$[k_{NL}] = \int_V [B_{NL}]^T[E]\,[B_L] + [B_L]^T[E]\,[B_{NL}]\,dV + \int_V [B_{NL}]^T[E]\,[B_{NL}]\,dV \tag{III.130}$$

Après calcul on obtient l'expression de $[k_{NL}]$ avec les mêmes notations que pour $[k_L]$:

$$[k_{NL}] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{NLp}]^T[A_m]\,[B_{L0p}] + [B_{L0p}]^T[A_m]\,[B_{NLp}] + [B_{NLp}]^T[A_m]\,[B_{NLp}]\ |J_0|\,d\xi\,d\eta$$
$$+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{NLp}]^T[A_{mf}]\,[B_{L1p}] + [B_{L1p}]^T[A_{mf}]\,[B_{NLp}]\ |J_0|\,d\xi\,d\eta \qquad \text{(III.131)}$$

Les matrices $[A_m]$ et $[A_{mf}]$ sont les mêmes que celles définies pour le calcul de $[k_L]$ ainsi que les matrices $[B_{L0p}]$ et $[B_{L1p}]$.

III.3.3 La matrice de rigidité géométrique

La matrice de rigidité géométrique a l'expression suivante (cf. II.115) en F.L.T., sinon dans le cas de la F.L.A., il convient de remplacer $[F_S]$ par $[F_\sigma]$ (cf. II.129) :

$$[k_\sigma] = \int_V \sum_{i=1}^{6} S_i\,[P_i]\,dV = \int_V \sum_{i=1}^{6} S_i\,[L]^T[Q]^T[F_i]\,[Q]\,[L]\,dV = \int_V [L]^T[Q]^T[F_S]\,[Q]\,[L]\,dV \qquad \text{(III.132)}$$

La matrice $[P_i]$ ayant l'expression suivante :

$$[P_i] = [L]^T[Q]^T[F_i]\,[Q]\,[L] \qquad \text{(III.133)}$$

On a vu (cf. A4.12) que l'on avait l'expression suivante de chacune des lignes de la matrice d'interpolation des déformations non linéaires, la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $[B_{NL}]$ s'écrivant :

$$[B_{NL}]_i = \{d_n\}^T[P_i] \qquad \text{(III.134)}$$

Nous avons montré que la matrice $[B_{NL}]$ est indépendante de la variable dans l'épaisseur t et donc les matrices $[P_i]$ (i = 1, 6) sont aussi indépendantes de t en vertu de la relation précédente.

Remarque : Nous avons montré (A3.9) que la matrice des dérivées des fonctions de forme $[L]$ est linéaire en fonction de t :

$$[L(\xi,\eta,t)] = [L_0(\xi,\eta)] + t\,[L_1(\xi,\eta)] \qquad \text{(III.135)}$$

Mais néanmoins le produit matriciel donnant les 6 matrices $[P_i]$ n'est pas quadratique en t

Ceci revient à remplacer dans l'expression de $[P_i]$ et de $[k_\sigma]$ la matrice $[L]$ par son expression à $t = 0$ c'est à dire $[L_0]$ d'où le résultat :

$$[P_i] = [L_0]^T[Q]^T[F_i]\,[Q]\,[L_0] \tag{III.136}$$

Ce qui donne :

$$[k_\sigma] = \int_V [L_0]^T[Q]^T[F_S]\,[Q]\,[L_0]\,dV \tag{III.137}$$

Dans cette écriture de $[k_\sigma]$ on voit que l'ordre de l'expression à intégrer va être le même que l'ordre de $[F_S]$ ou encore celui de $\{S\}$ en fonction de la variable t en F.L.T. comme en F.L.A..

La matrice $[F_S]$ a elle l'expression suivante (cf. II.117) :

$$[F_S]_{(9x9)} = \begin{bmatrix} [S] & [0] & [0] \\ [0] & [S] & [0] \\ [0] & [0] & [S] \end{bmatrix} \tag{III.138}$$

$[S]$ étant le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce (P.K.2) et l'on peut exprimer le vecteur colonne des contraintes en fonction du vecteur des déplacements nodaux :

$$\{S\} = [E]\,\{\varepsilon\} = [E]\,([B_L] + \frac{1}{2}[B_{NL}])\,\{d_n\} \tag{III.139}$$

Ce qui implique une variation linéaire des contraintes $\{S\}$ dans chaque couche dans le cas d'un empilement, $\{S_0\}$ et $\{S_1\}$ variant dans ce cas d'une couche à l'autre :

$$\{S\} = \{S_0\} + t\,\{S_1\} \tag{III.140}$$

avec les expressions des 2 termes du développement en t de $\{S\}$:

$$\{S_0\} = [E]\,\{\varepsilon_0\} = [T]^T[E']\,[T]\,(\,[B_{L0}] + \frac{1}{2}[B_{NL}]\,)\,\{d_n\} \tag{III.141}$$

$$\{S_1\} = [E]\,\{\varepsilon_1\} = [T]^T[E']\,[T]\,[B_{L1}]\,\{d_n\} \tag{III.142}$$

On voit donc que le vecteur colonne des contraintes et par la même le tenseur des contraintes est fonction linéaire de la variable t dans l'épaisseur de chaque couche de l'élément car la matrice d'interpolation des déformations linéaires $[B_L]$ est linéaire en t et $[E']$ est fonction de la couche considérée (cf. annexe A1).

Donc la matrice $[F_S]$ intervenant dans la formulation est linéaire en t dans chaque couche et finalement l'expression à intégrer pour obtenir $[k_\sigma]$ est donc elle aussi linéaire en t les autres

On peut alors écrire : $$[F_S] = [F_{S_0}] + t\,[F_{S_1}] \qquad \text{(III.143)}$$

Puis on peut séparer les différentes intégrations comme suit :

$$[k_\sigma] = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [L_0]^T[Q]^T \left[\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} ([F_{S_0}] + t\,[F_{S_1}])\,dt\right] [Q]\,[L_0]\,|J_0|\,d\xi\,d\eta \qquad \text{(III.144)}$$

Il n'est pas possible ici de présenter complètement le calcul de $[k_\sigma]$ mais nous allons simplement voir le calcul avec intégration explicite de la partie constante en t de l'expression à intégrer :

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} [F_{S_0}]\,dt \qquad \text{(III.145)}$$

Le calcul complet en s'intéressant aussi aux termes linéaires en t n'est pas plus complexe, seulement les matrices intervenant dans la formulation n'ont pas la même expression, l'architecture du calcul restant la même.

Vue l'expression de la matrice $[F_S]$, on peut faire le même calcul sur chacun des tenseurs des contraintes $[S_0]$.

Le problème ici est que l'on n'a pas directement l'expression du tenseur des contraintes mais du vecteur colonne des contraintes. On a donné précédemment l'expression de $\{S_0\}$ et $\{S_1\}$. L'identification des termes du tenseur avec ceux du vecteur colonne se faisant suivant le principe habituel, avec par exemple pour $\{S_0\}$:

$$\{S_0\} = \begin{Bmatrix} S_{0xx} \\ S_{0yy} \\ S_{0zz} \\ S_{0xy} \\ S_{0yz} \\ S_{0zx} \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad [S_0] = \begin{bmatrix} S_{0xx} & S_{0xy} & S_{0xz} \\ S_{0xy} & S_{0yy} & S_{0yz} \\ S_{0xz} & S_{0yz} & S_{0zz} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.147)}$$

On va donc pour pouvoir calculer l'intégrale précédente calculer d'abord l'expression :

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \{S_0\}\,dt \qquad \text{(III.148)}$$

Ensuite ce calcul terminé, on fera l'identification inverse pour retrouver un tenseur (3x3) :

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} [S_0]\, dt \tag{III.149}$$

Le calcul s'écrit :

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \{S_0\}\, dt = [T]^{\mathrm{T}} \left[\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} [E']\, dt \right] [T] \left([B_{L0}] + \frac{1}{2} [B_{NL}] \right) \{d_n\} \tag{III.150.a}$$

$$= [T]^T [D_1]\, [T] \left([B_{L0}] + \frac{1}{2} [B_{NL}] \right) \{d_n\} \tag{III.150.b}$$

Car la seule quantité variant suivant l'épaisseur t de l'élément est la matrice $[E']$ qui change d'une couche à l'autre avec l'égalité écrite en (III.96.a) :

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} [E']\, dt = [D_1] \tag{III.151}$$

Compte-tenu des résultats mis en place précédemment (cf. III.101.a) et (III.118.a) :

$$[D_1] = \begin{bmatrix} [A_m] & [0] \\ [0] & [A_s] \end{bmatrix} \tag{III.152}$$

$$[\mathrm{T}]\, [B_{L0}] = \begin{bmatrix} [B_{L0p}] \\ [B_{L0hp}] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T]\, [B_{NL}] = \begin{bmatrix} [B_{NLp}] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{III.153}$$

On écrit le résultat précédent sous la forme :

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \{S_0\}\, dt = [T]^T \begin{bmatrix} [A_m] \left([B_{L0p}] + \frac{1}{2} [B_{NLp}] \right) \\ [A_s]\, [B_{L0hp}] \end{bmatrix} \{d_n\} \tag{III.154}$$

L'écriture suivante est équivalente :

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \{S_0\}\, dt = [T_p]^T[A_m]\left([B_{L0p}] + \frac{1}{2}[B_{NLp}]\right)\{d_n\} + [T_{hp}]^T[A_s]\,[B_{L0hp}]\,\{d_n\} \quad \text{(III.155)}$$

Ensuite on identifie $\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} [S_0]\, dt$ aux termes de $\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \{S_0\}\, dt$ comme expliqué.

Il est alors aisé de construire la matrice $[F_{S_0}]$ intégrée en t en répétant 3 fois sur la diagonale la matrice (3x3) précédente pour construire la matrice (9x9) correspondante.

Le calcul avec intégration explicite de $[F_{S_1}]$ n'est pas détaillé, on montre en utilisant le même schéma que seule la matrice $[D_2]$ intervient dans son expression :

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} t\,\{S_1\}\, dt = [T_p]^T[A_{mf}]\,[B_{L1p}]\,\{d_n\} \quad \text{(III.156)}$$

La construction de la matrice $t\,[F_{S_1}]$ intégrée en t étant la même que pour $[F_{S_0}]$.

Ensuite on forme : $$[F_S] = [F_{S_0}] + t\,[F_{S_1}] \quad \text{(III.157)}$$

Et il reste à calculer l'intégrale (III.144) donnant la matrice de rigidité géométrique de l'élément par intégration numérique suivant les 2 directions du plan tangent.

III.4 Intégration explicite de la matrice des efforts intérieurs

On a montré (II.106) que les efforts intérieurs nodaux par élément s'écrivent :

$$\{f_{int}\} = [\psi]\ \{d_n\} \tag{III.158}$$

Où la matrice $[\psi]$ a la forme suivante (II.107) :

$$[\psi] = \int_V ([B_L] + [B_{NL}])^T [E] ([B_L] + \frac{1}{2} [B_{NL}])\, dV \tag{III.159}$$

En suivant les mêmes règles de construction et en utilisant les mêmes notations que celle du chapitre III.3.2 on obtient la forme de $[\psi]$ après intégration explicite :

$$\begin{aligned}[\psi] = &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L0p}]^T[A_m]\,[B_{L0p}] + [B_{L0p}]^T[A_{mf}]\,[B_{L1p}] + [B_{L1p}]^T[A_{mf}]\,[B_{L0p}]\ |J_0|\, d\xi\, d\eta \\ &+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L0hp}]^T[A_s][B_{L0hp}]+[B_{L1p}]^T[A_f][B_{L1p}]+[B_{NLp}]^T[A_m][B_{L0p}]+[B_{NLp}]^T[A_{mf}]\,[B_{L1p}]\ |J_0|\, d\xi d\eta \\ &+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{L0p}]^T[A_m][B_{NLp}] + [B_{L1p}]^T[A_{mf}]\,[B_{NLp}] + [B_{NLp}]^T[A_m]\,[B_{NLp}]\ |J_0|\, d\xi\, d\eta\end{aligned}$$

(III.160)

Cette matrice peut se simplifier et s'écrire en tenant compte des opérateurs mis en place précédemment pour la matrice tangente (cf. II.106-107 en F.L.T. et II.125-126 en F.L.A.), (III.124), (III.130) sous la forme :

$$[\psi] = [k_L] + \frac{1}{2}[k_{NL}] + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_{NLp}]^T[A_m][B_{L0p}] + [B_{NLp}]^T[A_{mf}]\,[B_{L1p}]\ |J_0|\, d\xi\, d\eta \tag{III.161}$$

Toutes ces expressions matricielles des différentes parties de la matrice de rigidité tangente peuvent sembler complexes et coûteuses en temps de calcul, mais il faut bien voir que l'on ne fait intervenir à chaque fois qu'un produit de matrices élémentaires simples, faciles à mémoriser et déjà mises en place dans le code de calcul utilisé (ASELF).

On a souvent utilisé fréquemment les mêmes matrices élémentaires qui ne sont donc

La stratégie sera donc de définir pour chaque type de matériau les matrices $[A_m]$, $[A_s]$, $[A_{mf}]$, $[A_f]$ et ensuite en chaque point de Gauss de chaque élément on définira le repère local nous permettant de calculer les matrices $[T_p]$ et $[T_{hp}]$.

Ensuite la définition des matrices $[B_{L0}]$, $[B_{L1}]$, et $[B_{NL}]$ nous permettra de calculer les matrices $[B_{L0p}]$, $[B_{L0hp}]$, $[B_{L1p}]$ et $[B_{NLp}]$ pour terminer le calcul.

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, pour des raisons de clareté des développements, nous n'avons pas particularisé les résultats mis en place au cas de la F.L.T. ou de la F.L.A.. Néanmoins pour ce qui est des efforts intérieurs, on trouvera respectivement dans les planches IV.1 et IV.2 les détails du calcul de $\{f_{int}\}^2{}_0$ en F.L.T. et de $\{f_{int}\}^2{}_1$ en F.L.A.. On fait ainsi apparaître les "efforts" $\{N\}^2{}_1$ et les "moments" $\{M\}^2{}_1$ qui sont ceux utilisés dans la théorie classique des coques, et ils nous sont utiles en F.L.A. du fait de la nécessité de corriger leurs valeurs lorsque la convergence est atteinte.

Chapitre IV

Flambement linéaire - analyse non linéaire

Comme nous l'avons fait dans le chapitre III, nous ne particulariserons pas dans un premier temps les développements de ce chapitre au cas de la F.L.T. ou de la F.L.A., et nous oublierons les indices de configurations mis en place au chapitre II.

Le but de ce chapitre n'est pas en effet de faire la mise en place des méthodes de résolution pour l'une ou l'autre formulation mais de montrer les techniques de résolution utiliseés dans cette étude, ainsi que leur limites.

Néanmoins nous particulariserons en IV.2.3, en présentant les algorithmes utilisés dans le cadre de la F.L.T. et de la F.L.A..

IV.1 Théorie linéaire du flambement

IV.1.1 Critère de stabilité

Soit une structure donnée pour laquelle l'énergie potentielle totale W est définie.

Condition d'équilibre :

On a vu (cf. II.71–72) qu'en vertu du principe des travaux virtuels et de l'extremum de l'énergie potentielle totale de la structure à l'équilibre on a :

$$\delta W = 0 \tag{IV.1}$$

Condition de stabilité :

La stabilité de la structure fait référence à la deuxième variation de l'énergie potentielle totale, 3 cas pouvant se présenter [cf. TIMOSHENKO S. (1959)], [cf. KOITER W.T. (1970)]:

$$\begin{aligned} &\delta^2 W > 0 \quad \text{La solution est stable} \\ &\delta^2 W < 0 \quad \text{La solution est instable} \\ &\delta^2 W = 0 \quad \text{La solution correspond à un état critique} \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Le cas $\delta^2 W = 0$ correspond au passage d'une solution stable à une solution instable, la stabilité dans ce cas dépendant du signe de $\delta^3 W$ ou de celui des variations d'ordre supérieur :

$$\text{Si} \quad \forall\, i \le n\,,\ \delta^n W = 0 \quad \text{la stabilité dépend du signe de } \delta^{n+1} W \tag{IV.3}$$

L'étude de la condition $\delta^2 W = 0$ est donc importante car elle nous donnera les solutions instables à leur apparition.

IV.1.2 Charges critiques linéaires

Nous allons voir que l'on peut obtenir les charges critiques linéaires correspondant à l'instabilité de la structure en utilisant la propriété précédente $\delta^2 W = 0$ comme limite de stabilité et en considérant une formulation linéaire faisant intervenir un paramètre de charge (facteur de charge). On parle aussi de flambement d' Euler son nom étant associé au calcul de la charge critique linéaire.

L'expression de $\delta^2 W$ est la suivante (cf. IV.27) :

$$\delta^2 W \;=\; \{\delta d\}^T [K_T] \{\delta d\} \;=\; \sum_{el} \{\delta d_n\}^T [k_T] \{\delta d_n\} \tag{IV.4}$$

L'expression de la matrice tangente élémentaire $[k_T]$ ayant été donnée (cf. II.120 en F.L.T. et II.134 en F.L.A.), on en déduit son expression $[K_T]$ après assemblage des matrices de rigidité tangente élémentaires :

$$[K_T] = [K_L] + [K_{NL}] + [K_\sigma] - [K_\lambda] \tag{IV.5}$$

$[k_\alpha]$ Matrices de rigidité élémentaires.

$[K_\alpha]$ Matrices de rigidité assemblées de la structure complète.

Les matrices qui interviennent étant :

$[K_L]$ Matrice de rigidité linéaire (cf. II.106 en F.L.T. et II.125 en F.L.A.).

$[K_{NL}]$ Matrice de rigidité non linéaire (cf. II.107 et II.126).

Au départ nous allons nous intéresser dans ce développement à un seul élément fini de la structure, le résultat étant généralisable à une structure complète.

Remarque : Nous considérerons la notation $\{d\}$ pour le vecteur des déplacements nodaux de la structure complète (assemblée) au lieu de $\{d_n\}$ pour celui d'un seul élément.

La théorie linéaire du flambement a pour principe de donner une expression linéaire pour $\delta^2 W$ en fonction d'un paramètre de charge λ. Nous considérons au départ un cas de calcul linéaire, qui nous a donné un vecteur déplacement $\{d_0\}$. Le paramètre λ.est défini de la manière suivante : on considère l'état de chargement de référence repéré par l'indice 0 appliqué à notre élément et correspondant au déplacement $\{d_0\}$; on considère ensuite un autre état de chargement tel que les charges ont été multipliés par λ ce qui implique, en considérant une approche linéaire, un déplacement $\{d_0\}$ multiplié par λ :

$$\{d\} = \lambda \{d_0\} \tag{IV.6}$$

On en déduit immédiatement, en considérant toujours une approche linéaire, la même relation pour les contraintes :

$$\{S\} = \lambda \{S_0\} \tag{IV.7}$$

En considérant les expressions des matrices d'interpolation (cf. annexes A3 et A4), on voit que $[B_L]$ est indépendante de l'état de chargement et que $[B_{NL}]$ est linéaire en fonction du vecteur déplacement. On en déduit :

$$[B_L] = [B_{0L}] \tag{IV.8}$$

$$[B_{NL}] = \lambda [B_{0NL}] \tag{IV.9}$$

On a les expressions linéarisées au premier ordre en fonction de λ des différents termes de la matrice de rigidité tangente après assemblage :

$$[K_L] = [K_{0L}] \tag{IV.10}$$

$$[K_{NL}] = \lambda [K_{0NL}] \tag{IV.11}$$

$$[K_\sigma] = \lambda [K_{0\sigma}] \tag{IV.12}$$

$$[K_\lambda] = \lambda [K_{0\lambda}] \tag{IV.13}$$

Ces matrices prenant les appellations suivantes :

$[K_L]$ Matrice de rigidité linéaire.

$[K_{0NL}]$ Matrice des déplacements initiaux.

$[K_{0\sigma}]$ Matrice des contraintes initiales.

$[K_{0\lambda}]$ Matrice des forces externes.

Donc dans le deuxième état de chargement défini par le paramètre λ l'expression de $\delta^2 W$ déduite de l'approche linéaire est devenue en transformant (II.4) et (II.5) :

$$\delta^2 W = \{\delta d\}^T \left([K_L] + \lambda \left([K_{0NL}] + [K_{0\sigma}] - [K_{0\lambda}] \right) \right) \{\delta d\} \qquad \text{(IV.14)}$$

On cherche un déplacement virtuel $\{\delta d\} \neq \{0\}$ qui nous donne $\delta^2 W = 0$. Ceci implique que l'équation suivante soit vérifiée, après simplification par $\{\delta d\}^T$:

$$\left([K_L] + \lambda \left([K_{0NL}] + [K_{0\sigma}] - [K_{0\lambda}] \right) \right) \{\delta d\} = \{0\} \qquad \text{(IV.15)}$$

Cette équation correspond à un problème aux valeurs propres, $\{\delta d\}$ devant bien sûr aussi satisfaire aux conditions aux limites du problème.

Cette équation peut encore s'écrire :

$$[K_L] \{\delta d\} = -\lambda \left([K_{0NL}] + [K_{0\sigma}] - [K_{0\lambda}] \right) \{\delta d\} \qquad \text{(IV.16)}$$

$[K_L]$ est symétrique définie positive et $[K_{0NL}]$, $[K_{0\sigma}]$, $[K_{0\lambda}]$ sont simplement symétriques.

Les valeurs propres λ_i représentent les facteurs de charge critiques linéaires de la structure considérée et les vecteurs propres associés représentent les modes critiques de flambement correspondants, sachant que c'est souvent le premier mode qui nous intéresse.

Dans de nombreux cas de calcul on considère une expression simplifiée de l'équation précédente en tenant compte du fait que pour les problèmes courants où les non linéarités avant la première charge critique restent faibles, les matrices $[K_{0NL}]$ et $[K_{0\lambda}]$ sont négligeables par rapport à la matrice $[K_{0\sigma}]$.

Ceci nous donne l'expression simplifiée suivante qui sera celle retenue dans la suite de cette étude, en particulier au niveau des applications numériques [cf. BATOZ J.L., DHATT G. et al. (1985) pp.19–21] :

$$\left([K_L] + \lambda [K_{0\sigma}] \right) \{\delta d\} = \{0\} \qquad \text{(IV.17)}$$

L'algorithme utilisé au niveau de la résolution d'un tel système aux valeurs propres est une méthode d'itération sur sous-espaces. On trouvera des précisions sur cette méthode efficace au niveau de la convergence vers les valeurs propres et modes propres corrects dans les ouvrages suivants : [RUTISHAUER H. (1969) pp. 4–13] et [GEIER B. (1977)].

IV.1.3 Limitations de la théorie linéaire

Les charges critiques d'Euler et les modes associés sont des paramètres très importants pour l'analyse industrielle des structures dans le domaine non linéaire. Cette analyse permet en effet de donner une première idée du comportement d'une structure quand apparaissent les premières non-linéarités, soit pour entreprendre ensuite une analyse non linéaire complète par méthodes itératives avec déjà certaines informations pour orienter la stratégie, ou soit pour éviter cette analyse supplémentaire qui est plus coûteuse.

Néanmoins, cette théorie a des limitations liées à ses hypothèses ou à son utilisation :

- Hypothèse de comportement linéaire géométrique avant flambement.
- Hypothèse de comportement linéaire élastique.
- Non prise en compte de $[K_{NL}]$ et $[K_\lambda]$ dans de nombreux codes de calcul.

Le dernier point peut bien sûr être étudié en détail en particulier pour étudier l'influence des non linéarités avant flambement [cf. BATOZ J.L., JAMEUX J.P. (1985)].

La conclusion générale des auteurs qui se sont intéressés à la validité des charges critiques d'Euler est que ce ne sont pas toujours des valeurs qui surestiment les charges limites réelles et ne sont donc pas des valeurs de sécurité ce qui est très gênant et justifie l'analyse non linéaire par méthodes itératives, plus complexes et plus coûteuses [cf. CARNOY E. (1980)], [cf. ALMROTH B.O., BROGAN F. (1972) pp. 465].

IV.2 Analyse non linéaire

IV.2.1 Formulation

IV.2.1.1 Equations d'équilibre de la structure

La première variation del'énergie potentielle totale d'une structure peut s'écrire en utilisant les efforts intérieurs et extérieurs généralisés aux noeuds et un déplacement virtuel nodal $\{\delta d\}$:

$$\delta W = \{\delta d\}^T (\{F_{int}\} - \{F_{ext}\}) \tag{IV.18}$$

Les équations d'équilibre de la structure s'écrivent (cf. II.72) :

$$\forall \{\delta d\} \quad \delta W = 0 \tag{IV.19}$$

L'équilibre peut donc s'écrire : $\{F_{int}\} = \{F_{ext}\}$ (IV.20)

On appele $\{R\}$ le vecteur résidu des efforts généralisés de la structure et on le définit par :

$$\{R\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\} \tag{IV.21}$$

L'équation traduisant l'équilibre peut s'écrire sous la forme simple que nous utiliserons :

$$\{R\} = \{0\} \tag{IV.22}$$

IV.2.1.2 Expression de la matrice de rigidité tangente

La matrice tangente assemblée notée $[K_T]$ est par définition la matrice qui relie un incrément du vecteur des déplacements nodaux à l'incrément correspondant du vecteur résidu. En utilisant un déplacement virtuel $\{\delta d\}$ nous écrivons :

$$\forall \{\delta d\} \quad [K_T] \{\delta d\} = - \{\delta R\} \tag{IV.23}$$

avec la définition du vecteur résidu virtuel :

$$\{\delta R\} = \{\delta F_{ext}\} - \{\delta F_{int}\} \tag{IV.24}$$

On écrira encore la matrice tangente sous la forme usuelle [cf. BATHE K.J. (1982)] :

$$K_{T_{ij}} = - \frac{\partial R_i}{\partial d_j} \quad \text{que l'on notera :} \quad [K_T] = - \frac{\partial \{R\}}{\partial \{d\}} \tag{IV.25}$$

En différentiant l'expression de la 1ère variation de l'énergie potentielle totale (cf. II.63) :

$$\delta^2 W = \delta^2 U - \delta^2 A = \{\delta d\}^T \{\delta F_{int}\} - \{\delta d\}^T \{\delta F_{ext}\}) \tag{IV.26}$$

avec les définitions usuelles de l'énergie de déformation et du travail des efforts extérieur et en tenant compte du fait que, par définition d'un déplacement virtuel $\{\delta d\}$, on a $\{\delta^2 d\} = \{0\}$.

IV.2.1.3 Variables du problème

La matrice tangente $[K_T]$ est fonction des déplacements nodaux $\{d\}$ (car non-linéaire) :

$$[K_T] = [K_T(\{d\})] \tag{IV.28}$$

Dans le cas général les efforts extérieurs sont fonctions du paramètre de chargement λ introduit précédemment (qu'il y ait ou non plusieurs systèmes de sollicitations) et des déplacements de la structure ici discrétisés aux noeuds $\{d\}$ alors que les efforts intérieurs sont uniquement fonctions de $\{d\}$ (cf. II.142).

On a donc les fonctions suivantes :

$$\{F_{ext}\} = \{F_{ext}(\lambda,\{d\})\} \tag{IV.29}$$

$$\{F_{int}\} = \{F_{int}(\{d\})\} = [\Psi]\ \{d\} \tag{IV.30}$$

Avec $[\Psi]$ qui représente la matrice donnant les efforts intérieurs pour la structure après assemblage des matrices élémentaires $[\psi]$ définies au paragraphe II.3.5. Elle dépend donc des déplacements nodaux :

$$[\Psi] = [\Psi(\{d\})] \tag{IV.31}$$

Le vecteur résidu s'écrit donc :

$$\{R(\{d\},\lambda)\} = \{F_{ext}(\lambda,\{d\})\} - \{F_{int}(\{d\})\} \tag{IV.32}$$

Remarques : 1– N est le nombre de degrés de liberté qui restent libres après prise en compte des conditions aux limites du problème et des relations éventuelles entre degrés de liberté, $\{d\}$ ayant donc N composantes après cette opération.

2– Cas particulier des forces extérieures retenues dans cette étude. Si on ne s'intéresse pas aux forces extérieures dépendant de l'état de déformation c'est à dire de $\{d\}$ (cas des forces non suiveuses) on a l'expression du vecteur des forces extérieures généralisées :

$$\{F_{ext}\} = \{F_{ext}(\lambda)\} = \lambda\{F_{ext0}\} \tag{IV.33}$$

C'est la forme qui sera retenue dans la suite de cette étude, $\{F_{ext0}\}$ étant un chargement défini au départ et constant quel que soit l'état de déformation de la structure.

Dans le cadre de cette hypothèse on peut donc dire que la matrice dite des forces externes est constament nulle comme précisé au Chapitre II :

$$[K_\lambda] = [0] \tag{IV.34}$$

Ceci implique notament que la matrice tangente ait la forme simplifiée suivante :

$$[K_T] = [K_E] + [K_\sigma] + [K_\lambda] \tag{IV.35}$$

IV.2.1.4 Méthode de résolution

L'écriture (IV.22) représente un système de N équations non linéaires et la méthode de résolution utilisée pour ce type de problèmes est incrémentale c'est-à-dire que l'on considère le système d'équation linéarisé autour d'une solution connue et que l'on cherche une solution proche pour une nouvelle valeur de certains paramètres choisis.

La résolution étant itérative, nous aurons plusieurs états d'équilibre à considérer, ceci étant appelés "pas de charge" ou "pas" repérés par le numéro de pas : p.

Pour chacun de ces pas, une résolution itérative par correction des variables (Méthode de Newton-Raphson) sera utilisée pour faire converger le système vers un état d'équilibre, chaque itération est repérée par son numéro : i [cf. ERIKSSON A. (1989)].

– Incrémentation :

En se plaçant au pas p et en supposant la convergence atteinte sur les $p-1$ pas précédents on peut écrire les variables comme suit :

$$\{d_p\} = \sum_{j=0}^{p-1} \{\Delta d_j\} \qquad \lambda_p = \sum_{j=0}^{p-1} \Delta\lambda_j \tag{IV.36}$$

. L'indice inférieur p sur x_p désigne la valeur de la quantité x au pas d'incrémentation p.

. Δx_j représente la valeur de l'incrément de la quantité x au pas j.

– Itération ou correction :

Pour assurer la convergence à chaque pas d'incrémentation on effectue une correction par itérations successives. Les incréments sont réactualisés à chaque itération comme suit :

$$\{\Delta d_p{}^{i+1}\} = \{\Delta d_p{}^{i}\} + \{\delta d_p{}^{i}\} \qquad \Delta\lambda_p{}^{i+1} = \Delta\lambda_p{}^{i} + \delta\lambda_p{}^{i} \tag{IV.37}$$

. L'indice supérieur i sur $x_p{}^i$ désigne la valeur de la fonction x à l'itération i du pas p.

. $\delta x_p{}^i$ représente la valeur de la correction de la fonction x à l'itération i du pas p.

Remarque : Dès que la convergence est assurée à l'itération i au sens d'un critère que nous définirons dans la suite de cette étude, on définira le pas final à l'incrémentation p comme :

$$\{\Delta d_p\} = \{\Delta d_p{}^{i}\} \qquad \Delta\lambda_p = \Delta\lambda_p{}^{i} \tag{IV.38}$$

L'indice i disparait car la solution au pas p est alors figée.

– Résolution à chaque itération :

On se place pour raisonner au pas d'incrémentation p et à l'itération i où on ne vérifie pas les équations d'équilibre : $\{R_p{}^i\} \neq \{0\}$. Considérons alors d'autres valeurs prises par les variables du problème $(\lambda,\{d\})$ suffisamment proches des valeurs précédentes pour pouvoir

Le deuxième état correspondant à l'itération suivante i+1. On peut alors écrire pour $R = R(\lambda,\{d\})$:

$$\{R_p^{i+1}\} = \{R_p^{i}\} + \left[\frac{\partial\{R\}}{\partial\{d\}}\right]_p^{i} \{\delta d_p^{i}\} + \left[\frac{\partial\{R\}}{\partial\lambda}\right]_p^{i} \delta\lambda_p^{i} \qquad \text{(IV.39)}$$

Or on cherche à trouver une solution correspondant à un état d'équilibre à l'itération i+1 cette condition s'écrivant :

$$\{R_p^{i+1}\} = \{0\} \qquad \text{(IV.40)}$$

En remarquant que dans le cas où on n'a pas de forces suiveuses, on peut écrire en vertu de (IV.25) et (IV.33) :

$$\left[\frac{\partial\{R\}}{\partial\lambda}\right]_p^{i} = \left[\frac{\partial\{F_{ext}\}}{\partial\lambda}\right]_p^{i} = \{F_{ext0}\} \qquad \text{(IV.41)}$$

Cette quantité est donc constante.

L'écriture (IV.39) se transforme en utilisant (IV.27) :

$$[K_{Tp}^{i}]\ \{\delta d_p^{i}\} - \delta\lambda_p^{i}\ \{F_{ext0}\} = \{R_p^{i}\} \qquad \text{(IV.42)}$$

Avec : $$\{R_p^{i}\} = \{F_{ext}(\lambda_p + \Delta\lambda_p^{i})\} - \{F_{int}(\{d_p\} + \{\Delta d_p^{i}\})\} \qquad \text{(IV.43)}$$

Cette écriture permettant la résolution itérative du système d'équations (IV.42) est la méthode de Newton-Raphson appliquée à notre problème. L'écriture montre que le vecteur résidu $\{R_p^{i}\}$ est évalué en fonction des variables calculées à l'itération précédente. Il sera donc évalué en premier pour permettre la résolution du système.

IV.2.2 Techniques de pilotage

Les inconnues du problème tel qu'il est posé sont donc les N composantes du vecteur correction des déplacements $\{\delta d_p^{i}\}$ et la correction du facteur de charge $\delta\lambda_p^{i}$ ce qui représente au total N+1 inconnues.

Le système (IV.42) fournit N équations en fonction des composantes de $\{\delta d_p^{i}\}$ et de $\delta\lambda_p^{i}$, pour permettre la résolution il faut donc y ajouter une équation supplémentaire de la forme :

$$f(\{\delta d_p^{i}\},\ \delta\lambda_p^{i}) = 0 \qquad \text{(IV.44)}$$

Cette équation supplémentaire permet d'obtenir toutes les solutions souhaitées $\{d_p\}$ et λ_p vérifiant l'équation (IV.22) et traduit la technique de pilotage mise en oeuvre pour la résolution.

Le choix correct de la technique de pilotage permet le tracé complet des courbes charge / déplacement.

On distingue 3 techniques principales qui seront utilisées pour tracer les courbes charge /

IV.2.2.1 Pilotage par charge imposée

On procède dans ce cas par imposition du facteur de charge λ à chaque pas de calcul, c'est à dire que l'on impose l'incrément du facteur de charge au pas courant, il sera égal à $\Delta\lambda_p$ au pas p (cf. Figure IV.1).

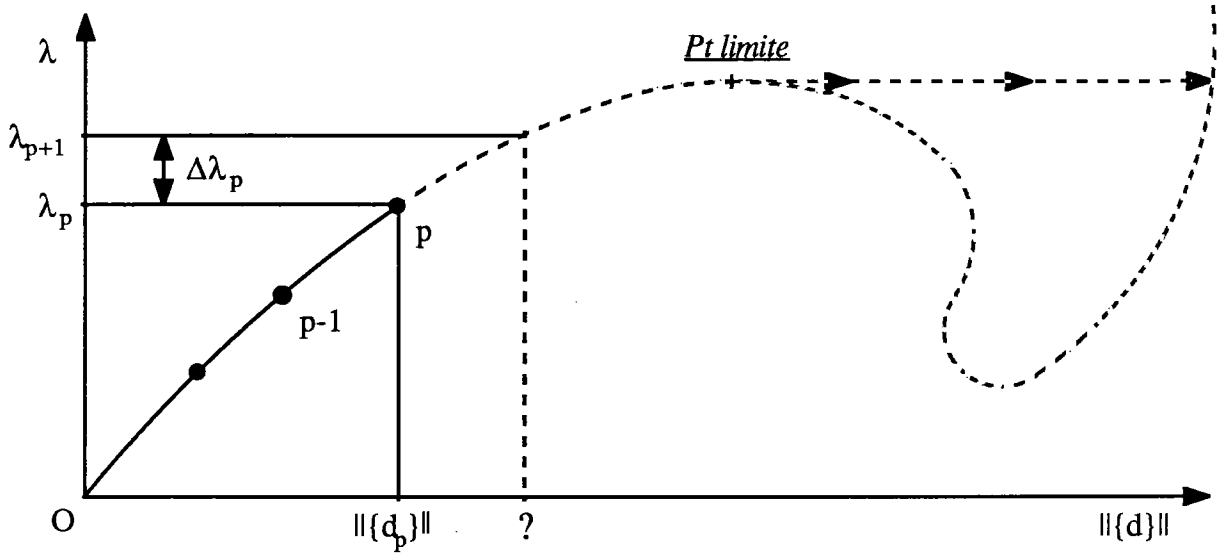


Figure IV.1 : Pilotage par facteur de charge imposé.

Ceci s'écrit sous la forme d'une condition d'itération au pas p :

$$i = 0 \quad \delta\lambda_p{}^0 = \Delta\lambda_p \tag{IV.45.a}$$

$$i \geq 1 \quad \delta\lambda_p{}^i = 0 \tag{IV.45.b}$$

Le vecteur résidu $\{R_p{}^i\}$ s'exprimant en utilisant l'équation (IV.43) en fonction des variables obtenues à l'itération précédente en distinguant les 2 cas :

$$i = 0 \quad \{R_p{}^0\} = \{0\} \tag{IV.46.a}$$

$$i \geq 1 \quad \{R_p{}^i\} = \{F_{ext}(\lambda_p + \Delta\lambda_p{}^i)\} - \{F_{int}(\{d_p\} + \{\Delta d_p{}^i\})\} \tag{IV.46.b}$$

On réécrit l'équation (IV.42) sous la forme :

$$[K_{Tp}{}^i]\ \{\delta d_p{}^i\} = \{R_p{}^i\} \tag{IV.47}$$

Sous réserve que $[K_{Tp}{}^i]$ soit inversible on peut résoudre l'équation (IV.47) à chaque incrément i en utilisant la condition d'itération (IV.45).

On corrige ensuite la valeur du vecteur des déplacements nodaux :

$$\{\Delta d_p{}^{i+1}\} = \{\Delta d_p{}^i\} + \{\delta d_p{}^i\} \tag{IV.48}$$

Critères d'arrêt :

On arrête de faire des corrections lorsque l'on atteint un critère d'arrêt choisi. De nombreux auteurs font choix du même critère portant sur les déplacements : Arrêt si la norme du vecteur correction des déplacements nodaux $\{\delta d_p{}^i\}$ est en dessous d'un seuil de négligeabilité par rapport au vecteur déplacement total $\{d_p\}$. Il peut s'écrire ici sous la forme :

$$\frac{\| \{\delta d_p{}^i\} \|}{\| \{d_p\} \|} \leq \varepsilon \qquad \text{(IV.49)}$$

La valeur courante retenue pour ε par de nombreux auteurs est $\varepsilon = 10^{-3}$ qui offre un bon compromis entre précision et temps de calcul [ERIKSON A. (1980)], [BATOZ J.L. (1979)]. Dans le code de calcul ASELF la valeur standard de ε est également $\varepsilon = 10^{-3}$.

Pour certains problèmes on peut prendre une valeur plus faible, par exemple $\varepsilon = 10^{-5}$ pour tester les performances des différentes techniques de pilotage [PAPADRAKAKIS M. (1982)].

Il est aussi possible d'imposer le même type de contrôle en effort en comparant la norme du vecteur résidu $\{R_p{}^i\}$ à la norme du vecteur des efforts appliqués $\{F_{ext}(\lambda_p + \Delta\lambda_p{}^i)\}$.

Cette technique de pilotage par charge imposée permet de traîter les problèmes ne présentant pas de points limites en charge mais accepte des points limites en déplacement. Sur la figure IV.1, on ne peut décrire la portion de courbe située après le point limite en charge et en dessous de celui-ci, si on incrémente le facteur de charge. Les problèmes présentant une non-linéarité faible ou une rigidité de signe constant (la plaque carrée sous charge normale au plan par exemple) se traitent de manière simple par cette méthode, mais il n'est plus possible de l'appliquer dès qu'un point limite en charge apparait.

Remarques :

– Il n'est pas nécessaire de recalculer la matrice tangente $[K_T{}_p{}^i]$ à chaque itération d'un même pas, on peut par exemple la calculer une seule fois en début du pas d'incrémentation et considérer qu'elle varie peu ensuite, ce qui revient à considérer $[K_T{}_p{}^i] = [K_T{}_p{}^0]$ quelle que soit la valeur de i. Cette technique s'appelle méthode de Newton-Raphson Modifiée (N.R.M.) par opposition avec la méthode classique de Newton-Raphson (N.R.). Elle est utilisée par de nombreux auteurs depuis plusieurs années car elle permet un gain notable au niveau du temps de calcul et n'affecte pas la convergence vers la solution sous réserve d'effectuer des pas d'incrémentation modérés.

– Il est possible d'ajuster automatiquement l'incrément du facteur de charge $\Delta\lambda_p$ à chaque pas au lieu de se le donner, et ceci en se servant de la valeur de l'incrément $\Delta\lambda_p$ et du nombre d'itérations nécessaires au pas précédent, c'est-à-dire de la difficulté de convergence observée. On peut ainsi calculer $\Delta\lambda_{p+1}$ en fixant des règles pour augmenter l'incrément en cas de convergence rapide ou réciproquement.

La loi retenue est de la forme :

$$\Delta\lambda_{p+1} = \Delta\lambda_p \left(\frac{i_{max}}{i_{max\,p}}\right)^{\alpha} \tag{IV.50}$$

Où i_{max} est le nombre d'itérations souhaitées pour un pas et $i_{max\,p}$ le nombre d'itérations qui ont été nécessaires à la convergence au pas p [cf. ERIKSSON A. (1979)].

L'exposant α est un nombre donnant l'influence du rapport du nombre d'itérations sur la modification de $\Delta\lambda_p$. En général on prend $0 \leq \alpha \leq 1$, la valeur $\alpha = 0$ correspondant au cas où le pas reste inchangé d'une itération à l'autre. Les valeurs les plus souvent utilisées sont $\alpha =$ 0,5 à $\alpha = 1$.

Les valeurs courantes suivantes des différents paramètres conviennent pour beaucoup de problèmes [cf. BATOZ J.L. (1985, pp. 33)] :

$$\begin{aligned} &- i_{max} = 4 \text{ (N.R.) ou } 6 \text{ (N.R.M.)} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } \varepsilon = 10^{-3} \\ &- \alpha = 0{,}5 \end{aligned} \tag{IV.51}$$

Dans la série de cas test normalisés proposés par NAFEMS Benchmarks [LYONS P., HOLSGROVE S. (1989)], il est fait choix de $i_{max} \approx 4$, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

– Il est possible de combiner la technique de pilotage par charge imposée avec une technique d'accélération de la convergence technique dite du "Line Search". Cette technique a pour but de minimiser l'énergie potentielle totale à chaque correction et consiste à faire des corrections des déplacements sous une forme différente de l'écriture (IV.37) en introduisant le paramètre μ sous la forme :

$$\{\Delta d_p{}^{i+1}\} = \{\Delta d_p{}^{i}\} + \mu \{\delta d_p{}^{i}\} \tag{IV.52}$$

C'est le paramètre μ qui doit être choisi de manière à minimiser W par exemple en utilisant l'expression du travail virtuel et en écrivant $\delta W = 0$, puis en utilisant une procédure de type Raleigh - Ritz à un paramètre indéterminé. On trouvera la forme explicite de l'équation que doit vérifier μ dans les ouvrages de PETIAU C., CORNUAULT C. (1985, pp. 109–127) et de BATOZ J.L. (1985, pp. 43–46).

– Lorsque l'on atteint un point tel que $\det [K_{Tp}{}^{i}] \approx 0$, on est en présence d'un point critique qui peut correspondre soit à une bifurcation, soit à un point limite [RIKS E. (1974)].

IV.2.2.2 Pilotage par composante de déplacement imposée

On procède dans ce cas par imposition d'une des composantes du vecteur déplacement $\{d\}$ à chaque pas de calcul, c'est à dire que l'on impose l'incrément de cette composante au pas courant, il sera égal à Δd_p au pas p.

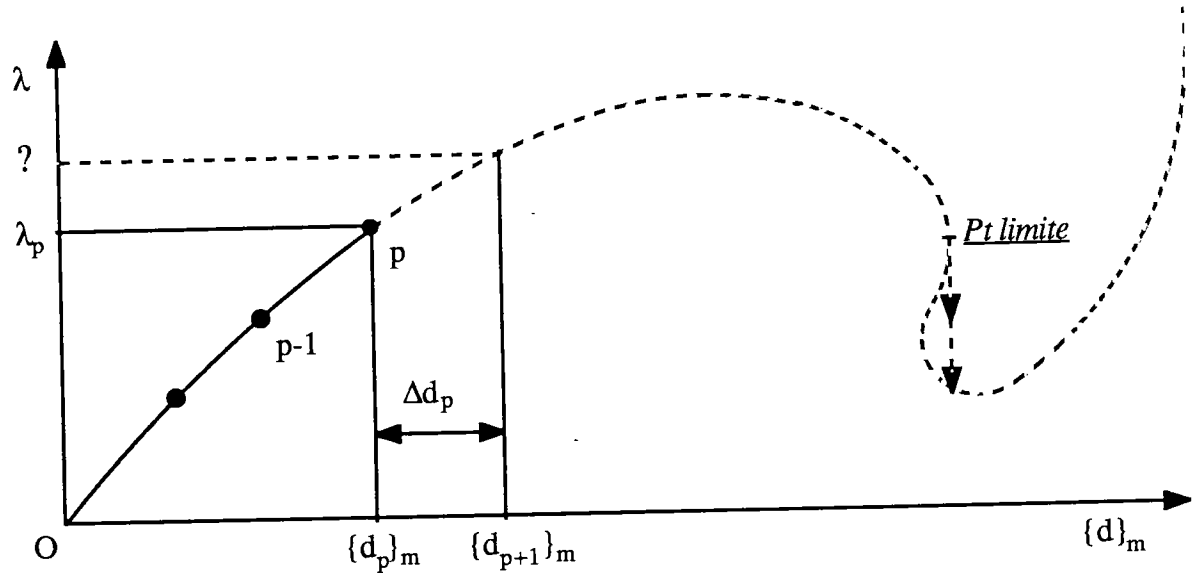


Figure IV.2 : Pilotage par composante de déplacement imposée.

Ceci s'écrit sous la forme d'une condition d'itération au pas p :

$$i = 0 \quad \{\delta d_p{}^0\}_m = \Delta d_p \tag{IV.53.a}$$

$$i \geq 1 \quad \{\delta d_p{}^i\}_m = 0 \tag{IV.53.b}$$

. $\{\delta d_p{}^i\}_m$ représente la composante m (celle que l'on impose) du vecteur correction des déplacements nodaux au pas p et à l'itération i.

