



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

Présentée et soutenue par :

Charles LUMET

le lundi 17 décembre 2012

Titre :

Modélisation, représentation et résolution de problèmes de partage équitable
de biens indivisibles soumis au risque

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED MITT : Intelligence artificielle

Unité de recherche :

Équipe d'accueil ISAE-ONERA MOIS

Directeur(s) de Thèse :

M. Jérôme LANG (directeur de thèse)

M. Sylvain BOUVERET (co-directeur de thèse)

Jury :

Didac BUSQUETS

Thibault GAJDOS

Michel LEMAÎTRE

Nicolas MAUDET - Rapporteur

Jérôme MONNOT - Rapporteur

Olivier SPANJAARD

Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier Sylvain Bouveret, Jérôme Lang, et Michel Lemaître, qui ont encadré ce travail de thèse, pour leur immense disponibilité tout au long de ces trois années, et pour leur relecture consciencieuse de ce manuscrit, ainsi que Laurence Cholvy, pour avoir pris en charge les lourdes tâches administratives qui ont accompagné la fin de ma thèse.

Je remercie également mes rapporteurs Jérôme Monnot et Nicolas Maudet, pour la pertinence de leurs rapports malgré les contraintes de temps qui leur étaient imposées, ainsi que toutes les autres personnes qui ont bien voulu faire partie de mon jury de thèse : Didac Busquets, Thibault Gajdos et Olivier Spanjaard.

Merci aux membres de mes comités de thèse pour leurs commentaires pertinents, et sans qui cette thèse ne serait pas ce qu’elle est. Merci également à toutes les personnes que j’ai pu rencontrer, au détour d’une conférence ou d’un workshop ou ailleurs, pour les discussions que j’ai eu la chance d’avoir avec eux.

Merci bien-sûr à l’ONERA d’avoir financé cette thèse ; merci au DTIM de m’avoir accueilli ; merci à toutes les personnes que j’y ai cotoyé, pour l’ambiance inégalable qui y règne.

Je remercie le service FDMR de l’ISAE et l’école doctorale MITT pour le suivi administratif de ma thèse, et plus particulièrement Annie Carles-Bailhé et Martine Labruyère, pour leur gentillesse et leur disponibilité.

J’ai pu, au cours de ces trois années, assurer des vacances à l’ISAE dans diverses matières : merci à Christophe Garion, Alain Haït et Pierre Siron de m’avoir fait confiance et de m’avoir donné cette opportunité. Merci également à tous les « PC-man » et « PC-woman » avec qui j’ai travaillé et qui ont contribué à l’excellent souvenir que je garde de ces vacances : Jean-Loup Bussenot, David Dooze, Hélène Fargier, Guillaume Infantes, Jean Christophe Lloret, Olivier Poitou, Emmanuel Rachelson, Pascal Schmitt.

Mes remerciements vont enfin à ma famille et mes amis. Dans le désordre le plus complet : Ahmad et Rosalie ; Maria et ses talents culinaires ; Pierre, maître en origami, qui a daigné partager mon bureau ; tous les thésards de l’ONERA ; Laurence, et ses histoires toujours croustillantes, Angela, sans qui mon stage de fin d’études n’aurait pas eu la même saveur, Pascal, et ses (très) longs rendus Blender, Stéphane, mon hôte officiel sur la capitale, Aline, ma violoncelliste préférée, Guillaume, à qui je dois toujours un pantalon, Louise, pour avoir été une élève ô combien assidue et pour m’avoir fait découvrir le roller derby ; Nathalie, Quentin, Gautier, Marc, et tous les membres du SIMU pour les soirées inoubliables que j’ai passées avec eux ; Tamara, pour nos folles excursions au milieu de la nuit, l’ensemble des Quad Guards (qu’il devient difficile de citer

tous!), et tous les membres de Roller Derby Toulouse, qui m'ont fait aimer ce sport que je ne connaissais bien peu. Merci, plus largement, à tous ceux que j'ai eu la chance de rencontrer pendant ces trois années.

Merci, enfin, à tous ceux qui ont arrosé mon papyrus en mon absence.

Table des matières

Notations	1
Introduction	3
1 Décision individuelle	7
1.1 Structure de l'espace de décision	8
1.1.1 Variables de décision	8
1.1.2 Contraintes	9
1.2 Préférences	10
1.2.1 Structures de préférence	10
1.2.2 Représentation compacte de préférences	13
1.3 Décision et connaissances incomplètes	16
1.3.1 Utilité espérée	19
1.3.2 Limites de l'espérance d'utilité	20
1.3.3 Théorie des perspectives	22
1.3.4 Adaptation de la notation des fonctions d'utilité	24
1.4 Conclusion	26
2 Décision collective et partage	27
2.1 Décision collective	29
2.1.1 Propriétés des ordres de bien-être sociaux	30
2.1.2 Ordres de bien-être social et fonctions d'utilité collective usuels	34
2.1.3 Propriétés des critères usuels	37
2.2 Partage	37
2.2.1 De la décision collective au partage	38
2.2.2 Instance d'un problème de partage de biens indivisibles	40
2.2.3 Quelques applications des problèmes de partage	40
2.2.4 Évaluation d'un partage : justes parts et absence d'envie	42
2.3 Conclusion	48

3	Décision collective et partage sous risque	51
3.1	Le <i>timing effect</i>	53
3.1.1	Approche <i>ex-ante</i> ou <i>ex-post</i> ?	55
3.1.2	Influence du <i>timing effect</i> dans le cadre de l'approche égalitariste	58
3.2	Partage en présence de risque	59
3.2.1	L'aléa dans les problèmes de partage	60
3.2.2	Évaluation des partages en présence de risque	62
3.2.3	Applications de problèmes de partage en présence de risque	65
3.3	Conclusion	66
4	Un modèle simple de partage de biens indivisibles sous risque	69
4.1	Les hypothèses du modèle	69
4.1.1	Contraintes des problèmes de partage	69
4.1.2	Additivité des préférences	70
4.1.3	Risque porté par les objets	70
4.1.4	Indépendance des probabilités	72
4.1.5	Fonctions d'utilité collective et critères numériques	72
4.2	Le problème de partage <i>BIRPA</i> (récapitulation)	73
4.3	Mesure de l'équité d'un partage dans notre modèle	75
4.3.1	En univers certain	75
4.3.2	En univers risqué	77
4.4	Conclusion	79
5	Résolution du problème de partage	81
5.1	Résolution <i>ex-ante</i>	81
5.2	Calcul exact des utilités collectives et des critères <i>ex-post</i>	83
5.2.1	Égalitarisme <i>ex-post</i>	83
5.2.2	Probabilité de juste part proportionnelle ou maximin	83
5.3	Approximations des utilités collectives et des critères	85
5.3.1	Méthode d'approximation par omission	85
5.3.2	Méthode de Monte-Carlo	86
5.3.3	Utilité collective mixte	88
5.3.4	Juste part maximin-proportionnelle	92
5.4	Optimisation des utilités collectives et critères numériques	94
5.4.1	Résolution exacte	94
5.4.2	Résolution approchée	96
5.5	Conclusion	98

6 Expérimentations	101
6.1 Contexte des expérimentations	101
6.2 Evaluation empirique du <i>timing effect</i>	104
6.3 Résultats	107
6.3.1 Approche égalitariste classique <i>ex-post</i>	107
6.3.2 Probabilité de juste part proportionnelle	118
6.3.3 Probabilité de juste part maximin	120
6.4 Conclusion	120
Conclusion	121

Notations

Ensembles

Lettre cursive

$\{\dots\}$

Lettre caligraphiée

$\wp(\mathcal{E})$

$\#\mathcal{E}$

\subseteq

$\mathcal{E} \times \mathcal{F}$

Ensemble $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, \dots)$

Ensemble

Tribu ou σ -algèbre $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \dots)$

Ensemble des parties de \mathcal{E}

Cardinal de l'ensemble \mathcal{E}

Inclusion

Produit cartésien des ensembles \mathcal{E} et \mathcal{F}

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{N}, \mathbb{B}$

$\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{N}}$

Ensemble des réels, ensemble des réels positifs, ensemble des entiers naturels, ensemble $\{0, 1\}$

$\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \mathbb{N} \cup +\infty$

Vecteurs, matrices

\mathcal{A}^n

\mathbf{u}

$\langle \dots \rangle$

u_i

\mathbf{u}^\uparrow

$\hat{\mathbf{u}}$

\mathbf{W}

(w_{ij})

Ensemble des vecteurs à n éléments à valeur dans \mathcal{A}

Vecteur

Vecteur

i^{e} composante du vecteur \mathbf{u}

Vecteur des composantes de \mathbf{u} ordonnées dans l'ordre croissant

Moyenne des composantes de \mathbf{u}

Matrice

Matrice

Fonctions

$\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$

$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

$x \mapsto f(x), \mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}), \dots$

$g(x_1, \dots, \dots, x_N)$

Ensemble des fonctions de \mathcal{B} dans \mathcal{A}

Fonction de \mathcal{A} dans \mathcal{B}

Fonctions

k^{e} fonction partielle de la fonction g

Probabilités

X	Variable aléatoire
EX	Espérance mathématique de X
VX	Variance de X
$(\langle w_1, \dots, w_N \rangle, \langle p_1, \dots, p_N \rangle)$	Loterie
\Pr	Distribution de probabilité

Divers

$[x]$	Partie entière de x
$ x $	Valeur absolue de x
$\text{sgn}(x)$	Signe de x : $\text{sgn}(x) = \frac{x}{ x }$

Introduction

partager v.t. Diviser quelque chose en plusieurs éléments distincts.

Cette définition¹ du partage soulève plusieurs questions. N'importe quelle entité est-elle divisible? Dans quel but peut-on souhaiter diviser quelque chose? Et selon, comment cette division doit-elle être opérée?

Toute entité n'est évidemment pas divisible et un partage cohérent ne pourra être opéré qu'à partir d'une entité ou ressource divisible, ou bien d'un ensemble de ressources élémentaires indivisibles. Les parts définies par un partage ont la plupart du temps vocation à être reçues par différentes personnes ou entités, qui participent au partage, et que l'on regroupera sous le qualificatif d'*agents*; dans ce cas de figure, le partage est bien souvent habillé d'une signification plus profonde et doit aboutir à une solution qui vérifie certaines conventions ou certaines règles : la langue française privilégie alors le terme de « répartition ». Pour des raisons de simplicité et de cohérence avec la littérature scientifique, nous nous autorisons à conserver le terme de « partage » dans l'intégralité de ce document. Les conventions ou règles entrant en jeu sont dictées par la *justice distributive* et font intervenir la notion essentielle d'*équité* : initialement définie par Aristote, dans l'Éthique à Nicomaque, l'équité est présentée par le philosophe comme correspondant à l'attribution de parts égales à des personnes égales, ou de parts inégales à des personnes inégales.

D'innombrables applications réelles font appel à la notion de partage. La ressource à partager est parfois divisible (c'est par exemple le cas d'une ressource monétaire), et parfois constituée d'un ensemble de biens indivisibles. C'est ce dernier cas auquel nous nous intéressons dans cette thèse. De plus, et c'est là le point novateur du cadre d'étude de cette thèse, cette ressource ainsi que le cadre général du partage sont généralement sujet à des aléas, dont l'impact est significatif et qui doivent par conséquent être pris en compte pour fournir une solution optimale au problème. Nous exposons brièvement deux exemples d'applications réelles; une description plus détaillée de ces problèmes est bien-sûr présentée plus loin dans le corps de ce document.

Les constellations de satellites d'observation de la Terre, au vu de leur coût important, sont souvent financées conjointement par plusieurs états. Chaque état exprime ses besoins en matière de photographies par des requêtes. La ressource que constitue la constellation, qui se présente sous forme d'un ensemble de photographies potentielles, permet de satisfaire un certain nombre de ces requêtes; le choix des requêtes effectivement réalisées, c'est-à-dire de la manière de partager la ressource, doit assurer une certaine équité entre les états. En outre, le partage intervenant avant la prise effective des photographies, la qualité de ces dernières (sujette entre autres aux conditions météorologiques) ne peut être garantie à cet instant.

1. Définition tirée du dictionnaire Larousse.

Dans un autre domaine, l'augmentation du trafic aérien et le nombre croissant d'aéronefs qu'implique cette augmentation soulèvent des problématiques d'engorgement des aéroports. L'allocation des créneaux d'atterrissage et de décollage aux différents appareils devient une problématique de premier plan. Une fois encore, ces créneaux, de valeur et qualité inégales, doivent être alloués de façon équitable entre les compagnies aériennes. Les retards d'autres appareils, les délais de préparation de l'appareil (approvisionnement en carburant, délai dans le chargement des bagages, etc.) et les conditions météorologiques (orages, périodes de gel nécessitant un dégivrage des appareils, etc.) constituent autant d'aléas qui ne peuvent être prévus mais dont la probabilité d'occurrence doit impérativement être prise en compte lors du partage.

Les problèmes de partage constituent des cas particuliers de problèmes de décision collective et rentrent dans le cadre du *choix social computationnel*. Chevaleyre *et al.* (2007) proposent une introduction à ce champ d'étude, et resituent les problèmes de partage dans ce contexte.

L'introduction de l'aléa dans les problèmes génériques de décision collective a été largement étudiée, en particulier à partir de l'article de Harsanyi (1955). La majeure partie de ces études appartient au domaine de l'économie et les travaux portent par conséquent sur une ressource continue infiniment divisible : les travaux de Myerson (1981) et de Gajdos et Tallon (2002) rentrent par exemple dans ce cadre. D'autre part, les considérations algorithmiques sont complètement absentes de ces études.

L'incertitude a été étudiée dans plusieurs domaines particuliers de décision collective, dans le cadre de problèmes entrant dans le cadre du choix social computationnel et présentant une certaine proximité avec les problèmes de partage. C'est par exemple le cas de la théorie du vote. Konczak et Lang (2005) étudient les cas où les préférences des agents sont incertaines, et Walsh (2007) s'intéresse aux conséquences de cette incertitude en terme de possibilité de manipulation des élections ; Lu et Boutilier (2010) s'intéressent quant à eux au cas où certains agents souhaiteraient se retirer du processus de vote avant son terme.

Les processus d'enchères constituent un autre exemple de problèmes de décision collective où l'aléa est étudié : l'incertitude apparaît lorsque des enchérisseurs sont susceptibles de retirer leurs mises (voir par exemple Holland et O'Sullivan (2005)) ou bien lorsque des objets se révèlent finalement indisponibles (voir Bofill *et al.* (2010)). Les problèmes d'enchères font intervenir une allocation d'objets à des enchérisseurs ; en cela, ils sont voisins des problèmes de partage ; cependant, une différence fondamentale réside dans le fait que la recherche de l'équité est totalement absente des problèmes d'enchères en général, et des études citées ci-dessus en particulier.

En revanche, les problèmes de partage en présence de risque, qui allient décision collective, aléa, et recherche d'équité, ainsi que l'algorithmique associée à de tels problèmes, n'a pas, à notre connaissance, été étudiée. Notre travail vise à combler ce manque, avec une double contribution : d'une part, nous introduisons la modélisation d'un problème simple de partage en présence de risque et étendons au cadre du risque des méthodes classiques d'évaluation des partages, et d'autre part nous proposons plusieurs méthodes de résolution de tels problèmes.

Le présent manuscrit est décomposé en six chapitres.

Le chapitre 1 page 7 présente le cadre de la décision individuelle et introduit des modélisations possibles de préférences face à un choix en présence d'aléa. Le chapitre 2 page 27 étend cette modélisation au cadre de la décision collective, et montre comment il est possible d'agrèger les préférences de plusieurs agents en vue de choisir une décision. Nous nous intéressons en détail à

des problèmes de décision collective particuliers, les problèmes de partage de biens indivisibles. La généralisation du concept de critère d'évaluation, première contribution de cette thèse, est présentée à la fin de ce chapitre.

Les deux premiers chapitres invitent au regroupement entre aléa et décision collective : c'est l'objet du chapitre 3 page 51, dans lequel on s'intéresse aux problématiques soulevées par la décision collective en présence de risque et leur analyse dans la littérature. La dernière partie du chapitre est consacrée aux problèmes de partage en présence de risque : notre contribution intervient dans l'analyse de l'impact du risque dans ce type de problèmes, ainsi que dans l'extension au risque des méthodes d'évaluation d'un partage en univers non risqué.

Les deux derniers chapitres sont exclusivement consacrés aux travaux réalisés dans cette thèse. Une large part de nos contributions algorithmiques a eu pour cadre l'étude d'un problème simplifié de partage de biens indivisibles en présence de risque. Le chapitre 4 page 69 présente ce modèle simplifié, et expose et justifie les hypothèses qui y conduisent ; les travaux algorithmiques proprement dits sont exposés dans le chapitre 5 page 81, et illustrés dans le chapitre 6 page 101 par les résultats expérimentaux associés.

Chapitre 1

Décision individuelle

« Face à un choix, quelle alternative vais-je sélectionner ? »

Le cheminement intellectuel qui permet de passer de cette question à sa réponse est connu sous le nom de *processus de décision*. Quel que soit le contexte associé à un processus de décision, celui-ci se décompose généralement en deux phases :

- la définition du problème : il s’agit de définir exactement le *problème de décision* auquel le décideur est confronté.
- la résolution du problème : il s’agit de trouver une solution satisfaisante au problème préalablement défini.

Nous nous intéressons dans les travaux présentés dans ce document essentiellement à cette seconde étape, de loin la plus étudiée dans la littérature ; nous montrerons brièvement une modélisation possible des problèmes de décision, et nous ferons l’hypothèse naturelle que les problèmes que nous traitons auront été correctement définis en amont.

Les problèmes de décision sont omniprésents et constituent par conséquent une thématique qui a été et est toujours largement étudiée. Le problème est traité sous nombre d’angles différents.

L’*approche normative* s’intéresse à la décision en tant que processus rationnel consistant à choisir la meilleure alternative, selon certains critères et sous certaines hypothèses simples sur le décideur, en particulier sa parfaite rationalité. Si cette dernière hypothèse est relâchée, l’étude du comportement du décideur, de la justification de ses choix en fonction du contexte, devient indispensable, de sorte à proposer des axiomes qui soient cohérents avec son comportement et qui permettent de le modéliser correctement : c’est l’*approche descriptive* de la décision.

Les théories de la décision en présence de risque présentées dans ce chapitre allient approches normatives et descriptives. Les autres parties du chapitre ainsi que, plus largement, l’ensemble des travaux exposés dans le présent document sont quant à eux basés exclusivement sur une approche normative du processus de décision.

On s’intéresse dans ce chapitre à la théorie de la décision dite *individuelle* : un unique individu doit prendre une décision en fonction de ses préférences. Un problème de décision consiste en un choix entre plusieurs alternatives ou décisions sur lesquelles sont exprimées des préférences. Les décisions envisageables pour le décideur dites *décisions possibles* sont regroupées dans un ensemble \mathcal{D} appelé *espace de décision*.

Exemple 1. *Alexandre souhaite aller au cinéma. Il se rend dans le cinéma le plus proche de chez lui, qui dispose de 12 salles et propose 12 films.*

Il lui faut choisir le film qu'il va aller voir. Ce choix peut être modélisé comme un problème de décision dans lequel l'espace de décision est l'ensemble $\mathcal{D} = \{d_{F1}, \dots, d_{F12}\}$ où la décision d_{Fk} correspond au choix du k -ième film.

Ce chapitre est essentiellement bibliographique. Nous verrons comment il est possible de modéliser l'ensemble des différentes options qui s'offrent au décideur par des espaces de décision structurés ; nous nous intéresserons ensuite aux propositions de la littérature pour représenter les préférences d'un décideur face aux alternatives possibles ; nous introduirons enfin la notion d'aléa, et nous exposerons les théories canoniques de la décision en présence de risque.

1.1 Structure de l'espace de décision

La majeure partie des problèmes de décision comportent un espace de décision plus structuré que celui présenté dans l'exemple 1.

1.1.1 Variables de décision

Une décision peut généralement être vue comme le résultat de plusieurs décisions « élémentaires », chacune de ces décisions élémentaires étant choisie parmi un ensemble donné.

Formellement, une décision $d \in \mathcal{D}$ peut ainsi s'écrire comme un tuple (d_1, \dots, d_N) de N décisions élémentaires, où pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $d_k \in \mathcal{D}_k$, et l'espace de décision s'écrit comme le produit cartésien de ces sous-espaces.

$$\mathcal{D} = \prod_{k=1}^N \mathcal{D}_k \quad (1.1)$$

Du point de vue du décideur, les d_k , $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ sont des variables auxquelles il faut donner une valeur pour former une décision complète : on parle alors de *variables de décision*.

Exemple 1 (suite). *Alexandre cherche à planifier sa soirée, au cours de laquelle il souhaite aller au cinéma puis au restaurant et enfin dans un bar. Il s'agit là d'un problème de décision qui peut être décomposé en trois sous-problèmes (non nécessairement indépendants) : choisir un film, choisir un restaurant, et choisir un bar. Le cinéma propose 12 films différents ($F1, F2, \dots, F12$). Alexandre connaît en outre 4 restaurants ($R1, R2, R3$, et $R4$) et 10 bars ($B1, B2, \dots, B10$) parmi lesquels il devra choisir.*

L'espace de décision du problème global s'écrit donc comme le produit cartésien des espaces de décision associés aux sous-problèmes :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_r \times \mathcal{D}_b$$

avec les trois variables de décisions :

$$\begin{cases} \text{film} & \in \mathcal{D}_f = \{d_{F1}, \dots, d_{F12}\} \\ \text{restaurant} & \in \mathcal{D}_r = \{d_{R1}, d_{R2}, d_{R3}, d_{R4}\} \\ \text{bar} & \in \mathcal{D}_b = \{d_{B1}, \dots, d_{B10}\} \end{cases}$$

Dans ce problème, une décision est un élément de \mathcal{D} , par exemple la décision $d = (d_{F4}, d_{R2}, d_{B9})$ qui correspond au choix du film $F4$, du restaurant $R2$, et du bar $B9$.

1.1.2 Contraintes

L'espace de décision, qu'il soit ou non structuré, propose l'ensemble des décisions possibles pour le décideur. Il est cependant fréquent que, parmi toutes ces décisions, certaines ne puissent être choisies par le décideur pour telle ou telle raison. On regroupe l'ensemble des décisions pouvant être choisies par le décideur dans l'espace $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ des *décisions admissibles*.

Cette impossibilité pour le décideur de prendre certaines décisions peut avoir plusieurs causes. L'espace de décision peut être construit de telle façon que certaines décisions, formellement possibles, n'aient pas de sens en pratique. Les règles intervenant dans le contexte du problème de décision peuvent interdire certaines décisions pour des raisons techniques, morales, ou encore légales. L'espace des décisions admissibles est construit à partir de l'espace des décisions possibles auquel on associe des *contraintes d'admissibilité*. La façon la plus simple de définir une contrainte d'admissibilité est d'exprimer le sous-ensemble de décisions qu'elle autorise, comme proposé dans la définition 1.

Définition 1 (Contrainte d'admissibilité). *On appelle contrainte d'admissibilité C tout sous-ensemble $\mathcal{D}_C \subseteq \mathcal{D}$ de l'ensemble des décisions possibles.*

On note \mathcal{C} l'ensemble des contraintes d'admissibilité du problème. L'ensemble \mathcal{F} des décisions admissibles se définit comme l'intersection des contraintes d'admissibilité.

$$\mathcal{F} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{D}_C \quad (1.2)$$

Exemple 1 (suite). *Alors qu'il est en train de décider de la façon d'occuper sa soirée, Alexandre se souvient des points suivants :*

1. *le restaurant R2 est trop loin du cinéma pour pouvoir y accéder facilement après le film.*
2. *les horaires des séances de cinéma et les horaires de service des restaurants sont tels qu'il est impossible d'aller manger :*
 - *au restaurant R1 après avoir vu les films F3, F4 ou F7 ;*
 - *au restaurant R4 après avoir vu les films F3, F4, F7, F10, ou F12.*

Ces considérations vont être prises en compte dans le problème de décision en introduisant des contraintes d'admissibilité. On choisit ici d'introduire trois contraintes, soit une par restaurant concerné, notées C_{R1} , C_{R2} et C_{R4} :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{C_{R2}} &= \{d = (d_c, d_r, d_b) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_r \times \mathcal{D}_b \mid d_r \neq d_{R2}\} \\ \mathcal{D}_{C_{R1}} &= \{d = (d_c, d_r, d_b) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_r \times \mathcal{D}_b \mid d_r = d_{R1} \Rightarrow d_c \notin \{d_{F3}, d_{F4}, d_{F7}\}\} \\ \mathcal{D}_{C_{R4}} &= \{d = (d_c, d_r, d_b) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_r \times \mathcal{D}_b \mid d_r = d_{R4} \Rightarrow d_c \notin \{d_{F3}, d_{F4}, d_{F7}, d_{F10}, d_{F12}\}\} \end{aligned}$$

Ces contraintes restreignent les décisions admissibles à l'ensemble \mathcal{F} qui s'écrit :

$$\mathcal{F} = \mathcal{D}_{C_{R1}} \cap \mathcal{D}_{C_{R2}} \cap \mathcal{D}_{C_{R4}} \subset \mathcal{D}$$

1.2 Préférences

Les préférences sont l'expression, de la part d'un agent confronté à un choix, de l'attrait que présente chaque alternative envisageable. Vue sous cet angle, la notion de préférence dépasse largement le cadre de la simple décision, et apparaît, comme souligné par Bouyssou et Vincke (2006), dans des domaines variés ; en économie, les préférences sont souvent vues comme la traduction du prix qu'un agent est prêt à payer pour obtenir un bien donné ; en psychologie, Lichtenstein et Slovic (2006) proposent une interprétation comme la traduction de l'attitude d'un agent face à un ensemble d'objets, d'où un lien avec les problèmes de décision ; pour Scherer (2005), les préférences sont l'expression d'un goût ou d'une aversion pour un objet. Elles apparaissent dans bien d'autres domaines, comme par exemple les sciences politiques ou encore les statistiques.

1.2.1 Structures de préférence

Formellement, il existe différentes possibilités pour représenter les préférences d'un agent sur un ensemble d'alternatives ; on appelle *structure de préférence* un cadre de représentation formelle des préférences d'un agent.

Structure de préférence ordinale

L'ensemble d'alternatives non trivial le plus simple sur lequel un agent peut être amené à exprimer des préférences est un ensemble constitué de deux alternatives seulement. Dans une telle situation, il est classiquement demandé à l'agent de se prononcer sur la question suivante : « La première alternative est-elle au moins aussi bonne que la seconde ? » (voir Vincke (1989)). Étendant ce processus à un ensemble d'alternatives quelconque, la représentation ordinale de préférence fait donc logiquement appel au concept de relation binaire.

Définition 2 (Relation binaire). *Soit un ensemble \mathcal{E} . Une relation binaire sur \mathcal{E} est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. On notera $x\mathcal{R}y$ pour signifier $(x, y) \in \mathcal{R}$.*

Une relation binaire peut vérifier certaines propriétés classiques.

Définition 3. *Soit un ensemble \mathcal{E} et une relation binaire \mathcal{R} sur \mathcal{E} . On dira que \mathcal{R} est :*

- réflexive *si et seulement si pour tout x de \mathcal{E} , $x\mathcal{R}x$;*
- antisymétrique *si et seulement si pour tout (x, y) de \mathcal{E}^2 , $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$;*
- complète *si et seulement si pour tout (x, y) de \mathcal{E}^2 , $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$;*
- transitive *si et seulement si pour tout (x, y, z) de \mathcal{E}^3 , $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$;*

Une structure de préférence ordinale est une relation binaire sur l'espace des alternatives, supposée réflexive par définition (une alternative est toujours au moins aussi bonne qu'elle-même).

Définition 4 (Structure de préférence ordinale). *Soit un ensemble \mathcal{D} d'alternatives. Une structure de préférence ordinale sur \mathcal{D} est une relation binaire réflexive sur \mathcal{D} .*

A partir d'une structure de préférence ordinale \succeq , on définit une relation de préférence stricte \succ ainsi qu'une relation d'équivalence \sim .

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \quad \begin{cases} x \succ y & \Leftrightarrow x \succeq y \text{ et } y \not\succeq x \\ x \sim y & \Leftrightarrow x \succeq y \text{ et } y \succeq x \end{cases} \quad (1.3)$$

On imposera souvent qu'une structure de préférence ordinaire effectue un « classement » des alternatives, autorisant des incomparabilités et des *ex aequo*; on parlera alors de *relation de préordre*.

Définition 5 (Relation de préordre). *Soit un ensemble \mathcal{D} d'alternatives. Une relation de préordre \succeq sur \mathcal{D} est une relation binaire réflexive et transitive sur \mathcal{D} . Une relation de préordre complète sera appelée relation de préordre total.*

Si l'on souhaite que la structure de préférence ordinaire traduise un classement strict des alternatives, c'est-à-dire sans *ex aequo* possible, on utilisera alors une *structure d'ordre*.

Définition 6 (Relation d'ordre). *Soit un ensemble \mathcal{D} d'alternatives. Une relation d'ordre sur \mathcal{D} est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique sur \mathcal{D} . Une relation d'ordre complète sera appelée relation d'ordre total.*

Une structure de préférence ordinaire particulière, dite *dichotomique*, est une relation de préordre (non totale) classant les alternatives en seulement deux catégories.

Définition 7 (Structure de préférence dichotomique). *Soit un ensemble \mathcal{D} d'alternatives. Une structure de préférence dichotomique est une structure de préférence ordinaire définie à partir d'un sous-ensemble d'alternatives $\mathcal{D}^+ \subset \mathcal{D}$ par la relation de préordre \mathcal{R} telle que $\forall (d, d') \in \mathcal{D}^2$, $d\mathcal{R}d' \Leftrightarrow d \in \mathcal{D}^+ \text{ ou } d' \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^+$.*

Structure de préférence valuée

Les structures de préférence ordinales permettent de comparer et éventuellement de classer les alternatives entre elles. Néanmoins, aucune information n'est donnée quant à l'intensité des préférences exprimées. Cette absence de quantification peut être résolue en définissant des structures de préférence plus riches que les structures de préférence ordinales, dites *structures de préférence valuées*.

Une structure de préférence valuée simple est construite à partir d'un ensemble de valuation quelconque totalement ordonné : on parle de *structure de préférence qualitative*.

Définition 8 (Structure de préférence qualitative). *Soit un ensemble \mathcal{D} d'alternatives. Une structure de préférence qualitative sur \mathcal{D} est un couple $(\langle \mathcal{U}, \succeq \rangle, u)$, où \mathcal{U} est un ensemble quelconque totalement ordonné par \succeq , et u est une fonction de \mathcal{D} dans \mathcal{U} .*

On dira que $\langle \mathcal{U}, \succeq \rangle$ est une structure de préférence qualitative et u est appelée fonction d'utilité.

Une structure de valuation qualitative $\langle \mathcal{U}, \succeq \rangle$ peut être par exemple définie comme suit : $\mathcal{U} = \{\text{mauvais, très bon, excellent}\}$ et \succeq est une relation d'ordre total telle que mauvais \preceq très bon \preceq excellent.

Les structures de valuation qualitatives permettent d'exprimer l'intensité des préférences, mais n'autorisent pas les comparaisons entre ces intensités. Ainsi, bien que, dans l'exemple

précèdent il semble y avoir plus d'écart en terme de préférences entre la valuation « mauvais » et la valuation « très bon », qu'entre cette dernière et la valuation « excellent », la structure de préférence qualitative ne permet pas d'exprimer formellement cette nuance. On utilise donc généralement une structure enrichie d'une loi de composition interne, autorisant des additions ou des différences sur les préférences : on parle de *structure de préférence cardinale* ou *quantitative*.

Définition 9 (Structure de préférence cardinale). *Soit un ensemble \mathcal{D} d'alternatives. Une structure de préférence cardinale sur \mathcal{D} est un couple $(\langle \mathcal{U}, \succeq, \oplus \rangle, u)$ où $(\langle \mathcal{U}, \succeq \rangle, u)$ est une structure de préférence qualitative et \oplus est une loi de composition interne sur \mathcal{U} , vérifiant les propriétés suivantes :*

- *commutativité* : $\forall (a, b) \in \mathcal{U}^2, a \oplus b = b \oplus a$;
- *associativité* : $\forall (a, b, c) \in \mathcal{U}^3, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- *monotonie* : $\forall (a, b, c) \in \mathcal{U}^3, a \succeq b \Rightarrow a \oplus c \succeq b \oplus c$;
- *élément neutre* : $\exists \perp \in \mathcal{U}, \forall a \in \mathcal{U}, a \oplus \perp = a$;
- *élément absorbant* : $\exists \top \in \mathcal{U}, \forall a \in \mathcal{U}, a \oplus \top = \top$;
- *existence et unicité de la différence* : $\forall (a, b) \in \mathcal{U}^2, \exists c \in \mathcal{U}, c = \max\{x \in \mathcal{U} \mid a \oplus x = b\}$.

Les structures de préférences cardinales utilisent classiquement les structures de valuation $(\overline{\mathbb{N}}, \succeq, +)$ ou bien $(\overline{\mathbb{R}}, \succeq, +)$ construites sur l'ensemble des nombres entiers ou réels, munies de l'ordre sur les nombres et de l'addition. Ce choix naturel s'explique de plus par la possibilité de représenter avec de telles structures de préférences cardinales n'importe quel ordre ou préordre total, comme le montre la proposition suivante, introduite notamment par Cantor (1915).

Proposition 1 (Représentativité d'une structure de préférence cardinale). *Soit \mathcal{D} un ensemble d'alternatives fini ou infini dénombrable, et $(\langle \mathbb{R}, \succeq, + \rangle, u)$ une structure de préférence cardinale sur \mathcal{D} .*

Alors il existe une structure de préférence ordinaire \mathcal{R} telle que, pour tout couple $(d, d') \in \mathcal{D}^2$, $d \mathcal{R} d' \Leftrightarrow u(d) \succeq u(d')$ si et seulement si \mathcal{R} est un préordre total.

Si de plus, on a $u(d) = u(d') \Leftrightarrow d = d'$, alors \mathcal{R} est un ordre total.

Autres structures de préférence

D'autres structures de préférences sont apparues, pour enrichir les structures classiques ou bien pour pallier à certaines incompatibilités avec des situations réelles.

C'est par exemple le cas des structures de préférence floues, introduites par Fodor et Roubens (1994) et Perny et Roy (1992), représentées par une fonction $\mu : \mathcal{D}^2 \rightarrow [0, 1]$ qui pour tout couple d'alternatives (x, y) définit, selon l'interprétation donnée, soit le degré de préférence de x par rapport à y , soit la crédibilité de l'assertion « x est une alternative au moins aussi bonne que y ».

On pourra également citer les modèles de préférence dits « à seuil », proposés par Luce (1956), qui permettent d'exprimer l'indifférence entre deux alternatives dans un cadre plus souple que celui de la relation de préordre, autorisant ainsi la traduction de situations réelles où certaines alternatives proches ne peuvent être distinguées alors que des alternatives plus éloignées le peuvent.

1.2.2 Représentation compacte de préférences

Les modèles présentés dans la section 1.2.1 page 10 permettent de représenter formellement les préférences d'un agent sur un ensemble d'alternatives donné. Si leur fondement théorique assure la vérification de propriétés attrayantes pour les préférences ainsi représentées, l'utilisation de telles représentations en pratique s'avère souvent beaucoup moins satisfaisante ; l'une des principales problématiques pratiques concerne la représentation des préférences d'un agent face à un ensemble d'alternatives de grande taille, et ce quelle que soit la structure de préférence choisie.

Comme vu précédemment, une part importante des problèmes de décision comporte un espace de décision structuré, qui peut s'exprimer comme un produit cartésien de sous-espaces : $\mathcal{D} = \prod_{k=1}^N \mathcal{D}_k$. Rentrent dans ce cadre les problèmes de décision dont les solutions peuvent être représentées par un ensemble de variables, chacune pouvant prendre une valeur dans l'un des ensembles \mathcal{D}_k ($k \in \llbracket 1, N \rrbracket$) ; de nombreux problèmes de décision sont ainsi modélisables, dont par exemple les problèmes de partage (voir chapitre 2 page 27).

Si de tels problèmes de décision semblent à première vue pouvoir se décomposer facilement en des sous-problèmes plus simples et indépendants, il n'en est rien en pratique, puisque les préférences exprimées font la plupart du temps intervenir des dépendances fortes entre les valeurs des différentes variables. La taille de l'espace de décision s'écrit donc $\#\mathcal{D} = \prod_{k=1}^N \#\mathcal{D}_k$: les dépendances préférentielles sont à l'origine de l'explosion combinatoire de la taille de des espaces de décision à considérer.

Exemple 2 (suite). *Intéressons-nous de nouveau à Alexandre, qui cherche toujours à planifier sa soirée. Il souhaite aller au cinéma (12 films possibles : F1 à F12), puis au restaurant (4 restaurants possibles : R1, R2, R3 et R4), et finir la soirée dans un bar (10 bars possibles : B1 à B10). Il se demande également s'il va inviter Blandine et/ou Charlotte et/ou David à l'accompagner.*

Le problème de décision peut de façon classique être modélisé par le produit cartésien des sous-espaces de décision $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_r \times \mathcal{D}_b \times \mathcal{D}_{Bl} \times \mathcal{D}_{Ch} \times \mathcal{D}_{Da}$, avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{D}_f &= \{d_{F1}, \dots, d_{F12}\} & \text{(choix du film)} \\ \mathcal{D}_r &= \{d_{R1}, d_{R2}, d_{R3}, d_{R4}\} & \text{(choix du restaurant)} \\ \mathcal{D}_b &= \{d_{B1}, d_{B2}, \dots, d_{B10}\} & \text{(choix du bar)} \\ \mathcal{D}_{Bl} &= \{d_{Bl+}, d_{Bl-}\} & \text{(invitation de Blandine)} \\ \mathcal{D}_{Ch} &= \{d_{Ch+}, d_{Ch-}\} & \text{(invitation de Charlotte)} \\ \mathcal{D}_{Da} &= \{d_{Da+}, d_{Da-}\} & \text{(invitation de David)} \end{array} \right.$$

L'expression des préférences ne pose ici aucun problème si celles-ci sont définies indépendamment sur chaque sous-espace : les préférences peuvent être exprimées sous la forme de 5 structures de préférences indépendantes, ce qui revient au classement de $12 + 4 + 10 + 2 + 2 + 2 = 32$ alternatives. Mais face à un tel problème, il est probable qu'Alexandre souhaite exprimer des dépendances préférentielles entre les différents sous-problèmes :

« Si Blandine est présente, alors je ne souhaite inviter personne d'autre, et je préfère aller voir les films F2 ou F9. »

ou encore :

« Si j'invite David, il est souhaitable que j'invite aussi Charlotte, et dans ce cas, le restaurant R2 est exclus, de même que les bars B3, B4 et B8, et il vaudra mieux éviter les films F2, F5, F6, et F10. »

Auquel cas l'expression des préférences d'Alexandre passe par la considération de l'ensemble des décisions possibles, soit $12 \times 4 \times 10 \times 2 \times 2 \times 2 = 3840$ alternatives !

L'expression des préférences des agents se révèle donc en pratique problématique. L'étude de cet écueil a conduit à la conception de langages concis, munis d'une syntaxe et d'une sémantique, dont les formules bien formées constituent des structures de préférences classiques, cardinales ou ordinales : on appelle ces langages des *représentations compactes de préférences* (voir par exemple la thèse d'Uckelman (2008)).

Une représentation compacte de préférences est ainsi bâtie sur un ensemble d'hypothèses supposées vérifiées par les préférences des agents, permettant ainsi de spécifier succinctement les préférences en question dans un langage adapté tout en permettant d'en déduire une structure de préférence classique (typiquement celle attendue en entrée du problème) à partir de leur représentation compacte.

Le choix d'une représentation compacte de préférences dépend évidemment du problème étudié ; toutefois, deux principaux aspects sont à considérer pour évaluer la pertinence d'un langage de représentation compacte :

- Le langage est-il adapté aux humains ? Cette question regroupe plusieurs problématiques : l'élicitation des préférences doit être en pratique possible et de préférence aisée, c'est-à-dire qu'il doit être facile d'exprimer ses préférences dans le langage proposé (voir sur ce sujet les travaux de Sandholm et Boutilier (2006) dans le cadre des enchères combinatoires). La difficulté de l'élicitation des préférences dépend bien-sûr de la quantité de « données » à considérer, mais également de la proximité du langage à la façon dont les humains expriment naturellement leurs préférences : on parle de *pertinence cognitive* pour désigner une telle proximité. Enfin, le langage doit offrir la possibilité de modéliser un grand nombre des préférences possibles ; cette *puissance expressive* a été étudiée pour des préférences logiques (Chevalyere *et al.* (2006)), ainsi que dans le cadre des enchères combinatoires (Boutilier et Hoos (2001)).
- Est-il facile, algorithmiquement parlant, de travailler avec ce langage ? La *compacité* du langage, qui traduit sa complexité spatiale, c'est-à-dire la « taille » qu'occupe la représentation d'une structure de préférence avec ce langage, constitue un critère important : en pratique, la quantité de mémoire que nécessite l'utilisation d'un langage de représentation compacte peut s'avérer rédhibitoire pour son utilisation. La *complexité computationnelle* des problèmes courants doit également être prise en compte : comparaison de deux alternatives, optimalité d'une alternative, etc. (voir par exemple Lang (2004) ou Bouveret et Lang (2005)).

Ces critères sont généralement dépendants et même antagonistes : par exemple, l'expressivité d'un langage est généralement obtenue aux dépens de la facilité d'élicitation des préférences et de la simplicité algorithmiques des opérations sur le langage.

Nous présentons ci-dessous de façon informelle deux familles classiques de langages de représentation compacte de préférences : les langages à base de logique et les langages GAI (*generalized additive independance*, indépendance additive généralisée).

Représentation logique de préférence Une part non négligeable des problèmes de décision collective, dont les problèmes de partage (voir chapitre 2 page 27), fait intervenir des sous-espaces

associés à des variables de décision binaires, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{D}_k = \mathbb{B} = \{0, 1\}$. Dans ce cas, il est possible et même judicieux d'utiliser la logique propositionnelle pour exprimer des préférences sur ces espaces. Lang (2006) propose une vue d'ensemble de ces langages.

Le principe général de la représentation logique de préférence est bâti sur la notion de *but* : un but est une formule logique φ construite sur le langage propositionnel formé par les variables de décision, et traduisant une préférence élémentaire. Chaque décision, c'est-à-dire chaque interprétation des variables de décision, constitue ou non un modèle de φ . Un but permet ainsi de représenter une structure de préférence dichotomique.

Exemple 2 (suite). *Nous retrouvons Alexandre. Nous imaginons cette fois qu'il a préalablement acheté son billet de cinéma et qu'il a également réservé une table dans un restaurant et un bar.*

Il ne lui reste donc qu'à déterminer quels amis il souhaite inviter. Le problème de décision ne comporte alors que trois variables de décisions binaires qui correspondent aux décisions « j'invite [Blandine, Charlotte, David] » ou « je n'invite pas [Blandine, Charlotte, David] ». Les considérations suivantes sont à prendre en compte pour définir les préférences :

- *Charlotte et David forment un couple : il serait donc malvenu pour Alexandre d'inviter Charlotte sans David.*
- *Blandine et Charlotte s'entendent mal entre elles : il n'est donc pas envisageable d'inviter les deux en même temps.*

De telles préférences peuvent être représentées par le but suivant : $\neg(d_{Ch+} \wedge \neg d_{Da+}) \wedge \neg(d_{Ch+} \wedge d_{Bl+})$.

Toute combinaison de valeurs pour les variables de décision qui satisfait la formule correspond alors à une bonne décision, par exemple inviter Charlotte et David, mais pas Blandine, ou encore inviter David et Blandine, mais pas Charlotte.

Si une telle représentation reste assez fruste, elle peut être étendue et enrichie en considérant non plus une unique formule mais plutôt une famille de formules logiques, alors appelée *base de buts* ; à ces formules, peuvent être par exemple associées des priorités (on parle alors de *base de buts stratifiée*) ; on peut également attribuer à chaque formule de la famille un poids numérique (on parle alors de *base de buts pondérés*) : pour une décision donnée, les poids associés aux formules vérifiées par cette décision sont agrégés par un opérateur (\sum ou \min par exemple) en une unique valeur numérique, qui traduit l'intensité de la préférence vis-à-vis de cette décision.

Additivité généralisée Considérons un problème de décision collective dont l'espace de décision est structuré comme le produit cartésien de sous-espaces finis quelconques, et donc dans lequel chaque décision est constituée par l'intanciation d'un ensemble de variables. On souhaite utiliser en entrée du problème une structure de préférence valuée.

On distingue deux cas extrêmes quant aux éventuelles dépendances préférentielles sur ces variables :

1. les préférences sur les différentes variables sont entièrement dépendantes : construire une structure de préférence valuée nécessite de fournir une valeur numérique pour chaque combinaison de valeur des variables, c'est-à-dire pour chaque décision possible. Les préférences peuvent alors être exprimées de façon riche, mais leur élicitation est difficile voire impossible du fait de la taille combinatoire de l'espace de décision, comme on l'a vu.
2. les préférences sur les différentes variables sont entièrement indépendantes : cette indépendance permet alors de construire une structure de préférence valuée pour chaque variable

de décision ; l'intensité de la préférence pour une décision donnée est alors donnée par l'agrégation des préférences numériques sur chaque variable de décision. Une méthode classique d'agrégation dans ce cas consiste à réaliser la somme des valeurs numériques sur chaque variable de décision. On parle dans ce cas de *préférences additives*. De telles préférences sont rapides à éliciter, du fait du faible nombre d'alternatives à considérer, mais interdisent toute dépendance préférentielles. Elles ont été introduites par Krantz *et al.* (1971) et Bacchus et Grove (1995).

Entre ces deux extrêmes, les préférences sur chaque variable de décision peuvent être partiellement dépendantes, selon la réalité cachée derrière chaque variable. La notion d'additivité des préférences a été généralisée par Fishburn (1970) pour pouvoir prendre en compte de tels cas, tout en conservant la possibilité d'une élicitation simple des préférences. Les variables de décision qui entretiennent des dépendances sont regroupées en « clusters » sur lesquels les préférences sont spécifiées *in extenso* (cas 1 ci-dessus) ; les clusters restent quant à eux additivement indépendants (cas 2 ci-dessus). On parle alors d'indépendance additive généralisée, et les préférences peuvent être représentées par des graphes appelés *réseaux GAI* (Gonzales et Perny (2004) et Braziunas et Boutilier (2005)).

Exemple 2 (suite). *Nous retrouvons Alexandre et son problème de décision. Rappelons qu'il souhaite aller au cinéma (12 films possibles : F1 à F12), puis au restaurant (4 restaurants possibles : R1, R2, R3 et R4), et finir la soirée dans un bar (10 bars possibles : B1 à B10). Il se demande également s'il va inviter Blandine et/ou Charlotte et/ou David à l'accompagner.*

Le problème de décision peut de façon classique être modélisé par le produit cartésien des sous-espaces de décision $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_r \times \mathcal{D}_b \times \mathcal{D}_{Bl} \times \mathcal{D}_{Ch} \times \mathcal{D}_{Da}$ (voir exemple 2 page 13).