. Δd_p représente l'incrément de la composante imposée (m) de $\{d\}$ au pas p.

Hypothèse : $[K_{Tp}{}^i]$ inversible. Ceci implique l'assertion suivante :

$$\exists \{d_{F\,p}{}^i\} \ / \ [K_{Tp}{}^i]\{d_{F\,p}{}^i\} = \{F_{ext0}\} \tag{IV.54}$$

L'équation (IV.42) se transforme pour donner :

$$[K_{Tp}{}^i](\{\delta d_p{}^i\} - \delta\lambda_p{}^i\{d_{F\,p}{}^i\}) = \{R_p{}^i\} \tag{IV.55}$$

Equation qui est de la forme : $[K_{Tp}{}^i]\{\delta d_{R\,p}{}^i\} = \{R_p{}^i\}$ (IV.56)

En posant : $\{\delta d_p{}^i\} = \{\delta d_{R\,p}{}^i\} + \delta\lambda_p{}^i\{d_{F\,p}{}^i\}$ (IV.57)

Le problème se ramène donc à la résolution de 2 systèmes d'équations (IV.54) et (IV.56)

par itération dans le cas de la méthode N.R. ou par pas, si on utilise la méthode N.R.M. comme lors du pilotage en charge imposée.

Ces 2 systèmes sont donc :

$$[K_{Tp}{}^{i}]\ \{d_{F\,p}{}^{i}\} = \{F_{ext\,0}\} \qquad \text{(IV.58.a)}$$

$$[K_{Tp}{}^{i}]\ \{\delta d_{Rp}{}^{i}\} = \{R_{p}{}^{i}\} \qquad \text{(IV.58.b)}$$

Quand on a résolu les 2 systèmes précédents il est nécessaire d'avoir la valeur de $\delta\lambda_p{}^{i}$ qui s'obtient en considérant la condition d'itération dans les 2 cas suivants :

$$\begin{aligned} &- i = 0 \quad \{R_p{}^{0}\} = \{0\} \text{ et } \{\delta d_p{}^{i}\}_m = \Delta d_p \quad \Rightarrow \quad \{\delta d_{R\,p}{}^{i}\} = \{0\} \quad \text{et} \quad \delta\lambda_p{}^{0} = \frac{\Delta d_p}{\{d_{F\,p}{}^{0}\}_m} \\ &- i \geq 1 \quad \{\delta d_p{}^{i}\}_m = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad \delta\lambda_p{}^{i} = -\frac{\{\delta d_{R\,p}{}^{i}\}_m}{\{d_{F\,p}{}^{i}\}_m} \end{aligned} \qquad \text{(IV.59)}$$

Ceci nous donne à chaque pas la valeur des inconnues $(\{\delta d_p{}^{i}\}, \delta\lambda_p{}^{i})$ en utilisant :

$$\{\delta d_p{}^{i}\} = \{\delta d_{R\,p}{}^{i}\} + \delta\lambda_p{}^{i}\ \{d_{F\,p}{}^{i}\} \qquad \text{(IV.60)}$$

Il reste à corriger les déplacements et le facteur de charge :

$$\{\Delta d_p{}^{i+1}\} = \{\Delta d_p{}^{i}\} + \{\delta d_p{}^{i}\} \qquad \Delta\lambda_p{}^{i+1} = \Delta\lambda_p{}^{i} + \delta\lambda_p{}^{i} \qquad \text{(IV.61)}$$

Le critère d'arrêt a la même forme que dans la technique de pilotage par charge imposée (cf. IV.49).

Cette technique de pilotage avec déplacement imposé permet de traiter les problèmes présentant des points limites en charge mais sans points limites par rapport à la composante de déplacement choisie (cf. Figure IV.2). Ces problèmes sont assez courants, ce qui explique l'intérêt porté à cette technique de résolution. Cet algorithme est très utilisé par de nombreux auteurs pour tracer les courbes pré- et post-flambement des structures de type coque avec la possibilité lorsque l'on rencontre un point limite, de changer de degré de liberté imposé ou de paramètrer en charge [CARNOY E. (1980)], [BUSHNELL D. (1981)].

Remarques :

– Choix de la composante de $\{d\}$ servant au pilotage.

C'est un degré de liberté de la structure choisi de manière astucieuse car correspondant à un déplacement facile à interpréter du point de vue physique et décrivant bien le phénomène non linéaire. Ce peut être par exemple le déplacement au droit d'une charge extérieure appliquée à la structure ou un déplacement important en valeur d'un point particulier ou encore un déplacement qui est réellement imposé par les conditions aux limites. On peut aussi choisir un degré de liberté en rotation.

– Cet algorithme nécessite une triangularisation et 2 résolutions par substitution au lieu d'une pour l'algorithme à charge imposée, donc une quantité de calculs à peine plus élevée, la triangularisation étant l'étape la plus longue. Mais la convergence est en général obtenue plus rapidement que par la méthode de pilotage en charge ce qui explique également l'intérêt porté à cette méthode.

– La technique d'accélération de la convergence par Line-Search reste compatible avec la technique de pilotage par déplacement imposé.

– Plutôt que d'imposer une composante de déplacement on peut imposer une combinaison de certaines d'entre elles cette condition étant l'équation supplémentaire nécessaire à la résolution.

– Il est possible d'ajuster automatiquement l'incrément de la composante de déplacement imposée Δd_p à chaque pas comme on l'a vu pour le pilotage en charge avec $\Delta\lambda_p$, et ceci en se servant de la valeur de l'incrément Δd_p et encore du nombre d'itérations nécessaires au pas précédent, c'est-à-dire de la difficulté de convergence observée. On peut ainsi calculer Δd_{p+1} en fixant les mêmes règles pour augmenter ou diminuer l'incrément.

La loi retenue est de la même forme que celle présentée pour le pilotage en charge :

$$\Delta d_{p+1} = \Delta d_p \left(\frac{i_{max}}{i_{max\ p}} \right)^{\alpha} \qquad \text{(IV.62)}$$

Où i_{max} est le nombre d'itérations souhaitées pour un pas et $i_{max\ p}$ le nombre d'itérations qui ont été nécessaires à la convergence au pas p.

Pour les valeurs de l'exposant α on se reportera au pilotage en charge imposée, les valeurs usuelles qui permettent de résoudre une grande variété de problèmes restant les mêmes.

IV.2.2.3 Pilotage par longueur d'arc imposée

Présentation :

Cette méthode peut être considérée comme une généralisation des deux méthodes précédentes où on s'impose une variation simultanée des différentes composantes du vecteur incrément des N+1 variables du problème (N composantes du vecteur déplacements nodaux $\{d\}$ plus la variable λ) au pas considéré au sens d'une norme choisie.

La méthode de base est due à CRISFIELD M.A. (1980, 1981) et RAMM E. (1981) et peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$< [W] \{\Delta d_p^{\,i}\}, [W] \{\Delta d_p^{\,i}\} > + (\beta \Delta \lambda_p^{\,i})^2 = \Delta S_p^{\,2} \qquad \text{(IV.63)}$$

$< , >$ est le symbole utilisé pour le produit scalaire.

$[W]$ est une matrice carrée diagonale relative aux poids des différentes composantes de déplacement au sens de la norme choisie.

β est un coefficient poids relatif au facteur de charge λ.

ΔS_p est la valeur imposée de la "norme" globale définie à gauche de l'égalité.

D'autres formulations générales sur des idées voisines ont été données par WEMPNER G.A. (1978), RIKS E. (1979). Ils imposent eux à la correction d'être perpendiculaire à l'incrément relatif au pas en cours (au sens du produit scalaire nul dans l'hyper-espace associé aux variables $[\{d\},\lambda]$).

Ceci peut s'écrire en utilisant les mêmes notations :

$$< [W] \{\Delta d_p^{\,i}\}, [W] \{\delta d_p^{\,i}\} > + (\beta \Delta \lambda_p^{\,i}).(\beta \delta \lambda_p^{\,i}) = 0 \qquad \text{(IV.64)}$$

D'autres interprétations restent possibles, BATOZ J.L. (1985) propose de poser $[W] = [I]$ et $\beta = <\{d^*\},\{d^*\}>$ où $\{d^*\}$ est la solution du problème linéaire. La méthode la plus courante reste la particularisation de la méthode de CRISFIELD en une méthode qui consiste à se fixer à chaque pas l'accroissement de la norme euclidienne du vecteur $\{d\}$ sans prendre en compte la valeur de λ dans le pilotage lui même. Ceci revient à poser dans l'écriture (IV.63) :

$$[W] = [I] \quad \text{et} \quad \beta = 0 \qquad \text{(IV.65)}$$

La condition d'itération peut donc prendre la forme simplifiée suivante qui est celle retenue par de nombreux auteurs (les termes de rotation dans $\{\Delta d_p^{\,i}\}$ sont parfois omis) :

$$< \{\Delta d_p^{\,i}\}, \{\Delta d_p^{\,i}\} > = \Delta S_p^{\,2} \qquad \text{(IV.66)}$$

Ce qui peut encore s'écrire avec les notations du début de l'étude :

$$\| \{\Delta d_p^{\,i}\} \| = \Delta S_p \qquad \text{(IV.67)}$$

[cf. BATOZ J.L. et al. (1990)], [RIKS E. (1979)].

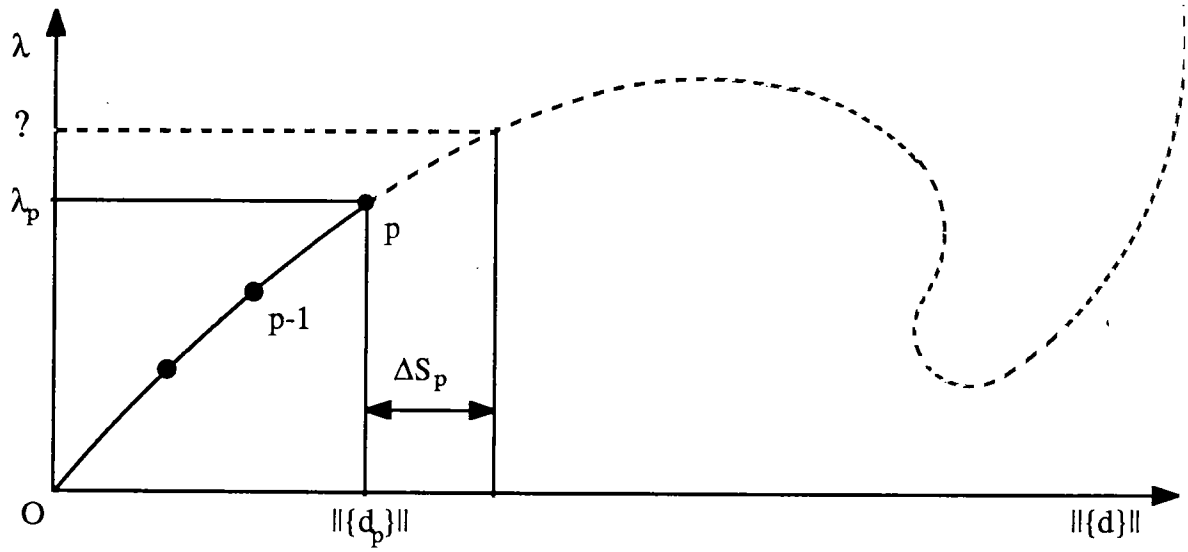


Figure IV.3 : Pilotage par longueur d'arc imposée.

Résolution :

Dans un premier temps on utilise la même méthode que dans le cas de l'algorithme de pilotage par composante de déplacement imposée ce qui nous amène aux 2 systèmes d'équations suivants (cf. IV.54 et IV.56) :

$$[K_{Tp}{}^{i}]\ \{d_{F\,p}{}^{i}\} = \{F_{ext\,0}\} \qquad \text{(IV.68.a)}$$

$$[K_{Tp}{}^{i}]\ \{\delta d_{Rp}{}^{i}\} = \{R_{p}{}^{i}\} \qquad \text{(IV.68.b)}$$

Ces systèmes se résolvent par la même méthode que précédemment et donnent les 2 solutions :

$$\{d_{F\,p}{}^{i}\} \quad \text{et} \quad \{\delta d_{R\,p}{}^{i}\} \qquad \text{(IV.69)}$$

On peut exprimer le vecteur déplacement solution sous la même forme que dans le cas du pilotage par déplacement imposé :

$$\{\delta d_{p}{}^{i}\} = \{\delta d_{R\,p}{}^{i}\} + \delta\lambda_{p}{}^{i}\ \{d_{F\,p}{}^{i}\} \qquad \text{(IV.70)}$$

Il subsiste néanmoins dans ce cas une inconnue à notre problème, $\delta\lambda_{p}{}^{i}$, qui n'est pas aussi évidente à déterminer que dans le cas du pilotage par déplacement imposé. Comme précédemment il est nécessaire de faire intervenir l'équation relative à la condition d'itération écrite pour le pilotage en longueur d'arc imposée.

Pour ce faire, lorsque l'on a terminé l'itération i du pas p on cherche à vérifier à l'itération suivante (i+1) l'équation :

$$\|\{\Delta d_{p}{}^{i+1}\}\| = \Delta S_{p} \qquad \text{(IV.71)}$$

Avec la définition de départ :

L'expression (IV.71) peut se mettre sous la forme d'une équation du second degré en fonction de $\delta\lambda_p^{\,i}$ qui a la forme suivante :

$$a\,(\delta\lambda_p^{\,i})^2 + b\,(\delta\lambda_p^{\,i}) + c = 0 \qquad \text{(IV.73)}$$

Par identification on détermine la valeur des paramètres a, b, c :

$$a = <\{d_{F\,p}^{\,i}\},\{d_{F\,p}^{\,i}\}> \qquad \text{(IV.74.a)}$$

$$b = 2.\,<\{d_{F\,p}^{\,i}\},\{\Delta d_p^{\,i}\} + \{\delta d_{Rp}^{\,i}\}> \qquad \text{(IV.74.b)}$$

$$c = <(\{\Delta d_p^{\,i}\} + \{\delta d_{Rp}^{\,i}\}),(\{\Delta d_p^{\,i}\} + \{\delta d_{Rp}^{\,i}\})> - \Delta S_p^{\,2} \qquad \text{(IV.74.c)}$$

Ceci nous permet donc ensuite d'obtenir les valeurs de $\delta\lambda_p^{\,i}$ solutions de l'équation (IV.73), 3 cas pouvant se présenter en fonction du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta < 0$ Pas de solution, la valeur de ΔS_p est trop grande et on peut reprendre le calcul en prenant par exemple une nouvelle valeur de l'incrément de longueur d'arc au pas courant moitié de la valeur précédente :

$$\Delta S'_p = \Delta S_p / 2. \qquad \text{(IV.75)}$$

$\Delta = 0$ Une solution $\delta\lambda_p^{\,i}$ unique.

$\Delta > 0$ Deux solutions $\delta\lambda_p^{\,i}$.

Il faut choisir celle qui nous fait avancer toujours dans le même sens sur la courbe charge / déplacement orientée. Le choix est tel que l'angle entre la direction définie par la solution ou l'estimation antérieure et l'estimation à retenir soit un angle aigü. Ceci peut s'écrire de la manière suivante en fonction de la valeur de i :

$$-i = 0 \quad <(\{d_p\} - \{d_{p-1}\}),\{\delta d_p^{\,0}\}> > 0 \qquad \text{(IV.76.a)}$$

$$-i \geq 1 \quad <\{\Delta d_p^{\,i}\},(\{\Delta d_p^{\,i}\} + \{\delta d_p^{\,i}\})> > 0 \qquad \text{(IV.76.b)}$$

Quand on a obtenu la valeur correcte de $\delta\lambda_p^{\,i}$ on obtient la valeur de la correction du vecteur déplacement :

$$\{\delta d_p^{\,i}\} = \{\delta d_{R\,p}^{\,i}\} + \delta\lambda_p^{\,i}\,\{d_{F\,p}^{\,i}\} \qquad \text{(IV.77)}$$

Le critère d'arrêt a la même forme que dans la technique de pilotage en charge imposée.

Cette technique de pilotage avec longueur d'arc imposée permet de traiter les problèmes présentant des points limites en charge ou en déplacement. C'est le cas de nombreuses structures réelles ce qui explique l'intérêt porté à cette technique de résolution. Mais il est vrai qu'elle est plus difficile à implanter que les deux autres du fait d'un algorithme plus complexe et en particulier du choix des valeurs des longueurs d'arc ΔS_p à chaque incrément qui est moins intuitif que pour le pilotage en charge ou déplacement.

Cet algorithme est utilisé par de nombreux

Nous l'avons utilisé avec succès dans cette étude pour de nombreuses structures présentées dans le chapitre des résultats numériques, en particulier des structures présentant des points limites en charge et en déplacement pour lesquelles chacune des 2 techniques précédentes se serait avérée innefficace.

Remarques :

– Cet algorithme nécessite une triangularisation et 2 résolutions par substitution comme pour l'algorithme à déplacement imposé pour une convergence obtenue en général assez rapidement et de manière automatique même si l'on rencontre des points limites en charge ou en déplacement.

– La technique d'accélération de la convergence par Line - Search est incompatible avec la technique de pilotage par longueur d'arc (cf. [PETIAU C. (1985) pp. 35]).

– Comme dans les techniques précédentes il est possible d'ajuster automatiquement la valeur de la longueur d'arc imposée ΔS_p à chaque incrément et ceci en se servant de la valeur de l'incrément et du nombre d'itérations nécessaires au pas précédent, c'est à dire de la difficulté de convergence observée. On peut ainsi calculer ΔS_{p+1} en fixant les mêmes règles pour augmenter ou diminuer l'incrément. La loi retenue est de la même forme :

$$\Delta S_{p+1} = \Delta S_p \left(\frac{i_{max}}{i_{max\ p}} \right)^{\alpha} \tag{IV.78}$$

Où i_{max} est le nombre d'itérations souhaitées pour un pas et $i_{max\ p}$ le nombre d'itérations qui ont été nécessaires à la convergence au pas p.

Pour les valeurs de l'exposant α et de i_{max} on se reportera au pilotage en charge imposée.

– L'algorithme nécessite la résolution pour un premier pas en charge avec $\Delta\lambda_0$ ou en déplacement imposé avec Δd_0, afin de calculer ΔS_0 car il est très difficile de donner une première valeur de ΔS_p.

On a donc après le premier incrément :

$$\Delta S_0 = \| \{\Delta d_0\} \| \tag{IV.79}$$

Où $\{\Delta d_0\}$ est la solution non linéaire obtenue après le premier pas.

IV.2.3 Algorithmes utilisés en F.L.T. et en F.L.A.

Le but de ce paragraphe, est de préciser dans le cas de l'élément de coque dégénéré, les algorithmes utilisés dans le cadre des deux formulations étudiées dans cette étude : Formulation Lagrangienne Totale (F.L.T.) et Formulation Lagrangienne Actualisée (F.L.A.).

La F.L.T. est de loin la plus simple à mettre en oeuvre, comme nous l'avons mentionné dans les développements précédents, où on a déterminé l'expression de la matrice tangente $[k_T]^2_0$ et du vecteur des efforts intérieurs $\{f_{int}\}^2_0$.

Néanmoins, comme pour tous les éléments finis basé sur la théorie assujettie, la présence de rotations au sein des variables nodales n'autorise pas un cumul satisfaisant de ces dernières (les rotations n'ont pas le caractère additif des vecteurs) comme nous le faisons pour les variables du type déplacement [cf. BATHE K.J. (1982)]. De ce fait le domaine de validité de la F.L.T. est limité à des rotations nodales maximales de l'ordre de 20°, et comme nous l'avons mentionné en introduction (cf. Introduction.3 : Objectifs de l'étude) l'un des développements présentés ici est la F.L.A. qui elle permet de s'affranchir de cette limitation.

En effet, dans le cas de la F.L.A., la limitation précédente porte sur les incréments de rotation entre chaque état d'équilibre de la structure et non plus sur les rotations cumulées. Ceci nécessite d'actualiser la géométrie à chaque fois que l'on atteint la convergence, donc un état d'équilibre, pour chacun des pas de chargement.

En utilisant cette technique on s'affranchit de la limitation des rotation nodales totales à 20°, tout en évitant le problème du cumul des rotations.

Certains auteurs actualisent la géométrie non pas après chaque incrément, mais après chaque itération, ce qui doit conduire à diminuer encore l'ordre de grandeur des rotations nodales incrémentales. Néanmoins cette modification, tout en demandant des calculs bien plus importants, ne conduit semble-t-il pas à une amélioration sensible des résultats [cf. FAFARD M. et *al.* (1990)].

On trouvera dans les planches IV.1 et IV.2 le détail des calculs effectués dans le cadre de la F.L.T. et de la F.L.A. avec, comme expliqué à la fin du chapitre III, les étapes du calcul du vecteur des efforts intérieurs en F.L.A., où l'on somme les les "efforts" $\{N\}^{2\text{-}1}{}_1$ et les "moments" $\{M\}^{2\text{-}1}{}_1$ incrémentaux aux mêmes quantités définies sur Ω^1 : $\{N\}^1$ et $\{M\}^1$.

Début de pas (p)

Configuration Ω^0 connue par sa géométrie $\{C\}^0$

⇛ coordonnées $\{R\}^0$ et vecteurs locaux aux noeuds $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})^0$ connus

Déplacement $\{d\}^1{}_0$ relativement à Ω^0 connu (Ω^1 définie au pas précédent)

On cherche $\{d\}^2{}_0$ pour préciser Ω^2

Incrémentation du chargement extérieur : $\{F_{ext}\}^2{}_0 = \{F_{ext}\}^1{}_0 + \{F_{ext}\}^{2\text{-}1}{}_0$

Début de l'itération (i)

Pour chaque élément (e)

Récupérer dans $\{C\}^0$ les coordonnées et vecteurs locaux aux noeuds

Récupérer $\{d_n\}^2{}_0$ estimé ou atteint à l'itération i–1 dans le vecteur global $\{d\}^2{}_0$

Initialiser $[k_T]^2{}_0 = [0]$ et $\{f_{int}\}^2{}_0 = \{0\}$

Calculer les matrices matériau : $[A_m]$, $[A_s]$, $[A_{mf}]$, $[A_f]$ (éq. III.96-101)

Pour chaque point de Gauss (g)

Calculer les vecteurs locaux : $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})_{0\,g}$ (éq. I.30-32-33)

Calculer : $[B_{L0p}]_0$, $[B_{L0hp}]_0$, $[B_{L1p}]_0$, $[B_{NLp}]^2{}_0$ (éq. III.118 et A3, A4)

Calculer : $\{f_{int}\}^2{}_{0\,g}$ relatif au point de Gauss g (éq. III.160)

Calculer le produit : poids d'intégration * jacobien –> w

Calculer : $\{f_{int}\}^2{}_0 = \{f_{int}\}^2{}_0 + w * \{f_{int}\}^2{}_{0\,g}$

Calculer : $[k_L]_{0\,g}$, $[k_{NL}]^2{}_{0\,g}$, $[k_\sigma]^2{}_{0\,g}$ (éq. II.106-107-115)

Calculer : $[k_T]^2{}_0 = [k_T]^2{}_0 + w * ([k_L]_0 + [k_{NL}]^2{}_0 + [k_\sigma]^2{}_0)$

Assembler $\{f_{int}\}^2{}_0$ dans $\{F_{int}\}^2{}_0$

Evaluer : $\{R\}^2{}_0 = \{F_{ext}\}^2{}_0 - \{F_{int}\}^2{}_0$

Assembler $[k_T]^2{}_0$ dans $[K_T]^2{}_0$

Résoudre : $[K_T]^2{}_0 \{\Delta d\}_0 = \{R\}^2{}_0$

Corriger les déplacements : $(\{d\}^2{}_0)^{i+1} = (\{d\}^2{}_0)^i + \{\Delta d\}_0$

Test de convergence : $\|\{\Delta d\}_0\| <? \varepsilon \|\{d\}^2{}_0\|$ (éq. IV.49)

Passage au pas p+1

Planche IV.1 : Algorithme utilisé pour l'élément de coque dégénéré en F.L.T.

Début de pas (p)

Configuration Ω^1 connue : – géométrie $\{C\}^1$ (coordonnées et vecteurs locaux aux noeuds)
– contraintes $\{N\}^1$, $\{M\}^1$ en chaque point de Gauss

Début de l'itération (i)

$\{F_{ext}\}^2{}_1$ connu (niveau de sollicitation indépendant de i)

Pour chaque élément (e)

Récupérer dans $\{C\}^1$ les coordonnées et vecteurs locaux aux noeuds de (e)

Récupérer $\{d_n\}^2{}_1$ estimé ou atteint à l'itération i–1 dans le vecteur global $\{d\}^2{}_1$

Initialiser $[k_T]^2{}_1 = [0]$ et $\{f_{int}\}^2{}_1 = \{0\}$

Calculer les matrices matériau : $[A_m]$, $[A_s]$, $[A_{mf}]$, $[A_f]$ (éq. III.96-101)

Pour chaque point de Gauss (g)

Calculer les vecteurs locaux : $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})^1{}_g$ (éq. I.30-32-33)

Calculer : $[B_{L0p}]_1$, $[B_{L0hp}]_1$, $[B_{L1p}]_1$, $[B_{NLp}]^2{}_1$ (éq. III.118 et A3, A4)

Calculer : $\{\varepsilon_m\}^{2\text{-}1}{}_1 = ([B_{L0p}]_1 + \frac{1}{2}[B_{NLp}]^2{}_1)\ \{d_n\}^2{}_1$ (éq. III.89)

$\{\chi_f\}^{2\text{-}1}{}_1 = [B_{L1p}]_1\ \{d_n\}^2{}_1$

$\{\gamma_s\}^{2\text{-}1}{}_1 = [B_{L0hp}]_1\ \{d_n\}^2{}_1$

Calculer : $\{N_p\}^{2\text{-}1}{}_1 = [A_m]\{\varepsilon_m\}^{2\text{-}1}{}_1 + [A_{mf}]\{\chi_f\}^{2\text{-}1}{}_1$ (éq. III.160)

$\{N_{hp}\}^{2\text{-}1}{}_1 = [A_s]\{\gamma_s\}^{2\text{-}1}{}_1$

Constituer : $\{N\}^{2\text{-}1}{}_1$ tel que $\langle N\rangle^{2\text{-}1}{}_1 = \langle\langle N_p\rangle^{2\text{-}1}{}_1, \langle N_{hp}\rangle^{2\text{-}1}{}_1\rangle$

$\{M\}^{2\text{-}1}{}_1 = [A_{mf}]\{\varepsilon_m\}^{2\text{-}1}{}_1 + [A_f]\{\chi_f\}^{2\text{-}1}{}_1$

Calculer : $\{N\}^2{}_1 = \{N\}^1 + \{N\}^{2\text{-}1}{}_1$

$\{M\}^2{}_1 = \{M\}^1 + \{M\}^{2\text{-}1}{}_1$

Calculer le produit : poids d'intégration * jacobien –> w

Calculer : $\{f_{int}\}^2{}_1 = \{f_{int}\}^2{}_1 + w * ([B_{L0p}]_1 + [B_{NLp}]^2{}_1)\{N_p\}^2{}_1$
$+ w * [B_{L0hp}]_1\{N_{hp}\}^2{}_1 + [B_{L1p}]_1\{M\}^2{}_1$

Calculer : $[k_L]_1$, $[k_{NL}]^2{}_1$, $[k_\sigma]^2{}_1$ (éq. II.125-126-129)

Calculer : $[k_T]^2{}_1 = [k_T]^2{}_1 + w * ([k_L]_1 + [k_{NL}]^2{}_1 + [k_\sigma]^2{}_1)$

Assembler $\{f_{int}\}^2{}_1$ dans $\{F_{int}\}^2{}_1$

Evaluer : $\{R\}^2{}_1 = \{F_{ext}\}^2{}_1 - \{F_{int}\}^2{}_1$

Assembler $[k_T]^2{}_1$ dans $[K_T]^2{}_1$

Résoudre : $[K_T]^2{}_1\ \{\Delta d\}_1 = \{R\}^2{}_1$

Corriger les déplacements : $(\{d\}^2{}_1)^{i+1} = (\{d\}^2{}_1)^i + \{\Delta d\}_1$

Test de convergence : $\|\{\Delta d\}_1\| <? \varepsilon\ \|\{d\}^2{}_1\|$ (éq. IV.49)

Actualiser la géométrie définissant Ω^2 : $\{R\}^2 = \{R\}^1 + \{d\}^2{}_1$

Remarque : les algorithmes présentés sur ces 2 planches correspondent schématiquement, en ce qui concerne les boucles sur les éléments et sur les points de Gauss, au programme de calcul implanté dans le code ASELF.

DEUXIEME PARTIE

RESULTATS NUMERIQUES

Chapitre V

Analyse du type flambement critique

V.1 Structures isotropes

V.1.1 Flambement global d'une poutre en I en compression

V.2 Structures anisotropes

V.2.1 Flambement de poutres à profils minces stratifiées composites en compression

V.2.2 Flambement de panneaux cylindriques stratifiés composites en compression axiale

V.1 Structures isotropes

V.1.1 Flambement global d'une poutre en I en compression

On considère le cas test suivant qui concerne la recherche des modes propres de flambement global d'une poutre en I en compression.

L'intérêt de ce cas test souvent cité par divers auteurs s'intéressant au flambement des structures modélisées par des éléments finis de plaques, réside dans le fait que les différents éléments ont des orientations très différentes suivant qu'ils se situent dans les semelles ou bien dans l'âme de la poutre, contrairement aux structures planes pour lesquelles les éléments ont tous la même orientation.

Le degré dit principal de flambement c'est-à-dire le degré de liberté correspondant au déplacement suivant la normale au plan de l'élément varie en effet d'un élément à l'autre si l'on se place dans le repère global de la structure :

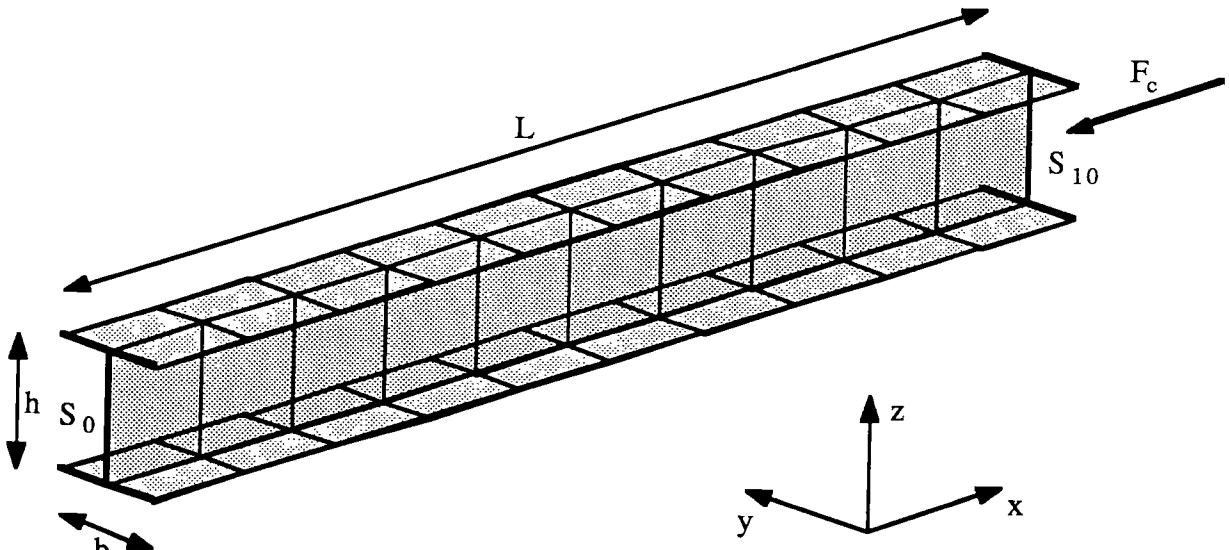
– Il correspond à w porté par l'axe z pour les semelles.

– Il correspond à v porté par l'axe y pour l'âme.

Nous allons donc considérer la poutre en I suivante maillée par les éléments de coque 3D dégénérés à 8 noeuds à fonction de forme de Serendip et intégration uniforme réduite explicite présentés dans cette étude. Ils seront appelés QS-RE dans les développements numériques. Des comparaisons seront également effectuées avec un élément de plaque à 4 noeuds dont la formulation est basée sur la théorie des plaques de Kirchhoff qui seront eux appelés CPT4. Ces différents éléments sont implantés dans le code de calcul ASELF de l'Aérospatiale.

Géométrie

La géométrie considérée est la suivante où la section S_0 est encastrée :



Les caractéristiques géométriques sont :

$L = 500$ mm

$h = 30$ mm

$b = 20$ mm

e $= 1$ mm (épaisseur de l'âme et des semelles égales : $e_a = e_s = e$)

Caractéristiques mécaniques

Matériau isotrope (acier) de caractéristiques :

$E = 21\,000$ daN / mm^2

$G = 7\,400$ daN / mm^2

Conditions aux limites cinématiques

La poutre en I est encastrée sur sa surface extrême gauche S_0 et entièrement libre en tous ses autres points.

En tous les noeuds de S_0 : $u = v = w = \alpha = \beta = 0$

Chargement

On applique une charge axiale F_c sur la surface extrême S_{10} correspondant globalement à une charge de compression portée par l'axe moyen de la poutre et discrétisée sur les différents noeuds de S_{10} : $\overrightarrow{F_c} = -F_c \overrightarrow{i}$

On applique la charge de base $F_{c0} = 280$ daN, les charges critiques de flambement F_{ci} étant déterminées par la connaissance des facteurs de charge λ_i associés tels que :

$$F_{ci} = \lambda_i F_{c0} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ces facteurs de charge λ_i correspondent aux n valeurs propres recherchés.

Caractéristiques du modèle éléments finis

En ce qui concerne les éléments de coque à 8 noeuds QS-RE, nous avons le maillage :

– Nombre d'éléments : 50 éléments de type coque à 8 noeuds.

– Qui se repartissent : 10 dans l'âme / 20 dans chaque semelle.

– Nombre de degrés de liberté : 850

Modes de flambement théoriques et charges critiques d'Euler

Les charges critiques en compression pour les 3 premiers modes de flambement sont données par la théorie d'Euler relative aux poutres. Dans le cas présent on trouve 2 modes de flexion autour des axes principaux de la poutre y et z, et 1 mode de torsion autour de l'axe moyen de la poutre x.

Mode 1: Flexion autour de z.

La charge critique théorique est égale à : $F_{c1} = \dfrac{\pi^2 E I_z}{4 L^2}$

On calcule les quantités inertielles de manière exacte pour la flexion à l'aide des relations classiques de la résistance des matériaux. On trouve :

$I_z = 1335{,}8$ mm^4

et $L = 500$ mm

On en déduit :

$F_{c1} = 276{,}86$ daN avec $F_{c0} = 280$ daN

d'où la valeur théorique : $\lambda_1 = \dfrac{F_{c1}}{F_{c0}} = 0{,}98879$

Mode 2: Torsion autour de x.

La charge critique est égale à : $F_{c2} = \dfrac{G J S}{I_0}$

Les quantités inertielles J et I_0 se calculent par la théorie des profils minces. Il s'agit donc pour le mode 2 considéré, d'un facteur de charge critique théorique approché bien que l'on soit ici dans le cadre d'application de l'hypothèse des profils minces.

Le problème le plus délicat à ce niveau est la détermination du coefficient géométrique J dans le cas d'une poutre à profil mince en torsion dont la section d'origine est encastrée. La théorie des profils minces [VLASSOV B.Z. (1962)] donne la valeur de J dans le cas d'une poutre libre en torsion dont les sections droites sont toutes libres de gauchir :

$$J' \approx \frac{\alpha}{3} \sum_i l_i \, e_i^3$$

où l_i et e_i représentent les largeurs et épaisseurs des plaques minces dont se compose la structure étudiée et α est un coefficient supposé égal à 1 dans ce cas. On obtient donc :

Mais dans le cas présent, il est nécessaire d'introduire un terme correcteur traduisant le fait que l'on ne satisfait pas à l'hypothèse de sections libres de gauchir du fait que S_0 est encastrée. On ajoute un terme du à la rigidité d'encastrement et calculé par la raideur en torsion autour de l'axe x des 2 semelles :

$$J'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2 E I_z}{G L^2}$$

La valeur du coefficient J approché peut alors s'écrire :

$$J = J' + J'' \approx \frac{e^3}{3} (h + 2b) + 3 (1+\nu) \frac{h^2}{L^2} I_z$$

Avec $I_z = 1335{,}8$ mm^4 et $I_0 = I_y + I_z = 12510$ mm^4

$S = 70$ mm^2

d'où $J' \approx 23{,}33$ mm^4 et $J'' \approx 20{,}47$ mm^4

donc $J \approx 43{,}80$ mm^4

On en déduit :

$F_{c2} = 1813{,}6$ daN avec $F_{c0} = 280$ daN

On en déduit la valeur théorique : $\lambda_2 = \frac{F_{c2}}{F_{c0}} = 6{,}4772$

Mode 3: Flexion autour de y.

La charge critique est égale à : $F_{c3} = \frac{\pi^2 E I_y}{4 L^2}$

Avec $I_y = 11174$ mm^4

$L = 500$ mm

On en déduit :

$F_{c3} = 2315{,}9$ daN

Avec $F_{c0} = 280$ daN

On en déduit la valeur théorique : $\lambda_3 = \frac{F_{c3}}{F_{c0}} = 8{,}2711$

Comparaison avec les résultats éléments finis

Les résultats théoriques trouvés précédement ont été comparés aux charges critiques de flambement linéarisées calculées en utilisant la formulation présentée en annexe A7 :

$$([K_L] + \lambda_i [K_{0\sigma}]) \{\delta d_i\} = 0$$

On s'intéresse donc au calcul des 3 premières charges critiques (λ_1, λ_2, λ_3) tout en contrôlant bien entendu les vecteurs propres $\{\delta d_i\}$ c'est à dire la "forme" des modes trouvés par rapport à leur prévision théorique.

Les éléments finis comparés sont au nombre de 2 :

- CPT4 Elément de plaque à 4 noeuds (5 D.D.L./noeud) basé sur la théorie classique des plaques (Kirchhoff).
- QS-RE Elément de coque dégénéré à 8 noeuds (5 D.D.L./noeud) type Serendip en intégration uniforme explicite réduite.

Le tableau V.1 donne les résultats obtenus pour les 3 premières charges critiques de flambement par l'utilisation de ces 2 éléments ainsi que la comparaison avec les solutions théoriques précédentes.

Elément	Mode 1	Erreur %	Mode 2	Erreur %	Mode 3	Erreur %	Nombre de D.D.L.
Plaque CPT4	1,01420	**+2,57**	4,9921	**-22,93**	8,4032	**+1,60**	700
QS–RE	0,98906	**+0,03**	5,6775	**-12,35**	8,2404	**-0,37**	850
Théorie (Euler)	0,98879		6,4772		8,2711		

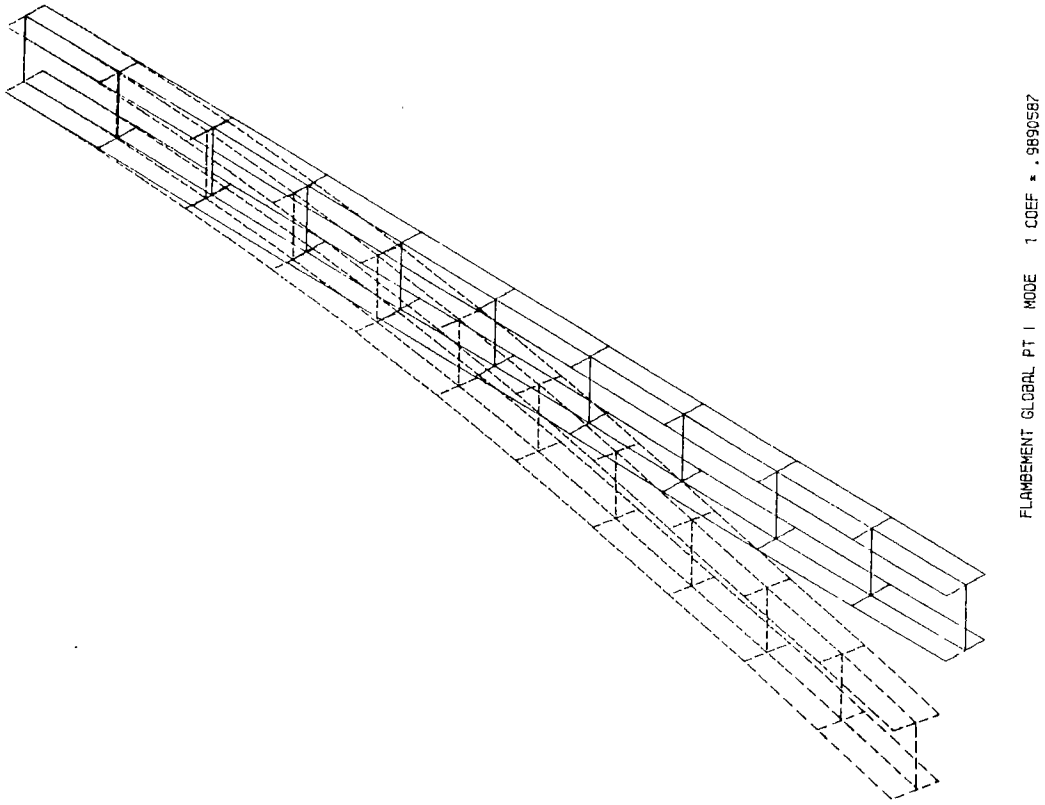
Tableau V.1 : Facteurs de charge théoriques (Euler) et charges critiques calculées par ASELF.

Représentation des modes de flambement

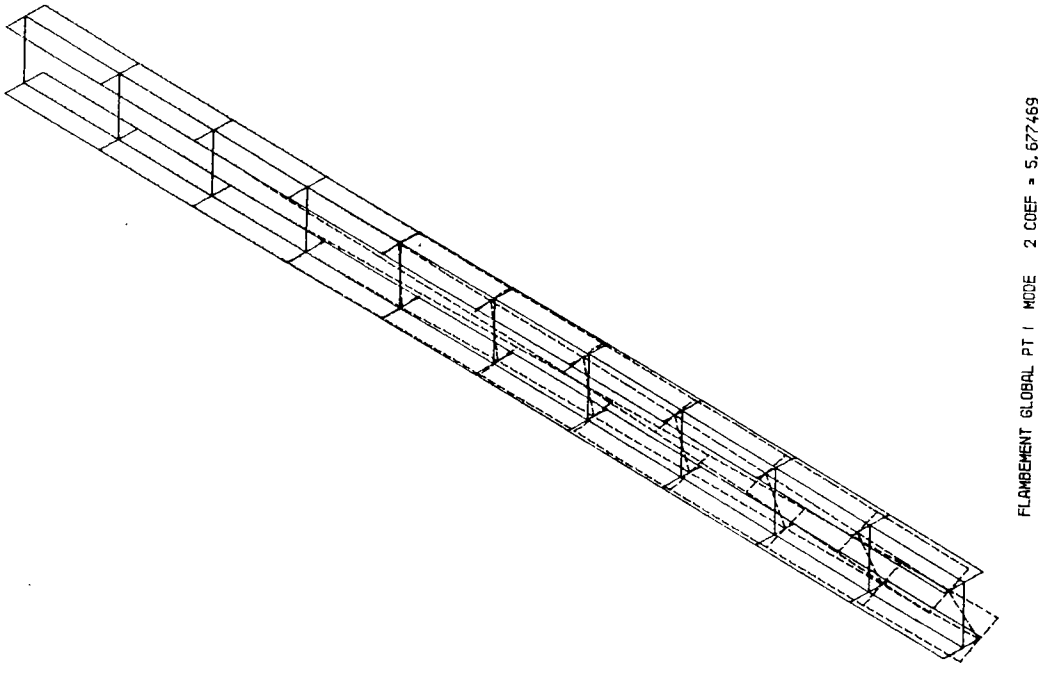
Nous donnons ici les déformées obtenues par le calcul pour les modes de flambement globaux de la poutre en I considérée.

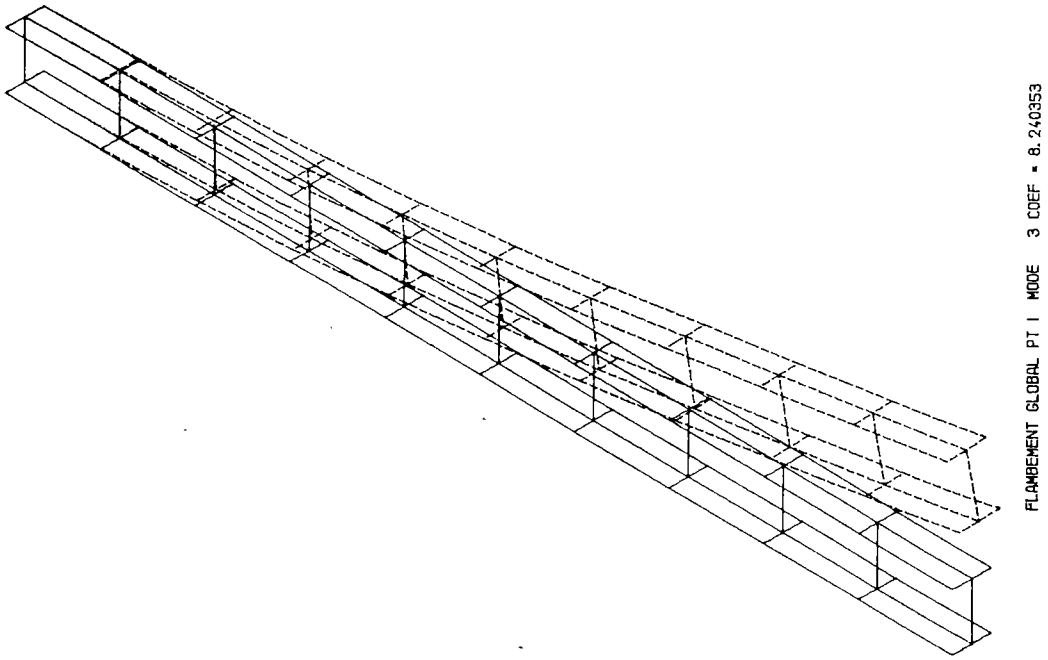
Les tracés donnent la forme du mode de flambement (en pointillés) ainsi que la géométrie non déformée de la poutre (en trait plein).

Les graphiques suivants (V.1), (V.2) et (V.3) correspondent respectivement aux modes 1, 2 et 3.



Graphique V.1 : Déformée du mode 1 de flambement.





Graphique V.3 : Déformée du mode 3 de flambement.

Conclusions

Tout d'abord on constate sur les tracés des déformées obtenus (non présentés ici) que les "formes" des modes calculés correspondent bien aux attentes théoriques : 2 modes de flexion autour de y et z et un mode de torsion autour de x.

Les résultats donnés par l'élément QS–RE sont excellent pour les modes 1 et 3 de flexion comparés à ceux donnés par l'élément de plaque CPT4 qui restent néanmoins bons, ce dernier élément se montrant trop rigide sur l'ensemble des valeurs calculées. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'élément CPT4 basé sur la théorie de Kirchhoff ne prend pas en compte dans sa formulation les phénomènes de cisaillement transverse et présente par conséquent une rigidité trop importante. Il est à noter que le nombre de degrés de liberté, pour un maillage à 50 éléments QS–RE (40 D.D.L.) et un maillage à 100 éléments CPT4 (20 D.D.L.), est voisin et est respectivement de 850 contre 700, le coût numérique étant donc voisin pour ces 2 cas : le temps de calcul des 3 premier modes de flambement avec l'algorithme d'itération sur sous espaces est de 41 s pour l'élément CPT4 contre 46 s pour l'élément QS–RE sur un ordinateur CRAY XMP-116.

Les valeurs calculées tant avec l'élément de coque QS–RE qu'avec l'élément de plaque CPT4 d'ASELF pour le mode 2 de torsion sont bien inférieures à celles prévues par la théorie des profils minces. Nous avons vu que cette théorie approchée ne donne pas la valeur exacte de

théorique. Il est donc normal que l'on n'obtienne pas pour le mode 2 une bonne adéquation entre les charges critiques données par cette théorie simplifiée et celles données par le calcul éléments finis qui dans ce cas sont plus représentatives de la réalité. Les résultats excellents en ce qui concerne les 2 autres modes confirment cet état de fait.

V.2 Structures anisotropes

V.2.1 Flambement de poutre à profils minces stratifiées composites en compression

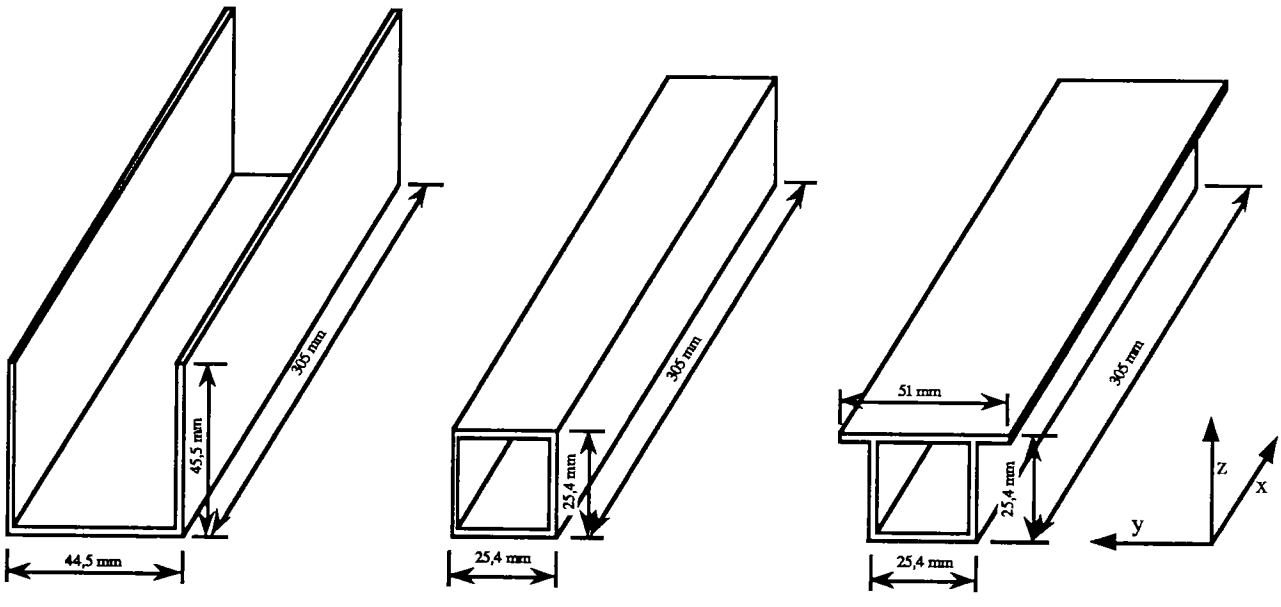
Ce cas test présente l'intérêt d'étudier les charges critiques de flambement (charges critiques d'Euler) pour des poutres à profils minces de sections diverses pouvant être modélisées par des éléments type plaque ou type coque mais constituées d'un matériau stratifié composite contrairement à la poutre en I étudiée précédemment qui était en matériau isotrope (acier).

Nous allons effectuer la comparaison des résultats donnés pour la première charge critique de flambement par l'élément QS-RE, avec entre autres des résultats expérimentaux d'essais menés sur des éprouvettes conformes aux spécimens testés. Les résultats des essais proviennent de l'étude de WANG C. et PIAN T.H.H. (1988) et ont été effectués au M.I.T. (Departement of Aeronautics and Astronautics) [WANG C. (1986)].

De plus nous allons comparer ces résultats avec les résultats obtenus par ces mêmes auteurs en utilisant un élément fini de plaque type SEMILOOF à 32 degrés de liberté [WANG C., PIAN T.H.H. (1988)].

Géométrie

Nous allons étudier 3 types de poutres minces se distingant par leur géométrie. Leur longueur reste constante et est égale à $L = 305$ mm.



Spécimen 1 **Spécimen 2** **Spécimen 3**

Caractéristiques mécaniques

Le matériau composite stratifié est composé d'un empilement variable de couches de Graphite / Epoxy de référence "Hercules AS4/3501–6".

Les propriétés mécaniques du matériau orthotrope par couche sont les suivantes:

E_1 = 139,3 Gpa

E_2 = 11,1 Gpa

G_{12} = 6,0 Gpa

ν_{12} = 0,3

L'épaisseur de chaque couche étant égale à : e = 0,134 mm.

Les caractéristiques des empilements sont données dans la tableau V.2.

Spécimen	N° Emp.	Empilement
1	1	$[\pm 15/0]_{s2}$
2	2	$[\pm 15/0]_s$
	3	$[\pm 15/0]_2$
	4	$[\pm 15_2/0_2]$
	5	$[\pm 45/(\pm 15)_s]$
3	6	tube: $[\pm 15/0]_s$ peau: $[\pm 45/0_2]$

Tableau V.2 : Caractéristiques des empilements des spécimens.

Conditions aux limites cinématiques

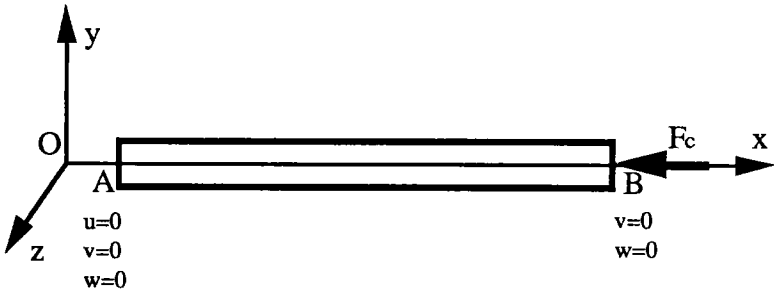


Figure V.3 : Conditions aux limites et chargement.

Les points situés sur la surface extrême gauche (comprenant A) sont tous fixes (encastrement). Les points situés sur la surface extrême droite (comprenant B) se déplacent simultanément suivant x, ce qui implique que cette surface reste en permanence dans le plan

Chargement

Les poutres sont soumises à un effort de compression appliqué sur la section extrême conprenant le point B : $\overrightarrow{F_c} = -F_c \overrightarrow{i}$. Cet effort est réparti sous forme d'une pression constante sur toute la section droite extrême.

Caractéristiques du modèle éléments finis

– Le spécimen 1 est modélisé par un maillage utilisant 6x12 éléments sur le quart de la structure en tenant compte des conditions de symétrie adéquates.

– Le spécimen 2 est modélisé par un maillage utilisant 8x12 éléments sur la structure complète.

– Le spécimen 3 est modélisé par un maillage utilisant 10x12 éléments sur la structure complète.

Dans tous les cas le nombre 12 correspond au découpage suivant x.

Résultats et comparaison avec d'autres études

Les charges critiques de flambement linéarisées trouvées par ASELF avec l'élément de coque à 8 noeuds et 40 degrés de liberté en intégration uniforme réduite explicite (QS-RE) ou numérique (QS-RN) ont été confrontés aux résultats de l'étude de WANG C. et PIAN T.H.H. (1988) qui utilisent un élément plaque de type SEMILOOF à 32 degrés de liberté. Pour un même maillage le nombre de degrés de liberté nécessité par les éléments QS ou SEMILOOF 32 sera donc à peu près du même ordre.

De plus les résultats expérimentaux obtenus lors des essais de tenue au flambement des différents spécimens [cf. WANG C. (M.I.T. 1986)] sont connus et comparés aux résultats numériques.

Pour les calculs de charges critiques la formulation matricielle mise en place en annexe A7 a été retenue pour le calcul des charges critiques des éléments QS ainsi que SEMILOOF 32 :

$$([K_L] + \lambda_i [K_{0\sigma}]) \{\delta d_i\} = \{0\}$$

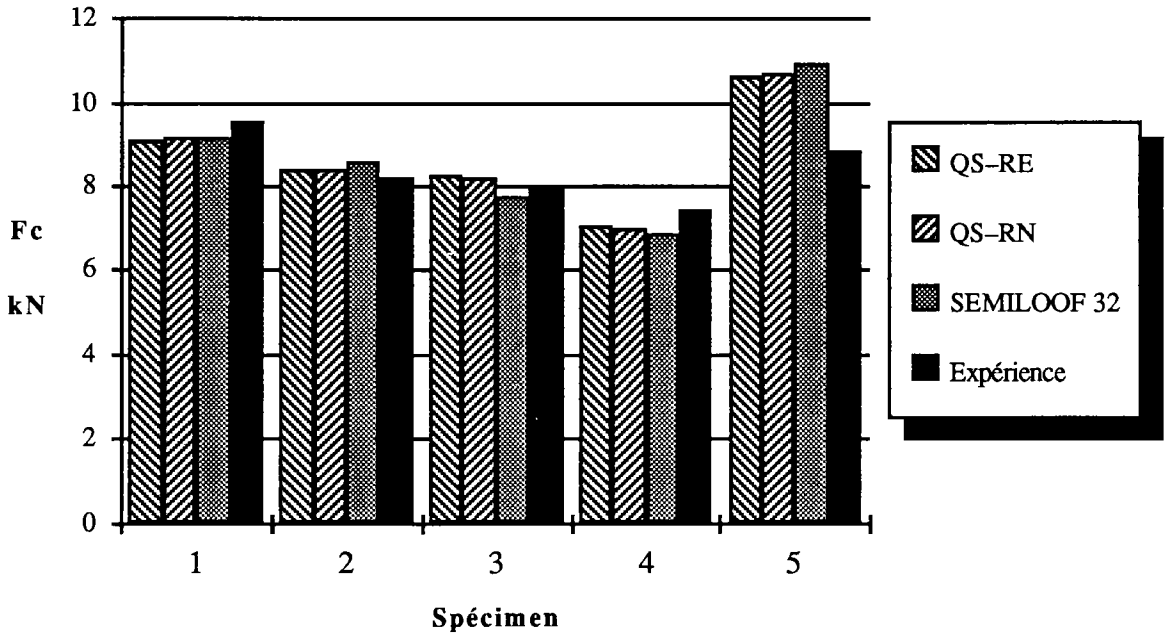
On s'intéresse donc cette fois-ci simplement au calcul de la première charge critique (λ_1) qui correspondra à F_c et qui est celle que l'on rencontre en premier lors des essais.

Le tableau V.3 donne les charges critiques de flambement en compression F_c des différents spécimens de poutres.

Spécimen	Encadrement	Fc (kN)			
		QS–RE ASELF	QS–RN ASELF	SEMILOOF 32 Wang / Pian	Expérience
1	1	9,07	9,12	9,16	9,53
2	2	8,37	8,41	8,59	8,17
	3	8,24	8,17	7,74	8,01
	4	7,04	6,99	6,87	7,46
	5	10,62	10,68	10,91	8,81
3	6	30,46	30,41	30,34	32,11

Tableau V.3 : Résultats numériques et expérimentaux pour Fc.

Les résultats numériques et expérimentaux pour les 5 premiers spécimens sont regroupés sur le graphique V.4 pour visualiser les écarts.



Graphique V.4 : Charges critiques de flambement comparées.

De manière à permettre une comparaison globale en utilisant les résultats donnés par les différents éléments finis testés pour les 6 spécimens de poutre, le tableau V.3 présente les erreurs relatives pour les différents cas considérés ainsi que la moyenne des erreurs en valeur absolue entre les résultats numériques et expérimentaux, le spécimen 2 - empilement .5 n'ayant pas été pris en compte dans l'évaluation de cette moyenne vue l'erreur "hors-norme" dans ce cas (cf. remarque à la page suivante).

Spécimen	Empilement	QS–RE ASELF % / Exp.	QS–RN ASELF % / Exp.	SEMILOOF 32 Wang / Pian % / Exp.
1	1	-4,8	-4,3	-3,9
2	2	2,4	2,9	5,1
	3	2,9	2,0	-3,4
	4	-5,6	-6,3	-7,9
	5	*20,5*	*21,2*	*23,8*
3	6	-5,1	-5,3	-5,5
Moyenne Σ |el / n (Sauf 5)		**3,5**	**3,5**	**4,3**

Tableau V.4 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux.

Conclusions

Tout d'abord une première remarque s'impose en ce qui concerne la comparaison entre l'élément de coque dégénéré utilisant l'intégration réduite explicite à 4 points de Gauss par élément (QS-RE) et celui utilisant l'intégration réduite numérique à 8 points de Gauss dans chaque couche du stratifié (QS-RN).

Les résultats diffèrent très peu entre les 2 méthodes d'intégration dans ce cas, les écarts ne dépassant pas 0,9% et la précision moyenne sur les 6 cas tests s'avère être la même. Ceci s'explique par le fait que l'on a ici des structures planes par domaines, cas pour lequel notre approximation de base qui consiste à prendre le premier terme du développement en puissance de t de la matrice jacobienne, du jacobien... est exacte car les termes d'ordre supérieur qui dépendent de l'inverse de la courbure s'annulent ($R_1 = R_2 = \infty$).

Les différences minimes constatées entre les 2 méthodes d'intégration peuvent s'expliquer par des dispersions numériques liées aux constantes d'intégrations tronquées, aux erreurs d'arrondi et aux instabilités numériques rencontrées lors de la recherche des valeurs propres donnant les charges critiques d'Euler.

Les résultats sont dans presque tous les cas légèrement meilleurs avec l'élément QS à 40 D.D.L. qu'avec l'élément SEMILOOF à 32 D.D.L. de WANG C. et PIAN T.H.H., la précision moyenne sur ces cas tests ressortant à 3,5 % pour le QS contre 4,3 % pour le SEMILOOF 32. Mais il est vrai qu'à maillage identique, l'élément SEMILOOF 32 nécessite 20 % de degrés de liberté en moins ce qui au bilan rend ces 2 éléments assez voisins sur le plan du rapport précision / nombre de degrés de liberté utiles.

Remarque : Le cas du spécimen 2 avec l'empilement 5 présente pour les 3 éléments finis testés une erreur assez importante et quasiment identique qui est de l'ordre de 20 %, ce qui laisse penser que l'on est en face d'un problème présentant une forte non-linéarité avant flambement et que dans ce cas la non prise en compte de $[K_{NL}]$ dans la formulation entraîne des erreurs notables.

V.2.2 Flambement de panneaux cylindriques stratifiés composites en compression axiale

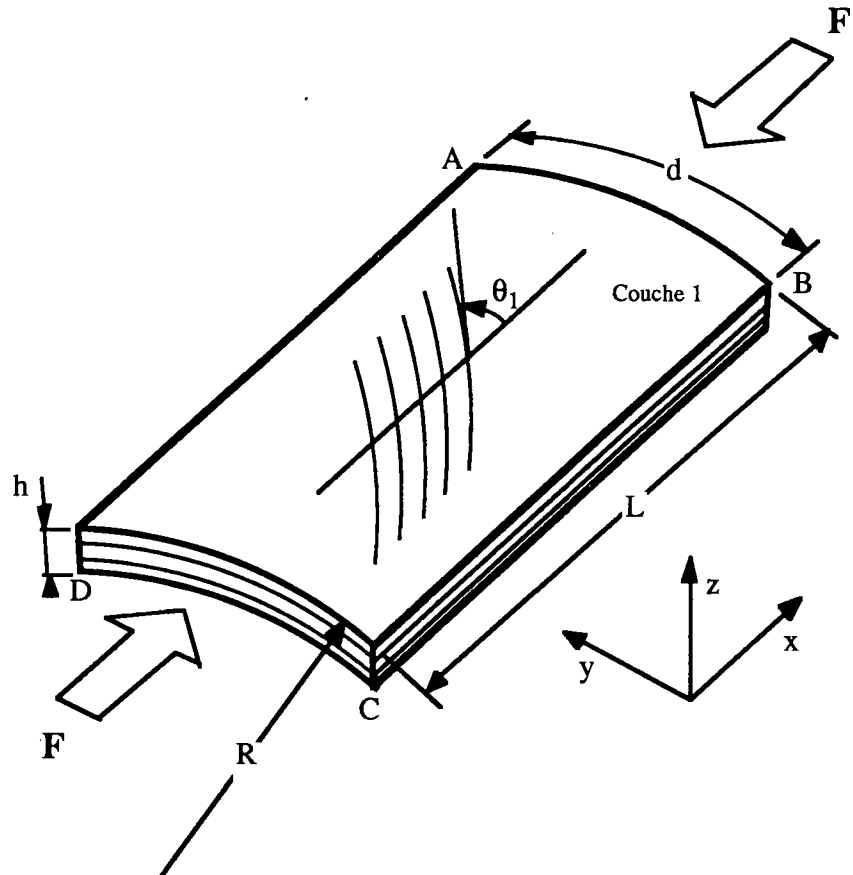
Ce test sur les coques cylindriques multicouches composites, orthotropes par couche, est intéressant car il permet de rapprocher ce problème du problème réel des structures aéronautiques où on a des parties de la structure qui ont cette allure (ailes, empennage, gouvernes et éventuellement parties du fuselage).

Il s'agit d'un axe de recherche important car on se risque encore peu à utiliser des matériaux composites au niveau de la structure primaire des avions.

Différents cas tests ont été étudiés déjà dans la littérature tant en ce qui concerne le calcul des modes de flambement avec différents types d'éléments que l'analyse non linéaire type post-flambement. JUN S.M. et HONG C.S. (1988) proposent une étude similaire à celle-ci sur le même élément de coque 3D dégénéré à 40 D.D.L. mais avec intégration numérique réduite dans l'épaisseur des couches (QS-RN). Les résultats expérimentaux existent également [SNELL M.B., MORLEY N.T. (1985)]. Cet exemple a aussi été étudié par LASCHET G. (1990).

Géométrie des panneaux cylindriques

Le modèle retenu pour les calculs a la géométrie suivante, les dimensions variant d'un cas test à l'autre ainsi que les caractéristiques des empilements considérés.



Pour le premier cas test les caractéristiques géométriques retenues sont :

h = 2 mm

R = 250 mm

L = 540 mm

d = 421,2 mm

Caractéristiques mécaniques

Matériau stratifié, orthotrope par couche de caractéristiques :

E_1 = 130 Gpa

E_2 = 10 Gpa

G_{12} = 6 Gpa

ν_{12} = 0,3

L'empilement considéré présente 16 couches d'épaisseurs constantes égales à 0,125 mm et les orientations sont les suivantes en faisant référence à l'axe x: $[+45 / -45_2 / +45 / 0_4]_S$.

L'épaisseur totale de cet empilement est donc égale à h = 2 mm.

Conditions aux limites cinématiques

Les conditions aux limites adoptées par SNELL et MORLEY (1985) sont :

– AB $\quad v = w = \alpha = \beta = 0$

– BC $\quad v = w = 0$

– CD $\quad u = v = w = \alpha = \beta = 0$ (encastrement)

– DA $\quad v = w = 0$

Chargement

Le chargement appliqué sur le panneau est un chargement de compression dans le plan de ce dernier réparti sur le bord AB et tel que : $\overrightarrow{F} = -F\,\overrightarrow{x}$.

Caractéristiques du modèle éléments finis

Le maillage utilisé par JUN et HONG pour les éléments QS-RN, et dans ASELF pour les éléments QS-RE, comporte 8x10 éléments contre 20x10 pour SNELL et MORLEY.

Calcul du premier mode de flambement

On ne s'intéresse ici qu'au calcul de la première charge critique de flambement linéaire λ_1 qui est celle retenue par les autres auteurs mais également celle qui est déterminée par les essais de flambement.

Les résultats obtenus avec les différents éléments de coque sont comparés entre eux ainsi qu'à ceux obtenus lors des essais.

Les résultats sont donnés pour les éléments suivants :

- QS-RN Elément de coque 3D dégénéré Serendip à 40 D.D.L.
  Intégration numérique uniforme réduite [JUN S.M., HONG C.S. (1988)].
  Maillage 8 x 10.
- Elément de coque à 36 D.D.L. [SNELL M.B., MORLEY N.T. (1985)].
  Intégration numérique réduite. Code de calcul : *STAGSC–1*.
  Maillage 20 x 10.
- QS-RE Elément de coque 3D dégénéré Serendip à 40 D.D.L.
  Intégration explicite uniforme réduite [LASCHET G. (1990)].
  Maillage 8 x 10. Code de calcul *SAMCEF*.
- QS-RE Elément de coque 3D dégénéré Serendip à 40 D.D.L. (Code : *ASELF*).
  Intégration explicite uniforme réduite. Maillage 8 x 10.

Ces résultats sont comparés aux résultats expérimentaux trouvés par SNELL M.B. et MORLEY N.T. (1985).

L'erreur par rapport à ces essais apparait dans le tableau de résultats V.5. On fait aussi apparaître dans ce tableau le nombre de points d'intégration (ou points de Gauss) nécessaire au calcul de chaque matrice de rigidité élémentaire suivant les types d'éléments et les auteurs (cf. ci-dessus).

Référence	Méthode	Charge critique (daN)	Erreur %	Nombre D.D.L.	Points d'intégration par élément
SNELL M.B. MORLEY N.T. 1985 ***STAGSC-1***	Coque 36 DDL Intégration numérique réduite Maillage 20 x 10	15150	+13,0	3452	128
LASCHET G. 1990 ***SAMCEF***	QS–RE Coque 40 D.D.L. Intégration explicite réduite Maillage 8 x 10	14390	+7,4	1454	4
JUN S.M. HONG C.S. 1988	QS–RN Coque 40 D.D.L. Intégration numérique réduite Maillage 8 x 10	14320	+6,9	1454	128
ASELF	QS–RE Coque 40 D.D.L. Intégration explicite réduite Maillage 8 x 10	14398	+7,4	1454	4
SNELL M.B. MORLEY N.T. 1985	Expérience	13400			

Tableau V.5 : Comparaison entre résultats numériques et expérimentaux pour le calcul de la première charge critique de flambement et pour différents codes et éléments finis de coque.

Conclusions

La première remarque concerne les résultats identiques donnés par les codes de calcul *SAMCEF* et *ASELF*, ce à quoi on pouvait s'attendre car l'élément utilisé est rigoureusement le même : élément de coque 3D dégénéré en intégration uniforme réduite explicite.

Ces résultats obtenus en utilisant l'élément de coque dégénéré à intégration explicite dans l'épaisseur QS-RE sont pratiquement aussi bons que ceux obtenus avec le même élément de coque à intégration numérique dans chaque couche QS-RN présenté par JUN S.M. et HONG C.S. (1988), l'écart étant sur cet exemple égal à 0,5 % ce qui reste négligeable.

JUN et HONG utilisent une intégration numérique réduite dans l'épaisseur des couches et un total de 2 x 2 x 2 points de Gauss dans chaque couche est alors nécessaire, contre 2 x 2 pour l'ensemble des couches en intégration explicite réduite (présente étude).

L'intérêt de l'élément QS-RE sur ce cas-test est donc considérable puisque déjà pour un empilement présentant 16 couches, on diminue le nombre de points d'intégration numérique (points de Gauss) de 128 (QS-RE) à 4 (QS-RN) et ce pour une précision similaire. Ceci est très intéressant pour un tel élément de coque qui est coûteux en calculs et aussi fort intéressant pour la suite de cette étude, l'analyse non linéaire complète des structures courbes multicouches qui nécessite des temps de calculs encore plus importants que la présente analyse.

mais plus par le principe même de ce type d'analyse en flambement linéaire critique qui, du fait que l'on néglige entre autre l'influence de $[K_{NL}]$ (cf. A7.17) dans les calculs, conduit souvent à une surévaluation des charges admissibles par rapport aux essais ou par rapport à l'analyse non linéaire géométrique complète [cf. BATOZ J.L., LARDEUR P., CHATELAIN J., DHATT G. (1985) p.19-21].

De plus on constate que l'élément de coque QS utilisé offre une précision bien supérieure à celui de SNELL et MORLEY surtout en tenant compte du nombre de degrés de liberté utilisés : 7,4 % d'erreur pour 1 450 D.D.L. environ contre 13 % et 3 400 D.D.L. environ.

Test de convergence en fonction du maillage

Trois tests de calcul de la première charge critique linéaire de flambement d'une structure ont été réalisés afin de comparer l'élément QS-RE implanté dans ASELF et l'élément QS-RN présenté par JUN et HONG, lorsque l'on augmente la finesse du maillage.

La géométrie est à nouveau celle de la figure V.4, mais les dimensions données par JUN et HONG sont changées par rapport au test précédent :

h = 1 mm

R = 150 mm

L = 150 mm

d = 157,05 mm

Les caractéristiques du matériau, orthotrope par couche, sont également changées :

E_1 = 181 Gpa

E_2 = 10,3 Gpa

$G_{12} = G_{23} = G_{31}$ = 7,17 Gpa

ν_{12} = 0,3

$\nu_{23} = \nu_{13}$ = 0,28

L'empilement considéré présente 8 couches d'épaisseurs constantes égales à 0,125 mm et les orientations sont les suivantes en faisant référence à l'axe x: $[0 / \pm 60 / 90]_S$.

L'épaisseur totale de cet empilement est donc égale à 1 mm.

Comparaison avec l'étude de JUN S.M. et HONG C.S. (1988)

Les résultats concernant la valeur calculée pour la première charge critique de flambement de la structure par les éléments QS-RE (ASELF) et QS-RN (JUN S.M. et HONG C.S.), sont

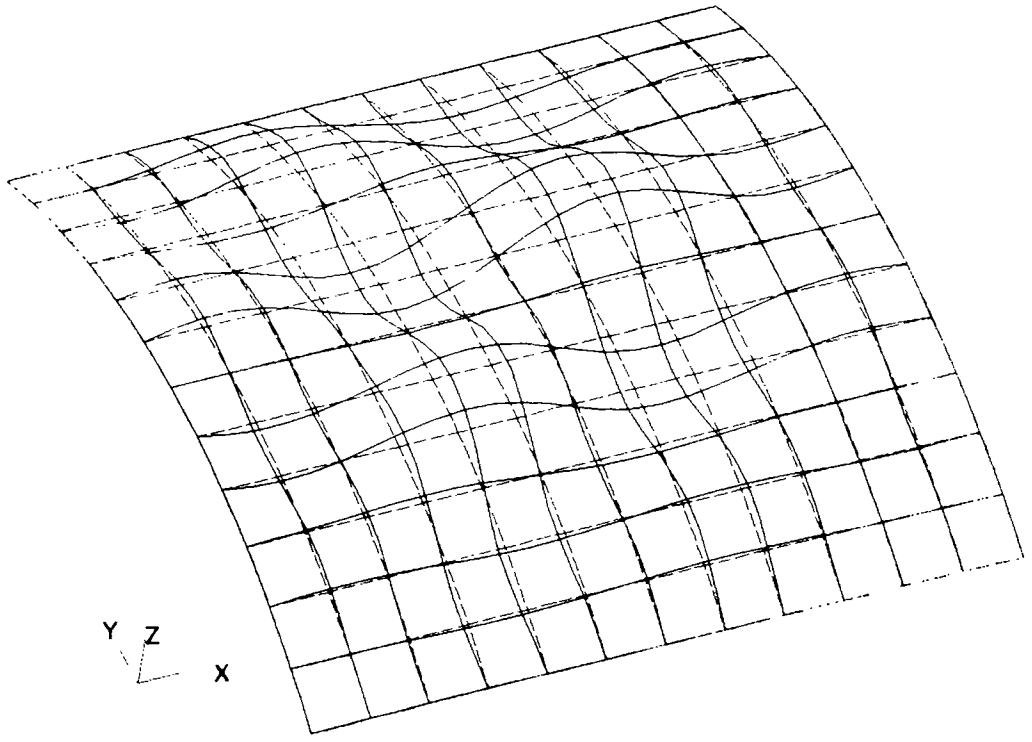
l'on augmente la finesse du maillage pour les 2 types d'éléments et donc de valider la formulation explicite comparativement à la formulation utilisant l'intégration numérique.

Les résultats sont donnés dans le tableau V.6.

Référence	Maillage : Nombre de D.D.L. :	8 x 8 946	10 x 10 1482	12 x 12 2138	Points d'intégration par élément
JUN S.M. HONG C.S. 1988	QS–RN Coque 40 D.D.L. Intégration numérique réduite	44285 (daN)	40710 (daN)	40505 (daN)	64
ASELF	QS–RE Coque 40 D.D.L. Intégration explicite réduite	42810 (daN)	41170 (daN)	40680 (daN)	4
	Ecart charges critiques (%) JUN, HONG / ASELF	-3,3	+1,1	+0,4	

Tableau V.6 : Valeur des charges critiques en fonction des valeurs de *n*.

Dans le cas du maillage (12 x 12) la forme du premier mode de flambement est donnée sur la page suivante, les lignes en pointillés représentant la géométrie initiale non déformée et les lignes pleines la déformée.



Test sur le temps de calcul CPU

Il n'est pas possible de comparer directement les temps de calculs sur les différents maillage vu que les 2 machines sont très différentes :

– mini ordinateur (JUN et HONG)

– CRAY XMP–14SE (ASELF)

Néanmoins les temps de calculs nécessaires à la détermination de la première charge critique sont présentés dans le tableau V.7 suivant afin de mettre en évidence que ces temps sont importants en raison du nombre élevé d'opérations nécessitées par ce type d'analyse (plus de 6 heures sur un mini ordinateur pour un maillage 12x12) et que l'utilisation d'un ordinateur rapide type supercalculateur s'avère indispensable à l'analyse de structures complexes.

Référence	Maillage : Nombre de D.D.L. :	8 x 8 946	10 x 10 1482	12 x 12 2138	Points d'intégration par élément
JUN S.M. HONG C.S. 1988	QS–RN Coque 40 D.D.L. Intégration numérique réduite	7740 (s)	18060 (s)	21840 (s)	64
ASELF	QS–RE Coque 40 D.D.L. Intégration explicite réduite	34 (s)	61 (s)	70 (s)	4

Tableau V.7 : Temps de calcul de la première charge critique.

Chapitre VI

Analyse non linéaire complète

VI.1 Structures isotropes

F.L.T.

VI.1.1 Plaque chargée verticalement au centre
VI.1.2 Coque cylindrique sous charge concentrée
VI.1.3 Coque sphérique sous charge concentrée
VI.1.4 Dôme sphérique encastré avec charge centrale
VI.1.5 Plaque encastrée en flexion pure

F.L.T. / F.L.A.

VI.1.6 Poutre en compression avec charge perturbatrice
VI.1.7 Plaque encastrée en porte-à-faux

VI.2 Structures anisotropes

VI.2.1 Coque cylindrique multicouches sous charge concentrée

VI.1 Structures isotropes

VI.1.1 Plaque chargée verticalement au centre

On considère le premier cas test suivant où on étudie une plaque carrée avec un chargement ponctuel au centre *A* (cf. figure VI.1) perpendiculaire au plan de la plaque (porté par l'axe *z*). Ce cas test est présenté également par BATOZ J.L., LARDEUR P., et al. (1985) avec chargement réparti et chargement ponctuel et ces résultats serviront de comparaison à ceux donnés par le code de calcul ASELF avec l'élément QS-RE.

Géométrie

Vues les symétries du problème nous considérons une structure correspondant au quart de la plaque. La géométrie considérée est la suivante :

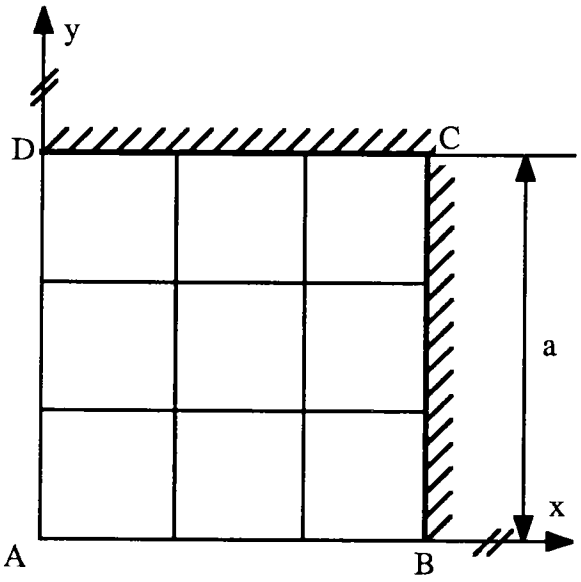


Figure VI.1: Modèle quart de plaque encastrée.

Les caractéristiques géométriques sont définies comme suit, en supposant un système d'unités cohérent [BATOZ J.L., LARDEUR P., et al. (1985)] :

$$a = 10$$

$$h = 1$$

Caractéristiques mécaniques

On considère un matériau isotrope de caractéristiques mécaniques (unités cohérentes) :

$$E = 10{,}92$$

$$\nu = 0{,}3$$

Chargement

On applique une charge P portée par l'axe z au centre A de la plaque :

$$\overrightarrow{P} = P\overrightarrow{z}$$

Dans ce cas on fait simplement un pilotage en charge imposée vu que la rigidité de la structure est strictement croissante.

On réalise 9 pas de charge différents définis dans le tableau T.1 et ce de manière à considérer les mêmes points de calcul que ceux donnés dans l'étude de BATOZ J.L., LARDEUR P. et al. (1985).

Conditions aux limites

Sur BC et CD on a encastrement : $u = v = w = \alpha = \beta = 0$

Conditions de symétrie

Sur AB : $v = \alpha = 0$

Sur AD : $u = \beta = 0$

Maillage

On considère un maillage faisant intervenir 3x3 éléments sur le quart de la structure.

Nombre de noeuds : 40

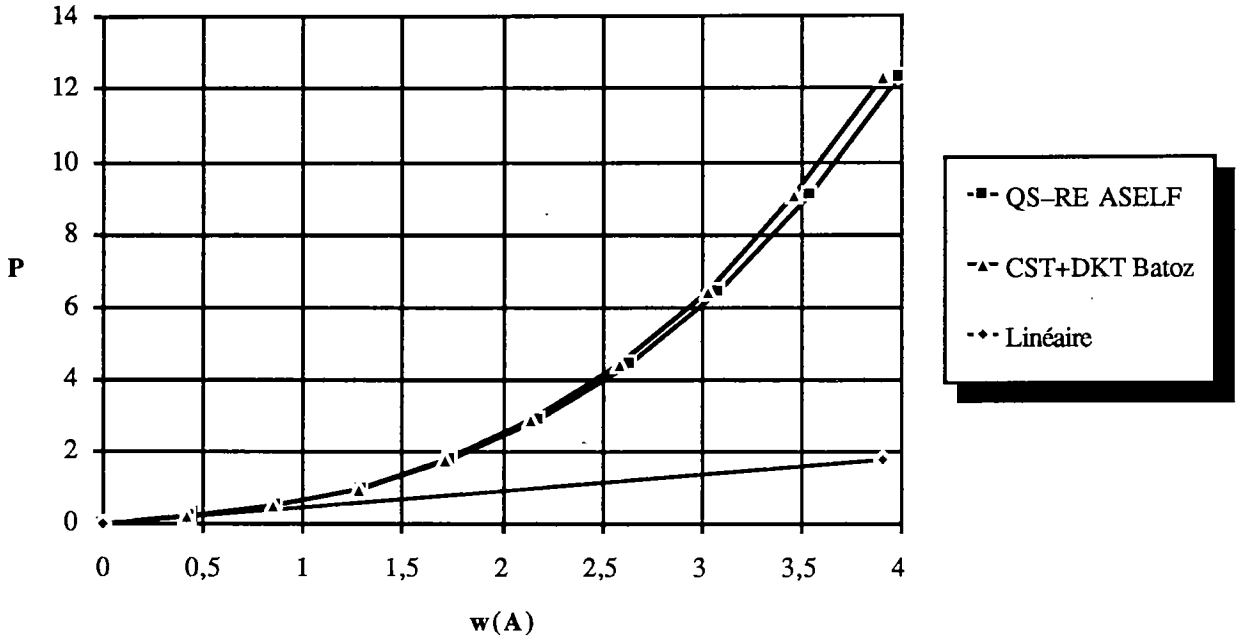
Nombre de D.D.L. actifs : 101

Résultats

Les résultats présentés ici sont ceux obtenus en analyse non linéaire avec l'élément de coque 3D dégénéré à fonctions de forme de Serendip et intégration explicite uniforme réduite (QS-RE) implanté dans ASELF en utilisant une F.L.T.. Le nombre de D.D.L. actifs après prise en compte des conditions aux limites et des conditions de symétrie est de 111 avec ce maillage.

Ces résultats sont comparés à ceux donnés d'une part par une analyse linéaire classique et d'autre part à ceux donnés par BATOZ J.L., LARDEUR P., et al. (1985) qui utilisent eux un maillage comportant 32 éléments de coque triangulaires à 3 noeuds et 6 D.D.L. par noeud en F.L.T. avec également l'hypothèse des rotations nodales modérées. Cet élément est formulé en associant l'élément CST pour la partie membrane et l'élément DKT pour la partie flexion

Les courbes tracées sur le graphique VI.1 donnent la charge verticale appliquée P au centre de la plaque complète (point A) en fonction du déplacement vertical $w(A)$. Les valeurs numériques données par les différents éléments sont indiquées dans le tableau T.1 (cf. chapitre : Tableaux de résultats).



Graphique VI.1: Courbes charge / déplacement au centre pour les différents éléments.

La technique de Newton-Raphson modifiée (N.R.M.) est utilisée avec pilotage en charge et un nombre total de 28 itérations a été nécessaire à la résolution avec 9 pas de charge ce qui donne une moyenne d'environ 3 itérations par pas de charge, le nombre d'itérations au premier pas de chargement étant de 5 pour ensuite descendre à 2 pour les derniers pas.

Le critère d'arrêt des itérations est de la forme qui a été présentée dans l'étude théorique (cf. annexe A7) :

$$\frac{\| \{\delta d_p^i\} \|}{\| \{d_p\} \|} \leq \varepsilon$$

Avec la valeur de ε retenue dans ASELF : $\varepsilon = 10^{-3}$

Le temps CPU s'élève à 38 secondes pour la chaîne non linéaire avec le code de calcul ASELF et sur un ordinateur type CRAY XMP–116.

Conclusions

Dans ce cas pour un déplacement au centre de l'ordre de l'épaisseur de la plaque, on constate que la solution linéaire est proche de la solution non linéaire. Ensuite on s'écarte rapidement de cette solution.

Les solutions données par l'élément QS-RE d'ASELF et les éléments CST+DKT de BATOZ sont proches avec un écart qui reste voisin de 2% à 3% (cf. Tableau T.2) pour l'ensemble des points de calcul, l'élément QS-RE se montrant plus souple que l'association CST+DKT.

On peut s'étonner que le temps de calcul pour un problème de taille aussi réduite (111 D.D.L.) s'élève à 38 secondes sur un ordinateur CRAY XMP–116 mais il faut noter que lorsque l'on utilise un gros code de calcul comme ASELF, on passe une partie non négligeable du temps CPU à gérer les procédures, programmes et sous programmes ce qui est d'autant plus pénalisant pour un problème de taille réduite.

VI.1.2 Coque cylindrique sous charge concentrée

Il s'agit du cas test d'un panneau cylindrique mince constitué d'un matériau isotrope soumis à une charge concentrée, test considéré par de nombreux auteurs pour valider les différents éléments finis de coques dans le domaine de l'analyse non linéaire géométrique des structures courbées [BATHE K.J. (1974)] [BATOZ J.L. (1977 / 83 / 85)]. Cette géométrie a aussi été utilisée pour tester l'efficacité des différents algorithmes de résolution des problèmes non linéaires [ERIKSSON A. (1989) p.1329].

Les données numériques utilisées sont celles trouvées dans les publications de ces différents auteurs.

Géométrie

La structure considérée est la suivante :

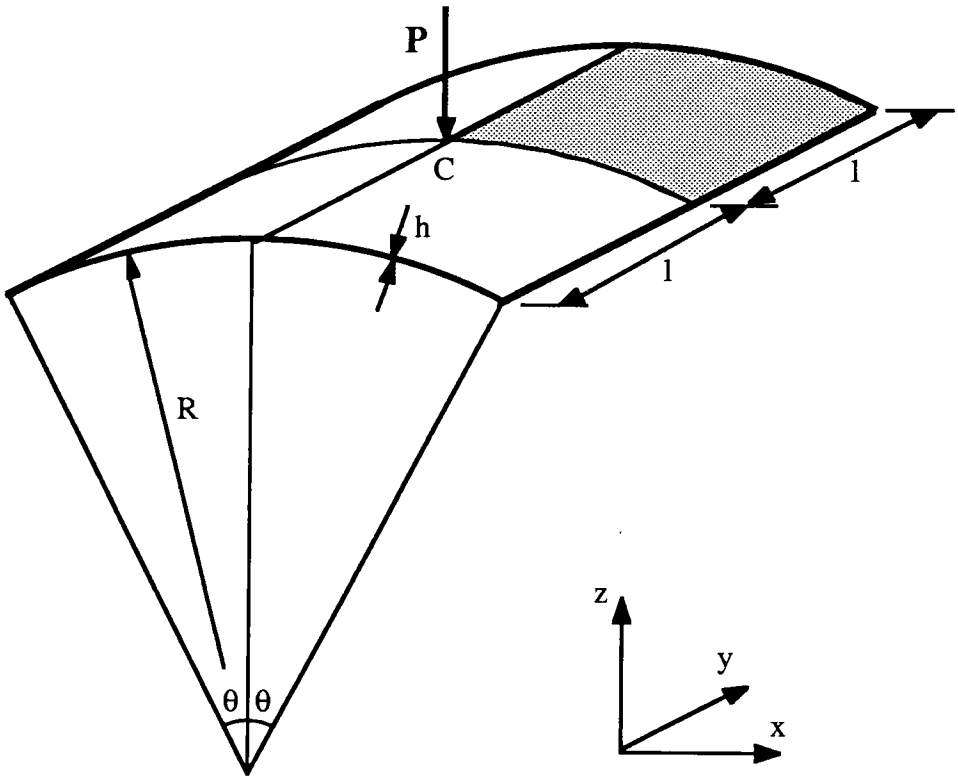


Figure VI.2 : Structure coque cylindrique sous charge concentrée.

Les caractéristiques géométriques sont :

R = 2540 mm

l = 254 mm

h = 12,7 mm ou 6,35 mm (2 cas tests distincts considérés)

Caractéristiques mécaniques

Matériau isotrope de caractéristiques [cf. BATHE K.J. (1974)] :

$E = 310{,}275$ daN / mm^2

$\nu = 0{,}3$

Conditions aux limites cinématiques.

Le modèle complet de la coque cylindrique est maintenu par des "charnières" le long de ses cotés rectilignes autorisant seulement la rotation autour de l'axe y (cf. figure VI.3) :

$-AB$ Bord libre.

$-DA$ $u = v = w = 0 \quad \beta = 0.$

Conditions de symétrie.

Sur le modèle du quart de la structure par raison de symétries on a les conditions aux limites suivantes sur les 4 côtés :

$-BC$ $u = 0 \quad \alpha = 0.$

$-CD$ $v = 0 \quad \beta = 0.$

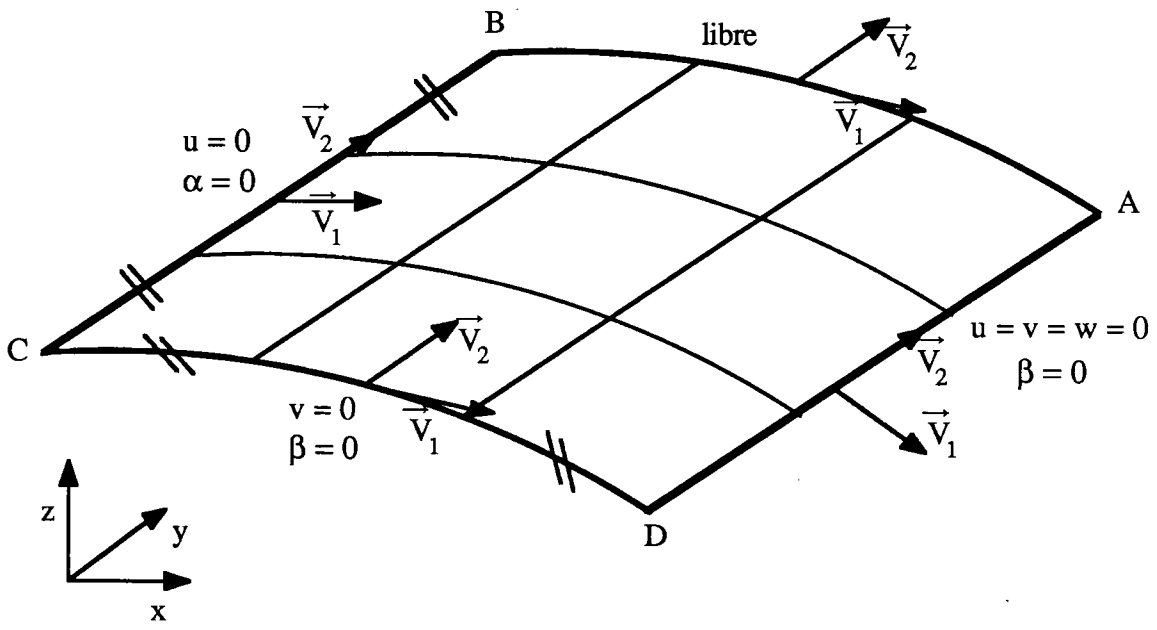


Figure VI.3 : Modèle 1/4 de coque cylindrique.

Chargement.

On applique sur le modèle complet de la coque cylindrique un effort P au point central C (cf. figure VI.2) soit encore un effort $P/4$ sur la partie schématisée figure VI.3.

Caractéristiques du modèle éléments finis.

Comme mentionné précédemment, on ne maille que un quart de la structure en tenant compte des conditions de symétrie. Le maillage est uniforme et comporte (3x3) éléments de coque dégénérés à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme réduite explicite (QS-RE).

Les caractéristiques de ce maillage peuvent se résumer par :

- Nombre d'éléments : 9
- Nombre de noeuds : 40
- Nombre de D.D.L. : 146 (après prise en compte des conditions aux limites)

Résultats.