Si aucune hypothèse n'est faite, Alexandre devra comme on l'a vu évaluer numériquement toutes les alternatives possibles, au nombre de $12 \times 4 \times 10 \times 2 \times 2 \times 2 = 3840$. Cela s'avérant en pratique sinon impossible, tout du moins non souhaitable, considérons les hypothèses suivantes :

1. *Le choix du film, celui du restaurant et celui du bar sont deux à deux indépendants.*
2. *Si Charlotte et David sont invités, ils ne pourront rejoindre Alexandre que pour le cinéma : les présences de Charlotte et David sont donc préférentiellement indépendantes du choix du restaurant et du bar. Et inversement, Blandine ne pourra rejoindre Alexandre qu'en fin de soirée au restaurant puis au bar, d'où l'indépendance préférentielle entre la présence de Blandine et le choix du film.*

Les clusters de variables pourront donc être définis comme suit :

$$\begin{cases} X &= \{charlotte, david, film\} \\ Y &= \{blandine, restaurant\} \\ Z &= \{blandine, bar\} \end{cases}$$

Les préférences d'Alexandre sont alors exprimées par trois fonction u_X , u_Y , et u_Z , définies respectivement sur $\mathcal{D}_{Ch} \times \mathcal{D}_{Da} \times \mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_{Bl} \times \mathcal{D}_r$, et $\mathcal{D}_{Bl} \times \mathcal{D}_b$. Le nombre d'alternatives à considérer est alors seulement de $2 \times 2 \times 12 + 2 + 2 \times 10 = 76$.

1.3 Décision et connaissances incomplètes

Aucun décideur ne dispose d'une connaissance de la nature exacte, sûre et exhaustive. Une solution simple et immédiate consiste à négliger cette réalité et à faire l'hypothèse d'une connaissance parfaite et totale. Travailler sous une telle hypothèse s'avère en effet légitime dans une large

part des problèmes de décision, dès que le petit nombre de variables nécessaire à la résolution du problème est suffisamment bien connu, et de façon suffisamment sûre.

Cependant, certains problèmes n'autorisent pas une telle hypothèse, l'aléa sur la connaissance du décideur étant trop important. Il faut alors développer une modélisation adaptée, qui intègre cette notion d'incertitude, de risque.

L'aléa d'un problème de décision est formalisé par la définition d'un ensemble \mathcal{S} d'états de la nature, c'est-à-dire l'ensemble des états possibles de la nature une fois l'aléa levé. Selon le problème considéré, on peut disposer de plus ou moins d'informations sur les états de la nature : il convient donc de classer les problèmes selon la connaissance admise sur ces états de la nature. En suivant la distinction de Knight (1921), on parlera ainsi :

- de problème de décision *dans le risque*, quand l'aléa est probabilisé, c'est-à-dire qu'il existe une distribution de probabilité objective sur les états de la nature ;
- de problème de décision *dans l'incertain*, quand la connaissance disponible sur les états de la nature est très réduite, de par la nature même de l'aléa.

Exemple 3. *Les problèmes de décision impliquant les conditions météorologiques sont généralement des problèmes de décision sous risque ; on est par exemple capable de fournir une probabilité de précipitations pour un jour donné.*

À l'inverse, un problème de décision lié à la gestion de crise, faisant par exemple intervenir une entreprise qui doit décider de porter ou non plainte à l'encontre d'un tiers pour diffamation, est un problème de décision dans l'incertain : en effet, les réactions des médias et du public sont tellement imprévisibles que c'est dans ce cas l'ensemble même des états possibles de la nature qui est mal connu.

Ces deux structures de connaissance constituent des extrêmes, et il existe bien-sûr des problèmes intermédiaires. Nous nous limitons dans cette section aux problèmes de décision en présence de risque.

Le risque d'un problème de décision est modélisé en introduisant la notion d'espace probabilisé, construit à partir de l'ensemble des états de la nature.

Définition 10 (Espace probabilisé). *Un espace probabilisé est un triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \text{Pr})$ formé d'un ensemble \mathcal{S} d'états de la nature, d'une tribu ou σ -algèbre \mathcal{A} d'événements sur \mathcal{S} et d'une mesure de probabilité Pr sur cette σ -algèbre ($\text{Pr}(\mathcal{S}) = 1$).*

Les résultats qui peuvent découler de la réalisation d'un état de la nature sont modélisés par un ensemble \mathcal{W} de conséquences. On introduit la notion d'acte, qui permet de relier les états de la nature aux conséquences qu'ils produisent.

Définition 11 (Acte). *On appelle acte toute application f mesurable de $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \text{Pr})$ dans $(\mathcal{W}, \mathcal{G})$, où \mathcal{G} est une tribu ou σ -algèbre contenant tous les singletons de \mathcal{W} .*

Exemple 4 (Laffont (1991)). *On considère une roulette qui fait sortir de façon équiprobable les nombres de 1 à 10. On propose un billet de loterie qui fait gagner 100 € si et seulement si un nombre pair sort.*

Dans cet exemple, l'ensemble des états de la nature est $\mathcal{S} = \llbracket 1, 10 \rrbracket$ et un événement sera par exemple $E = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ correspondant à l'apparition d'un nombre impair. L'ensemble des

conséquences – ici financières – est $\mathcal{W} = \mathbb{R}$, et $\mathcal{G} = \mathcal{B}$ est la tribu des boréliens. Le billet de loterie définit alors un acte f de $(\mathcal{S}, \wp(\mathcal{S}), \text{Pr})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, Pr étant la mesure de probabilité associée à l'équiprobabilité de l'apparition des numéros. Dans cet exemple, l'ensemble $\{0, 100\} \subset \mathcal{W}$ des conséquences avec des probabilités de réalisation non nulles est fini.

L'ensemble des actes, noté \mathcal{V} , constitue l'ensemble des alternatives ou décisions possibles auxquelles est confronté le décideur, c'est donc l'espace de décision du problème. Les préférences du décideur sont supposées représentables par une structure de préférence ordinaire sur l'espace \mathcal{V} des actes (voir Axiome 1 page ci-contre).

Nous nous plaçons dans la suite dans le cas où $(\mathcal{W}, \mathcal{G}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, ce qui permet par exemple de représenter des conséquences financières. On fait de plus l'hypothèse que l'ensemble \mathcal{S} des états de la nature est fini ; la tribu \mathcal{A} est alors simplement l'ensemble des parties de \mathcal{S} ($\mathcal{A} = \wp(\mathcal{S})$) et un événement $E \in \mathcal{A}$ est par suite un sous-ensemble de \mathcal{S} .

Tout acte $f : (\mathcal{S}, \wp(\mathcal{S}), \text{Pr}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ induit une mesure de probabilité P_f sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, définie par :

$$\forall I \in \mathcal{B}, P_f(I) = \text{Pr}(f^{-1}(I))$$

L'ensemble \mathcal{S} étant supposé fini, P_f est donc une distribution de probabilité support fini sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. On appelle *loteries* de telles distributions de probabilité à support fini sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. On note \mathcal{L}_0 leur ensemble, et on écrira $P = (\langle w_1, \dots, w_N \rangle, \langle p_1, \dots, p_N \rangle) \in \mathcal{L}_0$, $N \in \mathbb{N}$, pour désigner la loterie P qui donne les conséquences w_i avec les probabilités p_i . On appelle *loterie sûre* toute loterie de la forme $(\langle w \rangle, \langle 1 \rangle)$, qui donne la conséquence w à coup sûr ; on s'autorise à confondre une conséquence w et la loterie sûre associée $(\langle w \rangle, \langle 1 \rangle)$.

Cette relation entre loteries et actes permet d'exprimer les préférences du décideur par une structure de préférence ordinaire sur l'ensemble \mathcal{L}_0 des loteries sur $(\mathcal{W}, \mathcal{G})$. Par abus de notation, et de même que précédemment, on note \succeq cette structure de préférence.

$$\forall (f, g) \in \mathcal{V}, f \succeq g \Leftrightarrow P_f \succeq P_g \quad (1.4)$$

Par suite, est naturellement induite une structure de préférences sur les conséquences de \mathcal{W} , également notée \succeq , et définie à partir de loteries sûres :

$$\forall (w_1, w_2) \in \mathcal{W}^2, w_1 \succeq w_2 \Leftrightarrow P = (\langle w_1 \rangle, \langle 1 \rangle) \succeq Q = (\langle w_2 \rangle, \langle 1 \rangle) \quad (1.5)$$

Forts de cette introduction, nous présentons la théorie de l'utilité espérée et l'une de ses extensions, la théorie de l'utilité espérée dépendante au rang ; il s'agit de théories normatives, qui proposent un ensemble d'axiomes simples caractérisant des propriétés que devraient vérifier les préférences d'un décideur rationnel, puis d'en déduire un résultat général sur l'évaluation par un tel décideur de l'attrait des différentes alternatives qui lui sont proposées. Nous exposons également la principale théorie descriptive de décision dans le risque, qui constitue elle aussi une généralisation de la théorie de l'utilité espérée.

Cette section n'a pas vocation à être exhaustive : nous invitons le lecteur curieux à se référer aux ouvrages de Bouyssou et Vincke (2006) et Machina (1987) pour un exposé plus complet sur les théories de la décision en présence d'aléa ; on consultera également avec profit l'ouvrage de Chew et Epstein (1989) en ce qui concerne les théories qui dépassent le cadre de l'espérance d'utilité.

1.3.1 Utilité espérée

Le modèle de l'espérance d'utilité a été proposé par Cramer et Bernoulli au XVIII^e siècle. Il a été introduit par von Neumann et Morgenstern (1947). Il constitue la théorie canonique de décision dans le risque, et repose sur l'énoncé de trois axiomes et d'un théorème.

Axiome 1 (Préordre total). *La structure de préférence \succeq sur \mathcal{L}_0 est un préordre total non trivial.*

Cet axiome implique la réflexivité, la transitivité et la complétude de \succeq . Par préordre *non trivial*, on impose l'existence de P et Q dans \mathcal{L}_0 telles que $P \succ Q$.

L'exposé des deux autres axiomes requiert l'introduction de la notion de *mélange de loterie*.

Définition 12 (Mélange de loteries). *Soient deux loteries P et Q dans \mathcal{L}_0 . La loterie notée $\alpha P + (1 - \alpha)Q \in \mathcal{L}_0$ est appelée α -mélange des loteries P et Q et vérifie, pour tout événement $E \in \mathcal{A}$:*

$$[\alpha P + (1 - \alpha)Q](E) = \alpha P(E) + (1 - \alpha)Q(E) \quad (1.6)$$

Nous pouvons maintenant définir l'axiome de continuité (à noter que cet axiome s'exprime de façon différente selon l'espace sur lequel portent les préférences).

Axiome 2 (Continuité). *Pour toutes loteries P , Q et R dans \mathcal{L}_0 , telles que $P \succeq Q \succeq R$, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que :*

$$\alpha P + (1 - \alpha)R \sim Q$$

Le dernier axiome est l'axiome central de la théorie : il s'agit de l'axiome d'indépendance. Il stipule que, si une loterie est préférée à une autre, alors son mélange à une troisième sera préféré au mélange de l'autre avec la troisième dans les mêmes « proportions ».

Axiome 3 (Indépendance). *Pour toutes loteries P , Q et R dans \mathcal{L}_0 , et pour tout α dans $[0, 1]$, on a :*

$$P \succeq Q \Leftrightarrow \alpha P + (1 - \alpha)R \succeq \alpha Q + (1 - \alpha)R$$

Même si la logique de cet axiome peut sembler intuitive, il est à noter que c'est lui qui cristallise l'essentiel des critiques de la théorie de l'espérance d'utilité.

Le théorème suivant exprime l'équivalence entre la représentation des préférences sous forme d'une structure vérifiant les axiomes ci-dessus d'une part, et sa représentation sous forme d'espérance d'utilité d'autre part.

Théorème 1 (théorème de l'espérance d'utilité). *Soit \mathcal{L}_0 l'ensemble des loteries (lois de probabilité à support dans \mathcal{W}), muni de la relation de préférence \succeq . Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

1. \succeq satisfait aux axiomes de préordre total, de monotonie, de continuité et d'indépendance.
2. il existe une fonction d'utilité $U : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ représentant la relation \succeq avec :

$$\forall P = (\mathbf{w}, \mathbf{p}) \in \mathcal{L}_0, U(P) = \sum_k p_k u(w_k) \quad (1.7)$$

où $u : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante définie à une transformation affine strictement croissante près par $u(w) = U(\langle w \rangle, \langle 1 \rangle)$, c'est-à-dire l'utilité de la loterie donnant la conséquence w comme certaine.

1.3.2 Limites de l'espérance d'utilité

La théorie de l'espérance d'utilité est construite à partir d'axiomes spécifiant les caractéristiques des préférences d'un décideur supposé rationnel. Bien qu'attrayants en théorie, il s'avère qu'il existe des situations pratiques dans lesquelles ces axiomes ne sont pas respectés par les préférences d'un être humain. Allais (1953) propose ainsi un couple d'alternatives pour lesquels une majorité d'agents humains choisiront en contradiction avec l'axiome d'indépendance (Axiome 3 page précédente ci-dessus).

Exemple 5 (Paradoxe d'Allais). *Situation 1 : on demande aux sujets de choisir entre les options A et B.*

- A : 50% de chances de gagner un voyage de trois semaines en Angleterre, France, et Italie ;
- B : un voyage d'une semaine en France à coup sûr.

Situation 2 : on demande aux sujets de choisir entre les options A' et B'.

- A' : 5% de chances de gagner un voyage de trois semaines en Angleterre, France, et Italie ;
- B' : 10% de chances de gagner un voyage d'une semaine en France.

On constate en pratique qu'une majorité de sujets choisira les options B pour la situation 1 et A' pour la situation 2. Supposons la théorie de l'espérance d'utilité valide, et posons $u(\emptyset) = 0$. Le choix de l'option B (situation 1) implique l'inégalité

$$u(\text{voyage de trois semaines}) < \frac{100\%}{50\%} u(\text{voyage d'une semaine}) \quad (1.8)$$

tandis que le choix de l'option A' (situation 2) implique l'inégalité

$$u(\text{voyage de trois semaines}) > \frac{10\%}{5\%} u(\text{voyage d'une semaine}) \quad (1.9)$$

soit exactement l'inégalité inverse.

Le choix des sujets invalide donc les axiomes de la théorie de l'espérance d'utilité, et en particulier ici l'axiome d'indépendance.

L'exemple 5 est connu sous le nom de paradoxe d'Allais. Il met en lumière le fait que le comportement rationnel d'un être humain consiste à surévaluer une option certaine (option B de la situation 1) : on parle d'*effet de certitude*.

De nombreuses théories ont vu le jour, pour tenter de répondre à cette critique de l'espérance d'utilité. Machina (1982) propose de supprimer l'axiome d'indépendance et d'utiliser pour représenter les préférences une fonctionnelle non linéaire dans le cas général mais « différentiable » ; un agent exprimant ses préférences par une telle fonctionnelle pourra ainsi *localement* (i.e. pour des petites variations des probabilités) être considéré comme satisfaisant l'hypothèse de l'espérance d'utilité.

D'autres auteurs, tels Jaffray (1988) ou Gilboa (1988), proposent d'affaiblir l'axiome d'indépendance en ne l'imposant que pour des loteries ayant même minimum (ou « pire conséquence de probabilité non nulle ») : Gilboa aboutit alors à une représentation des préférences vis-à-vis des loteries qui introduit classiquement une fonction d'utilité, conserve l'espérance mathématique, mais fait également jouer un rôle particulier à l'utilité de la pire conséquence ; Cohen (1992) et Essid (1997) restreignent quant à eux l'axiome d'indépendance à des loteries ayant même minimum *et* même maximum. On constate qu'une large partie des violations du modèle de von

Neumann et Morgenstern disparaît dans ces conditions : en particulier, l'effet de certitude est correctement modélisé.

La contribution la plus connue est apportée par Quiggin (1982) avec la théorie de l'utilité anticipée, aujourd'hui appelée théorie de l'utilité espérée dépendante au rang (en anglais *rank dependant expected utility*). De façon informelle, Quiggin remplace les probabilités intervenant dans la théorie de l'utilité espérée par des poids ne dépendent pas seulement de la probabilité de la conséquence, mais de l'ensemble de la distribution de probabilité.

Cette théorie constitue une généralisation de la théorie de l'utilité espérée, en affaiblissant les axiomes introduits par von Neumann et Morgenstern. Le champ des axiomes d'indépendance (Axiome 3 page 19) et de continuité (Axiome 2 page 19) est réduit aux loteries sûres : on obtient respectivement l'axiome de dominance (Axiome 4) et une nouvelle forme de l'axiome de continuité (Axiome 5).

On rappelle que l'on s'autorise à confondre une conséquence $w \in \mathcal{W}$ et la loterie sûre associée $(\langle w \rangle, \langle 1 \rangle) \in \mathcal{L}_0$; ainsi, pour $P \in \mathcal{L}_0$, on écrira par exemple $w \sim P$ pour signifier $(\langle w \rangle, \langle 1 \rangle) \sim P$.

Axiome 4 (Dominance). *Pour toutes conséquences w_1 et w_2 dans \mathcal{W} , et tout réel p dans $[0, 1]$:*

$$w_1 \succeq w_2 \Rightarrow w_1 \succeq (\langle w_1, w_2 \rangle, \langle p, 1-p \rangle)$$

Axiome 5 (Continuité). *Pour toutes conséquences w_1, w_2 et w_3 dans \mathcal{W} , telles que les loteries sûres associées vérifient $P = (\langle w_1 \rangle, \langle 1 \rangle) \succeq Q = (\langle w_2 \rangle, \langle 1 \rangle) \succeq R = (\langle w_3 \rangle, \langle 1 \rangle)$, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que :*

$$\alpha P + (1 - \alpha R) \sim Q$$

Enfin, un axiome d'indépendance affaibli est rajouté, de sorte à assurer l'indépendance des poids h_k qui apparaissent dans la fonction d'utilité (voir théorème 2) vis-à-vis des conséquences.

Axiome 6 (Indépendance faible). *Soient $P = (\mathbf{w}, \mathbf{p})$ et $Q = (\mathbf{w}', \mathbf{p})$ deux loteries de \mathcal{L}_0 . S'il existe un vecteur \mathbf{c} d'éléments de \mathcal{W} qui vérifie :*

$$\forall k, c_k \sim \frac{1}{2}w_k + \frac{1}{2}w'_k$$

ainsi que w_1^ et w_2^* dans \mathcal{W} qui vérifient :*

$$w_1^* \sim P, w_2^* \sim Q$$

alors

$$(\mathbf{c}, \mathbf{p}) \sim \frac{1}{2}w_1^* + \frac{1}{2}w_2^*$$

Le théorème suivant montre alors qu'on peut construire une fonction d'utilité V qui représente les préférences exprimées par la relation \succeq .

Théorème 2. *Soit \mathcal{L}_0 l'ensemble des loteries à support dans \mathcal{W} , muni de la relation de préférence \succeq . Alors, si \succeq vérifie les axiomes de préordre total (Axiome 1 page 19), de dominance (Axiome 4), de continuité (Axiome 5), et d'indépendance faible (Axiome 6), alors il existe une fonction d'utilité $V : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie à une transformation affine strictement croissante près qui représente \succeq et qui s'écrit :*

$$\forall P = (\mathbf{w}, \mathbf{p}) \in \mathcal{L}_0, V(P) = \sum_k h_k(\mathbf{p})u(w_k)$$

où $\mathbf{h}(\langle 1 \rangle) = 1$ et $\mathbf{h}(\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle) = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

Ainsi, l'introduction des fonctions h_k implique que le coefficient associé à un gain $u(w_k)$ dans le calcul de la fonction représentant les préférences dépend non seulement de la probabilité du gain (comme c'est le cas dans la théorie de l'utilité espérée, où ce coefficient est *exactement* la probabilité du gain), mais également de la probabilité des autres gains possibles.

La théorie de l'espérance d'utilité dépendante au rang propose une modélisation plus proche du comportement d'un être humain que la théorie de l'utilité espérée. Ses axiomes autorisent ainsi des comportements récurrents en pratique mais non modélisés par la théorie de von Neumann et Morgenstern, tels la tendance à la sur-assurance, c'est-à-dire la tendance naturelle à souscrire des assurances dont les primes sont supérieures à l'espérance des pertes en cas de sinistre¹, ou bien encore l'attitude adoptée face à un aléa faisant intervenir avec une très faible probabilité d'occurrence un événement catastrophique ou à l'inverse très favorable.

1.3.3 Théorie des perspectives

La théorie des perspectives (en anglais *prospect theory*) a été proposée par Kahneman et Tversky (1979). Nous faisons le choix de la présenter ici, bien qu'elle soit chronologiquement antérieure à la théorie de l'utilité espérée dépendante du rang ; en effet, il s'agit d'une théorie économique qui propose une approche non pas normative, mais plutôt descriptive, ce qui la distingue des deux théories précédemment exposées.

La théorie des perspectives propose, en se basant sur les constats empiriques présentés plus bas, de décrire les préférences d'être humains rationnels par la fonction d'utilité suivante.

$$\forall P \in \mathcal{L}_0, U(P) = \sum_k v(p_k)u(w_k) \quad (1.10)$$

où $v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, introduite initialement par Fellner (1965), est appelée *fonction de poids*, $v(p)$ étant le *poids de décision* associé à la probabilité p et $u : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *fonction de valeur*.

Comme on l'a vu plus haut, certaines situations où intervient l'effet de certitude prennent en défaut la théorie de l'utilité espérée en montrant que ses axiomes (et en particulier l'axiome central d'indépendance) s'avèrent ne pas être respectés par les préférences d'êtres humains rationnels.

L'expérience décrite dans l'exemple 6 met en lumière une autre situation où des êtres humains rationnels décident en contradiction avec la théorie de l'utilité espérée.

Exemple 6. *Situation 1 : on donne 1000 € à tous les sujets, puis on leur demande de choisir entre les options A et B :*

- A : 50% de chances d'obtenir 1000 € additionnels ;
- B : 500 € additionnels à coup sûr.

Situation 2 : on donne 2000 € à tous les sujets, puis on leur demande de choisir entre les options A' et B' :

- A' : 50% de chances de perdre 1000 € sur les 2000 € reçus ;

1. Cette acception du terme de « sur-assurance » est celle des économistes ; elle ne doit pas être confondue avec la signification du terme en droit des assurances, où il fait cette fois référence à une situation dans laquelle un bien est assuré pour une valeur supérieure à sa valeur à neuf, en conséquence de quoi l'assuré paie inutilement des primes d'un montant supérieur à ce qu'il est susceptible de recevoir en contrepartie.

- B' : 500 € perdus à coup sûr.

On constate en pratique qu'une majorité de sujets choisira les options B pour la situation 1 et A' pour la situation 2, alors même que, vues d'un point de vue de l'utilité finale, les deux situations sont strictement identiques : en effet, les options A et A' donnent 50% de chances de repartir avec 1000 € et 50% de chances de repartir avec 2000 €, et les options B et B' donnent toutes les deux 1500 € à coup sûr.

Cet exemple montre la nécessité, comme le souligne déjà Markowitz (1952), de définir une utilité de référence, et de travailler ensuite sur les gains ou les pertes d'utilité, non pas sur les utilités absolues finales.

D'autre part, un être humain rationnel aura tendance à apprécier différemment les écarts entre des petits gain ou pertes d'utilité et les mêmes écarts sur de gains ou pertes plus élevés : ainsi, la différence entre un gain de 100 € et un gain de 200 € sera considéré comme plus importante que celle entre un gain de 1000 € et un gain de 1100 €. Ce constat implique la concavité de u pour les gains, et réciproquement sa convexité pour les pertes.

Enfin, les auteurs font apparaître le phénomène dit d'effet miroir : des êtres humains rationnels n'ont pas le même comportement face à des situations impliquant des pertes que face à des situations impliquant des gains, contrairement à ce que propose la théorie de l'utilité espérée. L'expérience décrite dans l'exemple 7 illustre ce phénomène.

Exemple 7. *Situation 1 : on demande à des sujets de choisir entre les options A et B :*

- A : gain de 1000 € à coup sûr ;
- B : 50% de chances de gagner 2500 €.

Situation 2 : on demande à des sujets de choisir entre les options A' et B' :

- A' : perte de 1000 € à coup sûr ;
- B' : 50% de chances de perdre 2500 €.

On constate en pratique qu'une majorité de sujets choisira les options A pour la situation 1 et B' pour la situation 2, alors même que, dans chaque situation, les deux options proposées conduisent à la même utilité espérée.

En pratique, le phénomène d'effet miroir se traduit par une pente de la fonction de valeur u plus marquée pour les pertes que pour les gains.

La figure 1.1 page suivante propose un exemple de fonction de valeur regroupant les caractéristiques exposées ci-dessus :

- elle est définie sur les gains et les pertes par rapport à une utilité de référence plutôt que sur la valeur nette de l'utilité ;
- elle est concave pour les gains et convexe pour les pertes, reflétant ainsi les comportements classiques : rejet du risque (*risk-averse*) pour les gains et attrait du risque (*risk seeking*) pour les pertes ;
- la pente est plus marquée pour les pertes que pour les gains.

Les constats précédents viennent montrer que la perception par un agent de son utilité est très différente de l'utilité elle-même. Il en va de même pour sa perception de la probabilité d'occurrence d'une conséquence, en particulier pour les probabilités très proches de 0 ou de 1. Ainsi, face à une probabilité très faible (respectivement forte) un être humain rationnel aura tendance soit à la négliger, c'est-à-dire à la considérer égale à 0 (respectivement égale à 1) ou

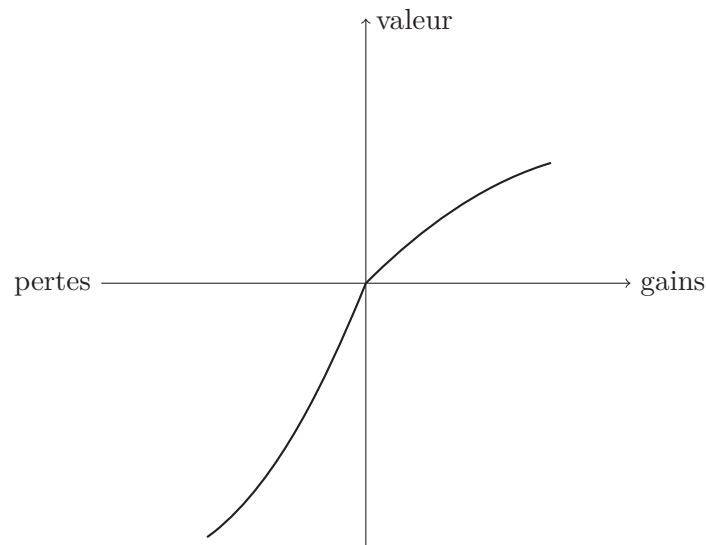


FIGURE 1.1 – Théorie des perspectives - exemple de fonction de valeur

bien, au-dessus (respectivement en deçà) d'un certain seuil, à la sur-évaluer (respectivement sous-évaluer) grossièrement ; Kahneman et Tversky expliquent ce phénomène par l'incapacité de l'être humain à appréhender correctement les très faibles ou très fortes probabilités. Il s'en suit que de très faibles variations de probabilités proches de 0 ou de 1 peuvent avoir des conséquences disproportionnées sur l'évaluation des conséquences associées.

D'autre part, la pente de la courbe est inférieure à 1 sur l'intégralité de l'intervalle de définition (à l'exception des régions voisines de 0 et de 1), ce qui traduit l'effet de certitude : la somme des poids associés à des événements complémentaires est inférieure au poids d'un événement certain.

La figure 1.2 page suivante propose un exemple de fonction de poids regroupant ces caractéristiques.

1.3.4 Adaptation de la notation des fonctions d'utilité

Arrêtons-nous un instant sur la forme des fonctions u_i introduites au sein des différentes théories présentées dans ce chapitre.

Une conséquence étant simplement le résultat d'une décision (ou acte) d'une part et de la réalisation d'un état de la nature donné d'autre part, on peut définir toute fonction d'utilité non pas sur l'espace des conséquences (comme proposé plus haut en cohérence avec les notations traditionnelles des théories exposées), mais plutôt sur le produit cartésien de l'espace des décisions admissibles par l'espace des états de la nature ; les fonctions d'utilité prennent donc la forme de l'équation 1.11.

$$\forall i \in \mathcal{A}, u_i : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.11)$$

Cette notation présente l'avantage de distinguer, parmi les variables influant sur l'utilité d'un agent, entre celles qui sont contrôlées par le décideur (regroupées dans la décision $d \in \mathcal{D}$) et celles

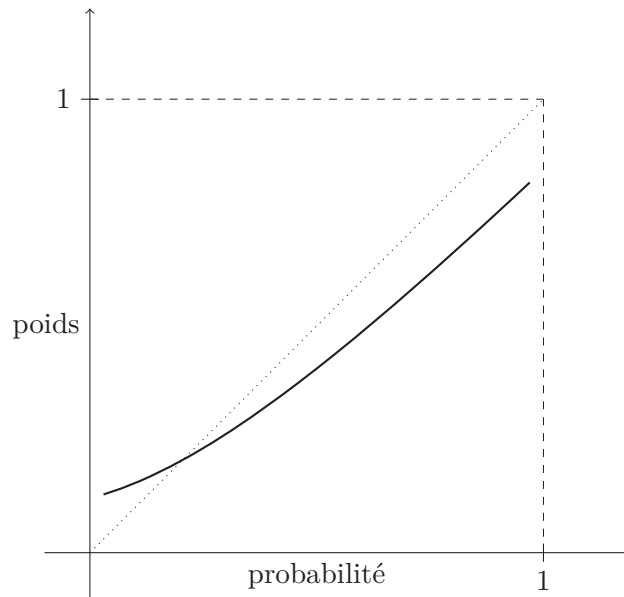


FIGURE 1.2 – Théorie des perspectives - exemple de fonction de poids

qui sont « choisies » par la nature, sur lesquelles ce dernier n'a aucune influence (regroupées dans l'état de la nature $s \in \mathcal{S}$). L'exemple 8 illustre cette notation.

Exemple 8. On considère une roulette qui fait sortir de façon équiprobable les nombres de 1 à 10. On propose d'acquérir (décision d) ou non (décision \bar{d}) un billet de loterie gratuit qui fait gagner 100 € si et seulement si un nombre pair sort. Notons que dans cet exemple, il est évidemment judicieux d'accepter le billet de loterie, mais nous ne préoccuons ici que de la modélisation du problème.

La modélisation traditionnelle des fonctions d'utilité en présence de risque propose une fonction définie sur les conséquences (ici financières, c'est-à-dire l'ensemble des réels) de la forme $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec, par exemple :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(100) = 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Ici, $v(0)$ désigne l'utilité d'un agent qui reçoit 0 €, qu'il ait acheté un billet et perdu (suite au tirage d'un nombre impair) ou bien qu'il ait décidé de ne pas participer à la loterie.

La notation que nous avons proposée préalablement à cet exemple permet de distinguer ces deux cas. Notre fonction d'utilité s'écrit $u : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{D} = \{d, \bar{d}\}$ et $\mathcal{S} = \llbracket 1, 10 \rrbracket$, avec par exemple :

$$\begin{cases} u(\bar{d}, \cdot) = u(d, 1) = u(d, 3) = \dots = u(d, 9) = 0 \\ u(d, 2) = u(d, 4) = \dots = u(d, 10) = 1 \end{cases} \quad (1.13)$$

Nous utiliserons dans toute la suite la notation introduite ici, dans laquelle les fonctions d'utilités sont définies sur le produit cartésien de l'espace des décisions admissibles par l'espace des états de la nature.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé une modélisation classique des problèmes de décision individuelle. Un problème de décision individuelle comporte un *espace de décision*, regroupant les décisions possibles, éventuellement restreint par un ensemble de *contraintes*. Les préférences du décideur sur les décisions restantes ou *décisions admissibles* sont représentées par une structure de préférence, objet mathématique qui peut prendre des formes diverses selon la richesse souhaitée de la représentation.

Quand le problème de décision comporte du risque, la littérature tente de définir ce qu'est le comportement rationnel d'un décideur par un ensemble d'hypothèses sur ses préférences : diverses théories sont alors disponibles, chacune basée sur un ensemble d'axiomes. Certaines d'entre elles, auxquelles nous nous intéressons particulièrement dans le cadre des travaux que nous présentons, proposent une représentation numérique des préférences du décideur ; c'est en particulier le cas de la théorie classique de l'utilité espérée.

Après nous être intéressés dans ce chapitre à la décision individuelle, nous suivons un enchaînement logique en nous penchant dans le chapitre 2 page ci-contre sur les problématiques qui apparaissent quand le décideur n'est plus seul : on parle alors de décision collective.

Chapitre 2

Décision collective et partage

La théorie de la décision individuelle exposée au précédent chapitre s'applique aux cas dans lesquels un individu seul est confronté à un choix. Dans une société ou plus largement tout groupe d'individus, alors appelés *agents*, une décision impacte généralement plus d'un individu, et la théorie de la décision individuelle, inadaptée, s'efface au profit celle de la décision collective.

Nous abandonnons le temps de ce chapitre les notions d'aléa et de risque introduites précédemment. Nous les retrouverons au chapitre 3 page 51, ou nous tenterons de les intégrer aux concepts de la décision collective que nous sommes sur le point de présenter.

Toute la problématique de la décision collective repose sur la difficile satisfaction des intérêts souvent divergents des agents concernés. La théorie de la décision individuelle s'intéresse à la représentation des préférences d'un agent confronté à un choix ; comment cette théorie peut-elle être mise à profit pour modéliser des problèmes de décision collective ?

Une instance d'un problème de décision collective est définie par les éléments suivants :

- un ensemble \mathcal{A} fini de n agents ;
- un ensemble \mathcal{D} fini de décisions possibles ou alternatives, parmi lesquelles un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ de décisions admissibles ;
- un vecteur de n structures de préférences sur \mathcal{F} , dont chaque élément représente les préférences d'un agent.

On suppose que toute l'information pertinente pour la prise de décision est regroupée dans les structures de préférences des agents. Cela signifie d'une part que ces derniers sont effectivement capables d'exprimer leur satisfaction ou *bien-être social* (*welfare* en anglais) vis-à-vis des décisions admissibles par une structure de préférence ordinale ou cardinale, et d'autre part que le choix d'une décision ne dépend que des niveaux de bien-être social des agents concernés, indépendamment des moyens mis en œuvre pour y aboutir ; ce choix est donc le résultat d'une simple agrégation des préférences individuelles faisant émerger la préférence de la société, dite *préférence collective*.

Ces hypothèses constituent un paradigme appelé *welfarisme* ; on distinguera le *welfarisme ordinal*, ou *choix social*, et le *welfarisme cardinal*, ou *décision collective utilitariste*, selon le type de structure de préférence utilisé par les agents. Le lecteur pourra se reporter avec profit aux ouvrages de Arrow *et al.* (2002) pour un exposé exhaustif sur le sujet ; Sen et Williams (1982) propose quant à lui une discussion philosophique sur l'utilitarisme et ses limites.

Une grande famille de problèmes entrant dans le cadre du welfarisme ordinal est constituée par les problèmes dans lesquels les préférences des agents sont représentées par des ordres totaux sur les alternatives. On parle dans ce cas de problème de vote, et par analogie avec le monde réel, les agents sont appelés votants et les alternatives candidats. La théorie du vote s'intéresse principalement à l'étude des procédures de vote, c'est-à-dire des fonctions qui, à partir des préférences des votants, choisissent le candidat vainqueur. Arrow (1950) exhibe quatre propriétés qui semblent naturellement devoir être vérifiées par toute procédure de vote acceptable et montre qu'aucune procédure ne pourra simultanément vérifier ces quatre propriétés. Le choix d'une procédure de vote se ramène donc au choix des propriétés qu'elle satisfait parmi celles-ci ; il peut également être influencé par d'autres aspects, en particulier la complexité computationnelle de la détermination du candidat vainqueur (voir par exemple Bartholdi *et al.* (1989)) ou les possibilités de manipulation du vote autorisées par la procédure (voir par exemple Gibbard (1973)).

Si maintenant une structure ordinale de préférence est jugée trop pauvre ou non adaptée au problème, par exemple parce qu'une connaissance de l'intensité des préférences des agents est requise, l'utilisation d'une structure de préférence valuée s'impose.

On se place maintenant et dans la suite de ce document dans le cas où les préférences des agents sont représentées par des structures de préférences cardinales (voir définition 9 page 12). Chaque agent $i \in \mathcal{A}$ dispose ainsi d'une fonction d'utilité propre $u_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$. Notons qu'une telle expression présuppose que les préférences des agents sont exprimées sur l'ensemble des partages *admissibles* ; on pourrait également choisir une représentation des préférences sur l'ensemble des partages *possibles* de sorte à couvrir les cas où les agents n'auraient pas *a priori* connaissance des contraintes du problème ; il suffirait toutefois dans ce cas d'utiliser les restrictions des fonctions d'utilité au sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ pour se ramener à notre modèle.

Les utilités des différents agents vis-à-vis d'une décision sont regroupées dans un vecteur appelé profil d'utilité.

Définition 13 (Profil d'utilité). *Soit une décision $d \in \mathcal{F}$. On appelle profil d'utilité associé à la décision d le vecteur $\mathbf{u}(d) = \langle u_1(d), \dots, u_n(d) \rangle$ de \mathcal{U}^n .*

L'exemple 9 illustre le type de problème associé à l'approche welfariste cardinale.

Exemple 9. *Le comité d'organisation d'un tournoi sportif impliquant trois équipes a le choix entre deux gymnases pour accueillir l'événement.*

Le premier gymnase (décision d_1) a une superficie limitée et les épreuves devront donc se dérouler sur un terrain de taille restreinte. Le second gymnase (décision d_2) ne pose aucun problème de superficie, mais le revêtement du sol est de piètre qualité.

Parmi les trois équipes, la première a l'habitude de s'entraîner sur un terrain de taille réduite et cette contrainte ne lui pose donc aucun problème, à l'inverse des deux autres équipes. L'état du sol du second gymnase ne satisfait que moyennement les équipes présentes. Ces préférences se traduisent par les utilités suivantes :

$$\begin{array}{lll} u_1(d_1) = 18 & u_2(d_1) = 6 & u_3(d_1) = 6 \\ u_1(d_2) = 9 & u_2(d_2) = 9 & u_3(d_2) = 9 \end{array}$$

Les profils d'utilité associés aux deux décisions possibles sont donc les suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(d_1) &= \langle 18, 6, 6 \rangle \\ \mathbf{u}(d_2) &= \langle 9, 9, 9 \rangle\end{aligned}$$

2.1 Décision collective

La résolution d'un problème de décision collective peut être vue comme la recherche de l'expression de préférences collectives représentant l'ensemble des préférences individuelles, lesquelles préférences collectives permettent de choisir une alternative du problème. La décision collective est donc confrontée à la problématique d'agrégation des structures préférences individuelles en une structure de préférence collective, lesquelles préférences collectives sont représentées par un *ordre de bien-être social*, ou encore par son équivalent numérique quand il existe, la *fonction d'utilité collective*.

Définition 14 (Ordre de bien-être social). *On appelle ordre de bien-être social tout préordre (non nécessairement complet) \succeq sur \mathcal{U}^n .*

Définition 15 (Fonction d'utilité collective). *Une fonction d'utilité collective est une fonction \oplus de \mathcal{U}^n dans \mathcal{U} .*

Pour une décision $d \in \mathcal{F}$ donnée, la valeur renvoyée par la fonction d'utilité collective sur le profil d'utilité $\mathbf{u}(d)$ associé est appelée *utilité collective* et notée $cu(d)$. On utilise dans toute la suite la fonction d'utilité collective sous la forme d'un opérateur, comme l'illustre l'équation 2.1.

$$\forall d \in \mathcal{F}, \quad cu(d) = \bigoplus_i u_i(d) \quad (2.1)$$

En suivant la proposition 1 page 12, la définition 16 permet d'associer les ordres de bien-être social aux fonctions d'utilité collectives qui classent les alternatives de façon identique. Il existe toutefois des ordres de bien-être social non représentables par une fonction d'utilité collective (voir Keeney et Raiffa (1976)).

Définition 16 (Représentation d'un ordre de bien-être social par une fonction d'utilité). *On dit qu'une fonction d'utilité collective cu représente un ordre de bien-être social \succeq quand :*

$$\forall (d_1, d_2) \in \mathcal{F}^2, \quad cu(d_1) \geq cu(d_2) \Leftrightarrow \mathbf{u}(d_1) \succeq \mathbf{u}(d_2)$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir formellement une instance d'un problème de décision collective.

Définition 17 (Instance d'un problème de décision collective). *Une instance d'un problème de décision collective est un tuple $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{U}, (u_i)_{i \in \mathcal{A}}, \succeq)$ où :*

- \mathcal{A} est un ensemble fini d'agents ;
- \mathcal{F} est un ensemble fini de décisions ou alternatives admissibles ;
- $(u_i)_{i \in \mathcal{A}}$ est un vecteur de fonctions d'utilité de \mathcal{F} dans \mathcal{U} ; u_i est la fonction d'utilité de l'agent i , qui à toute décision d associe une utilité $u_i(d)$;
- \succeq est un ordre de bien-être social sur l'ensemble des profils d'utilités, éventuellement défini par une fonction d'utilité collective.

Résoudre un problème de décision collective consiste à fournir une décision $d \in \mathcal{F}$, non majorée par l'ordre de bien-être social \succeq . Cette décision est appelée *solution* du problème.

2.1.1 Propriétés des ordres de bien-être sociaux

La sélection d'un critère de choix (c'est-à-dire un ordre de bien-être social ou une fonction d'utilité collective) doit traduire la position éthique et morale du décideur vis-à-vis du processus de décision. Les propriétés présentées dans cette section tentent de formaliser des concepts éthiques ou moraux, et guident ainsi le décideur vers l'ordre de bien-être social adapté.

On attend généralement d'un ordre de bien-être social qu'il vérifie la propriété dite d'*anonymat*. Celle-ci stipule qu'un ordre de bien-être social ne doit pas départager des alternatives ne différant que par une permutation des agents.

Définition 18 (Anonymat). *Soit \succeq un ordre de bien-être social. \succeq vérifie la propriété d'anonymat si et seulement si pour tout profil d'utilité $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^n$, σ permutation de \mathcal{A} et $\mathbf{v} \in \mathcal{U}^n$ tel que $(v_1, \dots, v_n) = (u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)})$, on a : $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$.*

Une autre propriété importante est la propriété de continuité. Les ordres de bien-être social continus sont susceptibles d'être représentables par une fonction d'utilité collective (voir plus loin théorème 3).

Définition 19 (Continuité). *Soit \succeq un ordre de bien-être social. On dit que \succeq est continu si et seulement si pour tout profil d'utilité $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^n$ les ensembles $\{\mathbf{u}' \mid \mathbf{u}' \succeq \mathbf{u}\}$ et $\{\mathbf{u}' \mid \mathbf{u} \succeq \mathbf{u}'\}$ sont fermés dans \mathcal{U}^n .*

Si le passage d'une alternative à une autre n'affecte qu'un ensemble restreint d'agents, il semble naturel d'imposer que le classement de ces deux alternatives du point de vue de la société ne dépende que des préférences de ces agents. Cela est formalisé par la propriété d'*indépendance aux agents non concernés* ou *séparabilité*.

Définition 20 (Séparabilité). *Soit \succeq un ordre de bien-être social. On dit que \succeq est séparable si et seulement si pour tout couple de profils d'utilité $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{U}^n$ et pour toute partition $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ de \mathcal{A} on a :*

$$(\mathbf{u}_{\mathcal{A}_1} \mathbf{u}_{\mathcal{A}_2}) \succeq (\mathbf{v}_{\mathcal{A}_1} \mathbf{u}_{\mathcal{A}_2}) \Leftrightarrow (\mathbf{u}_{\mathcal{A}_1} \mathbf{v}_{\mathcal{A}_2}) \succeq (\mathbf{v}_{\mathcal{A}_1} \mathbf{v}_{\mathcal{A}_2})$$

où $\mathbf{u}_{\mathcal{A}_1}$ (respectivement $\mathbf{u}_{\mathcal{A}_2}$) est la composante de \mathbf{u} sur le sous-ensemble d'agents \mathcal{A}_1 (respectivement \mathcal{A}_2).

Les principaux ordres de bien-être social séparables sont ceux issus de fonctions d'utilité collective additives, c'est-à-dire qui peuvent s'écrire à partir d'une fonction croissante $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$:

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{A}} u_i = \sum_{i \in \mathcal{A}} g(u_i) \quad (2.2)$$

Le théorème 3 relie ordre de bien-être social séparable et fonction d'utilité collective additive.

Théorème 3 (Debreu *et al.* (1960); Gorman (1968)). *On suppose que $n \geq 3$.*

Alors un ordre de bien-être social continu et séparable est représenté par une fonction d'utilité collective continue et additive.

Au-delà des propriétés de base exposées ci-dessus, le choix d'un critère repose généralement sur la façon dont il assure l'*efficacité* et/ou l'*équité* des solutions qu'il préconise. L'efficacité peut être formalisée par diverses propriétés mathématiques selon le sens qu'on souhaite donner à ce concept : nous en présentons une, classique dans le cadre de la décision collective et de la micro-économie, proposée par W. Pareto ; en revanche, en ce qui concerne l'équité, il n'existe pas de formalisations similaires.

Efficacité

La dominance de Pareto permet de comparer deux décisions entre elles, dès que l'une est au moins aussi bonne pour l'ensemble des agents, et strictement meilleure pour au moins l'un d'entre eux.

Définition 21 (Dominance de Pareto). *Soit deux alternatives d_1 et d_2 de \mathcal{F} . Alors, on dit que d_1 Pareto-domine d_2 (ou le profil $\mathbf{u}(d_1)$ Pareto-domine $\mathbf{u}(d_2)$) si pour tout agent $i \in \mathcal{A}$, $u_i(d_1) \geq u_i(d_2)$ et il existe un agent i_0 tel que $u_{i_0}(d_1) > u_{i_0}(d_2)$.*

On appelle alternative ou profil d'utilité Pareto-efficace toute alternative ou profil d'utilité non Pareto-dominé.

La notion de Pareto-efficacité peut se comprendre ainsi : à partir d'une décision Pareto-efficace, il n'est pas possible de trouver une autre décision qui améliore le bien-être d'un individu sans détériorer celui d'au moins un autre.

L'efficacité d'un ordre de bien-être social peut alors être vue comme sa capacité à privilégier les solutions Pareto-efficaces. Elle se traduit formellement par la vérification de la propriété dite d'*unanimité*.

Définition 22 (Unanimité). *Soit \succeq un ordre de bien-être social, et \mathbf{u} et \mathbf{v} deux profils d'utilité. \succeq vérifie la propriété d'unanimité si et seulement si $\mathbf{u} \succ \mathbf{v}$ dès que \mathbf{u} Pareto-domine \mathbf{v} .*

Équité

L'équité est un sentiment de justice naturelle et spontanée, fondée sur la reconnaissance des droits de chacun, sans qu'elle soit nécessairement inspirée par les lois en vigueur.