On trace les courbes charge / déplacement vertical pour le point C : $P = f(w(C))$ pour les résultats donnés par ASELF avec l'élément de coque QS-RE pour deux géométries distinctes se distinguant par l'épaisseur de la coque cylindrique :

- h = 12,7 mm soit h/R = 1/200
- h = 6,35 mm soit h/R = 1/400

La forme des courbes charge / déplacement et par conséquent la technique de pilotage ne sera pas la même dans chaque cas.

1er cas test : h = 12,7 mm (h/R = 1/200).

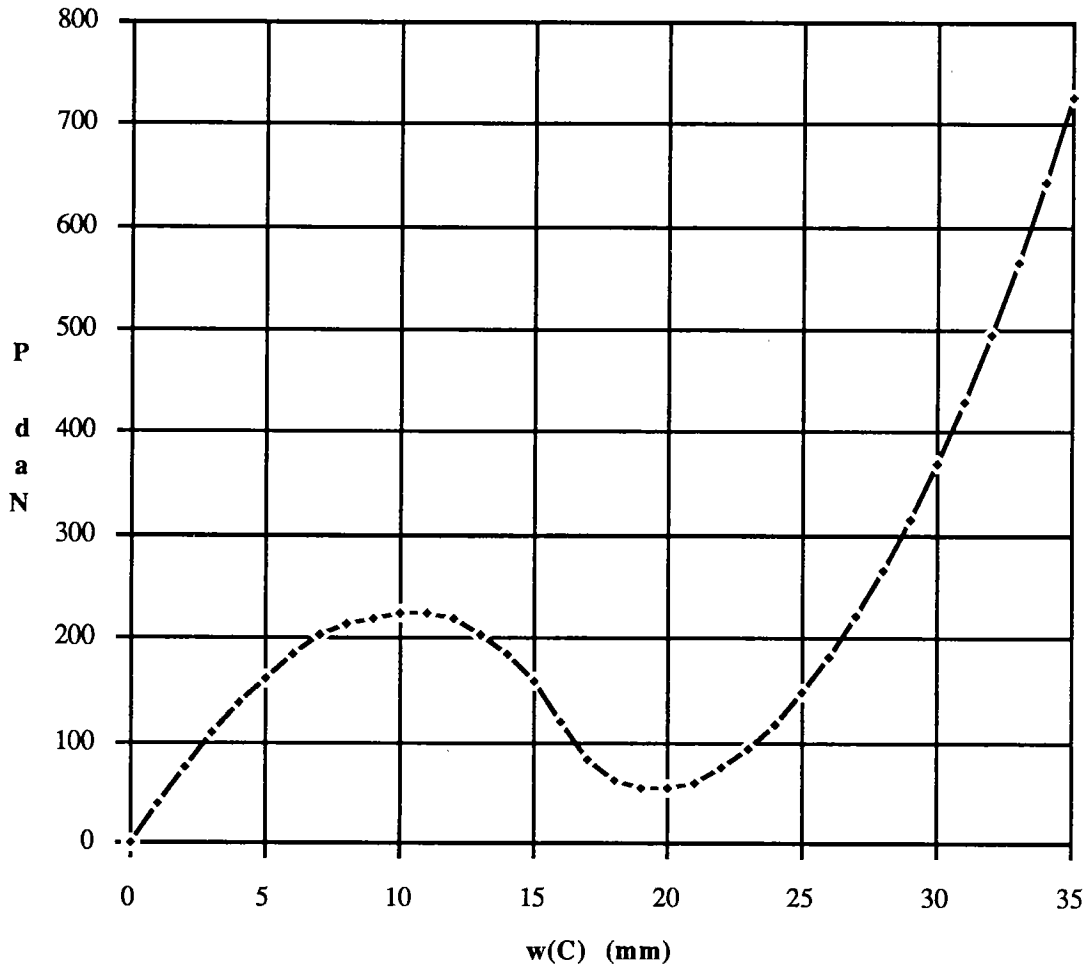
Dans ce cas test la solution non linéaire est bien connue et présente 2 points limites en charge, par conséquent il a été choisi d'utiliser la technique de pilotage en déplacement imposé, où on impose le déplacement vertical (suivant z) au noeud central (point C) : $w(C)$. On aurait également pu résoudre le problème par la technique de pilotage en longueur d'arc qui s'avérera nécessaire dans le second cas test.

On fait 35 incréments de déplacement égaux tels que $\Delta w(C)$ = 1 mm pour un total de 70 itérations, la méthode de Newton - Raphson modifiée (N.R.M.) étant utilisée.

Le nombre d'itérations par pas reste constant quel que soit le point sur la courbe, et égal à 2, ce qui montre que l'on est dans le cas d'un problème dont la non-linéarité reste modérée tout au

Le temps CPU total nécessaire pour résoudre ce problème s'élève à 115 secondes sur CRAY XMP–14 SE, le temps de calcul des 9 matrices tangentes élémentaires étant de 150 ms environ à chaque incrément ce qui en porte le temps total à 5,25 secondes pour 35 incréments et montre que cette phase du calcul reste tout à fait négligeable par rapport aux autres opérations nécessitées par l'analyse non-linéaire (triangularisation des matrices, résolution par remontée, pilotage, incrémentation).

La courbe charge / déplacement vertical $P = f(w(C))$ donnée par l'élément QS-RE implanté dans ASELF est la suivante, les résultats numériques étant donnés dans le tableau T.3.



Graphique VI.2 : Courbe charge / déplacement, h = 12,7 mm, élément QS-RE.

Comparaison avec d'autres études.

Les résultats sur ce cas test trouvés avec l'élément QS-RE implanté dans ASELF sont comparés avec les résultats obtenus avec d'autres types d'éléments plaque ou coque utilisés par différents auteurs.

Les éléments que nous avons retenus pour cette étude comparative de leurs performances sont les suivants et ont été extraits des publications indiquées :

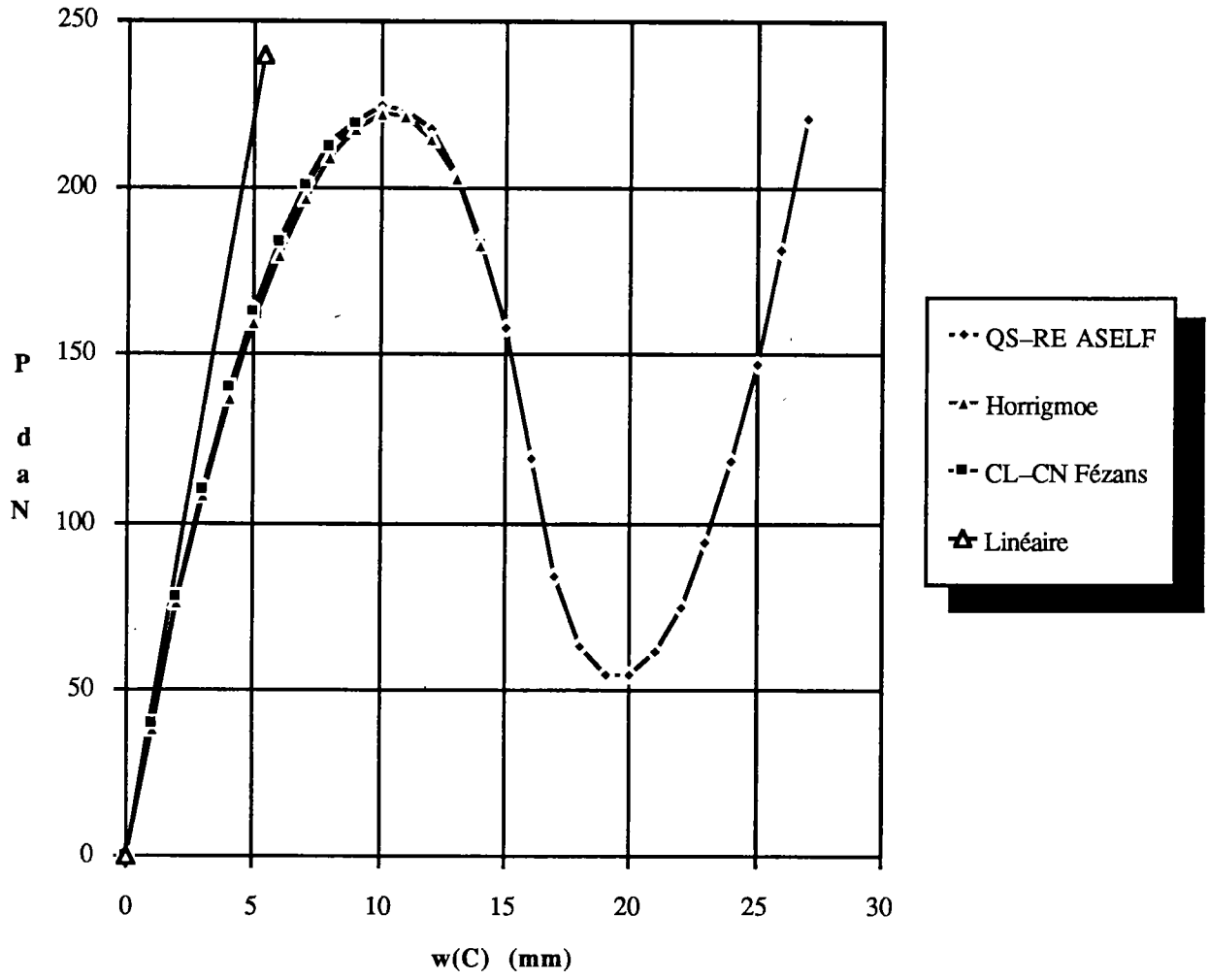
- CL-CN Elément de coque dégénéré à 12 noeuds (F.F. cubiques) type Lagrange en intégration uniforme complète numérique [FEZANS G. (1981)].
- QS-RE Elément de coque dégénéré à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme réduite explicite (ASELF).
- Elément de plaque [HORRIGMOE G. (1977)].

Les différents résultats sont donnés dans le tableau VI.1 pour $w(C) \leq 14$ mm ensuite on se reportera au tableau T.3. On y trouvera aussi les écarts observés entre les résultats donnés par ASELF et ceux des autres auteurs avec les éléments correspondants.

w(C)	Ecart %	
(mm)	QS–RE / Horrigmoe	QS–RE / Fézans
0	-	-
1	4,5	-0,7
2	2,4	-0,3
3	2,3	0,5
4	1,7	-0,5
5	2,2	0,3
6	2,6	0,4
7	2,6	0,5
8	2,0	0,6
9	1,3	0,4
10	1,0	-
11	0,8	-
12	1,2	-
13	0,9	-
14	1,2	-

Tableau VI.1 : Comparaison des résultats des différents auteurs.

Le graphique VI.3 regroupe les résultats fournis par les différents auteurs ainsi que la solution donnée par la théorie linéaire sans prise en compte des grands déplacements et grandes déformations.



Graphique VI.3 : Courbes charge / déplacement des différents auteurs.

Remarques.

– Les résultats obtenus par FEZANS G. (1981) avec l'élément CL-CN ont été calculés par un algorithme de pilotage à charge imposée ce qui explique le fait qu'ils soient limités au premier point limite en charge rencontré pour $w(C) \approx 9$ mm.

– HORRIGMOE G. (1977) utilise comme pour les résultats donnés par ASELF la technique de pilotage par déplacement imposé mais limite ses résultats au passage du premier point limite en charge jusqu'à $w(C) = 14$ mm.

Conclusions.

Il faut noter au vu du graphique et du tableau comparatif que les résultats donnés par les différents auteurs et éléments concordent de manière évidente à moins de 5 % d'erreur près sur l'ensemble des résultats.

Les résultats donnés par l'élément QS-RE implanté dans ASELF sont proches des résultats donnés par l'élément CL-CN de FEZANS (1981) avec en moyenne avec une erreur relative qui ne dépasse pas 1 % et reste de l'ordre de 0,5 % pour des charges élevées. Les valeurs de ces écarts montrent la bonne concordance entre ces 2 éléments de coque dégénérés, tous deux formulés sur les mêmes bases théoriques, les seules différences étant le nombre de noeuds par élément, les fonctions de forme choisies et la technique d'intégration dans l'épaisseur : 8 noeuds, F.F. de Serendip en intégration explicite (QS-RE) contre 12 noeuds et F.F. de Lagrange en intégration numérique (QL-CN).

On peut remarquer aussi que la faible valeur du rapport h/R par rapport à la limite que l'on s'est fixée (h/R = 1/200 faible devant 1/20) ne doit pas générer d'erreurs importantes dans l'approximation que l'on fait dans l'écriture et l'intégration explicite. Ceci est en accord avec l'étude de VLACHOUTSIS S. (1987) qui montre que dans le cadre de l'analyse linéaire l'influence de l'intégration explicite par rapport à l'intégration numérique sur cet exemple est faible (de l'ordre de 1 % pour h/R = 1/100).

Les écarts entre l'élément QS-RE implanté dans ASELF et l'élément de plaque présenté par HORRIGMOE (1978) sont eux un peu plus importants mais restent en dessous de 3 %, sauf pour le premier point puis diminuent à moins de 2 % pour des charges plus élevées. Ces 2 éléments donnent donc également des résultats proches sur cet exemple, la différence de formulation entraînant une erreur plus importante dans ce cas.

Etude comparative de différents maillages.

Dans cette étude nous nous sommes intéressés au problème du nombre d'éléments de coque type QS-RE nécessaires à la représentation correcte du phénomène de cloquage du dôme cylindrique. Pour cela nous avons considéré un maillage (nxn) sur le quart de la structure avec les valeurs n = 1, 2, 3, 4, 5 en prenant pour référence le résultat trouvé avec le maillage n = 5.

Tout d'abord il est intéressant de comparer les différents maillages en fonction de n, la taille du problème à résoudre étant fonction du nombre de degrés de liberté laissés libres pour chaque maillage après prise en compte des conditions aux limites du problème.

Ces résultats ainsi que le nombre d'éléments et de noeuds du maillage sont donnés dans le tableau VI.2.

n	Nombre d'éléments	Nombre de noeuds	Nombre de D.D.L.
1	1	8	18
2	4	16	66
3	9	40	145
4	16	65	256
5	25	96	407

Tableau VI.2 : Nombre de degrés de liberté libres en fonction de *n*.

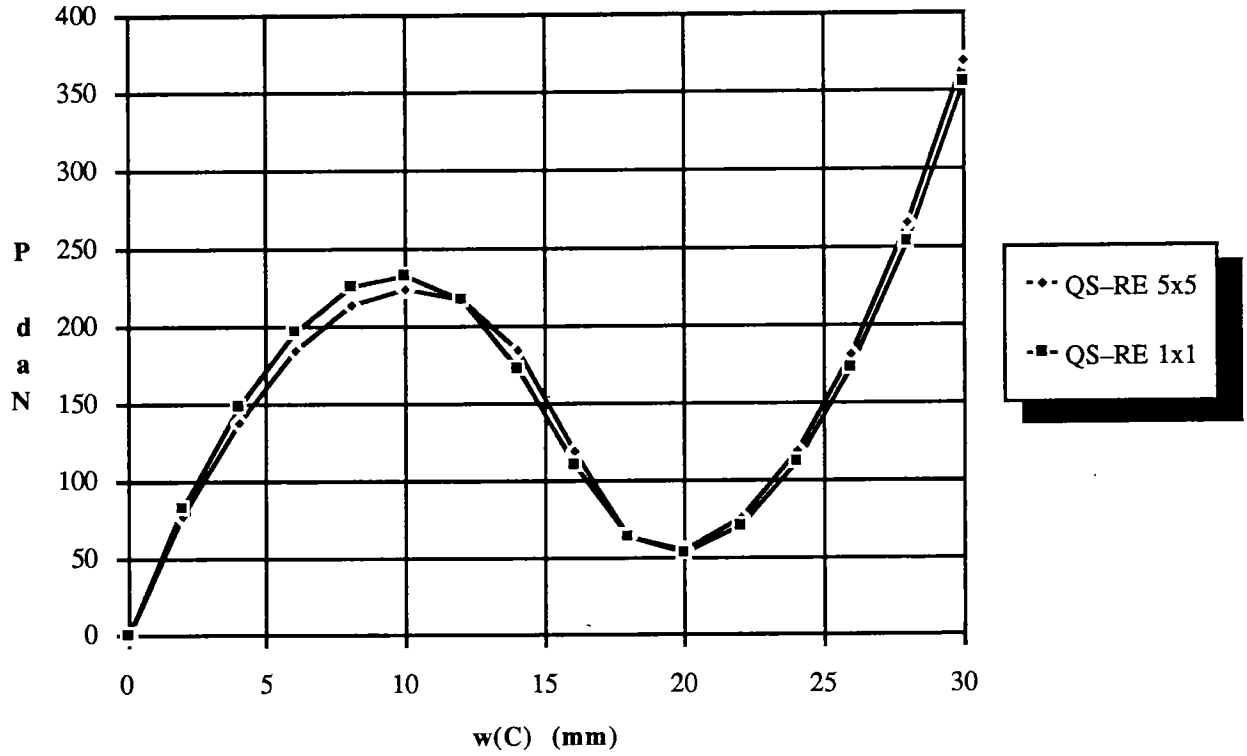
Pour permettre une comparaison aisée, les valeurs des charges P obtenues pour le maillage le plus fin testé ici ($n = 5$), en utilisant la technique du déplacement imposé avec cette fois $\Delta w(C) = 2$ mm toujours en F.L.T. sont prises comme référence. On compare donc principalement les résultats fournis par les deux maillages $n = 1$ et $n = 2$ au maillage $n = 5$, les résultats pour les autres maillages étant donnés au tableau T.6.

Les résultats sur ce test sont indiqués dans le tableau VI.3 en pourcentage d'écart.

w(C) (mm)	P écart % 2x2/5x5	P écart % 1x1/5x5
0	-	-
2	1,3	7,4
4	1,2	7,3
6	1,1	6,8
8	0,9	5,8
10	0,6	3,7
12	0,2	-0,1
14	-1,1	-6,5
16	-2,0	-8,3
18	-0,5	-0,3
20	-0,3	-2,9
22	-0,4	-5,8
24	0,2	-5,9
26	0,5	-4,9
28	0,6	-4,3
30	0,6	-3,9

Tableau VI.3 : Ecart en % entre les maillages (*nxn*) et (5x5) pour n = 1, 2.

Les résultats donnés par les maillages $n = 1$ et $n = 5$ sont représentés sur le graphique VI.4.



Graphique VI.4 : Comparaison entre 2 maillages pour la coque cylindrique (h = 12,7 mm).

On constate que dès le maillage 3x3 (cf. Tableau T.6) on obtient à moins de 0,2 % d'erreur les résultats donnés par le maillage 5x5, ce qui explique son choix pour les premières courbes tracées et montre qu'un maillage plus fin ne se justifie pas dans ce cas.

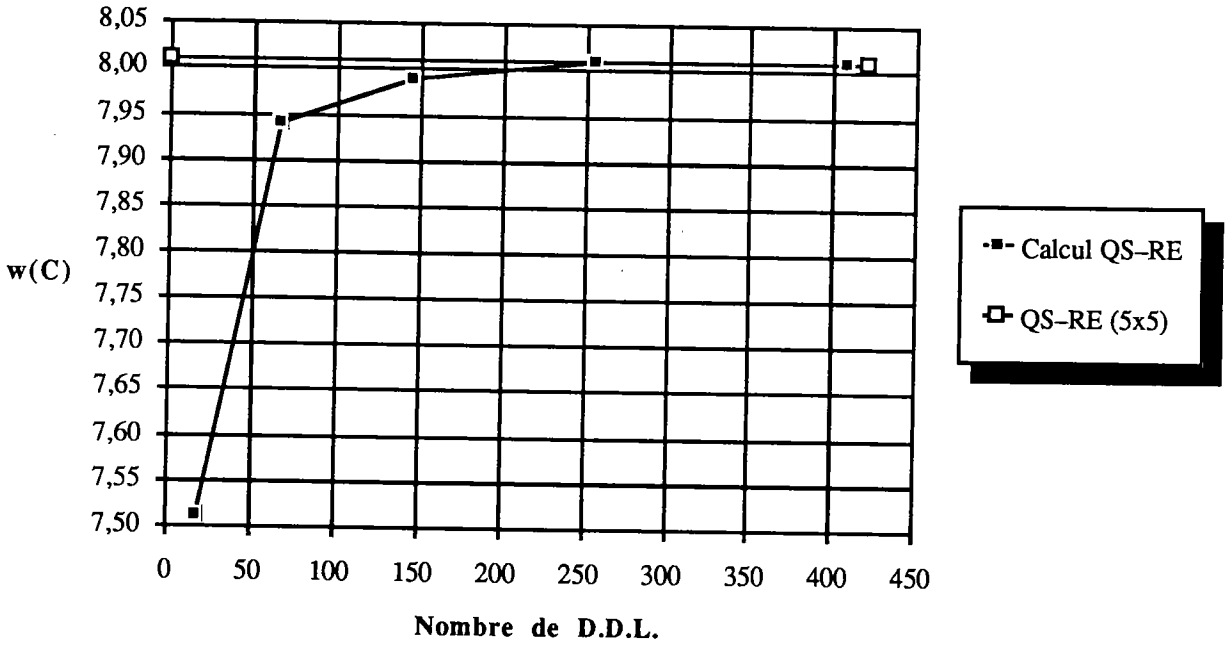
On constate aussi que les écarts entre le maillage (2x2) et le maillage (5x5) restent inférieurs à 2 % (maximum pour $w(C)$ = 16 mm, cf. Tableau VI.3) et qu'en pratique ils sont de l'ordre de 1 % ou moins ce qui est très bon.

Pour ce qui est du maillage (1x1) par rapport au (5x5), les écarts restent inférieurs à 8 % environ ce qui n'est pas encore exagéré compte-tenu du faible nombre de D.D.L. mis en jeu dans ce cas (18 D.D.L. contre 146 par exemple pour le maillage 3x3) et on observe toujours une allure de courbe conforme au phénomène ce qui est rassurant pour une analyse non linéaire.

Pour étudier ceci plus en détail, un autre test numérique a été effectué pour vérifier la convergence cette fois des déplacements sur une solution non linéaire lorsque l'on raffine le maillage. Pour ce cas test nous avons considéré les 5 maillages précédents pour lesquels nous avons cette fois-ci imposé la charge pour comparer la convergence en déplacement, ce qui a imposé un pilotage en charge toujours en F.L.T. (4 pas sont préconisés pour y parvenir). Le dernier pas qui nous intéresse conduit à une charge verticale P = 214 daN correspondant approximativement à un déplacement $w(C)$ = 8 mm, domaine où l'erreur est importante (cf. tableau VI.3) et où le pilotage en charge est encore possible. Les résultats sur les déplacements

n	Nombre de DDL	w(C)
1	17	7,51
2	66	7,94
3	145	7,99
4	256	8,01
5	407	8,01

Tableau VI.4 : Valeurs des déplacements $w(C)$ en fonction des maillages pour $P = 214$ daN.



Graphique VI.5 : Convergence du déplacement $w(C)$ en fonction du nombre de D.D.L.

Les résultats montrent comme pour la charge une convergence rapide du déplacement en fonction du nombre de D.D.L., l'erreur n'étant plus que de 0,3 % environ pour un maillage (3x3) à 145 D.D.L. ce qui est satisfaisant et prouve à nouveau que le maillage (3x3) suffit dans ce cas.

2ème cas test : h = 6,35 mm (h/R = 1/400).

Dans ce cas test la solution non linéaire diffère notablement de la précédente (h = 12,7 mm). On la trouve dans les ouvrages des auteurs précités [cf. BATOZ J.L. (1985)] et présente 2 points limites en charge ainsi que 2 points limites en déplacement. Par conséquent il a été choisi d'utiliser la technique de pilotage par longueur d'arc imposée (cf. annexe A7).

La résolution par cette technique après choix des différents paramètres intervenant dans l'algorithme nécessite 23 incréments (ou pas) pour un total de 77 itérations, la méthode de Newton - Raphson étant utilisée, le critère d'arrêt des itérations restant de la même forme.

Le nombre d'itérations par pas varie entre 2 (premiers et derniers points) et 7 (pour les points situés entre les deux points limites en déplacement), ce problème présentant une non linéarité plus importante que le précédent.

Le temps CPU total nécessaire dans la chaîne non linéaire PSD18 d'ASELF s'élève à 127 secondes sur CRAY XMP–14 SE.

Comparaison avec d'autres études.

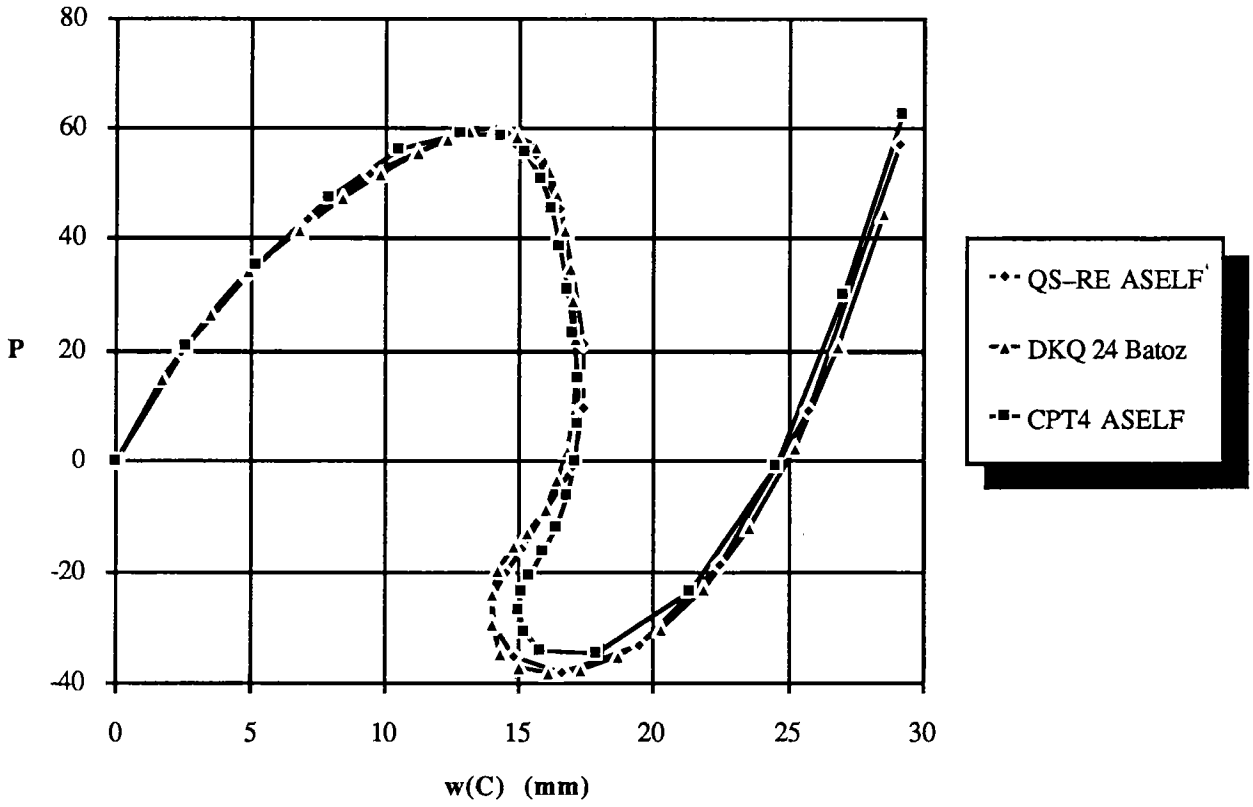
Les résultats sur ce cas test trouvés avec l'élément QS-RE implanté dans ASELF sont comparés avec les résultats obtenus avec d'autres types d'éléments.

Les éléments que nous avons retenus pour cette étude comparative de leurs performances sont les suivants et ont été extraits des publications indiquées :

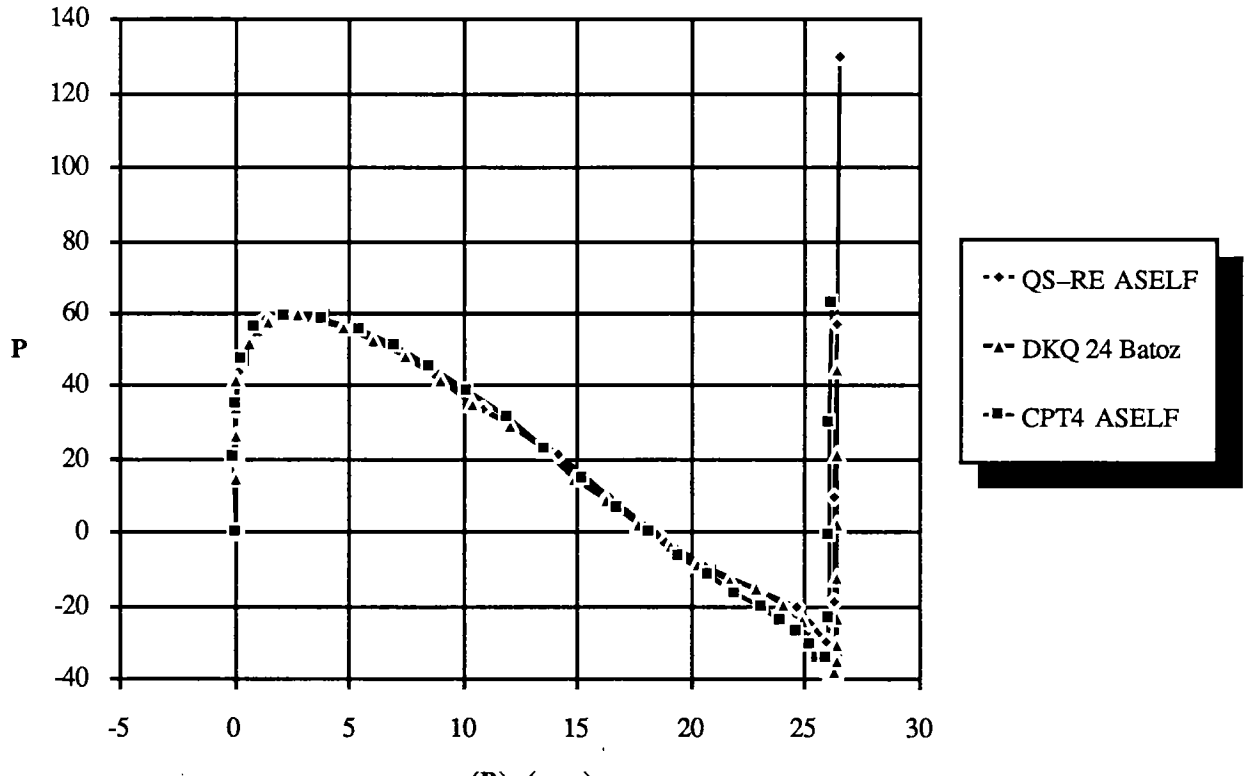
- QS-RE Elément de coque dégénéré à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme réduite, explicite (ASELF).
- DKT 24 Elément de coque à 4 noeuds [BATOZ J.L. et al. (1985)]. Maillage à 24 éléments (4x6).
- CPT4 Elément de plaque à 4 noeuds (5 D.D.L./noeud) basé sur la théorie classique des plaques (Kirchhoff) : élément ASELF type 27.

Les différents résultats sont donnés dans les tableaux T.4 et T.5 pour un pilotage en longueur d'arc dans les 3 cas ce qui explique la non correspondance des abscisses.

Les courbes charge / déplacement vertical $P = f(w(C))$ pour le point central et $P = f(w(B))$ pour le point au bord données par les différents éléments sont représentées sur les graphiques VI.6 et VI.7.



Graphique VI.6 : Courbes charge / déplacement des différents éléments au centre C (h = 6.35 mm).



Conclusions.

Les résultats obtenus avec l'élément QS-RE implantés dans ASELF sont proches de ceux obtenus par BATOZ J.L. (1985) avec l'élément quadrangle DKT 24 à environ 3 ou 4 % d'erreur près en déplacement (cf. tableaux T.4 et T.5), ce qui peut être considéré comme tout à fait correct.

Par contre, pour ce qui est de l'élément de plaque CPT4 d'ASELF, les résultats sont relativement éloignés des précédents, allant jusqu'à 10 % en déplacement et 20% environ en charge, ce qui peut s'expliquer par la formulation même de l'élément (Hypothèse cinématique de Love-Kirchhoff) qui n'assure pas la prise en compte des phénomènes de cisaillement transverse. On voit donc l'importance de ces phénomènes sur cet exemple et l'importance de leur prise en compte.

VI.1.3 Coque sphérique sous charge concentrée

Il s'agit de l'étude dans le domaine non linéaire d'une calotte sphérique limitée par 4 plans verticaux, articulée le long de ses 4 bords et soumise à une charge concentrée P en son centre C.

L'intérêt de cet exemple par rapport au précédent réside dans le fait que cette fois-ci la valeur de $h/R \approx 1/25$ est proche de la limite que l'on s'est fixée pour la validité de l'intégration explicite (cf. chapitre III) et ces résultats seront donc à cet égard d'un grand intérêt.

Géométrie

La structure considérée est la suivante :

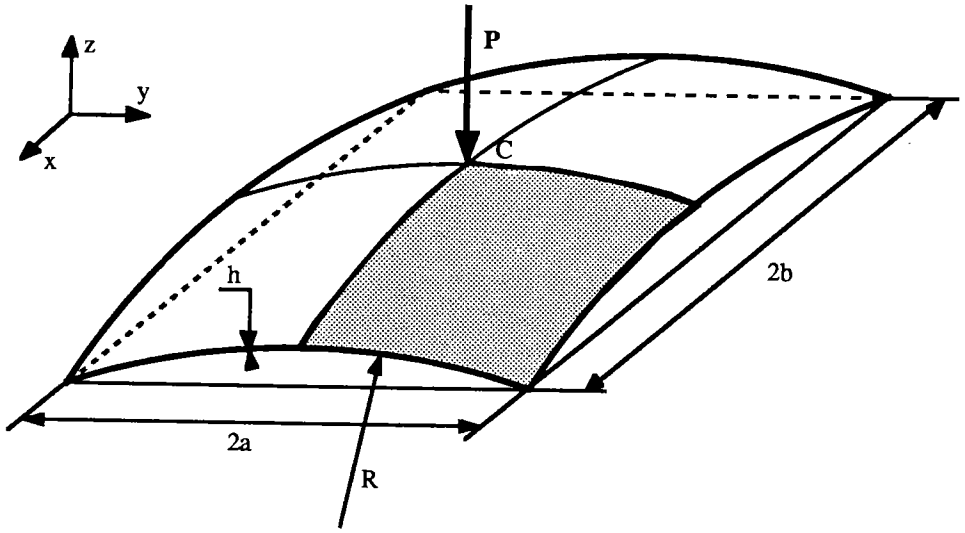


Figure VI.4 : Structure coque sphérique sous charge concentrée.

Les caractéristiques géométriques sont :

a = 100 mm

b = 100 mm

h = 99,45 mm

R = 2540 mm

Caractéristiques mécaniques

Matériau isotrope de caractéristiques :

Conditions aux limites cinématiques.

Le modèle complet de la coque sphérique est maintenu par des "charnières" le long de ses 4 bords autorisant seulement la rotation autour du vecteur tangent aux bords. Sur le modèle du quart de la structure (cf. figure VI.5) par raison de symétrie on a les conditions aux limites suivantes sur les 4 cotés :

AB $\quad u=0 \quad v=0 \quad w=0 \quad \beta=0.$

BC $\quad v=0 \quad \beta=0.$

CD $\quad u=0 \quad \alpha=0.$

DA $\quad u=0 \quad v=0 \quad w=0 \quad \alpha=0.$

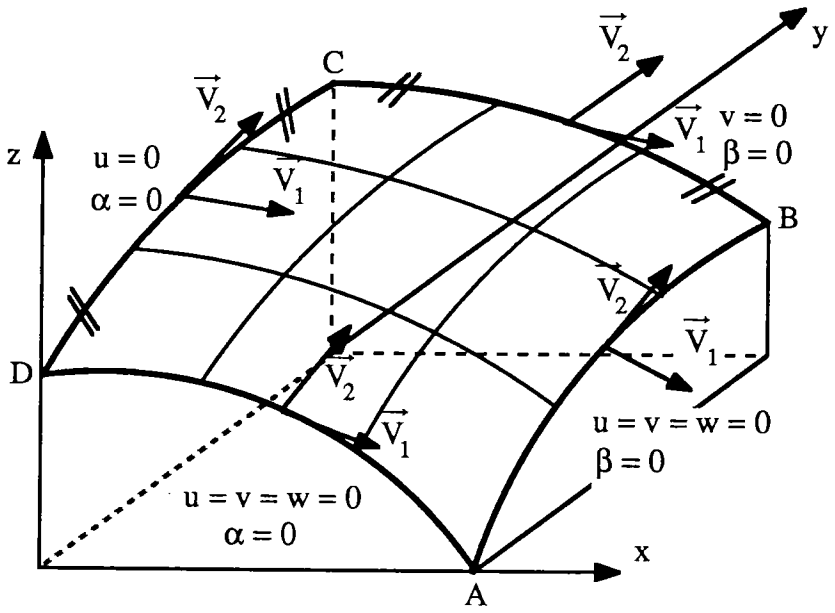


Figure VI.5 : Modèle 1/4 de coque sphérique.

Chargement.

On applique sur le modèle complet de la coque sphérique un effort P au point central C (cf. figure VI.4) soit encore un effort $P/4$ sur la partie schématisée figure VI.5.

Caractéristiques du modèle éléments finis.

Comme mentionné précédemment, on ne maille que un quart de la structure en tenant compte des conditions de symétrie. Le maillage est uniforme et comporte (3x3) éléments de coque dégénérés à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme réduite explicite (QS-RE).

Les caractéristiques de ce maillage peuvent se résumer par :

– Nombre d'éléments : 9

Résultats.

On trace les courbes charge / déplacement vertical pour le point C : $P = f(w(C))$ pour les résultats donnés par ASELF avec l'élément de coque QS-RE.

La solution non linéaire est bien connue et présente 2 points limites en charge, par conséquent il a été choisi d'utiliser la technique de pilotage en déplacement imposé, où on impose le déplacement vertical (suivant z) au noeud central (point C): $w(C)$. On aurait également pu résoudre le problème par la technique de pilotage en longueur d'arc.

On effectue 30 incréments de déplacement égaux tels que $\Delta w(C) = 10$ mm pour un total de 76 itérations (2 à 3 itérations par incrément suivant la difficulté de convergence), la méthode de Newton-Raphson modifiée étant utilisée. Le critère d'arrêt des itérations restant le même que celui présenté dans l'étude théorique (cf. annexe A7) avec la valeur $\varepsilon = 10^{-3}$.

Le temps CPU total nécessaire pour résoudre ce problème s'élève à 127 secondes sur CRAY XMP–14 SE, le temps de calcul des 9 matrices tangentes élémentaires restant égal à 150 ms environ à chaque incrément. Les résultats apparaissent dans le tableau T.7.

Comparaison avec d'autres études.

Les résultats sur ce cas test trouvés avec l'élément QS-RE implanté dans ASELF sont comparés avec les résultats obtenus avec d'autres types d'éléments plaque ou coque utilisés par différents auteurs.

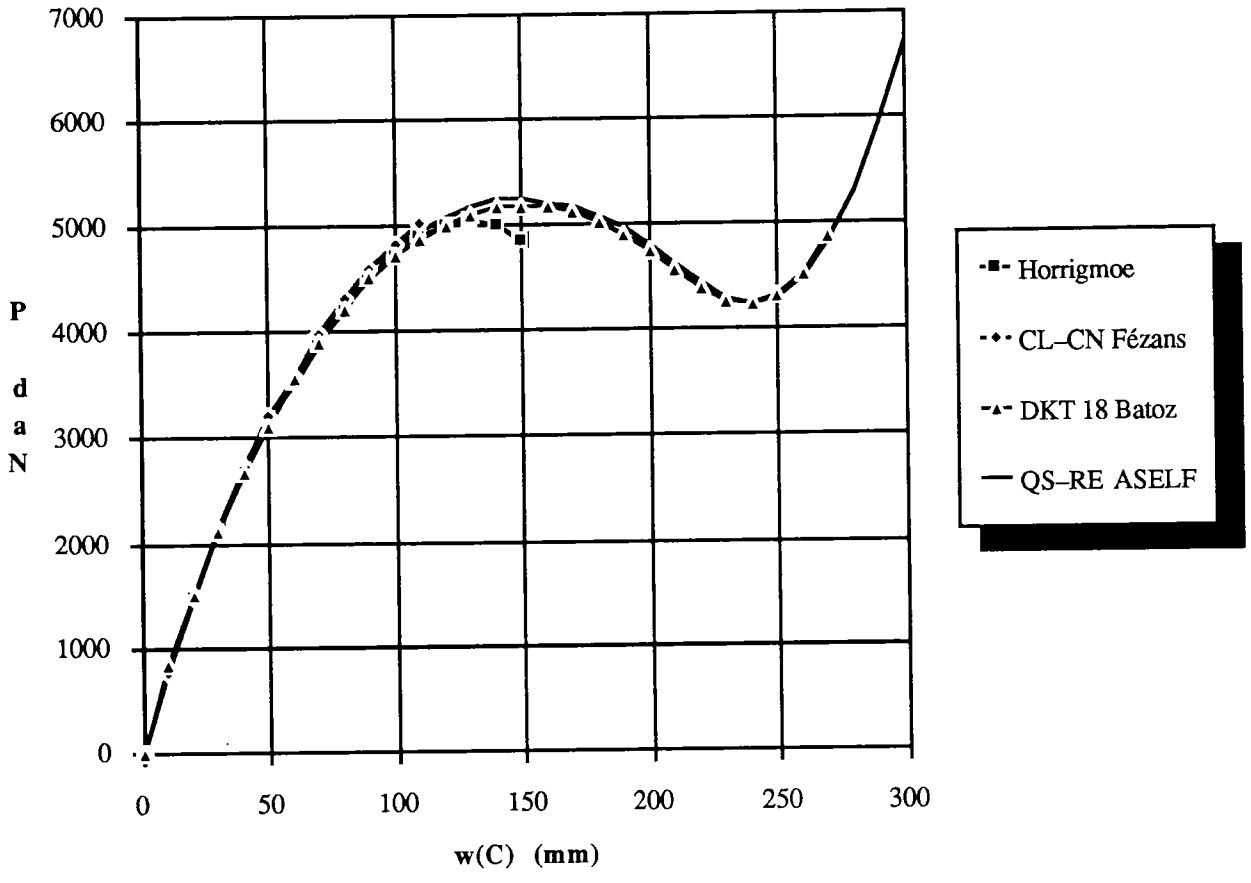
Les éléments que nous avons retenus pour cette étude comparative de leurs performances sont les suivants et ont été extraits des publications indiquées :

- CL-CN Elément de coque dégénéré à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme numérique réduite [FEZANS G. (1981)].
- DKT 18 Elément de coque triangulaire à 3 noeuds [BATOZ J.L. et al. (1985)]. Maillage a 50 éléments (5x5x2) et 216 D.D.L.
- QS-RE Elément de coque dégénéré à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme explicite réduite (ASELF).
- Elément de plaque à 8 noeuds. [HORRIGMOE G. (1977)]

Les différents résultats sont donnés dans le tableau VI.5 (ou le tableau T.7 pour les charges supérieures) ainsi que les écarts observés entre les résultats donnés par l'élément QS-RE et ceux des autres auteurs avec les éléments correspondants. Ces résultats sont ensuite reportés dans le graphique VI.8.

w(C) (mm)	Ecarts % QS–RE / Horrigmoe	QS–RE / DKT 18	QS–RE / CL–CN
0	-	-	-
10	1,6	-8,1	1,6
20	1,2	-0,8	1,2
30	0,8	0,8	-0,2
40	-0,2	0,9	-1,0
50	0,2	2,4	-1,1
60	0,2	-0,9	-0,9
70	0,6	0,1	-1,4
80	0,0	0,3	-2,1
90	0,2	-0,3	-2,0
100	1,5	1,3	-1,1
110	1,4	2,0	-1,4
120	1,1	1,3	-
130	2,4	1,2	-
140	5,0	1,3	-
150	8,5	1,4	-

Tableau VI.5 : Comparaison des résultats des différents auteurs.



Graphique VI.8 : Courbes charge / déplacement des différents auteurs.

Remarques.

– Les résultats obtenus par FEZANS G. (1981) avec l'élément CL-CN ont été calculés par un algorithme de pilotage à charge imposée ce qui explique le fait qu'ils soit limités au premier point limite en charge rencontré pour $w(C) \approx 110$ mm.

– HORRIGMOE G. (1977) utilise comme pour les résultats donnés par ASELF la technique de pilotage par déplacement imposé mais limite ses résultats au passage du premier point limite en charge jusqu'à $w(C) = 150$ mm.

Conclusions.

L'élément QS-RE implanté dans ASELF a une formulation à la base identique à celle de l'élément CL-CN présenté par FEZANS G. et les résultats sont proches comme nous l'avons vu sur le cas test VI.1.2. Les différences provenant notamment de la technique d'intégration dans l'épaisseur (explicite ou numérique) nous prendrons sur ce cas test l'élément CL-CN comme référence.

Les résultats donnés par l'élément QS-RE sont cette fois moins proches de ceux donnés par l'élément CL-CN présenté par FEZANS G., les écarts en charge dépassant la valeur de 2 % (cf. tableau VI.5).

Cet accroissement de l'erreur peut s'expliquer par le fait que l'on considère comme nous l'avons mentionné une valeur élevée du rapport h/R ($\approx 1/25$) qui nous place très près de la limite considérée dans nos hypothèses d'intégration explicite ($h/R = 1/20$, cf. chapitre III).

Néanmoins l'erreur reste modérée puisqu'en moyenne elle se situe à 1 % environ et on a donc la preuve sur cet exemple que la limite de 1/20 peut être atteinte en conservant une bonne précision sur les résultats (une erreur maximale de 5 % est acceptable comme nous l'avons mentionné). Ce résultat est important car il nous permet de valider notre hypothèse de base dans cette étude en regard de l'intégration explicite, résultat d'autant plus fondamental qu'il est obtenu sur une structure à double courbure (portion de sphère).

Les résultats donnés par l'élément QS-RE implanté dans ASELF sont en termes de charge à 3 % environ de ceux donnés par l'élément DKT 18 présenté par BATOZ J.L., ce qui reste correct.

Par contre pour l'élément de plaque présenté par HORRIGMOE G. les écarts par rapport à l'élément QS-RE sont du même ordre (environ 3 %) jusqu'à un déplacement $w(C) = 140$ mm où l'écart semble brutalement se creuser par rapport aux 3 autres éléments et présage d'un écart pouvant ensuite dépasser 10 %.

VI.1.4 Dôme sphérique encastré avec charge centrale

Une portion de sphère encastrée est soumise à une charge verticale concentrée en son point sommet. Ce cas test est un de ceux retenus dans la série de tests normalisés NAFEMS Benchmarks [LYONS P., HOLSGROVE S. (1989) pp. 237-248] pour valider les éléments finis de coques dans le cas de structures axisymétriques avec chargement ponctuel.

Les données géométriques sont choisies de telle manière que les courbes charge/déplacement vertical au point central *A* présentent un point critique en charge suivi d'une chute de la rigidité puis d'une rerigidification.

La forme de la solution théorique sur ce cas test a été donnée par MESCALL J.F. (1965) qui a déterminé des solutions aux équations différentielles fournies par la théorie de Mindlin-Reissner par approximation numérique en utilisant une méthode de type Newton suivi d'une élimination de Gauss sur le système obtenu, ceci en partant d'une solution approchée. MESCALL a aussi donné dans cette étude une extension de la forme de la solution théorique au délà de la zone du premier point limite où les non-linéarités géométriques deviennent importantes.

Ces résultats sont donnés sous la forme d'un graphique (cf. graphique VI.9).

Géométrie

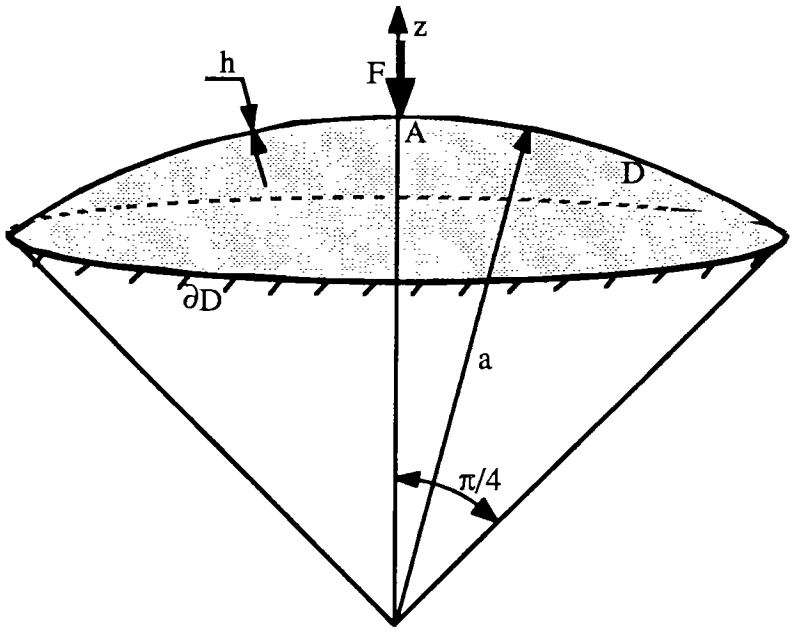


Figure VI.6 : Modèle de coque sphérique encastrée sous charge concentrée.

Le paramètre géométrique adimensionnel suivant est en général retenu pour caractériser de telles structures sphériques :

La valeur $\lambda = 100$ est retenue dans NAFEMS Benchmark ce qui après choix des valeurs de a et ν nous donne h.

Les caractéristiques géométriques sont alors :

$a = 10$ m

$h = 0{,}2038$ m

Caractéristiques mécaniques

Le matériau est isotrope et la valeur de $\nu = 0{,}3$ a été imposée au niveau de la géométrie par la relation entre (a,h,ν,λ). La valeur de E est elle imposée par la donnée dans NAFEMS Benchmark de la valeur de la constante de normalisation appliquée à $P.a$ (on définit $P\ a/\ E\ h^3$) qui est :

$$E\ h^3 = 1{,}77865.10^5 \text{ N}$$

Ceci nous conduit aux caractéristiques élastiques suivantes qui sont celles d'un acier :

$E = 2{,}10.10^{11}$ N/m^2

$\nu = 0{,}3$

Conditions aux limites cinématiques

Le modèle du dôme sphérique est encastré sur sa base c'est-à-dire tout au long de ∂D. On a donc les conditions aux limites suivantes sur ∂D :

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 0.$$

Chargement

On applique sur le dôme sphérique un effort $\overrightarrow{F_z}$ au point sommet A (cf. figure VI.6) :

$$\overrightarrow{F_z} = -F\ \overrightarrow{z} \qquad \text{en } A\ (0,0,a)$$

Caractéristiques du modèle éléments finis

On ne maille que un quart de la structure en tenant compte des conditions de symétrie. Le maillage est uniforme suivant les 2 directions sur la sphère et comporte (n x n) éléments quelque soit le type d'éléments retenus.

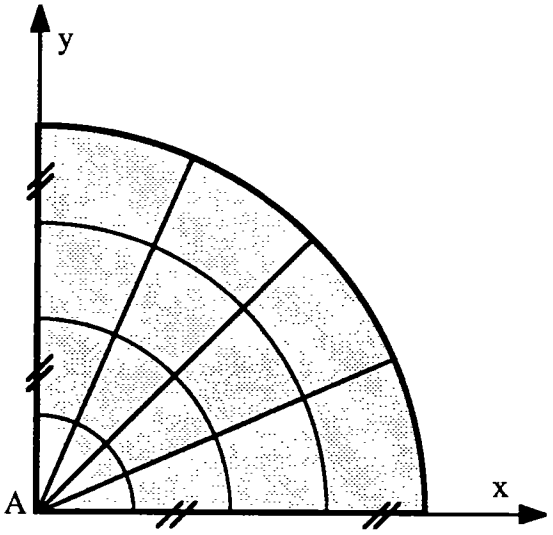


Figure VI.7 : Maillage du quart de dôme dans le cas $n = 4$.

Les valeurs de n retenues seront variables ($n = 4, 8$).

Résultats

On trace les courbes charge / déplacement pour le point A : $F = f(w(A))$ pour les résultats donnés par ASELF avec les caractéristiques suivantes :

- Elément de coque dégénéré à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme réduite explicite (QS-RE).
- Maillage uniforme utilisant (4x4) éléments QS-RE sur le quart du dôme.
- Pilotage des courbes par algorithme à déplacement imposé : 12 pas égaux à 2,5 h.

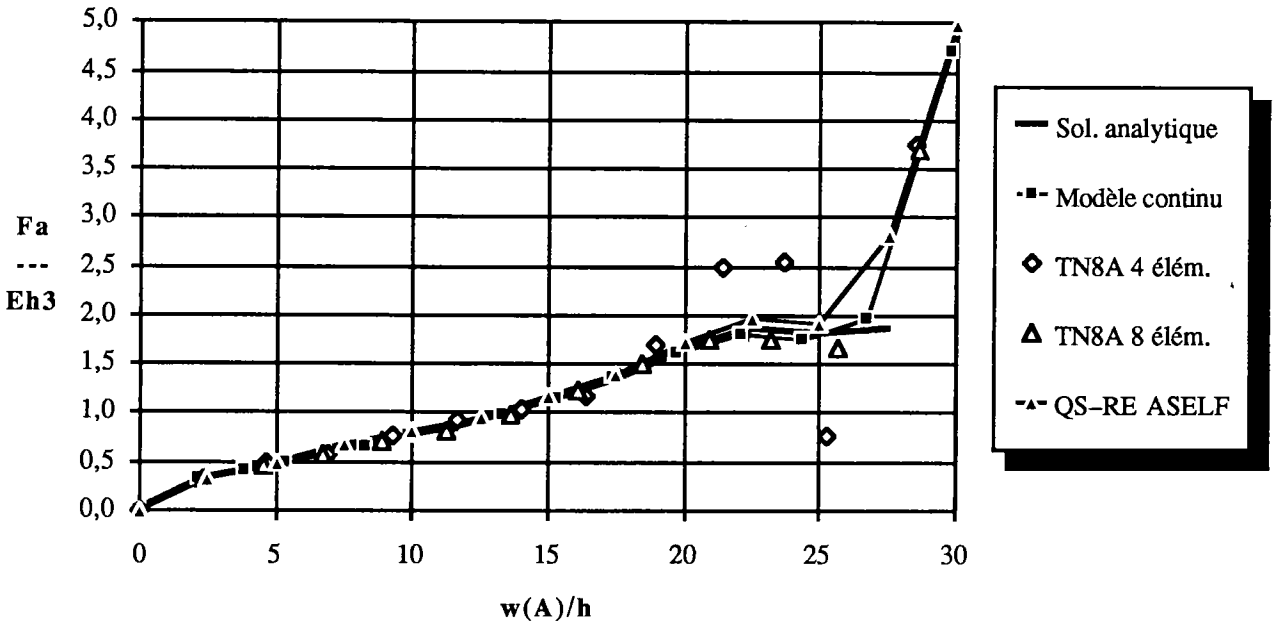
On compare ces résultats comme indiqué au départ aux suivants :

1– La solution théorique du problème [cf. MESCALL J.F. (1965) pp. 936-938].

2– La solution donnée par le modèle continu, 40 éléments de plaque QCTA en F.L.T. [LYONS P., HOLSGROVE S. (1989) pp. 238].

3– La solution donnée par les éléments de coque axisymétriques TN8A avec 4 ou 8 éléments en F.L.T. [LYONS P., HOLSGROVE S. (1989) pp. 239].

Les résultats sont donnés sur le graphique VI.9 pour ces différentes solutions et comparés à ceux obtenus avec l'élément QS-RE implanté dans ASELF. Pour les valeurs numériques correspondantes, on se reportera aux tableaux T.8 à T.12.



Graphique VI.9 : courbes charge / déplacement QS-RE.

Conclusions

Sur ce cas test on note des résultats assez proches en dehors du maillage à 4 éléments TN8A où les écarts sont importants.

L'élément QS-RE implanté dans ASELF (cf. tableau T.12) donne une erreur qui se situe à moins de +5 % en termes de charge au début de la courbe par rapport à la solution théorique approchée (cf. tableau T.8) pour atteindre environ +7 % pour des déplacements plus élevés.

Les écarts entre la solution donnée par l'élément QS-RE et la solution modèle continu donnée par l'élément QCTA (cf. tableau T.9) sont proches des écarts précédents avec une erreur moyenne voisine de +5 % en charge.

Les éléments de coques axisymétriques TN8A présentés par LYONS et HOLSGROVE (cf. tableaux T.10 et T.11) donnent de mauvais résultats pour un maillage à 4 éléments (de +45 % à –55 % en charge) et pour le maillage à 8 éléments l'erreur se situe entre –3 % et –7 % en charge toujours par rapport à la solution théorique approchée (cf. tableau T.8) ce qui va donc en sens inverse des résultats donnés par l'élément QS-RE et porte ainsi l'écart entre ces 2 éléments à des valeurs de +8 % à +14 %.

VI.1.5 Poutre encastrée en flexion pure

Une poutre (modélisable par une plaque) encastrée à son extrémité gauche est soumise à un moment pur en son extrémité droite. Ce cas test a été présenté par ARGYRIS J.H. et al. (1977) pour valider les éléments finis de poutre ou coques dans le cas de structures soumise à des moments concentrés et pour lesquelles les rotations et les déplacements sont importants. BATHE K.J., HO L.W. (1981), FEZANS G. (1981) ainsi que d'autres auteurs considèrent aussi cet exemple numérique pour valider leurs éléments finis de plaques ou coques dans le domaine non linéaire géométrique où rotations et déplacements sont importants.

Ce cas test est d'une grande importance pour valider l'hypothèse de rotations modérées H4 mise en place au chapitre I (I.42.a-b) et qui envisage la limitation des rotations nodales α_i et β_i à environ 20°.

La forme de la solution théorique sur ce cas test est simple à obtenir car la plaque considérée comme une poutre est sollicitée en flexion pure ce qui implique que la déformée soit circulaire de rayon $R = EI/M$. Les résultats théoriques ont été donnés par MATTIASSON K. (1981) (cf. tableau T.13).

Géométrie

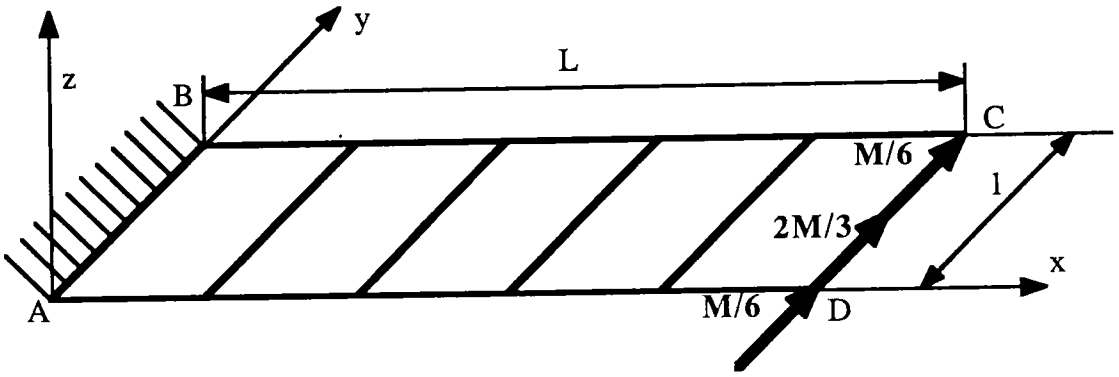


Figure VI.8 : Modèle de poutre encastrée sollicitée en flexion pure.

Les caractéristiques géométriques sont :

L = 1 m

l = 0,1 m

h = 10 mm

Caractéristiques mécaniques

Le matériau est isotrope de caractéristiques élastiques suivantes :

$E = 2{,}10.10^{11}$ N/m^2

$\nu = 0$ (ν est choisi nul arbitrairement)

Conditions aux limites cinématiques

La poutre est encastrée sur sa section extrême gauche (cf. figure VI.8) :

Sur AB : $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Chargement

On applique sur la poutre un moment de flexion $\overrightarrow{M_z}$ à l'extrémité droite sur CD (cf. figure VI.8) :

$$\overrightarrow{M_z} = M\,\overrightarrow{z}$$

Notons que ces efforts sont répartis sur les 3 noeuds présents à l'extrémité droite de la plaque en accord avec le critère d'équivalence énergétique et le degré des fonctions de forme, quadratiques pour l'élément QS-RE (cf. figure VI.8).

Les déformées étant circulaires, on aura les déformées successives suivantes :

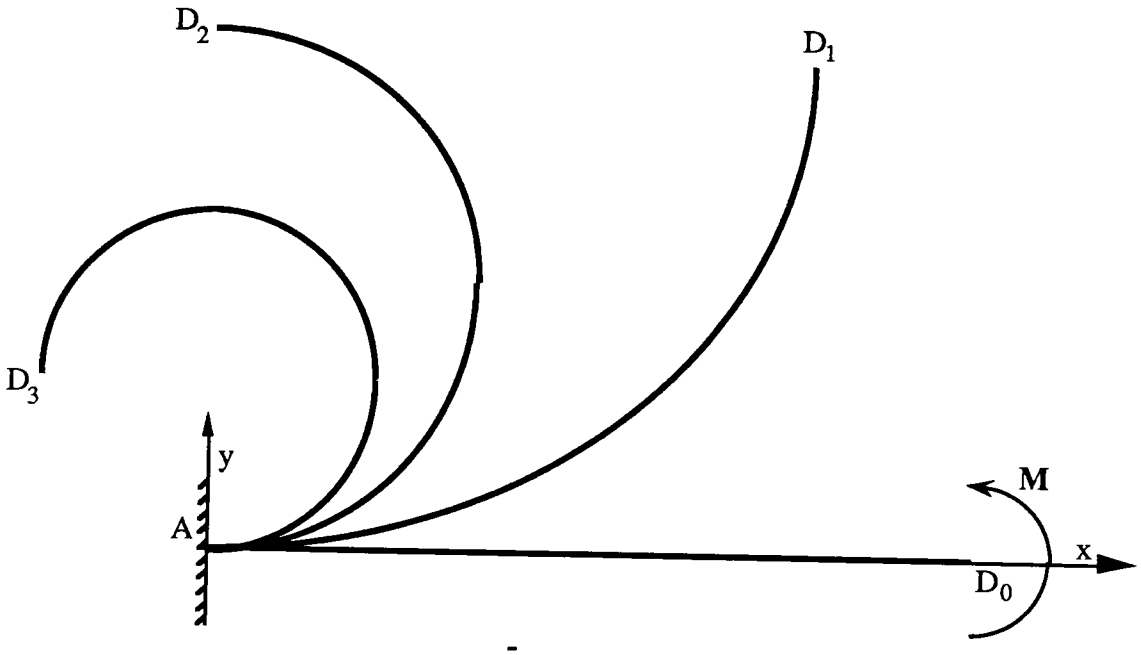


Figure VI.9 : Déformées successives de la poutre en flexion pure.

Caractéristiques du modèle éléments finis

Résultats, comparaison avec d'autres études

On commence par définir la quantité adimensionnelle suivante η, afin de normaliser le moment de flexion M à l'unité ($\eta = 1$) lorsque la déformée de la poutre forme un cercle complet ($\theta y(D) = \phi = 2\pi$) :

$$\eta = \frac{M.L}{2\pi\, EI}$$

On trace les courbes charge/déplacement ou charge/rotation au point C ou D :

$$u(D) = f(\eta) \qquad v(D) = g(\eta) \qquad \theta y(D) = \phi = h(\eta)$$

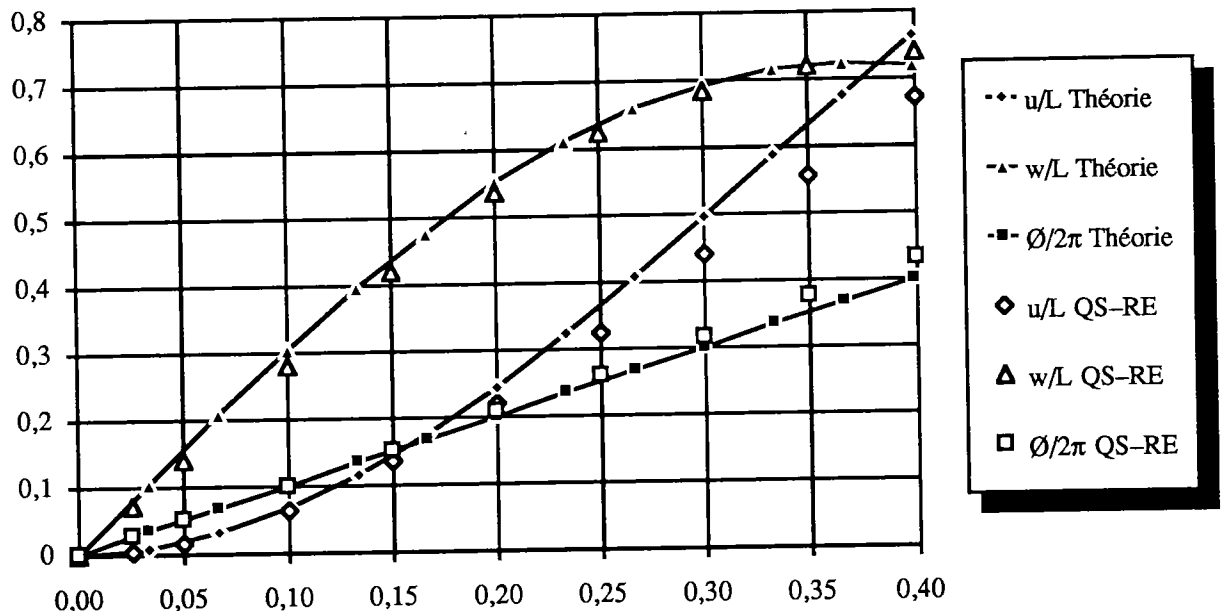
Avec l'élément de coque dégénéré à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme réduite explicite (QS-RE), nous utilisons un maillage à 5 éléments, 9 pas de charge en F.L.T. pour $0 < \eta < 0{,}4$.

On compare ces résultats comme indiqué au départ à ceux donnés par :

1– La solution théorique du problème [MATTIASSON K. (1981)].

2– La solution donnée par un élément de coque dégénéré CL-CN [FEZANS G. (1981) pp. 176-181] en F.L.A. où la même hypothèse (H4) est utilisée mais sur les rotations nodales incrémentales.

Les résultats correspondant à la solution théorique du problème et à la solution ASELF/QS-RE en F.L.T. sont donnés dans les tableau T.13 et T.14, les résultats étant groupés sur le graphique VI.10. Le temps de calcul sur CRAY XMP–14 SE s'élève à 46 secondes pour l'élément QS-RE avec 9 pas et 22 incréments, la méthode N.R. étant utilisée.



Conclusions

Les résultats trouvés avec l'élément QS-RE en F.L.T. implanté dans ASELF comparés à la solution théorique du problème sont édifiants car en effet la valeur de $\eta = 0,4$ correspond à une rotation normalisée $\phi/2\pi = 0,4$ donc $\phi = 0,8\ \pi = 144°$ en bout de la poutre, valeur très au delà de notre seuil de "sécurité" fixé à 20° et on constate que les divergences restent encore modérées. En effet si on regarde en bout de poutre les erreurs sont de −12,4 % pour le déplacement u, de +2,7 % pour le déplacement v et de +7,5 % pour la rotation ϕ ce qui n'est pas aussi élevé que ce que l'on aurait pu attendre pour cette valeur de rotation. L'erreur la plus importante porte sur la valeur de u lorsque le chargement augmente.

Si on limite le domaine d'étude à $\eta = 0,1$ ce qui correspond encore à une rotation normalisée $\phi/2\pi = 0,1$ donc à $\phi = 36°$ on a alors les erreurs suivantes : −3,0 % pour le déplacement u, −3,8 % pour le déplacement v et +0,1 % pour la rotation ϕ ce qui peut être considéré comme tout à fait acceptable. On constate donc que notre hypothèse H4 des rotations modérées (rotations nodales inférieures à 20°) est tout à fait vérifiée sur cet exemple même bien au delà de la valeur-seuil choisie.

On serait donc tenté suite à cet exemple d'étendre cette limite à une valeur supérieure à 20°, mais il vaut mieux rester prudent à ce niveau car en effet, sur cet exemple, la loi $\phi = h(\eta)$ est de manière théorique rigoureusement linéaire, ce qui n'est pas étranger aux bons résultats trouvés.

VI.1.6 Poutre en compression avec charge perturbatrice

Cet exemple est aussi appelé colonne d'Euler. Une poutre encastrée à son extrémité gauche est soumise à un effort de compression P de direction constante à son extrémité droite ainsi qu'à un effort perturbateur Q, perpendiculaire à l'axe de la poutre, qui permet l'initiation du phénomène. L'effort perturbateur reste faible devant P : $Q = P/1000$.

Ce cas test est un de ceux retenus dans la série de tests normalisés NAFEMS Benchmarks [LYONS P., HOLSGROVE S. (1989)]. BATOZ J.L. et JAMEUX J.P. (1986) ainsi que d'autres auteurs considèrent également cet exemple numérique pour valider des éléments finis de poutres ou de plaques / coques dans le domaine non linéaire géométrique.

Les résultats théoriques ont été donnés par la résolution des équations de la théorie des poutres. Elles sont dans ce cas non-linéaires et résolues par approximations successives [LYONS P., HOLSGROVE S. (1989)].

Géométrie

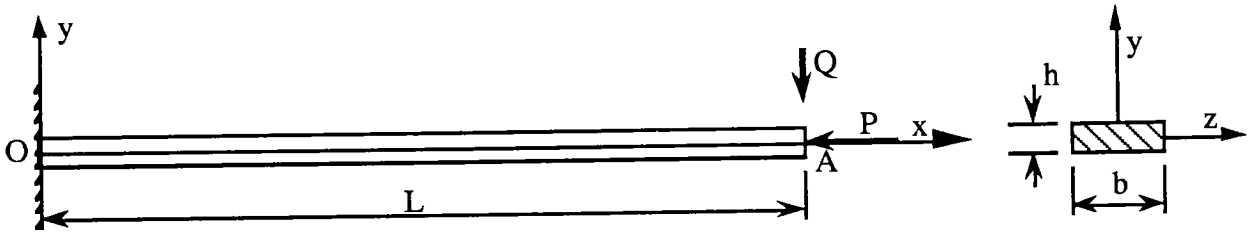


Figure VI.10 : Modèle de la poutre encastrée sollicitée en compression avec charge perturbatrice.

Les caractéristiques géométriques sont dans un système d'unités cohérent :

$$L = 10$$

$$h = 0{,}1$$

$$b = 1$$

Caractéristiques mécaniques

Le matériau est isotrope avec les caractéristiques élastiques suivantes :

$$E = 1{,}2.10^6$$

$$\nu = 0$$

Conditions aux limites cinématiques

La poutre est encastrée sur sa section extrême gauche (cf. figure VI.10) :

$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 0.$$

Chargement

On exerce sur l'extrémité droite de la poutre (cf. figure VI.10) les efforts de direction fixe :

$$\overrightarrow{P} = -P\,\overrightarrow{x}$$
$$\overrightarrow{Q} = -Q\,\overrightarrow{y} \quad \text{avec la condition } Q = P/1000$$

Il faut noter que ces efforts sont répartis sur les 3 noeuds présents à l'extrémité droite de la poutre en accord avec le critère d'équivalence énergétique et les fonctions de forme quadratiques dans ce cas.

Caractéristiques du modèle éléments finis

La poutre est modélisée par un maillage régulier comprenant 10 éléments QS-RE (10 / longueur et 1 / largeur).

Résultats, comparaison avec d'autres études

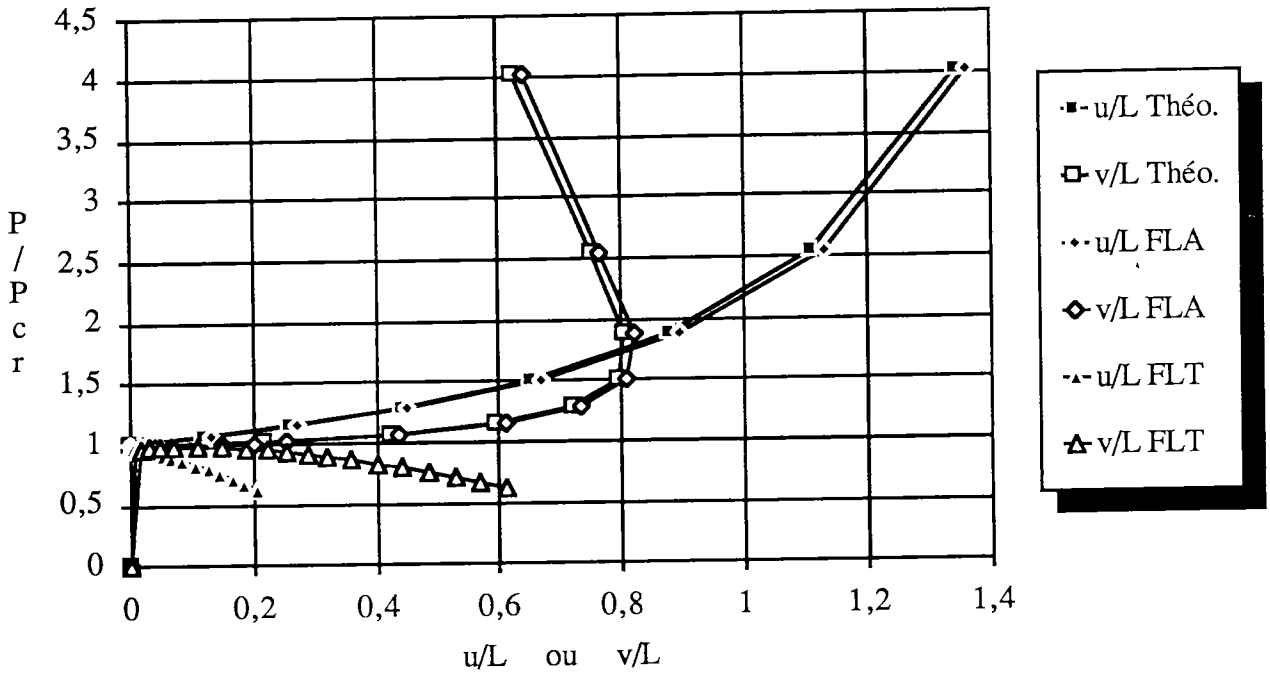
On trace les courbes donnant la charge P divisée par la charge critique de flambage P_{cr} en fonction des déplacement u/L et v/L au point A . La charge critique retenue est celle du premier mode de flambement de la poutre :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{4 L^2}$$

Nous utilisons les deux formulations lagrangiennes : totale et actualisée, afin de permettre une comparaison et d'observer le gain procuré par la F.L.A. en terme de précision.

On compare ces résultats à ceux correspondants à la solution théorique du problème [LYONS P., HOLSGROVE S. (1989)].

Les résultats pour ces 3 solutions sont donnés sur le graphique VI.11, et les valeurs correspondantes sont mentionnées dans les tableaux T.15, T.16 et T.17. Le temps de calcul sur CRAY XMP–14 SE s'élève à 46 secondes en F.L.T. pour l'élément QS-RE avec 10 pas et 32 itérations, la méthode N.R. étant utilisée. Pour la F.L.A. nous obtenons 78 secondes et 43 itérations toujours pour 10 pas avec la méthode N.R. ce qui rend la F.L.A. environ 70 % plus coûteuse sur cet exemple. Cette augmentation du temps de calcul n'est pas seulement fonction du nombre d'itérations/factorisations mais aussi des opérations supplémentaires nécessitées par



Graphique VI.11 : Courbe charge / déplacement.

Conclusions

On constate premièrement une bonne cohérence entre les résultats donnés par l'élément QS-RE et les résultats théoriques : l'erreur en déplacement reste en dessous du seuil de 5 % pour des points qui ne sont pas situés dans la zone où se produit le flambement. En effet pour des valeurs de $P \approx P_{cr}$ nous avons une apparition progressive des déplacements qui fait que la courbe n'a pas dans cette zone l'apparence exacte d'un seuil et ce qui entraîne des écarts relatifs non négligeables sur les déplacements. Ceci est lié à la valeur de la charge perturbatrice $Q = P/1000$ et n'est plus sensible ensuite lorsque l'on s'écarte de cette zone.

Nous constatons par contre non seulement des écarts notables entre les résultats donnés par la F.L.T. et la solution théorique, mais plus encore une incohérence qui conduit à ne pas pouvoir dépasser une charge $P \approx P_{cr}$ et ensuite à observer une décroissance de la charge lorsque les déplacements augmentent. Cette incohérence a également été signalée par BATOZ et JAMEUX (1986) sur le même exemple, dans le cas des poutres pour lesquelles on adopte un modèle cinématique simplifié.

Cet exemple montre donc l'intérêt de la F.L.A., absolument indispensable dans certains cas pour trouver une solution correcte qui ne peut être obtenue par la F.L.T. Néanmoins certaines difficultés de convergence ont été observées en F.L.A. pour les chargements importants avec apparition de pivots faibles, qui peuvent s'avérer pénalisant en termes de précision des résultats.

VI.1.7 Plaque encastrée en porte-à-faux

Cet exemple présente un grand intérêt car il inclut simultanément de grands déplacements et de grandes rotations, et de plus il met en évidence les phénomènes de blocage en membrane. Il a été présenté dans l'étude de FAFARD M., BATOZ J.L. et DHATT G. (1990) où les résultats sont donnés en utilisant différents types d'éléments de plaque et coque (DCT, DLTP) avec des interpolations de différents degrés dans le cadre de la formulation lagrangienne actualisée.

Sur cet exemple, l'influence du nombre de pas de chargement pour aboutir à un même chargement final est étudiée, ceci ayant un influence non négligeable en F.L.A.

Les résultats sont comparés avec la solution théorique données par TIMOSHENKO S.P. et GERE J.M. (1972)

Géométrie

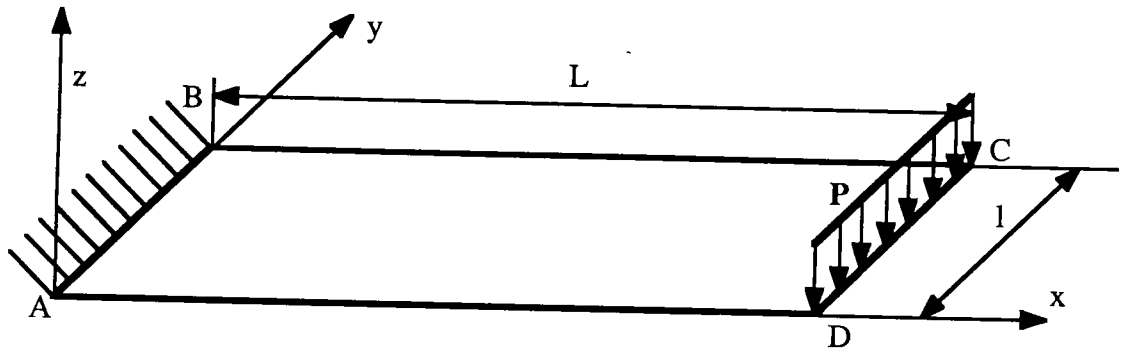


Figure VI.11 : Modèle de plaque en flexion simple.

Les caractéristiques géométriques sont dans un système d'unités cohérent :

$$L = 10$$

$$l = 1$$

$$h = 0{,}1$$

Caractéristiques mécaniques

Le matériau est isotrope de caractéristiques élastiques suivantes dans le même système d'unités :

$$E = 1{,}2.10^6$$

$$\nu = 0{,}3$$

Conditions aux limites cinématiques

La plaque est encastrée sur sa section extrême gauche (cf. figure VI.12) :

$$\text{Sur } AB : u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 0.$$

Chargement

On applique sur la plaque un effort $\overrightarrow{P}$ à l'extrémité droite sur CD (cf. figure VI.12) :

$$\overrightarrow{P} = \quad -P\,\overrightarrow{z}$$

Notons que ces efforts sont répartis sur les 3 noeuds présents à l'extrémité droite de la plaque en accord avec le critère d'équivalence énergétique et le degré des fonctions de forme, quadratiques pour l'élément QS-RE.

La déformée et la définition des déplacements sont données figure VI.13.

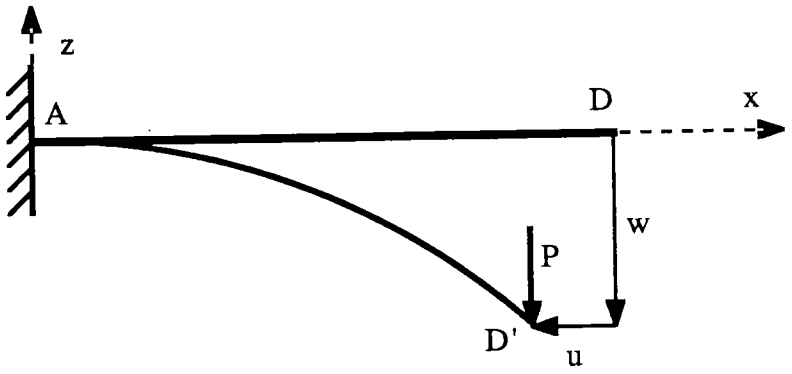


Figure VI.12 : Déformée et définition des déplacements.

Caractéristiques du modèle éléments finis

On maille la plaque de manière régulière à l'aide de 10 éléments QS-RE : 10 éléments suivant la longueur de la plaque et 1 élément suivant la largeur.

Résultats, comparaison avec d'autres études

On commence par définir la quantité adimensionnelle suivante p, afin de normaliser l'effort en bout P :

$$p = \frac{P.L^2}{EI}$$

On trace les courbes charge/déplacement au point C ou D pour des déplacements que l'on considérera positif en prenant implicitement leur valeur absolue (tels que définis figure VI.13) :

$$u(D) = f(p) \qquad w(D) = g(p)$$

Avec l'élément de coque dégénéré à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme réduite explicite (QS-RE) implanté dans ASELF nous utilisons un maillage à 10 éléments, 5 pas de charge en F.L.T. pour p = 2, 4, 6, 8, 10. En F.L.A. nous utiliserons 5, 10, 20 ou 40 pas de charge de manière à étudier l'évolution des déplacements en fonction du nombre de pas mis en oeuvre. Nous avons adopté pour ce test une valeur de tolérance en déplacement (critère d'arrêt, cf. IV.51) égale à $\varepsilon = 10^{-4}$ en raison d'une convergence assez lente, et de plus la méthode N.R. est utilisée.

Comme indiqué au départ, on compare ces résultats à :

1– La solution théorique du problème [TIMOSHENKO S.P., GERE J.M. (1972)] avec prise en compte du cisaillement transverse.

2– La solution donnée par les éléments de plaque/coque DCT1-C (F.F. cubiques) et DCT1-L (F.F. linéaires) qui représentent les valeurs extrêmes des résultats de l'étude [FAFARD M. et al. (1990)].(bons résultats avec le DCT1-L et mauvais résultats avec le DCT1-C).

Les résultats correspondants à la solution théorique du problème, sont les suivants :

PL2/EI	w/L	u/L
2	0,494	0,160
4	0,670	0,329
6	0,744	0,434
8	0,785	0,504
10	0,811	0,554

Tableau VI.6 : Résultats théoriques

Les solutions des éléments DCT1-C et DCT1-L ainsi que la solution ASELF/QS-RE en F.LA. et F.L.T. sont données dans les tableau T.18 à T.24.

PL2/EI	F.L.T.	F.L.A. 5 pas	F.L.A. 10 pas	F.L.A. 20 pas	F.L.A. 40 pas
2	75,50	75,41	-1,07	-3,77	-2,82
4	66,30	2,51	-1,71	-4,08	-3,01
6	45,30	0,72	-1,84	-0,63	-0,82
8	34,90	0,51	-1,72	-0,51	-0,31
10	28,90	0,67	-0,98	-1,01	-0,72

Tableau VI.7 : Erreurs en % sur le déplacement u pour les différents cas.

PL2/EI	F.L.T.	F.L.A. 5 pas	F.L.A. 10 pas	F.L.A. 20 pas	F.L.A. 40 pas
2	22,80	22,80	-2,89	-2,97	-2,61
4	12,30	-0,94	-2,57	-2,63	-1,02
6	7,30	-1,33	-0,91	-0,73	-0,31
8	5,10	-1,41	-1,28	-1,11	-0,84
10	3,30	-1,52	-0,37	-0,59	-0,30

Tableau VI.8 : Erreurs en % sur le déplacement w pour les différents cas.

Conclusions

En fonction des résultats présentés dans les tableaux VI.7 à VI.8 et T.22 à T.24 nous pouvons dire que l'élément QS-RE voit ses résultats nettement améliorés par l'utilisation de la F.L.A. à la place de la F.L.T. ce qui est lié à la mauvaise prise en compte des grandes rotations dans le cadre de la F.L.T. (cf. Introduction).

Les résultats donnés par l'élément QS-RE sont relativement proches en ordre de grandeur de ceux donnés par l'élément DCT1-L (cf. tableaux T.19 et T.20) qui était l'un des meilleurs de l'étude [FAFARD M. et al. (1990)]. Dans cette étude, il est testé le cas de 100 pas en F.L.A., ce que nous n'avons pas fait ici et qui aurait peut être encore amélioré quelque peu les résultats donnés par l'élément QS-RE.

On remarque que notre élément QS-RE donne de bons résultats pour 5 pas de chargement sauf en ce qui concerne le premier pas, la solution pour le premier pas devient correcte pour 10 pas de chargement. Le fait d'augmenter encore le nombre de pas ne permet pas d'améliorer sensiblement la précision.

Le verrouillage en membrane est peu présent bien que les déplacements obtenus pour un grand nombre de pas de chargement sont tous un peu trop faibles, indiquant que la rigidité est donc un peu forte, mais ceci n'a rien de gênant.

Pour l'aspect temps de calcul, nous avons regroupé dans le tableau T.9 le nombre d'itérations et donc de factorisations nécessaires pour les différentes formulations, la méthode N.R. étant utilisée :

PL2/EI	F.L.T.	F.L.A. 5 pas	F.L.A. 10 pas	F.L.A. 20 pas
2	23	23	16 12	14 12 10 9
4	14	16	11 9	8 8 7 7
6	10	12	8 7	6 6 6 5
8	7	9	7 5	5 5 4 4
10	5	6	5 4	4 3 3 2
Total	59	66	84	128

Tableau VI.9 : Nombre d'itérations / factorisations utiles.

On voit donc, comme sur le test de la poutre en compression axiale (cf. VI.1.6), que la précision supplémentaire apportée par la F.L.A. se fait toujours au détriment du temps de calcul. Le nombre d'itérations / factorisations augmente avec le nombre de pas demandé en F.L.A., et il y a un rapport 2 environ entre le temps de calcul pour un découpage 5 pas et le temps de calcul pour un découpage 20 pas. La F.L.T. est plus économique mais sa précision est telle que dans les problèmes de grandes rotations, l'emploi de la F.L.A. avec ce type d'éléments est nécessaire.

Il est important de noter que la valeur de la tolérance d'arrêt $\varepsilon = 10^{-4}$ a été ici nécessaire en raison d'une convergence assez lente entrainant des corrections en déplacement non-négligeables lors des itérations, ce qui aurait sensiblement faussé les résultats.

VI.2 Structures anisotropes

VI.2.1 Coque cylindrique multicouches sous charge concentrée

Il s'agit du même cas test qu'étudié en VI.1.2 où on considère un panneau cylindrique mince constitué cette fois d'un matériau multicouche, orthotrope par couche soumis à une charge concentrée, test considéré par YANG T.Y., SAIGAL S. et KAPANIA R.K. (1986) pour 3 types d'empilements des couches.

Ce test a été aussi utilisé par YEOM C.H. et LEE S.W. (1989) pour tester des éléments de coque dégénérés à 9 noeuds type Lagrange avec intégration complète explicite (QL-CE).

Géométrie

La structure considérée est la suivante :

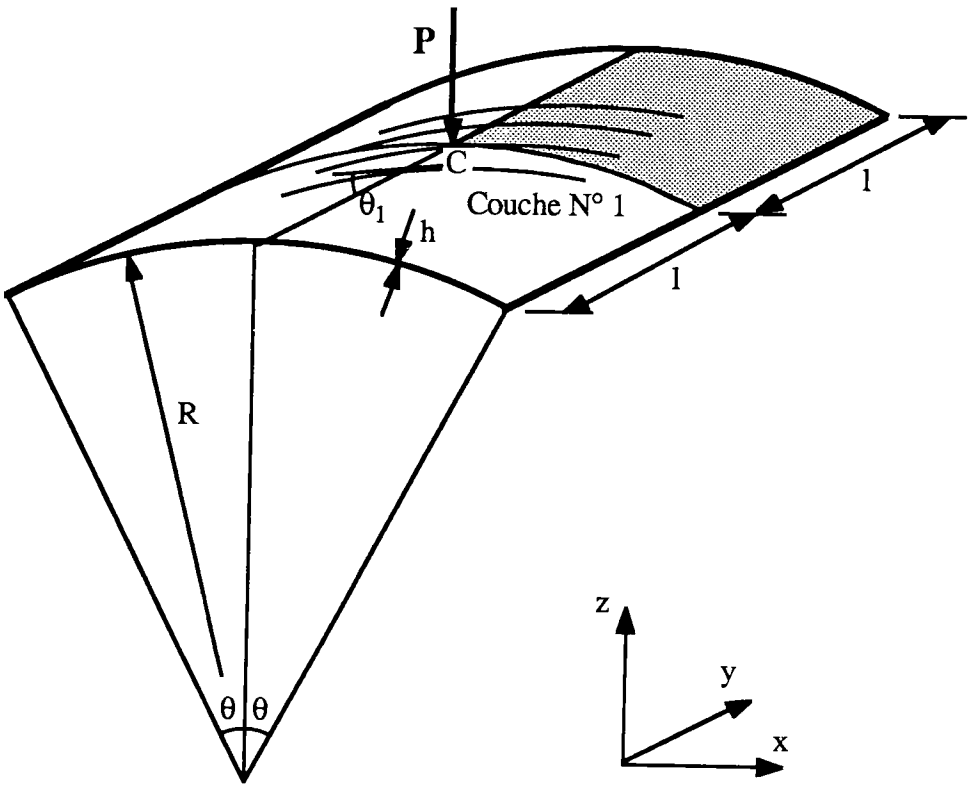


Figure VI.13 : Structure et chargement de la coque cylindrique multicouches.

Les caractéristiques géométriques sont :

R = 2540 mm

l = 254 mm

h = 12.6 mm

Caractéristiques mécaniques

Matériau orthotrope de caractéristiques :

$E_1 = 33{,}0$ Gpa

$E_2 = 11{,}0$ Gpa

$G_{12} = G_{13} = 6{,}6$ Gpa

$G_{32} = 4{,}4$ Gpa

$\nu_{12} = 0{,}25$

Trois empilements distincts sont étudiés pour valider les résultats : [0/90/0], [45/-45], [90/0/90]. Les épaisseurs des couches sont constantes sur un même empilement et l'épaisseur totale est égale à $h = 12{,}6$ mm donc on a $h/R \approx 1/200$

Conditions aux limites cinématiques.

Le modèle complet de la coque cylindrique est maintenu par des "charnières" le long de ses cotés rectilignes autorisant seulement la rotation autour de l'axe y (cf. figure VI.3) :

$-AB$ Bord libre.

$-DA$ $u = v = w = 0 \quad \beta = 0.$

Conditions de symétrie.

Sur le modèle du quart de la structure par raison de symétries on a les conditions aux limites suivantes sur les 4 cotés (cf. figure VI.3) :

$-BC$ $u = 0 \quad \alpha = 0.$

$-CD$ $v = 0 \quad \beta = 0.$

Chargement.

On applique sur le modèle complet de la coque cylindrique un effort P au point central C (cf. figure VI.2) soit encore un effort $P/4$ sur la partie schématisée figure VI.3.

Caractéristiques du modèle éléments finis.

Comme mentionné précédemment, on ne maille que un quart de la structure en tenant compte des conditions de symétrie. Le maillage est uniforme et comporte (3x3) éléments de coque dégénérés à 8 noeuds type Serendip en intégration uniforme réduite explicite (QS-RE).

Les caractéristiques de ce maillage peuvent se résumer par :

– Nombre d'éléments : 9

– Nombre de noeuds : 40

– Nombre de D.D.L. : 146 (après prise en compte des conditions aux limites)

Résultats, comparaison avec d'autres études

On trace les courbes charge / déplacement vertical pour le point C : $P = f(w(C))$ pour les résultats donnés par ASELF avec l'élément de coque QS-RE

On effectue 14 incréments de déplacement égaux tels que $\Delta w(C) = 2$ mm , la méthode de Newton - Raphson modifiée (N.R.M.) étant utilisée.