Dans les cas moins généraux qui nous intéressent ici, l'équité n'est pas nécessairement liée à l'idée de morale ou d'éthique, mais se définit plutôt comme un ensemble de règles, acceptées par l'ensemble des instances concernées, qui permettent de résoudre le problème de façon satisfaisante pour tous. Il s'agit de la définition proposée par Young (1994) :

« By “equitable”, I do not necessarily mean ethical or moral, but that which a given society considers to be *appropriate* to the need, status, and contribution of its various members. »

Ainsi, il semble dans un premier temps légitime de souhaiter réduire les inégalités apparaissant entre les agents. Nous introduisons une propriété classique, proposée par Pigou (1912) et Dalton (1920), qui qualifie les ordres de bien-être social privilégiant les alternatives qui égalisent le profil d'utilité en « déplaçant » de l'utilité depuis les agents les mieux dotés vers ceux les moins bien dotés. Une telle redistribution d'utilité est appelée *transfert de Pigou-Dalton* et constitue le fondement du principe de réduction des inégalités.

Définition 23 (Transfert de Pigou-Dalton). *Soient \mathbf{u} et \mathbf{u}' deux profils d'utilité. \mathbf{u}' est obtenu par transfert de Pigou-Dalton à partir de \mathbf{u} si et seulement si on peut trouver un couple d'agents distincts (i_1, i_2) , $i_1 \neq i_2$ dans \mathcal{A}^2 tels que :*

- la somme de leurs utilités est conservée : $u_{i_1} + u_{i_2} = u'_{i_1} + u'_{i_2}$;
- les inégalités sont réduites : $u_{i_1} < \{u'_{i_1}, u'_{i_2}\} < u_{i_2}$;
- les utilités des autres agents restent inchangées : $\forall i \in \mathcal{A} \setminus \{i_1, i_2\}, u_i = u'_i$.

Un ordre de bien-être social réduit les inégalités quand, de deux alternatives dont l'une est obtenue par transfert de Pigou-Dalton à partir de la seconde, il privilégie la première.

Définition 24 (Principe de réduction des inégalités). Soit \succeq un ordre de bien-être social. \succeq satisfait le principe de réduction des inégalités si et seulement si pour toute paire de profils d'utilité \mathbf{u} et \mathbf{u}' tels que \mathbf{u}' est obtenu par transfert de Pigou-Dalton à partir de \mathbf{u} , on a $\mathbf{u}' \succ \mathbf{u}$.

Si la préférence pour \mathbf{u}' est large ($\mathbf{u}' \succeq \mathbf{u}$), \succeq satisfait faiblement le principe de réduction des inégalités.

Dans le cas des ordres de bien-être social définis à partir d'une fonction d'utilité collective additive, le principe de réduction des inégalités peut être caractérisé simplement, comme le montre le théorème 4.

Théorème 4. Soit \succeq un ordre de bien-être social défini à partir d'une fonction d'agrégation collective \oplus additive :

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{A}} u_i = \sum_{i \in \mathcal{A}} g(u_i)$$

Alors \succeq vérifie le principe de réduction des inégalités si et seulement si la fonction g est concave.

Dans le cas d'un ordre de bien-être social quelconque représenté par une fonction d'utilité collective, réduction de inégalités et concavité de la fonction ne sont pas équivalents. La propriété de la fonction d'utilité collective équivalente à la réduction des inégalités pour son ordre de bien-être social associé est nommé Schur-concavité ; elle est introduite par la théorie de la majorisation (voir en particulier l'ouvrage de Marshall *et al.* (2010)).

Définition 25 (Schur-concavité). Soit \succeq un ordre de bien-être social défini à partir d'une fonction d'agrégation collective \oplus . Alors, on dira que \oplus est Schur-concave si et seulement si \succeq vérifie le principe de réduction des inégalités.

Si le principe de réduction des inégalités permet de caractériser un ensemble d'ordres de bien-être social intéressants du point de vue de l'équité qu'ils assurent, il ne fournit pas de moyen d'évaluation de l'(in)égalité intrinsèque d'une décision. Plusieurs mesures numériques ont été proposées, sous le nom d'*indices d'inégalité*.

Un indice d'inégalité est une fonction de \mathcal{U}^n dans \mathbb{R} définie à partir d'un ordre de bien-être social respectant le principe de réduction des inégalités : il s'agit d'une « distance » entre le profil d'utilités dont on veut estimer l'inégalité et le profil d'utilité parfaitement égalitaire équivalent selon cet ordre de bien-être social.

Définition 26 (Indice d'inégalité). Soit \succeq un ordre de bien-être social respectant le principe de réduction des inégalités.

Pour tout profil d'utilité \mathbf{u} , on appelle utilité également distribuée équivalente la valeur $\varepsilon(\mathbf{u}) \in \mathcal{U}$ qui vérifie $(\varepsilon(\mathbf{u}), \dots, \varepsilon(\mathbf{u})) \sim \mathbf{u}$, et on note $\hat{\mathbf{u}}$ la moyenne des utilités d'un profil d'utilité : $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i$.

L'indice d'inégalité associé à \succeq est alors défini par l'équation 2.3.

$$J(\mathbf{u}) = 1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{u})}{\hat{\mathbf{u}}} \quad (2.3)$$

Les indices d'inégalité les plus connus sont ceux construits par Gini (1921) et par Atkinson (1970).

L'indice de Gini est associé aux fonctions d'utilité collective de type *moyennes pondérées ordonnées* (voir section 2.1.2 page 37). Selon l'expression utilisée pour le calcul, il peut être également interprété comme un calcul d'aire faisant intervenir la courbe de Lorenz (voir proposition 2 page suivante), ou comme la moyenne des différences d'utilités deux-à-deux entre agents.

Pour tout vecteur d'utilité \mathbf{u} , on désigne dans la suite par \mathbf{u}^\uparrow le vecteur des composantes de \mathbf{u} triées dans l'ordre croissant.

Définition 27 (Indice d'inégalité de Gini). *L'indice d'inégalité de Gini est une fonction de \mathcal{U}^n dans \mathbb{R}^+ qui vérifie :*

$$G(\mathbf{u}) = 1 - \frac{1}{n^2 \hat{\mathbf{u}}} \left(\sum_{i=1}^n (2(n-i) + 1) u_i^\uparrow \right) = \frac{1}{2n^2 \hat{\mathbf{u}}} \sum_{1 \leq i, j \leq n} |u_i - u_j| \quad (2.4)$$

Les indices d'Atkinson constituent une famille d'indices d'inégalité, chacun associé à un ordre de bien-être social représenté par une fonction d'utilité collective de type *moyennes généralisées* (voir section 2.1.2 page 37).

Définition 28 (Indices d'inégalité d'Atkinson). *Les indices d'inégalité d'Atkinson sont définis par la famille :*

$$\begin{cases} J_q(\mathbf{u}) = 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{u_i}{\hat{\mathbf{u}}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & q \in [-\infty ; 1[\setminus\{0\}] \\ J_0(\mathbf{u}) = 1 - \left(\prod_{i=1}^n \frac{u_i}{\hat{\mathbf{u}}} \right)^{\frac{1}{n}} \end{cases} \quad (2.5)$$

Dominance de Lorenz

Les propriétés présentées précédemment s'intéressent soit à l'efficacité soit à l'équité de la solution. Il semble intéressant de disposer d'une nouvelle propriété dont le champ englobe à la fois efficacité et équité.

C'est en particulier le cas de la dominance de Lorenz, qui regroupe la dominance de Pareto et le principe de réduction des inégalités. Nous commençons par définir la courbe de Lorenz.

Définition 29 (Courbe de Lorenz). *Soit $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'agents. On appelle courbe de Lorenz de \mathbf{u} le vecteur $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = (u_1^\uparrow, \dots, \sum_{i=1}^k u_i^\uparrow, \dots, \sum_{i=1}^n u_i^\uparrow)$.*

On définit par convention $L(\mathbf{u})_0 = 0$. La courbe de Lorenz est alors représentée graphiquement par une fonction en escalier :

$$f_{\mathbf{L}(\mathbf{u})} : \begin{cases} [0, n] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto L(\mathbf{u})_{\lfloor x \rfloor} \end{cases}$$

La définition de la courbe de Lorenz montre que celle-ci se situe toujours en-dessous de la courbe de $x \rightarrow \hat{\mathbf{u}} \cdot x$, l'aire entre ces deux courbes indiquant le degré d'inégalité du profil \mathbf{u} ; le seul cas de linéarité intervient quand toutes les composantes de \mathbf{u} sont égales.

Exemple 10. Soient les profils d'utilité $\mathbf{u} = \langle 1, 9, 2, 8, 3, 1 \rangle$ et $\mathbf{v} = \langle 4, 4, 4, 4, 4, 4 \rangle$. Le calcul donne $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \langle 1, 2, 4, 7, 15, 24 \rangle$ et $\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \langle 4, 8, 12, 16, 20, 24 \rangle$. Les représentations de ces deux courbes de Lorenz est présentée sur la figure 2.1 ; une analyse graphique montre donc immédiatement que \mathbf{v} est moins inégalitaire que \mathbf{u} .

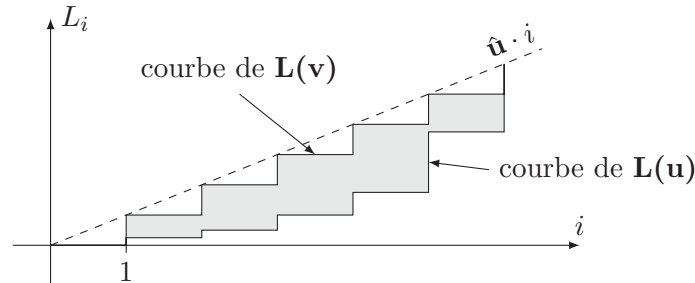


FIGURE 2.1 – Courbes de Lorenz des profils \mathbf{u} et \mathbf{v} de l'exemple 10

La courbe de Lorenz entretient également un lien étroit avec l'indice d'inégalité de Gini.

Proposition 2. L'indice d'inégalité de Gini s'écrit également :

$$G(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{i=1}^n (i \cdot \hat{u} - L(\mathbf{u})_i)}{\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n u_i}$$

L'indice de Gini d'un profil d'utilité peut donc être interprété comme l'aire délimitée par la courbe de Lorenz du profil d'utilité et celle d'un profil idéal ; il s'agit de l'aire grisée sur la figure 2.1.

Définition 30 (Dominance de Lorenz). On dit qu'un profil d'utilités \mathbf{u} domine au sens de Lorenz un profil d'utilité \mathbf{v} si sa courbe de Lorenz $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ Pareto-domine $\mathbf{L}(\mathbf{v})$.

Moulin (1988) montre que la dominance de Lorenz est liée à la dominance de Pareto et à la réduction des inégalités.

Proposition 3. Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux profils d'utilité. Alors :

- si \mathbf{u} Pareto-domine \mathbf{v} ou bien est obtenu par transfert de Pigou-Dalton à partir de \mathbf{v} , alors \mathbf{u} Lorenz-domine \mathbf{v} ;
- réciproquement, si \mathbf{u} Lorenz-domine \mathbf{v} , alors il existe une suite de transferts de Pigou-Dalton et d'améliorations de Pareto qui transforme \mathbf{v} en \mathbf{u} .

2.1.2 Ordres de bien-être social et fonctions d'utilité collective usuels

Le choix de l'agrégation permettant de définir la (ou les) meilleure(s) solution(s) d'un problème de décision collective est une problématique centrale, puisque comme on l'a vu, c'est lui qui véhiculera l'idée d'efficacité et/ou d'équité demandée à la solution. À une dimension (i.e. un seul agent concerné par la décision), il suffit bien-sûr de choisir une des solutions conduisant à la plus grande utilité pour cet agent ; il est alors évident que ce qui doit être maximisé est l'utilité de cet unique agent.

Mais en dimension $n > 1$, le problème devient moins intuitif. Considérons l'exemple 9 page 28. Le décideur peut choisir entre deux alternatives : la première donne le profil d'utilité $\langle 18, 6, 6 \rangle$ et la seconde conduit à des utilités de $\langle 9, 9, 9 \rangle$; la première décision conduit à des utilités disparates, mais dont la somme (c'est-à-dire la satisfaction totale des agents) est plus élevée que dans le cas de la seconde décision, où par contre les utilités sont identiques et tous les agents également satisfaits.

Il n'y a pas de « bonne » réponse à cette question. En effet, choisir un ordre de bien-être social consiste à définir arbitrairement un point de vue à partir duquel on observe puis compare les solutions. Ce choix est dépendant du problème étudié et requiert la connaissance précise de ce qui est attendu de la solution recherchée.

De nombreux ordres ont été proposés, généralement classés selon les axiomes que les solutions associées vérifient. Les ordres de bien-être social (et leurs fonctions d'utilité collective associées) dits *utilitariste classique* et *égalitariste classique* (et le raffinement *leximin* du second) constituent deux extrêmes en ce sens que l'équité est totalement absente du premier et très fortement recherchée par le second. Les autres ordres ou fonctions présentés ici sont regroupés en familles et proposent un réglage plus fin entre utilitarisme classique et égalitarisme classique.

Tous les ordres de bien-être social et fonctions d'utilité collectives présentées dans la suite sont construits à partir d'un espace de valuation réel. C'est un choix classique et l'on s'autorise dans la suite de ce document à utiliser directement \mathbb{R} en lieu et place de \mathcal{U} .

Utilitarisme classique (maxsum)

Introduit par Jeremy Bentham (1748-1832) et défendu au XX^e siècle par Harsanyi (1955), l'ordre de bien-être social utilitariste cherche à maximiser la somme des satisfactions des agents. La fonction d'utilité collective associée cu^* , basée sur l'opérateur $\oplus^* = \sum$, est dite fonction d'utilité collective utilitariste :

$$\forall d \in \mathcal{F}, cu^*(d) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(d) \quad (2.6)$$

Cette fonction possède plusieurs bonnes propriétés mais elle s'avère assez peu intéressante du point de vue de l'équité entre les agents ; ainsi, dans l'exemple du paragraphe précédent, cette fonction privilégiera les utilités $\langle 18, 6, 6 \rangle$ aux utilités $\langle 9, 9, 9 \rangle$.

Égalitarisme classique (maximin)

Développé par Rawls (1971), l'ordre de bien-être social égalitariste tend à égaliser le vecteur des utilités individuelles, et cherche systématiquement à augmenter la satisfaction du moins « riche » des agents. La fonction d'utilité collective associée $cu^{(e)}$, basée sur l'opérateur $\oplus^{(e)} = \min$, est dite fonction d'utilité collective égalitariste :

$$\forall d \in \mathcal{F}, cu^{(e)}(d) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(d) \quad (2.7)$$

Dans l'exemple ci-dessus, cette fonction privilégiera $\langle 9, 9, 9 \rangle$ à $\langle 18, 6, 6 \rangle$. Cependant, on reproche à cet ordre de ne pas satisfaire le principe d'unanimité : l'agrégateur min ne différenciera pas les profils $\langle 9, 9, 9 \rangle$ et par exemple $\langle 9, 20, 20 \rangle$; on parle d' « effet de noyade ». D'autre part, l'ordre de bien-être social égalitariste classique ne vérifie pas la propriété de séparabilité.

Ordre leximin Cet ordre de bien-être social a été proposé par Sen (1970) et Kolm (1972). Il ne se définit que par un préordre sur \mathbb{R}^n , puisqu’il n’existe pas dans le cas général de fonction d’utilité collective associée. Il s’agit d’un raffinement Pareto-efficace de l’égalitarisme classique, qui supprime l’effet de noyade.

Définition 31. Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux vecteurs d’utilité de \mathbb{R}^n . \mathbf{u} et \mathbf{v} sont indifférents pour le préordre leximin si et seulement si $\mathbf{u}^\uparrow = \mathbf{v}^\uparrow$. \mathbf{u} est préféré strictement à \mathbf{v} (noté $\mathbf{u} \succ_{\text{leximin}} \mathbf{v}$) si et seulement si :

$$\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ t.q. } \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, & u_i^\uparrow = v_i^\uparrow \\ u_{k+1}^\uparrow > v_{k+1}^\uparrow \end{cases} \quad (2.8)$$

Le préordre leximin préférera donc les utilités $\langle 9, 20, 20 \rangle$ aux utilités $\langle 9, 9, 9 \rangle$, le principe d’unanimité est satisfait.

Moyennes généralisées

Il s’agit d’une famille d’ordres introduite par Marichal (1999) sous le nom de *root-power quasi-arithmetic means*. Les fonctions d’utilité collective $cu^{(p)}$ associées sont paramétrées par un réel $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\forall d \in \mathcal{F}, \quad cu^{(p)}(d) = \left(\sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(d)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.9)$$

La famille des moyennes généralisées contient la fonction d’utilité collective utilitariste classique ($p = 1$) ; la fonction égalitariste classique s’écrit comme la limite des moyennes généralisées quand $p \rightarrow -\infty$.

On notera qu’une autre famille, dite des *sommes de puissances*, introduite par Roberts (1980) génère des ordres de bien-être social identiques à partir de fonctions d’utilité exprimées différemment. Les fonctions d’utilité collective $cu^{[q]}$ associées sont paramétrées par un réel $q \in \mathbb{R}$.

$$\forall d \in \mathcal{F}, \quad cu^{[q]}(d) = \begin{cases} \text{sgn}(q) \cdot \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i^q & \text{pour } q \neq 0 \\ \sum_{i \in \mathcal{A}} \log(u_i) & \text{pour } q = 0 \end{cases} \quad \text{où } \text{sgn}(q) = \frac{q}{|q|} \quad (2.10)$$

Cette famille est “continue” en 0 : l’ordre de bien-être social défini à la limite quand $q \rightarrow 0$ est appelé ordre de Nash ; la fonction d’utilité collective associée est basée sur l’opérateur $\bigoplus^{\text{Nash}} = \prod$:

$$\forall d \in \mathcal{F}, \quad cu^{\text{Nash}}(d) = \prod_{i \in \mathcal{A}} u_i(d) \quad (2.11)$$

D’autre part, la principale propriété de cette famille de fonctions a été démontrée par Roberts (1980) : n’importe quel ordre de bien être social anonyme, continu et séparable peut être représenté par une fonction d’utilité collective de la famille des sommes de puissance. D’autre part, par suite du théorème 4 page 32, les ordres de bien-être social engendrés par les fonctions de cette famille réduisent les inégalités si et seulement si $q \leq 1$; pour $q = 1$, on retrouve encore une fois la fonction d’utilité collective utilitariste classique ; le préordre leximin constitue quant à lui la limite des ordres de bien-être sociaux représentés par cette famille de fonctions quand $q \rightarrow -\infty$.

Moyennes pondérées ordonnées Il s'agit d'une famille d'ordres introduite par Yager (1988) sous le nom d'OWA (*Ordered Weighted Average* en anglais). Les fonctions d'utilités associées $cu^{(\mathbf{w})}$ sont des fonctions paramétrées par un vecteur de poids $\mathbf{w} \in [0, 1]^n$ vérifiant $\sum_{i \in \mathcal{A}} w_i = 1$:

$$cu^{(\mathbf{w})}(d) = \sum_{i \in \mathcal{A}} w_i u_i^\uparrow(d) \quad (2.12)$$

La famille des OWA contient les fonctions d'utilité utilitariste classique ($\mathbf{w} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$) et égalitariste classique ($\mathbf{w} = (1, 0, \dots, 0)$).

2.1.3 Propriétés des critères usuels

Nous avons présenté diverses propriétés dans la section 2.1.1 page 30 ; les ordres de bien-être social et les fonctions d'utilité collective usuels ont fait l'objet de la section 2.1.2 page 34. Le tableau 2.1 résume les propriétés vérifiées par les ordres de bien-être social usuels.

	Maxsum	Maximin	Leximin	Moy. génér.	O.W.A.
Anonymat	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Continuité	Oui	Oui	Non	Oui	Oui
Séparabilité	Oui	Non*	Oui	Oui	Non
Unanimité	Oui	Non (<i>noyade</i>)**	Oui	Oui	Oui
Réd. des inégalités	Non	Non	Oui	$p < 1$	w_i décroissants

* L'ordre de bien-être social égalitariste classique n'est pas séparable. Néanmoins, il existe des raffinements de cet ordre qui le sont (par exemple l'ordre de bien-être social leximin).

** L'ordre de bien-être social maximin satisfait en fait l'unanimité au sens *faible*, c'est-à-dire la propriété d'unanimité où $u \succ v$ est remplacé par $u \succeq v$.

TABLE 2.1 – Propriétés des ordres de bien-être social usuels

2.2 Partage

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction générale de cette thèse, notre intérêt réside dans des problèmes de décision collective particuliers, les problèmes de partage.

Dans cette section, nous nous intéressons dans un premier temps à la présentation et à la définition de ces problèmes, problèmes dont nous présentons ensuite quelques méthodes spécifiques d'évaluation des solutions ; nous introduisons enfin une généralisation numérique originale de ces méthodes.

Réaliser un partage consiste à diviser une ressource limitée entre différentes entités. En s'inspirant de Bouveret (2007) on définit donc un problème de partage comme un problème de décision ou d'optimisation particulier.

Une instance d'un problème de partage met en jeu :

- une ressource commune limitée ;
- un ensemble fini \mathcal{A} de n agents demandeurs de la ressource ;
- un ensemble de contraintes sur la ressource.

2.2.1 De la décision collective au partage

Dans cette section, nous nous arrêtons sur la notion de *ressource* que nous venons d'introduire, et nous revenons également sur la forme particulière que prend l'ensemble des alternatives, sur les contraintes classiques intervenant dans les problèmes de partage, ainsi que sur le choix du critère de décision.

La ressource

La ressource est l'entité qui doit être partagée entre les agents. Elle peut prendre différentes formes, et en particulier être *continue* ou *discrète*. Intuitivement, une ressource continue peut, à l'inverse d'une ressource discrète, être divisée sans aucune restriction en différentes parties. Une ressource *continue* est définie comme un ensemble isomorphe à $[0, 1]$ alors qu'une ressource discrète est définie comme un ensemble fini de ressources atomiques indivisibles.

On se limite ici à l'étude des partages dont la ressource est discrète, et on appellera *objet* chaque ressource atomique la constituant, en référence à l'un des cas les plus courants de partage de ressource indivisible : le partage d'un ensemble d'objets entre des agents. On note \mathcal{O} l'ensemble fini des m objets à partager. On parle de *problème de partage de biens indivisibles*.

Dans toute la suite, sauf mention contraire, les indices i désigneront des agents, et les indices j des objets.

Décision et partage

Dans un problème de partage d'objets, une décision de partage consiste à allouer ou non chaque objet à chaque agent. L'espace de décision est structuré autour des variables de décision suivantes :

$$\{d_{ij} \in \{0, 1\} \mid i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{O}\} \quad (2.13)$$

avec pour tout agent $i \in \mathcal{A}$ et pour tout objet $j \in \mathcal{O}$:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'objet } j \text{ est attribué à l'agent } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.14)$$

On définit la *part* d'un agent comme l'ensemble des objets qu'une décision lui attribue.

Définition 32 (Part d'un agent). *On appelle part de l'agent i le sous-ensemble d'objets $\pi_i(d)$, ne dépendant que de la décision d , qui s'écrit :*

$$\pi_i(d) = \{j \in \mathcal{O} \mid d_{ij} = 1\} \in \wp(\mathcal{O})$$

Définition 33 (Partage ou allocation selon une décision). *Soit $d \in \mathcal{F}$ une décision. On appelle partage selon la décision d ou encore allocation selon la décision d le vecteur des parts des agents :*

$$\boldsymbol{\pi}(d) = \langle \pi_i(d) \rangle_{i \in \mathcal{A}} \in \wp(\mathcal{O})^n$$

Le partage ne dépend que de la décision choisie et, inversement, une décision donnée conduit à un partage unique : l'ensemble des décisions est isomorphe à l'ensemble $\wp(\mathcal{O})^n$ des partages. On s'autorise donc à confondre ces deux ensembles, et à omettre la notion de décision au profit de celle de partage ; on écrira ainsi $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{D}$ pour signifier $\boldsymbol{\pi}(d)$, $d \in \mathcal{D}$.

Représentation des préférences

Comme évoqué plus haut, chaque agent exprime ses préférences par une fonction d'utilité $u_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nous faisons deux hypothèses, naturelles dans le cadre des problèmes de partage, qui portent sur les préférences des agents.

Non exogénéité des préférences : l'utilité d'un agent i vis-à-vis d'un partage π n'est fonction que de la part π_i que reçoit cet agent. Ainsi, on construit, à partir de chaque fonction d'utilité u_i définie sur \mathcal{F} , une fonction définie sur $\wp(\mathcal{O})$, notée également u_i par souci de simplicité, telle que $u_i(\pi) = u_i(\pi_i)$. Cette nouvelle fonction $u_i : \wp(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$ étant suffisante pour définir complètement les préférences d'un agent grâce à l'hypothèse de non exogénéité, on utilisera indifféremment dans la suite l'une ou l'autre fonction d'utilité, selon le contexte.

Monotonie des préférences : un agent préférera toujours recevoir des objets supplémentaires. Soient \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 des sous-ensembles d'objets. Alors pour tout agent $i \in \mathcal{A}$, on aura :

$$\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow u_i(\mathcal{O}_1) \leq u_i(\mathcal{O}_2) \quad (2.15)$$

Les contraintes d'admissibilité

Certaines contraintes d'admissibilité se rencontrent fréquemment dans les problèmes de partage, en particulier les contraintes de *préemption* et de *distribution totale*.

Définition 34 (Contrainte de préemption). *On appelle contrainte de préemption une contrainte $C_{preemption}$ qui stipule que chaque objet ne peut être attribué qu'à au plus un agent.*

$$\mathcal{D}_{C_{preemption}} = \{\pi \in \mathcal{D} \mid i \neq i' \Rightarrow \pi_i \cap \pi_{i'} = \emptyset\} \quad (2.16)$$

Si elle semble naturelle, la contrainte de préemption n'est pas toujours imposée dans les problèmes de partage : il est en effet possible que des objets puissent être utilisés en parallèle par plusieurs agents sans pénalité ou diminution de l'utilité retirée ; en économie, on parle alors de *bien non rivaux* (Cornes et Sandler (1986)) ; c'est par exemple le cas pour des logiciels dont l'installation est autorisée sur plusieurs machines et donc sur lesquels plusieurs personnes peuvent travailler simultanément.

Définition 35 (Contrainte de distribution totale). *On appelle contrainte de distribution totale une contrainte $C_{distr.tot.}$ qui stipule que tout objet doit être attribué à au moins un agent.*

$$\mathcal{D}_{C_{distr.tot.}} = \{\pi \in \mathcal{D} \mid \bigcup_{i \in \mathcal{A}} \pi_i = \mathcal{O}\} \quad (2.17)$$

Notons que l'hypothèse de monotonie des préférences implique qu'une décision de partage ne pourra être Pareto-optimale que si tous les objets (dont l'utilité pour au moins un agent est non nulle) ont été distribués, c'est-à-dire que si le partage vérifie cette contrainte de distribution totale.

Choix du critère

Un problème de partage étant un problème de décision particulier, l'ensemble des critères de décision (ordres de bien-être social et fonctions d'utilité collectives) peut être utilisé. Dans le cadre de nos travaux, nous nous concentrerons toutefois sur des critères favorisant l'équité entre les agents, puisque celle-ci est souvent fortement recherchée, pour des raisons éthiques et morales évidentes (voir par exemple les exemples d'applications réelles de la section 2.2.3).

2.2.2 Instance d'un problème de partage de biens indivisibles

Nous sommes maintenant en mesure de définir formellement une instance d'un problème de partage de biens indivisibles.

Définition 36 (Instance d'un problème de partage de biens indivisibles). *Une instance d'un problème de partage de biens indivisibles est un tuple $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{C}, (u_i)_{i \in \mathcal{A}})$ où :*

- \mathcal{A} est un ensemble fini d'agents ;
- \mathcal{O} est un ensemble fini d'objets indivisibles ;
- \mathcal{C} est un ensemble de contraintes strictes sur la ressource, définissant l'espace des partages admissibles :

$$\mathcal{F} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \mathcal{D} = \wp(\mathcal{O})^n$$

- $(u_i)_{i \in \mathcal{A}}$ est un ensemble de fonctions d'utilité de l'ensemble \mathcal{F} des partages admissibles dans \mathbb{R} ; u_i est la fonction d'utilité de l'agent i , qui à tout partage $\pi \in \mathcal{F}$ associe une utilité $u_i(\pi)$;

Un problème de partage de biens indivisibles est alors défini par les entrées suivantes :

- une instance d'un problème de partage de biens indivisibles ;
- un ordre de bien-être social \succeq sur l'ensemble des profils d'utilités, éventuellement défini par une fonction d'utilité collective, ou un critère numérique Q (voir section 2.2.4 page 45).

Est attendu en sortie un partage admissible non dominé au sens de \succeq ou optimal au sens de Q , qu'on appellera solution du problème.

2.2.3 Quelques applications des problèmes de partage

Les problèmes de partage de biens indivisibles trouvent d'innombrables applications dans le monde réel. Nous en proposons quelques unes dans la présente section.

Partage de ressources satellitaires

En raison de leur coût élevé, la plupart des projets spatiaux sont financés conjointement par plusieurs pays. C'est en particulier le cas du projet européen *Pléiades*. Il s'agit d'une constellation de satellites d'observation de la Terre, opérée par le *Centre National d'Études Spatiales* (CNES).

Chaque jour, chaque pays participant adresse au centre d'opération au sol un ensemble de demandes de photographies qu'il aimerait voir satisfaites (il peut s'agir de photographies simples, ou bien plus complexes, comme par exemple des photographies stéréographiques). La capacité de la constellation de satellites, ainsi que les fréquents conflits entre demandes concurrentes dus aux nombreuses contraintes opérationnelles des satellites limitent le nombre de photographies

pouvant être prises en une journée ; l'intégralité des demandes de photographie ne peut donc être satisfaite, et un choix doit par conséquent être opéré. Ce choix doit tenir compte, entre autres, des degrés de priorité associés aux demandes, ainsi qu'à la hauteur de la contribution financière initiale apportée par chaque pays.

Il s'agit donc clairement d'un problème de partage, chaque demande jouant le rôle d'un « objet » qui sera ou non attribué au pays demandeur. Lemaître *et al.* (1999, 2002) et Fargier *et al.* (2004) ont proposé une description détaillée du problème.

Allocation de créneaux aériens

Le trafic aérien est actuellement en forte croissance, et les prévisions montrent que cette tendance sera conservée dans les années à venir. Cette augmentation du nombre d'appareils en vol pose des problèmes de capacité au niveau des principaux aéroports mais également dans les airs.

À cet engorgement s'ajoute la problématique de sécurité du trafic aérien : l'espace aérien est divisé en *secteurs*, un secteur correspondant à un volume d'espace aérien traversé par des routes aériennes. Quand le nombre d'appareils dans un secteur donné dépasse un certain seuil, la charge de travail des contrôleurs aérien devient critique et la sécurité ne peut plus être garantie : en pratique, pour éviter d'atteindre un tel seuil, des appareils seront détournés et/ou retardés.

D'autre part, à cette problématique d'utilisation des secteurs aériens, s'ajoute celle de la gestion du trafic au sein des aéroports (*Airport Traffic Planning* (ATP) en anglais), c'est-à-dire du planning des arrivées, des départs, et de l'affectation des portes d'embarquement.

La fluidité du trafic aérien est donc le résultat direct d'une allocation optimale des secteurs et des créneaux d'atterrissage et décollage aux appareils et plus largement aux compagnies aériennes. On retrouve donc dans cette application les caractéristiques d'un problème de partage, où des « biens » doivent être attribués à telle ou telle compagnie ; le problème est ici largement contraint puisque d'une part les secteurs contigus entretiennent entre eux des relations étroites, autrement dit allouer un secteur isolé à une compagnie aérienne est sans intérêt, et d'autre part l'allocation des secteurs proches d'un aéroport et l'ATP doivent assurer un temps d'attente au sol minimal pour les appareils. Des procédures de résolution adaptées sont étudiées pour ce problème : il peut s'agir de fixer des prix virtuels pour les secteurs, prix qui guident ensuite l'allocation (voir Deschinkel (2001)) ou bien encore de procédures d'allocation distribuées (voir Jonker *et al.* (2005)).

Enchères

Une application directe du partage d'objets concerne les enchères. Les enchères mettent en jeu un ensemble d'enchérisseurs à qui un commissaire priseur offre la possibilité d'acquérir des objets, parmi un ensemble fini d'objets. Le but des enchérisseurs est de placer des mises sur les objets, afin de récupérer les objets qui les intéressent, au prix qui les intéresse ; le but du commissaire priseur est de distribuer les objets aux enchérisseurs de telle sorte à maximiser son revenu.

Si, au cours du processus d'enchères, les objets sont considérés les uns après les autres, c'est-à-dire que pour chaque objet, les enchérisseurs placent leur mises puis le commissaire-priseur

attribue l'objet, avant de passer à l'objet suivant, on parle d'*enchères séquentielles* ; dans ce cas, le commissaire priseur maximise simplement son revenu en allouant chaque objet à l'enchérisseur ayant placé dessus la mise la plus haute.

Quand, à l'inverse, tous les objets sont considérés simultanément, on parle d'*enchères parallèles*. Dans un tel cas, il est envisageable que les enchérisseurs misent non seulement sur les objets eux-mêmes, mais également sur des ensembles d'objets : si tel est le cas, les enchères sont dites *combinatoires*. Le problème de maximisation du commissaire priseur est alors beaucoup moins évident : il s'agit d'un problème \mathcal{NP} -complet, connu sous le nom de Winner Determination Problem ; un algorithme de résolution de ce problème a été proposé par Sandholm (1999).

Un problème d'enchères est voisin d'un problème de partage. Les mises des enchérisseurs peuvent être vues comme les utilités qu'ils associent aux objets, le commissaire-priseur devant alors allouer les objets de façon à maximiser son propre revenu, c'est-à-dire la somme des utilités. Il s'agit donc, d'un point de vue formel, d'un problème identique à la résolution d'un problème de partage où l'entité décisionnelle choisirait l'approche utilitariste classique. D'un point de vue conceptuel, cependant, les deux problèmes sont bien différents, puisque la recherche de l'équité est une problématique totalement étrangère aux problèmes d'enchères, comme le suggère justement le parallèle avec l'approche utilitariste classique.

Les problèmes d'enchères faisant intervenir les préférences des enchérisseurs sur un ensemble d'objets, une large part de la représentation de ces préférences est commune avec les problèmes de partage ; dans les enchères combinatoires par exemple, la création et l'étude de langages de représentation compacte sur les objets constituent des problématiques majeures (voir Cramton *et al.* (2006)).

2.2.4 Évaluation d'un partage : justes parts et absence d'envie

Nous présentons dans ce paragraphe des propriétés usuelles spécifiques au partage, ayant pour but de qualifier l'équité de celui-ci : la juste part proportionnelle, la juste part maximin, et l'absence d'envie. La première et la dernière de ces propriétés sont définies aussi bien dans le cadre de biens divisibles (voir Moulin (2003)) que de biens indivisibles ; la juste part maximin est quant à elle une propriété spécifique aux problèmes de partage de biens indivisibles.

Juste part

Un partage vérifie le test de *juste part proportionnelle* si et seulement si l'utilité qu'en retire chaque agent vaut au moins un n -ième de l'utilité qu'il aurait pu espérer avec le partage admissible lui étant le plus favorable. Cette propriété a été proposée par Steinhaus (1948).

Définition 37 (Juste part proportionnelle). *On dit d'un partage π qu'il satisfait le test de juste part proportionnelle aux agents si et seulement si, pour tout agent i de \mathcal{A} :*

$$u_i(\pi) \geq u_i^{\text{PFS}}, \quad \text{avec} \quad u_i^{\text{PFS}} = \frac{1}{n} \max\{u_i(\pi) \mid \pi \in \mathcal{F}\} \quad (2.18)$$

On dira de façon équivalente d'un partage qu'il satisfait le test de juste part proportionnelle qu'il assure la juste part proportionnelle.

L'intuition cachée derrière la définition 37 page ci-contre est la suivante : si l'un des agents agissait en tant que dictateur, c'est-à-dire s'il choisissait seul le partage à réaliser, il obtiendrait une utilité égale à $\max\{u_i(\boldsymbol{\pi}) \mid \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}\}$; un agent rationnel souhaite donc obtenir de la part de l'entité décisionnelle une utilité au moins égale à un $n^{\text{ème}}$ de cette valeur.

Par suite de la monotonie des préférences, le partage le plus favorable à un agent est naturellement celui qui lui attribue tous les objets disponibles. Si un tel partage est admissible, u_i^{PFS} prend une forme plus simple comme le montre la proposition 4 ; c'est en particulier le cas si les seules contraintes sont celles de préemption et/ou de distribution totale.

Proposition 4. *Pour tout agent $i \in \mathcal{A}$, on a l'implication suivante :*

$$\{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F} \mid \pi_i = \mathcal{O}\} \neq \emptyset \Rightarrow u_i^{\text{PFS}} = \frac{1}{n}u_i(\mathcal{O}) \quad (2.19)$$

Et en particulier :

$$\mathcal{D}_{C_{\text{preemption}}} \cap \mathcal{D}_{C_{\text{distr.tot.}}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow u_i^{\text{PFS}} = \frac{1}{n}u_i(\mathcal{O}) \quad (2.20)$$

Il est possible de caractériser les ordres de bien-être social selon leur comportement face aux partages assurant la juste part proportionnelle : un ordre de bien-être social vérifie la propriété de *juste part proportionnelle garantie* si et seulement si, dès qu'il existe un partage admissible quelconque assurant la juste part proportionnelle, il existe un partage admissible non dominé pour cet ordre qui l'assure également.

La forme que prend cette caractérisation s'explique par le fait que la juste part proportionnelle devient une propriété forte dans le cadre des problèmes de partage de biens indivisibles. En effet, pour un problème donné, il n'est pas rare qu'aucun partage, tout optimal qu'il soit au vu d'autres critères, n'assure pas la juste part proportionnelle¹. C'est par exemple le cas lorsque l'on souhaite partager un unique objet entre deux agents, comme le montre l'exemple 11.

Exemple 11. *Considérons le problème de partage défini comme suit :*

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} = \{i_1, i_2\}, n = 2 \\ \mathcal{O} = \{j_1\}, m = 1 \\ \mathcal{F} = C_{\text{preemption}} \cap C_{\text{distr.tot.}} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{i_1}(\emptyset) = u_{i_2}(\emptyset) = 0 \\ u_{i_1}(\{j_1\}) = 5 \\ u_{i_2}(\{j_1\}) = 7 \end{array} \right.$$

Les contraintes imposées n'autorisent que deux partages : $\boldsymbol{\pi} = \langle \{j_1\}, \emptyset \rangle$ et $\boldsymbol{\pi}' = \langle \emptyset, \{j_1\} \rangle$. Les justes parts proportionnelles des agents prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} u_{i_1}^{\text{PFS}} &= \frac{5}{2} \\ u_{i_2}^{\text{PFS}} &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Or, quelle que soit la décision choisie, l'un des agents aura une utilité nulle, donc strictement inférieure à sa juste part. Dans ce problème, aucun partage admissible n'assure la juste part proportionnelle.

1. L'ajout de compensations financières entre les agents résout ce problème, mais sort du cadre de notre étude (voir Brams et Taylor (1996)).

L'exemple 11 page précédente montre que le test de juste part proportionnelle, s'il s'avère cohérent dans sa définition, n'est pas particulièrement adapté aux problèmes de partage de biens indivisibles. En effet, dans un problème de partage, une « part » fait généralement référence à un ensemble d'objets reçu par l'un des agents, alors que la juste part proportionnelle correspond à une quantité d'utilité calculée, décorrélée *a priori* de tout ensemble d'objets.

Budish (2009) propose une propriété voisine, le test de *juste part maximin*, qui prend cette fois en compte l'indivisibilité des biens à partager. Pour obtenir la juste part maximin d'un agent, on s'intéresse au problème fictif dans lequel tous auraient les mêmes préférences que lui ; sa juste part maximin est alors définie comme l'utilité collective égalitariste optimale de ce nouveau problème de partage. Du point de vue des agents, cette juste part peut s'exprimer ainsi : « Si tous les agents avaient les mêmes préférences que moi, dans le pire cas (i.e. si je suis le moins bien servi dans un partage égalitariste optimal), j'aurais une utilité de X. Alors, je souhaite obtenir au moins cette utilité dans le problème réel. ».

La juste part maximin correspond à l'utilité minimale que peut recevoir un agent dans une procédure d'allocation de type « je partage, tu choisis » : si un agent constitue lui-même les parts d'objets à attribuer, et que les autres agents se servent avant lui parmi les parts ainsi définies, alors cet agent, sous réserve qu'il ait constitué les parts de façon optimale, obtiendra toujours au moins sa juste part maximin.

Définition 38 (Juste part maximin). *On dit d'un partage π qu'il satisfait le test de juste part maximin si et seulement si, pour tout agent i_0 de \mathcal{A}*

$$u_{i_0}(\pi) \geq u_{i_0}^{\text{MFS}}, \quad \text{avec } u_{i_0}^{\text{MFS}} = \max_{\pi' \in \mathcal{F}} \min_{i \in \mathcal{A}} u_{i_0}(\pi'_i)$$

On dira de façon équivalente d'un partage qu'il satisfait le test de juste part maximin qu'il assure la juste part maximin.

La suite de l'exemple 11 page précédente illustre le fait que cette propriété évite certains écueils dus à la non divisibilité des biens à partager.

Exemple 11 (suite). *Nous considérons encore le même problème, et cherchons cette fois à déterminer les justes parts maximin des agents.*

Supposons que l'agent i_2 ait les mêmes préférences que son collègue i_1 . Dans ce cas, quel que soit le partage choisi entre π et π' , l'agent le moins bien servi aura une utilité nulle, ce qui constitue par définition la juste part maximin de l'agent i_1 . La juste part maximin de l'agent i_2 est calculée de façon similaire, et on a donc :

$$\begin{aligned} u_{i_1}^{\text{MFS}} &= 0 \\ u_{i_2}^{\text{MFS}} &= 0 \end{aligned}$$

Quel que soit le partage choisi, chaque agent obtiendra évidemment une utilité au moins égale à sa juste part maximin. Dans ce problème, tous les partages admissibles assurent la juste part maximin.

Envie

Une autre propriété traduisant l'équité d'un partage se base sur la comparaison des parts reçues par chaque agent ; elle a été introduite par Foley (1967) comme alternative à une propriété

théorique plus forte mais inexploitable en pratique, proposée par Tinbergen (1953). Un partage est dit *sans envie* si aucun agent ne souhaite échanger sa place avec un autre, c'est-à-dire si chacun est au moins aussi satisfait de sa propre part que de celle de tout autre agent.

Définition 39 (Absence d'envie). *Soit π un partage. π est dit sans envie si et seulement si pour tous les couples d'agents $(i_1, i_2) \in \mathcal{A}^2$, $u_{i_1}(\pi_{i_1}) \geq u_{i_1}(\pi_{i_2})$.*

Là encore, l'indivisibilité des biens à partager implique l'existence de certains problèmes pour lesquels aucun partage n'est sans envie.

Exemple 11 (suite). *Nous considérons toujours le même problème, et nous cherchons à savoir s'il existe un partage sans-envie.*

Intéressons-nous au partage $\pi = (\{j_1\}, \emptyset)$. L'agent i_2 obtient une utilité nulle; cependant s'il obtenait la part de l'agent i_1 il aurait une utilité égale à 5, donc strictement supérieure. L'agent i_2 est donc envieux et le partage π n'est pas sans envie.

On voit aisément qu'il en est de même pour la décision $\pi' = (\emptyset, \{j_1\})$, cette fois à cause de l'agent i_1 . Ce problème n'admet donc aucune décision admissible qui soit sans envie.

Généralisation numérique

Nous avons jusqu'à maintenant proposé des évaluations possibles de la qualité d'un partage sous forme de propriétés. Celles-ci partitionnent l'ensemble des partages admissibles en deux sous-ensembles, d'une part les « bons » partages vérifiant la propriété, et d'autre part les « mauvais » partages ne la vérifiant pas. Toutefois, comme on l'a vu, certaines propriétés peuvent s'avérer impossibles à satisfaire pour certains problèmes, et le décideur ne dispose alors d'aucune information quant au partage à choisir. La situation inverse peut également se produire, où l'intégralité (ou tout du moins une large part) des partages admissibles vérifie une propriété donnée. Quel partage choisir dans ces cas? Est-il possible de fournir une évaluation plus fine, basée sur ces mêmes propriétés?

Les démonstrations des propositions présentées dans cette section sont assez directes, et nous nous autorisons par souci de clarté à les omettre.

Exemple 11 (suite). *Nous considérons une nouvelle fois le problème introduit dans la première partie de cet exemple.*

Nous avons vu qu'aucune des décisions admissibles n'assurait une juste part proportionnelle, à cause de l'inadéquation de cette propriété à l'indivisibilité des biens à partager; le test de juste part maximin résout ce problème, mais cette fois, toutes les décisions admissibles vérifient le test; enfin la dernière propriété introduite, l'absence d'envie, n'est elle non plus vérifiée par aucune décision. Finalement, quelle que soit la propriété choisie, elle n'apporte au décideur aucune information quant au partage à sélectionner, bien que le partage π' semble naturellement préférable : en effet, que l'on choisisse π ou π' , l'un des agents obtiendra de toute façon une utilité nulle; l'autre, en revanche, obtiendra une utilité plus élevée avec π' qu'avec π ($u_{i_2}(\pi'_2) > u_{i_1}(\pi_1)$).

Cette préférence pour π' peut être prise en compte en précisant numériquement dans quelle mesure une propriété est ou non satisfaite. Prenons l'exemple de la propriété d'absence d'envie : même si aucun des deux partages n'est sans envie, on remarque informellement que la « quantité d'envie » du partage π est supérieure à celle du partage π' .

Plutôt que d'introduire une extension numérique pour chacune des propriétés des paragraphes précédents, nous proposons un modèle tout à fait général qui fait intervenir la notion de *critère numérique*.

Définition 40 (Critère numérique). *On appelle critère numérique tout couple $Q = (\langle \varphi_i \rangle, \oplus)$ où :*

- pour $i \in \mathcal{A}$, $\varphi_i : \mathbb{R}^{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ est une fonction qui prend en paramètre une fonction d'utilité et fournit une nouvelle fonction de \mathcal{F} dans \mathbb{R} ;
- \oplus est un opérateur d'agrégation collective quelconque.