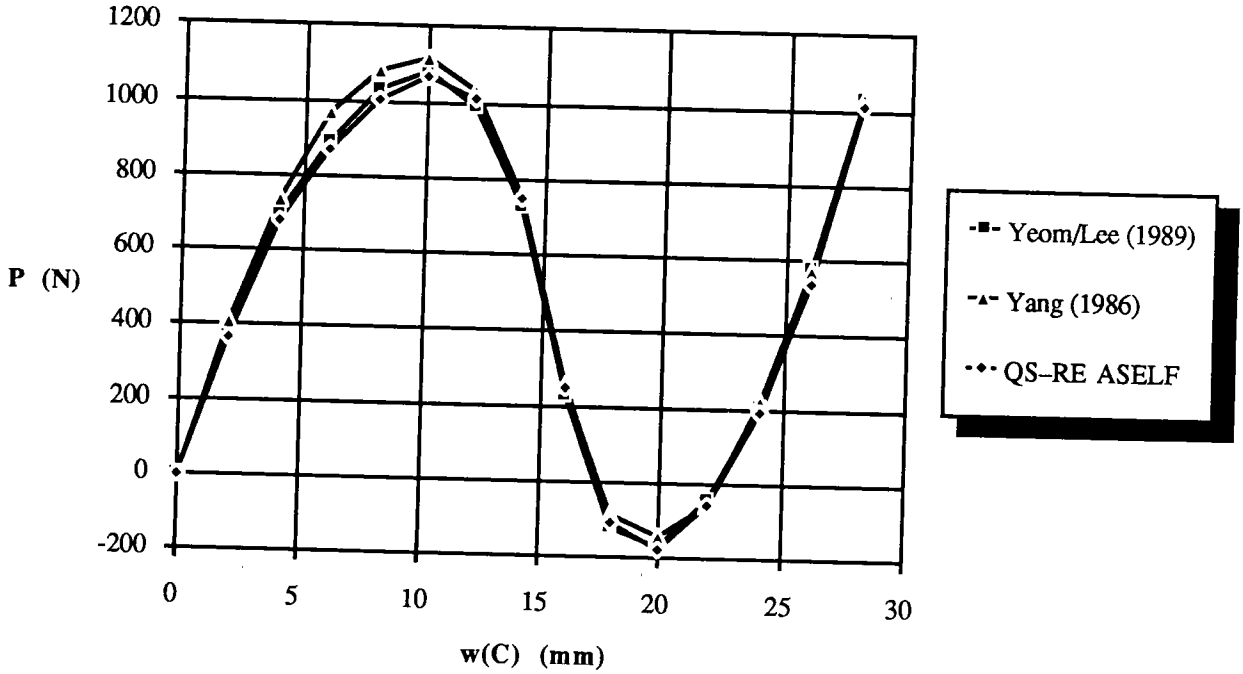
Le temps CPU total nécessaire pour résoudre ce problème s'élève à environ 115 secondes sur CRAY XMP–14 SE pour les 3 empilements considérés, ce qui correspond au temps trouvé pour la structure isotrope correspondante (cf. VI.1.2) et prouve bien l'efficacité de la technique d'intégration explicite dans le cas des structures multicouches (cf. V.2.2).

Les résultats sur ce cas test trouvés avec l'élément QS-RE implanté dans ASELF sont comparés avec les résultats obtenus avec d'autres types d'éléments utilisés par différents auteurs. Les éléments que nous avons retenus pour cette étude comparative de leurs performances sont les suivants et ont été extraits des publications indiquées :

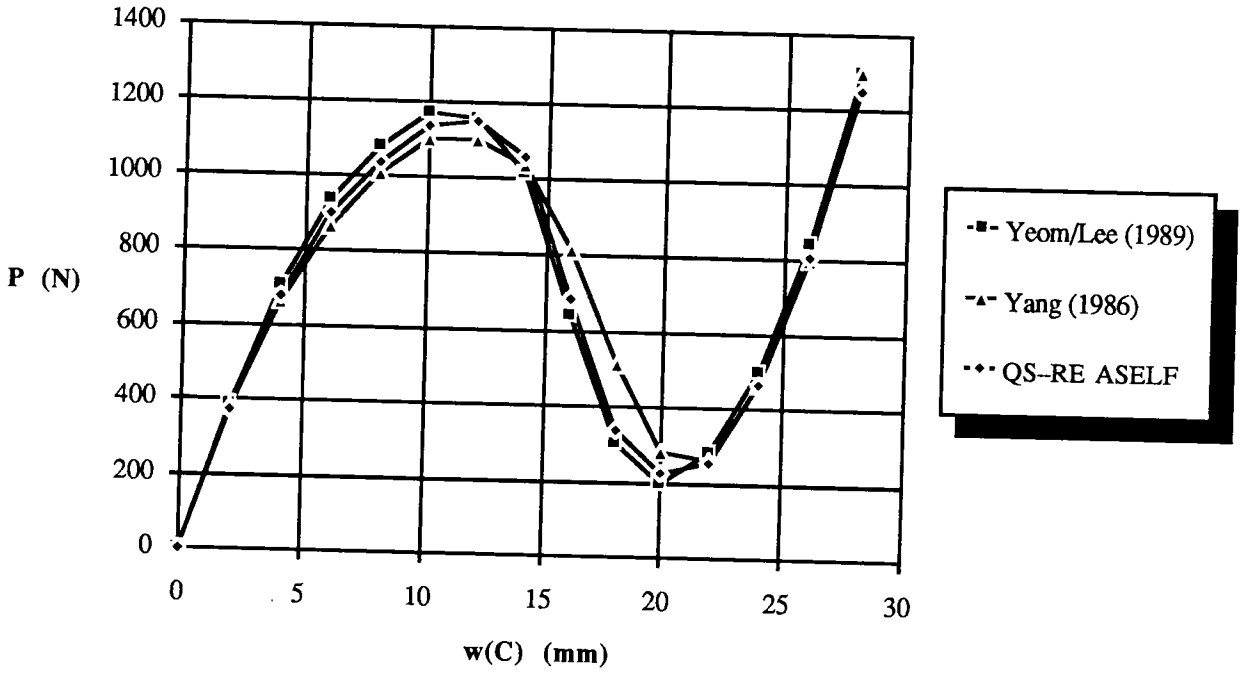
– QL-CE élément de coque dégénérés à 9 noeuds type Lagrange avec intégration complète explicite [YEOM C.H., LEE S.W. (1989) pp.1765-66].

– Elément de coque multicouches.[YANG T.Y. et al. (1986)].

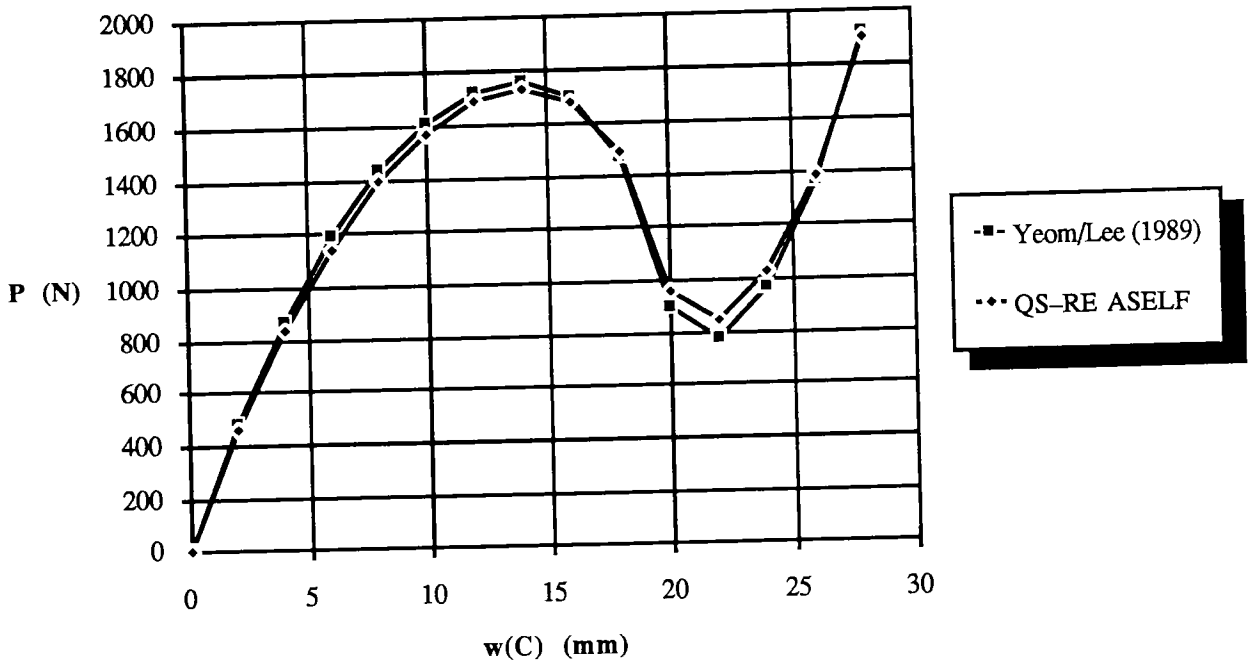
Les différents résultats sont donnés dans les tableaux T.25, T.26 et T.27 et correspondent aux 3 empilements considérés. Ces valeurs sont reportées sur les 3 graphiques suivants VI.14, VI.15 et VI.16.



Graphique VI.12 : Courbes charge / déplacement des différents auteurs, empilement [0/90/0].



Graphique VI.13 : Courbes charge / déplacement des différents auteurs, empilement [45/-45].



Graphique VI.14 : Courbes charge / déplacement des différents auteurs, empilement [90/0/90].

Conclusions.

Les résultats donnés par l'élément QS-RE implanté dans le code ASELF sont plus proches de la solution donnée par l'élément de coque multicouches dégénéré à 9 noeuds type Lagrange avec intégration complète explicite (QL-CE) de YEOM et LEE (1989) que de la solution donnée par l'élément de coque multicouches de YANG (1986).

Sur le premier empilement considéré [0/90/0] les écarts ne dépassent guère 4 % en charge pour l'élément QS-RE par rapport à l'élément QL-CE (sauf sur les points qui correspondent aux charges les plus faibles où les erreurs relatives peuvent être plus élevées) et ils peuvent atteindre 8 % par rapport à l'élément de coque de YANG.

Sur le second empilement [45/–45] les écarts sont sensiblement plus élevés et atteignent 10 % par rapport à l'élément QL-CE et jusqu'à plus de 50 % par rapport à l'élément de YANG.

Enfin sur le dernier empilement [90/0/90] l'écart entre l'élément QS-RE et l'élément QL-CE atteind au plus 8 % et la solution de Yang n'est pas connue.

On peut donc conclure sur cet exemple en disant qu'au vu de ces résultats il semble que les éléments QS-RE et QL-CE donnent des résultats proches pour des structures composites multicouches avec un écart qui peut atteindre 10 % pour un maillage identique. On ne peut pour autant conclure que ces éléments donnent les valeurs correctes et que l'élément de YANG avec plus de 50 % d'écart sur le deuxième empilement donne une solution éloignée de la réalité. En effet les formulations des éléments QS-RE et QL-CE sont à la bases les mêmes puisqu'il s'agit dans les deux cas d'éléments de coque dégénérés et que les seules différences se situent au

Conclusions

Au travers des 11 applications numériques présentées nous avons pu constater plusieurs choses :

– La bonne correspondance des résultats donnés par l'élément QS-RE implanté dans ASELF (en F.L.T. ou en F.L.A. si nécessaire) avec les résultats donnés par d'autres éléments de plaques et coques présentés par différents auteurs et basés sur des hypothèses qui peuvent être ou ne pas être les mêmes que celles de l'élément dégénéré QS-RE.

– La validité de l'hypothèse des voiles minces ($h/R < 1/20$) utilisée tant pour la formulation de l'élément dégénéré en général (cf. hypothèse H1 et (I.3)) que pour la validité de l'intégration explicite dans l'écriture explicite des quantités dépendantes de la matrice jacobienne et du jacobien (cf. paragraphe III.1.3).

– La validité de l'hypothèse des rotations modérées ($\alpha, \beta < 20°$ en F.L.T.) ou des rotations incrémentales modérées ($\Delta\alpha, \Delta\beta < 20°$ en F.L.A.) utilisée pour l'écriture de l'interpolation cinématique (cf. hypothèse H4 et (I.42-43)) en ayant même constaté tout au moins sur l'exemple de la plaque encastrée en flexion pure que cette hypothèse semble quelque peu restrictive.

– La bonne concordance des résultats obtenus avec l'élément QS-RE en intégration explicite dans l'épaisseur pour les multicouches comparés aux résultats obtenus avec le même type d'élément en intégration numérique dans chaque couche suivant l'épaisseur ou avec d'autres types d'éléments de coques.

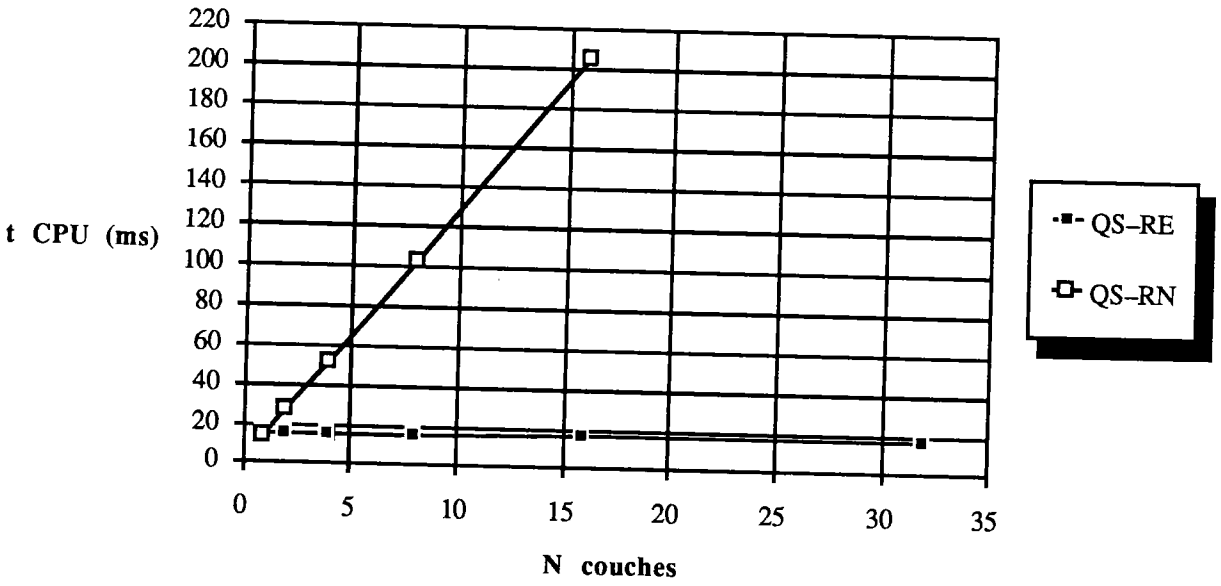
– l'intérêt de la F.L.A. pour des problèmes présentant des rotations importantes qui conduisent à des erreurs notables en F.L.T..

– quelques difficultés de convergence en F.L.A. liées à l'apparition de pivots faibles pour certains problèmes.

Il est maintenant intéressant de conclure sur l'intérêt propre de l'intégration explicite dans l'épaisseur mise en œuvre dans l'élément QS-RE, le premier point qui est celui de la précision ayant été largement justifié au niveau des applications numériques en validant la formulation tant

Pour ce qui est du gain au niveau du temps de calcul des matrices de rigidité élémentaires et du vecteur des efforts intérieurs que nous n'avons pour l'instant pas encore justifié ni chiffré, nous nous proposons de comparer le temps nécessaire au calcul d'une matrice de rigidité tangente élémentaire dans le cas d'un élément multicouche pouvant comporter 1, 2, 4, 8, 16 ou 32 couches avec la formulation intégration explicite (QS-RE) ou avec la formulation intégration numérique (QS-RN).

L'ordinateur utilisé pour cette comparaison est un CRAY–XMP 116 et nous traçons les 2 courbes donnant le temps de calcul élémentaire en millisecondes en fonction du nombre de couches sur le graphique suivant.



Graphique VI.15 : Temps de calcul comparés entre les éléments QS-RE et QS-RN.

On constate donc comme prévu que le temps de calcul d'une matrice tangente élémentaire est quasi constant pour l'éléments QS-RE et se situe au niveau de 15 ms, le fait qu'il augmente quand même étant lié au calcul des matrices matériau homogénéisées dans l'épaisseur. Pour l'élément QS-RN par contre, le temps de calcul d'une matrice tangente élémentaire augmente linéairement en fonction du nombre de couches : il est du même ordre que pour l'élément QS-RE lorsque l'on a une seule couche (14 ms) et ensuite il augmente sensiblement et atteint plus de 200 ms lorsque l'on a 16 couches.

Il faut bien noter ici comme on l'a dit en introduction que dans un contexte industriel on peut avoir des structures comportant plus de 100 couches ce qui laisse entrevoir l'intérêt considérable de l'élément QS-RE par rapport à l'élément QS-RN dans un code de calcul industriel comme ASELF, d'autant que la phase de génération des matrices tangentes est assez coûteuse par rapport au reste de la chaîne non linéaire (environ 20 % pour un monocouche). Par exemple pour 150 couches par élément avec une structure de taille moyenne comprenant 100 éléments type QS-RN on serait à environ 200 secondes

suivant la méthode adoptée (N.R. ou N.R.M.), ce qui est considérable et compromet le calcul si l'on a beaucoup d'incréments de charge.

On peut donc dire que l'élément QS-RE donne des résultats très proches de l'élément QS-RN dans le cadre de nos hypothèses et qu'il est particulièrement adapté à une utilisation intensive dans le cas de structures composites multicouches mais qu'il peut aussi être utilisé pour des matériaux monocouches (isotropes ou non) sans pour autant être plus lourd ou plus coûteux à utiliser dans ce cas.

L'hypothèse H4 de construction de l'élément QS-RE ($\alpha,\beta < 20°$) n'est pas en général très contraignante et permet d'utiliser assez souvent la F.L.T., néanmoins le recours à la F.L.A. dans le cas de problèmes induisant de grandes rotations est nécessaire et améliore alors considérablement les résultats (2 tests parmis 8 ont nécessité la F.L.A.). La F.L.T. peut en effet conduire parfois pour ce type de problèmes à des aberrations au niveau des résultats (cf. VI.1.6).

Bilan - Prolongements

L'étude a montré que les éléments de coque dégénérés, qui sont aujourd'hui largement utilisés en analyse linéaire, se prêtent également bien à l'analyse non linéaire géométrique, à condition d'utiliser la formulation lagrangienne actualisée dans les problèmes induisant de grandes rotations. Néanmoins, dans de nombreux cas d'étude où les rotations nodales sont limitées à 20° environ, la formulation lagrangienne totale suffit à donner des résultats fiables.

L'utilisation de l'intégration explicite à travers l'épaisseur de l'élément permet, sans qu'une altération sensible des résultats ait été observée, de réduire considérablement le temps de calcul des matrices de rigidité tangente élémentaires ainsi que le temps de calcul du vecteur des efforts intérieurs. Ceci est d'un intérêt considérable en analyse non linéaire, les temps de calcul pour des structures concrètes étant souvent élevés.

La contribution de cette étude au niveau du calcul non-linéaire géométrique des coques, qui comprend la présentation des deux types de formulations lagrangiennes et la mise en oeuvre de l'intégration explicite, a donc été démontrée dans la limite de validité des hypothèses de construction. Comme nous l'avons vu, ces hypothèses ne sont pas très contraignantes et correspondent bien au cadre de l'étude des coques minces ou modérément épaisses. Les résultats sont donc encourageants et satisfaisants sur le plan des performances de ces éléments en analyse non-linéaire géométrique.

Les prolongements et améliorations possibles de cette étude sont :

– prise en compte des non-linéarités constitutives des matériaux, en plus des non-linéarités géométriques, afin de permettre l'utilisation de ces éléments dans le cadre de l'élasto-plasticité.

– utilisation d'une approximation plus précise, par exemple l'approximation à l'ordre 2, en ce qui concerne les développements en séries de $|J|$, $[J]^{-1}$ et $[Q]$ (cf. paragraphe III.1.3.2).

TABLEAUX

DE

RESULTATS

Plaque chargée verticalement au centre

Les unités sont supposées cohérentes entre elles.

P	w(A)	
	CST+DKT Batoz	QS–RE ASELF
0	0	0
0,2	0,42	0,426
0,497	0,843	0,859
0,983	1,272	1,303
1,741	1,705	1,736
2,851	2,142	2,182
4,392	2,582	2,63
6,438	3,024	3,094
9,068	3,467	3,547
12,356	3,911	3,984

Tableau T.1 : Résultats charge / déplacement des 2 éléments.

P	Ecart QS–RE / CST+DKT (%)
0	-
0,2	1,4
0,497	1,9
0,983	2,4
1,741	1,8
2,851	1,9
4,392	1,9
6,438	2,3
9,068	2,3
12,356	1,9

Tableau T.2 : Ecarts (%) entre QS–RE (ASELF) et CST+DKT (BATOZ J.L.-1985).

Coque cylindrique sous charge concentrée

Les unités sont le mm pour les déplacements et le daN pour les efforts.

w(C) (mm)	P (daN)		
	QS–RE ASELF	Horrigmoe	CL–CN Fézans
0	0,0	0	0
1	39,7	38	40
2	77,8	76	78
3	110,5	108	110
4	139,3	137	140
5	163,5	160	163
6	184,7	180	184
7	202,1	197	201
8	214,0	210	213
9	220,8	218	220
10	225,0	223	-
11	224,0	222	-
12	218,0	215	-
13	204,0	203	-
14	185,0	183	-
15	158,5	-	-
16	119,0	-	-
17	84,5	-	-
18	63,1	-	-
19	54,2	-	-
20	54,3	-	-
21	61,6	-	-
22	75,1	-	-
23	94,1	-	-
24	118,3	-	-
25	147,6	-	-
26	181,7	-	-
27	221,1	-	-
28	265,4	-	-
29	314,9	-	-
30	370,0	-	-
31	429,7	-	-
32	495,2	-	-
33	566,4	-	-
34	643,3	-	-
35	726,2	-	-

Tableau T.3 : Résultats charge / déplacement des différents auteurs (h = 12,7 mm).

w(C) (mm)	P (daN) QS–RE ASELF	w(C) (mm)	P (daN) DKQ 24 Batoz	w(C) (mm)	P (daN) CPT4 ASELF
0,00	0,00	0,0	0,0	0,00	0,00
2,40	19,84	1,7	15,0	2,58	20,65
4,75	33,56	3,5	26,5	5,22	35,24
7,07	43,72	4,9	34,5	7,88	47,54
9,40	51,68	6,8	41,5	10,51	56,18
12,53	58,31	8,4	47,5	12,79	59,19
14,46	59,11	9,8	52,0	14,27	58,59
15,61	55,32	11,1	55,5	15,16	55,53
16,43	45,41	12,2	58,0	15,72	50,90
16,96	33,74	13,1	59,5	16,14	45,30
17,32	21,12	14,0	60,0	16,48	38,71
17,31	9,64	14,9	58,5	16,77	31,20
16,96	-0,80	15,5	56,5	16,99	23,06
15,86	-9,40	16,1	52,5	17,12	14,84
15,11	-15,68	16,4	48,0	17,14	7,07
14,44	-20,20	16,7	41,5	17,03	-0,01
14,01	-24,52	16,9	35,0	16,79	-6,31
14,11	-30,00	17,0	29,0	16,40	-11,82
14,79	-35,36	17,1	22,5	15,89	-16,57
16,57	-38,20	17,1	15,0	15,40	-20,46
19,43	-33,28	17,0	9,0	15,10	-23,68
22,49	-18,92	16,8	2,0	15,00	-27,06
25,72	9,36	16,4	-3,5	15,17	-30,73
29,10	57,32	16,0	-8,5	15,81	-34,37
32,54	130,16	15,3	-13,0	17,89	-34,49
		14,8	-15,5	21,33	-23,56
		14,2	-19,5	24,53	-0,70
		14,0	-24,0	27,02	30,05
		14,0	-29,5	29,20	62,58
		14,3	-34,5		
		15,0	-37,0		
		16,1	-38,0		
		17,3	-37,5		
		18,7	-35,0		
		20,3	-30,5		
		21,8	-23,0		
		23,5	-12,0		
		25,2	2,5		
		26,8	21,0		
		28,5	44,5		

Tableau T.4 : Résultats charge / déplacement au centre des différents éléments (h = 6,35 mm).

w(C) (mm)	P (daN) QS–RE ASELF	w(C) (mm)	P (daN) DKQ 24 Batoz	w(C) (mm)	P (daN) CPT4 ASELF
0,00	0,00	0,0	0,0	0,00	0,00
0,02	19,84	0,0	15,0	-0,02	20,65
0,04	33,56	0,0	26,5	0,03	35,24
0,11	43,72	0,0	34,5	0,30	47,54
0,61	51,68	0,1	41,5	0,92	56,18
1,33	58,31	0,3	47,5	2,18	59,19
2,51	59,11	0,6	52,0	3,79	58,59
5,23	55,32	1,0	55,5	5,39	55,53
8,45	45,41	1,4	58,0	6,95	50,90
10,85	33,74	2,0	59,5	8,53	45,30
14,10	21,12	2,7	60,0	10,18	38,71
16,35	9,64	3,6	58,5	11,89	31,20
18,50	-0,80	4,7	56,5	13,61	23,06
20,65	-9,40	6,0	52,5	15,26	14,84
22,91	-15,68	7,5	48,0	16,78	7,07
24,61	-20,20	9,0	41,5	18,17	-0,01
25,23	-24,52	10,4	35,0	19,47	-6,31
25,87	-30,00	12,0	29,0	20,71	-11,82
25,98	-35,36	13,6	22,5	21,94	-16,57
26,27	-38,20	14,8	15,0	23,08	-20,46
26,34	-33,28	16,3	9,0	23,94	-23,68
26,28	-18,92	17,7	2,0	24,62	-27,06
26,26	9,36	19,1	-3,5	25,14	-30,73
26,38	57,32	20,3	-8,5	25,54	-34,37
26,43	130,16	21,7	-13,0	25,87	-34,49
		22,8	-15,5	25,96	-23,56
		24,0	-19,5	25,95	-0,70
		24,8	-24,0	26,03	30,05
		25,3	-29,5	26,11	62,58
		25,8	-34,5		
		26,0	-37,0		
		26,1	-38,0		
		26,2	-37,5		
		26,3	-35,0		
		26,4	-30,5		
		26,4	-23,0		
		26,4	-12,0		
		26,4	2,5		
		26,4	21,0		
		26,4	44,5		

Tableau T.5 : Résultats charge / déplacement au bord B des différents éléments (h = 6,35 mm).

w(C) (mm)	P (daN)					Itérations
	QS-RE (5x5)	QS-RE (4x4)	QS-RE (3x3)	QS-RE (2x2)	QS-RE (1x1)	
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2
2,0	76,3	76,3	76,5	77,3	81,9	2
4,0	137,6	137,7	137,9	139,3	147,6	2
6,0	184,5	184,5	184,7	186,5	197,0	2
8,0	214,0	214,0	214,2	215,9	226,4	2
10,0	225,0	225,0	225,2	226,4	233,3	2
12,0	218,0	218,0	218,0	218,4	217,8	3
14,0	185,0	185,0	184,8	183,0	173,0	3
16,0	119,0	118,9	118,7	116,6	109,1	3
18,0	63,1	63,1	63,1	62,8	62,9	3
20,0	54,3	54,3	54,3	54,1	52,7	2
22,0	75,1	75,1	75,1	74,8	70,7	2
24,0	118,3	118,3	118,3	118,5	111,3	2
26,0	181,7	181,8	181,9	182,6	172,8	2
28,0	265,4	265,4	265,6	267,0	254,0	2
30,0	370,0	370,1	370,2	372,2	355,6	2
Nombre DDL	407 DDL	256 DDL	145 DDL	66 DDL	17 DDL	
Temps CPU (s)	69,4	57,2	45,7	36,5	28,2	

Tableau T.6 : Résultats des différents maillages élément QS–RE (h = 12,7 mm).

Coque sphérique sous charge concentrée

Les unités sont le mm pour les déplacements et le daN pour les efforts.

w(C) (mm)	P (daN)			
	Horrigmoe [1978]	CL–CN Fézans [1981]	DKT 18 Batoz [1985]	QS–RE *ASELF*
0	0	0	0	0
10	760	760	840	772
20	1480	1480	1510	1498
30	2120	2140	2120	2136
40	2700	2720	2670	2694
50	3180	3220	3100	3185
60	3520	3560	3560	3528
70	3880	3960	3900	3904
80	4220	4310	4210	4221
90	4480	4580	4500	4487
100	4700	4820	4710	4769
110	4880	5020	4850	4948
120	5000	-	4990	5057
130	5040	-	5100	5162
140	5000	-	5180	5248
150	4840	-	5180	5251
160	-	-	5150	5191
170	-	-	5110	5168
180	-	-	5020	5064
190	-	-	4890	4951
200	-	-	4730	4796
210	-	-	4550	4611
220	-	-	4380	4423
230	-	-	4260	4286
240	-	-	4220	4223
250	-	-	4300	4275
260	-	-	4510	4469
270	-	-	4870	4801
280	-	-	5380	5289
290	-	-	6030	5931
300	-	-	6820	6706

Tableau T.7 : Résultats charge / déplacement au centre *C* des différents auteurs.

Dôme sphérique encastré avec charge centrale

Les constantes de normalisation sont définies de la manière suivante :

$E\,h^3 = 1{,}77865.10^5$ N

$h = 0{,}203840$ m

w / h	P a / E h3
0,000	0,000
2,500	0,325
5,000	0,475
7,500	0,650
10,000	0,775
12,500	0,925
15,000	1,125
17,500	1,350
20,000	1,650
22,500	1,850
25,000	1,800
27,500	1,875

Tableau T.8 : Dôme sphérique encastré.
Solution analytique approchée [Réf. MESCALL J.F. (1965)]

w / h	P a / E h3
0,000	0,000
2,165	0,320
3,853	0,415
5,304	0,499
6,769	0,584
8,280	0,669
9,862	0,756
11,539	0,854
13,335	0,975
15,287	1,141
17,410	1,364
19,706	1,624
22,073	1,808
24,398	1,758
26,788	1,962
29,851	4,699

Tableau T.9 : Dôme sphérique encastré.
Solution modèle continu [Réf. LYONS P., HOLSGROVE S., *NAFEMS Bench.* (1989)].

w / h	P a / E h3
0,000	0,000
2,367	0,335
4,654	0,480
6,921	0,579
9,238	0,768
11,614	0,920
14,041	1,044
16,423	1,176
18,964	1,705
21,393	2,488
23,659	2,540
25,247	0,775
28,541	3,765

Tableau T.10 : Dôme sphérique encastré.
Solution 4 éléments coque axisymétrique TN8A en FLT [Réf. *NAFEMS Bench.* (1989)].

w / h	P a / E h3
0,000	0,000
2,326	0,332
4,548	0,457
6,720	0,580
8,930	0,700
11,235	0,828
13,642	0,994
16,063	1,222
18,487	1,502
20,887	1,757
23,224	1,755
25,668	1,678
28,680	3,705

Tableau T.11 : Dôme sphérique encastré
Solution 8 éléments coque axisymétrique TN8A en FLT [Réf. *NAFEMS Bench.* (1989)].

w / h	P a / E h3
0	0,000
2,5	0,325
5	0,481
7,5	0,682
10	0,819
12,5	0,967
15	1,182
17,5	1,394
20	1,726
22,5	1,981
25	1,928
27,5	2,824
30	4,995

Tableau T.12 : Dôme sphérique encastré, solution 16 éléments QS–RE ASELF.

Poutre encastrée en flexion pure

Le paramètre adimensionnel η est défini de la manière suivante :

$$\eta = ML/2\pi EI$$

ML/2πEI	u/L	w/L	Ø/2π
0,000	0,000	0,000	0,000
0,033	0,007	0,104	0,033
0,067	0,029	0,206	0,067
0,100	0,065	0,304	0,100
0,133	0,113	0,395	0,133
0,167	0,173	0,477	0,167
0,200	0,243	0,550	0,200
0,233	0,322	0,611	0,233
0,267	0,406	0,659	0,267
0,300	0,495	0,694	0,300
0,333	0,587	0,716	0,333
0,367	0,677	0,725	0,367
0,400	0,766	0,720	0,400

Tableau T.13 : Poutre encastrée en flexion pure.
Solution analytique exacte [Réf. MATTIASSON K. (1981)].

η	u/L QS–RE ASELF	w/L QS–RE ASELF	Ø/2π QS–RE ASELF
0,000	0,000	0,000	0,000
0,025	0,003	0,070	0,025
0,050	0,016	0,140	0,050
0,100	0,063	0,280	0,100
0,150	0,136	0,420	0,150
0,200	0,220	0,535	0,205
0,250	0,325	0,625	0,260
0,300	0,440	0,685	0,315
0,350	0,556	0,720	0,375
0,400	0,671	0,740	0,430

Tableau T.14 : Poutre encastrée en flexion pure, solution élément QS–RE ASELF.

Poutre en console en compression avec charge perturbatrice

u/L	P/Pcr	v/L
0,000	0,000	0,000
0,000	1,000	0,000
0,030	1,015	0,220
0,119	1,063	0,422
0,259	1,152	0,593
0,440	1,293	0,719
0,651	1,518	0,792
0,877	1,884	0,803
1,107	2,541	0,750
1,340	4,029	0,625

Tableau T.15 : Résultats charge / déplacement - Solution théorique.

u/L	P/Pcr	v/L
0,0000	0,000	0,0000
0,0027	0,991	0,0110
0,0135	1,000	0,1490
0,0273	1,007	0,2005
0,0410	1,015	0,2520
0,1320	1,063	0,4390
0,2730	1,152	0,6090
0,4520	1,293	0,7330
0,6660	1,518	0,8070
0,8930	1,884	0,8190
1,1280	2,541	0,7650
1,3610	4,029	0,6420

Tableau T.16 : Résultats charge / déplacement QS–RE en F.L.T.

u/L	P/Pcr	v/L
0,0000	0,000	0,0000
0,0003	0,960	0,0198
0,0007	0,975	0,0324
0,0016	0,982	0,0502
0,0031	0,984	0,0707
0,0076	0,982	0,1106
0,0139	0,974	0,1492
0,0219	0,963	0,1867
0,0312	0,950	0,2219
0,0419	0,933	0,2561
0,0536	0,916	0,2882
0,0661	0,896	0,3184
0,0860	0,865	0,3600
0,1059	0,833	0,4016
0,1258	0,798	0,4432
0,1457	0,760	0,4848
0,1656	0,719	0,5264
0,1855	0,671	0,5680
0,2054	0,616	0,6096

Tableau T.17 : Résultats charge / déplacement OS–RE en F.L.A.

Plaque encastrée en flexion simple

	5 pas		10 pas		20 pas		40 pas	
PL2/EI	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L
2	0,07759	0,00355	0,11424	0,01619	0,16760	0,01619	0,23277	0,03253
4	0,15364	0,01390	0,22463	0,07721	0,35342	0,07721	0,48141	0,15022
6	0,22331	0,03158	0,37906	0,17626	0,51908	0,17626	0,66230	0,31457
8	0,35051	0,07919	0,49738	0,30783	0,65350	0,30783	0,74800	0,43516
10	0,41482	0,11211	0,56809	0,41428	0,73248	0,41428	0,79188	0,51269

Tableau T.18 : Déplacements *u* et *w*, élément DCT1–C en F.L.A. [FAFARD M. et *al.* (1990)]

	5 pas		10 pas		20 pas		40 pas	
PL2/EI	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L
2	0,64535	0,24722	0,50409	0,16351	0,48962	0,15584	0,48700	0,15403
4	0,72213	0,33137	0,67363	0,32486	0,66777	0,32114	0,66696	0,32021
6	0,79349	0,43846	0,74869	0,42917	0,74467	0,42688	0,74430	0,42628
8	0,83151	0,50624	0,79010	0,49944	0,78674	0,49775	0,78652	0,49732
10	0,85663	0,55554	0,81671	0,54994	0,81363	0,54861	0,81347	0,54827

Tableau T.19 : Déplacements *u* et *w*, élément DCT1–L en F.L.A. [FAFARD M. et *al.* (1990)]

	5 pas		10 pas		20 pas		40 pas	
PL2/EI	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L
2	-84,29	-97,78	-76,87	-95,28	-66,07	-89,88	-52,88	-79,67
4	-77,07	-95,78	-66,47	-91,05	-47,25	-76,53	-28,15	-54,34
6	-69,99	-92,72	-49,05	-78,91	-30,23	-59,39	-10,98	-27,52
8	-55,35	-84,29	-36,64	-67,90	-16,75	-38,92	-4,71	-13,66
10	-48,85	-79,80	-29,95	-60,15	-9,68	-25,35	-2,36	-7,62

Tableau T.20 : Erreurs sur *u* et *w*, élément DCT1–C en F.L.A. [FAFARD M. et *al.* (1990)]

	5 pas		10 pas		20 pas		40 pas	
PL2/EI	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L
2	30,64	54,51	2,04	2,19	-0,89	-3,73	-1,42	-4,01
4	7,78	0,72	0,54	-1,26	-0,33	-2,67	-0,45	-2,75
6	6,65	1,03	0,63	-1,11	0,09	-1,78	0,04	-1,82
8	5,92	0,44	0,65	-0,90	0,22	-1,33	0,19	-1,35
10	5,63	0,10	0,70	-0,91	0,32	-1,21	0,30	-1,23

Tableau T.21 : Erreurs sur *u* et *w*, élément DCT1–L en F.L.A. [FAFARD M. et *al.* (1990)]

	5 pas		10 pas		20 pas		40 pas	
PL2/EI	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L
2	0,60663	0,28066	0,47972	0,15829	0,47933	0,15397	0,48111	0,15549
4	0,66370	0,33726	0,65278	0,32337	0,65238	0,31558	0,66317	0,31910
6	0,73410	0,43712	0,73723	0,42601	0,73857	0,43127	0,74169	0,43044
8	0,77393	0,50657	0,77495	0,49533	0,77629	0,50143	0,77841	0,50244
10	0,79867	0,55771	0,80800	0,54857	0,80622	0,54840	0,80857	0,55001

Tableau T.22 : Déplacements *u* et *w*, élément QS–RE en F.L.A.

	5 pas		10 pas		20 pas		40 pas	
PL2/EI	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L
2	22,80	75,41	-2,89	-1,07	-2,97	-3,77	-2,61	-2,82
4	-0,94	2,51	-2,57	-1,71	-2,63	-4,08	-1,02	-3,01
6	-1,33	0,72	-0,91	-1,84	-0,73	-0,63	-0,31	-0,82
8	-1,41	0,51	-1,28	-1,72	-1,11	-0,51	-0,84	-0,31
10	-1,52	0,67	-0,37	-0,98	-0,59	-1,01	-0,30	-0,72

Tableau T.23 : Erreurs sur les déplacements *u* et *w*, élément QS–RE en F.L.A.

PL2/EI	w/L	u/L
2	0,60661	0,28065
4	0,75264	0,54717
6	0,79813	0,63063
8	0,82521	0,67990
10	0,84369	0,71384

Tableau T.24 : Déplacements *u* et *w*, élément QS–RE en F.L.T.

Coque cylindrique multicouches sous charge concentrée

Les unités sont le mm pour les déplacements et le daN pour les efforts.

	P (daN) [0/90/0]		
w(C) (mm)	Yeom/Lee (1989)	Yang (1986)	QS–RE ASELF
0	0	0	0
2	380	410	362
4	695	735	677
6	890	970	866
8	1030	1080	1002
10	1080	1120	1068
12	992	1030	1012
14	725	755	745
16	230	260	248
18	-120	-85	-104
20	-170	-140	-177
22	-40	-55	-52
24	210	220	196
26	575	570	534
28	1035	1035	1008

Tableau T.25 : Résultats charge / déplacement des différents auteurs, empilement [0/90/0].

	P (daN) [45/-45]		
w(C) (mm)	Yeom/Lee (1989)	Yang (1986)	QS–RE ASELF
0	0	0	0
2	390	380	378
4	710	665	681
6	935	865	902
8	1080	1010	1041
10	1170	1100	1139
12	1160	1105	1152
14	1020	1040	1056
16	645	815	688
18	305	520	342
20	200	280	228
22	285	260	255
24	505	465	471
26	845	805	809

	P (daN) [90/0/90]	
w(C) (mm)	Yeom/Lee (1989)	QS–RE ASELF
0	0	0
2	480	465
4	865	841
6	1195	1146
8	1435	1394
10	1610	1565
12	1720	1687
14	1760	1735
16	1700	1684
18	1470	1491
20	900	955
22	780	846
24	970	1028
26	1365	1384
28	1925	1903

Tableau T.27 : Résultats charge / déplacement des différents auteurs empilement [90/0/90].

ANNEXES

Annexe A1

Matrice des constantes élastiques du matériau

Les lois de comportement retenues pour les matériaux étudiés sont linéaires (cf. II.42) et prennent donc la forme matricielle suivante dans un repère lié au matériau, d'axes 1,2,3 en faisant abstraction des phénomènes thermiques :

$$\{S\} = [C]\ \{\varepsilon\} \tag{A1.1}$$

Où $[C]$ est la matrice (6 x 6) des constantes élastiques (ou matrice de raideur du matériau), $\{S\}$ le vecteur–colonne des contraintes de Green–Lagrange et $\{\varepsilon\}$ le vecteur–colonne des déformations de Green–Lagrange. Ces différents éléments sont exprimés dans le repère matériau (cf. figure I.4) pour que $[C]$ est une forme simple.

Cette loi de comportement est une extension de la loi de Hooke dans le cas de l'élasticité linéaire et pour son écriture dans le cas général des matériaux anisotropes, on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées en remarquant que les points 2 et 3 sont liés :

1– Symétrie de $[\varepsilon]$

2– Symétrie de $[S]$

3– Existence d'une fonction potentiel élastique U vérifiant la propriété :

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = S_{ij} \tag{A1.2}$$

L'existence de cette fonction potentiel élastique est déduite de considérations thermodynamiques. Ceci est étudié en détail dans les études de :

– LOVE A.E.	(1944) p90–97
– NOVOZHILOV V.V.	(1953) p94–131
– LANDAU L. & LIFCHITZ E.	(1967) p 16–18
– KOITER W.T.	(1970) p12–14
– DUC J., BELLET D.	(1976) p146–147

Ces 3 hypothèses utilisées pour la construction de la matrice [C] sont les hypothèses usuelles utilisées en élasticité dans la majorité des cas de calcul. On a donc une expression de la loi de comportement où la matrice [C] est une matrice 6x6 symétrique ($C_{ij} = C_{ji}$) de la forme :

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{16} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{26} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{36} & C_{34} & C_{35} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{66} & C_{64} & C_{65} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{46} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{56} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \qquad \text{(A1.3)}$$

On peut aussi utiliser les notations suivantes pour les contraintes et les déformations :

$S_1 = S_{11}$ $S_2 = S_{22}$ $S_3 = S_{33}$ $S_4 = S_{23}$ $S_5 = S_{31}$ $S_6 = S_{12}$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22}$ $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$ $\varepsilon_4 = \varepsilon_{23}$ $\varepsilon_5 = \varepsilon_{31}$ $\varepsilon_6 = \varepsilon_{12}$

Dans le cas d'un matériau présentant le plan (1,2) comme plan de symétrie c'est à dire monoclinique on obtient :

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{64} = C_{65} = 0 \qquad \text{(A1.4)}$$

voir [LEKHNISKII S.G. (1963) p. 8] et [KITTEL C. (1972) p. 17 et p. 133].

Dans le cas d'un matériau présentant 3 plans de symétrie (1,2) (2,3) (3,1) on a alors en plus les termes suivants qui sont nuls :

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0 \qquad \text{(A1.5)}$$

Il s'agit d'un matériau orthotrope. C'est ce cas qui nous intéresse dans cette étude car il correspond au cas des matériaux composites qui sont utilisés en construction aéronautique comme par exemple les composites à fibres ou les structures à "nids d'abeilles".

La forme de la matrice [C] dans le cas d'un matériau orthotrope est la suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.6)}$$

Dans ce cas on préfère présenter la loi de comportement linéaire du matériau sous forme "inversée" c'est à dire en faisant intervenir la matrice de souplesse $[\bar{C}]$ du matériau qui est l'inverse de la matrice de raideur $[C]$.

De cette manière on fait apparaitre les caractéristiques usuelles du matériau :

- Modules d'Young : E_1, E_2, E_3
- Coefficients de poisson : $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{31}, \nu_{13}$
- Modules de Coulomb : G_{12}, G_{23}, G_{31}

La relation entre déformations et contraintes s'écrit donc :

$$\{\varepsilon\} = [\bar{C}]\ \{S\} \tag{A1.7}$$

Avec : $\{\varepsilon\} = <\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3 , \varepsilon_6 , \varepsilon_4 , \varepsilon_5>$ et $\{S\} = <S_1 , S_2 , S_3 , S_6 , S_4 , S_5>$

La matrice de souplesse $[\bar{C}]$ symétrique ayant la forme suivante :

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \tag{A1.8}$$

Vue la symétrie de $[\bar{C}]$ on a la relation suivante :

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \qquad (i \neq j) \tag{A1.9}$$

Dans le cas des matériaux isotropes il suffit de poser :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E$$
$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu_{21} = \nu_{32} = \nu_{13} = \nu \qquad \text{(A1.10)}$$
$$G_{12} = G_{23} = G_{31} = G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

On obtient alors la forme classique de la matrice de souplesse des matériaux isotropes.

Dans le cas des plaques et des coques la direction 3 correspond au sens de l'épaisseur et nous allons utiliser l'hypothèse H2 (cf. I.5) sur les contraintes normales σ_3 (Théorie des plaques / coques minces). En utilisant la relation (II.48) on peut en effet assimiler les contraintes de Cauchy locales aux contraintes P.K.2.

La contrainte normale suivant l'épaisseur de la coque est négligeable en moyenne quadratique suivant l'épaisseur devant les 2 autres contraintes normales dans le plan tangent de la coque :

d'où : $\sigma_{\text{local}\,3} << \sigma_{\text{local}\,1}$ *et* $\sigma_{\text{local}\,3} << \sigma_{\text{local}\,2}$ ou $S_3 << S_1$ *et* $S_3 << S_2$ (A1.11)

Ceci va nous permettre de simplifier les équations constitutives du matériau qui s'écrivent, pour l'instant, comme suit en utilisant la notation contractée :

$$S_i = C_{ij}\,\varepsilon_j \quad \text{avec } i,j = 1,2,3,4,5,6 \qquad \text{(A1.12)}$$

L'équation $i = 3$ peut s'écrire en considérant toujours le cas du matériau orthotrope :

$$\varepsilon_3 = \frac{S_3}{C_{33}} - \frac{C_{31}\varepsilon_1 + C_{32}\varepsilon_2}{C_{33}} \qquad \text{(A1.13)}$$

En remplaçant ceci dans les équations constitutives on obtient :

$$S_i = Q_{i\alpha}\,\varepsilon_\alpha + \frac{C_{i3}}{C_{33}} S_3 \quad (i = 1,2,3 \text{ et } \alpha = 1,2) \qquad \text{(A1.14)}$$

avec :

$$Q_{i\alpha} = C_{i\alpha} - \frac{C_{i3}\,C_{3\alpha}}{C_{33}} \qquad \text{(A1.15)}$$

En utilisant l'hypothèse précédente on peut négliger les termes en S_3 d'où l'expression simplifiée suivante [cf. WHITNEY J.M., PAGANO J. (1970)] :

$$S_i = Q_{i\alpha}\,\varepsilon_\alpha \quad (i = 1,2,3 \text{ et } \alpha = 1,2) \qquad \text{(A1.16)}$$

Ce qui revient à définir une matrice de souplesse $[\bar{C}]$ voisine de (A1.8) mais dans laquelle on aurait supprimé la ligne 3 et la colonne 3 :

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.17)}$$

Cette matrice de souplesse s'inverse facilement pour donner finalement la matrice de raideur reliant les contraintes aux déformations en utilisant les relations suivantes :

$$C_{11} = \frac{\bar{C}_{22}}{\bar{C}_{11}\bar{C}_{22} - \bar{C}_{12}^{\,2}} \quad C_{22} = \frac{\bar{C}_{11}}{\bar{C}_{11}\bar{C}_{22} - \bar{C}_{12}^{\,2}} \quad C_{12} = \frac{-\bar{C}_{12}}{\bar{C}_{11}\bar{C}_{22} - \bar{C}_{12}^{\,2}} \qquad \text{(A1.18.a)}$$

$$C_{66} = \frac{1}{\bar{C}_{66}} \quad C_{44} = \frac{1}{\bar{C}_{44}} \quad C_{55} = \frac{1}{\bar{C}_{55}} \qquad \text{(A1.18.b)}$$

Son expression est donc la suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.19)}$$

Cette matrice des coefficients élastiques est exprimée dans le repère du matériau (1,2,3) c'est à dire dans le repère d'orthotropie ($\overrightarrow{e_{1k}}$, $\overrightarrow{e_{2k}}$, $\overrightarrow{e_{3k}}$) de chaque couche k (cf. figure I.4). Elle est de taille 5x5 vu l'hypothèse précédente et sera notée $[C_k]$ pour chaque couche k ($k = 1, N_c$).