À tout partage admissible π , un critère numérique associe une valeur $Q(\pi)$:

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, Q(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(u_i)(\pi) \quad (2.21)$$

La valeur $Q(\pi)$ constitue le résultat de deux opérations : on cherche dans un premier temps à fournir, pour chaque agent, une valeur « locale » du critère grâce aux fonctions φ_i , puis on agrège ces valeurs avec \oplus de sorte à obtenir la valeur du critère vis-à-vis du partage dans son ensemble ;

Les fonctions φ peuvent être vues comme des fonctions de redéfinition des fonctions d'utilité : pour une fonction d'utilité $u_i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i(u_i)$ est ainsi une fonction de \mathcal{F} dans \mathbb{R} qui associe une valeur numérique à chaque décision et représente de ce fait la valeur « locale » du critère, du point de vue de l'agent i . On remarque que le choix d'un critère $Q^{\text{Id}} = (\langle \varphi_i^{\text{Id}} \rangle, \oplus)$ où les fonctions $\varphi_i^{\text{Id}} : u_i \mapsto (\pi \mapsto u_i(\pi_i))$, $i \in \mathcal{A}$, sont les fonctions « identité » conduit à l'expression de l'utilité collective d'un partage, comme le montre l'équation 2.22

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, Q^{\text{Id}}(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i^{\text{Id}}(u_i)(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi) = cu(\pi) \quad (2.22)$$

Les propriétés de juste part et d'absence d'envie – et plus généralement n'importe quelle propriété – peuvent être traduites en critères numériques, qui quel que soit le partage considéré, renvoient une valeur dans $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. De tels critères seront appelés *critères binaires* ; dans la suite, on utilisera généralement la lettre P pour désigner un critère binaire :

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, P(\pi) \in \mathbb{B} \quad (2.23)$$

On dira qu'un critère binaire P représente une propriété si et seulement si l'équivalence suivante est satisfaite :

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \text{ la propriété est vérifiée. } \Leftrightarrow P(\pi) = 1 \quad (2.24)$$

Tout critère binaire définit de façon unique une propriété sur les partages, et l'on s'autorise à confondre les deux termes dans toute la suite du document.

Juste part proportionnelle La proposition 5 page ci-contre présente le critère binaire associé au test de juste part proportionnelle.

Proposition 5. *Le critère binaire $P^{\text{PFS}} = (\langle \phi_i^{\text{PFS}} \rangle, \min)$ où pour tout agent $i \in \mathcal{A}$*

$$\phi_i^{\text{PFS}}(u_i) = \pi \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } u_i(\pi) \geq u_i^{\text{PFS}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.25)$$

représente le test de juste part proportionnelle.

Une extension directe de ce critère binaire consiste à s'intéresser à la « distance » entre le profil d'utilité obtenu avec le partage considéré et le profil constitué par les utilités des justes parts proportionnelles : le critère associé est $Q^{\text{PFS}} = (\langle \varphi_i^{\text{PFS}} \rangle, \max)$ où pour tout agent $i \in \mathcal{A}$

$$\varphi_i^{\text{PFS}}(u_i) = \pi \mapsto \max\{0, u_i(\pi) - u_i^{\text{PFS}}\} \quad (2.26)$$

La proposition 6 relie ce critère au critère binaire P^{PFS} .

Proposition 6. *Soit $\pi \in \mathcal{F}$ un partage. Alors :*

$$\pi \text{ assure la juste part proportionnelle} \Leftrightarrow P^{\text{PFS}}(\pi) = 1 \Leftrightarrow Q^{\text{PFS}}(\pi) = 0 \quad (2.27)$$

Juste part maximin Le test de juste part maximin est formellement similaire à celui de juste part proportionnelle. On définit ainsi sur le même modèle un critère binaire le représentant.

Proposition 7. *Le critère binaire $P^{\text{MFS}} = (\langle \phi_i^{\text{MFS}} \rangle, \min)$ où pour tout agent $i \in \mathcal{A}$*

$$\phi_i^{\text{MFS}}(u_i) = \pi \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } u_i(\pi) \geq u_i^{\text{MFS}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.28)$$

représente le test de juste part maximin.

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \quad P^{\text{MFS}}(\pi) = 1 \Leftrightarrow \pi \text{ assure la juste part maximin.} \quad (2.29)$$

On propose une extension numérique du test de juste part maximin sur le même principe que l'extension du test de juste part proportionnelle. Le critère associé est $Q^{\text{MFS}} = (\langle \varphi_i^{\text{MFS}} \rangle, \max)$ où pour tout agent $i \in \mathcal{A}$

$$\varphi_i^{\text{MFS}}(u_i) = \pi \mapsto \max\{0, u_i(\pi) - u_i^{\text{MFS}}\} \quad (2.30)$$

La proposition 8 relie ce critère au critère binaire P^{MFS} .

Proposition 8. *Soit $\pi \in \mathcal{F}$ un partage. Alors :*

$$\pi \text{ assure la juste part maximin} \Leftrightarrow P^{\text{MFS}}(\pi) = 1 \Leftrightarrow Q^{\text{MFS}}(\pi) = 0 \quad (2.31)$$

Envie La proposition 9 fournit un critère binaire représentant la propriété d'absence d'envie.

Proposition 9. *Le critère binaire $P^{\text{EF}} = (\langle \phi_i^{\text{EF}} \rangle, \min)$ où pour tout agent $i \in \mathcal{A}$*

$$\phi_i^{\text{EF}}(u_i) = \pi \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i' \in \mathcal{A}, i' \neq i, u_i(\pi_{i'}) \geq u_i(\pi_i) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.32)$$

représente la propriété d'absence d'envie.

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \quad P^{\text{EF}}(\pi) = 1 \Leftrightarrow \pi \text{ est un partage sans envie.} \quad (2.33)$$

La propriété d'absence d'envie est une propriété forte, difficile à satisfaire². De nombreux partages ne la vérifiant pas restent donc impossibles à distinguer du point de vue de l'envie. Pour résoudre ce problème, on introduit la notion de *quantité d'envie* d'un partage, en s'inspirant de Lipton *et al.* (2004).

Définition 41. Soit $\pi \in \mathcal{F}$ un partage. La quantité d'envie du partage π est la valeur $Q^E(\pi)$ où $Q^E = (\langle \varphi_i^E \rangle, \max)$ est un critère numérique défini par

$$\forall i \in \mathcal{A}, \varphi_i^E(u_i) = \pi \mapsto \max_{i' \in \mathcal{A}} \max\{0, u_i(\pi_{i'}) - u_i(\pi_i)\} \quad (2.34)$$

Le critère Q^E fournit l'envie maximum existante entre deux agents suite à un partage, l'envie étant définie comme une différence entre l'utilité vis-à-vis de la part de l'autre agent avec son utilité propre. Lipton *et al.* (2004) proposent également une autre version où l'envie est cette fois définie comme le rapport entre ces deux quantités; cette définition conduit à un nouveau critère $Q'^E = (\langle \varphi_i'^E \rangle, \max)$ où pour tout agent $i \in \mathcal{A}$

$$\varphi_i'^E(u_i) = \pi \mapsto \max_{i' \in \mathcal{A}} \max\left\{1, \frac{u_i(\pi_{i'})}{u_i(\pi_i)}\right\} \quad (2.35)$$

La proposition 10 relie les critères Q^E et Q'^E à la propriété d'absence d'envie.

Proposition 10. Soit $\pi \in \mathcal{F}$ un partage.

Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1. π est sans envie
2. $P^{EF}(\pi) = 1$
3. $Q^E(\pi) = 0$
4. $Q'^E(\pi) = 1$

Il est possible d'imaginer d'autres variantes des critères liés aux notions de juste part et d'envie. Dans les critères Q^{PFS} et Q^{MFS} définis précédemment (équation 2.26 page précédente et 2.30 page précédente) (respectivement dans les expressions de la quantité d'envie du paragraphe précédent) on pourrait par exemple remplacer les opérateurs maximum sur les agents par des sommes, prenant ainsi en compte l'intégralité des « défauts » de juste part (respectivement des quantités d'envie existant entre les couples d'agents), et non seulement celui de l'agent ayant la part la plus injuste (respectivement celle de l'agent le plus envieux).

2.3 Conclusion

Forts de la modélisation des problèmes de décision individuelle introduite au chapitre 1 page 7, nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à l'extension de cette modélisation aux problèmes de *décision collective* : comment choisir une décision quand le processus implique plusieurs individus, aux préférences généralement distinctes ?

2. Encore une fois, l'existence de compensations financières simplifie le problème : il est toujours possible de trouver un partage sans envie lorsque des compensations financières sont possibles et que les seules contraintes sont celles de préemption et de distribution totale (voir Alkan *et al.* (1991)).

En nous limitant à une représentation numérique des préférences (cadre du *welfarisme* cardinal), nous avons introduit les notions classiques d'*ordre de bien-être social* et de *fonction d'utilité collective*, outils essentiels permettant d'agréger les préférences des agents concernés par la prise de décision ; à partir de l'exposé d'un ensemble de propriétés que ces outils peuvent vérifier, nous avons montré que du choix de l'un ou l'autre dépend directement la définition morale et éthique du processus de décision, ce que nous avons ensuite illustré par l'étude de quelques ordres de bien-être social et fonctions d'utilité collective usuels.

On appelle *problème de partage* tout problème relatif à la répartition d'une ressource entre plusieurs agents. Nous avons présenté dans la seconde partie de ce chapitre une modélisation classique des problèmes de partage de biens indivisibles, sous la forme naturelle de problèmes de décision collective particuliers, dans lesquels une décision constitue simplement une *allocation* des biens aux agents.

En plus des outils usuels de la décision collective, nous avons exposé des méthodes d'évaluation spécifiques aux problèmes de partage, basées sur des propriétés telles l'*absence d'envie* ou la *juste part*. Nous avons enfin proposé une généralisation numérique de ces propriétés, extension qui sera réutilisée avec profit dans le cadre des problèmes de partage sous risque. Ces derniers font partie de la catégorie plus générale des problèmes de décision collective en présence de risque, dont les spécificités sont présentées au chapitre 3 page 51.

Chapitre 3

Décision collective et partage sous risque

L'objectif de ce chapitre est de présenter les problématiques soulevées par la mise en commun des notions de risque d'une part, et de décision collective d'autre part (ces notions ont été respectivement introduites au chapitre 1 page 7 et chapitre 2 page 27).

On modélise le risque de façon usuelle par la donnée de l'espace probabilisé $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \text{Pr})$ (définition 10 page 17) où les éléments $s \in \mathcal{S}$ sont les états de la nature. La distribution de probabilité Pr est objective, c'est-à-dire que tous les acteurs du problème (les agents et l'entité décisionnelle) sont supposés s'accorder sur ces mêmes probabilités¹. Les conséquences potentielles d'un état de la nature sont regroupées dans un espace $(\mathcal{W}, \mathcal{G})$. L'ensemble \mathcal{D} des décisions possibles (ou actes) est l'ensemble des traductions des états de la nature en conséquences, c'est-à-dire des applications de $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \text{Pr})$ dans $(\mathcal{W}, \mathcal{G})$.

Pour introduire les problématiques de la décision collective en présence de risque, nous ne faisons pour l'instant que trois hypothèses peu restrictives :

1. les préférences d'un agent i sont représentées par une fonction d'utilité u_i ;
2. les préférences d'un agent i vis-à-vis d'une décision sont uniquement fonction de ses utilités et des probabilités de réalisation des états de la nature ;
3. les préférences de la société vérifient également les hypothèses 1 et 2 ;

L'hypothèse 1 autorise une représentation numérique des préférences des agents. Les axiomes de la théorie de von Neumann et Morgenstern ou encore ceux de la théorie de l'utilité espérée dépendante du rang conduisent à des préférences vérifiant cette hypothèse.

Nous privilégions une représentation des préférences par des fonctions d'utilité $u_i : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{A}$, définies sur le produit cartésien de l'espace des décisions par l'espace des états de la nature ; ce choix a été détaillé et justifié dans la section 1.3.4 page 24.

De même que dans le cas de problèmes de décisions sans risque, ces préférences sont usuellement regroupées dans des *profils d'utilité*, qui prennent cette fois la forme de matrices ; la définition 42 page suivante est une extension de la définition 13 page 28 au cas du risque.

1. Ceci est une hypothèse purement simplificatrice. On explique dans la suite que l'introduction de probabilités subjectives (différentes pour chaque agent et l'entité décisionnelle) n'introduit pas de modifications majeures des résultats présentés dans ce document.

Définition 42 (Profil d'utilité en présence de risque). *Soit une décision $d \in \mathcal{F}$. On appelle profil d'utilité associé à la décision d la matrice $\mathbf{U}(d) = (u_i(d, s))$, $i \in \mathcal{A}$, $s \in \mathcal{S}$ prenant ses valeurs dans \mathbb{R} .*

L'hypothèse 2 garantit quant à elle l'existence d'une fonction représentant les préférences des agents sur les décisions ; la définition 43 précise cette notion de *fonction d'utilité stochastique*.

Définition 43 (Fonction d'utilité stochastique). *Soit $i \in \mathcal{A}$ un agent. On appelle fonction d'utilité stochastique de l'agent i la fonction $\tilde{u}_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ traduisant les préférences de l'agent i vis-à-vis d'une décision (ou acte) admissible, et définies à partir d'un opérateur $\mathfrak{E} : (\mathbb{R} \times [0, 1])^{\#\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$ dit d'agrégation stochastique :*

$$\forall d \in \mathcal{D}, \tilde{u}_i(d) = \mathfrak{E}_{s \in \mathcal{S}} \langle u_i(d, s), \Pr(s) \rangle \quad (3.1)$$

Le choix de l'espérance mathématique pour l'opérateur d'agrégation stochastique \mathfrak{E} est un choix classique ; la généralité de la définition autorise toutefois parfaitement l'emploi d'agrégations stochastiques associées à d'autres théories de représentation des préférences en présence de risque (voir la section 1.3 page 16).

L'hypothèse 3 implique que la représentation des préférences de l'entité décisionnelle vis-à-vis d'une décision sera formellement identique à celle des agents.

L'exemple 12 illustre un problème de décision collective en présence de risque, sous la forme d'une extension de l'exemple 9 page 28 du chapitre 2 page 27.

Exemple 12. *Nous reprenons la situation présentée dans l'exemple 9 page 28, en nous plaçant dans le cadre de la théorie de von Neumann et Morgenstern (même si le modèle introduit précédemment est bien plus général) ; on utilise donc l'espérance mathématique comme agrégateur stochastique : $\mathfrak{E} = \mathbb{E}$.*

Le comité d'organisation d'un tournoi sportif impliquant trois équipes a le choix entre deux gymnases (décisions d_1 ou d_2) pour accueillir l'événement. Cependant, la disponibilité du premier gymnase est incertaine, et si ce gymnase est choisi mais se révèle finalement indisponible (état de la nature s_1), le comité n'aura de choix que d'organiser l'événement dans le second gymnase ; si le gymnase est disponible (état de la nature s_2) et qu'il a été choisi par le comité, l'événement s'y déroulera normalement.

Les utilités des agents sont donc définies comme suit (cf. exemple 9 page 28).

$$\begin{array}{lll} u_1(d_1, s_1) = 9 & u_2(d_1, s_1) = 9 & u_3(d_1, s_1) = 9 \\ u_1(d_1, s_2) = 18 & u_2(d_1, s_2) = 6 & u_3(d_1, s_2) = 6 \\ u_1(d_2, s_1) = u_1(d_2, s_2) = 9 & u_2(d_2, s_1) = u_2(d_2, s_2) = 9 & u_3(d_2, s_1) = u_3(d_2, s_2) = 9 \end{array}$$

On suppose que le gymnase a une chance sur trois d'être indisponible ($\Pr(s_1) = 1/3$). Les utilités espérées des agents prennent alors les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} \tilde{u}_1(d_1) = 15 & \tilde{u}_2(d_1) = 7 & \tilde{u}_3(d_1) = 7 \\ \tilde{u}_1(d_2) = 9 & \tilde{u}_2(d_2) = 9 & \tilde{u}_3(d_2) = 9 \end{array}$$

3.1 Le timing effect

L'agrégation des préférences individuelles soulève une problématique particulière dans le cas de la décision collective sous risque. Considérons l'exemple suivant.

Exemple 13. Deux enfants, Aline (A) et Baptiste (B), sont à une fête foraine et possèdent un unique ticket qui leur donne droit au choix à une barbe à papa (décision d_{bp}) ou une entrée aux montagnes russes (décision d_{mr}). S'ils choisissent la barbe à papa, ils se la partageront équitablement et en retireront une utilité identique ; si en revanche ils choisissent les montagnes russes, seul l'un d'entre eux, tiré au sort équitablement, pourra profiter de l'attraction, et en retirera une utilité forte, tandis que l'utilité du second sera nulle. On note s_A (respectivement s_B) l'état de la nature où Aline (respectivement Baptiste) est tirée au sort, s'il y a lieu ($\Pr(s_A) = \Pr(s_B) = 0.5$). Les utilités des deux enfants sont résumées dans les tableaux de la figure .

d_{bp}	s_A	s_B
A	4	4
B	4	4

d_{mr}	s_A	s_B
A	10	0
B	0	10

FIGURE 3.1 – Utilités d'Aline et Baptiste, selon la décision choisie et l'état de la nature réalisé.

On cherche une méthode pour comparer ces deux décisions, de façon à choisir la meilleure. En univers certain, les fonctions d'utilité collective fournissent pour chaque décision, une valeur numérique unique, permettant ainsi une comparaison (et un classement) immédiate des alternatives ; nous cherchons dans le cadre de cet exemple à élargir le concept de fonction d'utilité collective aux problèmes où intervient le risque.

Supposons pour l'exemple que les préférences des enfants satisfassent les axiomes de von Neumann et Morgenstern. On sait alors représenter leurs préférences vis-à-vis d'une décision comme l'espérance mathématique de leurs utilités dans chaque état de la nature. Une valeur numérique unique représente alors les préférences de chaque enfant, et on est ainsi ramené à un problème de décision sans risque, auquel on peut par exemple appliquer l'approche égalitariste classique en utilisant l'opérateur min pour ne plus obtenir qu'une valeur numérique par décision (voir figure 3.2). La décision d_{mr} , avec une valeur de 5, est alors préférée à la décision d_{bp} , avec une valeur de 4.

d_{bp}	s_A	s_B		E
A	4	4	→	4
B	4	4	→	4
min				4

d_{mr}	s_A	s_B		E
A	10	0	→	5
B	0	10	→	5
min				5

FIGURE 3.2 – Choix de la meilleure décision - Approche A.

On peut tout aussi bien approcher différemment le problème. Si l'on fixe l'état de la nature, le problème devient un problème sans risque : on peut donc travailler dans chaque état de la nature avec la théorie de la décision collective sans risque (donc avec l'approche égalitariste classique, par cohérence avec le choix précédent). On obtient donc de cette façon des valeurs numériques

représentant la satisfaction de la société (ou utilité collective) dans chaque état de la nature. En supposant que les préférences de la société satisfont les axiomes de von Neumann et Morgenstern, on peut agréger ces valeurs avec l'espérance mathématique pour obtenir une valeur numérique unique pour une décision donnée (voir figure 3.3). Cette fois, c'est la décision d_{bp} , avec une valeur de 4, qui est (largement) préférée à la décision d_{mr} , qui a une valeur nulle.

d_{bp}	s_A	s_B		E	d_{mr}	s_A	s_B		E
A	4	4			A	10	0		
B	4	4			B	0	10		
	↓	↓				↓	↓		
min	4	4	→	4	min	0	0	→	0

FIGURE 3.3 – Choix de la meilleure décision - Approche B.

L'exemple 13 page précédente montre que, pour un opérateur d'agrégation stochastique donné, la simple spécification d'une fonction d'utilité collective ne suffit pas à définir complètement la manière de choisir une alternative dans un problème de décision collective en présence de risque : pour une fonction d'utilité collective donnée, il existe deux approches distinctes.

L'introduction des fonctions d'utilité stochastique (équation 3.1 page 52) suggère naturellement l'une de ces deux approches (approche A dans l'exemple 13 page précédente) : les utilités espérées peuvent être vues comme la contrepartie des utilités individuelles des problèmes de décision en univers certain, et il suffit donc de les agréger à partir d'une fonction d'utilité collective standard. En procédant de cette manière, on se place dans le cas où l'agrégation a lieu sur des utilités représentant les préférences des agents *avant* la connaissance de l'état de la nature qui va se réaliser. On parle alors d'agrégation *ex-ante*, et la valeur ainsi définie est connue sous le nom d'*utilité collective ex-ante*, notée *acu* (équation 3.2).

$$\forall d \in \mathcal{D}, \text{acu}(d) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \mathfrak{E}_{s \in \mathcal{S}} \langle u_i(d, s), \Pr(s) \rangle = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \tilde{u}_i(d) \quad (3.2)$$

L'autre approche (approche B dans l'exemple 13 page précédente) consiste cette fois à considérer les utilités collectives obtenues dans chaque état de la nature, c'est-à-dire dans chaque réalisation possible de l'incertitude. L'agrégation collective a donc cette fois lieu sur des utilités correspondant à des situations certaines, postérieures à l'incertitude sur l'état de la nature, et l'on parle d'agrégation *ex-post* ; la valeur ainsi définie est connue sous le nom d'*utilité collective ex-post*, notée *pcu* (équation 3.3).

$$\forall d \in \mathcal{D}, \text{pcu}(d) = \mathfrak{E}_{s \in \mathcal{S}} \left\langle \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} u_i(d, s), \Pr(s) \right\rangle \quad (3.3)$$

Pour définir une méthode d'agrégation des préférences dans les problèmes de décision collective en présence de risque, il faut donc à la fois préciser les opérateurs d'agrégation collective et d'agrégation stochastique utilisés, mais également préciser l'instant où l'utilité des agents est évaluée, antérieur ou postérieur à la réalisation de l'incertitude : ce phénomène a été appelé *timing effect* par Myerson (1981).

3.1.1 Approche *ex-ante* ou *ex-post* ?

Le *timing effect* est à la source d'une littérature conséquente, en particulier en économie. Harsanyi met en évidence le phénomène en 1955, dans le cadre de la théorie de von Neumann et Morgenstern, sous la forme d'un théorème construit sur trois axiomes.

L'axiome 7 reprend les hypothèses faites en introduction du présent chapitre, en imposant l'espérance mathématique comme agrégateur stochastique, i.e. $\mathfrak{E} = \mathbb{E}$. Il permet ainsi la représentation des utilités individuelles par les utilités espérées et est donc à rapprocher d'une approche *ex-ante*.

Axiome 7. *Les préférences des agents satisfont les axiomes de von Neumann et Morgenstern.*

L'axiome 8 est quant à lui à associer à une approche *ex-post* puisqu'il autorise l'agrégation stochastique des préférences collectives, agrégation pour laquelle il impose, cette fois encore, l'utilisation de l'espérance mathématique.

Axiome 8. *Les préférences de la société satisfont les axiomes de von Neumann et Morgenstern.*

L'axiome 9 de Pareto-indifférence est un axiome faible, qui relie préférences individuelles et préférences collectives.

Axiome 9. *Si deux décisions sont indifférentes du point de vue de tous les agents, alors elles sont indifférentes du point de vue de la société (Pareto-indifférence).*

Le théorème proposé par Harsanyi montre que, si les trois axiomes sont satisfaits par les préférences individuelles et collectives, c'est-à-dire entre autres si l'on souhaite autoriser aussi bien une approche *ex-ante* qu'une approche *ex-post*, alors la seule approche collective appropriée est l'approche utilitariste classique.

Théorème 5 (Harsanyi (1955)). *Si les axiomes 7, 8, et 9 sont satisfaits, alors :*

- *il existe une fonction d'utilité collective \oplus qui représente les préférences de la société (Axiome 8) ;*
- *il existe des fonctions d'utilité individuelles \tilde{u}_i qui représentent les préférences des agents (Axiome 7) ;*
- *la fonction d'utilité collective est une fonction affine des utilités individuelles, autrement dit il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tels que :*

$$\forall d \in \mathcal{D}, \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \tilde{u}_i(d) = \alpha + \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i \tilde{u}_i(d) \quad (3.4)$$

En choisissant $\alpha = 0$ et si l'on impose de plus que \oplus respecte l'axiome d'anonymat (définition 18 page 30), alors la fonction d'utilité collective est linéaire : $\oplus = \sum$.

Formulé autrement, le théorème 5 montre que seule l'utilisation d'une fonction d'agrégation collective affine permet de s'affranchir du *timing effect*, et inversement, toute tentative d'introduire une prise en compte de l'équité dans la fonction d'utilité collective (c'est à dire le choix d'une fonction d'agrégation collective $\oplus \neq \sum$) résulte en un décalage entre l'approche *ex-post* et *ex-ante*.

De nombreuses critiques de l'article d'Harsanyi viennent du fait que ce dernier utilise son théorème comme justification de la théorie utilitariste. Si l'on rejette ses axiomes, on doit forcément choisir entre un critère *ex-ante* ou un critère *ex-post*, pour une fonction d'agrégation collective \oplus fixée.

Diamond critique le fondement des axiomes de Harsanyi. L'exemple 14, illustre son propos.

Exemple 14. *Diamond (1967)*

Une promotion doit être attribuée à l'une de deux personnes, chacune pouvant prétendre également au poste proposé. Le décideur envisage les deux alternatives suivantes :

- attribuer la promotion de façon certaine et arbitraire à la première personne (décision d_1);
- tirer au sort de façon équiprobable à qui attribuer la promotion (décision d_{eq}).

La figure 3.4 résume le problème en introduisant des utilités numériques pour les deux agents (i_1 et i_2); les états de la nature s_A et s_B représentent les deux états équiprobables associés aux résultats possibles du tirage au sort.

d_1	s_A	s_B
i_1	1	1
i_2	0	0

d_{eq}	s_A	s_B
i_1	1	0
i_2	0	1

FIGURE 3.4 – Utilités des agents selon la décision choisie et le résultat du tirage au sort.

Si l'on accepte les axiomes d'Harsanyi, les deux décisions sont strictement équivalentes puisque les utilités collectives, *ex-post* ou *ex-ante*, sont égales.

$$\left\{ \begin{array}{l} acu(d_1) = pcu(d_1) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \tilde{u}_i(d_1) = 1 \\ acu(d_{eq}) = pcu(d_{eq}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \tilde{u}_i(d_{eq}) = 1 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Diamond juge quant à lui la seconde décision, d_{eq} , strictement préférable à la première, car plus « équitable ». Or quelle que soit la fonction d'utilité collective choisie, dès lors que celle-ci vérifie l'axiome d'anonymat (définition 18 page 30), les utilités collectives *ex-post* des deux décisions sont égales. Cette préférence stricte pour la décision d_{eq} malgré l'égalité des utilités est alors une violation directe de l'axiome 8 page précédente : Diamond se positionne ainsi en faveur de l'approche *ex-ante*, qui vise à chercher à s'approcher de l'égalité des utilités espérées.

Broome (1984) précise qu'autant égaliser les utilités est méritoire, autant égaliser les utilités espérées ne l'est pas. En effet, si l'on considère l'utilité comme une quantification d'un état mental, alors l'utilité espérée n'est plus la représentation d'un état mental, mais simplement une construction mathématique; si l'utilité espérée affecte l'état mental d'un agent, cette influence doit être intégrée à l'utilité de cet agent. D'autre part, si l'on considère l'utilité comme la quantification d'un désir, alors les utilités correspondent au désir d'une fin alors que les utilités espérées correspondent au désir d'un moyen; égaliser les utilités espérées correspondrait à égaliser le désir pour quelque chose de virtuel et n'a donc pas de sens. Broome conclut donc que la préférence naturelle exprimée dans l'exemple de Diamond provient non pas de la distribution plus égalitaire des utilités espérées, mais simplement de l'existence d'un processus de choix plus équitable.

Cependant, Broome rappelle l'argument de Hammond (1983) qui s'oppose à Diamond en faisant remarquer que selon ce dernier, dans l'exemple 14, même après le tirage au sort, le décideur est inéquitable puisqu'il donne la promotion à l'un des agents aux dépens de l'autre, et qu'il serait ainsi toujours préférable, une fois un tirage au sort réalisé, d'en effectuer un second plutôt que d'attribuer la promotion à l'agent qui l'a « gagnée ». Hammond utilise cet argument de l'absence de cohérence dynamique de l'approche *ex-ante* (choisir d'égaliser les utilités espérées

conduit à un nombre infini de tirages au sort) pour défendre l'approche *ex-post* en en proposant une caractérisation axiomatique.

Epstein et Segal (1992) suivent Diamond et rejettent le second axiome d'Harsanyi, en en proposant une version affaiblie. Ils aboutissent ainsi à une approche *ex-ante* où la fonction d'agrégation collective est quadratique et quasi-concave, et résolvent ce problème de la cohérence dynamique.

D'autres auteurs, tels Gajdos et Maurin (2004) (qui généralisent un concept introduit par Ben-Porath *et al.* (1997) portant sur les indices d'inégalité en présence de risque), estiment que les approches purement *ex-ante* ou *ex-post* ne sont pas appropriées; ils proposent un ensemble d'axiomes interdisant ces deux approches et privilégient une fonction d'agrégation collective qui est une combinaison linéaire des fonctions d'agrégation collective *ex-ante* et *ex-post*.

Au-delà des considérations axiomatiques, choisir entre l'une ou l'autre agrégation consiste à faire un choix entre deux visions radicalement différentes. Du point de vue des économistes, cela revient à se demander si une société doit être jugée sur la distribution des revenus que reçoivent les individus (approche *ex-post*), ou sur la distribution des opportunités économiques qu'elle offre (approche *ex-ante*).

Chercher à optimiser l'utilité collective *ex-ante* est le choix rationnel d'une entité décisionnelle qui serait rémunérée selon la « qualité » du partage avant la connaissance de l'état de la nature; en effet, tant que l'aléa n'est pas levé, l'expression des satisfactions des agents vis-à-vis de la décision choisie s'exprime grâce à la fonction d'utilité stochastique (voir l'hypothèse 2 présentée en introduction du présent chapitre); ces satisfactions sont ensuite agrégées avec la fonction d'utilité collective; on notera que les probabilités intervenant dans l'expression de l'utilité collective *ex-ante* (équation 3.2 page 54) correspondent par conséquent à l'interprétation du risque *par chaque agent*: avec l'approche *ex-ante*, si chaque agent possédait une distribution de probabilité subjective sur les états de la nature, ce sont ces distributions qui devraient être utilisées.

Si à l'inverse l'entité décisionnelle est rémunérée, toujours selon la « qualité » du partage, mais seulement une fois l'état de la nature connu, alors c'est la maximisation de l'utilité collective *ex-post* qui constitue un choix rationnel; l'entité décisionnelle envisage tous les états de la nature possibles en évaluant dans chacun d'entre eux la qualité de la décision choisie grâce à la fonction d'utilité collective, puis elle utilise une fonction d'utilité stochastique pour en faire l'agrégation (conformément à l'hypothèse 3 présentée en introduction du présent chapitre); on notera que les probabilités intervenant dans l'expression de l'utilité collective *ex-post* (équation 3.3 page 54) correspondent par conséquent à l'interprétation du risque *par l'entité décisionnelle*: avec l'approche *ex-post*, si chaque agent possédait une distribution de probabilité subjective sur les états de la nature, ces distributions ne seraient pas prise en compte.

Dans toute la suite de ce document, on se place avec Harsanyi dans le cadre de la théorie de von Neumann et Morgenstern, avec les limites imposées par le théorème 5 page 55. Quelle que soit la fonction d'utilité collective choisie, on fait l'hypothèse que l'axiome 7 page 55 – respectivement l'axiome 8 page 55 – est satisfait quand on envisage une approche *ex-ante* – respectivement *ex-post*. Cette hypothèse se traduit par l'utilisation de l'espérance mathématique et donne les expressions des utilités collectives *ex-ante* et *ex-post* des équations 3.6 et 3.7 respectivement.

$$\forall d \in \mathcal{D}, acu(d) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) u_i(d, s) \quad (3.6)$$

$$\forall d \in \mathcal{D}, \text{pcu}(d) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) \cdot \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} u_i(d, s) \quad (3.7)$$

3.1.2 Influence du *timing effect* dans le cadre de l'approche égalitariste

Nous venons de montrer que, pour une majorité de fonctions d'utilité collective, les utilités collectives *ex-ante* et *ex-post* ne coïncident pas. Nous cherchons dans cette section à préciser quelle est l'importance du *timing effect* dans les problèmes que nous considérons. Nous nous limitons ici à l'approche égalitariste classique ($\bigoplus = \min$).

Considérons un problème quelconque de décision collective en présence de risque. La proposition suivante montre que les seuls cas d'égalité entre les utilités collectives *ex-ante* et *ex-post* correspondent à des profils d'utilités où, quel que soit l'état de la nature, l'agent le plus mal servi est toujours le même.

Proposition 11. *Soit une décision $d \in \mathcal{F}$. Alors, si chaque état de la nature a une probabilité de réalisation non nulle, c'est-à-dire, $\forall s \in \mathcal{S}, 0 < \text{Pr}(s) \leq 1$, on a :*

$$\text{acu}(d) = \text{pcu}(d) \Leftrightarrow \exists i_0 \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathcal{A}, \forall s \in \mathcal{S}, u_{i_0}(d, s) \leq u_i(d, s)$$

Démonstration. Soit $d \in \mathcal{F}$ une décision admissible.

Si un agent, disons i_0 , est toujours le moins bien servi (ou l'un des moins bien servis si égalité des utilités) quel que soit l'état de la nature qui se réalise, alors :

$$\begin{aligned} \text{pcu}(d) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(d, s) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) u_{i_0}(d, s) \\ &= \min_{i \in \mathcal{A}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) u_i(d, s) \\ &= \text{acu}(d) \end{aligned}$$

Inversement, supposons que l'utilité collective *ex-ante* soit égale à l'utilité collective *ex-post* :

$$\begin{aligned} \text{acu}(d) &= \text{pcu}(d) \\ \min_{i \in \mathcal{A}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) u_i(\boldsymbol{\pi}, s) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\boldsymbol{\pi}, s) \\ \exists i \in \mathcal{A}, \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) u_i(\boldsymbol{\pi}, s) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\boldsymbol{\pi}, s) \end{aligned}$$

Étant donné que les quantités $\text{Pr}(s)$ sont strictement positives, il vient :

$$\exists i \in \mathcal{A}, \forall s \in \mathcal{S}, u_i(\boldsymbol{\pi}, s) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\boldsymbol{\pi}, s)$$

D'où le résultat. □

On peut alors en déduire la probabilité qu'une telle situation arrive pour un profil d'utilité aléatoire dans le cas, courant en pratique, où les utilités des agents prennent une valeur réelle, bornée ou non.

n	$ \mathcal{S} $	$p_{acu(d)=pcu(d)}$
5	2	0.2
20	2	0.05
5	64	9.22×10^{-45}

TABLE 3.1 – Probabilité d'égalité entre les utilités *ex-post* et *ex-ante* dans le cadre égalitariste selon les caractéristiques des instances.

Proposition 12. *Soit $\mathbf{U} = (u_{is})$ une matrice de variables indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur un segment non vide de \mathbb{R}^+ , ou sur \mathbb{R}^+ tout entier.*

*Si cette matrice constitue le profil d'utilité associé à une décision $d \in \mathcal{F}$ dans un problème de décision collective en présence de risque, alors la probabilité pour que l'utilité collective *ex-ante* vis-à-vis de cette décision soit égale à l'utilité collective *ex-post* vaut :*

$$p_{acu(d)=pcu(d)} = \frac{1}{n^{|\mathcal{S}|-1}}$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de la proposition 11 page ci-contre. \square

Le tableau 3.1 donne des valeurs numériques de la probabilité $p_{acu(d)=pcu(d)}$ pour quelques valeurs de n , et $|\mathcal{S}|$.

On constate que le nombre d'états de la nature a une forte influence sur le résultat : autrement dit, dès qu'une instance d'un problème de décision en présence de risque met en jeu un risque représenté par beaucoup d'états de la nature, les cas d'égalité entre les utilités collectives *ex-ante* et *ex-post* deviennent très rares.

Plus généralement, on montre qu'avec la plupart² des fonctions d'agrégation qui réduisent les inégalités, l'utilité collective *ex-ante* est toujours supérieure à l'utilité collective *ex-post*. La proposition 13, bien qu'évidente, se révèle essentielle à la construction des algorithmes présentés au chapitre 5 page 81. Il s'agit une conséquence directe de la définition des utilités collectives *ex-post* et *ex-ante*.

Proposition 13. *Si la fonction d'agrégation collective est concave, alors :*

$$\forall d \in \mathcal{F}, \quad acu(d) \geq pcu(d) \tag{3.8}$$

3.2 Partage en présence de risque

Nous nous intéressons dans cette section à l'impact du risque sur la modélisation des problèmes de partage d'objets indivisibles. Un problème de partage en présence de risque est une extension du problème de partage déterministe, qui constitue lui-même un cas particulier de décision sous risque.

2. Une fonction d'utilité collective réduisant les inégalités est Schur-concave, mais non nécessairement concave ; par conséquent, il existe des fonctions d'utilité collective réduisant les inégalités qui ne vérifient pas l'équation 3.8.

L'ensemble des états de la nature peut prendre une forme quelconque, selon l'influence de l'aléa sur les données du problème (voir plus bas section 3.2.1); il est muni d'une distribution de probabilité. Les préférences des agents sont représentées comme exposé en introduction du présent chapitre 3 page 51 par des fonctions d'utilités définies sur les couples (décision, état de la nature). L'hypothèse de non exogénéité des préférences (voir section 2.2.1 page 39) reste valable et autorise la réduction du domaine de définition à l'ensemble des couples (part, état de la nature).

3.2.1 L'aléa dans les problèmes de partage

Comment le risque apparaît-il dans les problèmes de partage et quelles sont les conséquences en terme de modélisation ?

L'exemple 15 propose une description informelle d'un problème de partage en présence de risque.

Exemple 15. *Xavier souhaite se débarrasser de l'intégralité de ses bouteilles de vin, au nombre de 30, qui composent sa cave. Il propose donc à ses amis Alice, Bertrand, et Camille d'en récupérer chacun une partie. Pour déterminer comment partager les bouteilles entre ses amis, Xavier connaît les préférences de chacun de ses amis sur les différents types de vins. Il dispose en outre des informations suivantes :*

- *A part quelques bouteilles dont le bouchon est en matière synthétique, les autres ont une probabilité, faible mais non nulle, d'être bouchonnées. Si tel est le cas, la valeur de la bouteille pour la personne qui la récupère est au mieux grandement diminuée, au pire nulle.*
- *Bertrand, qui habite loin, fera probablement le voyage en train pour venir récupérer les bouteilles. Si tel est le cas, il sera limité en terme d'encombrement et ne pourra rapporter chez lui qu'au maximum une caisse, soit 6 bouteilles ; sinon, il viendra en voiture et n'aura alors aucune contrainte particulière sur le nombre de bouteilles qu'il pourra transporter.*

Précisons enfin que Xavier doit déterminer de quelle manière il partagera les bouteilles entre ses trois amis avant de savoir quel moyen de transport Bertrand utilisera (et évidemment sans connaître l'état, bouchonné ou non, des bouteilles).

L'exemple 15 illustre le fait que, dans un problème de partage sous risque, l'aléa peut porter sur une vaste part des données du problème.

Sur les contraintes Dans un problème de décision en présence de risque, certaines décisions peuvent n'être interdites que si certains états de la nature se réalisent. On appelle *contrainte risquée* le couple $(C, \mathcal{S}_C) \in \wp(\mathcal{D}) \times \wp(\mathcal{S})$. Une telle contrainte interdit les décisions $d \in \mathcal{D} \setminus C$ si un état de la nature $s \in \mathcal{S}_C$ se réalise, et n'impose dans le cas contraire aucune restriction. Une contrainte risquée (C, \mathcal{S}) s'appliquant pour tous les états de la nature sera appelée *contrainte stricte*³.

Le décideur n'ayant aucun contrôle sur les états de la nature, il ne peut choisir une décision qui pourrait par la suite s'avérer infaisable. Par conséquent, de son point de vue, toute contrainte restreignant les décisions possibles, même seulement pour un sous-ensemble d'états de la nature,

3. Quand le contexte est clair, on omettra la mention stricte, et on parlera simplement de contrainte, en cohérence avec le cadre de l'univers certain.

doit être considérée comme une contrainte stricte. Pour un ensemble de contraintes risquées (C_k, \mathcal{S}_{C_k}) , l'ensemble des décisions admissibles s'écrit donc selon l'équation 3.9.

$$\mathcal{F} = \bigcap_k C_k \subseteq \mathcal{D} \quad (3.9)$$

Sur les objets Les caractéristiques des objets à partager peuvent ne pas être connues avec certitude. L'état réel des objets, ou encore leur disponibilité, sont parfois inconnus au moment du partage. Cet aléa peut être directement retranscrit dans les préférences des agents en introduisant les états de la nature associés.

Exemple 16. *Considérons un problème quelconque, dans lequel l'aléa impacte l'un des objets, j_0 : celui-ci sera dans l'un de quatre états possibles quand il sera reçu par l'agent auquel il a été alloué ; $\mathcal{S}_{j_0} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ liste les états possibles de l'objet. Alors l'ensemble \mathcal{S} des états de la nature est le produit cartésien des états de la nature indépendants de l'objet \mathcal{S}_0 (conditions météorologiques, etc.) par \mathcal{S}_{j_0} :*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_{j_0}$$

Les préférences des agents s'expriment alors classiquement par des fonctions d'utilité de la forme $u_i : \mathcal{F} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{A}$ et le risque introduit par l'objet j_0 est bien pris en compte dans les préférences des agents.

Sur les agents Certains agents peuvent décider de se retirer du partage après la réalisation de celui-ci si la part qu'ils ont reçue ne leur convient pas. Dans le cas des problèmes de partage proprement dit, l'hypothèse de monotonie des préférences (voir section 2.2.1 page 39) limite ce comportement puisqu'elle implique qu'un agent préférera toujours n'importe quel lot d'objets à une part vide et incite ainsi les agents à rester jusqu'au terme du partage.

Cependant il est toujours possible d'envisager des cas dans lesquels un agent se retire du partage pour marquer son désaccord avec l'allocation proposée ou bien encore pour une raison extérieure au partage proprement dit : processus d'attribution trop long, etc. À notre connaissance, ces problématiques n'ont pas été étudiées dans le cadre des problèmes de partage.

Toutefois, l'ajout de considérations financières change la donne : dans le cadre des problèmes d'enchères, l'aléa sur les agents constitue une problématique importante. En effet, un agent qui se retire d'un processus d'enchères car non satisfait de sa part ne recevra certes pas les objets prévus, mais surtout n'apportera pas la contribution financière espérée en contrepartie par le commissaire priseur ; ce dernier doit alors, en vue de parer à de telles situations, proposer des solutions robustes, certes sous-optimales, mais sur lesquelles l'impact des aléas est moindre car elles sont facilement « réparables » en une bonne solution admissible (voir par exemple Holland et O'Sullivan (2005) pour une étude de la robustesse des solutions dans les enchères combinatoires).

Sur les préférences Il est possible que les préférences des agents ne soient pas certaines. Nous considérons que, dans les problèmes que nous allons étudier, ce risque constitue un facteur individuel qui n'est donc à ce titre pas à prendre en considération par l'entité décisionnelle. On notera toutefois que la littérature s'intéresse particulièrement à ce genre de problématique dans le cadre de la théorie du vote (voir par exemple Konczak et Lang (2005)).

Dans les problèmes de partage que nous étudions, on suppose que, pour les raisons évoquées ci-dessus, les agents n'ont pas la motivation ni la possibilité de se retirer du partage ; l'aléa ne concerne donc pas les agents. D'autre part, on se place dans le cas où les seules contraintes considérées sont des contraintes strictes, qu'elles soient intrinsèquement indépendantes de l'aléa ou bien qu'elles proviennent d'une contrainte initiale risquée. On définit alors une instance d'un problème de partage de biens indivisibles en présence de risque comme suit :

Définition 44 (Instance d'un problème de partage de biens indivisibles en présence de risque). Une instance d'un problème de partage de biens indivisibles en présence de risque est un tuple $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{S}, \mathcal{C}, (u_i)_{i \in \mathcal{A}})$ où :

- \mathcal{O} est un ensemble fini de m objets ;
- \mathcal{S} est un ensemble fini d'états de la nature, muni d'une distribution de probabilité $\text{Pr} : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$
- \mathcal{A} est un ensemble fini de n agents, chacun exprimant ses préférences par des fonctions d'utilité $u_i : \wp(\mathcal{O}) \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$;
- \mathcal{C} est un ensemble fini de contraintes strictes sur la ressource, définissant l'espace $\mathcal{F} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \mathcal{D}$ des partages admissibles.

Un problème de partage de biens indivisibles en présence de risque est défini par les entrées suivantes :

- une instance d'un problème de partage de biens indivisibles en présence de risque ;
- l'extension *ex-ante* ou *ex-post* d'une fonction d'utilité collective ou d'un critère numérique.

Est attendu en sortie un partage admissible optimal au sens de l'évaluation choisie, qu'on appellera solution du problème.

3.2.2 Évaluation des partages en présence de risque

De même que la première partie du présent chapitre était consacrée à l'extension au risque du formalisme de la décision collective, on cherche dans cette section à proposer une extension au risque des évaluations spécifiques aux problèmes de partage exposées dans la section 2.2 page 37.

Comme on l'a vu, dans le cadre sans risque, on utilise à cet effet des *critères numériques* (voir définition 40 page 46) : un critère numérique est un couple $Q = (\langle \varphi_i \rangle, \oplus)$ qui à tout partage $\pi \in \mathcal{F}$ associe une valeur numérique $Q(\pi)$ traduisant la qualité de celui-ci selon un certain point de vue, et dont on rappelle l'expression ci-dessous. Précisons que, dans cette définition, et contrairement aux notations introduites dans cette section, $u_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité définie dans le cadre sans risque (voir chapitre 2 page 27).

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, Q(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(u_i)(\pi) \quad (3.10)$$

On remarque que, en l'absence de risque, les critères numériques aussi bien que les fonctions d'utilité collectives sont des objets mathématiques qui permettent d'associer à tout partage une valeur numérique. À partir de ce constat, l'extension au risque d'un critère numérique est naturellement réalisée sur le même principe que celle de l'utilité collective, en introduisant un opérateur d'agrégation stochastique, ici l'espérance mathématique. Cette extension fait là encore apparaître le *timing effect*, et on proposera par conséquent plusieurs extensions pour un même critère.

En constatant que, dans le cas d'un problème de partage risqué, fixer l'état de la nature revient à se placer dans le cadre d'un problème de partage sans risque, on introduit la notation suivante pour un critère Q : pour un état de la nature $s \in \mathcal{S}$ et un partage π donnés, la valeur $Q_{[s]}(\pi)$ représente la valeur $Q(\pi)$ calculée dans le problème sans risque défini en choisissant l'état de la nature s .

Pour chaque critère numérique on fournit d'abord une extension au risque *ex-ante*, réécriture directe de l'équation 3.6 page 58.

Définition 45 (Valeur *ex-ante* d'un critère numérique). *Soit $Q = (\langle \varphi_i \rangle, \oplus)$ un critère numérique.*

On appelle valeur ex-ante du critère Q vis-à-vis d'un partage $\pi \in \mathcal{F}$ la valeur $Qa(\pi)$ définie comme suit, où \tilde{u}_i représente l'utilité espérée de l'agent i (équation 3.1 page 52) :

$$Qa(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(\tilde{u}_i)(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i\left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) u_i(\cdot, s)\right)(\pi) \quad (3.11)$$

L'extension *ex-post* d'un critère découle quant à elle directement de l'équation 3.7 page 58 qui définit l'extension *ex-post* des fonctions d'agrégation collective :

Définition 46 (Valeur *ex-post* d'un critère numérique). *Soit $Q = (\langle \varphi_i \rangle, \oplus)$ un critère numérique.*

On appelle valeur ex-post du critère Q vis-à-vis d'un partage $\pi \in \mathcal{F}$ la valeur $Qp(\pi)$ définie comme suit :

$$Qp(\pi) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \cdot Q_{[s]}(\pi) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \cdot \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(u_i(\cdot, s))(\pi) \quad (3.12)$$

En plus des deux agrégations précédentes, il existe dans le cas des critères numériques une troisième méthode pour obtenir une valeur numérique après agrégation.