Par ailleurs on tient compte du fait que l'on a une distribution des contraintes de cisaillement transverse de forme parabolique dans l'épaisseur de la coque mince et non une distribution constante comme le suppose la théorie de Mindlin (cf. chapitre I.4.1) et (II.51.b). Il convient donc, par exemple, de corriger les deux modules de cisaillement transverse (concernant la direction 3) en les multipliant par un coefficient correctif de cisaillement transverse défini par équivalence énergétique [REISSNER E. (1945) pp. 69] :

$$k_s = \frac{5}{6} \tag{A1.20}$$

Expression de la matrice d'élasticité en repère local élément

Nous allons travailler dans chaque couche (cas du composite multicouche orthotrope par couche) chaque couche étant repérée par un indice : k.

Il est nécessaire de traduire la matrice $[C_k]$ dans le repère local ou intrinsèque (x',y',z') au point considéré de l'élément (en général les points de Gauss) où elle s'appelera $[E'_k]$.

En un point d'intégration de la surface moyenne, on effectue une rotation d'angle α_k (pris positivement dans le sens trigonométrique autour de $\overrightarrow{V_3}$) autour de l'axe commun ($\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{V_3}$) afin d'amener $\overrightarrow{V_1}$ en coincidence avec $\overrightarrow{e_{1k}}$ (cf. figure I.4 et A1.1).

Au niveau de la couche k, en vue suivant $\overrightarrow{V_3}$ on a un système de repères locaux qui est :

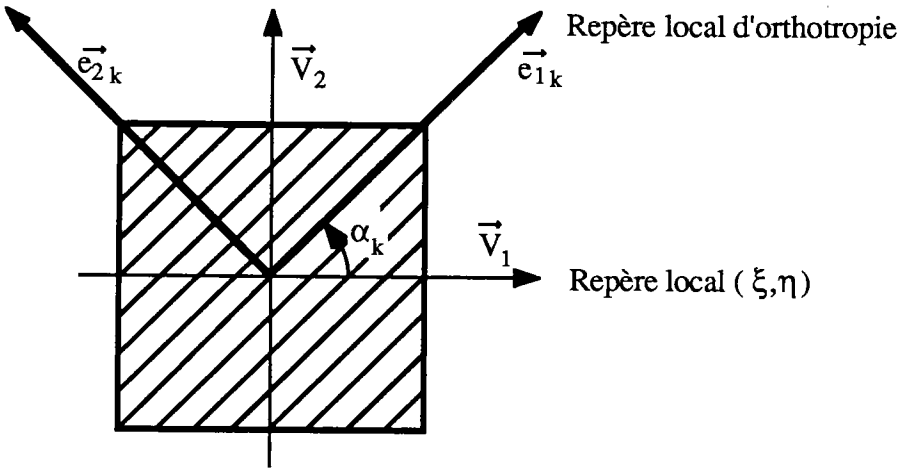


Figure A1.1 : Changement de base entre repères locaux pour le cas orthotrope.

La matrice de passage ou de rotation autour de $\overrightarrow{V_3}$ s'écrit :

$$[p_{\alpha_k}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_k & \sin\alpha_k & 0 \\ -\sin\alpha_k & \cos\alpha_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.21)}$$

En vertu des relations de changement de base pour les tenseurs $[\varepsilon]$ et $[S]$ on obtient l'expression suivante de la matrice de passage $[T_{\alpha k}]$ pour $[C_k]$ après suppression de la 3$^{\text{ème}}$ ligne et de la 3$^{\text{ème}}$ colonne toujours pour les raisons énergétiques précédentes (cf. Hypothèse H2 et A1.11) :

$$[T_{\alpha_k}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & cs & 0 & 0 \\ 2cs & -2cs & c^2-s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.22)}$$

Avec : $\quad c = \cos\alpha_k \quad \text{et} \quad s = \sin\alpha_k$

On peut se servir des résultats de l'annexe A2 pour trouver la forme de $[T_{\alpha k}]$.

L'expression finale de $[E'_k]$ est donc :

$$[E'_k] = [T_{\alpha_k}]^T [C_k]\ [T_{\alpha_k}] \qquad \text{(A1.23)}$$

Annexe A2

Changement de repère local / global

Lorsque l'on souhaite transformer la matrice $[E']$ des constantes élastiques du matériau dans le repère local (x',y',z') de l'élément vers le repère global (x,y,z) de la structure, il est nécessaire de multiplier cette matrice $[E']$ à droite par une matrice de passage appropriée $[T]$ et à gauche par sa transposée $[T]^T$.

Cette matrice est constituée des cosinus directeurs des vecteurs directeurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$ du repère local (x',y',z') au point considéré exprimés dans la base $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ du repère global (x,y,z) [cf. COOK R.D. (1981) p.150].

Les expressions de ces vecteurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_1} &= l_1 \overrightarrow{i} + m_1 \overrightarrow{j} + n_1 \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{V_2} &= l_2 \overrightarrow{i} + m_2 \overrightarrow{j} + n_2 \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{V_3} &= l_3 \overrightarrow{i} + m_3 \overrightarrow{j} + n_3 \overrightarrow{k} \end{aligned} \qquad \text{(A2.1)}$$

Les expressions de ces vecteurs $\overrightarrow{V_i}$ du repère local étant différentes aux différents points de la surface moyenne de l'élément de coque, l'expression de la matrice de passage va aussi être différente suivant le point considéré. (Il faut la recalculer aux différents points de Gauss ainsi qu'aux noeuds)

$[P]$ est la matrice de passage du repère (x',y',z') de base $B'(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ vers le repère (x,y,z) de base $B(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Elle peut donc s'écrire :

$$[P] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.2)}$$

La matrice $[T_\varepsilon]_{(6x6)}$ relative au changement de base d'une matrice $[E']_{(6x6)}$ est définie par :

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3m_3 & m_3n_3 & n_3l_3 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & n_1l_2 + n_2l_1 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & l_3m_1 + l_1m_3 & m_3n_1 + m_1n_3 & n_3l_1 + n_1l_3 \end{bmatrix} \quad \text{(A2.3)}$$

Pour plus de précisions voir [LESIEUR L. (1982) p. 61].

Le changement de repère pour la matrice des constantes élastiques (6x6) est donc défini par l'expression suivante :

$$\underset{(6x6)}{[E]} = \underset{(6x6)}{[T_\varepsilon]^T} \underset{(6x6)}{[E']} \underset{(6x6)}{[T_\varepsilon]} \quad \text{(A2.4)}$$

L'énergie de déformation due aux contraintes normales S_{33} étant négligeable (Hypothèse H2 et A1.11) [WHITNEY J.M., PAGANO N.J. (1970)] la matice $[E']$ est une matrice (5x5) et la 3ème ligne de la matrice $[T_\varepsilon]$ est omise. La matrice (6x5) ainsi definie est notée $[T]$ et la relation précedente est transformée comme suit :

$$\underset{(6x6)}{[E]} = \underset{(6x5)}{[T]^T} \underset{(5x5)}{[E']} \underset{(5x6)}{[T]} \quad \text{(A2.5)}$$

avec l'expression finale suivante pour $[T]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_2l_2 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & n_1l_2 + n_2l_1 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & l_3m_1 + l_1m_3 & m_3n_1 + m_1n_3 & n_3l_1 + n_1l_3 \end{bmatrix} \quad \text{(A2.6)}$$

Pour certaines parties de cette étude il nous sera nécéssaire de donner séparemment l'expression des déformations de menbrane et des déformations de cisaillement dans le repère local élément à partir des déformations dans le repère global structure en utilisant la relation :

$$\{\varepsilon'\} = [T]\ \{\varepsilon\} \quad \text{(A2.7)}$$

Aussi on sépare la matrice [T] comme suit :

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_p] \\ [T_{hp}] \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [T_p]_{(3x6)} \quad \text{et} \quad [T_{hp}]_{(2x6)} \tag{A2.8}$$

Avec l'expression suivante des matrices [T_p] et [T_{hp}] :

$$[T_p] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1m_1 & m_1n_1 & n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2m_2 & m_2n_2 & n_2l_2 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 & l_1m_2 + l_2m_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & n_1l_2 + n_2l_1 \end{bmatrix} \tag{A2.9}$$

$$[T_{hp}] = \begin{bmatrix} 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_2l_3 + n_3l_2 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 & l_3m_1 + l_1m_3 & m_3n_1 + m_1n_3 & n_3l_1 + n_1l_3 \end{bmatrix} \tag{A2.10}$$

On obtient ensuite les déformations dans le plan et hors plan en écrivant :

$$\{\varepsilon'_p\} = [T_p]\ \{\varepsilon\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon'_{hp}\} = [T_{hp}]\ \{\varepsilon\} \tag{A2.11}$$

On peut rappeler que l'on a l'écriture suivante des déformations en repère local :

$$\{\varepsilon'_p\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon'_{hp}\} = \begin{Bmatrix} \gamma'_{yz} \\ \gamma'_{zx} \end{Bmatrix} \tag{A2.12}$$

et celle des déformations en repère global :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{A2.13}$$

Annexe A3

Interpolation des déformations linéaires

Nous commencons par décrire la configuration Ω relativement à Ω^0 sans mentionner cet indice. Nous le reprendrons seulement à la fin en particularisant en F.L.T. ou F.L.A.

La matrice d'interpolation des déformation linéaires $[B_L]$ est définie de la manière suivante :

$$\{\varepsilon_L\} = [B_L]\ \{d_n\} \tag{A3.1}$$

Où $\{\varepsilon_L\}$ est le vecteur colonne des déformations linéaires en repère global :

$$\{\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y}+v_{,x} \\ v_{,z}+w_{,y} \\ w_{,x}+u_{,z} \end{Bmatrix} \tag{A3.2}$$

Et $\{d_n\}$ est le vecteur des déplacements nodaux :

$$\{d_n\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \tag{A3.3}$$

Nous allons construire la matrice d'interpolation des déformations linéaires $[B_L]$ en 3 étapes successives élémentaires.

Pour plus de précision voir [VLACHOUTSIS S. (1987) pp. 251–254].

1ère étape : Relation entre $\{u_{,\xi}\}$ et $\{d_n\}$

$$\{u_{,\xi}\} = \sum_{i=1}^{n} [L^i] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = [L]\ \{d_n\} \qquad \text{(A3.4.a)}$$

On retient l'expression : $\underset{(9x1)}{\{u_{,\xi}\}} = \underset{(9x5n)}{[L]}\ \underset{(5nx1)}{\{d_n\}}$ (A3.4.b)

Avec l'expression suivante du vecteur colonne des dérivées des déplacements exprimés dans le repère global (u,v,w) par rapport aux coordonnées locales ξ,η,t :

$$\{u_{,\xi}\} = \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,t} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,t} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,t} \end{Bmatrix} \qquad \text{(A3.5)}$$

La matrice $[L]$ va donc dépendre des n fonctions de forme $N_i(\xi,\eta)$ dérivées par rapport aux coordonnées locales du repère de l'élément : ξ et η.

La matrice $[L]$ est formée des n matrices $[L^i]$ $(i = 1,n)$ juxtaposées de la manière suivante :

$$\underset{(9x5n)}{[L]} = [\underset{(9x5)}{[L^1]}\ \underset{(9x5)}{[L^2]}\ \ldots\ldots\ \underset{(9x5)}{[L^n]}] \qquad \text{(A3.6)}$$

Les matrices $[L^i]$ $(i = 1,n)$ s'écrivent sous la forme suivante:

$$[L^i] = \begin{bmatrix} [R^{1i}] \\ [R^{2i}] \\ [R^{3i}] \end{bmatrix} \tag{A3.7}$$

les matrices $[R^{1i}]$, $[R^{2i}]$, $[R^{3i}]$ s'exprimant :

$$[R^{1i}] = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & 0 & t\frac{h_i}{c}N_{i,\xi}V_{1xi} & -t\frac{h_i}{c}N_{i,\xi}V_{2xi} \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 & t\frac{h_i}{c}N_{i,\eta}V_{1xi} & -t\frac{h_i}{c}N_{i,\eta}V_{2xi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_i}{c}N_iV_{1xi} & -\frac{h_i}{c}N_iV_{2xi} \end{bmatrix} \tag{A3.8.a}$$

$$[R^{2i}] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,\xi} & 0 & t\frac{h_i}{c}N_{i,\xi}V_{1yi} & -t\frac{h_i}{c}N_{i,\xi}V_{2yi} \\ 0 & N_{i,\eta} & 0 & t\frac{h_i}{c}N_{i,\eta}V_{1yi} & -t\frac{h_i}{c}N_{i,\eta}V_{2yi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_i}{c}N_iV_{1yi} & -\frac{h_i}{c}N_iV_{2yi} \end{bmatrix} \tag{A3.8.b}$$

$$[R^{3i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,\xi} & t\frac{h_i}{c}N_{i,\xi}V_{1zi} & -t\frac{h_i}{c}N_{i,\xi}V_{2zi} \\ 0 & 0 & N_{i,\eta} & t\frac{h_i}{c}N_{i,\eta}V_{1zi} & -t\frac{h_i}{c}N_{i,\eta}V_{2zi} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_i}{c}N_iV_{1zi} & -\frac{h_i}{c}N_iV_{2zi} \end{bmatrix} \tag{A3.8.c}$$

[cf. IMBERT J.F. (1984) p.250]

Ces n matrices $[L^i]$ font intervenir la géométrie de l'élément (cf. I.55) ainsi que les dérivées des fonctions de forme définies sur cet élément (cf. A6.1–2).

On a vu dans la formulation de l'intégration explicite à travers l'épaisseur de l'élément (cf. paragraphe III.1.4) que l'on est amené à séparer la matrice $[L]$ en 2 parties (III.82) :

$$[L(\xi,\eta,t)] = [L_0(\xi,\eta)] + t\,[L_1(\xi,\eta)] \tag{A3.9}$$

$[L_0]$ est la partie de $[L]$ indépendante de la variable t dans l'épaisseur de l'élément.

$t\,[L_1]$ est la partie de $[L]$ linéaire en fonction de t.

Les expressions des 2 matrices $[R^{1i}{}_0]$ et $[R^{1i}{}_1]$ correspondant aux 2 termes entrant dans le développement de $[R^{1i}]$ sont les suivantes sachant que l'écriture est similaire pour $[R^{2i}]$ et $[R^{3i}]$ en partant de (A3.8.b–c) :

$$[R^{1i}{}_0] = \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_i}{c} N_i V_{1xi} & -\frac{h_i}{c} N_i V_{2xi} \end{bmatrix} \qquad \text{(A3.10.a)}$$

$$[R^{1i}{}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & t\frac{h_i}{c} N_{i,\xi} V_{1xi} & -t\frac{h_i}{c} N_{i,\xi} V_{2xi} \\ 0 & 0 & 0 & t\frac{h_i}{c} N_{i,\eta} V_{1xi} & -t\frac{h_i}{c} N_{i,\eta} V_{2xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(A3.10.b)}$$

2ème étape : Relation entre $\{u_{,x}\}$ et $\{u_{,\xi}\}$

$$\underset{(9x1)}{\text{On a}\{u_{,x}\}} = \underset{(9x9)}{[Q]}\ \underset{(9x1)}{\{u_{,\xi}\}} \qquad \text{(A3.11)}$$

Avec l'expression suivante du vecteur colonne des dérivées des déplacements exprimées dans le repère global (u,v,w) par rapport aux coordonnées globales x,y,z du repère fixe :

$$\{u_{,x}\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix} \qquad \text{(A3.12)}$$

L'expression de la matrice $[Q]$ fait intervenir la matrice Jacobienne qui permet de passer des dérivations dans le repère local aux dérivations dans le repère global.

La définition de la matrice Jacobienne $[J]_{(3x3)}$ est la suivante (cf. A3.13) :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{A3.13}$$

Finalement tous calculs fait on obtient l'expression suivante de la matrice $[Q]$ en fonction de la matrice Jacobienne inverse $[J]^{-1}$:

$$[Q] = \begin{bmatrix} [J]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [J]^{-1} & [0] \\ [0] & [0] & [J]^{-1} \end{bmatrix} \tag{A3.14}$$

3ème étape : Relation entre $\{\varepsilon_L\}$ et $\{u_{,x}\}$

On a :
$$\underset{(6x1)}{\{\varepsilon_L\}} = \underset{(6x9)}{[H]}\ \underset{(9x1)}{\{u_{,x}\}} \tag{A3.15}$$

La matrice $[H]$ est donc simplement constituée de 0 et de 1 par identification et sa forme est la suivante :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 & 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0 & 1\ 0\ 0 & 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 & 0\ 0\ 1 & 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 & 0\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0 \end{bmatrix}_{(6x9)} \tag{A3.16}$$

L'expression finale de $[B_L]$ est donc la suivante en utilisant les 3 matrices précédentes $[L]$, $[Q]$ et $[H]$:

$$\underset{(6x5)}{[B_L]} = \underset{(6x9)}{[H]}\ \underset{(9x9)}{[Q]}\ \underset{(9x5n)}{[L]} \tag{A3.17}$$

C'est la matrice habituelle utilisée dans les chaines de calcul par éléments finis où l'on traite des cas de calcul linéaires.

La matrice $[B_L]$ dépend uniquement de référence par rapport auquel on la définit et est indépendante de l'état de déformation de la configuration courante.

En formulation lagrangienne totale (F.L.T.) nous étudierons la configuration Ω^2 en se référant à Ω^0. Nous pouvons donc écrire :

$$[B_L]_0 = [H]\,[Q]_0\,[L]_0 \qquad \text{(A3.18)}$$

car nous avons les définitions suivantes :

$[H]$ à termes constants

$[Q]_0\ (\xi, \eta, t, \overrightarrow{V_1}^0, \overrightarrow{V_2}^0)$

$[L]_0\ (\xi, \eta, t, \overrightarrow{R}^0)$

En formulation lagrangienne actualisée (F.L.A.) nous étudierons la configuration Ω^2 en se référant à Ω^1. Nous pouvons donc écrire :

$$[B_L]_1 = [H]\,[Q]_1\,[L]_1 \qquad \text{(A3.19)}$$

avec :

$[Q]_1\ (\xi, \eta, t, \overrightarrow{V_1}^1, \overrightarrow{V_2}^1)$

$[L]_0\ (\xi, \eta, t, \overrightarrow{R}^1)$

Annexe A4

Interpolation des déformations non linéaires

Nous suivons la même démarche qu'en annexe A3, à savoir que dans le but de simplifier ces développement, nous décrivons la configuration Ω à l'instant t relativement à Ω^0 sans indiquer l'indice 0 dans les expressions sauf à la fin pour préciser le résultat en F.L.T. et en F.L.A.

La matrice d'interpolation des déformation non-linéaires est définie de la manière suivante par analogie avec la formulation des déformations linéaires (cf. annexe A3) :

$$\{\varepsilon_{NL}\} = \frac{1}{2}[B_{NL}]\{d_n\} \tag{A4.1}$$

Où $\{\varepsilon_{NL}\}$ représente la partie non-linéaire des déformations complètes et la matrice $[B_{NL}]$ est fonction de l'état de déformation, contrairement à $[B_L]$, et dépend linéairement des déplacements nodaux $\{d_n\}$.

Il est donc nécessaire de mettre en place ici une formulation qui va traduire la dépendance de $[B_{NL}]$ vis-à-vis de l'état de déformation courant de la structure, c'est à dire installer la formulation matricielle de $[B_{NL}]$ faisant intervenir $\{d_n\}$.

On part de l'expression des déformations complètes de Green–Lagrange qui peuvent se mettre sous la forme suivante en séparant les termes linéaires des termes non–linéaires :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_{NL}\} \tag{A4.2}$$

D'après les résultats du chapitre II (cf. II.16) on a l'expression suivante des déformations de Green–Lagrange en notation simplifiée, sans référer à la F.L.T. ou à la F.L.A. :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ u_{,y}+v_{,x} \\ u_{,z}+w_{,x} \\ v_{,z}+w_{,y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left[u_{,x}{}^2+v_{,x}{}^2+w_{,x}{}^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[u_{,y}{}^2+v_{,y}{}^2+w_{,y}{}^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[u_{,z}{}^2+v_{,z}{}^2+w_{,z}{}^2\right] \\ u_{,x}u_{,y}+v_{,x}v_{,y}+w_{,x}w_{,y} \\ u_{,x}u_{,z}+v_{,x}v_{,z}+w_{,x}w_{,z} \\ u_{,y}u_{,z}+v_{,y}v_{,z}+w_{,y}w_{,z} \end{Bmatrix} \tag{A4.3}$$

Donc $\{\varepsilon_{NL}\}$ est le vecteur colonne des déformations non–linéaires que l'on identifie dans l'expression précédente :

$$\{\varepsilon_{NL}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left[u_{,x}{}^2+v_{,x}{}^2+w_{,x}{}^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[u_{,y}{}^2+v_{,y}{}^2+w_{,y}{}^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[u_{,z}{}^2+v_{,z}{}^2+w_{,z}{}^2\right] \\ u_{,x}.u_{,y}+v_{,x}.v_{,y}+w_{,x}.w_{,y} \\ u_{,y}.u_{,z}+v_{,y}.v_{,z}+w_{,y}.w_{,z} \\ u_{,z}.u_{,x}+v_{,z}.v_{,x}+w_{,z}.w_{,x} \end{Bmatrix} \qquad \text{(A4.4)}$$

Et $\{d_n\}$ est le vecteur des déplacements nodaux défini par :

$$\{d_n\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(A4.5)}$$

Nous allons construire la matrice d'interpolation des déformations non linéaires $[B_{NL}]$ en utilisant les résultats précédents mis en place dans l'annexe A3.

Chacune des 6 composantes du vecteur colonne $\{\varepsilon_{NL}\}$ est une forme quadratique en fonction des composantes de $\{u_{,x}\}$ et donc on peut mettre les composantes de $\{\varepsilon_{NL}\}$ sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{NL}{}^i = \frac{1}{2}\{u_{,x}\}^T[F_i]\{u_{,x}\} \qquad (i = 1,6) \qquad \text{(A4.6)}$$

Il est très facile de trouver l'expression des 6 matrices $[F_i]$ par identification, en utilisant l'expression (A4.4).

Pour simplifier l'écriture on peut remarquer que les matrices $[F_i]$ sont de la forme :

$$[F_i]_{(9x9)} = \begin{bmatrix} [f_i] & [0] & [0] \\ [0] & [f_i] & [0] \\ [0] & [0] & [f_i] \end{bmatrix} \tag{A4.7}$$

Les matrices $[f_i]_{(3x3)}$ sont à termes constants (0 ou 1). On obtient par identification pour les déformations longitudinales :

$$[f_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [f_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A4.8.a}$$

et pour les déformations transversales :

$$[f_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [f_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [f_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A4.8.b}$$

De plus on a l'expression suivante de $\{u_{,x}\}$ vecteur des dérivées des déplacements par rapport aux coordonnées globales qui est (cf. Annexe A3) :

$$\{u_{,x}\} = [Q]\,[L]\,\{d_n\} \tag{A4.9}$$

On en déduit donc l'expression de chacune des composantes de $\{\varepsilon_{NL}\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{d_n\}$:

$$\varepsilon_{NL}{}^{i} = \frac{1}{2}\{d_n\}^T[L]^T[Q]^T[F_i]\,[Q]\,[L]\,\{d_n\} \qquad (i = 1,6) \tag{A4.10}$$

On peut donc exprimer le vecteur $\{\varepsilon_{NL}\}$ qui a 6 composantes en fonction des 6 matrices $[F_i]$ associées aux 6 formes quadratiques précédentes. On représente ceci sous la forme suivante :

$$\{\varepsilon_{NL}\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} <d_n>\,[L]^T[Q]^T[F_1]\,[Q]\,[L]\,\{d_n\} \\ <d_n>\,[L]^T[Q]^T[F_2]\,[Q]\,[L]\,\{d_n\} \\ <d_n>\,[L]^T[Q]^T[F_3]\,[Q]\,[L]\,\{d_n\} \\ <d_n>\,[L]^T[Q]^T[F_4]\,[Q]\,[L]\,\{d_n\} \\ <d_n>\,[L]^T[Q]^T[F_5]\,[Q]\,[L]\,\{d_n\} \\ <d_n>\,[L]^T[Q]^T[F_6]\,[Q]\,[L]\,\{d_n\} \end{bmatrix} \tag{A4.11}$$

Le résultat final est donc la matrice d'interpolation des déformations non–linéaires $[B_{NL}]$ qui est donnée par :

$$[B_{NL}] = \begin{bmatrix} <d_n> [L]^T[Q]^T[F_1] [Q] [L] \\ <d_n> [L]^T[Q]^T[F_2] [Q] [L] \\ <d_n> [L]^T[Q]^T[F_3] [Q] [L] \\ <d_n> [L]^T[Q]^T[F_4] [Q] [L] \\ <d_n> [L]^T[Q]^T[F_5] [Q] [L] \\ <d_n> [L]^T[Q]^T[F_6] [Q] [L] \end{bmatrix} \qquad \text{(A4.12)}$$

Cette matrice possède 6 lignes de la forme : $<d_n> [L]^T \; [Q]^T \; [F_i] \; [Q] \; [L]$

$(1x5n) \; (5nx9) \; (9x9) \; (9x9) \; (9x9) \; (9x5n)$

$[B_{NL}]$ est donc bien une matrice 6 lignes, $5n$ colonnes, dépendant linéairement de $\{d_n\}$.

On montre au paragraphe III (cf. III.93) que cette matrice est indépendante de la variable t dans l'épaisseur soit :

$$[B_{NL}] = [B_{NL0}] \qquad \text{(A4.13)}$$

La matrice $[B_{NL}]$ contrairement à $[B_L]$ dépend de l'état de l'état de référence et de l'état de déformation.

Dans le cas de la F.L.T. et en utilisant les derniers résultats de l'annexe A3 nous avons l'expression suivante de la ligne i de $[B_{NL}]^2_0$:

$$<B_{NL}>^2_{0\ i} = <d_n>^2_0 [L]_0^T \; [Q]_0^T \; [F_i] \; [Q]_0 \; [L]_0 \qquad \text{(A4.14)}$$

Dans le cas de la F.L.A. et en utilisant les mêmes résultats nous avons l'expression suivante de la ligne i de $[B_{NL}]^2_1$:

$$<B_{NL}>^2_{1\ i} = <d_n>^2_1 [L]_1^T \; [Q]_1^T \; [F_i] \; [Q]_1 \; [L]_1 \qquad \text{(A4.14)}$$

Annexe A5

Première variation du vecteur des déformations

Les développements suivants sont envisagés dans le cadre de la F.L.T. en référant donc à Ω^0, mais on peut étendre ces résultats à la F.L.A. en faisant référence à Ω^1 (indice inférieur).

Les déformations linéaires sont définies par (cf. annexe A3) :

$$\{\varepsilon_L\}^2_0 = [B_L]_0 \{d_n\}^2_0 \tag{A5.1}$$

Où $[B_L]_0$ est une matrice à coefficients constants c'est-à-dire ne dépendant pas de $\{d_n\}$ mais seulement des coordonnées intrinsèques sur l'élément (ξ,η) et de la coordonnée dans l'épaisseur de la coque (t) ainsi que des composantes dans le repère global de la structure des vecteurs de base du repère local en chaque noeud i : $(V_{1xi},V_{1yi},V_{1zi},V_{2xi}, ...,V_{3zi})$.

L'expression de cette matrice est la suivante (cf. annexe A3) :

$$[B_L]_0 = [H]\,[Q]^0\,[L]^0 \tag{A5.2}$$

Les déformations non-linéaires sont définies par :

$$\{\varepsilon_{NL}\}^2_0 = \frac{1}{2}\,[B_{NL}]^2_0\,\{d_n\}^2_0 \tag{A5.3}$$

Où $[B_{NL}]_{(6x5n)}$ est une matrice à coefficients non constants s'exprimant linéairement en fonction de $<d_n>$ (cf. annexe A4) :

$$[B_{NL}]^2_0 = \begin{bmatrix} <d_n>^2_0\,[L]^{0T}[Q]^{0T}[F_1]\,[Q]^0\,[L]^0 \\ <d_n>^2_0\,[L]^{0T}[Q]^{0T}[F_2]\,[Q]^0\,[L]^0 \\ <d_n>^2_0\,[L]^{0T}[Q]^{0T}[F_3]\,[Q]^0\,[L]^0 \\ <d_n>^2_0\,[L]^{0T}[Q]^{0T}[F_4]\,[Q]^0\,[L]^0 \\ <d_n>^2_0\,[L]^{0T}[Q]^{0T}[F_5]\,[Q]^0\,[L]^0 \\ <d_n>^2_0\,[L]^{0T}[Q]^{0T}[F_6]\,[Q]^0\,[L]^0 \end{bmatrix} \tag{A5.4}$$

6 lignes (1x5n) (5nx9) (9x9) (9x9) (9x9) (9x5n)

Donc les déformations complètes (somme des déformations linéaires et des déformations non linéaires) peuvent s'écrire :

$$\{\varepsilon\}^2_0 = \{\varepsilon_L\}^2_0 + \{\varepsilon_{NL}\}^2_0 = [B_L]_0 \{d_n\}^2_0 + \frac{1}{2}[B_{NL}]^2_0 \{d_n\}^2_0 \qquad \text{(A5.5)}$$

Soit :

$$\{\varepsilon\}^2_0 = ([B_L]_0 + \frac{1}{2}[B_{NL}]^2_0) \{d_n\}^2_0 \qquad \text{(A5.6)}$$

Evaluation de $\{\delta\varepsilon\}$:

Considérons comme nous l'avons fait au paragraphe II.3 un déplacement virtuel nodal $\{\delta d_n\}^2$ entraînant des déplacements et déformations virtuelles dans la structure ainsi que des variations des autres quantités dépendantes de $\{d_n\}$ dans la formulation.

Par différentiation de l'expression précédente des déformations $\{\varepsilon\}^2_0$ on obtient les déformations virtuelles $\{\delta\varepsilon\}^2_0$:

$$\{\delta\varepsilon\}^2_0 = \delta[B_L]_0 \{d_n\}^2_0 + [B_L]_0 \{\delta d_n\}_0 + \frac{1}{2}\delta[B_{NL}]^2_0 \{d_n\}^2_0 + \frac{1}{2}[B_{NL}]^2_0 \{\delta d_n\}_0 \qquad \text{(A5.7)}$$

Or $\delta[B_L]_0 = [0]$ par définition car $[B_L]_0$ ne dépend pas de $\{d_n\}^2_0$ (cf. annexe A3).

La matrice Jacobienne $[Q]^0$ restant par définition inchangée dans la formulation Lagrangienne. D'où le résultat suivant :

$$\{\delta\varepsilon\}^2_0 = [B_L]_0 \{\delta d_n\}_0 + \frac{1}{2}\delta[B_{NL}]^2_0 \{d_n\}^2_0 + \frac{1}{2}[B_{NL}]^2_0 \{\delta d_n\}_0 \qquad \text{(A5.8)}$$

La composante i (i = 1,6) de $\delta[B_{NL}]\{d_n\}$ dans cette expression peut se transformer comme ci-dessous en notant $<B_{NL}{}^i>$ la $i^{ème}$ ligne de $[B_{NL}]$:

$$\delta<B_{NL}{}^i>^2_0 \{d_n\}^2_0 = <\delta d_n>_0 [L]^{0T}[Q]^{0T}[F_i] [Q]^0 [L]^0 \{d_n\}^2_0 \qquad \text{(A5.9)}$$

Du fait que les matrices $[L]^{0T}[Q]^{0T}[F_i] [Q]^0 [L]^0$ sont de manière évidente des matrices symétriques car les matrices $[F_i]$ le sont (cf. A4.7 et A4.8). On peut donc modifier l'écriture précédente en passant $\{d_n\}^2_0$ à gauche et $\{\delta d_n\}_0$ à droite.

On obtient donc :

$$\delta<B_{NL}{}^i>^2_0 \{d_n\}^2_0 = <d_n>^2_0 [L]^{0T}[Q]^{0T}[F_i] [Q]^0 [L]^0 \{\delta d_n\}_0 = <B_{NL}{}^i>^2_0 \{\delta d_n\}_0 \qquad \text{(A5.10)}$$

Donc on obtient finalement l'expression de la première variation des déformations complètes :

$$\{\delta\varepsilon\}^2{}_0 = [B_L]_0 \{\delta d_n\}_0 + [B_{NL}]^2{}_0 \{\delta d_n\}_0 \qquad \text{(A5.11)}$$

soit encore :

$$\{\delta\varepsilon\}^2{}_0 = ([B_L]_0 + [B_{NL}]^2{}_0) \{\delta d_n\}_0 \qquad \text{(A5.12)}$$

Cette expression fait intervenir les matrices $[B_L]_0$ et $[B_{NL}]^2{}_0$ qui ont été complètement définies en annexes A3 et A4.

Dans le cadre de la F.L.A. on remplacera l'indice inférieur "0" utilisé ici en F.L.T. par l'indice "1".

Annexe A6

Les fonctions de forme utilisées

1. Cas des éléments quadrangles : $n = 4k$

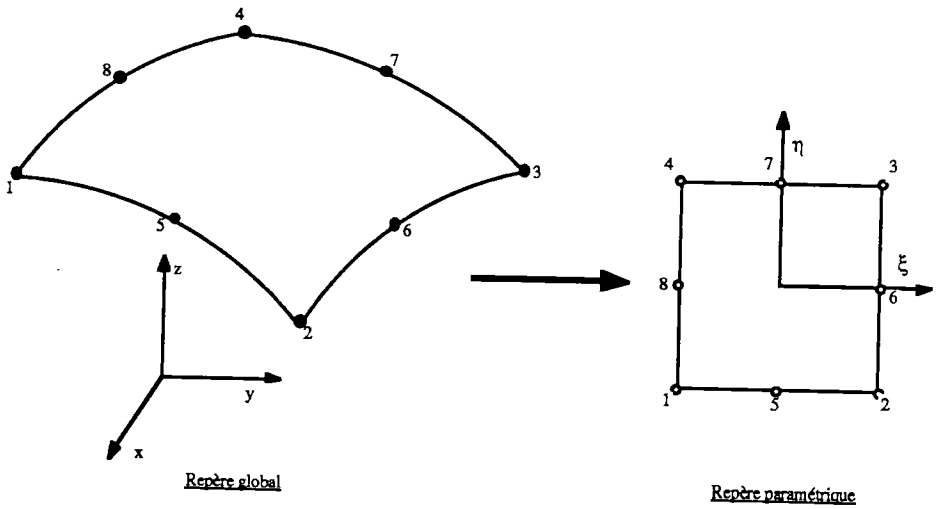
Les fonctions de formes utilisées pour la formulation isoparamétrique de l'élément de coque quadrangle 3D dégénéré sont les fonctions de forme du type SERENDIP définies sur les quadrilatères. On trouve des informations sur leur construction et leurs propriétés dans les ouvrages de ZIENKIEWICZ O.C. (1979) p.173 et IMBERT J.F. (1984) p.171.

Le cas des fonctions de forme sur les quadrilatères à 4, 8, 12 noeuds régulièrement répartis sur les cotés est présenté en commençant par l'élément à 8 noeuds qui est celui retenu dans les applications numériques et par défaut dans certains développements.

Si on appelle n le nombre de noeuds sur l'élément, on a $n = 4\,k$ avec k le degré des fonctions d'interpolation retenues.

Cas de l'élément à 8 noeuds : Fonctions de forme quadratiques

L'élément de coque utilisé est représenté sur la figure suivante A6.1 dans le repère global et ensuite dans le repère paramétrique (ξ,η) qui est celui utilisé pour la mise en place des fonctions de forme.



Repère global

Repère paramétrique

Le tableau suivant donne les coordonnées en repère local des 8 noeuds de l'élément quadratique :

NOEUDS	ξ	η
1	−1	−1
2	+1	−1
3	+1	+1
4	−1	+1
5	0	−1
6	+1	0
7	0	+1
8	−1	0

Tableau A6.1: Coordonnées des noeuds pour $n = 8$.

Les fonctions d'interpolation quadratiques de Serendip sont définies de la manière suivante [cf. ZIENKIEWICZ O.C. (1979) p.172] :

– Pour les noeuds sommets 1, 2, 3, 4 :

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \qquad \text{(A6.1)}$$

– Pour les noeuds intermédiaires 5, 6, 7, 8 :

$$\xi_i = 0 \qquad N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad (i = 5, 7) \qquad \text{(A6.2.a)}$$

$$\eta_i = 0 \qquad N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i) \quad (i = 6, 8) \qquad \text{(A6.2.b)}$$

Ces fonctions de forme vérifient :

$$N_i(\xi_j,\eta_j) = \delta_{ij} \qquad \text{(A6.3)}$$

Il est alors possible de définir facilement les dérivées des fonctions de forme précédentes par rapport à ξ et η pour les différents cas.

Cas de l'élément à 4 noeuds : Fonctions de forme linéaires

Elles correspondent au cas de l'élément possédant 4 noeuds sommets uniquement.

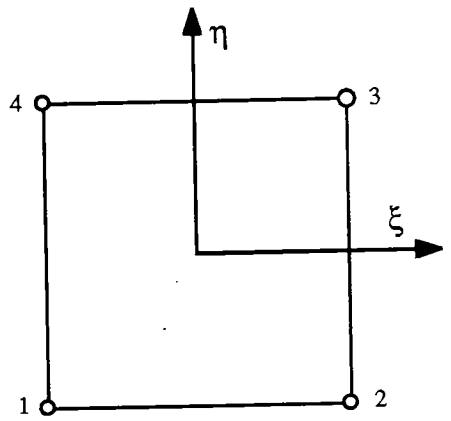


Figure A6.2 : Espace paramétrique élément quadrangle à 4 noeuds.

Dans ce cas on définit des fonctions de forme linéaires telles que N_i vaut 1 au noeud i et 0 aux autres noeuds.

L'expression de ces fonctions est donc :

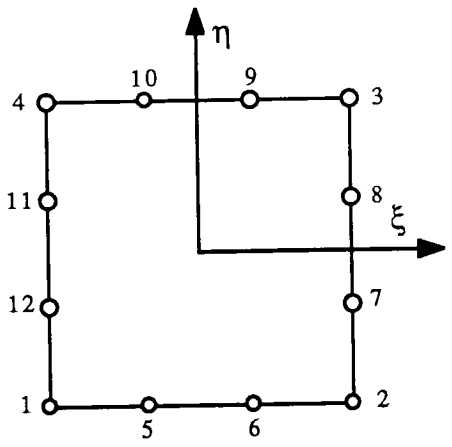
$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \tag{A6.4}$$

Avec les coordonnées des noeuds sommets définies dans le tableau précédent :

$$(\xi_i,\eta_i) \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{A6.5}$$

Cas de l'élément à 12 noeuds : Fonctions de forme cubiques

Elles correspondent au cas de l'élément possédant 2 noeuds intermédiaires par côté.



L'expression de ces fonctions est définie de la manière suivante :

– Pour les noeuds sommets :

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)[\,9(\xi^2 + \eta^2) - 10\,] \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad \text{(A6.6)}$$

– Pour les noeuds intermédiaires :

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{9}{32}(1 + 9\xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)[1 - \xi^2] \qquad (i = 5, 6, 9, 10) \qquad \text{(A6.7)}$$

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{9}{32}(1 + \xi\xi_i)(1 + 9\eta\eta_i)[1 - \eta^2] \qquad (i = 7, 8, 11, 12) \qquad \text{(A6.8)}$$

2. Cas des éléments triangles : $n = 3k$

Les éléments de coque triangulaires sont obtenus par dégénérescence des éléments de type quadrangle définis dans l'étude. Les fonctions de forme ont été définies par VEUBEKE J.H. (1965) et ARGYRIS B.F. (1968).

Cas de l'élément à 3 noeuds : Fonctions de forme linéaires

La dégénérescence consiste à confondre les noeuds 1 et 2 par exemple ce qui donne un élément triangle pour lequel le repère est modifié, l'axe η passant par le noeud 1 ou 2.

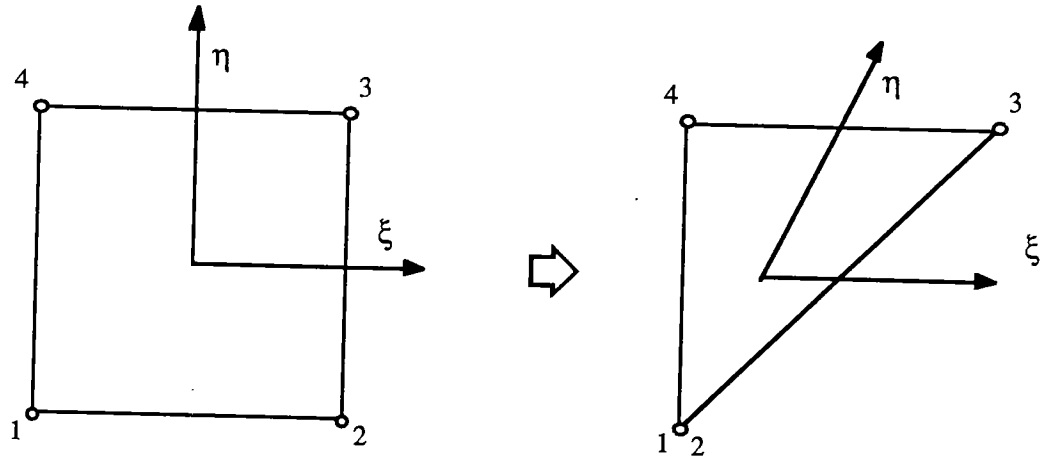


Figure A6.4 : Dégénérescence du quadrangle en triangle (élément linéaire).

Les 3 fonctions de forme se déduisent des 4 utilisées sur le quadrangle en écrivant le fait que les noeuds 1 et 2 ont mêmes coordonnées dans l'espace physique soit :

On obtient donc à nouveau une formulation isoparamétrique, les fonctions de forme étant misent en place sur des critères géométriques et utilisées ensuite tant pour la géométrie que la cinématique.

On obtient les fonctions de forme modifiées et liées aux fonctions de forme précédemment définies pour l'interpolation linéaire sur les quadrangles :

$$\begin{aligned} N^*_1 &= N^*_2 = N_1 + N_2 \\ N^*_3 &= N_3 \\ N^*_4 &= N_4 \end{aligned} \qquad \text{(A6.10)}$$

L'écriture finale est donc :

$$\begin{aligned} N^*_1 &= N^*_2 = \frac{1}{2}(1-\eta) \\ N^*_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N^*_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \qquad \text{(A6.11)}$$

[cf. BATHE K.J. (1982) pp. 220–230]

Cas de l'élément à 6 noeuds : Fonctions de forme quadratiques

Il suffit de considérer le schéma de la figure A6.5 et de confondre avec le même principe que précédemment les 3 noeuds de numéros : 1, 2, 5.

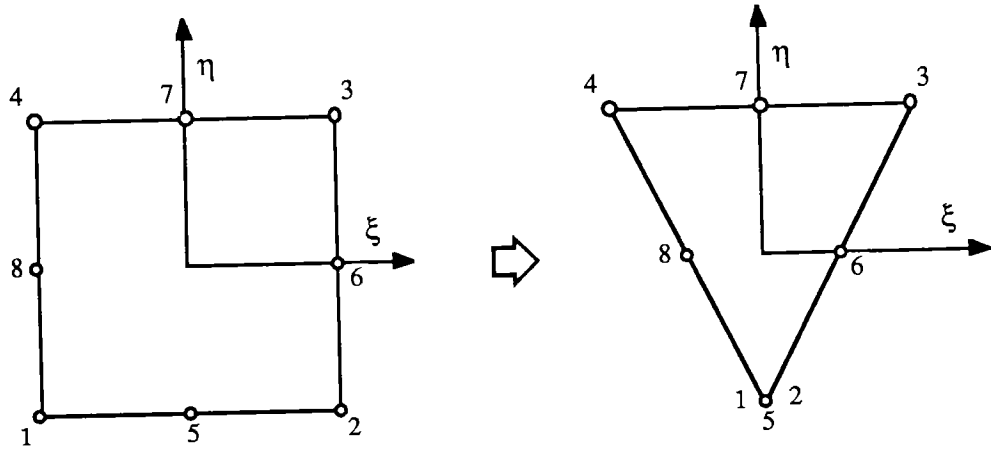


Figure A6.5 : Dégénérescence du quadrangle en triangle (élément quadratique).

Il est néanmoins nécéssaire de faire apparaître un terme correcteur Δh pour avoir des variations équivalentes sur les 3 côtés du triangle.

BATHE K.J. (1982) donne l'expression des 6 fonctions de forme :

$$
\begin{aligned}
&N^*_1 = N^*_2 = N^*_5 = N_1 + N_2 + N_5 = -\frac{1}{2}\,\eta\,(1-\eta) \\
&N^*_6 = N_6 = \frac{1}{2}\,(1-\eta^2)\,(1+\xi) \\
&N^*_8 = N_8 = \frac{1}{2}\,(1-\eta^2)\,(1-\xi) \\
&N^*_3 = N_3 + \Delta h = \frac{1}{4}\,(1+\xi)\,(1+\eta)\,(\xi+\eta-1) + \Delta h \\
&N^*_4 = N_4 + \Delta h = \frac{1}{4}\,(1-\xi)\,(1+\eta)\,(-\xi+\eta-1) + \Delta h \\
&N^*_7 = N_7 - 2\Delta h = \frac{1}{2}\,(1-\xi^2)\,(1+\eta) - 2\Delta h
\end{aligned}
\qquad \text{(A6.12)}
$$

Avec l'expression suivante de Δh :

$$
\Delta h = \frac{1}{8}\,(1-\xi^2)\,(1-\eta^2) \qquad \text{(A6.13)}
$$

Annexe A7

Le programme de calcul

La formulation mise en place dans cette étude a été implantée dans le code de calcul industriel ASELF (AéroSpatiale Eléments Finis) de la société Aérospatiale, Division Avions à Toulouse.

Démarche d'implantation

L'implantation de l'élément de coque dégénéré dans le cadre de l'analyse linéaire ayant déjà été faite lors d'une étude précédente [cf. VLACHOUTSIS S. (1987) pp. 263–266], la démarche d'implantation s'est faite en plusieurs étapes qui sont résumées ici :

– Implantation de l'opérateur non linéaire d'interpolation $[B_{NL}]$ et des matrices $[F_S]$ et $[F_\sigma]$ avec la formulation utilisant l'intégration explicite dans l'épaisseur au sein de la chaîne de calcul des matrices de rigidité.

– Implantation de la matrice de rigidité géométrique $[k_\sigma]$ en se servant des opérateurs précédents et de ceux mis en place dans le cadre de l'analyse linéaire ($[L]$, $[J]$, $[Q]$, $[B_L]$, ...).

– Intégration dans la chaîne d'analyse en flambage critique linéarisé (PSD8) qui utilise l'algorithme d'itération sur sous-espaces comme nous l'avons déjà mentionné (cf. paragraphe IV.1.2).

– Réalisation des tests numériques en flambage critique avec calculs des facteurs de charge critiques et des modes de flambage associés.

– Implantation de la matrice de rigidité non linéaire $[k_{NL}]$ pour permettre la construction de la matrice de rigidité tangente $[k_T]$ (cf. II.120 en F.L.T. et II.134 en F.L.A.) avec la formulation utilisant l'intégration explicite dans l'épaisseur.

– Implantation de la matrice $[\psi]$ donnant les efforts extérieurs $\{f_{int}\}$ avec la formulation utilisant l'intégration explicite dans l'épaisseur.

– Connection avec la chaîne d'analyse non linéaire (ASELF : PSD18) qui utilise la technique de pilotage des courbes charge/déplacement par la méthode de la longueur d'arc imposée (ASELF : PSD18) également en F.L.T.

– Implantation de nouvelles chaînes dans le code de calcul, permetant l'analyse en formulation lagrangienne actualisée (F.L.A.) pour les différentes techniques de pilotage précédentes. Ceci inclus l'écriture de programmes permetant l'actualisation de la géométrie, des contraintes, ainsi que leur stockage en chaque point de Gauss de chaque élément.

– Réalisation des tests numériques en analyse non linéaire complète sur des structures isotropes et composites multicouches.

Les différents programmes et procédures ont été écrits en FORTRAN 77 et instalés sur un ordinateur CDC Cyber 994 avec système d'exploitation NOS/VE puis sur CRAY XMP–14SE avec système d'exploitation COS et ensuite sur CRAY XMP–116 avec système d'exploitation UNICOS.

Stratégie de calcul

Toutes ces expressions matricielles des différentes parties de la matrice de rigidité tangente peuvent sembler complexes et coûteuses en temps de calcul mais il faut bien voir que l'on ne fait intervenir à chaque fois qu'un produit de matrices élémentaires simples, faciles à mémoriser et pour certaines déjà mises en place dans le code de calcul utilisé (ASELF) dans le cadre de l'analyse linéaire.

De plus on réutilise fréquemment les mêmes matrices élémentaires qui ne sont donc calculées qu'une seule fois en chaque point de Gauss d'un élément.

La stratégie est donc de définir pour chaque type de matériau ou couche élémentaire les matrices $[A_m]$, $[A_s]$, $[A_{mf}]$, $[A_f]$ et ensuite en chaque point de Gauss de chaque élément on définit le repère local nous permettant de calculer les matrices $[T_p]$ et $[T_{hp}]$.

Ensuite la définition des matrices $[B_{L0}]$, $[B_{L1}]$, et $[B_{NL}]$ nous permet de calculer les matrices $[B_{L0p}]$, $[B_{L0hp}]$, $[B_{L1p}]$ et $[B_{NLp}]$.

Il est alors possible de calculer la matrice tangente $[k_T]$ et le vecteur des efforts intérieurs $\{f_{int}\}$ en évaluant les matrices intermédiaires nécessaires.

Extensions à venir

La formulation lagrangienne actualisée, se prête bien à la généralisation au cadre de la plasticité de ces développements, limités ici au cadre de l'élasticité. En effet seules les lois de comportement se voient modifiées et la connaissance des contraintes réelles (de Cauchy) en chaque point de Gauss permet de suivre l'évolution de la plasticité au sein de chaque élément fini.

Pour cette raison, des développements à venir sont envisagés avec cet élément fini, sur la base de ces travaux, avec implantation dans le code de calcul.

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abréviations

Int. J. for Num. Meth. in Eng.	International Journal for numerical methods in engineering.
J. of Comp. Mat.	Journal of Composite Materials.
Comp. & Struc.	Computers & Structures.
Eng. Comput.	Engineering Computations.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.	Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering.
J. of Appl. Mech.	Journal of Applied Mechanics (Transactions of the ASME).
Int. J. Sol. Struc.	International Journal for Solids and Structures.
Comm. in Appl. Num. Meth.	Communications in Applied Numerical Methods.
Fin. El. in An. and Des.	Finite Elements in Analysis and Design.
J. of S. and Vib.	Journal of Sound and Vibration.
A. J. Roy. A. Soc.	The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society.
Int. J. Eng. S.	International Journal of Engineering Science.
J. Aircraft	Journal of Aircraft.
Com. P. A. Math.	Communications of Pure and Applied Mathematics.
Num. Math.	Numerische Mathematik.
ICCM	International Conference on Composite Materials.
AIME	Association
AIAA	American Institute of Aeronautics and Astronautics.
ASME	American Society of Mechanical Engineers.
ASTM	Association
SIAM	Society for Industrial and Applied Mathematics.

Bibliographie

Références Bibliographiques

1. AHMAD S., ZIENKIEWICZ O.C., IRONS B.M. (1970) : Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 2, pp. 419-451, 1970.

2. ALMROTH B.O., BROGAN F. (1972) : Bifurcation buckling as an approximation of the collapsed load for general shells. AIAA Journal, Vol. 10, N° 4, 04/1972, pp. 463-467.

3. ANDERSON R.E. (1979) : Effects of non-linear material behavior on postbuckling stiffness of laminated composite plates. AIAA Aircraft Systems and Technology meeting.20-22/08/1979. AIAA-79-1806, 1979, pp. 1-10, Conférence*.

4. ARGYRIS J.H. (1965) : Triangular elements with lineary varying strain for the matrix displacement method. J. Roy. Aero. Soc. Tech. Note, Vol. 69, pp. 711-713, Oct. 1965.

5. ARNOLD R.R. (1986) : Buckling, Postbuckling, and crippling of shallow-curved composite plates with edge stiffeners. J. Aircraft, Vol.23, N°. 7, 07/1986, pp. 589-598*.

6. ARNOLD R.R., YOO S.Y., MAYERS J. (1985) : Buckling, postbuckling, and crippling of shallow curved composite plates with edge stiffeners. 26th Structural dynamics & materials conference.April 1985. AIAA-85-0769, 1985, pp. 578-592*.

7. BANKS W.M. (1976) : The post buckling behavior of composite panels. International conference on composite materials.Genève 75. AIME, 1976, Vol.2, pp. 272-293, Conférence*.

8. BARBE J. (1983) : Mécanique des structures. Tome 1: Equations générales. Livre de cours - ENSAE Toulouse, 1983*.

9. BARBE J. (1983) : Mécanique des structures. Tome 2: Elasticité, Thermo-Elasticité, Visco-Elasticité. Livre de cours - ENSAE Toulouse, 1983*.

10. BARRAU J.J. (1985) : Calcul des structures en matériaux composites. Editions ENSAE Toulouse, 1985. Livre de cours*.

11. BATHE K.J. (1982) : Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall

12. BATHE K.J., DVORKIN E.N. (1986) : A formulation of general shell elements: The use of mixed interpolation of tensorial components. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 22, pp. 697-722, 1986.

13. BATHE K.J., HONG C.S. (1988) : Buckling behavior of laminated composite cylindrical panels under axial compression. Comp. & Struc., Vol.29, 1988, n°3, pp. 479-490*.

14. BATHE K.J., HO L.W. (1981) : A simple and effective element for analysis of general shell structures. Comp. & Struc., 1981, Vol.13, pp. 673-681*.

15. BATHE K.J., OZDEMIR H. (1975) : Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis. Comp. & Struc., Vol. 6, pp. 81-92, 1975.

16. BATHE K.J., OZDEMIR H. (1976) : Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis. Comp. & Struc., Vol. 6, pp. 81-92, 1976.

17. BATHE K.J., OZDEMIR H., WILSON E.L. (1974) : Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis. Structures and materials research, University of California, 1974*.

18. BATHE K.J., DVORKIN E.N. (1986) : A formulation of general shell elements – The use of mixed interpolation of tensorial components. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 22, pp. 697-722, 1986*.

19. BATOZ J.L. (1977) : Analyse non linéaire des coques minces élastiques de formes arbitraires par éléments triangulaires courbés. Thèse de docteur Es-Science. Université LAVAL Québec, 03/1977*.

20. BATOZ J.L. (1978) : Une évaluation des méthodes du type Newton-Raphson imposant l'accroissement d'un déplacement. Université de LAVAL / UTC, Sept. 1978*.

21. BATOZ J.L. (1981) : Grands déplacements et grandes rotations de poutres minces élastiques. Université de Technologie de Compiègne, 07/1981*.

22. BATOZ J.L., BEN TAHAR M. (1981) : Formulation et évaluation d'un nouvel élément quadrilateral à 12 D.D.L. pour la flexion des plaques minces. Université de Technologie de Compiègne, 04/1981*.

23. BATOZ J.L., CHATTOPADHYAY A., DHATT G.S. (1975) : Finite element large deflection analysis of shallow shells. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 10, N° 1, pp. 39-58, 1975.

24. BATOZ J.L., DHATT G. (1979) : Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. Short communications, 01/1979, p1262-1267*.

25. BATOZ J.L., DHATT G. (1986) : Plaques et coques par éléments finis. Colloque Paris 02-04 Juin 1986. Institut pour la promotion des sciences de l'ingénieur, 1986*.

27. BATOZ J.L., GUO Y.Q., POL P. (1988) : Grands déplacements de coques minces élasto-plastiques : modèles et exemples. U.T.C. Compiègne, Actes du congrès international StruCoMe 88, 2-4 Novembre 1988, Paris, Edition Hermès*.

28. BATOZ J.L., JAMEUX J.P. (1985) : Post-flambement et grands déplacements d'arcs plans. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 1985*.

29. BATOZ J.L., LARDEUR P. (1989) : Composite plate analysis using a new discrete shear triangular finite element. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 278, pp. 343-359, 1989*.

30. BATOZ J.L., LARDEUR P., CHATELAIN J. (1987) : Analyse non linéaire des coques stratifiées. Rapport contrat DRET N°. 85/1211, Mai 1987*.

31. BATOZ J.L., LARDEUR P., CHATELAIN J., DHATT G., FADARD M. (1985) : Analyse non linéaire des structures minces par éléments finis. Annexe B: Le programme de calcul. Rapport final contrat AEROSPATIALE TOULOUSE. Université de Technologie de Compiègne, Contrat AEROSPATIALE, Décembre 1985*.

32. BATOZ J.L., LARDEUR P., CHATELAIN J., DHATT G., FADARD M. (1985) : Analyse non linéaire des structures minces par éléments finis. Rapport final contrat AEROSPATIALE TOULOUSE. Université de Technologie de Compiègne, Contrat AEROSPATIALE, Décembre 1985*.

33. BAULD N.R., KHOT N.S. (1982) : Numerical and experimental investigations of the buckling behavior of composite panels. Comp. & Struc., 1982, Vol.15, pp. 393-403*.

34. BAULD N.R., KHOT N.S. (1983) : Further comparison of the numerical and experimental buckling behavior of composite panels. Comp. & Struc., 1983, Vol.17, pp. 61-68*.

35. BELLMAN R. (1973) : Methods of nonlinear analysis. Academic Press, New York, 1973*.

36. BERGAN G. (1977) : Finite elements in nonlinear mechanics. Vol. 1/2, Norvegian Institute of Technology, 1977*.

37. BERNADOU M. (1984) : Contribution on the numerical Analysis of thin shell problems. Springer-Verlag, 1984*.

38. BERRY D.T., YANG T.Y. (1986) : Simplified lattice beam elements for geometrically non-linear static, dynamic, and postbuckling analysis. AIAA, Vol.24, N°. 8, 08/1986, pp. 1346-1347*.

39. BOTTEGA W.J., MAEWALL A. (1983) : Some aspects of delamination buckling and growth in layered plates. Winter annual meeting 13-18/11/1983. ASME, 1983, pp. 179-186*.

40. BREBBIA C., CONNOR J. (1969) : Geometrically non-linear finite element analysis.

41. BROWN C.J., YETTRAM A.L. (1986) : The elastic stability of stiffened plates using the conjugate load/displacement method. Comp. & Struc., Vol.23, N°. 3, pp. 385-391, 1986*.

42. BRUSH DON O., ALMROTH BO O. (1975) : Buckling of bars, plates, and shells. MacGraw-Hill Inc., 1975*.

43. BUSHNELL D. (1981) : Buckling of shells, pitfall for designers. AIAA Journal, Vol. 19, N°. 3, Sept. 1981, pp. 1183-1226*.

44. BUSHNELL D.:PANDA-2. (1986) : Program for minimum weight design of stiffened composite locally buckled panels. AIAA-86-0855, 1986, pp. 29-58*.

45. CAREY G.F., KRISHNAN R. (1982) : On a nonlinear iterative method in applied mechanics. Part. 2. Comp. Meth. In Mech. and Eng., 1982, Vol.30, pp. 323-333*.

46. CARNOY E. (1980) : Etude de la stabilité des coques par éléments finis. THESE de doctorat. Université de Liège, 1980*.

47. CARNOY E., GUENNOUN. (1983) : Eléments cinematiques hybrides de coque de Marguerre. Comparaison avec une coque isoparamétrique. Laboratoire d'aéronautique de l'Université de Liège, Belgique, 1983*.

48. CELIA M.A., GRAY W.G. (1984) : An improved isoparametric transformation for finite element analysis. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 20, pp.1443-1459, 1984.

49. CELIA M.A., GRAY W.G. (1986) : Improved coordinate transformations for finite elements: The Lagrange cubic case. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 23, pp.1529-1545, 1986.

50. CHAMIS C.C. (1971) : Theorical buckling loads of Boron/Aluminium and Graphite/ Resin fiber composite anisotropic plates. NASA Technical Note, NASA TN D-6572, 12/1971, pp. 1-36*.

51. CHANG S.C., CHEN J.J. (1986) : Effectiveness of linear bifurcation analysis for predicting the nonlinear stability limits of structures. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol.23, 1986, pp. 831-846*.

52. CHAO W.C., REDDY J.N. (1984) : Analysis of laminated composite shells using a degenerated 3-D element. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 20, pp. 1991-2007, 1984.

53. CHAUDHRY Z.A. (1985) : Solution to eigenvalue problems of antisymmetric cross-ply and antisymmetric angle-ply laminated plates using affine transformations. THESE. Air Force Institute of Technology, University, 1985, pp. 1-89*.

54. CHAVANT C., COMBESCURE A., DEVOS J., HOFFMANN A., MEZIERE Y. (1982) : Flambage élastique et plastique des coques minces. Conférence Paris 19-21 Avril 1982. Institut pour la promotion de l'ingénieur, 1982*.

55. CHEN L.W. (1985) : Buckling of bimodulus composite thick plate. Conference "Failure prevention and reliability" New-York 09/83. ASME-85-11679, 1985, pp. 195-200, Conférence*.

56. CHOI C.K., SCHNOBRICH W.C. (1975) : Nonconforming finite element analysis of shells. Proc. ASCE, Vol. 101, N° EM4, pp. 447-464, Aug. 1975.

57. CHONG K.P., CHEN J.L. (1986) : Buckling of irregular plates by splined finite strips. AIAA, Vol.24, N° 3, 03/1986, pp. 534-536*.

58. COMBESCURE A. (1984) : Post buckling of structures: A static or dynamic problem ? Rapport DEMT/SMTS/LAMS, 1984, pp. 361-377*.

59. COOK R.D. (1981) : Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons, 1981.

60. COURANT R., HILBERT D. (1952) : Methods of mathematical physics. Interscience Publications, 1952.

61. CRISFIELD M.A. (1981) : A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". Comp. & Struc., Vol. 13, pp. 55-62, 1981.

62. CRUSE T.A. (1973) : Application of the boundary integral equation method to three dimensional stress analysis. Comp. & Struc.,Vol. 3, pp. 509-527, 1973*.

63. CUI E.J., DOWELL E.H. (1982) : Postbuckling behavior of rectangular orthotropic plates with two free side edges. D.M.A.E., 11/1982, pp. 429-446*.

64. DAWE D.J. (1971) : Curved finite elements in the analysis of shell structures. Proc. First Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Technology, J 1/4, Berlin, pp. 1-22, Sept. 1971.

65. DESAI C.S., ABEL J.F. (1972) : Introduction to finite element method. Van Nostrand Reinhold Company, 1972*.

66. DHATT G.S. (1970) : An efficient triangular shell element. AIAA J., Vol. 8, N° 11, pp. 2100-2102, Nov. 1970.

67. DOWLATYARI P., HAUG E. (1986) : Recherche sur le flambage de plaques minces en matériaux composites. Programme PAM-FISS Engineering System International, Contrat DRET, Mars 1986*.

68. DUC J., BELLET D. (1976) : Mécanique des solides réels: Elasticité. Cepadues Editions (Sup'Aéro), 1976*.

69. DVORKIN E.N., BATHE K.J. (1984) : A continuum-based four-node shell element for general non-linear analysis. Eng. Comput., Vol. 1, pp. 77-88, March 1984*.

70. ERIKSSON A. (1987) : Using eigenvector projections to improve convergence in non-linear finite element equilibrum iterations. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 24, 1987, pp. 497-512.

71. ERIKSSON A. (1989) : On linear constraints for Newton - Raphson corrections and critical point searches in structural finite elements problems. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 28, 1989, pp. 1317-1334*.

72. ESPING B.J.D. (1986) : The oasis structural optimisation system. Comp. & Struc., Vol. 23, 1986, N°. 3, pp. 365-377*.

73. FAFARD M., BATOZ J.L., DHATT G. (1990) : Algorithmes, règles et stratégies de résolution automatique pour l'analyse non linéaire des coques. Rapport de synthèse finale : Contrat DGA/DRET N° 86/093, Université de Technologie de Compiègne, Janvier 1990*.

74. FAFARD M., DHATT G., BATOZ J.L. (1990) : Anew discrete Kirchhoff plate / shell element with updated procedures. Comp. & Struc., Vol. 31, 1989, N°. 4, pp. 591-606*.

75. FEZANS G. (1981) : Analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques par éléments finis isoparamétriques tridimensionnels dégénérés. THESE de Doctorat - ENSAE Toulouse, 1981*.

76. FLÜGGE W. (1973) : Stresses in shells. 2 ème édition. Editions SPRINGER - 1973.

77. FREY F. (1978) : L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique, 1978.

78. GALLAGHER R.H. (1969) : Analysis of plate and shell structures. Proc. Symp. Appl. of Finite Element Methods in Civil Engineering, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, pp. 155-205, Nov. 1969.

79. GALLAGHER R. (1975) : Finite Element Analysis Prentice - Hall, New Jersey, 1975*.

80. GEIER B. (1977) : Erfahrungen mit der Eigenwertberechnung durch simultane Vektoriteration. ZAMM, Vol. 57, pp. 282-284, 1977.

81. GEIER B. (1988) : Buckling and post buckling of composite panels. Proceedings of the 16th Congr. Internat. Council Aeron. and Astron. Sci. (ICAS), Jerusalem, 1988 (Abbreviated version of GARTEUR/TP 029, Internal report DFVLR/IB 131-87/04, 1987)*.

82. GEIER B., KLEIN H. (1985) : Stability limits of orthotropic shallow sandwich shells. Computation and test results. Institute of Structural Mechanics, DFVLR, 1985, Braunschweig, GERMANY*.

83. GEIER B., ROHWER K. (1989) : On the analysis of the buckling behavior of laminated composite plates and shells. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 27, pp. 403-427, 1989*.

84. GEOFFROY P. (1981) : Evaluation d'un élément fini triangulaire pour l'analyse non linéaire statique des coques minces. THESE de docteur - ingénieur, Université de

85. GEOFFROY P., BATOZ J.L. (1983) : Evaluation d'un élément fini triangulaire pour l'analyse non linéaire des coques minces. Rapport U.T.C. Compiègne, 04/1983.

86. GERMAIN P. (1973) : Cours de mécanique des milieux continus. Tome 1- Théorie générale. MASSON 1973*.

87. GERMAIN P., MULLER P. (1980) : Introduction à la mécanique des milieux continus. MASSON 1980*.

88. GIRARD R. (1981) : Flambage des structures composites. La recherche Aérospatiale, N°. 5, 09/1981, p333-343*.

89. GIRARD R., LOUIS D., OHAYON R. (1987) : Etudes dans le domaine non linéaire, des plaques composites stratifiées soumises à un chargement de compression. O.N.E.R.A. Rapport Technique N°. 17/3542 RY 070 R, Décembre 1987*.

90. GIRARD R., OHAYON R. (1987) : Algorithmes de calcul du flambage des structures composites. O.N.E.R.A. Rapport Technique N°. 15/3542 RY 062 R, Décembre 1987*.

91. GIRARD R., OHAYON R. (1987) : Un élément de coque multicouche pour le calcul des structures composites. O.N.E.R.A. Rapport Technique N°. 14/3542 RY 051 R, Janvier 1987*.

92. GIRARD R., OHAYON R. (1987) : Un module de calcul non linéaire pour les structures composites. O.N.E.R.A. Rapport Technique N°. 15/3542 RY 062 R, Mars 1987*.

93. HAAS D.J., LEE S.W. (1987) : A nine-node assumed-strain finite element for composite plates and shells. Comp. & Struc., Vol. 26, pp. 445-452, 1987.

94. HAHN H.T., WILLIAMS J.G. (1986) : Compression failure mechanisms in unidirectional composite. 7 th conference on composite materials. ASTM STP893, 1986, pp. 115-139, Conférence*.

95. HORRIGMOE G. (1977) : Finite element instability analysis of free formed shells. Report N° 77-2, Norvegian Institute of Technology, Trondheim, May 1977.

96. HOUSNER J.M., STEIN M. (1975) : Numerical analysis and parametric studies of the buckling of composite orthotropic in compression and shear panels. NASA Technical Paper, TN D-7996, 10/1975*.

97. HUANG H.C. (1986) : Defect-free shell elements, PhD Dissertation, Departement of Civil Engineering, University College of Swansea, 1986.

98. HUANG H.C. (1987) : Implementation of assumed strain degenerated shell elements. Comp. & Struc., Vol. 25, pp. 147-155, 1987.

99. HUGUES T.J.R., LIU W.K. (1981) : Nonlinear finite element analysis of shells : Part I - Three-dimensional shells. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 26, pp. 331-362, 1981*.

101. IMBERT J.F. (1984) : Analyse des structures par éléments finis. Cepadues Editions (Sup'Aéro), Edition N°. 2, 1984*.

102. JANG J., PINSKY P.M. (1987) : An assumed covariant strain based 9-node shell element. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 24, pp. 2389-2411, 1987.

103. JENSEN D.W., LAGACE P.A. (1986) : Influence of mechanical couplings on the buckling and postbuckling behavior of anisotropic plates. AIAA-86-0880, 1986, pp. 132-141*.

104. JIANG Y.Q. (1985) : Optimum design of laminated circular cylindrical shells with fiber reinforced composite materials. ICCM-5, AIME, 07/1985, pp. 1211-1219*.

105. JUN S.M., HONG C.S. (1988) : Buckling behavior of laminated composite cylindrical panels under axial compression. Comp. & Struc., Vol. 29, N° 3, 1988, pp. 479-490*.

106. KAPANIA R.K., YANG T.Y. (1986) : Formulation of an imperfect quadrilateral, doubly curved shell element for postbuckling analysis. AIAA Journal, Vol. 24, N° 2, 02/1986, pp. 310-320*.

107. KIKUCHI F., OHYA H., ANDO Y. (1973) : Application of finite element method to axisymmetric buckling of shallow spherical shells under external pressure. J; of Nuclear Science and Technology, Japan, Vol. 10, N° 6, pp. 339-347, June 1973.

108. KITTEL C. (1972) : Introduction à la physique de l'état solide. Editions Dunod, Paris, 4ème édition, 1972.

109. KNIGHT N.F., STARNES J.H. (1985) : Postbuckling behavior of selected curved stiffened graphite epoxy panels loaded in axial compression. 26th Structural Dynamics & Material Conference, April 85. AIAA-85-0768, 1985, pp. 565-577, Conférence*.

110. KNIGHT N.F., STARNES J.H. (1985) : Postbuckling behavior of selected curved stiffened graphite-epoxy panels loaded in axial compression. AIAA-85-768, 1985, p565-575*.

111. KNIGHT N.F., STARNES J.H. (1986) : Postbuckling behavior of selected graphite-epoxy cylindrical panels loaded in axial compression. Presented at the AIAA/ASME/ASCE/AHS 27th Structures, Structural Dynamics and Material Conference, San Antonio, May 19-21 1986. AIAA-86-0881, 1986, pp. 142-158*.

112. KOGANTI MOHANA RAO (1985) : Buckling analysis of anisotropic sandwich plates faced with fiber-reinforced plastics. AIAA Journal, Vol.23, N°. 8, 08/1985, pp. 1247-1253*.

113. KOITER W.T. (1966) : On the non-linear theory of thin elastic shells. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wentensch., Amsterdam, Series B., Vol. 69, pp. 1-54, 1966.

114. KOITER W.T. (1970) : The stability of elastic equilibrum. Technical Report AFFDL-TR-70-25, (AD 704124), (Originaly: Thesis Delft, 1945), 02/1970.

116. KRAUSE G. (1989) : Maguerre - Mindlin shallow shell elements. Eng. Comput., Vol. 6, 1989/03, pp. 44-48*.

117. LAGRANGE J.L. (1853) : Mécanique analytique. Tome 1, 3ème édition. Mallet - Bachelier - 1853.

118. LANDAU L., LIFCHITZ E. (1967) : Théorie de l'élasticité. Edition MIR, Moscou 1967.

119. LAROZE S. (1988) : Mécanique des structures, Tome 2 : Poutres. Editions Eyrolles - Masson, 2e édition, 1988*.

120. LAROZE S., BARRAU J.J. (1988) : Mécanique des structures, Tome 1 : Solides élastiques, plaques et coques. Editions Eyrolles - Masson, 2e édition, 1988*.

121. LASCHET G., GILMAN H. (1983) : Description d'un élément multicouche specialisé pour l'étude des coques. Laboratoire d'aéronautique de l'Université de Liège, Belgique, 1983*.

122. LASCHET G., GODINAS A., JETTEUR P. (1981) : Développement d'un élément fini tridimensionnel, spécialisé pour l'étude des coques dans le domaine non linéaire. Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de Liège. L.T.A.S. - Juin 1981*.

123. LASCHET G., JEUSETTE J.P., BECKERS P. (1989) : Homogeneization and pre-integration techniques for multilayer composite and sandwich finite element models. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 27, pp. 257-269, 1989*.

124. LASHET G., JEUSETTE J.P., BECKERS P. (1989) : Homogenization and pre-integration techniques for multilayer composite and sandwich finite element models. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 27, pp. 257-269, 1989.

125. LEISSA A.W. (1983) : Buckling of composite plates. Composite structures, Vol.1, 1983, pp. 51-66*.

126. LEISSA A.W. (1985) : Buckling of laminated composite plates and shell panels. Air Force Wright Aeronautical Laboratories, 01/1985, pp. 1-439*.

127. LEKHNISKII S.G. (1963) : Theory of elasticity of an anisotropic elastic body. Holden-Day Inc., San Fransisco, 1963.

128. LESIEUR L., MEYER Y., JOULAIN C., LEFEBVRE J. (1982) : Algèbre linéaire. Géométrie. Editions Armand Colin, 1982.

129. LOVE A.E.H. (1944) : A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover Publications, 1927/44.

130. LYONS P., HOLSGROVE S. (1989) : Finite Element Benchmarks for 2D Beams and Axisymmetric Shells Involving Geometric Nonlinearity (FEBNLGBAS). NAFEMS (National Agency for Finite Element Methods & Standards), Departement of Trade and

131. MacDANIEL J.K. (1974) : Analytical shear buckling investigationof curved composite panels. THESE. Air Force Institute of Technology, University, AD-A15-138*.

132. Mac NEAL R.H. (1978) : A simple quadrilateral shell element. Comp. & Struc., Vol. 8, pp. 175-183, 1978.

133. MacNEAL R.H., HARDER R.L. (1985) : A proposed standard set of problems to test finite elements accuracy. Fin. El. in An. and Des., Vol. 1, pp. 3-20, 1985.

134. MAHE M., SOURISSEAU J.C., CZEKAJSKI C. (1989) : Analyse non linéaire géométrique des coques par un élément fini isoparamétrique dégénéré à 40 degrés de liberté, avec intégration explicite dans l'épaisseur. Actes du 9ème Congrès Français de Mécanique, L.P.M.M., METZ, Sept. 1989*.

135. MAHE M., SOURISSEAU J.C., OHAYON R. (1991) : Explicit thickness integration for three-dimensional shell elements applied to non-linear analysis. Int. J. for Num. Meth. in Eng., à paraitre*.

136. MAHE M. (1989) : Elément fini de coque à 8 noeuds pour l'analyse des structures minces en post-flambement. Note technique interne Aérospatiale, N.T. 436-086/89, 07/1989*.

137. MAHE M. (1991) : Flambage et post-flambage des éléments de coques multicouches et sandwiches utilisant l'intégration explicite - Formulation Lagrangienne Totale. Note technique interne Aérospatiale, N.T. 436-083/91, 05/1991*.

138. MALVERN L.E. (1969) : Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice-Hall, New Jersey.

139. MARLOWE M.B., FLÜGGE W. (1968) : Some new developments in the foundations of shell theory. Lockheed Missiles and Space Company Report, LMSC-6-78-68-13, pp. 1-164, May 1968.

140. MATTIASSON K. (1981) : Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 17, pp. 145-153, 1981.

141. MESCALL J.F. (1965) : Large deflections of spherical shells under concentrated loads. J. of Appl. Mech. (Transaction of the ASME), pp. 936-938, 12/1965.

142. MILFORD R.V., SCHNOBRICH W.C. (1985) : The application of the rotating crack model to reinforced concrete shells. Comp. & Struc., Vol. 20, pp. 225-234, 1985.

143. MILFORD R.V., SCHNOBRICH W.C. (1986) : Degenerated isoparametric elements using explicit integration. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 23, pp. 133-154, 1986*.

144. MINDLIN R.D. (1951) : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic-elastic plates. J. of Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951.

146. MOHSIN M.E., SADEK E.A. (1980) : On the dynamics of plates using a beam analog. Comp. & Struc., Vol. 12, 1980, pp. 267-272*.

147. MORLEY L.S.D. (1984) : Hellinger-Reissner principles for plate and shell finite elements. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 20, 1984, pp. 773-779*.

148. MOSER K., SCHMID A. (1989) : Composite structures - Modelling finite element analysis and evaluation. Comp. & Struc., Vol. 30, pp. 33-56, 1989.

149. NAGHDI P.M. (1963) : Foundations of elastic shell theory. Progress in Solid Mechanics, Vol. IV, Chap. 1, Ed. Sneddon I.N., North Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 1-90, 1963.

150. NAGHDI P.M. (1972) : The theory of shells and plates. Encyclopedia of Physics, Vol. VI a2, Mechanics of solids II, pp. 425-640, Springer Verlag, 1972.

151. NARAYANASWAMI D.R., COLE J.G. (1985) : Layered composite analysis capability for NASTRAN. NASA CP-2373, 1985, pp. 67-109*.

152. NAVARATNA D.R., PIAN T.H.H., WITMER E.A. (1968) : Stability analysis of shells of revolution by the finite-element method. AIAA J., Vol. 6, N° 2, pp. 355-361, 02/1968.

153. NEMETH M.P. (1984) : A buckling analysis for rectangular orthotropic plates with centrally located cutouts. NASA Technical Paper, 86263, 1984, pp. 1-43*.

154. NEMETH M.P. (1985) : Importance of anisotropic bending stiffnesses on buckling of symmetrically laminated composite plates loaded in compression. AIAA-85-0673, 1985, pp. 267-273*.

155. NOOR P., PETERS J.M. (1989) : Buckling and postbuckling analyses. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 27, pp. 389-399, 1989.

156. NOVOZHILOV V.V. (1953) : Foundations of the non linear theory of elasticity. Graylock Press, 1953.

157. OÑATE E., HINTON E., GLOVER N. (1978) : Techniques for improving the performance of AHMAD shell elements. Proceedings of the 2nd International Conference held in Madrid in 1978.

158. PADOVAN J. (1985) : Solving postbuckling collapse of structures. Finite Elements in Analysis and Design, 1, 1985, pp. 363-385*.

159. PANAYOTOUNAKOS D.E., THEOCARIS P.S. (1986) : Nonlinear and buckling analysis of continious bars lying on rigid supports. AIAA Journal, Vol. 24, N°. 3, 03/1986, pp. 479-484*.

160. PANDA S., NATARAJAN R. (1981) : Analysis of laminated composite shell structures by finite element method. Comp. & Struc., Vol. 14, N° 3-4, pp. 225-230, 1981.

162. PAPADRAKAKIS M. (1981) : Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. Comp. & Struc., Vol. 14, 1981, pp. 393-402.

163. PAPADRAKAKIS M., GANTES C.J. (1989) : Preconditionned conjugate and secant Newton methods for non linear problems. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 28, 1989, pp. 1299-1316*.

164. PARISH H. (1978) : Geometrical nonlinbear analysis of shells. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 14, pp. 159-178, 1978*.

165. PARISH H. (1978) : Geometrical non linear analysis of shells. Comp. Meth., 14, pp. 159-178, 1978*.

166. PARISH H. (1979) : A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration. Comp. Meth., Vol. 20, pp. 323-350, 1979.

167. PAWSEY S.F., CLOUGH R.W. (1971) : Improved numerical integration of thick shell finite elements. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 3, pp.575-586, 1971.

168. PETIAU C. (1978) : Mise au point d'un algorithme performant de calcul des équilibres post-flambement. Avions Marcel Dassault, Contrat DRET, Nov. 1978*.

169. PETIAU C., CORNUAULT C. (1985) : Algorithmes efficaces pour le calcul des équilibres Post- Flambement. 3ème colloque structures, Bastia-France. Actes du 3ème colloque structures, 11/1985, pp. 109-127, Conférence*.

170. PETIAU C., LECINA G. (1983) : Tendencies in optimization of aircraft structures. 62th panel meeting. Avions Marcel Dassault*.

171. PIAN T.H.H. TONG P. (1971) : Variational formulation of finite displacement analysis. Proc. IUTAM Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures, Université de Liège, Tome I, pp. 43-63, 1971.

172. POL P., BATOZ J.L., ROELANDT J.M. (1990) : Grands déplacements et instabilité des coques minces élastoplastiques. Actes STRUCOME 1990, Paris 20-21-22 Novembre 1990, Editions DATAID, AS & I*.

173. RAMM E. (1982) : The Riks/Wempner approach - An extension of the displacement control method in nonlinear analyses. Recent Advances in Non-linear Computational Mechanics, Pineridge Press, Swansea, 1982.

174. RAMM E., BATHE K.J., WILSON E.L. (1975) : Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 9, pp. 353-386, 1975.

175. REDDY A.D., REHFIELD L.W., BRUTTOMESSO R.I. (1985) : Local buckling and crippling of thin-walled composite structures under axial compression. 26th Structural Dynamics & Materials Conference, April 85. AIAA-85-0672, 1985, pp. 804-810.

176. REISSNER E. (1945) : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. of Appl. Mech., ASME, Vol. 12, pp. 69-77, 1945.

177. RIKS E.(1979) : An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. Int. J. Sol. Struc., Vol. 15, pp. 529-551, 1979.

178. ROMEO G. (1985) : Experimental investigation on advanced composite stiffened structures under uniaxial compression and bending. 26th Structural Dynamics & Material Conference, April 85. AIAA-85-0674, 1985, pp. 283-292, Conférence*.

179. ROUSE M. (1985) : Postbuckling of flat unstiffened graphite-epoxy plates loaded in shear (NASA). 26th struc. dyn. & mat. conf., 04/1985, pp. 605-616, Conférence*.

180. RUTISHAUER H. (1969) : Computational aspects of F.L. Bauer's simultaneous iteration method. Numer. Math. Vol. 13, pp. 4-13, 1969.

181. SAIGAL S., KAPANIA R.K., YANG T.Y. (1986) : Geometrically nonlinear finite element analysis of imperfect laminated shells. Journal of Composite Materials, Vol. 20, 03/1986, pp. 197-213*.

182. SALEEB A.F., CHANG T.Y., GRAF W. (1987) : A quadrilateral shell element using a mixed formulation. Comp. & Struc., Vol. 26, pp. 787-803, 1987.

183. SAMUELSON L.A., VESTERGREN P., KNUTSSON L., WANGBERG K.G., ... (1980) : Stability and ultimate strength of carbon fiber reinforced plastic panels. 3rd International Conference on composite materials.Paris 26-29/08/80. ICCM 3, Vol. 1, pp. 327-341, Conférence*.

184. SANDERS J.L. (1963) : Nonlinear theories for thin shells. Quart. Appl. Math., N° 21, pp. 21-36, 1963.

185. SCHMIT L.A., RAMANATHAN R.K. (1978) : Multilevel approach to minimum weight design including constraints. AIAA Journal, Vol. 16, N°. 2, 02/1978, pp. 97-104.

186. SEIDE P. (1975) : Compressive buckling of sandwich plates on longitudinal elastic line supports. AIAA Journal, Vol.13, N°. 6, 06/1975, pp. 740-743*.

187. SEIFERT G.R. (1984) : The effect of center delamination on the instability of composite cylindrical panels. THESE. Air Force Institute of Technology, AD-A153 494, 12/1984*.

188. SHIVAKUMAR K.N., WHITCOMB J.D. (1985) : Buckling of a sublaminate in a quasi-isotropic composite laminate. Journal of Composite Materials, Vol. 19, 01/1985, pp. 2-18*.

189. SIMO J., FOX D.D., RIFAI M.S. (1988) : Formulation and computational aspects of a stress resultant geometrically exact shell model. Proc. of the Int. Conf. Comput. Eng. Sci., Atlanta, April 1988.

190. SNELL M.B., MORLEY N.T. (1985) : The compression buckling behavior of highly

191. SNELL M.B., MORLEY N.T. (1985) : The compression buckling behavior of hightly curved panels of carbon fiber reinforced plastics. ICCM-5, AIME, 07/1985, p1327-1355*.

192. STANDER N., MATZENMILLER A., RAMM E. (1989) : An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. Eng. Comput., 03/1989, Vol. 6, pp. 58-66*.

193. STANDER N., MATZENMILLER A., RAMM E. (1989) : An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. Eng. Comput., Vol. 6, pp. 58-66, 1989*.

194. STANLEY G.M. (1985) : Continuum-based shell elements. PhD Dissertation, Departement of Applied Mechanics, Stanford University, Palo Alto, CA, 1985.

195. STANLEY G.M., PARK K.M., HUGUES T.J.R. (1986) : Continuum-based resultant shell elements. Finite Element Methods for Plates and Shells Structures, Vol. 1, Element Technology, Pineridge Press, Swansea, pp. 1-45, 1986.

196. STEIN M. (1983) : Postbuckling of orthotropic composite plates loaded in compression. AIAA Journal, Vol. 21, N°. 12, 12/1983, pp. 1729-1735*.

197. STEIN M. (1985) : Postbuckling of long orthotropic plates under combinated loading. AIAA Journal, Vol. 23, N°. 8, 08/1985, pp. 1267-1272*.

198. STEIN M., JEGLEY C. (1985) : Effects of transverse shearing on cylindrical bending, vibration, and buckling of laminated plates. 26th Structural Dynamics & Material Conference, April 85. AIAA-85-0744, 1985, pp. 505-515, Conférence*.

199. STEIN M., STEIN P.A. (1983) : A solution procedure for behavior of thick plates on a nonlinear foundation and postbuckling behavior of long plates. NASA Technical Paper, 09/83, pp. 1-38*.

200. STORCH J., GATES S. (1983) : Tranverse vibration and buckling of a cantilevered beam with tip body under constant axial base acceleration. NASA Technical Report, CSDL-R-1675, 10/1983, pp. 1-58*.

201. STROUD J., GREENE W.H., ANDERSON M.S. (1984) : Buckling loads of stiffened panels subjected to combined longitudinal compression and shear: Results obtained with PASCO, EAL, STAGS computer programs. NASA Technical Paper, 01/84, pp. 1-76*.

202. SURANA K.S. (1983) : Geometrically non-linear formulation for the curved shell elements. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 19, pp. 549-566, 1983*.

203. TANAKA K., KONDOH K., ATLURI S.N. (1985) : Instability analysis of space trusses using exact tangent stiffness matrices. Finite Elements in Analysis and Design , Vol. 1, 1985, pp. 291-311*.

204. THANEDAR P.B., ARORA J.S., TSENG C.H. (1986) : A hybrid optimisation method and its role in computer-aided design. Comp. & Struc., Vol. 23, 1986, N° 3, pp. 305-

205. THURSTON G.A., BROGAN F.A., STEHLIN P. (1986) : Postbuckling analysis using a general purpose code. AIAA Journal, Vol. 24, N°. 6, 06/1986, pp. 1013-1020*.

206. TIMOSHENKO S., WOINOWSKY-KRIEGER S. (1959) : Theory of plates and shells. Mac Graw Hill - 1959 (2nd Edition)*.

207. TIMOSHENKO S.P., GERE J.M. (1972) : Mechanics of materials. Von Nostran Reinhold, New York, 1972.

208. TRENY C., BONNET M. (1985) : Influence des propriétés viscoélastiques sur le comportement au choc des matériaux composites. Anales des matériaux composites., 12/1985, pp. 285-291, Conférence*.

209. TSAI S.W., HAHN H.T. (1980) : Introduction to composite materials. Technomic Publications 1980*.

210. VANDENBRICK D.J. (1985) : Postbuckling response of isotropic and laminated composite square plates with circular holes. 5th int. conf. on composite materials. AIME ICCM5, 07/1985, pp. 1393-1409, Conférence*.

211. VEUBEKE B.F. (1965) : Displacement and equilibrum models in the finite element method. Chapter 9 of Stress Analysis, ed. O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister, J. Wiley & Son, 1965.

212. VLACHOUTSIS S. (1987) : Elements finis tridimensionnel dégénérés de coques avec intégration explicite suivant l'épaisseur. THESE de Doctorat - ENSAE Toulouse, 1987*.

213. VLACHOUTSIS S. (1990) : Explicit integration for three-dimensional degenerated shell finite elements. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 29, pp. 861-880, 1990*.

214. VLASSOV B.Z. (1962) : Pièces longues et voiles minces. Editions Eyrolles, Paris, 2e édition, 1962*.

215. WANG C. (1986) : Finite element and experimental studies of buckling of delaminated thin wall structures. THESE. Departement of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 1986*.

216. WANG C., PIAN T.H.H. (1988) : Hybrid Semiloof element for buckling of thin walled structures. Departement of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology. Comp. & Struc., Vol. 30, N° 4, pp. 811-816, 1988*.

217. WANG C., PIAN T.H.H., DUGUNDJI J., LAGACE P.A. (1987) : Analytical and experimental studies on the buckling of laminated thin-walled structures. AIAA-87-0727, 1987, pp. 135-140*.

218. WANG J.T.S., BIGGERS S.B., DICKSON J.N. (1984) : Buckling of composite plates with a free edge in edgewise bending and compression. AIAA Journal, Vol. 22, N° 3, 03/1984, p 394-398*.

220. WASHIZU K. (1968) : Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, 1968.

221. WEMPNER G. (1969) : Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. Int. J. Sol. Struc., Vol. 5, pp. 117-153, 1969.

222. WHANG B. (1971) : Laminated orthotropic plates and shallow shells. Comp. & Struc., Vol. 1, pp. 465-493, 1971.

223. WHITNEY J.M., PAGANO N.J. (1970) : Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. J. of Appl. Mech. (Transaction of the ASME), pp. 1031-1036, 12/1970.

224. YAGMAI S., POPOV E.P. (1971) : Incremental analysis of large deflections of shells of revolution. Int. J. Sol. Struc., Vol. 7, pp. 1375-1393, 1971.

225. YANG T.Y., SAIGAL S. et KAPANIA R.K. (1986) : Geometrically nonlinear finite element analysis of imperfect laminated shells. J. Comp. Mat., Vol. 20, pp. 197-214, 1986.

226. YEOM C.H., LEE S.W. (1989) : An assumed strain finite element model for large deflection composite shells. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 28, 1989, pp. 1749-1768*.

227. YIN W.L., FEI Z. (1985) : Delamination buckling and growth in a clamped circular plate. 26th Structural Dynamics and material conference, April 85. AIAA-85-0832, 1985, pp. 274-282, Conférence*.

228. ZHOU C.T., ZHOU C.B. (1985) : The computation of nonlinear instability for multilayered composite cylindrical shells. 5th International Conference on composite materials, july-august 1985. ICCM-5, AIME, 07/1985, pp. 1135-1144, Conférence*.

229. ZIENKIEWICZ O.C., NAYAK G.C. (1971) : A general approach to problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements. Proc. Third Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 881-928, Oct. 1971.

230. ZIENKIEWICZ O.C. (1979) : La méthode des éléments finis. MacGraw-Hill Editions, 1967/1973/1979, Edition 1979*.

231. ZIENKIEWICZ O.C. NAYAK G.C. (1971) : A general approach to problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements. Proc. Third Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 881-928, Oct. 1971.

232. ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., TOO J.M. (1971) : Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 3, N° 2, pp. 275-290, 1971.

233. ZIMMERMANN R. (1982) : Mass minimization of composite material cylindrical shells and curved panels with buckling constraints. Optimization Methods in Structural Design, Proc. EUROMECH Coll. 164, Siegen, 1982, Bibliograph. Institut, Zürich, 1983*.

234. ZITZEVANCIH L.D. (1985) : Designing graphite cylinders to resist buckling. AIAA-85-1101, 07/1985, pp. 1-7*.

Les références qui sont suivies d'une étoile (*) en fin de ligne, sont celles que l'auteur a eu en sa possession alors que les autres sont seulement citées à titre indicatif dans le texte.