En effet, la définition 45 correspond à une extension *ex-ante* associée à une vision globale du critère comme une fonction s'appliquant directement sur les utilités des agents. Or, à partir de l'équation 3.10 page précédente, un critère peut être interprété comme une redéfinition des fonctions d'utilité des agents (opérée par les fonctions φ_i , $i \in \mathcal{A}$), suivie d'une agrégation de ces nouvelles utilités. Vue sous cet angle, l'utilité de l'agent i pour un partage π quand l'état de la nature s se réalise devient $\varphi_i(u_i)(\pi, s)$ et non plus $u_i(\pi, s)$. L'adaptation de l'utilité collective *ex-ante* dans ce cas conduit à la notion d'extension *ex-medio* d'un critère, introduite par la définition 47.

Définition 47 (Valeur *ex-medio* d'un critère numérique). *Soit $Q = (\langle \varphi_i \rangle, \oplus)$ un critère numérique.*

On appelle valeur ex-medio du critère Q vis-à-vis d'un partage $\pi \in \mathcal{F}$ la valeur $Qm(\pi)$ définie comme suit :

$$Qm(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \cdot \varphi_i(u_i(\cdot, s))(\pi) \quad (3.13)$$

Notons que, comme le soulignent clairement les définitions précédentes (équation 45 page précédente, 46 page précédente, et 47 page précédente), les extensions *ex-ante*, *ex-post* et *ex-medio* d'un critère numérique sont dans le cas général des grandeurs bien distinctes.

Parmi les critères numériques, on distingue ceux qui ne prennent pour valeurs que 0 ou 1 quel que soit le partage, qu'on appelle critères binaires. On dit qu'un partage $\pi \in \mathcal{F}$ vérifie le critère binaire P (ou la propriété qu'il représente, voir section 2.2.4 page 45) si et seulement si $P(\pi) = 1$.

Les extensions proposées ci-dessus appliquées à des critères binaires fournissent-elles également des valeurs binaires? Autrement dit, peut-on étendre au cadre risqué les propriétés classiques des partages de la même manière que les critères numériques?

La valeur *ex-ante* Pa d'un critère binaire P , définie par l'équation 3.11 page précédente, reste une valeur binaire.

Proposition 14. *Soit P un critère binaire, c'est-à-dire $\forall \pi \in \mathcal{F}, P(\pi) \in \{0, 1\}$. Alors :*

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, Pa(\pi) \in \{0, 1\} \quad (3.14)$$

Pa permet donc de définir une propriété *ex-ante* associée à P . On dira donc qu'un partage $\pi \in \mathcal{F}$ vérifie le critère binaire P *ex-ante* si et seulement si $Pa(\pi) = 1$.

Travailler avec la valeur *ex-post* d'un critère binaire s'avère plus délicat. En effet, en suivant l'équation 3.12 page précédente, on obtient une valeur *ex-post* Pp associée à P qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1] \not\subseteq \{0, 1\}$. Pour un partage $\pi \in \mathcal{F}$, cette valeur n'est autre que la probabilité que se réalise un état de la nature s dans lequel le partage π vérifie le critère P : on parle alors de *probabilité de réalisation d'un critère binaire*.

Définition 48 (Probabilité de réalisation d'un critère binaire). *Soit $P = (\langle \varphi_i \rangle, \oplus)$ un critère binaire. La valeur Pp définie par l'équation 3.12 page précédente est appelée probabilité de réalisation de P .*

Gajdos et Tallon (2002) proposent toutefois une extension *ex-post* de la propriété d'absence d'envie dont la généralisation à un critère binaire quelconque conduit à la définition 49 : la valeur *ex-post* d'un critère binaire vis-à-vis d'un partage vaut 1 si et seulement si le critère binaire initial est vérifié par le partage quel que soit l'état de la nature qui se réalise.

Définition 49 (Valeur binaire *ex-post* d'un critère binaire). *Soit $P = (\langle \varphi_i \rangle, \oplus)$ un critère binaire.*

*On appelle valeur binaire *ex-post* du critère P vis-à-vis d'un partage $\pi \in \mathcal{F}$ la valeur $P\bar{p}(\pi)$ définie comme suit :*

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, P\bar{p}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall s \in \mathcal{S}, \quad Q_{[s]}(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(u_i(\cdot, s))(\pi) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.15)$$

$P\bar{p}$ permet donc de définir une propriété *ex-post* associée à P . On dit qu'un partage $\pi \in \mathcal{F}$ vérifie le critère binaire P *ex-post* si et seulement si $P\bar{p}(\pi) = 1$.

Néanmoins, la propriété *ex-post* ainsi définie est une propriété très forte : il existe des structures simples de problèmes de partage (voir section 4.2 page 73) pour lesquelles des critères binaires usuels ne sont satisfaits *ex-post* par aucun partage, ce qui limite grandement leur intérêt. De sorte à conserver une approche *ex-post* intéressante avec les critères binaires, nous

suggérons de s'intéresser préférentiellement à la probabilité de réalisation d'un critère introduite précédemment, et c'est précisément ce que nous ferons dans la suite.

Le cas *ex-medio*, quant à lui, est particulier puisque, pour un critère binaire P et un partage π donnés, on n'a *a priori* aucune garantie que la valeur de Pm (Définition 47 page 63) soit comprise entre 0 et 1 et donc représente une probabilité. Nous nous limitons donc ici au cas où l'opérateur d'agrégation du critère est la fonction min, autrement dit, $P = (\langle \varphi_i \rangle, \min)$. Dans ce cas, pour tout partage $\pi \in \mathcal{F}$, la valeur $Pm(\pi)$ appartient bien à l'intervalle $[0, 1]$. Par analogie au cas *ex-post*, on l'appelle *probabilité individuelle de réalisation d'un critère*.

Définition 50 (Probabilité individuelle de réalisation d'un critère binaire). *Soit $P = (\langle \varphi_i \rangle, \min)$ un critère binaire.*

Pour un partage $\pi \in \mathcal{F}$, on appelle probabilité individuelle de réalisation de P la valeur $Pm(\pi)$ définie par l'équation 3.13 page 63.

3.2.3 Applications de problèmes de partage en présence de risque

La majeure partie des applications réelles des problèmes de partage sont soumis à une large part d'aléa. Si dans certain cas, cet aléa peut être négligé sans grande conséquence sur la qualité des partages choisis, il en va autrement pour certaines applications. Nous proposons dans cette section quelques exemples d'applications réelles de partage dans lesquelles le risque doit être pris en compte dans la modélisation. Certaines constituent des extensions des problèmes de partage en univers certain présentés à la section 2.2.3 page 40.

Partage de ressources satellitaires

Le problème du partage de ressources satellitaires a été introduit en s'appuyant sur l'exemple de la constellation de satellites d'observation *Pléiades*. L'allocation de la ressource satellitaire entre les demandes de photographies des différents pays a lieu chaque matin, pour toute la journée jusqu'au lendemain.

Un pays s'estime satisfait par une demande réalisée si la photo obtenue est exploitable, or les conditions météorologiques – et en particulier le niveau de couverture nuageuse – dans la zone d'observation peuvent grandement réduire la qualité d'une photographie, jusqu'à la rendre éventuellement parfaitement inutilisable. Malheureusement, les conditions météorologiques ne sont pas parfaitement connues au moment de la prise de décision : on dispose uniquement d'une estimation probabiliste du degré de couverture nuageuse sur les zones ciblées par les demandes. Il est du ressort du centre d'opération au sol, en charge de l'allocation des demandes, de prendre en compte le risque inhérent aux conditions météorologiques de sorte à assurer l'équité du partage.

Allocation de cours à des étudiants

Dans ce problème, un établissement d'enseignement doit effectuer la répartition des étudiants entre différents cours en respectant au mieux leurs préférences.

En pratique, les préférences des étudiants dépendent de facteurs externes qui influent sur la qualité des cours (acquisition d'un équipement ou même construction d'un laboratoire par

l'établissement, etc.) ou même leur simple existence (absence possible d'un professeur, etc.). Dans ce type d'applications, le risque repose donc sur les « objets » à partager.

L'intégralité des variables affectant les cours n'est généralement pas connue avec certitude au moment où les étudiants doivent faire leurs choix. L'établissement d'enseignement doit donc prendre en compte cet aléa de sorte à assurer une affectation équitable des étudiants sur les cours proposés, en fonction des risques connus.

Allocation de créneaux dans un aéroport

Le trafic aérien, de même que la plupart des réseaux de transport, constitue un système très sensible aux perturbations (voir section 2.2.3 page 40 pour une description de quelques problématiques de gestion du trafic aérien). Les aléas pouvant survenir sur un tel système sont nombreux :

- un appareil peut être retardé ;
- une piste peut être temporairement congestionnée, indisponible, ou son utilisation peut être limitée à certains types d'appareils ;
- les atterrissages et décollages peuvent être rendus impossibles par les conditions météorologiques (orage, . . .) ;
- le temps de préparation des appareils à leur porte peut varier pour différentes raisons : chargement des bagages plus long que prévu, dégivrage nécessaire pour cause de températures extérieures particulièrement froides, etc.

L'impact de l'aléa dans ce type de problème est trop important pour qu'on puisse l'ignorer : il faut donc en fournir une modélisation et proposer des méthodes de résolution en tenant compte.

Enchères

Le problème des enchères a été exposé dans la section 2.2.3 page 40. La discussion de la section 3.2.1 page 60, en particulier concernant l'incertitude sur les agents, montre bien que l'aléa est présent dans les problèmes d'enchères et doit être pris en compte.

De façon plus générale, dans un problème d'enchères, chaque mise placée par un enchérisseur peut se révéler caduque au moment du processus de décision, pour diverses raisons : l'enchérisseur s'est retiré du partage, l'un des biens concernés est indisponible, etc. (voir par exemple Bofill *et al.* (2010))

3.3 Conclusion

Ce chapitre a permis de rapprocher les notions de décision en présence de risque, introduite au chapitre 1 page 7, d'une part, et de décision collective, introduite au chapitre 2 page 27 d'autre part.

Nous avons exposé la problématique soulevée par la mise en commun de ces deux notions, problématique tant théorique que philosophique, connue depuis Myerson (1981) sous le nom de *timing effect* : évaluer des décisions collectives en présence de risque impose de choisir un point de vue parmi deux possibles, l'approche *ex-ante*, dans laquelle est considérée la satisfaction des agents avant la résolution du risque, ou bien l'approche *ex-post*, dans laquelle la satisfaction

des agents est prise en compte après la résolution du risque, dans tous les états possibles de la nature.

Dans la seconde partie du chapitre, nous avons montré que les problèmes de partage constituent une classe de problème dans laquelle des aléas peuvent affecter nombre de paramètres. Nous avons par conséquent proposé une modélisation, pour l'instant assez générale, des problèmes de partage en présence de risque ; de cette modélisation sera issu le modèle simplifié de partage sur lequel portent une large part de nos travaux (voir chapitre 4 page 69).

De sorte à pouvoir travailler avec les nouveaux problèmes que cette modélisation introduit, nous avons proposé une extension au risque des critères numériques introduits dans le chapitre précédent. Nous situant toujours dans le cadre de la décision collective en présence de risque, les critères numériques sont bien-sûr sujets eux aussi au *timing effect*. Par conséquent, pour un critère numérique donné, nous avons défini trois extensions dans le cas risqué : une extension *ex-ante*, une extension *ex-medio*, et une extension *ex-post* ; cette dernière présente un intérêt particulier dans le cas des critères binaires, puisqu'il s'agit alors exactement de la probabilité que le critère binaire soit vérifié après résolution du risque.

Chapitre 4

Un modèle simple de partage de biens indivisibles sous risque

Nous avons choisi dans le cadre de cette thèse de restreindre l'étude des problèmes de partage à une classe particulière de problèmes, qui constitue un juste compromis entre simplicité et proximité aux applications réelles. Cette simplicité nous permet d'une part d'obtenir des résultats théoriques, et d'autre part de se concentrer sur les problématiques intrinsèques aux problèmes de partage sous risque en ce qui concerne l'algorithmique.

Nous explicitons dans le présent chapitre quelles hypothèses supplémentaires nous proposons pour aboutir, à partir du modèle général introduit au chapitre 3 page 51, à notre modèle simplifié de problème de partage, dit problème de partage *BIRPA*.

4.1 Les hypothèses du modèle

On cherche à proposer un modèle de problème de partage en présence de risque simplifié, issu du modèle général introduit au précédent chapitre. On s'inspire pour cela d'un problème classique de partage en univers certain dit *Santa Claus*. Cette appellation est due à Bansal et Sviridenko (2006) qui proposent des résultats d'approximation de la solution du problème. Nous choisissons ce problème puisqu'il est construit sur un modèle simple qui réunit cependant toutes les problématiques du partage de biens indivisibles.

Le problème Santa Claus est donc un problème de partage de biens indivisibles, basé sur les hypothèses suivantes :

- les préférences des agents sont additives sur les objets (voir section 4.1.2 page suivante) ;
- la contrainte de préemption est imposée ;
- l'ordre de bien-être social choisi est l'ordre égalitariste classique.

Nous conservons l'esprit de ces trois hypothèses : nous les adaptons au cas risqué quand cela est nécessaire, et nous en ajoutons quelques autres qui spécifient la nature exacte du risque et sa portée dans le problème.

4.1.1 Contraintes des problèmes de partage

Dans le problème Santa Claus, puisque l'ordre de bien-être social égalitariste classique est unanime (définition 22 page 31) et que la seule contrainte imposée est la contrainte de préemp-

tion, il existe toujours une solution optimale π^* dans laquelle tous les objets sont distribués :

$$\bigcup_{i \in \mathcal{A}} \pi_i^* = \mathcal{O} \quad (4.1)$$

Il semble donc naturel d'imposer la contrainte de distribution totale dans un tel problème, puisqu'elle restreint l'espace de recherche sans éliminer toutes les solutions optimales (au sens égalitariste). Deux contraintes interviennent donc dans notre modèle, la contrainte de préemption et la contrainte de distribution totale : tous les objets doivent être affectés, et un même objet ne peut être affecté qu'à un seul agent.

4.1.2 Additivité des préférences

Les préférences des agents doivent s'exprimer sur les parts, ou ensembles d'objets, qu'ils peuvent recevoir. On souhaite à la fois permettre une expression de préférences réaliste tout en proposant une structure et une représentation simple de ces préférences. On conserve l'hypothèse d'additivité des préférences présente dans le problème Santa Claus, puisqu'elle s'avère tout à fait naturelle dans ce contexte ; ainsi, l'utilité d'un agent vis-à-vis d'un ensemble d'objets s'exprime comme la somme des utilités associées à chaque objet reçu individuellement, utilités qu'on appellera *poids*.

Les préférences d'un agent peuvent sous cette hypothèse être entièrement représentées par une matrice à trois dimensions $\mathbf{W} = (w_{ijs})$, $i \in \mathcal{A}$, $j \in \mathcal{O}$, $s \in \mathcal{S}$ où l'élément w_{ijs} représente l'utilité, ou poids, associé par l'agent i à l'objet j si l'état de la nature s se réalise. Les fonctions d'utilité prennent par suite la forme de l'équation 4.2.

$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall \pi \in \mathcal{F}, \forall s \in \mathcal{S}, \quad u_i(\pi, s) = \sum_{j \in \pi_i} w_{ijs} \quad (4.2)$$

4.1.3 Risque porté par les objets

L'élément principal d'un problème de partage est la ressource à partager : nous faisons l'hypothèse que cette ressource, c'est-à-dire l'ensemble des objets, est la seule source de risque dans le problème.

Cette hypothèse s'interprète naturellement : chaque objet sera disponible dans un état donné, parmi un ensemble fini d'états possibles ; au moment de la prise de décision, les acteurs du partage connaissent uniquement l'ensemble des états possibles et les probabilités de réalisation de chacun.

Définition 51 (Risque porté par les objets). *Soit un problème quelconque de partage de biens indivisibles en présence de risque (voir section 3.2.1 page 60) ; on rappelle que le nombre d'objets est noté m .*

Dans un tel problème, on dit que le risque est porté par les objets si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. *il existe m ensembles finis $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_m$ tels que l'ensemble \mathcal{S} des états de la nature puisse s'écrire comme le produit cartésien de ces ensembles, c'est-à-dire :*

$$\mathcal{S} = \{s = \langle s_1, s_2, \dots, s_m \rangle \mid s_1 \in \mathcal{S}_1, s_2 \in \mathcal{S}_2, \dots, s_m \in \mathcal{S}_m\} \quad (4.3)$$

Pour un état de la nature $s = \langle s_j \rangle \in \mathcal{S}$ donné, on appelle état de l'objet j la valeur s_j .

2. *l'utilité apportée par un objet à un agent est indépendante des états des autres objets :*

$$\forall j \in \mathcal{O}, \forall i \in \mathcal{A}, \forall (s, s') \in \mathcal{S}^2, s_j = s'_j \Rightarrow w_{ijs} = w_{ijs'} \quad (4.4)$$

Remarquons que la condition 1 ne contraint en pratique que la forme sous laquelle le problème doit être modélisé et non la nature du problème elle-même.

Une conséquence directe de l'équation 4.3 page ci-contre est l'expression du cardinal de l'ensemble des états de la nature.

$$\#\mathcal{S} = \prod_{j \in \mathcal{O}} \#S_j \quad (4.5)$$

Le nombre d'états de la nature est exponentiel en le nombre d'objets. Cela constitue le principal défi algorithmique à relever (voir chapitre 5 page 81).

Le nombre d'états possibles que peuvent prendre les objets ne modifie pas la structure du problème de partage ; par conséquent, dans un souci de simplification, nous travaillerons sur des problèmes de partages de bien indivisibles dans lesquels chaque objet peut prendre deux états distincts, qu'on appellera *bon état* et *mauvais état*. L'ensemble des états de la nature prend la forme suivante :

$$\mathcal{S} = \prod_{j \in \mathcal{O}} \{0, 1\} \quad (4.6)$$

d'où l'expression de son cardinal :

$$\#\mathcal{S} = 2^m \quad (4.7)$$

Un état de la nature s est alors parfaitement défini par l'ensemble des objets en bon état quand il se réalise, noté $good(s)$:

$$\forall s = \langle s_1, \dots, s_m \rangle \in \mathcal{S}, \quad good(s) = \{j \in \mathcal{O} \mid s_j = 1\} \quad (4.8)$$

Nous supposons de plus qu'un objet en mauvais état rapporte une utilité nulle à l'agent qui le reçoit ; cette hypothèse, associée aux précédentes, permet de parfaitement spécifier les préférences des agents à partir d'une matrice de poids $\mathbf{W} = (w_{ij})_{i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{O}}$, où w_{ij} représente l'intensité de la préférence de l'agent i pour l'objet j . Le lien avec les w_{ijs} introduits précédemment fait l'objet de l'équation 4.9.

$$\forall i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{O}, s \in \mathcal{S}, \quad w_{ijs} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin good(s) \\ w_{ij} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Les fonctions d'utilité des agents ne sont alors fonction que de \mathbf{W} , $\boldsymbol{\pi}$, et s et s'écrivent :

$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}, \forall s \in \mathcal{S}, \quad u_i(\boldsymbol{\pi}_i, s) = \sum_{\substack{j \in \boldsymbol{\pi}_i \\ j \in good(s)}} w_{ij} \quad (4.10)$$

4.1.4 Indépendance des probabilités

La modélisation choisie au chapitre 3 page 51 impose l'indépendance de la distribution de probabilité vis-à-vis de la décision choisie. Cette hypothèse peut être reformulée comme suit : la probabilité d'un objet d'être en bon ou en mauvais état ne dépend pas de l'agent auquel il va être attribué. Considérons les deux cas suivants :

- l'aléa est résolu après la prise de décision mais *avant* la réception effective des objets par les agents, et il semble naturel dans ce cas de supposer que l'état d'un objet ne dépend pas de l'agent auquel on va le distribuer puisqu'agent et objet n'ont encore eu aucune interaction au moment où l'aléa se résoud ;
- l'aléa est résolu après la prise de décision et *après* la distribution des objets, et dans ce cas, seule l'utilisation qu'en fait l'agent peut éventuellement influencer sur l'état de l'objet et les probabilités associées : dans ce cas, il n'est pas du ressort de l'entité décisionnelle de prendre en compte cette incertitude, puisque sa cause est individuelle.

Cette hypothèse d'indépendance vis-à-vis de la décision choisie se justifie donc parfaitement dans le cadre des problèmes de partage.

Nous faisons une seconde hypothèse simplificatrice sur la distribution de probabilité : les événements « l'objet j est en bon état », $j \in \mathcal{O}$, sont indépendants. Cette hypothèse exprime simplement l'indépendance de l'aléa associé à chaque objet.

La distribution de probabilité Pr s'exprime alors par l'équation 4.11.

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \text{Pr}(s) = \prod_{j \in \text{good}(s)} p_j \prod_{j \notin \text{good}(s)} \bar{p}_j \quad (4.11)$$

La grandeur p_j (respectivement $\bar{p}_j = 1 - p_j$) représente la probabilité pour l'objet j d'être en bon état (respectivement en mauvais état). Puisqu'il est inutile d'allouer un objet à coup sûr en mauvais état, on supposera que tous les objets du partage ont une chance d'être en bon état, c'est-à-dire :

$$\forall j \in \mathcal{O}, \quad 0 < p_j \leq 1 \quad (4.12)$$

4.1.5 Fonctions d'utilité collective et critères numériques

Nous nous limitons à l'étude de quelques fonctions d'utilité collective et critères numériques.

En cohérence avec le problème en univers certain *Santa Claus*, nous nous intéressons à l'égalitarisme classique. Les deux approches possibles en présence de risque sont alors l'approche égalitariste *ex-ante* et l'approche égalitariste *ex-post*, dont nous rappelons les formulations analytiques dans les équations 4.13 et 4.14.

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \quad \text{acu}(\pi) = \min_{i \in \mathcal{A}} \tilde{u}_i(\pi) \quad (4.13)$$

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \quad \text{pcu}(\pi) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) \cdot \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi, s) \quad (4.14)$$

D'autre part, nous envisageons également une approche fondée sur des critères numériques de juste part proportionnelle (définition 37 page 42) et maximin (définition 38 page 44) étendus au cas risqué (voir section 3.2.2 page 62). On remarque que, dans notre problème de partage simplifié, il existera presque toujours¹ au moins un état de la nature où un agent ne recevra que des objets en mauvais état alors qu'un autre agent recevra au moins un objet en bon état auquel il a associé un poids non nul. Dans un tel état de la nature, la juste part proportionnelle n'est pas assurée et l'allocation n'est pas sans envie. Le même raisonnement montre que, sauf pour des instances particulières, il existera presque toujours des états de la nature où la juste part maximin ne sera pas non plus assurée. Par conséquent, l'extension *ex-post* des critères binaires, proposée dans la section 3.2.2 page 62 (équation 49 page 64) n'est pas adaptée ici, puisque pour une large majorité d'instances, aucune allocation ne vérifierait les critères usuels *ex-post*. On s'intéresse donc dans le cadre de notre modèle de partage simplifié aux critères Qa^{PFS} , Qa^{MFS} , Pp^{PFS} et Pp^{MFS} .

On notera que l'ajout de la contrainte de distribution totale est également cohérent avec ces critères dans le cas sans risque comme dans le cas risqué. En effet, si une allocation π qui ne distribue pas tous les objets assure la juste part proportionnelle (respectivement maximin), alors il est facile de voir que n'importe quelle solution π' qui la complète (c'est-à-dire telle que pour tout agent $i \in \mathcal{A}$, on ait $\pi_i \subseteq \pi'_i$) assurera également la juste part proportionnelle (respectivement maximin).

4.2 Le problème de partage BIRPA (récapitulation)

Nous avons présenté dans la section précédente un certain nombre d'hypothèses que nous regroupons ci-dessous :

- additivité des préférences ;
- risque porté par les objets ;
- indépendance des probabilités de bon état.

On rappelle qu'on a également fait le choix de se limiter à l'utilisation de deux méthodes d'évaluation des partages : l'approche égalitariste classique d'une part, et les critères de juste part de l'autre.

Toutes ces hypothèses simplifient la modélisation proposée dans la section 2.2 page 37, et permettent d'aboutir à un modèle cohérent qui reste proche de nombreuses applications du monde réel.

On parle pour le problème ainsi défini d'un problème de partage de biens indivisibles risqués avec préférences additives (abrégé en problème de partage BIRPA). Une instance du problème de partage BIRPA prend la forme présentée dans la définition 52 ; le lecteur pourra se reporter à la définition d'une instance d'un problème quelconque de partage de biens indivisibles (définition 44 page 62) pour comparaison.

Définition 52 (Instance d'un problème de partage BIRPA). *Une instance d'un problème de partage de biens indivisibles risqués avec préférences additives est un tuple $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathbf{W}, \mathbf{p})$ où :*

- \mathcal{A} est un ensemble fini de n agents ;
- \mathcal{O} est un ensemble fini de m objets ;

1. Sous réserve que les préférences des agents ne soient pas dégénérées et que l'allocation choisie produise de l'utilité : $\exists i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{O}, w_{ij} > 0$ et $j \in \pi_i$.

- \mathbf{W} est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, l'élément w_{ij} représentant le poids associé par l'agent i à l'objet j ;
- \mathbf{p} est un vecteur de m éléments de $]0, 1]$ où p_j représente la probabilité pour l'objet j d'être en bon état ; on impose que les probabilités soient strictement supérieures à zéro, de sorte à ne considérer que des objets ayant une chance de jouer un rôle dans le partage en étant en bon état.

L'utilité d'un agent est définie comme la somme des poids associés aux objets qui lui sont attribués et qui sont en bon état (voir section 4.1 page 69).

$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}, \forall s \in \mathcal{S}, \quad u_i(\boldsymbol{\pi}_i, s) = \sum_{\substack{j \in \pi_i \\ j \in \text{good}(s)}} w_{ij} \quad (4.15)$$

Les utilités collectives *ex-ante* et *ex-post* découlent des équations 3.2 page 54 et 3.3 page 54 et prennent la forme suivante :

$$\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}, \quad \text{acu}(\boldsymbol{\pi}) = \min_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) \cdot \sum_{\substack{j \in \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} \right) \quad (4.16)$$

$$\forall \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}, \quad \text{pcu}(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) \cdot \min_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\substack{j \in \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} \right) \quad (4.17)$$

Les extensions *ex-ante* et *ex-post* du critère de juste part proportionnelle (respectivement du critère de juste part maximin) s'écrivent directement à partir des équations 3.11 et 3.12 page 63 ; seule l'expression de l'utilité correspondant à la juste part proportionnelle (respectivement maximin) qu'attend l'agent i , dans l'état du monde s , $u_{i[s]}^{\text{PFS}}$ (respectivement $u_{i[s]}^{\text{MFS}}$), se simplifie comme suit :

$$\forall i \in \mathcal{A}, \quad u_{i[s]}^{\text{PFS}} = \frac{1}{n} \sum_{j \in \text{good}(s)} w_{ij} \quad (4.18)$$

$$\forall i \in \mathcal{A}, \quad u_{i[s]}^{\text{MFS}} = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}} \min_{i' \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{j \in \text{good}(s) \\ j \in \pi_{i'}}} w_{ij} \quad (4.19)$$

Un cas particulier de notre problème de partage *BIRPA* intervient quand le vecteur des probabilités de bon état vaut $\mathbf{p} = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$. Dans ce cas, le problème est similaire à un problème de partage sans risque, puisque tous les objets sont en bon état de façon certaine ; on retrouve exactement le problème Santa Claus, présenté en introduction de la section 4.1 page 69 comme le modèle que l'on cherchait à étendre au cas risqué. Une instance d'un problème de partage sans risque sera notée $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathbf{W}) = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathbf{W}, \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle)$.

Quand tous les objets sont en bon état de façon certaine, on omet par souci de lisibilité la mention de l'état de la nature (qui n'a aucune influence) comme on le faisait naturellement au

chapitre 2 page 27. L'équation 4.15 page précédente se simplifie et l'utilité d'un agent correspond simplement à la somme des poids qu'il affecte aux objets qui lui sont attribués.

$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall \pi \in \mathcal{F}, \quad u_i(\pi_i) = \sum_{j \in \pi_i} w_{ij} \quad (4.20)$$

4.3 Mesure de l'équité d'un partage dans notre modèle

Nous proposons dans cette section quelques résultats théoriques concernant les méthodes d'évaluation des partages que nous avons privilégiées dans notre modèle, à savoir l'approche égalitariste et les critères numériques de juste part (voir section 4.1.5 page 72).

4.3.1 En univers certain

On se place dans cette section dans le cadre sans risque, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à des instances de problèmes de partage du type Santa Claus, en étudiant plusieurs méthodes d'évaluation des partages : approche égalitariste, juste part proportionnelle et maximin.

La proposition 15 illustre les liens entre le critère de juste part proportionnelle et l'approche égalitariste.

Proposition 15 (Juste part proportionnelle et min-optimalité). *On suppose que les poids des agents sont normalisés :*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{A}, \quad \sum_{j \in \mathcal{O}} w_{ij} = K$$

Alors, s'il existe au moins un partage assurant la juste part proportionnelle, tout partage égalitariste optimal l'assure également.

Démonstration. Soit un partage π^* égalitariste optimal n'assurant pas la juste part proportionnelle. Nous allons montrer qu'aucun partage n'assure alors la juste part proportionnelle.

Le partage π^* est optimal pour la fonction d'agrégation égalitariste, c'est-à-dire que pour tout partage $\pi \in \mathcal{F}$, on a :

$$\min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i) \leq \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i^*)$$

D'autre part, π^* n'assure pas la juste part proportionnelle, donc il existe un agent i_0 tel que :

$$u_{i_0}(\pi_{i_0}^*) < \frac{K}{n}$$

Pour tout partage π , on peut alors trouver un agent i_{min} tel que :

$$u_{i_{min}}(\pi_{i_{min}}) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i) \leq \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i^*) \leq u_{i_0}(\pi_{i_0}^*) < \frac{K}{n}$$

et cet agent i_{min} n'obtient pas sa juste part proportionnelle. On a donc prouvé qu'aucun partage n'assure la juste part proportionnelle dès qu'un partage égalitariste optimal ne l'assure pas, d'où le résultat. \square

Il est toujours moins contraignant d'assurer la juste part maximin d'un agent que sa juste part proportionnelle, comme le formalise la proposition 16. Cela s'explique informellement par le fait que la juste part proportionnelle correspond à la juste part maximin d'un problème où la ressource serait parfaitement divisible ; l'indivisibilité peut alors être vue comme une contrainte qui vient borner la valeur de la juste part maximin.

Proposition 16 (Comparaison des justes parts proportionnelles et maximin). *La juste part maximin d'un agent est toujours inférieure à sa juste part proportionnelle. Formellement :*

$$\forall i \in \mathcal{A}, \quad u_i^{\text{MFS}} \leq u_i^{\text{PFS}} \quad (4.21)$$

Démonstration. Prouvons ce résultat par l'absurde. Supposons qu'il existe un agent dont la juste part proportionnelle est strictement inférieure à sa juste part maximin :

$$\begin{aligned} \exists i_0 \in \mathcal{A}, \quad \frac{1}{n} \sum_{j \in \mathcal{O}} w_{i_0 j} &< \max_{\pi \in \mathcal{F}} \min_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \in \pi_i} w_{i_0 j} \\ \exists i_0 \in \mathcal{A}, \quad \pi \in \mathcal{F}, \quad \frac{1}{n} \sum_{j \in \mathcal{O}} w_{i_0 j} &< \min_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \in \pi_i} w_{i_0 j} \\ \exists i_0 \in \mathcal{A}, \quad \pi \in \mathcal{F}, \quad \forall i \in \mathcal{A}, \quad \frac{1}{n} \sum_{j \in \mathcal{O}} w_{i_0 j} &< \sum_{j \in \pi_i} w_{i_0 j} \end{aligned}$$

En sommant sur les agents :

$$\exists i_0 \in \mathcal{A}, \quad \pi \in \mathcal{F}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \in \mathcal{O}} w_{i_0 j} < \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \in \pi_i} w_{i_0 j}$$

Sachant qu'un partage est une partition de l'ensemble des objets d'une part, et par simplification du membre de gauche d'autre part, on obtient :

$$\exists i_0 \in \mathcal{A}, \quad \sum_{j \in \mathcal{O}} w_{i_0 j} < \sum_{j \in \mathcal{O}} w_{i_0 j}$$

D'où une contradiction, ce qui prouve par l'absurde le résultat recherché. \square

Les propriétés de juste part proportionnelle et maximin vérifient de plus une propriété intéressante : l'échelle choisie par les agents pour représenter leurs préférences n'influe pas sur la vérification ou non de ces propriétés.

Proposition 17 (Invariance des justes parts par dilatation des poids). *Les propriétés de juste part proportionnelle et de juste part maximin sont conservées par toute dilatation proportionnelle $w_{ij} \mapsto k \cdot w_{ij}$, $k \in \mathbb{R}^+$ des poids d'un agent.*

Démonstration. Le tableau suivant prouve le résultat en montrant l'évolution de certaines valeurs après dilatation proportionnelle des poids de l'agent i , pour tout $j \in \mathcal{O}$ et $\pi \in \mathcal{F}$.

w_{ij}	\rightarrow	$k \cdot w_{ij}$
$u_i(\pi_i)$	\rightarrow	$k \cdot u_i(\pi_i)$
$u_i(\mathcal{O})$	\rightarrow	$k \cdot u_i(\mathcal{O})$
u_i^{PFS}	\rightarrow	$k \cdot u_i^{\text{PFS}}$
$\min_{i' \in \mathcal{A}} u_i(\pi_{i'})$	\rightarrow	$k \cdot \min_{i' \in \mathcal{A}} u_i(\pi_{i'})$
u_i^{MFS}	\rightarrow	$k \cdot u_i^{\text{MFS}}$

□

Enfin, la proposition 18 s'intéresse au cas particulier de la juste part maximin quand le problème comporte moins d'objets que d'agents.

Proposition 18.

$$m < n \Rightarrow \forall i \in \mathcal{A}, u_i^{\text{MFS}} = 0$$

Démonstration. Le résultat découle directement du constat que, quelques soient les préférences des agents et le partage considéré, au moins l'un des agents recevra une part vide et par conséquent une utilité nulle. □

Même si l'intérêt d'un tel cas particulier n'est pas immédiat dans le cadre sans risque, où l'on partage généralement un grand nombre d'objets, cette situation se produit fréquemment dans le cadre risqué : dès lors que l'on se place dans un état de la nature où suffisamment d'objets sont en mauvais état, le nombre d'agents devient supérieur au nombre d'objets en bon état.

4.3.2 En univers risqué

On s'intéresse dans cette section aux liens existants entre les différentes notions de juste part proportionnelle en présence de risque, introduites en section 3.2.2 page 62.

Les propositions suivantes (proposition 19 et 20) s'intéressent aux liens entre la valeur *ex-medio* du critère PFS et le test de juste part proportionnelle *ex-ante*. On constate que, si la valeur *ex-medio* du critère PFS atteint 1 pour un partage donné, alors ce partage assure la juste part proportionnelle *ex-ante* ; la réciproque est fautive dans le cas général.

Proposition 19. Soient $\pi \in \mathcal{F}$ un partage admissible. Alors :

$$Pm^{\text{PFS}}(\pi) = 1 \Rightarrow Pa^{\text{PFS}}(\pi) = 1$$

Démonstration. Soit π tel que $Pm^{\text{PFS}}(\pi) = 1$. D'après la définition 50 page 65 :

$$\forall i \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}, u_i^{\text{PFS}}(\pi, s) = 1$$

Ce qui signifie que, quel que soit l'état de la nature, tous les agents obtiennent leur juste part proportionnelle :

$$u_i(\pi, s) \geq \frac{1}{n} \sum_{j \in \text{good}(s)} w_{i,j}$$

D'où finalement :

$$\tilde{u}_i(\pi) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) u_i(\pi, s) \geq \sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{1}{n} \sum_{j \in \text{good}(s)} w_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{j \in \mathcal{O}} \tilde{w}_{i,j}$$

Ce qui prouve le résultat. □

Proposition 20. Soient π et π' deux partages admissibles de \mathcal{F} . Alors, on a :

$$Pa^{\text{PFS}}(\pi) > Pa^{\text{PFS}}(\pi') \not\Rightarrow Pm^{\text{PFS}}(\pi) > Pm^{\text{PFS}}(\pi')$$

Démonstration. Considérons l'instance suivante et les deux partages associés π et π' :

$$\mathbf{W} = \begin{array}{c|cc} & j_1 & j_2 \\ \hline i_1 & 899 & 101 \\ \hline i_2 & 991 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p} = \langle 0.1, 0.9 \rangle \\ \pi = \langle \{j_2\}, \{j_1\} \rangle \\ \pi' = \langle \{j_1\}, \{j_2\} \rangle \end{array}$$

On montre que $Pm^{\text{PFS}}(\pi) = Pm^{\text{PFS}}(\pi') = 0.19$; or π assure la juste part proportionnelle *ex-ante* alors que π' ne l'assure pas. Il s'agit donc d'un contre-exemple qui fournit la preuve recherchée. \square

Pour un partage donné, la valeur *ex-medio* du critère PFS est toujours supérieure à la valeur *ex-post* de ce même critère. La proposition 21 formalise ce résultat.

Proposition 21. *Soit $\pi \in \mathcal{F}$ un partage admissible. Alors, on a :*

$$Pp^{\text{PFS}}(\pi) \leq Pm^{\text{PFS}}(\pi) \leq 1$$

Et par suite :

$$Pp^{\text{PFS}}(\pi) = 1 \Leftrightarrow Pm^{\text{PFS}}(\pi) = 1$$

Démonstration. Ce résultat découle directement de la concavité de la fonction min. \square

De même que noté précédemment dans le cas sans risque, toute allocation *ex-ante*-égalitariste optimale passera le test de juste part *ex-ante* dès lors qu'il existe au moins une allocation qui le passe.

Proposition 22. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathbf{W}, \mathbf{p})$ une instance d'un problème de partage BIRPA, dans laquelle la matrice des poids espérés est normalisée, c'est-à-dire :*

$$\forall (i, i') \in \mathcal{A}^2, \quad \sum_{j \in \mathcal{O}} \tilde{w}_{ij} = \sum_{j \in \mathcal{O}} \tilde{w}_{i'j}$$

Alors, si $\pi^* = \operatorname{argmax}_{\pi \in \mathcal{F}} \min_{i \in \mathcal{A}} \tilde{u}_i(\pi)$ est un partage *ex-ante* égalitariste optimal, on a :

$$\{\pi \in \mathcal{F}, Pa^{\text{PFS}}(\pi) = 1\} \neq \emptyset \Leftrightarrow Pa^{\text{PFS}}(\pi^*) = 1$$

Démonstration. La preuve est une extension directe de la preuve dans le cadre sans risque (voir proposition 15 page 75). \square

Cette même propriété est en revanche fautive dès lors que l'on s'intéresse à l'approche *ex-post*.

Proposition 23. *L'intersection entre l'ensemble des partages *ex-post*-égalitariste optimaux et l'ensemble des partages maximisant Pp peut être vide.*

Démonstration. Considérons l'instance suivante et les deux partages associés π et π' :

$$\mathbf{W} = \begin{array}{c|ccc} & j_1 & j_2 & j_3 \\ \hline i_1 & 6 & 2 & 2 \\ \hline i_2 & 4 & 1 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p} = \langle 0.9, 0.5, 0.4 \rangle \\ \pi = \langle \{j_1, j_2\}, \{j_3\} \rangle \\ \pi' = \langle \{j_1\}, \{j_2, j_3\} \rangle \end{array}$$

On montre que π' est le seul partage égalitariste optimal *ex-post*. De plus, on a :

$$\begin{cases} p_{cu}(\pi) = 1.84 & Pp^{\text{PFS}}(\pi) = 0.41 \\ p_{cu}(\pi') = 2.25 & Pp^{\text{PFS}}(\pi') = 0.39 \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un contre-exemple qui fournit la preuve recherchée. \square

4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le modèle simplifié de problème de partage sur lequel nous avons choisi de faire porter nos travaux. Les hypothèses qui y conduisent portent sur deux aspects principaux : la délimitation de l'aléa et la représentation des préférences.

La portée du risque a été restreinte aux objets du partage, ce qui limite l'aléa à sa contribution algorithmiquement significative. La forme que prend celui-ci, grâce aux hypothèses d'indépendance que nous avons présentées, permet de se focaliser sur un problème simple, même si rapidement extensible. Le choix de la représentation des préférences des agents comme des préférences additives correspond quant à lui au choix le plus naturel dans le cadre de préférences sur un ensemble d'objets.

Notons que la plupart des hypothèses sont des hypothèses simplificatrices dont le relâchement n'entraîne pas de changement majeur dans la structure du problème ni dans l'algorithmique associée à sa résolution. Rentrant dans ce cadre les hypothèses suivantes :

- Le risque porté par les objets : la principale difficulté algorithmique due à l'introduction du risque dans les problèmes de partage réside dans la dimension exponentielle de l'espace des états de la nature. Or cette dimension figure déjà dans un aléa où le risque est porté par les objets.
- L'objectivité de la distribution de probabilité sur les états de la nature : si l'on relâche cette hypothèse, le vecteur de probabilité sera remplacé par une matrice de probabilités, ce qui ne change pas le principe de la réduction *ex-ante* au cas sans risque ; dans le cas de l'approche *ex-post* ce serait de toute façon la distribution de probabilité, unique, de l'entité décisionnelle (et non celles des agents) qui serait utilisée.
- Indépendance probabiliste entre les objets : le relâchement de cette hypothèse peut être effectué en introduisant, par exemple, une modélisation du risque sous la forme d'un réseau bayésien ; ce modèle graphique, introduit par Pearl (1988), permet de représenter des probabilités sur un espace combinatoire en s'appuyant sur les dépendances qu'elles présentent. On constate en pratique qu'une telle représentation du risque n'imposerait pas une modification en profondeur des algorithmes que nous proposons plus loin.

La seconde partie était consacrée à l'étude des différents critères dans le cadre des problèmes de partage *BIRPA*. Nous avons proposé un ensemble de résultats montrant la proximité de ces critères dans le cadre de notre modèle, et nous mettrons à profit certains de ces résultats en vue de produire des algorithmes adaptés à notre problème (voir chapitre 5 page 81).

Chapitre 5

Résolution du problème de partage

Ce chapitre est consacré aux solutions algorithmiques que nous proposons pour résoudre le problème de partage *BIRPA*. Résoudre un problème de partage signifie fournir une solution, c'est-à-dire un partage optimal d'un certain point de vue. Nous avons choisi de nous intéresser d'une part à l'approche égalitariste classique (voir chapitre 2 page 27), et d'autre part aux critères de justes parts proportionnelle et maximin.

Le problème de partage que nous étudions comportant du risque, il nous faut décider, quelle que soit la méthode d'évaluation choisie, si l'on opte pour l'approche *ex-ante* ou l'approche *ex-post* (voir chapitre 3 page 51). Nous nous intéressons dans ce chapitre aux deux approches : nous montrons dans un premier temps que la résolution *ex-ante* peut être simplement ramenée à la résolution d'un problème de partage sans risque équivalent ; la résolution *ex-post*, quant à elle, nécessite une algorithmique spécialisée, que nous détaillons dans un second temps.

5.1 Résolution *ex-ante*

Nous montrons dans cette section que la résolution du problème de partage *BIRPA ex-ante* peut se ramener à la résolution d'un problème de partage sans risque, quelle que soit la méthode d'évaluation choisie. Cela s'explique informellement par le fait que le point de vue *ex-ante* correspond à un point de vue pour lequel la « gestion » du risque est laissée au soin des agents, ce risque pouvant alors être intégré dans l'expression de leurs utilités (voir section 1.3 page 16). Il est donc possible de se ramener à un problème dans lequel le risque est résolu directement par un biais dans les fonctions d'utilité des agents.

Nous proposons tout d'abord une expression simplifiée des utilités espérées des agents.

Proposition 24 (Expression des utilités espérées). *Soit un agent $i \in \mathcal{A}$. Alors, en notant $\tilde{w}_{ij} = p_j w_{ij}$, l'utilité espérée de cet agent s'écrit :*

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \tilde{u}_i(\pi_i) = \sum_{j \in \pi_i} \tilde{w}_{ij} \quad (5.1)$$

Démonstration. Soit un agent $i \in \mathcal{A}$ et un partage $\pi \in \mathcal{F}$ fixés. A partir des équations 4.15 page 74 et 3.1 page 52 l'utilité espérée de cet agent s'écrit :

$$\tilde{u}_i(\pi_i) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \cdot \sum_{\substack{j \in \pi_i \\ j \in \text{good}(s)}} w_{ij}$$

Cette utilité peut alors également s'exprimer sous la forme suivante :

$$\tilde{u}_i(\pi_i) = \sum_{j \in \mathcal{O}} \lambda_j w_{ij}$$

avec :

$$\forall j \in \mathcal{O}, \begin{cases} \lambda_j = \sum_{j \in \text{good}(s)} \Pr(s) = p_j & \text{si } j \in \pi_i \\ \lambda_j = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où le résultat. \square

Pour un agent $i \in \mathcal{A}$ et un objet $j \in \mathcal{O}$ fixés, la quantité $\tilde{w}_{ij} = p_j \cdot w_{ij}$, est appelée *poids espéré associé par l'agent i à l'objet j* . L'expression des utilités espérées de l'équation 5.1 page précédente est similaire à celle des utilités d'une instance sans risque où les poids des objets sont les poids espérés de l'instance initiale. Forts de ce constat, on définit *l'instance sans risque ex-ante-équivalente* à une instance d'un problème de partage en présence de risque.

Définition 53 (Instance sans risque *ex-ante-équivalente*). *Soit $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathbf{W}, \mathbf{p})$ une instance d'un problème de partage BIRPA. On appelle instance sans risque ex-ante-équivalente à \mathcal{I} l'instance sans risque $\tilde{\mathcal{I}} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, \tilde{\mathbf{W}})$, où $\tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{w}_{ij})_{i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{O}}$ est la matrice des poids espérés.*

Considérons un critère numérique $Q = (\langle \varphi_i \rangle, \oplus)$ défini dans le cadre sans risque ; son extension *ex-ante* s'écrit comme suit (voir section 3.2.2 page 62) :

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, Qa(\pi) = \bigoplus_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(\tilde{u}_i(\pi)) \quad (5.2)$$

En utilisant l'expression des utilités espérées introduite dans la proposition 24 page précédente, on déduit la proposition 25.

Proposition 25 (Calcul *ex-ante*). *Soit un critère numérique Q défini dans le cadre sans risque, et Qa son extension ex-ante. Soit $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathbf{W}, \mathbf{p})$ une instance d'un problème de partage BIRPA.*

Alors, pour un partage $\pi \in \mathcal{F}$ fixé, la valeur $Qa(\pi)$ du critère Qa vis-à-vis du partage π calculée pour l'instance \mathcal{I} est égale à la valeur $Q(\pi)$ du critère Q vis-à-vis de ce même partage, calculée pour l'instance $\tilde{\mathcal{I}}$ sans risque ex-ante-équivalente.

Démonstration. Cette proposition est une conséquence directe de la proposition 24 page précédente. \square

Quelle que soit la méthode d'évaluation choisie pour les partages, le calcul *ex-ante* peut toujours se ramener à un calcul de la même méthode d'évaluation dans un problème sans risque. C'est en particulier le cas pour toutes les fonctions d'utilité collective, qui sont des critères numériques particuliers.

On remarque de plus que le calcul des poids espérés s'effectue en temps linéaire sur les dimensions du problème, et que la réduction à un problème sans risque est donc polynomiale.

5.2 Calcul exact des utilités collectives et critères numériques *ex-post* pour un partage donné

L'ensemble des allocations admissibles d'un problème de partage est de taille exponentielle ; une telle combinatoire dans l'espace des décisions est classique dans le cadre de la décision collective. Cependant, dans le problème de partage *BIRPA*, vient s'ajouter une seconde difficulté : le simple *calcul* de la quantité à optimiser, c'est-à-dire d'une utilité collective *ex-post* ou de l'extension *ex-post* d'un critère numérique *pour un partage donné* semble nécessiter la considération d'un nombre d'états de la nature exponentiel en le nombre d'objets du problème ! Nous nous intéressons dans cette section à l'algorithmique associée à ces calculs.

5.2.1 Égalitarisme *ex-post*

Quelle que soit l'approche algorithmique adoptée pour la résolution du problème d'optimisation de l'utilité collective *ex-post* pour une instance donnée, il est indispensable de pouvoir calculer l'utilité collective *ex-post* d'un partage donné. L'application directe de la formule (4.17 page 74) conduit à un algorithme énumérant l'ensemble des états de la nature, exponentiel en le nombre d'objets.

Cependant, pour certains états de la nature, la connaissance de l'état d'un sous-ensemble d'objets suffit à calculer entièrement l'utilité collective dans cet état de la nature. En effet, dès que tous les objets attribués à un agent sont dans l'état dégradé, l'utilité de cet agent est nulle, et donc l'utilité collective l'est également, indépendamment de l'état des autres objets. Il convient donc de construire les états de la nature en déterminant l'état des objets les uns après les autres, en vérifiant à chaque étape si un agent se trouve dans la situation précédente.

Enfin, il est judicieux de spécifier l'ordre dans lequel les états des objets sont déterminés, de façon à traiter en premier les objets appartenant à des parts de cardinal faible (i.e. à des agents recevant peu d'objets) : on aboutit ainsi rapidement à des états de la nature dont l'énumération est superflue car au moins un agent a une utilité nulle.

La figure 5.1 page suivante illustre cette méthode de calcul, dans le cas d'un problème à 2 agents et 3 objets. L'allocation dont on cherche à calculer l'utilité collective *ex-post* alloue deux objets au premier agent, et seulement un au second. On commence la construction de l'arbre des états de la nature avec les objets appartenant à la part de plus faible cardinal : on choisit donc ici j_3 , qui est l'unique objet alloué à l'agent i_2 . Ainsi, dans le cas où cet objet est en mauvais état, il n'est pas nécessaire d'énumérer les états des autres objets (alloués quant à eux à l'agent i_1) puisque l'utilité de i_2 dès lors que j_3 est en mauvais état est nulle, et donc également l'utilité collective dans les états de la nature associés.

Les remarques précédentes conduisent à l'algorithme 1 page suivante. On utilise dans cet algorithme la fonction `tri` définie de la manière suivante : `tri(u, f)` renvoie un vecteur \mathbf{u}^\uparrow constitué des composantes de \mathbf{u} permutées, et tel que $i < j \Rightarrow f(u_i^\uparrow) \leq f(u_j^\uparrow)$.

5.2.2 Probabilité de juste part proportionnelle ou maximin

Le même problème se pose que pour le calcul de l'utilité collective égalitariste *ex-post* : calculer la probabilité de juste part (proportionnelle ou maximin) impose le parcours de l'ensemble des états de la nature, pour vérifier dans chacun si la juste part est ou non assurée.

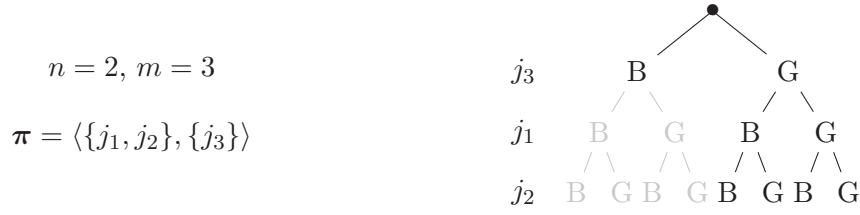


FIGURE 5.1 – Visualisation de l’arbre des états de la nature apparaissant dans le calcul de l’utilité collective égalitariste *ex-post* (B : mauvais état (*bad*), G : bon état (*good*)).

Algorithme 1 : Calcul de l’utilité collective *ex-post*

Données : Une instance d’un problème de partage *BIRPA* (sous la forme d’une matrice de poids \mathbf{W} et d’un vecteur de probabilités \mathbf{p}) et une allocation complète π

Résultat : L’utilité collective *ex-post* $pcu(\pi)$

$\pi^\uparrow \leftarrow \text{tri}(\langle \pi_1, \dots, \pi_n \rangle, \mathcal{X} \mapsto |\mathcal{X}|)$;

$\mathbf{W}^\uparrow \leftarrow$ la matrice \mathbf{W} , où les lignes sont triées selon le même ordre qu’à la ligne précédente ;

renvoyer $\text{branche}(\langle 0, \dots, 0 \rangle, 1, \pi^\uparrow, \mathbf{W}^\uparrow, \mathbf{p})$;

Fonction $\text{branche}(\mathbf{u}, pr, \pi^\uparrow, i, \mathbf{W}^\uparrow, \mathbf{p})$

Données : Un vecteur d’utilité \mathbf{u} , un nombre $pr \in [0; 1]$, un vecteur de parts π^\uparrow , un agent i , une matrice de poids \mathbf{W}^\uparrow , un vecteur de probabilités \mathbf{p}

Résultat : L’utilité collective *ex-post*

si $\pi_i^\uparrow = \emptyset$ alors

 si $i = n$ alors

 renvoyer $\min(\mathbf{u}) \times pr$;

 sinon

 si $u_i = 0$ alors renvoyer 0 ;

 renvoyer $\text{branche}(\mathbf{u}, pr, \pi^\uparrow, i + 1)$;

sinon

$j \leftarrow$ un objet arbitrairement choisi dans π_i^\uparrow ;

$\pi'^\uparrow \leftarrow \langle \dots, \pi_{i-1}^\uparrow, \pi_i^\uparrow \setminus \{j\}, \pi_{i+1}^\uparrow, \dots \rangle$;

$\mathbf{u}' \leftarrow \langle \dots, u_{i-1}, u_i + w_{ij}^\uparrow, u_{i+1}, \dots \rangle$;

 renvoyer $\text{branche}(\mathbf{u}, pr \cdot \bar{p}_j, \pi'^\uparrow, i, \mathbf{W}^\uparrow, \mathbf{p}) + \text{branche}(\mathbf{u}', pr \cdot p_j, \pi'^\uparrow, i, \mathbf{W}^\uparrow, \mathbf{p})$;

La juste part proportionnelle est vérifiée dans un état de la nature pour l’agent i si $u_i(\boldsymbol{\pi}, s) \geq u_{i[s]}^{\text{PFS}} = \sum_{j \in \text{good}(s)} w_{ij}/n$. Une telle vérification est algorithmiquement aisée et la seule difficulté dans le calcul de la juste part proportionnelle est donc la structure combinatoire de l’ensemble des états de la nature, comme mentionné précédemment.

En revanche, la juste part maximin fait intervenir dans sa définition un problème d’optimisation maximin : pour chaque état de la nature s et chaque agent i , le problème présenté dans

l'équation 5.3 doit être résolu.

$$\max_{\pi \in \mathcal{F}} \min_{i \in \mathcal{A}} u_{i_0}(\pi_i, s), \quad i \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S} \quad (5.3)$$

Vérifier si un partage assure la juste part maximin impose donc la résolution de $n \cdot 2^m$ problèmes d'optimisation ! En vue d'une résolution la plus rapide possible, nous modélisons ce problème sous forme d'un problème de programmation linéaire en nombre entiers (PLNE) comme exposé dans l'équation 5.4 . Il fait intervenir $n \times m$ variables de décision binaires D_{ij} , chacune valant 1 si l'objet j est attribué à l'agent i , 0 sinon.

$$\text{Maximiser } U_0, \quad \text{sous les contraintes : } \begin{cases} \forall i \in \mathcal{A}, & U_0 \leq \sum_{j \in \text{good}(s)} w_{ij} D_{ij} \\ \forall j \in \mathcal{O}, & \sum_{i \in \mathcal{A}} D_{ij} \leq 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

Le calcul de la probabilité de juste part maximin peut être légèrement optimisé en tenant compte de la propriété 18 page 77 : dès qu'un état de la nature compte moins d'objets en bon état que d'agents, les seuils d'utilités u_i^{MFS} sont nuls pour tous les agents, et la résolution du problème n'est pas nécessaire.

5.3 Approximations des utilités collectives et critères numériques

Nous avons montré dans la section 5.2 page 83 que les calculs exacts de l'utilité collective égalitariste *ex-post* et des probabilités de juste part proportionnelles et maximin étaient en pratique complexe, à cause de la combinatoire inhérente à l'hypothèse du risque porté par les objets. Nous proposons donc dans la présente section diverses méthodes d'approximation de ces grandeurs.

Nous présentons dans un premier temps deux méthodes d'approximations génériques en présence de risque : la méthode de calcul dite par omission, et la méthode de Monte-Carlo. Nous proposons ensuite deux nouvelles grandeurs spécifiques : l'*utilité collective mixte*, qui réalise une approximation de l'utilité collective égalitariste *ex-post*, et la *juste part maximin-proportionnelle*, qui constitue une approximation de la juste part maximin.

5.3.1 Méthode d'approximation par omission

Cette méthode simple d'approximation consiste, dans le calcul de l'espérance mathématique d'une grandeur définie en fonction d'une variable aléatoire, à ignorer les états de la nature de très faible probabilité. Une probabilité seuil Pr_0 est fixée et, la valeur *ex-post* approchée d'un critère quelconque Q est définie par l'équation 5.5.

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \quad Q_{p_{\text{omi}}}(\pi) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ \text{Pr}(s) > \text{Pr}_0}} \text{Pr}(s) \cdot Q_{[s]}(\pi) \quad (5.5)$$

D'un point de vue algorithmique, cette méthode s'implémente par une légère modification de la fonction `branche` de l'algorithme 1 page 84 : dès qu'est atteint un nœud de l'arbre des états de la nature avec une probabilité inférieure à la probabilité seuil, on arrête d'explorer les nœud descendants, car ils ne peuvent conduire qu'à des feuilles (c'est-à-dire des états de la nature) de probabilité encore plus faible.

Le principal avantage de cette méthode réside dans sa facilité de mise en œuvre. Toutefois, la qualité de l'approximation au vu du gain en terme de nombre d'états de la nature à parcourir (c'est-à-dire en temps de calcul) est faible. D'autre part, connaître, pour une probabilité seuil donnée, le nombre d'états de la nature qui ne seront pas parcourus (nombre qui dépend du problème considéré) nécessite une énumération complète de l'ensemble des états du nature, ce qui est quelque peu contradictoire ; autrement dit, il est impossible, sans perdre tout l'intérêt algorithmique de la méthode, d'estimer précisément le gain en temps ainsi que la qualité de l'approximation à partir de la seule donnée de la probabilité seuil.

5.3.2 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo permet d'approximer une grandeur construite sur une variable aléatoire. Elle consiste à simuler un grand nombre de réalisations du risque, puis à moyennner les résultats obtenus, comme l'illustre l'algorithme 3.

Algorithme 3 : Méthode de Monte-Carlo

Données : Une instance d'un problème de partage *BIRPA*, un critère numérique Q , un partage $\pi \in \mathcal{F}$, un nombre de tirages $q \in \mathbb{N}$

Résultat : La valeur *ex-post* approchée du critère numérique pour le partage π

$k \leftarrow 1$;

$somme \leftarrow 0$;

tant que $k \leq q$ **faire**

$k \leftarrow k + 1$;
 $s_0 \leftarrow$ tirage aléatoire d'un état de la nature selon la distribution de probabilité Pr ;
 $somme \leftarrow somme + Q_{[s_0]}(\pi)$;

$somme \leftarrow \frac{somme}{q}$;

renvoyer $somme$;

Nous nous intéressons dans la suite à la modélisation statistique de la méthode de Monte-Carlo ; nous cherchons à estimer la précision des résultats obtenus, en vue de valider la méthode.

Soit Q un critère numérique quelconque. La valeur *ex-post* Qp de ce critère prend la forme suivante (voir équation 3.12 page 63) :

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, Qp(\pi) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Pr}(s) \cdot Q_{[s]}(\pi) \quad (5.6)$$

On fixe un partage π donné, que l'on fait disparaître des notations par souci de simplicité.

Soit X la variable aléatoire prenant ses valeurs sur \mathcal{S} définie comme suit :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \text{Pr}(X = s) = \text{Pr}(s)$$

X correspond à un sondage aléatoire dans l'arbre des états, parfaitement similaire à celui opéré par la nature.

On définit la variable aléatoire $\hat{Q}p$ en fonction de X de la façon suivante :

$$\hat{Q}p(X) = Q_{[X]} \quad (5.7)$$

L'espérance de la variable aléatoire $\hat{Q}p$ est donc $E\hat{Q}p = \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s)Q_{[s]} = Qp$ et $\hat{Q}p$ est un estimateur sans biais de Qp . La méthode de Monte-Carlo fournit q sondages dans l'espace des états de la nature, autrement dit on dispose d'un échantillon de valeurs $\hat{Q}p_1, \hat{Q}p_2, \dots, \hat{Q}p_q$. On peut alors construire la variable aléatoire $\hat{Q}p'$ comme suit :

$$\hat{Q}p' = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \hat{Q}p_k \quad (5.8)$$

Le simple calcul de l'espérance de cette nouvelle variable montre qu'il s'agit également d'un estimateur sans biais de Qp ; toutefois, il est de meilleure qualité que l'estimateur précédent, puisque sa variance est plus faible.

$$V\hat{Q}p' = \frac{1}{q} V\hat{Q}p \quad (5.9)$$

L'équation 5.9 formalise naturellement l'intuition selon laquelle la méthode de Monte Carlo fournira une estimation d'autant plus précise que le nombre q de tirages est élevé.

Intéressons-nous maintenant à définir cette précision : dans quelle mesure l'estimation obtenue par la méthode de Monte-Carlo est « éloignée » de la valeur exacte que l'on cherche à estimer ?

L'approche suivante est classique en statistiques. Pour toute variable aléatoire, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir, à partir de son espérance et son écart type, un intervalle de confiance, c'est-à-dire un intervalle centré sur la valeur approchée obtenue dans lequel la valeur exacte se trouve avec une probabilité α préalablement fixée.

L'intervalle de confiance ainsi fixé étant indépendant de la loi de la variable aléatoire, il est généralement assez grossier. Le théorème central limite montre que, pour un grand nombre q de tirages, la loi de répartition de $\hat{Q}p'$ tend vers une loi normale. En faisant l'hypothèse que le nombre de tirages est assez grand, on peut donc approximer la loi de répartition de $\hat{Q}p'$ par une loi normale, et dans ce cas, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev propose un intervalle de confiance plus fin.

$$\Pr \left(|\hat{Q}p' - Qp| \geq F(\alpha) \sqrt{\frac{V\hat{Q}p}{q}} \right) \leq \alpha \quad (5.10)$$

Dans cette équation, α représente le risque que la valeur exacte se trouve en dehors de l'intervalle spécifié. F est la fonction de répartition d'une loi normale d'espérance $E\hat{Q}p$ et d'écart type $\sigma\hat{Q}p$; sa valeur pour α donné est lue dans les tables de la loi normale; quelques valeurs sont résumées dans le tableau 5.1 page suivante.

Le calcul de l'intervalle de confiance requiert la connaissance de la variance de l'estimateur. Cette variance est parfaitement calculable, mais nécessite le parcours de l'ensemble des états de la nature, écueil que l'utilisation d'une méthode approchée a justement pour but d'éviter. Nous

α	$F(\alpha)$
10%	1.11
5%	1.96
1%	2.58

TABLE 5.1 – Quelques valeurs de $F(\alpha)$

tirons donc profit de l'estimateur classique de la variance (équation 5.11) d'un échantillon pour obtenir, directement à partir des tirages réalisés par la méthode de Monte Carlo, une valeur approchée de $V \hat{Q}p$.

$$\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^q (\hat{Q}p_k - \hat{Q}p')^2 \quad (5.11)$$

Les raisonnements ci-dessus sont fondés sur les deux hypothèses suivantes, que l'on validera expérimentalement :

- la loi de distribution de $\hat{Q}p'$ est une loi normale d'espérance Qp et d'écart type $\sqrt{\frac{V \hat{Q}p}{q}}$;
- la variance $V \hat{Q}p$ peut être estimée par la variance corrigée de l'échantillon, c'est-à-dire σ^2 .

5.3.3 Utilité collective mixte

Nous introduisons ici une nouvelle définition d'utilité collective que nous appelons *utilité collective mixte*, et qui se situe entre les utilités collectives *ex-post* et *ex-ante*. L'intérêt de ce critère réside dans sa capacité à fournir une bonne approximation de l'utilité collective *ex-post* tout en réduisant la complexité du calcul pour un partage donné. La première partie de cette section est générale et les résultats proposés sont valables quelle que soit la fonction d'utilité collective \oplus utilisée.

L'utilité collective mixte est construite à partir de l'idée suivante : on calcule l'utilité collective en considérant d'un point de vue *ex-ante* la contribution de certains objets et d'un point de vue *ex-post* celle des autres. Le calcul de l'utilité collective mixte est donc paramétré par une partition de l'ensemble des objets en deux sous-ensembles \mathcal{O}_{ea} et \mathcal{O}_{ep} , respectivement l'ensemble des objets considérés *ex-ante* et l'ensemble de ceux considérés *ex-post*.

La construction de l'utilité collective mixte passe par la définition de *l'instance mixte équivalente*. Informellement, le passage d'une instance à son instance mixte équivalente modifie les caractéristiques de certains objets en les remplaçant chacun par le même objet en bon état de façon certaine, leurs poids devenant les poids espérés de l'instance initiale.

Définition 54 (Instance mixte équivalente). *Soit une instance $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathbf{p}, \mathbf{W})$ d'un problème de partage BIRPA (voir définition 52 page 73), et un sous-ensemble d'objets $\mathcal{O}_{ea} \subset \mathcal{O}$. On appelle instance mixte équivalente l'instance notée $\mathcal{I}(\mathcal{O}_{ea}) = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathbf{p}', \mathbf{W}')$, où :*

$$\begin{cases} \forall j \in \mathcal{O}_{ea}, & p'_j = 1 & \text{et} & \forall i \in \mathcal{A}, w'_{ij} = w_{ij} p_j \\ \forall j \notin \mathcal{O}_{ea}, & p'_j = p_j & \text{et} & \forall i \in \mathcal{A}, w'_{ij} = w_{ij} \end{cases}$$

On est maintenant en mesure de définir les utilités individuelles et collective mixtes, paramétrées par l'ensemble \mathcal{O}_{ea} .

Définition 55 (Utilités individuelles et collective mixtes). Soit $\mathcal{O}_{ea} \in \wp(\mathcal{O})$. Les utilités individuelles mixtes $mu_i : \mathcal{F} \times \mathcal{S} \times \wp(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \mathcal{A}$) et l'utilité collective mixte $mcu : \mathcal{F} \times \wp(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$ d'une instance \mathcal{I} d'un problème de partage BIRPA (voir définition 52 page 73) sont définies comme les utilités individuelles et collective de l'instance mixte équivalente associée $\mathcal{I}(\mathcal{O}_{ea})$.

On propose une expression analytique de ces utilités.

Proposition 26. *Suivant la définition 55, les utilités individuelles et l'utilité collective mixte s'expriment comme suit :*

$$mu_i(\boldsymbol{\pi}, s, \mathcal{O}_{ea}) = \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ep} \cap \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \\ j \in \pi_i}} \tilde{w}_{ij} \quad (5.12)$$

$$mcu(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \cdot \left(\bigoplus_{i \in \mathcal{A}} mu_i(\boldsymbol{\pi}, s, \mathcal{O}_{ea}) \right) \quad (5.13)$$

Démonstration. Le résultat est une conséquence directe de l'application de la définition du problème mixte équivalent (définition 54 page ci-contre) à l'expression des utilités individuelles (voir section 4.2 page 73). \square

Il est intéressant de comparer l'expression des utilités individuelles mixtes avec d'une part celle des utilités individuelles (équation 4.15 page 74) et d'autre part celle des utilités espérées individuelles (équation 5.1 page 81) : les utilités individuelles mixtes constituent un « mélange » de ces deux autres valeurs.

On note l'existence de deux cas particuliers.

Proposition 27. *Les utilités collectives ex-ante et ex-post sont des utilités collectives mixtes particulières :*

$$\begin{cases} acu(\boldsymbol{\pi}) &= mcu(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}) \\ pcu(\boldsymbol{\pi}) &= mcu(\boldsymbol{\pi}, \emptyset) \end{cases} \quad (5.14)$$

D'autre part, on remarque que la connaissance de l'état des objets de \mathcal{O}_{ea} n'intervient pas dans le calcul l'utilité collective mixte ; par conséquent, on peut se restreindre à ne considérer les états des seuls objets de \mathcal{O}_{ep} dans le calcul, comme le montre la proposition 28¹.

Proposition 28. *Pour chaque état de la nature s tel que $\text{good}(s) \subseteq \mathcal{O}_{ep}$, on note $\Pr(s, \mathcal{O}_{ep})$ la grandeur :*

$$\Pr(s, \mathcal{O}_{ep}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j \in \text{good}(s)} p_j \prod_{j \in \mathcal{O}_{ep} \setminus \text{good}(s)} \bar{p}_j \quad \text{avec} \quad \bar{p}_j = 1 - p_j$$

Alors :

$$mcu(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea}) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ \text{good}(s) \subseteq \mathcal{O}_{ep}}} \Pr(s, \mathcal{O}_{ep}) \cdot \left(\bigoplus_{i \in \mathcal{A}} mu_i(\boldsymbol{\pi}, s, \mathcal{O}_{ea}) \right) \quad (5.15)$$

1. La démonstration de cette proposition étant purement calculatoire et sans intérêt, nous ne l'avons pas faite figurer ici.

L'ensemble $\{s \in \mathcal{S} \mid \text{good}(s) \subseteq \mathcal{O}_{ep}\}$ a pour cardinal $2^{\#\mathcal{O}_{ep}}$. La proposition 28 page précédente montre donc que le nombre d'états de la nature sur lesquels porte la somme dans l'expression de l'utilité collective mixte est divisé par deux pour chaque objet dans \mathcal{O}_{ea} , par rapport au calcul de l'utilité collective *ex-post*. C'est là l'un des principaux intérêts algorithmiques de l'utilité collective mixte.

Nous avons évoqué précédemment la possibilité d'approximer l'utilité collective *ex-post* à partir de l'utilité collective mixte. Nous expliquons maintenant pourquoi et dans quelle mesure cela est possible; nous retournons dorénavant au cas égalitariste $\oplus = \min$.

Commençons par montrer que l'utilité collective mixte est toujours encadrée par les utilités collectives *ex-post* et *ex-ante*.

Proposition 29. *Pour tout partage $\pi \in \mathcal{F}$ et pour tout sous-ensemble d'objets $\mathcal{O}_{ea} \subseteq \mathcal{O}$, on a*

$$pcu(\pi) \leq mcu(\pi, \mathcal{O}_{ea}) \leq acu(\pi) \quad (5.16)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{O}_{ea} \subset \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_{ep} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_{ea}$.

(1) Montrons que $mcu(\pi, \mathcal{O}_{ea}) \leq acu(\pi)$.

D'après l'équation 5.13 page précédente :

$$mcu(\pi, \mathcal{O}_{ea}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \min_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\substack{j \in \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \\ j \in \pi_i}} \tilde{w}_{ij} \right)$$

En intervertissant la somme sur \mathcal{S} et le minimum sur \mathcal{A} , on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} mcu(\pi, \mathcal{O}_{ea}) &\leq \min_{i \in \mathcal{A}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \left(\sum_{\substack{j \in \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \\ j \in \pi_i}} \tilde{w}_{ij} \right) \\ &\leq \min_{i \in \mathcal{A}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \left(\sum_{\substack{j \in \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \\ j \in \pi_i}} \tilde{w}_{ij} \right) \\ &\leq \min_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \sum_{\substack{j \in \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \\ j \in \pi_i}} \tilde{w}_{ij} \right) \\ &\leq \min_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ep} \\ j \in \pi_i}} p_j w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \\ j \in \pi_i}} \tilde{w}_{ij} \right) \\ &\leq \min_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \in \pi_i} \tilde{w}_{ij} \\ &\leq acu(\pi) \end{aligned}$$

(2) Montrons que $mcu(\pi, \mathcal{O}_{ea}) \geq pcu(\pi)$.

L'utilité mixte individuelle s'écrit, pour $i \in \mathcal{A}$, et $s \in \mathcal{O}_{ep}$,

$$\begin{aligned} mu_i(\pi, s, \mathcal{O}_{ea}) &= \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ep} \cap \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \\ j \in \pi_i}} p_j w_{ij} \\ &= \sum_{r \in \mathcal{S}} \Pr(r) \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ep} \cap \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \cap \text{good}(r) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} \right) \end{aligned}$$

L'utilité collective mixte s'écrit alors :

$$\begin{aligned} m\text{cu}(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea}) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \min_{i \in \mathcal{A}} m u_i(\boldsymbol{\pi}, s, \mathcal{O}_{ea}) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \min_{i \in \mathcal{A}} \sum_{r \in \mathcal{S}} \Pr(r) \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ep} \cap \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \cap \text{good}(r) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} \right) \end{aligned}$$

On intervertit le minimum sur \mathcal{A} et la somme sur \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} m\text{cu}(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea}) &\geq \sum_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ r \in \mathcal{S}}} \Pr(s) \Pr(r) \min_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ep} \cap \text{good}(s) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O}_{ea} \cap \text{good}(r) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} \right) \\ &\geq \sum_{t \in \mathcal{S}} \Pr(t) \min_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{\substack{j \in \text{good}(t) \\ j \in \pi_i}} w_{ij} \right) \\ &\geq p\text{cu}(\boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

□

On montre d'autre part que la distance entre l'utilité collective mixte et *ex-post* peut être majorée assez facilement.

Proposition 30. *Pour tout partage $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}$ et pour tout sous-ensemble d'objets $\mathcal{O}_{ea} \subseteq \mathcal{O}$, on a l'inégalité suivante :*

$$m\text{cu}(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea}) - p\text{cu}(\boldsymbol{\pi}) \leq \sum_{j \in \mathcal{O}_{ea}} \bar{p}_j p_j w_{a(j)j} \quad (5.17)$$

où $\bar{p}_j \stackrel{\text{def}}{=} 1 - p_j$, et $a(j)$ est l'agent qui reçoit j .

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}$ un partage admissible. Nous allons montrer l'inégalité par récurrence sur l'ensemble d'objets \mathcal{O}_{ea} .

– Considérons le cas où $\mathcal{O}_{ea} = \emptyset$. La proposition 27 page 89 donne immédiatement le résultat.

– Supposons maintenant que le résultat est vrai pour un ensemble \mathcal{O}_{ea} fixé, tel que $1 \leq |\mathcal{O}_{ea}| < m$, et soit $j_0 \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_{ea}$.

L'utilité collective mixte d'un problème \mathcal{I} est par définition égale à l'utilité collective *ex-post* du problème mixte équivalent $\mathcal{I}(\mathcal{O}_{ea})$. Si l'on note avec un "prime" les valeurs associées à ce nouveau problème $\mathcal{I}(\mathcal{O}_{ea})$, il suit que $m\text{cu}(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea}) = p\text{cu}'(\boldsymbol{\pi}) = m\text{cu}'(\boldsymbol{\pi}, \emptyset)$, et que $m\text{cu}(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea} \cup \{j_0\}) = m\text{cu}'(\boldsymbol{\pi}, \{j_0\})$ (puisque par définition, les valeurs sont toutes deux égales à l'utilité collective *ex-post* d'un troisième problème $\mathcal{I}(\mathcal{O}_{ea} \cup \{j_0\})$).

Soit i_0 l'agent à qui l'allocation $\boldsymbol{\pi}$ attribue j_0 , et $s \in \mathcal{S}$ un état de la nature. L'expression des utilités individuelles mixtes de la proposition 55 page 89 on peut montrer que $m u'_i(\boldsymbol{\pi}, s, \{j_0\}) = u'_i(\boldsymbol{\pi}, s)$ if $i \neq i_0$, et :

$$m u'_{i_0}(\boldsymbol{\pi}, s, \{j_0\}) = \begin{cases} u'_{i_0}(\boldsymbol{\pi}, s) - \bar{p}_{j_0} w_{i_0 j_0} & \text{si } j_0 \in \text{good}(s) \\ u'_{i_0}(\boldsymbol{\pi}, s) + p_{j_0} w_{i_0 j_0} & \text{si } j_0 \notin \text{good}(s) \end{cases}$$

En minimisant de chaque côté, il vient :

$$\min_{i \in \mathcal{A}} mu'_i(\boldsymbol{\pi}, s, \{j_0\}) - \min_{i \in \mathcal{A}} u'_i(\boldsymbol{\pi}, s) \leq \begin{cases} 0 & \text{si } j_0 \in \text{good}(s) \\ p_{j_0} w_{i_0 j_0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et enfin, en prenant l'espérance mathématique de l'inégalité précédente :

$$m\bar{c}u'(\boldsymbol{\pi}, \{j_0\}) - p\bar{c}u'(\boldsymbol{\pi}) \leq \bar{p}_{j_0} p_{j_0} w_{i_0 j_0}.$$

Les inégalités précédentes donnent :

$$m\bar{c}u(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea} \cup \{j_0\}) - m\bar{c}u(\boldsymbol{\pi}, \mathcal{O}_{ea}) \leq \bar{p}_{j_0} p_{j_0} w_{i_0 j_0},$$

qui, avec l'hypothèse de récurrence, montre que l'inégalité est vraie pour $\mathcal{O}_{ea} \cup \{j_0\}$, ce qui prouve la proposition 30 page précédente par récurrence. □

Si l'on voit l'utilité collective mixte en tant qu'approximation de l'utilité collective *ex-post*, l'inégalité 5.17 page précédente majore « l'erreur » d'approximation, c'est-à-dire l'erreur commise en considérant certains objets *ex-ante*; intuitivement, plus l'incertitude sur l'état des objets de \mathcal{O}_{ea} est grande (plus les p_j sont proches de 1/2) et plus leur poids est grand, plus l'erreur sera importante.

5.3.4 Juste part maximin-proportionnelle

La juste part maximin est un critère parfaitement adapté aux partages de biens indivisibles, puisque l'indivisibilité des biens est intrinsèquement prise en compte par le critère (voir section 2.2 page 37). Cependant le calcul de la juste part maximin inclut la résolution de nombreux sous-problèmes de partage, ce qui est algorithmiquement coûteux.

On remarque intuitivement que, plus le nombre d'objets à partager est grand devant le nombre d'agents, plus le problème de partage se rapproche d'un problème de partage de biens divisibles, et plus la juste part maximin et la juste part proportionnelle sont proches². En s'appuyant sur ce constat, on propose un nouveau critère, fondé sur la juste part maximin ou la juste part proportionnelle selon la quantité d'objets à partager par rapport au nombre d'agents. Ce nouveau critère, qu'on appellera juste part maximin-proportionnelle, est introduit formellement dans le cadre sans risque par la définition 56.

Définition 56 (Juste part maximin-proportionnelle). *Soit $K \in \mathbb{R}^+$. On dit d'un partage $\boldsymbol{\pi}$ qu'il satisfait le test de juste part K -maximin-proportionnelle si et seulement si, pour tout agent i de \mathcal{A} :*

$$u_i(\boldsymbol{\pi}) \geq u_i^{KFS}, \quad \text{avec } u_i^{KFS} = \begin{cases} u_i^{PFS} & \text{si } \frac{m}{n} \geq K \\ u_i^{MFS} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.18)$$

On dira de façon équivalente d'un partage qu'il satisfait le test de juste part K -maximin-proportionnelle qu'il assure la juste part K -maximin-proportionnelle.

2. Dans le cas d'une ressource parfaitement divisible, le partage maximin optimal où tous les agents possèdent les mêmes préférences attribue exactement un $n^{\text{ième}}$ de la ressource à chacun. La juste part maximin coïncide donc dans ce cas parfaitement avec la juste part proportionnelle.

Le critère binaire associé s'écrit $P^{KFS} = (\langle \phi_i^{KFS} \rangle, \min)$, avec :

$$\phi_i^{KFS}(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i(\boldsymbol{\pi}) \geq u_i^{KFS}(K) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Ce critère ne présente pas un grand intérêt dans le cadre sans risque : en effet il ne constitue qu'une alternative entre deux autres critères, la juste part maximin et la juste part proportionnelle, selon la taille de l'instance considérée. Dans le cas du risque, l'extension *ex-ante* est également peu intéressante, puisqu'il s'agit de même d'une alternative entre la juste part maximin *ex-ante* et la juste part proportionnelle *ex-ante*. En revanche, c'est avec l'approche *ex-post* que ce critère prend tout son intérêt, puisque le nombre d'objets disponibles change d'un état de la nature à l'autre. La probabilité de juste part K -maximin-proportionnelle d'un partage $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}$ s'écrit :

$$Pp^{KFS} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \Pr(s) \min_{i \in \mathcal{A}} \phi_i^{KFS}(u_i(\cdot, s))(\boldsymbol{\pi}) \quad (5.20)$$

Dans cette équation, ϕ_i est défini (pour tout agent $i \in \mathcal{A}$) par l'équation 5.19, qui fait apparaître la grandeur u_i^{KFS} . En présence de risque, cette grandeur devient dépendante de l'état de la nature, de sorte à prendre en compte le nombre variable d'objets disponibles dans chaque état ; il s'agit d'une simple extension du cas sans risque :

$$\forall K \in \mathbb{R}^+, s \in \mathcal{S}, u_i^{KFS}(s) = \begin{cases} u_i^{\text{PFS}} & \text{si } \frac{\#good(s)}{n} \geq K \\ u_i^{\text{MFS}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.21)$$

Comme son nom le laisse supposer, la juste part maximin-proportionnelle est un critère qui se situe entre la juste part maximin et la juste part proportionnelle. La proposition 31 formalise cette intuition.

Proposition 31. *Soit $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{F}$ un partage, et $K \in \mathbb{R}^+$.*

Alors :

$$\begin{cases} P^{\text{PFS}}(\boldsymbol{\pi}) \leq P^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) \leq P^{\text{MFS}}(\boldsymbol{\pi}) \\ Pa^{\text{PFS}}(\boldsymbol{\pi}) \leq Pa^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) \leq Pa^{\text{MFS}}(\boldsymbol{\pi}) \\ Pp^{\text{PFS}}(\boldsymbol{\pi}) \leq Pp^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) \leq Pp^{\text{MFS}}(\boldsymbol{\pi}) \end{cases} \quad (5.22)$$

Si $K = 0$:

$$\begin{cases} P^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) = P^{\text{PFS}}(\boldsymbol{\pi}) \\ Pa^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) = Pa^{\text{PFS}}(\boldsymbol{\pi}) \\ Pp^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) = Pp^{\text{PFS}}(\boldsymbol{\pi}) \end{cases} \quad (5.23)$$

Il existe $K(\boldsymbol{\pi}) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$K \geq K(\boldsymbol{\pi}) \Rightarrow \begin{cases} P^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) = P^{\text{MFS}}(\boldsymbol{\pi}) \\ Pa^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) = Pa^{\text{MFS}}(\boldsymbol{\pi}) \\ Pp^{KFS}(\boldsymbol{\pi}) = Pp^{\text{MFS}}(\boldsymbol{\pi}) \end{cases} \quad (5.24)$$

Démonstration. La preuve découle directement de la proposition 16 page 76. \square

5.4 Optimisation des utilités collectives et critères numériques

5.4.1 Résolution exacte

Nous nous intéressons dans cette section à l'algorithme de résolution exacte du problème d'*optimisation de l'utilité collective ex-post* que nous avons développé.

L'optimisation est fondée sur un algorithme de *branch and bound* classique dans lequel les variables d_j , $j \in \mathcal{O}$ sont associées aux objets ; elles prennent leur valeur dans $\mathcal{A} \cup \{na\}$, définissant ainsi quel agent reçoit l'objet qui leur est associé ; la valeur na signifie que l'objet n'a pas (encore) été attribué.

L'efficacité d'un algorithme de *branch and bound* dépend en grande partie de sa capacité à détecter rapidement les affectations de piètre qualité afin de « couper » des parts significatives de l'arbre de recherche. Une coupe repose sur l'utilisation d'une fonction majorante de la grandeur à optimiser et algorithmiquement simple à calculer ; cette seconde condition élimine immédiatement toute fonction construite à partir de l'utilité *ex-post* : en effet le calcul de l'utilité *ex-post* est long et cette grandeur n'est pas « maintenable » au cours de l'algorithme, c'est-à-dire qu'il n'est pas envisageable lors de l'affectation d'une nouvelle variable, de réutiliser des calculs déjà faits ; le calcul d'utilité *ex-post* n'a donc lieu qu'une fois une allocation complète réalisée pour en mesurer la qualité, mais n'est pas utilisé comme stratégie de coupe.

À la place, nous construisons la fonction \overline{acu} , qui renvoie l'utilité *ex-ante* d'un partage virtuel π^+ qui attribuerait à *tous les agents* les objets non encore attribués par le partage courant π :

$$\overline{acu}(\pi) = acu(\pi^+) = \min_{i \in \mathcal{A}} \left(\sum_{j \in \pi_i} \tilde{w}_{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{O} \\ \forall i \in \mathcal{A}, j \notin \pi_i}} \tilde{w}_{ij} \right) \quad (5.25)$$

La fonction \overline{acu} est un majorant de l'utilité collective *ex-post*.

Proposition 32. *On a :*

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \quad \overline{acu}(\pi) \geq pcu(\pi) \quad (5.26)$$

Démonstration. La croissance de la fonction min donne immédiatement :

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \quad \overline{acu}(\pi) \geq acu(\pi)$$

Le résultat est ensuite obtenu grâce à la proposition 13 page 59. □

La fonction \overline{acu} majore grossièrement pcu . Cependant, elle se révèle rapide à calculer, sa mise à jour au cours de l'algorithme de *branch & bound* étant très simple dès que l'on garde en mémoire la valeur des utilités espérées de chaque agent, comme détaillé par l'algorithme 4 page suivante.

Notons que les calculs de valeur minimale qui apparaissent dans cet algorithme sont en pratique optimisés : est gardé en mémoire l'agent dont la valeur estimée de l'utilité est minimale ; ainsi, quand un nouvel objet est alloué, s'il l'est à un agent différent, alors la valeur du minimum n'est pas modifiée. Cette optimisation ne figure pas dans l'algorithme pour des raisons de clarté.

Algorithme 4 : Maintien de la quantité \overline{acu} au cours du branch & bound

Données : Une instance d'un problème de partage *BIRPA*

```

//Initialisation;
 $\forall i, \tilde{u}_i \leftarrow 0$ ;
 $\forall i, \bar{u}_i \leftarrow \sum_{j \in \mathcal{O}} \tilde{w}_{ij}$ ;
 $\overline{acu} \leftarrow \min_{i \in \mathcal{A}} \bar{u}_i$ ;
 $\forall j, d_j \leftarrow na$ ;

//Lancement du branch & bound;
//...;

//Allocation de l'objet  $j_0$  à l'agent  $i_0$ ;
 $d_{j_0} \leftarrow i_0$ ;
 $\tilde{u}_{i_0} \leftarrow \tilde{u}_{i_0} + \tilde{w}_{i_0 j_0}$ ;
 $\forall i, \bar{u}_i \leftarrow \bar{u}_i - \tilde{w}_{i j_0}$ ;
 $\overline{acu} \leftarrow \min_{i \in \mathcal{A}} (\tilde{u}_i + \bar{u}_i)$ ;

//...;

//Désallocation de l'objet  $j_0$ ;
 $i_0 \leftarrow d_{j_0}$ ;
 $d_{j_0} \leftarrow na$ ;
 $\tilde{u}_{i_0} \leftarrow \tilde{u}_{i_0} - \tilde{w}_{i_0 j_0}$ ;
 $\forall i, \bar{u}_i \leftarrow \bar{u}_i + \tilde{w}_{i j_0}$ ;
 $\overline{acu} \leftarrow \min_{i \in \mathcal{A}} (\tilde{u}_i + \bar{u}_i)$ ;

//...;

```

On dispose donc d'une part d'un majorant grossier et rapide à calculer, et d'autre part de la fonction à optimiser, dont le calcul est très long. Il nous a semblé intéressant de chercher une fonction intermédiaire, qui constituerait un meilleur majorant qu' \overline{acu} et dont le calcul serait plus rapide que celui de pcu .

Nous avons introduit dans la section 5.3.3 page 88 l'utilité collective mixte. Celle-ci fournit une meilleure borne supérieure que l'utilité collective *ex-ante* (proposition 29 page 90) et est calculée plus rapidement que l'utilité collective *ex-post*. Le calcul de mcu demande trop de temps pour pouvoir être utilisé de façon efficace comme mécanisme de coupe à chaque nœud de la recherche arborescente, mais cette utilité peut être mise à profit lors de la dernière coupe possible, quand une allocation complète vient d'être construite, pour éviter un calcul superflu (et coûteux en terme de temps) de l'utilité collective *ex-post*.

Comme le suggère l'inégalité introduite dans la proposition 30 page 91, l'utilité collective mixte fournit une meilleure borne supérieure quand \mathcal{O}_{ea} est construit pour une allocation π avec des objets minimisant $p_j \bar{p}_j w_{ij}$ (où i est l'agent qui reçoit j). Cependant, puisque calculer ces valeurs, puis les trier, et ce de façon dynamique (c'est-à-dire pour chaque nouvelle allocation envisagée) prend du temps, nous proposons également un calcul statique, qui ne dépend pas de l'allocation considérée et peut donc être effectué une fois pour toutes pour une instance donnée du problème : \mathcal{O}_{ea} est alors constitué des objets minimisant $p_j \bar{p}_j \hat{w}_{ij}$ (où \hat{w}_j représente la moyenne des poids affectés à l'objet j).

La taille de \mathcal{O}_{ea} a été empiriquement fixée à $m/3$, valeur qui semble donner les meilleurs

résultats. Il s'agit d'un compromis entre une utilité collective mixte proche de pcu , qui fournit une bonne coupe mais dont le temps de calcul est élevé, et une utilité collective mixte proche de acu , dont le temps de calcul est faible, mais l'intérêt en terme de coupe réduit.

Les résultats expérimentaux liés à la construction de l'ensemble \mathcal{O}_{ea} sont regroupés dans la figure 6.5 page 111 (chapitre 6.3 page 107).

Au-delà de la stratégie de coupe présentée, nous utilisons une heuristique adaptée aux problèmes de partage, de sorte à parcourir les allocations en commençant par les plus prometteuses.

Cette heuristique consiste à choisir pour chaque nouvelle allocation l'agent le moins bien servi et à lui allouer l'objet restant auquel il attribue le poids le plus élevé : on parlera d'heuristique *plus petite utilité/plus grand poids* (abrégé en $\min U/\max W$). Cette heuristique (éventuellement biaisée) sera mise à profit dans toutes les méthodes de résolution présentées dans ce document, en utilisant l'utilité *ex-ante* comme évaluation de l'utilité d'un agent, en raison de son maintien facile tout au long de la construction d'une allocation (voir plus haut).

Dans le cadre de l'algorithme de branch & bound, l'heuristique $\min U/\max W$ définit quel nouvel objet doit être considéré, quand il y a lieu, c'est-à-dire quand la recherche descend d'un niveau dans l'arbre. L'objet est choisi comme celui qui satisfait le plus l'agent actuellement le moins bien servi, et c'est *a priori* à cet agent qu'il va être affecté en premier.

Cette première allocation de l'objet est alors intéressante pour deux raisons : on va d'une part satisfaire *l'agent le moins bien servi* à cet instant, et on va d'autre part le satisfaire *le mieux possible*. De façon à conserver ce double objectif, et vu qu'il va bien falloir allouer cet objet à tous les autres agents (même si ce n'est pas l'objet de plus grand poids pour eux), l'ordre dans lequel ceux-ci se verront allouer l'objet tiendra compte non seulement de leur utilité actuelle, mais également du futur incrément d'utilité obtenu avec l'allocation de l'objet. Ainsi, l'heuristique dans le cas de l'algorithme de branch & bound est légèrement modifiée et un objet $j \in \mathcal{O}$ sera affecté aux agents dans l'ordre des $\tilde{u}_i(\boldsymbol{\pi}) - w_{ij}$, $i \in \mathcal{A}$ croissants.

5.4.2 Résolution approchée

Nous proposons dans cette section des méthodes de recherche approchée génériques qui s'appliquent à tous les critères numériques et utilités collectives auxquels nous nous sommes intéressés jusque là.

Glouton stochastique

L'algorithme de recherche approchée (algorithme 5 page suivante) est basé sur un algorithme glouton stochastique (introduit par Bresina (1996)). Les allocations sont construites par choix successifs de couples objets/agents, de sorte à allouer tous les objets, en suivant une heuristique $\min U/\max W$ biaisée (cette heuristique a été présentée dans la section 5.4.1 page 94).

Dès qu'une allocation complète a été construite, un calcul approché de la grandeur à calculer est réalisé par `critApp`, de façon à déterminer si cette allocation va être ou non conservée. Le calcul approché est réalisé par la méthode de Monte-Carlo (voir section 5.3 page 85), ou éventuellement avec l'utilité collective mixte (quand on cherche à optimiser l'utilité collective égalitariste *ex-post*).

De sorte à éviter un calcul récurrent du critère optimisé, une méthode de stockage de solutions a été imaginée. Est conservé au cours de l'algorithme un nombre fixe $nbStockage$ de « bonnes » allocations; si une allocation est meilleure, d'après le calcul approché, que la pire allocation actuellement stockée, la fonction `conserver` sauvegarde cette nouvelle allocation (et l'autre est supprimée si la limite de stockage est atteinte). Dès que $nbStockage \times nbAvantCalculExact$ allocations ont été réalisées, le calcul exact de l'utilité *ex-post* des allocations stockées intervient, et on ne garde alors que la meilleure d'entre elles, toutes les autres étant supprimées.

Il s'avère en pratique que cette méthode donne des résultats similaires voire moins bons que la méthode classique où chaque solution est directement évaluée. Les algorithmes utilisés pour les expérimentations du chapitre 6 page 101 ne mettront donc pas en œuvre cette méthode. Il nous semblait toutefois intéressant de la faire figurer dans cette présentation de l'algorithme de recherche approchée.

Lors de la construction d'une allocation, le choix des objets et des agents est réalisé en utilisant l'heuristique $\min U / \max W$ biaisée par la fonction $alter : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, alter(y) = y \cdot (1 + \phi X)$, où ϕ est un paramètre réel positif et X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Algorithme 5 : Glouton stochastique

Données : Une instance d'un problème de partage *BIRPA*

Résultat : Une bonne allocation selon le critère numérique ou la fonction d'utilité collective choisi

```

Stock ← ∅ ;
π* = ⟨π1*, ..., πm*⟩ ← ⟨∅, ..., ∅⟩ ;
Qp* ← 0 ;
k ← 0 ;
tant que le temps imparti n'est pas écoulé faire
  π ← construireAllocation() ;
  Qpapp ← critApp(π) ;
  si Qpapp > minπ ∈ Stock(critApp(π)) alors
    | conserver(π) ;
  k ← k + 1 ;
  si k = nbStockage × nbAvantCalculExact alors
    | pour π ∈ Stock faire
      | Qp ← Qp(π) ;
      | si Qp > Qp* alors
        | | π* ← π ;
        | | Qp* ← Qp ;
      | Stock ← ∅ ;
      | k ← 0 ;
renvoyer π* ;
  
```

Recherche locale

L'utilisation de la recherche locale (le lecteur pourra se référer avec profit à l'ouvrage de Van Hentenryck et Michel (2009) pour une présentation de cette méthode de résolution), a été

Fonction construireAllocation

```

u =  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle \leftarrow \langle 0, \dots, 0 \rangle$ ;
 $\pi$  =  $\langle \pi_1, \dots, \pi_n \rangle \leftarrow \langle \emptyset, \dots, \emptyset \rangle$ ;
tant que  $\exists j \in \pi_0$  (j n'a pas encore été alloué) faire
   $\overset{\circ}{i} \leftarrow \operatorname{argmin}_{i \in \mathcal{A}}(\operatorname{alter}(u_i))$ ;
   $\overset{\circ}{j} \leftarrow \operatorname{argmax}_{j \in \pi_0}(\operatorname{alter}(w_{ij}))$ ;
   $\pi_{\overset{\circ}{i}} \leftarrow \pi_{\overset{\circ}{i}} \cup \overset{\circ}{j}$ ;
   $u_{\overset{\circ}{i}} \leftarrow u_{\overset{\circ}{i}} + w_{\overset{\circ}{i}\overset{\circ}{j}}$ ;
renvoyer  $\pi$  ;

```

envisagée pour résoudre le problème. On appelle voisinage l'ensemble des solutions envisageables à partir d'une solution donnée : l'espace de recherche correspondant à l'espace des partages possibles, le voisinage le plus naturel d'un partage π est l'ensemble $V(\pi)$ des partages qui attribuent tous les objets aux mêmes agents que π , sauf un, qui sera attribué à un agent différent. Formellement,

$$\forall \pi \in \mathcal{D}, \quad V(\pi) = \left\{ \pi' \in \mathcal{D} \mid \exists i_0 \in \mathcal{A}, j_0 \in \mathcal{O} \left| \begin{array}{l} \pi'_i = \pi_i - \{j_0\} \text{ si } i \neq i_0 \\ \pi'_{i_0} = \pi_{i_0} \cup \{j_0\} \end{array} \right. \right\} \quad (5.27)$$

Cependant, même le simple passage d'un partage à l'un de ses voisins (au sens de V) nécessite un calcul complet de la nouvelle valeur *ex-post* puisqu'un grand nombre d'états de la nature (tous ceux dans lesquels l'objet qui change de main est en bon état, soit la moitié) est concerné par la modification. On perd alors tout l'intérêt de la recherche locale, et la piètre performance de cette méthode face au problème de partage *BIRPA* n'est pas surprenante.

5.5 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux problèmes suivants :

1. optimisation de l'utilité collective égalitariste *ex-ante* ;
2. optimisation de l'utilité collective égalitariste *ex-post* ;
3. optimisation de la juste part proportionnelle *ex-ante* ;
4. optimisation de la probabilité *ex-post* de juste part proportionnelle ;
5. optimisation de la juste part maximin *ex-ante* ;
6. optimisation de la probabilité *ex-post* de juste part maximin.

Nous avons dans un premier temps montré que l'évaluation et l'optimisation d'un critère *ex-ante* quel qu'il soit étaient équivalentes à l'évaluation et l'optimisation de la version sans risque de ce même critère vis-à-vis d'un problème sans risque équivalent. Les problèmes 1, 3, et 5 ci-dessus entrent dans ce cadre. En revanche, les problèmes d'évaluation et d'optimisation *ex-post* (problèmes 2, 4 et 6) soulèvent des problématiques algorithmiques conséquentes : en effet, un critère numérique *ex-post* est défini à partir d'un nombre exponentiel d'états de la nature ; cet aspect combinatoire du risque couplé à la combinatoire inhérente à la structure d'un problème de partage rend complexes les problèmes d'optimisation.

Nos travaux portent principalement sur le problème 2. Nous avons proposé un algorithme efficace de calcul de l'utilité collective égalitariste *ex-post* dans le cadre du modèle de problème de partage *BIRPA*, ainsi qu'un algorithme exact d'optimisation de l'utilité collective égalitariste *ex-post*, basé sur un algorithme de branch & bound amélioré et adapté au problème.

Nous avons également adapté un algorithme de recherche approchée à l'ensemble des problèmes d'optimisation *ex-post* (problèmes 2, 4 et 6); cet algorithme est en partie basé sur des méthodes d'approximation des critères numériques considérés, et nous fournissons une évaluation de la qualité de ces approximations.

Chapitre 6

Expérimentations

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats expérimentaux qui illustrent d'une part des points développés dans cette thèse et qui d'autre part montrent dans quelle mesure les algorithmes développés sont efficaces.

Dans une première partie, nous présentons le contexte des expérimentations ; nous expliquons en particulier comment nous avons pu nous approcher des applications réelles par une génération aléatoire d'instances adaptée.

Dans une seconde partie, nous tentons de fournir une représentation du *timing effect* sous une forme graphique originale et de montrer dans quelle mesure celui-ci est plus ou moins important selon les caractéristiques des instances considérées.

Enfin, nous présentons les résultats des algorithmes que nous avons introduits au chapitre précédent ; la majeure partie des résultats présentés concerne l'optimisation de l'utilité collective *ex-post* ; nous présentons également quelques résultats relatifs à l'optimisation de la probabilité de juste part proportionnelle et maximin.

Nous rappelons que tous les calculs et optimisations *ex-ante* se ramènent facilement à des calculs et optimisations sur des instances sans risque équivalentes, travaux qui ont déjà été réalisés. Il ne sera par conséquent pas question ici de l'approche *ex-ante* ; le lecteur curieux pourra se référer à la thèse de Bouveret (2007).

6.1 Contexte des expérimentations

Nous avons testé nos algorithmes sur une classe particulière d'applications réelles, les problèmes d'allocations de créneaux temporels. Dans ce type de problème, l'utilisation d'une ressource commune (ressource informatique, ressource expérimentale, etc.) par plusieurs agents impose une division temporelle de cette ressource. La gestion d'une constellation de satellites d'observation de la Terre (voir Lemaître *et al.* (1999)) ou encore la planification de l'emploi du temps d'un télescope partagé par des astronomes à l'échelle internationale (voir Bresina (1994)) sont des exemples de problèmes d'allocation de créneaux temporels.

Nous faisons l'hypothèse, souvent vérifiée en pratique pour des questions organisationnelles, que le temps est divisé en un nombre de créneaux temporels indivisibles. Le modèle introduit au

chapitre 4 page 69 est alors parfaitement adapté pour traiter de tels problèmes, chaque créneau temporel constituant l'un des « objets » à partager entre les agents.

Les instances réelles de tels problèmes partagent deux caractéristiques principales :

- L'intérêt des agents pour les objets varie grandement d'un objet (ou créneau) à l'autre ; par conséquent, un objet donné peut présenter un fort attrait pour un unique agent, tandis que d'autres seront ardemment désirés par tous.
- Les créneaux temporels contigus sont fortement connectés, ce qui implique que leur probabilité de bon état est généralement voisine ; dans l'exemple de la constellation de satellites, un objet est associé à la zone géographique observée pendant le créneau temporel, et les zones voisines partagent généralement des conditions météorologiques similaires.

Les algorithmes proposés dans cet article ont été testés sur des instances générées aléatoirement, et reproduisant les problèmes réels mentionnés ci-dessus. La création d'une instance aléatoire se présente comme suit. À chaque objet est associé une valeur dans $[0, 1]$ qu'on appelle *attractivité* ; plus cette valeur est élevée, plus les agents seront susceptibles d'être intéressés par l'objet associé ; cela signifie d'une part qu'ils auront de grandes chances de lui affecter un poids non nul et, si tel est le cas, que d'autre part le poids affecté sera vraisemblablement élevé. De plus, la génération aléatoire des attractivités et des probabilités de bon état est telle que les valeurs générées pour des objets/créneaux contigus seront proches les unes des autres.

L'algorithme 7 page ci-contre précise la méthode de génération aléatoire utilisée ; il fait appel à la fonction *aleaBorne* : $]0; +\infty[\rightarrow [-1, 1]$ définie par l'équation 6.1, où X est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

$$\text{aleaBorne} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } X > x \\ -1 & \text{si } X < -x \\ X/x & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.1)$$

Dans les expérimentations présentées dans les sections suivantes, des valeurs réalistes ont été choisies pour les paramètres de la génération aléatoire, comme suit :

$$\begin{cases} D_a = 3 \\ D_p = 5 \\ D_w = 0,2 \\ W_{\max} = 100 \end{cases}$$

Dans une large part des applications réelles auxquelles nous nous sommes intéressés, le nombre d'agents reste très faible. Nous nous limitons donc à des instances de ce type ($n = 2$ ou $n = 3$) dans nos expérimentations.

Les résultats expérimentaux ont été obtenus à partir d'un programme codé en Java SE 6. Les résultats expérimentaux faisant intervenir le temps d'exécution des algorithmes ont tous été obtenus à partir d'exécutions sur une même machine, dont les caractéristiques principales sont regroupées dans le tableau 6.1 page 104.

Algorithme 7 : Génération aléatoire d'instances réalistes

Données : Le degré $D_a \in \mathbb{R}^{+*}$ de proximité des attractivités, le degré $D_p \in \mathbb{R}^{+*}$ de proximité des probabilités, la dispersion des poids $D_w \in \mathbb{R}^+$, le poids max W_{\max} , et la valeur normalisée de la somme des poids d'un agent W_{norm} .

Résultat : Une instance d'un problème de partage *BIRPA*, sous la forme d'une matrice de poids $\mathbf{W} = w_{ij}$ et d'un vecteur de probabilités $\mathbf{p} = p_j$.

```

//Génération des attractivités;
attr1 ← valeur aléatoire uniforme dans [0, 1] ;
pour  $j \in \{2, \dots, m\}$  faire
  | attrj ← attrj-1 + aleaBorne(Da) ;
  | si attrj > 1 alors
  |   | attrj ← 2 - attrj ;
  | si attrj < 0 alors
  |   | attrj ← -attrj ;

//Génération des poids;
 $\mathbf{W} = \{\langle 0 \dots 0 \rangle \dots \langle 0 \dots 0 \rangle\}$ ;
//- au moins un agent doit être intéressé par chaque objet;
pour  $j \in \{1, \dots, m\}$  faire
  |  $i \leftarrow$  choix aléatoire d'un agent ;
  |  $w_{ij} \leftarrow$  genererPoids(attrj, Wmax) ;
//- au moins un objet doit intéresser chaque agent;
pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  faire
  |  $j \leftarrow$  choix aléatoire d'un objet ;
  |  $w_{ij} \leftarrow$  genererPoids(attrj, Wmax) ;
//- génération des autres poids;
pour  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$  faire
  | si  $w_{ij} = 0$  alors
  |   | avec une probabilité attrj :  $w_{ij} \leftarrow$  genererPoids(attrj, Wmax);

//Génération des probabilités;
p1 ← valeur aléatoire uniforme dans [0, 1] ;
pour  $j \in \{2, \dots, m\}$  faire
  |  $p_j \leftarrow p_{j-1} +$  aleaBorne(Dp) ;
  | si  $p_j > 1$  alors
  |   |  $p_j \leftarrow 2 - p_j$  ;
  | si  $p_j < 0$  alors
  |   |  $p_j \leftarrow -p_j$  ;

//Normalisation des poids;
pour  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$  faire
  |  $w_{ij} \leftarrow w_{ij} / \sum_{j \in \mathcal{O}} w_{ij} * W_{\text{norm}}$  ;

renvoyer  $\mathbf{W}, \mathbf{p}$  ;

```

Fonction genererPoids

Données : L'attractivité $attr$ et l'utilité maximale W_{\max} .

Résultat : Un poids w réaliste dans $]0, W_{\max}]$.

$w \leftarrow W_{\max} \cdot (attr + D_w \cdot alea())$;

si $w > W_{\max}$ **alors**
 $w \leftarrow W_{\max}$;

si $w \leq 0$ **alors**
 $w \leftarrow W_{\max}/100$;

renvoyer w ;

Système d'exploitation	GNU / Linux
Distribution	<i>Linux Mint Debian Edition</i> 64 bits
Processeur	Intel Core i5 2500K (4 cœurs à 3,3GHz)
Mémoire	4Go DDR3

TABLE 6.1 – Caractéristiques principales de la machine utilisée pour l'obtention des résultats expérimentaux.

6.2 Evaluation empirique du *timing effect*

Nous avons vu au chapitre 3 page 51 que les utilités collectives *ex-post* et *ex-ante* ne coïncident pas, dès que la fonction d'utilité collective utilisée n'est pas linéaire : c'est le *timing effect*. Nous présentons dans cette section quelques résultats qui l'illustrent.

Tout d'abord, les graphes de la figure 6.1 page ci-contre positionnent dans un plan l'ensemble des solutions d'un ensemble de problèmes de partage généré aléatoirement comme exposé section 6.1 page 101, selon les utilités collectives *ex-ante* (abscisse) et *ex-post* (ordonnée) qu'elles produisent. L'utilité collective *ex-ante* étant supérieure à l'utilité collective *ex-post*, les solutions sont toutes placées en-dessous de la première bissectrice. Le *timing effect* est ici matérialisé par la dispersion des solutions, et plus précisément par leur écart (horizontal ou vertical) à la première bissectrice.

Les alignements verticaux de solutions sont fréquents sur ces graphes, et s'expliquent aisément par l'effet de noyade induit par le choix de la fonction d'utilité collective égalitariste classique : avec l'approche *ex-ante*, les modifications apportées aux parts des agents bien servis ne modifient pas l'utilité espérée de l'agent le moins bien servi (tant que ce dernier reste le moins bien servi) et l'utilité collective *ex-ante* n'est donc pas non plus modifiée ; ce n'est pas le cas de l'utilité collective *ex-post* qui varie dès la moindre modification dans l'allocation étant donné son calcul sur chaque état de la nature. Par conséquent, de nombreuses allocations fournissent la même utilité collective *ex-ante*, mais une utilité collective *ex-post* différente, d'où les alignements verticaux.

D'un point de vue algorithmique, on cherche principalement à savoir si les optima *ex-ante* et *ex-post* sont proches : la figure 6.2 page 106 évalue cette proximité selon le nombre d'agents et d'objets du problème. Les utilités collectives *ex-ante*-optimales et *ex-post*-optimales sont plus proches, i.e. le *timing effect* est moindre, quand le nombre d'agents est petit ou le nombre d'objets grand.

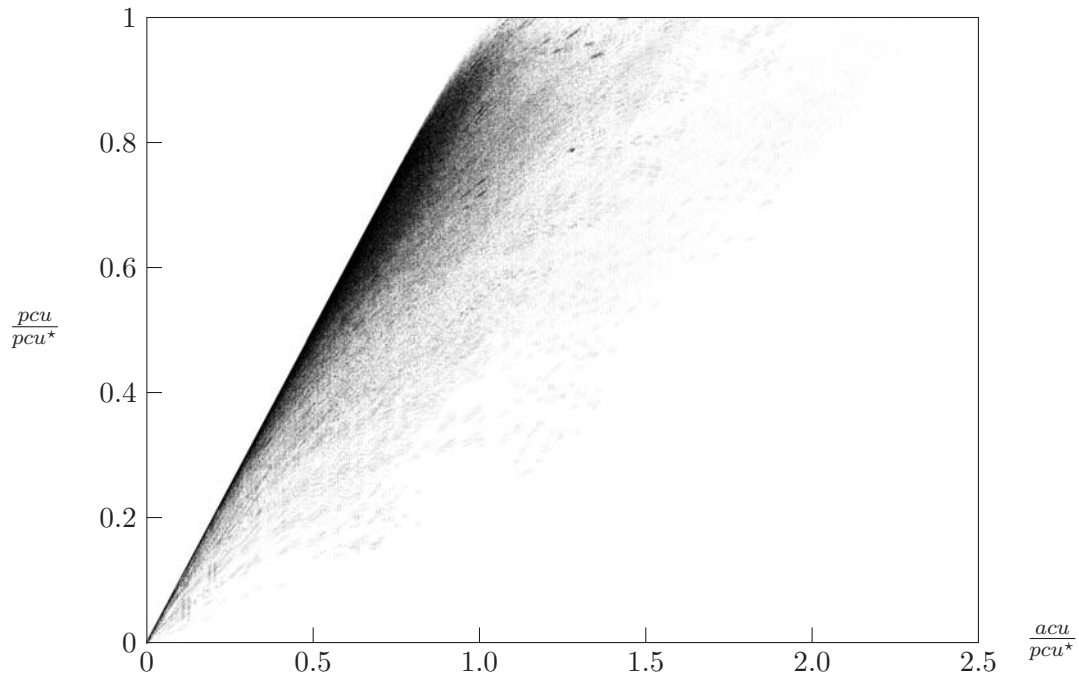
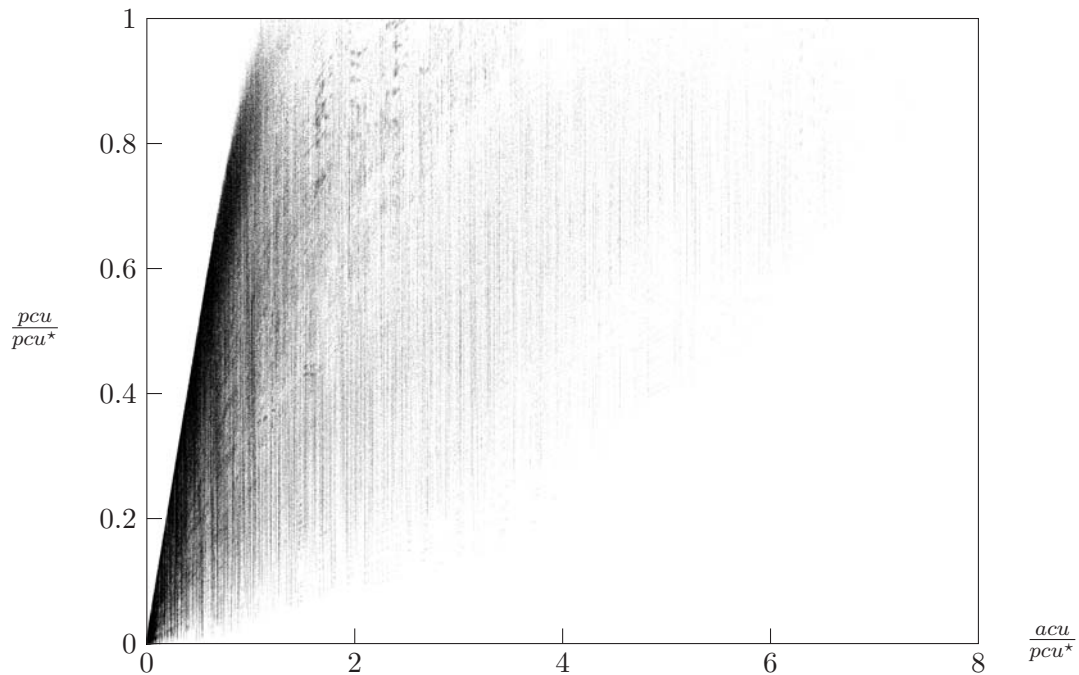
6.1 (a) : 100 instances aléatoires, $n = 2$, $m = 14$ 6.1 (b) : 100 instances aléatoires, $n = 3$, $m = 10$

FIGURE 6.1 – Mise en évidence du *timing effect* par la représentation dans le plan *ex-ante/ex-post* des solutions d'un ensemble de problèmes de partage *BIRPA*. On rappelle que $pcu^* = \max_{\pi \in \mathcal{F}} pcu(\pi)$ est la valeur optimale de l'utilité collective *ex-post*.

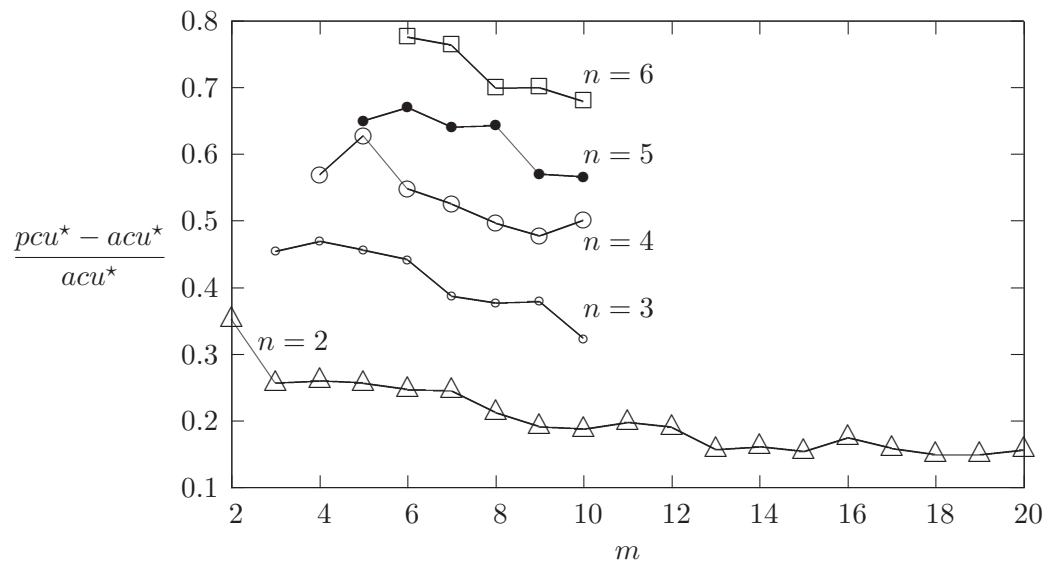


FIGURE 6.2 – Influence du timing effect en fonction du nombre d'agents et d'objets. Moyennes sur 100 instances.

6.3 Résultats

La production des résultats expérimentaux présentés dans cette section a nécessité la génération aléatoire d'instances et/ou d'allocations associées.

Pour tous les résultats qui suivent, les instances ont été générées aléatoirement à partir de la méthode présentée dans la section 6.1 page 101.

Pour une instance donnée, quand il a été nécessaire de produire des allocations dans un but illustratif (et non à l'intérieur d'un algorithme optimisant tel ou tel critère), ces dernières ont été générées aléatoirement avec la procédure `construireAllocation` présentée dans l'algorithme 5 page 97 (heuristique $\min U/\max W$ biaisée, avec un paramètre $\phi = 1$) et constituent ainsi de « bonnes » allocations ; sont concernées par cette génération aléatoire la figure 6.6 page 115, et les tableaux 6.3 page 113 et 6.4 page 118.

D'autre part, pour prendre en compte la grande diversité des instances du problème de partage *BIRPA*, les résultats sont présentés sous la forme de moyenne sur 100 instances ou 100 couples (instance, allocation), selon les cas, générés aléatoirement comme précisé ci-dessus. Notons que la figure 6.6 page 115 constitue une exception, puisqu'elle présente les résultats associés pour 100 couples (instance, allocation) *sous forme de nuage de points*, aucune moyenne n'étant donc réalisée.

6.3.1 Approche égalitariste classique *ex-post*

Dans cette section, on appelle *algorithme de branch & bound brut* l'algorithme de branch & bound utilisé avec pour seule coupe celle basée sur la fonction $\overline{ac\bar{u}}$ (équation 5.25 page 94) ; on appelle *algorithme spécialisé* l'algorithme de branch & bound associé à toutes les optimisations présentées en section 5.4.1 page 94 (optimisation du calcul de l'utilité collective *ex-post*, coupes basées sur l'utilité collective mixte, etc.).

Résolution exacte

Les résultats de l'algorithme présenté en section 5.4.1 page 94 sont résumés dans le tableau 6.2 page suivante, sous forme du pourcentage d'instances résolues en moins de 30 secondes, pour divers nombre d'objets et d'agents. Les optimisations proposées donnent de bons résultats pour des problèmes de taille raisonnable ; néanmoins, pour de grands nombres d'objets, elles s'avèrent insuffisantes face à la complexité algorithmique du problème.

La figure 6.3 page 109 illustre la contribution des calculs d'utilité collective *ex-post* au temps total d'exécution de l'algorithme : la majeure partie du temps d'exécution est consacrée à ces calculs. Cela s'explique par deux raisons principales : d'une part le calcul de l'utilité collective *ex-post* d'un partage est un calcul long (exponentiel en le nombre d'objets) et d'autre part, un grand nombre de calculs doivent être réalisés. Les optimisations de l'algorithme de branch & bound introduites en section 5.4.1 page 94 accélèrent le calcul de l'utilité collective *ex-post* d'un partage et coupent un certain nombre de feuilles de l'arbre de recherche, réduisant d'autant le nombre de calculs d'utilité collective *ex-post* nécessaires ; elles contribuent donc largement à la réduction du temps d'exécution de l'algorithme.

n	m	(a)	(b)
2	≤ 15	100	100
2	20	0	100
2	25	0	60
2	30	0	1

n	m	(a)	(b)
3	≤ 11	100	100
3	16	0	97
3	21	0	48
3	26	0	7

TABLE 6.2 – Nombre d’instances résolues en 30 secondes sur 100 instances, en fonction du nombre d’objets, du nombre d’agents, et de l’algorithme utilisé ((a) algorithme de branch & bound brut ; (b) algorithme spécialisé).

Le nombre de calcul *ex-post* nécessaires est également fortement influencé par la valeur des probabilités de bon état des objets. En effet, l’efficacité des stratégies de coupes mises en place dans l’algorithme de branch & bound est fortement dépendante de ces probabilités de bon état de objets. Quand celles-ci sont élevées et donc proches de 1 (c’est-à-dire que les objets seront très probablement en bon état), le problème se rapproche d’un problème sans risque, et intuitivement, les utilités collectives *ex-ante* et mixte sont proches de l’utilité collective *ex-post* et constituent donc de bonnes approximations. Par suite, les coupes présentées en section 5.4.1 page 94 sont bien plus efficaces. La figure 6.4 page 110 illustre clairement ce phénomène : le nombre de calculs d’utilité collective *ex-post* réalisés, autrement dit le nombre de feuilles de l’arbre de recherche atteintes car non coupées décroît fortement quand la probabilité de bon état des objets augmente.

Le choix de l’ensemble \mathcal{O}_{ea} pour le calcul de l’utilité collective mixte est un problème délicat, comme expliqué précédemment en section 5.4.1 page 94. La figure 6.5 page 111 justifie les choix algorithmiques réalisés. Trois valeurs sont représentées :

- le temps de résolution moyen pour une instance : ce temps est exprimé par rapport au temps de résolution sans les coupes avec l’utilité mixte ;
- la valeur du rapport de l’utilité mixte sur l’utilité collective *ex-post* ;
- le rapport de la borne supérieure de l’utilité mixte sur l’utilité collective *ex-post* ; cette borne supérieure, notée $\overline{m\overline{cu}}$, est celle proposée par l’équation 5.17 page 91, que nous rappelons ici :

$$\forall \pi \in \mathcal{F}, \quad \overline{m\overline{cu}}(\pi) = p_{cu}(\pi) + \sum_{j \in \mathcal{O}_{ea}} \bar{p}_j p_j w_{a(j)j} \geq m_{cu}(\pi) \quad (6.2)$$

Chacune des valeurs précédentes est représentée en fonction du nombre d’objets de \mathcal{O}_{ea} et de la méthode de construction de l’ensemble (heuristique dynamique, statique, ou sans heuristique). On constate que, quelle que soit l’heuristique utilisée, le temps de résolution est optimal pour une taille de \mathcal{O}_{ea} d’environ $\lceil m/3 \rceil$. D’autre part, le graphe montre que les heuristiques statiques et dynamiques donnent des résultats proches, et bien meilleurs que dans le cas où \mathcal{O}_{ea} est construit sans heuristique. Enfin, on remarque que $\overline{m\overline{cu}}$ constitue une borne supérieure de qualité tant que le nombre d’objets de \mathcal{O}_{ea} reste faible.

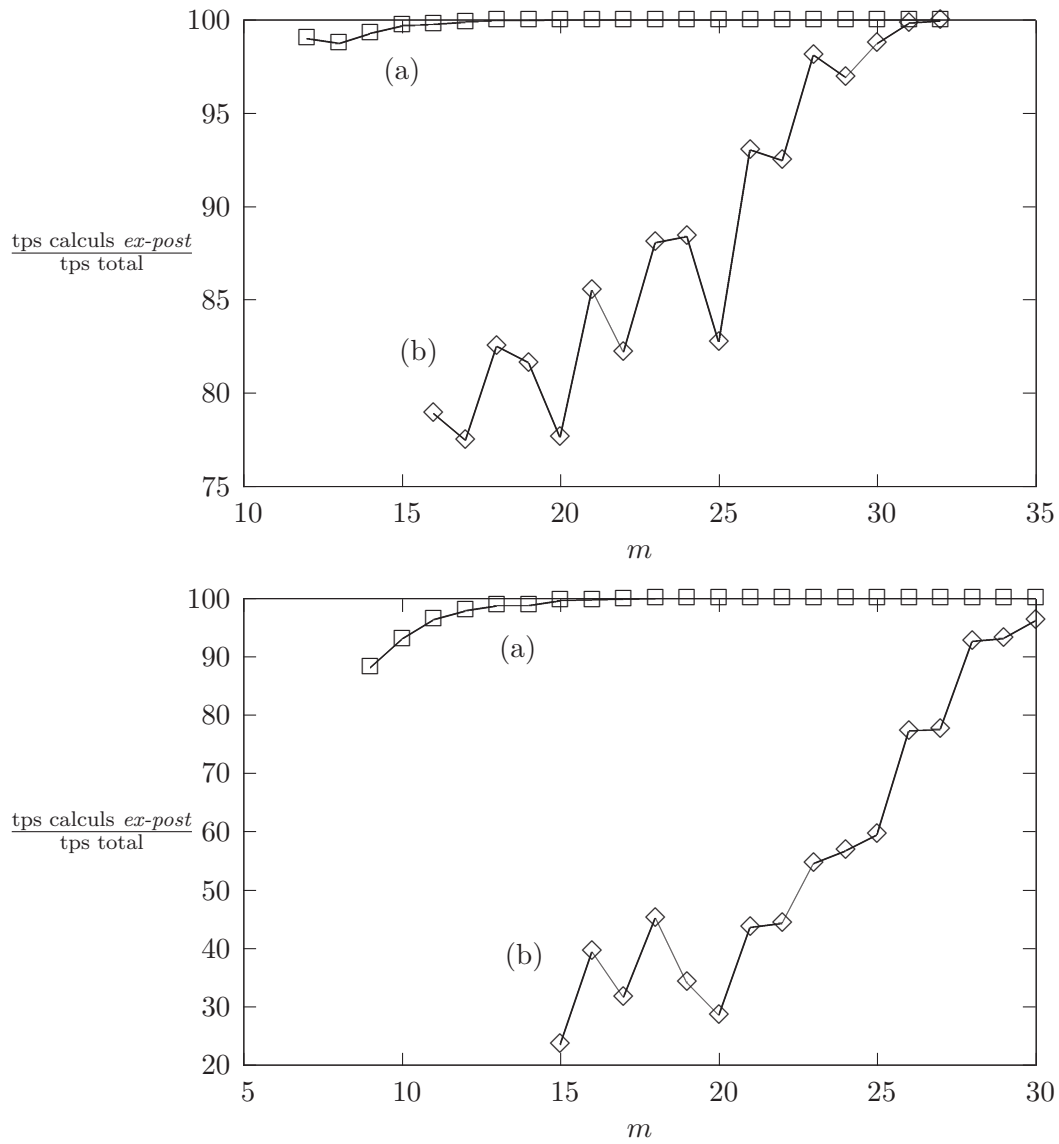


FIGURE 6.3 – Temps pris par les calculs d'utilité collective *ex-post* (en pourcentage du temps de résolution total) en fonction du nombre d'agents ($n = 2$ en haut, $n = 3$ en bas), du nombre d'objets, et de l'algorithme utilisé ((a) algorithme de branch & bound brut ; (b) algorithme spécialisé). Moyenne sur 100 instances.

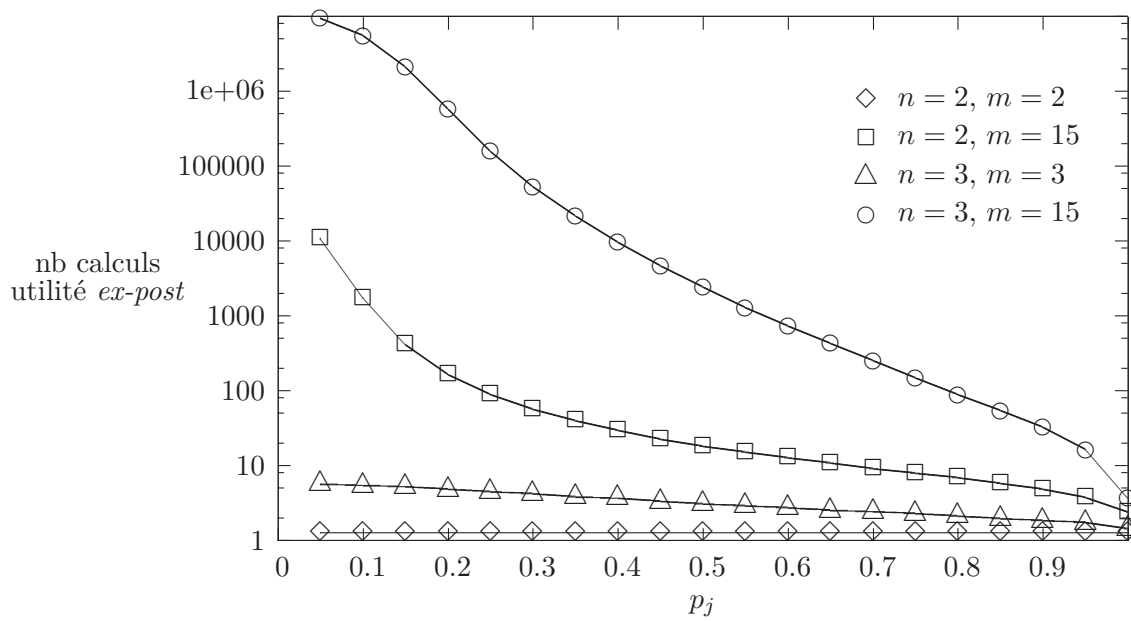


FIGURE 6.4 – Influence des probabilités de bon état sur l'efficacité des stratégies de coupes de l'algorithme de branch & bound. On représente le nombre de calculs d'utilité collective *ex-post* effectués (algorithme spécialisé) en fonction de la probabilité p_j (identique pour tous les objets) de bon état ; moyenne sur 100 instances aléatoires.

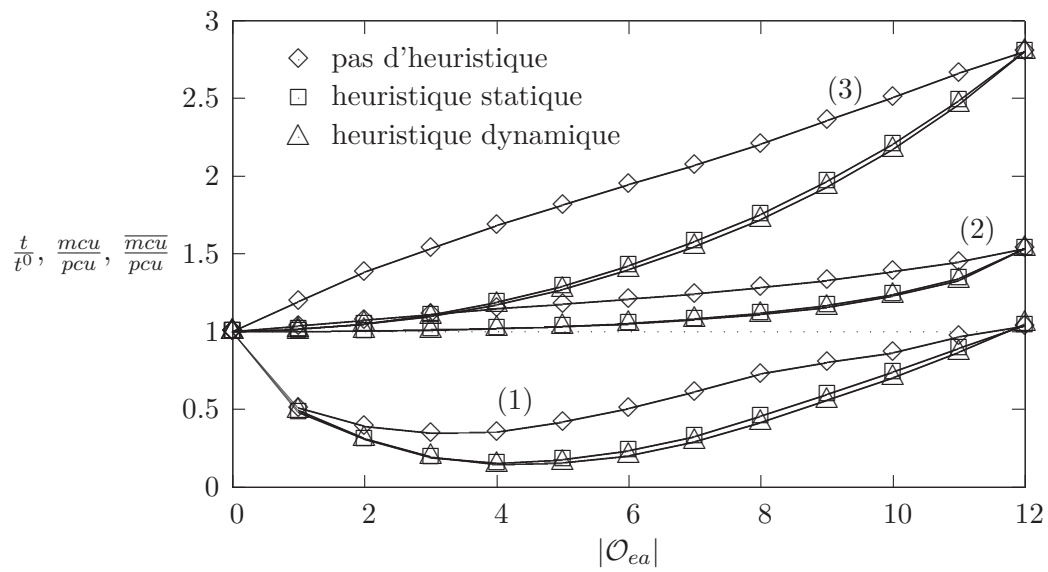


FIGURE 6.5 – Influence de la construction de l'ensemble \mathcal{O}_{ea} sur l'utilité mixte et la résolution exacte du problème, pour $n = 3$ et $m = 12$, moyenne sur 100 instances.

Fuseau (1) : temps de résolution par rapport au temps de résolution sans coupes à base d'utilité collective mixte

Fuseau (2) : rapport mcu/pcu

Fuseau (3) : rapport $\overline{mcu}/\overline{pcu}$

Résolution approchée

Intéressons-nous d'abord au calcul de l'utilité collective *ex-post* d'une solution : ce dernier étant chronophage on choisit d'utiliser une méthode d'approximation pour évaluer les utilités collectives *ex-post* des allocations générées.

Trois approximations sont disponibles (voir section 5.3) : l'utilité collective mixte, l'approximation par omission, et la méthode de Monte-Carlo. La figure 6.6 page 115 illustre la performance de ces trois approximations pour des instances de taille différente. On y trouve la qualité des approximations pour 100 différentes allocations (générées à partir de l'heuristique $\min U / \max W$ biaisée) de différentes instances (générées aléatoirement), positionnées dans le plan selon l'erreur relative d'approximation (abscisse) et le nombre d'états de la nature considérés pour le calcul (ordonnée), ce nombre étant proportionnel au temps d'exécution de l'algorithme associé. Ainsi, les points positionnés dans la partie inférieure gauche du graphe correspondent à des calculs d'approximations réalisés en un temps rapide et dont la valeur fournie approxime l'utilité collective *ex-post* avec une faible erreur ; inversement, les points apparaissant dans la partie supérieure droite correspondent à des calculs d'approximations lents et peu précis.

Les graphes de cette figure montrent que l'approximation par omission est de piètre qualité devant les deux autres, et ce quelle que soit la taille des instances considérées. De plus, contrairement aux approximations par méthode de Monte Carlo ou par utilisation de l'utilité collective mixte, la spécification du paramètre Pr_0 d'approximation ne permet pas de déterminer de façon précise le gain de temps réalisé par rapport au calcul exact (cela s'explique par le fait qu'il est difficile de connaître le nombre d'états de la nature éliminés dans le calcul de l'approximation) ; en revanche, la construction de la méthode de Monte-Carlo fait en sorte que le paramètre d'approximation correspond exactement au nombre d'états de la nature considérés, et en ce qui concerne le calcul de l'utilité collective mixte, le nombre d'états considérés est exactement égal à $2^{m-|C_{ea}|}$. Ces deux méthodes fournissent généralement de bons résultats : on constate que l'utilisation de l'utilité collective mixte s'impose pour les instances de taille modeste, alors que la méthode de Monte-Carlo est plus performante quand la taille des instances augmente.

Enfin, les graphes confirment la tendance observée sur la figure 6.2 page 106 de la section 6.2 page 104, à savoir que l'influence du *timing effect* diminue quand le nombre d'objets augmente : en effet, pour un nombre d'agents identiques, l'approximation par l'utilité collective mixte est meilleure au fur et à mesure que le nombre d'objets croît.

De sorte à pouvoir traiter des instances de grande taille, nous choisissons de nous limiter à l'approximation par méthode de Monte-Carlo dans la suite des expérimentations présentées dans ce chapitre.

Comme nous l'avons exposé dans la section 5.3 page 85, il est possible d'estimer précisément la qualité des approximations fournies par cette méthode. Le tableau 6.3 page ci-contre fournit les valeurs de la variance ainsi que de l'intervalle de confiance à 1% de l'estimation pour plusieurs tailles d'instances, et différents nombres de tirages. On constate en particulier que la précision obtenue pour un nombre de tirages $q = 5.10^5$ est très bonne.

La recherche approchée est réalisée à partir de l'algorithme 9 page suivante. Il s'agit d'un algorithme glouton stochastique, version simplifiée de l'algorithme 5 page 97, car la technique de stockage qui figure dans ce dernier n'est pas mise en œuvre ici en raison de ses mauvaises performances. Le calcul de l'utilité collective *ex-post* est réalisé par une approximation par

m	10	20	50	100
pcu	14,5604	19,6127	-	-
variance exacte de $p\hat{c}u$	108,8418	70,9962	-	-
variance estimée de $p\hat{c}u$ ($q = 500$)	108,4361	71,2738	27,5955	13,1702
variance estimée de $p\hat{c}u$ ($q = 5 \cdot 10^5$)	108,8399	71,0030	27,6416	13,0042
$C(1\%)$ ($q = 500$)	1,1223	0,9552	0,59881	0,41575
$C(1\%)$ ($q = 5 \cdot 10^5$)	0,0355	0,0301	0,01897	0,01307

TABLE 6.3 – Méthode de Monte-Carlo – calcul de pcu pour $m = 3$. Valeurs moyennes sur 100 couples (instance,allocation) aléatoires.

Algorithme 9 : Glouton stochastique

Données : Une instance d'un problème de partage *BIRPA*

Résultat : Une bonne allocation selon le critère numérique ou la fonction d'utilité collective choisi

$\pi^* = \langle \pi_1^*, \dots, \pi_m^* \rangle \leftarrow \langle \emptyset, \dots, \emptyset \rangle$;

$pcu^* \leftarrow 0$;

tant que le temps imparti n'est pas écoulé **faire**

$\pi \leftarrow \text{construireAllocation}()$;

$pcu_{app} \leftarrow \text{monteCarloPCU}(\pi)$;

si $pcu_{app} > pcu^*$ **alors**

$pcu^* \leftarrow pcu_{app}$;

$\pi^* \leftarrow \pi$;

renvoyer π^* ;

méthode de Monte-Carlo (fonction *monteCarloPCU*). La procédure *construireAllocation* est définie dans l'algorithme 5 page 97.

Nous présentons l'influence de deux paramètres sur la qualité du résultat produit par l'algorithme de recherche glouton stochastique. Tout d'abord, se pose la question de choisir avec quelle précision la méthode de Monte-Carlo doit être utilisée : un petit nombre de tirages permettra de générer rapidement un grand nombre de solutions, au prix d'une précision médiocre, tandis qu'un grand nombre de tirages autorisera une meilleure précision mais la recherche portera sur un moins grand nombre d'instances pour un temps d'exécution identique.

La figure 6.7 page 116 illustre l'influence de ce paramètre ; lorsque le nombre de tirages est petit, on observe une importante sur-estimation du résultat conduisant à des solutions apparemment meilleures que l'optimum réel ; cette sur-estimation est le fruit de la faible précision de l'approximation, associée à la volonté de l'algorithme de recherche de fournir des valeurs toujours plus élevées : ce dernier maximise donc à la fois l'utilité collective *ex-post* et l'erreur d'approximation ! Il est donc clair que le choix d'un petit nombre de tirages est à proscrire.

En revanche, pour un nombre de tirages plus élevés, même si le phénomène de sur-estimation est bien-sûr toujours présent, les petits intervalles de confiance associé aux approximations (voir tableau 6.3) fournissent une garantie suffisante. On constate que l'algorithme retourne des résultats très proches de l'optimum. On notera toutefois que le temps de calcul plus élevé de

l'approximation pour de grands nombres de tirages implique une progression plus lente de la recherche vers une bonne solution.

Le second paramètre que nous souhaitons illustrer est relatif à la production aléatoire des allocations. Ces allocations sont produites en utilisant une heuristique biaisée (voir section 5.4.2 page 96) ; le biais ϕ est un réel positif : plus celui-ci est petit, plus les allocations sont proches de celle définie par l'heuristique de base ($\phi = 0$) ; quand le biais augmente, les allocations s'en éloignent, jusqu'à devenir totalement aléatoires ($\phi \rightarrow \infty$).

La figure 6.8 page 116 montre que le choix de valeurs extrêmes pour le biais conduit à de mauvais résultats : si le biais est trop petit, la recherche reste « enfermée » autour de l'optimum local que constitue l'heuristique ; si le biais est trop grand, l'espace de recherche n'est plus assez restreint et l'algorithme énumère inutilement des allocations sans intérêt. Les expérimentations ont été conduites avec un grand nombre de valeurs de biais différentes (toutes n'ont pu être représentées sur la figure 6.8 sous peine d'en dégrader considérablement la lisibilité) et montrent que la valeur optimale semble se situer autour de $\phi = 1$.

La figure 6.9 page 117 propose un exemple d'exécution de l'algorithme de recherche approchée sur une instance de grande taille, avec les paramètres définis précédemment réglés sur leur valeur optimale.

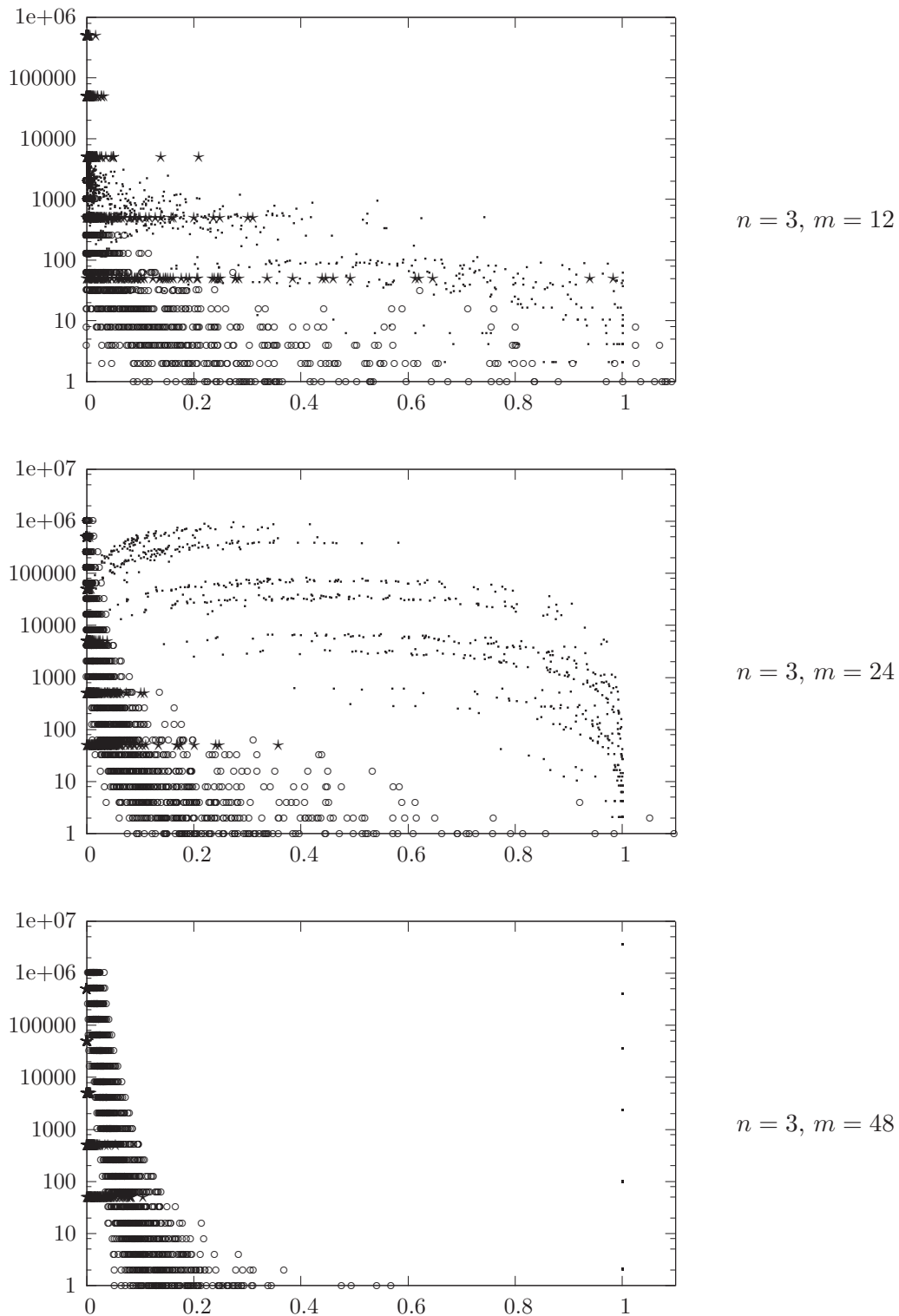


FIGURE 6.6 – Comparaison de trois méthodes d’approximation de l’utilité collective *ex-post*, selon l’erreur relative d’approximation (abscisse) et le nombre d’états de la nature énumérés lors du calcul (ordonnée), pour 100 couples (instance, allocation) aléatoires. Chaque symbole représente un tuple (instance, allocation, méthode d’approximation, paramètre d’approximation).

- Méthode par omission : $\Pr_0 \in \{5 \cdot 10^{-k}, 1 \cdot 10^{-k}, k \in \llbracket 1, 7 \rrbracket\}$
- ★ Méthode de Monte-Carlo : $q \in \{5 \cdot 10^k, k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket\}$
- Utilité collective mixte : $|\mathcal{O}_{ea}| \in \llbracket 1, 12 \rrbracket\}$

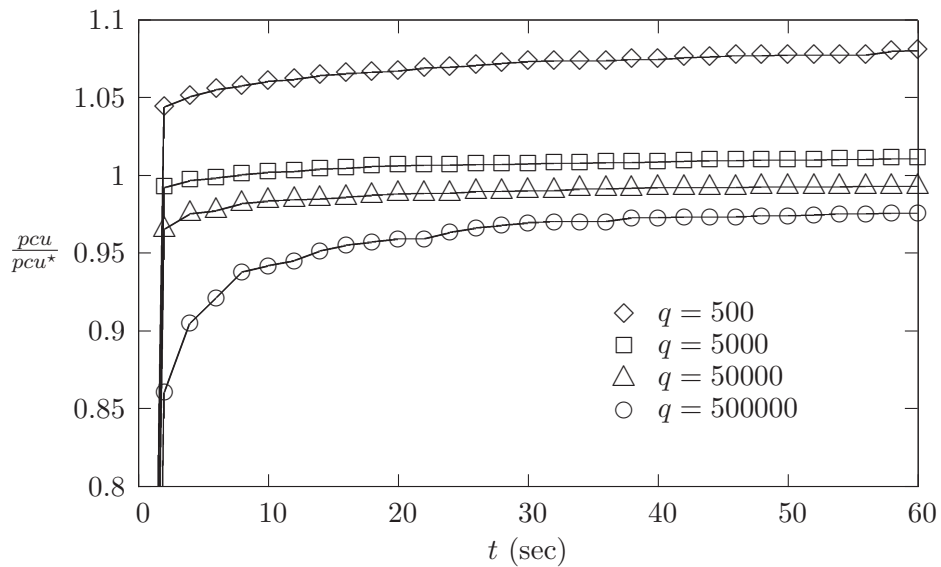


FIGURE 6.7 – Influence de la précision de la méthode de Monte-Carlo (nombre de tirages) pour l’algorithme de recherche glouton stochastique. Moyennes sur 100 instances, $n = 3$, $m = 20$.

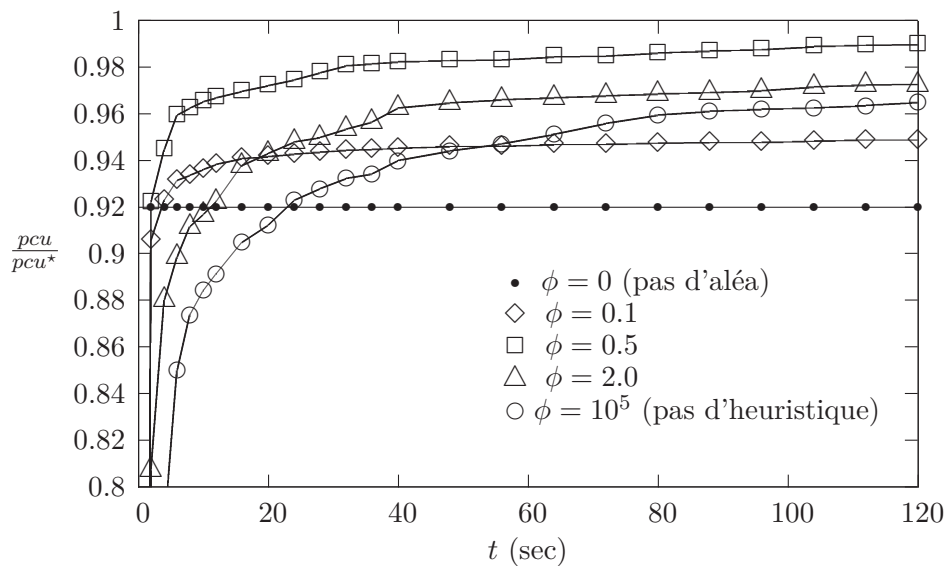


FIGURE 6.8 – Influence de l’aléa dans la génération aléatoire d’allocations pour l’algorithme de recherche glouton stochastique (approximation par méthode de Monte-Carlo). Moyennes sur 100 instances, $n = 3$, $m = 20$.

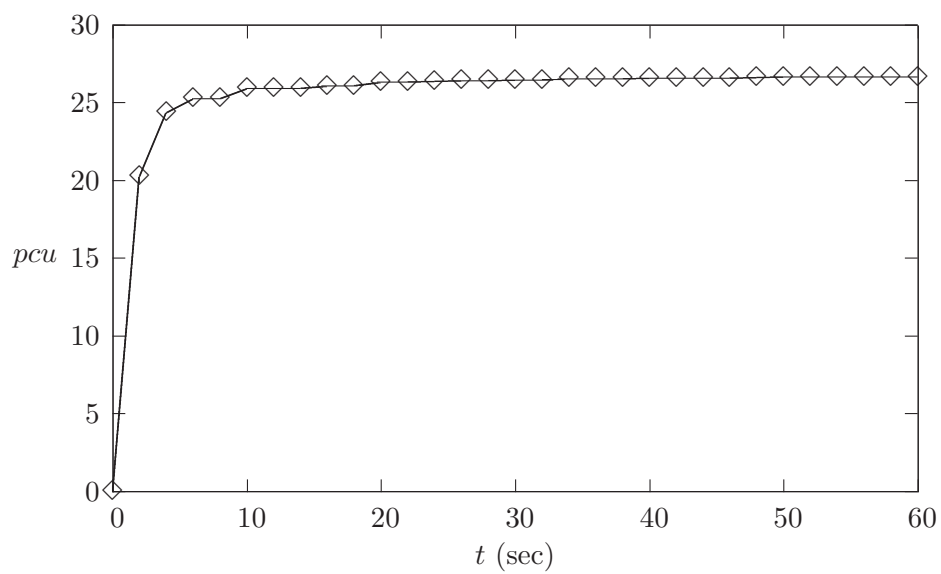


FIGURE 6.9 – Exécution de l’algorithme de recherche glouton stochastique, avec approximation par méthode de Monte-Carlo : évolution de la valeur optimale de l’utilité collective *ex-post* en fonction du temps d’exécution. Moyennes sur 100 instances, $n = 3$, $m = 100$, $q = 500000$, $\phi = 1.0$

6.3.2 Probabilité de juste part proportionnelle

L'extension *ex-post* du critère de juste part proportionnelle (de même que toutes les extensions *ex-post* de critères binaires) est un critère tout à fait intéressant d'un point de vue algorithmique. En effet, au-delà de ses qualités intrinsèques en terme de mesure de l'équité d'une allocation, il fournit une valeur toujours comprise entre 0 et 1. Cela permet donc d'évaluer la qualité d'une allocation sans avoir besoin de la comparer à l'allocation optimale, comme c'est le cas avec l'approche égalitariste *ex-post*. Plus généralement, un algorithme de recherche approchée peut alors être évalué sur de grandes instances, alors qu'il est indispensable avec l'utilité collective *ex-post* de se limiter à des instances dont la taille autorise la recherche exacte de l'allocation optimale comme point de comparaison.

Nous utilisons, comme pour l'optimisation de l'utilité collective *ex-post*, un algorithme de recherche glouton stochastique, avec approximation par méthode de Monte-Carlo (cf. algorithme 9 page 113). Le tableau 6.4 fournit les valeurs de la variance ainsi que de l'intervalle de confiance à 1% de cette méthode pour plusieurs tailles d'instances, et différents nombres de tirages. On constate, de même que dans le cas de l'approximation de l'utilité collective *ex-post*, que la précision obtenue avec un grand nombre de tirages est très bonne.

m	10	20	50	100
Qp^{PFS}	0,3445	0,5356	-	-
variance exacte de $\hat{Q}p^{\text{PFS}}$	0,1515	0,1726	-	-
variance estimée de $\hat{Q}p^{\text{PFS}}$ ($q = 500$)	0,1572	0,1707	0,0875	0,0152
variance estimée de $\hat{Q}p^{\text{PFS}}$ ($q = 5 \cdot 10^5$)	0,1594	0,1727	0,0898	0,0204
$C(1\%)$ ($q = 500$)	0,0432	0,0458	0,0302	0,0103
$C(1\%)$ ($q = 5 \cdot 10^5$)	0,0015	0,0016	0,0014	0,0011

TABLE 6.4 – Méthode de Monte-Carlo – calcul de Qp^{PFS} pour $m = 3$. Valeurs moyennes sur 100 couples (instance,allocation) aléatoires.

Les résultats d'exécution de l'algorithme de recherche approchée sont présentés figure 6.10 page suivante pour des instances de grande taille.

Enfin, on constate expérimentalement que la probabilité de juste part proportionnelle optimale est largement dépendante du nombre d'objets : plus celui-ci est faible devant le nombre d'agents, plus l'indivisibilité de la ressource s'oppose à l'équité du partage. La figure 6.11 page ci-contre illustre cela, en présentant, pour divers nombres d'agents et d'objets, la valeur optimale (ou sous-optimale quand le nombre d'objet est grand) moyenne de la probabilité de juste part proportionnelle.

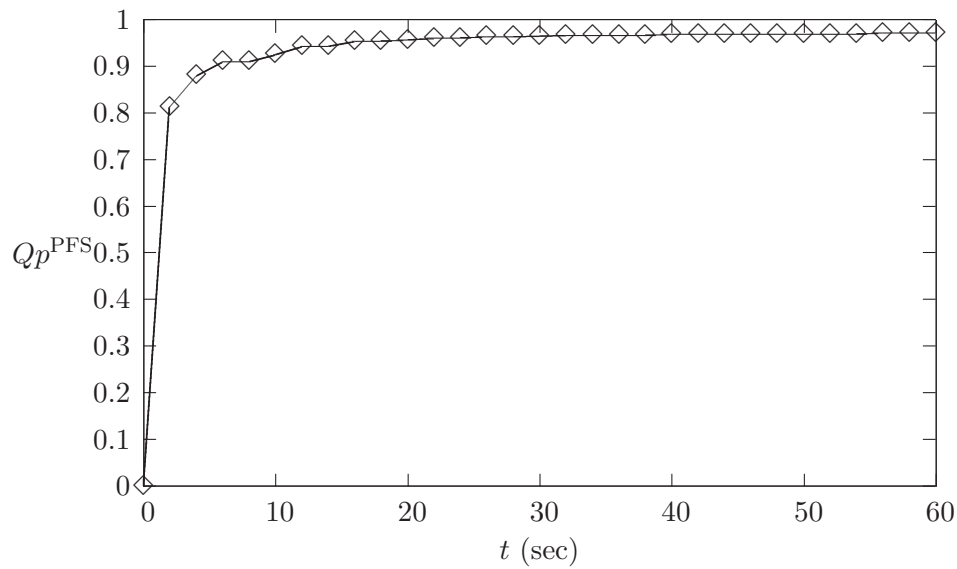


FIGURE 6.10 – Exécution de l’algorithme de recherche glouton stochastique, avec approximation par méthode de Monte-Carlo : évolution de la valeur optimale de la probabilité de juste part proportionnelle en fonction du temps d’exécution. Moyennes sur 100 instances, $n = 3$, $m = 100$.

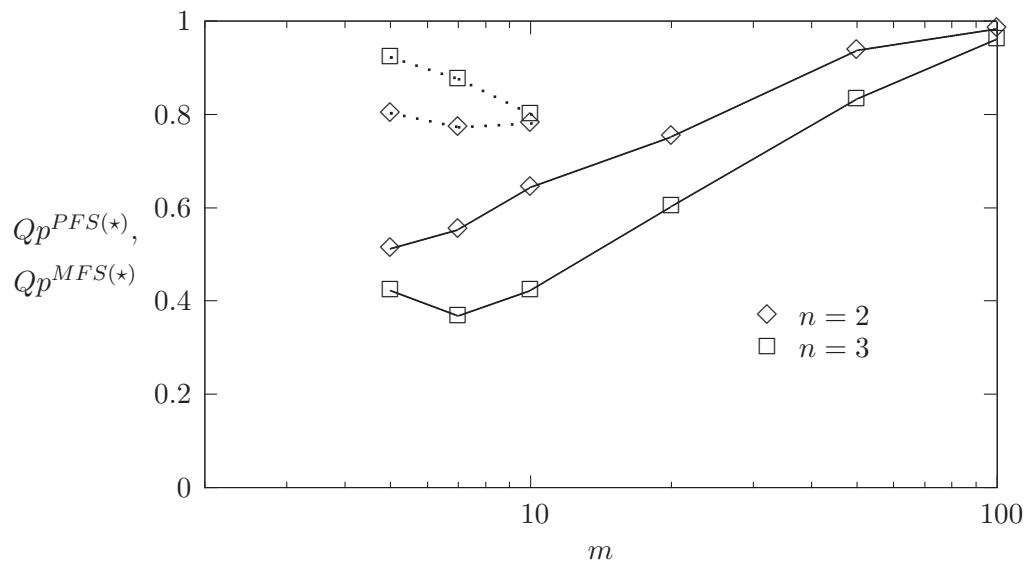


FIGURE 6.11 – Optimum ou sous-optimum de la probabilité de juste part proportionnelle (Qp^{PFS} , traits pleins) et maximin (Qp^{MFS} , traits pointillés) pour plusieurs nombre d’agents et d’objets, moyenné sur 100 instances.

$m \leq 20$: résultat optimal retourné par un algorithme de recherche exacte (branch & bound)

$m \geq 50$: résultat sous-optimal tel que retourné par l’algorithme de résolution approchée (temps d’exécution limité à 120 s)

6.3.3 Probabilité de juste part maximin

La probabilité de juste part maximin est également un critère très intéressant. De même que la probabilité de juste part proportionnelle, son appartenance à l'intervalle $[0, 1]$ permet une évaluation directe d'une allocation sans qu'il soit nécessaire de connaître l'allocation optimale pour servir de comparaison. En fait, la valeur optimale Qp^{MFS^*} est moins dépendante que la valeur Qp^{PFS^*} de la taille (nombre d'objets et d'agents) des instances considérées, comme l'illustre partiellement la figure 6.11 page précédente (notons que, même si les valeurs de la probabilité de juste part maximin pour des instances de grande taille ne peuvent être calculées, même de façon approchée, on sait toutefois que $Qp^{\text{MFS}^*} \geq Qp^{\text{PFS}^*}$); l'argument précédent est donc encore plus pertinent dans le cadre de la juste part maximin.

Néanmoins, l'optimisation de la probabilité de juste part maximin constitue un challenge algorithmique, étant donné le nombre de sous-problèmes de partage à résoudre pour pouvoir la calculer. La probabilité de juste part maximin-proportionnelle constitue une approximation qui nécessite un nombre inférieur de résolutions de sous-problèmes, nombre qui reste très grand dès que la taille du problème augmente si l'on souhaite conserver une précision d'approximation correcte.

6.4 Conclusion

Ce chapitre était consacré à la présentation de résultats expérimentaux. Ces résultats peuvent être divisés en deux catégories. Les premiers résultats proposés dans ce chapitre constituent une illustration graphique originale du *timing effect*, montrant dans quel cas son influence se fait plus ou moins importante.

Les autres résultats (les plus nombreux) permettent d'évaluer la qualité des algorithmes que nous avons introduits au chapitre précédent. L'algorithme de recherche exact fournit de bons résultats pour l'optimisation de l'utilité collective *ex-post* pour des instances de taille modeste. Quand la taille des instances augmente, son efficacité décroît rapidement, et il devient indispensable d'utiliser un algorithme de recherche approchée. Ce dernier donne des résultats très satisfaisants, même pour de grandes instances. Dans le cas où l'utilisation de l'algorithme de recherche approchée devient indispensable, le choix comme critère d'évaluation de l'extension *ex-post* d'un critère binaire (par exemple la probabilité de juste part proportionnelle) devient intéressant : en effet, cette dernière étant toujours inférieure à 1, on dispose d'une borne supérieure qui permet d'estimer la qualité de la solution obtenue. Cela n'est pas possible avec l'utilité collective *ex-post* pour laquelle on ne dispose pas de point de comparaison possible.

On notera que la probabilité de juste part maximin constitue un critère attrayant sur le papier, en particulier pour sa prise en compte de l'indivisibilité de la ressource à partager (voir en particulier la section 2.2.4 page 42). Néanmoins la complexité de son calcul rend très difficile sa mise en œuvre, et c'est pour cette raison que nous ne sommes pas en mesure de proposer des résultats expérimentaux concernant ce critère.

Conclusion générale

Les problèmes de partage constituent une classe particulière de problèmes de décision collective, dans lesquels la justice sociale occupe une place essentielle. Les travaux de Bouveret (2007) constituent un rapprochement des points de vue économique et social d'une part, et algorithmique de l'autre, sur de tels problèmes.

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont été conduits dans cette même optique, avec la volonté de prendre en compte un aspect supplémentaire des applications réelles : la présence de risque. Le problème de partage en présence de risque ainsi obtenu présente un intérêt double.

Un intérêt théorique, tout d'abord. En effet, s'agissant d'un problème non encore étudié pour ses aspects computationnels dans le cadre de biens indivisibles, une modélisation générale s'imposait. Nous avons proposé une telle modélisation, sous la forme d'une extension des problèmes de partage sans risque. D'autre part, nous avons introduit une extension au risque des critères d'évaluation classiques, à partir d'une généralisation du concept de critère d'évaluation numérique dans le cadre sans risque.

Cette extension se révèle complexe car les problèmes considérés s'inscrivent dans le cadre des problèmes de décision collective en présence de risque et soulèvent ainsi la question bien connue du *timing effect*. Cette question peut être résolue en choisissant le point de vue des économistes et en s'interrogeant sur le type de société que l'on désire : l'égalité entre les individus doit-elle être assurée sur les opportunités qu'offre la société, ou bien sur les revenus qu'elle procure ? D'un point de vue plus pratique, la question revient à se demander à quel moment les individus ou agents concernés par la décision ou le partage doivent évaluer leur situation : avant la résolution du risque, alors qu'ils n'ont qu'une vision probabiliste de l'aléa, ou bien après, une fois connu l'état de la nature qui se réalise. On parlera respectivement d'approche *ex-ante* ou *ex-post* selon le point de vue adopté.

Harsanyi (1955) montre que, dès lors que l'équité entre les individus devient un critère important, la qualité d'une décision ou d'un partage varie selon que l'on adopte l'approche *ex-ante* ou *ex-post*. En particulier, le meilleur choix *ex-ante* et le meilleur choix *ex-post* seront *a priori* distincts, d'où l'importance de se positionner par rapport à ces deux approches.

L'introduction du risque présente d'autre part un intérêt algorithmique. En effet, l'explosion combinatoire associée à la structure des problèmes de partage soulève de nombreuses difficultés algorithmiques. Cet aspect combinatoire est encore renforcé par l'introduction du risque, en particulier lorsque celui-ci porte sur les objets du partage.

Nous avons choisi de travailler sur une version simplifiée du problème de partage de biens indivisibles en présence de risque ; nous avons donc proposé un modèle simplifié de problèmes,

ditions problèmes de partage de biens indivisibles risqués avec préférences additives (problème de partage *BIRPA*), qui cristallise néanmoins les difficultés algorithmiques du problème général étudié. Les principales hypothèses simplificatrices portent d'une part sur le risque, en limitant sa portée aux seuls objets et en supprimant les dépendances conditionnelles, et imposent d'autre part une expression additive des préférences des agents.

Nous avons travaillé sur trois critères d'évaluation : l'utilité collective égalitariste classique, et les critères de juste part proportionnelle et maximin. Nous avons montré que, quel que soit le critère choisi, la résolution et l'optimisation *ex-ante* se ramènent à la résolution et l'optimisation d'un problème sans risque équivalent. Quand l'approche *ex-post* est choisie, une telle réduction à un problème sans risque apparaît impossible. Le simple calcul de la valeur du critère pour une allocation donnée, sans même parler de l'optimisation dans lequel il s'insère, impose de considérer un nombre exponentiel d'états de la nature.

Nous avons proposé un algorithme de recherche exacte de type branch & bound, en vue d'optimiser l'utilité collective *ex-post*. Cet algorithme présente plusieurs spécificités qui le rendent performant sur des instances de taille petite et moyenne. En revanche, sur des instances de grande taille, la difficulté du problème rend un tel algorithme inefficace. Il a donc été nécessaire de proposer un algorithme de recherche approchée qui puisse prendre le relais de la recherche exacte quand la taille des instances augmente ; cet algorithme est fondé sur un algorithme glouton stochastique, dans lequel le critère à optimiser est approché par la méthode de Monte-Carlo. Cet algorithme donne de très bons résultats, même sur des instances de grande taille, à la fois pour l'optimisation de l'utilité collective égalitariste et pour l'optimisation de la probabilité de juste part proportionnelle. Toutefois, la définition de la juste part maximin, plus adaptée au partage de biens indivisibles que la juste part proportionnelle, en fait un critère algorithmiquement très complexe, et son calcul reste extrêmement long.

Perspectives

Les perspectives envisageables à la suite de ce travail sont nombreuses, en particulier au vu de l'étendue des domaines relatifs aux problèmes de partage. Nous présentons les principales ci-dessous.

Du point de vue de la modélisation, le problème de partage *BIRPA* que nous avons étudié constitue un cas particulier de problème de partage. Même si la plupart des hypothèses sont des hypothèses simplificatrices dont le relâchement n'entraîne pas de changement majeur dans la structure du problème ni dans l'algorithmique associée, deux d'entre elles restent essentielles pour les travaux proposés dans cette thèse : il s'agit de l'hypothèse de représentation additive des préférences ainsi que de l'hypothèse d'indépendance conditionnelle des probabilités vis-à-vis de la décision.

Les caractéristiques de certaines applications réelles invitent les agents à l'expression de dépendances préférentielles entre les objets. C'est par exemple le cas des systèmes d'observation proposant des prises de vue stéréoscopiques : recevoir seulement l'une des deux images ne présente pas d'intérêt ; seule la possession des deux images conduit à une utilité importante pour l'agent concerné. Une structure additive de préférence ne permet pas de représenter de telles dépendances.

Relâcher cette hypothèse d'additivité des préférences imposerait d'une part une refonte algorithmique complète des méthodes de résolution proposées ici. D'autre part se poserait le

problème de la représentation alternative à adopter. L'utilisation d'une représentation compacte de préférences semble indispensable au vu de la combinatoire associée à l'ensemble des parts d'objets ; apparaît alors une piste de travail particulièrement intéressante : comment représenter de façon compacte les préférences vis-à-vis d'un ensemble d'objets risqués ? Peut-on adapter au cadre risqué les représentations compactes de préférences conçues pour les problèmes de partage sans risque (comme par exemple les CI-nets, introduits par Bouveret *et al.* (2009)) ?

Du point de vue algorithmique, on aimerait pouvoir mettre en relation les résultats de nos algorithmes avec la classe de complexité du problème. Malgré nos efforts, l'appartenance à une classe de complexité n'a pu être démontrée.

Enfin, parmi tous les critères envisagés, la probabilité de juste part maximin se révèle extrêmement pertinente dans le cas des problèmes de partage de biens indivisibles, comme nous l'avons montré : son calcul et sa mise en oeuvre algorithmique restent encore inaboutis, et constituent un challenge tout à fait intéressant.

Nous avons travaillé dans cette thèse sur des problèmes de partage centralisés, où l'entité décisionnelle possède à elle seule l'intégralité pouvoir de décision. D'autres cadres de partage existent et leur étude dans un contexte risqué n'a pas, à notre connaissance, été réalisée.

C'est par exemple le cas de l'étude de problèmes de partage décentralisés, où la négociation entre les agents prend un rôle prépondérant. De tels contextes de partage pourront par exemple permettre la prise en compte d'un comportement face au risque différent selon les agents, ce qui est impossible avec l'approche *ex-post* dans le cas de partages centralisés.

La négociation dans les problèmes de partage a été largement étudiée dans le contexte non risqué, en particulier par Chevalyere *et al.* (2004, 2005) du point de vue algorithmique ; Wooldridge et Parsons (2000) s'intéressent quant à eux à la constitution d'un langage de négociation, et Sandholm (1998) s'interroge sur la convergence de diverses méthodes de négociations et leur optimalité. L'extension de l'ensemble de ces travaux au contexte risqué constitue une perspective intéressante, d'autant plus qu'un tel cadre de partage apparaît de plus en plus comme une nécessité dans les applications réelles.

Bibliographie

- Ahmet ALKAN, Gabrielle DEMANGE et David GALE : Fair allocation of indivisible goods and criteria of justice. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, pages 1023–1039, 1991.
- Maurice ALLAIS : Le comportement de l’homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l’école Américaine. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 21(4):503–546, 1953. ISSN 0012-9682.
- Kenneth J. ARROW : A difficulty in the concept of social welfare. *The Journal of Political Economy*, 58(4):328–346, 1950.
- Kenneth J. ARROW, Amartya K. SEN et Kotaro SUZUMURA, éditeurs. *Handbook of Social Choice and Welfare Volume 1*. Numéro 19 in Handbook in Economics. North-Holland Elsevier, 2002.
- Anthony Barnes ATKINSON : On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, 2:244–263, 1970.
- Fahiem BACCHUS et Adam GROVE : Graphical models for preference and utility. In Philippe BESNARD et Steve HANKS, éditeurs : *Proceedings of the 11th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-95)*, pages 3–10, Montréal, Canada, août 1995. Morgan Kaufmann.
- Nikhil BANSAL et Maxim SVIRIDENKO : The santa claus problem. In *Proceedings of the thirty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 31–40. ACM, 2006.
- John J. BARTHOLDI, Craig A. TOVEY et Michael A. TRICK : Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election. *Social Choice and Welfare*, 6:157–165, 1989.
- Elchanan BEN-PORATH, Itzhak GILBOA et David SCHMEIDLER : On the measurement of inequality under uncertainty. *Journal of Economic Theory*, 75(1):194–204, 1997.
- Miquel BOFILL, Dídac BUSQUETS et Mateu VILLARET : A declarative approach to robust weighted max-sat. In *Proceedings of the 12th international ACM SIGPLAN symposium on Principles and practice of declarative programming*, pages 67–76. ACM, 2010.
- Craig BOUTILIER et Holger H. HOOS : Bidding languages for combinatorial auctions. In Bernhard NEBEL, éditeur : *Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01)*, pages 1211–1217, Seattle, Washington, USA, août 2001. Morgan Kaufmann.
- Sylvain BOUVERET : *Allocation et partage équitables de ressources indivisibles : modélisation, complexité et algorithmique*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2007.

- Sylvain BOUVERET, Ulle ENDRISS et Jérôme LANG : Conditional importance networks : A graphical language for representing ordinal, monotonic preferences over sets of goods. *In Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'09)*, pages 67–72, Pasadena, California, July 2009.
- Sylvain BOUVERET et Jérôme LANG : Efficiency and envy-freeness in fair division of indivisible goods : Logical representation and complexity. *In Leslie Pack Kaelbling et Alessandro Saffiotti, éditeurs : Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-05)*, Edinburgh, Scotland, août 2005. Professional Book Center.
- Denis BOUYSSOU et Philippe VINCKE : Relations binaires et modélisation des préférences. *In Denis BOUYSSOU, Didier DUBOIS, Marc PIRLOT et Henri PRADE, éditeurs : Concepts et Méthodes pour l'Aide à la Décision*, volume 1, chapitre 2. Lavoisier, 2006.
- Steven J. BRAMS et Alan D. TAYLOR : *Fair Division — From Cake-cutting to Dispute Resolution*. Cambridge University Press, 1996.
- Darius BRAZIUNAS et Craig BOUTILIER : Local utility elicitation in GAI models. *In Proceedings of the Twenty-first Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 42–49. Citeseer, 2005.
- John L. BRESINA : Telescope loading : A problem reduction approach. *In Artificial Intelligence, Robotics, and Automation for Space Symposium*, volume 1, pages 415–418, 1994.
- John L. BRESINA : Heuristic-Biased Stochastic Sampling. *In Proceedings of the 13th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-96)*, pages 271–278, Portland, OR, 1996.
- John BROOME : Uncertainty and fairness. *The Economic Journal*, 94(375):624–632, 1984. ISSN 0013-0133.
- Eric BUDISH : The combinatorial assignment problem : Approximate competitive equilibrium from equal incomes. *University of Chicago, Booth School of Business, Unpublished mimeo*, 2009.
- Georg CANTOR : *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Dover Publications, New York, 1915.
- Yann CHEVALEYRE, Ulle ENDRISS, Sylvia ESTIVIE et Nicolas MAUDET : Multiagent resource allocation with k -additive utility functions. *In Proc. DIMACS-LAMSADE Workshop on Computer Science and Decision Theory*, volume 3 de *Annales du LAMSADE*, pages 83–100, 2004.
- Yann CHEVALEYRE, Ulle ENDRISS et Jérôme LANG : Expressive power of weighted propositional formulas for cardinal preference modelling. *In Proc. of KR-06*, 2006.
- Yann CHEVALEYRE, Ulle ENDRISS, Jérôme LANG et Nicolas MAUDET : Negotiating over small bundles of resources. *In Frank Dignum, Virginia Dignum, Sven Koenig, Sarit Kraus, Munindar P. Singh et Michael Wooldridge, éditeurs : Proceedings of the 4th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-05)*, pages 296–302, Utrecht, The Netherlands, juillet 2005. ACM.
- Yann CHEVALEYRE, Ulle ENDRISS, Jérôme LANG et Nicolas MAUDET : A short introduction to computational social choice. *SOFSEM 2007 : Theory and Practice of Computer Science*, pages 51–69, 2007.

- Soo Hong CHEW et Larry G. EPSTEIN : A unifying approach to axiomatic non-expected utility theories. *The Journal of Economic Perspectives*, 49(2):207–240, 1989.
- Michèle COHEN : Security level, potential level, expected utility : A three-criteria decision model under risk. *Theory and Decision*, 33(2):101–134, 1992. ISSN 0040-5833.
- Richard CORNES et Todd SANDLER : *The Theory of Externalities, Public Goods, and Club Goods*. Cambridge University Press, 1986.
- Peter CRAMTON, Yoav SHOHAM et Richard STEINBERG, éditeurs. *Combinatorial Auctions*. MIT Press, 2006.
- Hugh DALTON : The measurement of the inequality of incomes. *The Economic Journal*, 30 (119):348–361, 1920.
- Gerard DEBREU *et al.* : Topological methods in cardinal utility theory. *Mathematical methods in the social sciences*, 1959:16–26, 1960.
- Karine DESCHINKEL : *Régulation du Trafic aérien par Optimisation Dynamique des Prix du Réseau*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 2001.
- Peter A. DIAMOND : Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparison of utility : Comment. *The Journal of Political Economy*, 75(5):765, 1967. ISSN 0022-3808.
- Larry G. EPSTEIN et Uzi SEGAL : Quadratic social welfare functions. *Journal of Political Economy*, pages 691–712, 1992.
- Samir ESSID : Choice under risk with certainty and potential effects : A general axiomatic model. *Mathematical Social Sciences*, 34(3):223–247, 1997. ISSN 0165-4896.
- Hélène FARGIER, Jérôme LANG, Michel LEMAÎTRE et Gérard VERFAILLIE : Partage équitable de ressources communes : (1) un modèle général et son application au partage de ressources satellitaires. *Technique et Science Informatiques*, 23(9):1187–1217, 2004.
- William FELLNER : *Probability and profit : a study of economic behavior along Bayesian lines*. Irwin series in economics. R.D. Irwin, 1965.
- Peter C. FISHBURN : *Utility Theory for Decision-Making*. John Wiley & Sons, New York, 1970.
- János FODOR et Marc ROUBENS : *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- Duncan K. FOLEY : Resource allocation and the public sector. *Yale Economic Essays*, 7(1):45–98, 1967.
- Thibault GAJDOS et Éric MAURIN : Unequal uncertainties and uncertain inequalities : an axiomatic approach. *Journal of Economic Theory*, 116(1):93–118, 2004.
- Thibault GAJDOS et Jean-Marc TALLON : Fairness under uncertainty. *Economics Bulletin*, 4 (18):1–7, 2002.
- Allan GIBBARD : Manipulation of voting schemes : a general result. *Econometrica : journal of the Econometric Society*, pages 587–601, 1973.

- Itzhak GILBOA : A combination of expected utility and maxmin decision criteria. *Journal of Mathematical Psychology*, 32(4):405–420, 1988. ISSN 0022-2496.
- Corrado GINI : Measurement of inequality of incomes. *The Economic Journal*, pages 124–126, 1921. ISSN 0013-0133.
- Christophe GONZALES et Patrice PERNY : GAI Networks for Utility Elicitation. In Didier DUBOIS, Christopher A. WELTY et Mary-Anne WILLIAMS, éditeurs : *Proceedings of the 9th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-04)*, pages 224–234, Whistler, Canada, juin 2004. AAAI Press.
- William Moore GORMAN : The structure of utility functions. *The Review of Economic Studies*, 35(4):367–390, 1968.
- Peter HAMMOND : *Ex-post optimality as a dynamically consistent objective for collective choice under uncertainty*. Incomplete Reference, 1983.
- John C. HARSANYI : Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility. *Journal of political economy*, 63:309–321, 1955.
- Alan HOLLAND et Barry O’SULLIVAN : Robust solutions for combinatorial auctions. In *Proceedings of the 6th ACM conference on Electronic commerce*, pages 183–192. ACM, 2005.
- Jean-Yves JAFFRAY : Choice under risk and the security factor : An axiomatic model. *Theory and Decision*, 24(2):169–200, 1988. ISSN 0040-5833.
- Geert M. JONKER, John-Jules Ch. MEYER et Frank P. M. DIGNUM : A market mechanism for airport traffic planning. In Carlos BENTO, Amílcar CARDOSO et Gaël DIAS, éditeurs : *Proceedings of the 12th Portuguese Conference on Artificial Intelligence (EPIA-05)*, Lecture Notes in Computer Science, pages 500–511, Covilhã, Portugal, décembre 2005. Springer-Verlag.
- Daniel KAHNEMAN et Amos TVERSKY : Prospect theory : An analysis of decisions under risk. *Econometrica*, pages 263–291, 1979.
- Ralph L. KEENEY et Howard RAIFFA : *Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Tradeoffs*. John Wiley and Sons, 1976.
- Frank H. KNIGHT : Risk, Uncertainty and Profit, 1921. *Boston and New York*, 1921.
- Serge-Christophe KOLM : *Justice et Équité*. Cepremap, CNRS Paris, 1972. (english translation : Justice and Equity, MIT Press 1998.).
- Kathrin KONCZAK et Jérôme LANG : Voting procedures with incomplete preferences. In *Proc. IJCAI-05 Multidisciplinary Workshop on Advances in Preference Handling*, volume 20, 2005.
- David H. KRANTZ, R. Duncan LUCE, Patrick SUPPES et Amos TVERSKY : *Foundations of measurement, vol. 1 : Additive and polynomial representations*. New York : Academic, 1971.
- Jean-Jacques LAFFONT : *Cours de théorie microéconomique Vol. 2, économie de l’incertain et de l’information*. Economica, 1991.
- Jérôme LANG : Logical preference representation and combinatorial vote. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 42(1):37–71, 2004.

- Jérôme LANG : Représentation logique de préférences. In Denis BOUYSSOU, Didier DUBOIS, Marc PIRLOT et Henri PRADE, éditeurs : *Concepts et Méthodes pour l'Aide à la Décision*, volume 1, chapitre 7. Lavoisier, 2006.
- Michel LEMAÎTRE, Gérard VERFAILLIE, Frank JOUHAUD, Jean-Michel LACHIVER et Nicolas BATAILLE : Selecting and scheduling observations of agile satellites. *Aerospace Science and Technology*, 6:367–381, 2002.
- Michel LEMAÎTRE, Gérard VERFAILLIE et Nicolas BATAILLE : Exploiting a common property resource under a fairness constraint : a case study. In *Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-99)*, pages 206–211, Stockholm, Sweden, juillet 1999.
- Sarah LICHTENSTEIN et Paul SLOVIC : *The construction of preference*. Cambridge University Press, 2006.
- Richard LIPTON, Evangelos MARKAKIS, Elchanan MOSSEL et Amin SABERI : On approximately fair allocations of divisible goods. In *Proceedings of the 5th ACM Conference on Electronic Commerce (EC-04)*, New York, NY, mai 2004. ACM.
- Tyler LU et Craig BOUTILIER : The unavailable candidate model : A decision-theoretic view of social choice. In *Proceedings of the Eleventh ACM conference on Electronic Commerce*, Cambridge, MA, June 2010.
- R. Duncan LUCE : Semiorders and a theory of utility discrimination. *Econometrica*, 24(2):178–191, avril 1956.
- Mark J. MACHINA : "Expected Utility" Analysis without the Independence Axiom. *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 50(2):277–323, 1982. ISSN 0012-9682.
- Mark J. MACHINA : Choice under uncertainty : Problems solved and unsolved. *The Journal of Economic Perspectives*, 1(1):121–154, 1987.
- Jean-Luc MARICHAL : *Aggregation Operators for Multicriteria Decision Aid*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de l'Université de Liège, 1999.
- Harry MARKOWITZ : The utility of wealth. *Journal of Political Economy*, 60:151–158, 1952.
- Albert W. MARSHALL, Ingram OLKIN et Barry C. ARNOLD : *Inequalities : theory of majorization and its applications*. Springer Verlag, 2010.
- Hervé MOULIN : *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, 1988.
- Hervé MOULIN : *Fair Division and Collective Welfare*. MIT Press, 2003.
- Roger B. MYERSON : Utilitarianism, egalitarianism, and the timing effect in social choice problems. *Econometrica*, 49(4):883–897, 1981.
- Judea PEARL : *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems : Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1988. ISBN 0-934613-73-7.
- Patrice PERNY et Bernard ROY : The use of fuzzy outranking relations in preference modelling. *Fuzzy sets and systems*, 49:33–53, 1992.

- Arthur Cecil PIGOU : *Wealth and welfare*. Macmillan and co., limited, 1912.
- John QUIGGIN : A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 3(4):323–343, 1982. ISSN 0167-2681.
- John RAWLS : *A Theory of Justice*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1971. Traduction française disponible aux éditions du Seuil.
- Kevin W. S. ROBERTS : Interpersonal comparability and social choice theory. *Review of Economic Studies*, 47:421–439, 1980.
- Tuomas W. SANDHOLM : Contract types for satisficing task allocation : I. theoretical results. In Sandip SEN, éditeur : *Proceedings of the AAAI Spring Symposium : Satisficing Models*, pages 68–75, Menlo Park, California, 1998. AAAI Press.
- Tuomas W. SANDHOLM : An algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions. In Thomas DEAN, éditeur : *Proceedings of the 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-99)*, pages 452–547, Stockholm, Sweden, juillet 1999. Morgan Kaufmann.
- Tuomas W. SANDHOLM et Craig BOUTILIER : Preference elicitation in combinatorial auctions. In Peter CRAMTON, Yoav SHOHAM et Richard STEINBERG, éditeurs : *Combinatorial auctions*, chapitre 10. MIT Press, 2006.
- Klaus R. SCHERER : What are emotions? and how can they be measured? *Social Science Information*, 44:695–729, 2005.
- Amartya K. SEN : *Collective Choice and Social Welfare*. North-Holland, 1970.
- Amartya K. SEN et Bernard WILLIAMS : *Utilitarianism and beyond*. Cambridge Univ Pr, 1982.
- Hugo STEINHAUS : The problem of fair division. *Econometrica*, 16(1):101–104, janvier 1948.
- Jan TINBERGEN : *Redelijke Inkomensverdeling*. N. V. DeGulden Pers., Haarlem, 1953.
- Joel UCKELMAN : *More Than the Sum of Its Parts. Compact Preference Representation of Combinatorial Domains*. Thèse de doctorat, Universiteit van Amsterdam, 2008.
- Pascal VAN HENTENRYCK et Laurent MICHEL : *Constraint-based local search*. The MIT Press, 2009.
- Philippe VINCKE : *L'aide Multicritère à la Décision*. Ellipses, Bruxelles, 1989.
- John von NEUMANN et Oscar MORGENSTERN : *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1947.
- Toby WALSH : Uncertainty in preference elicitation and aggregation. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, volume 22, page 3. Menlo Park, CA ; Cambridge, MA ; London ; AAAI Press ; MIT Press ; 1999, 2007.
- Michael WOOLDRIDGE et Simon PARSONS : Languages for negotiation. In *ECAI*, pages 393–400. Citeseer, 2000.

Ronald R. YAGER : On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.

H. Peyton YOUNG : *Equity in Theory and Practice*. Princeton University Press, 1994.

Modélisation, représentation et résolution de problèmes de partage équitable de biens indivisibles soumis au risque.

Le développement et l'utilisation de systèmes complexes multi-utilisateurs, ou encore la mise en réseau de systèmes d'observation ou d'information pose des problèmes complexes de partage de ressources entre les utilisateurs. La particularité de ces systèmes, impliquant plusieurs utilisateurs humains ou entités organisationnelles est que le partage des ressources doit satisfaire les préférences souvent antagonistes des utilisateurs et répondre à des exigences d'équité. Ce travail de thèse a pour objet l'étude des problèmes de partage de ressources indivisibles entre des agents ayant des préférences complexes sur ces ressources. Nous nous intéressons plus particulièrement à la modélisation de problèmes de partage en univers risqué. En effet, dans de nombreux problèmes d'allocation de ressources réels, la part revenant réellement à chaque agent après le partage de la ressource dépend de facteurs exogènes. C'est le cas par exemple dans les systèmes d'observation (satellites, capteurs embarqués,...), dans lesquels la réalisation d'une requête donnée dépend non seulement des conditions climatiques sur le secteur à observer, mais aussi du bon fonctionnement du capteur, de l'absence de brouillage du signal, etc. L'introduction de risque dans les problèmes de partage implique la redéfinition des notions classiques de choix social (utilité, absence d'envie, ...), et l'agrégation collective des préférences des agents s'en trouve compliquée. Au cours de ce travail de thèse, nous nous sommes tout d'abord intéressés à l'étude de cette extension au risque du formalisme associé aux problèmes de partage classiques : nous proposons un modèle simple de problèmes de partages de biens indivisibles en présence de risque, toutefois assez général pour rester proche des applications réelles considérées, et nous introduisons une extension générale des méthodes d'évaluation non risquées pour de tels partages. La seconde partie de ce travail de thèse porte sur l'algorithmique associée à ces problèmes, dont la résolution est notablement complexifiée par la présence de ressources risquées. Pour plusieurs critères d'évaluation (choisis car visant à garantir une certaine équité des solutions qu'ils suggèrent), nous proposons des algorithmes de résolution exacte et approchée des problèmes de partage associés.

Mots clés : Partage équitable, choix social, décision collective, risque, timing effect, algorithmique, programmation par contraintes, méthode de Monte-Carlo.

Fair allocation of risky indivisible items : representing, modeling and solving.

The development and use of complex multi-user systems, or the networking of observation or information systems raises complex resource allocation problems. The particularity of these systems, which involve several human users or organisational entities, rests in the fact that the share of resources must satisfy the often conflicting preferences of users and comply with equity exigences. This thesis deals with the problem of fairly allocating indivisible goods to a set of agents having complex preferences over these goods. We are more particularly interested in the modeling of fair allocation problems in a risky setting. In numerous real-world resource allocation problems, the actual share each agent receives after the allocation often depends on exogenous factors. This is for instance the case with the observation systems (satellites, embedded sensors, etc.) where the realisation of a request not only depends on weather conditions over the observation area, but also on the potential sensor malfunction, on the absence of jamming of the signal, etc. Introducing the risk in allocation problems implies the redefinition of classical social choice notions such as utility or envy-freeness for instance, and the collective aggregation of agents preferences becomes more complicated. We have studied in this thesis the extension of allocation problem formalism to a risky setting : we present a simple model for risky indivisible goods allocation problems, yet general enough to encompass most of the real-world applications, and we introduce a general extension of risk-free evaluation methods for such allocations. The second part of the work concerns the algorithmical issues related to these problems, whose resolution is significantly complexified because of the risky setting. For several evaluation criteria (selected for the equity of the solutions they suggest) we present both exact and approached resolution algorithms for the related allocation problems.

Keywords : Fair allocation, social choice, collective decision-making, algorithmics, constraint programming, Monte-Carlo method.